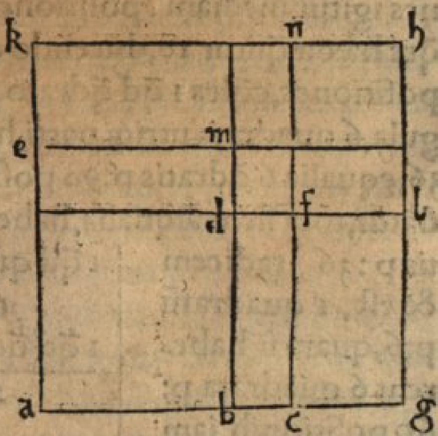
7 q̄d q̄d.cum cubis æqualia numero
8 q̄d q̄d.cum rebus æqualia numero
9 q̄d q̄d.cum q̄d.æqualia cub.& numero
10 q̄d q̄d.cum q̄d.æqualia rebus & numero
11 q̄d q̄d. cum q̄d.& rebus æqualia numero
12 q̄d q̄d.cum q̄d.& cubis æqualia numero
13 q̄d q̄d.cum q̄d.& numero æqualia cubis
14 q̄d quad.cum quad.& numero æqualia rebus
15 q̄d quad.cum numero æqualia cubis & quad.
16 q̄d quad.cum numero æqualia cubis
17 q̄d quad.cum numero æqualia rebus & quad.
18 q̄d quad.cum numero æqualia rebus
19 q̄d quad.cum cubis & numero æqualia quad.
20 q̄d quad.cum rebus & numero æqualia quad.

In his igitur omnibus capitulis, quæ quidem ſunt generaliſsima, ut reliqua omnia ſexaginta ſeptem ſuperiora, oportet reducere capitula, in quibus ingreditur cubus, ad capitula, in quibus ingreditur res ut ſeptimum ad quartum, & ſecundum ad primum, deinde quæremus demonſtrationem hoc modo.

DEMONSTRATIO.

Sit quadratum a f, diuiſum in duo quadrata a d & d f, & duo ſupplementa d c & d e, & uelim addere gnomonem k f g circuncirca, ut remaneat quadratum totum a h, dico quòd talis gnomo conſtabit ex duplo g c additæ lineæ, in c a, cum quadrato g c, nam f g conſtat ex g c in c f, ex diffinitione data in initio ſecundi Elementorum, & c f eſt æqualis c a, ex diffinitione quadrati, & quia per 44 primi Elementorum, k f eſt æqualis f g, igitur duæ ſuperficies g f & f k, conſtant ex g c, in duplum c a, & quadratum g c eſt f h, per cor^m 4 ſecundi Elementorum, igitur patet propoſitum, ſi igitur a d ſit 1 q̄d quadratum & c d ac d e, 3 quadrata, & d f 9, erunt b a 1 quadratum, & b c 3 neceſſario. cum igitur uoluerimus addere quadrata aliqua, ad d c & d e, & fuerint c l & k m



erit ad conplendum quadratum totum neceſſaria ſuperficies l n m, quæ ut demonſtratum eſt, conſtat ex quadrato g c numeri quadratorum dimidiati, nam c l est superficies ex g c in a b, ut ostensum est, & a b est 1 quadratum, quia ponimus, a d 1 q̄d quadratum, f l uerò & m n, fiunt ex g c in c b, ex 42ª primi Elementorum, quare superficies l n m, & est numerus addendus, fit ex g c in duplum c b, id est in numerum quadratorum, qui fuit 6, & g c in seipsam, id est numero quadratorum addito, & hæc demonstratio nostra est.

4 Hoc peracto, semper reduces partem q̄d quadrati ad ℞, id est addendo tantum utrique parti, ut 1 q̄d quadratum cum quadrato & numero, habeant radicem, hoc facile est, cum posueris dimidium numeri quadratorum, radicem numeri, item facies, ut denominationes extremæ sint plus, in ambabus æquationibus, nam secus, trinomium seu Binomium redactum ad trinomium, necessariò careret radice.

5 Quibus iam peractis, addes tantum de quadratis, & numero uni parti, per tertiam regulam, ut idem additum alteri parti, in qua erunt res, faciat trinomium habens ℞ quadratam per positionem, & habebis numerum quadratorum, & numeri addendi utriq; parti, quo habito, ab utroq; extrahes ℞ quadratam, quæ erit in una, 1 quadratum p:numero, uel m:numero, ex alia, 1 positio uel plures p:numero, uel m:numero, uel numerus m:positionibus, quare per quintum capitulum huius, habens propositum.

QVAESTIO V.

Exemplum. Fac ex 10 tres partes in continua ꝓportione, ex quarum ductu primæ in secundam, producantur 6. Hanc proponebat Ioannes Colla, & dicebat solui non posse, ego uerò dicebam, eam posse solui, modū tn̄ ignorabam, donec Ferrarius eum inuenit. Pones igitur mediam 1 positionem, prima erit $\frac{6}{1\ pos.}$ & tertia erit $\frac{1}{6}$ cubi, q̄re hæc æq̄ntur 10, ducendo omnia in 6 positiones, habebimus 60 positiones, ęq̄les 1 q̄d q̄drato p:6 quadratis p:36, adde ex quinta regula, 6 quadrata utriq; parti, habebis 1 q̄d q̄dratum p:12 q̄dratis p:36, ęqualia 6 q̄dratis p:90 positionibus, nam si æqualibus æq̄lia addātur, tota fient æqualia, habent autem 1 q̄d quadratum p:12 q̄dratis p:36, radicem & est, 1 quadratū p:6, quam si haberent 6 quadrata p:60 positionib⁹ iam

1 q̄d quad.p:6 quad.p:36 æqualia 60 pos.
6 quad. 6 quad.
1 q̄d q̄d.p:12 q̄d.p:36 æq̄lia 6 q̄d.p:60 pos.
2 pos. 1 q̄d.p:12 pos.

haberemus negocium, sed non habent, addendi igitur sunt tot quadrati & numerus idem ex utraq; parte, ut in priore relinq̄tur trinomium habens radicem, in altero autem fiat, sit igitur numerus q̄dratorum 1 poſitio, & quia ut uides in figura tertiæ regulæ, c l & m k, fiunt ex duplo g c in a b, & g c eſt 1 poſitio, ponam numerum quadratorum addendorũ ſemper 2 poſitiones, id eſt duplũ g c, & quia numerus addendus ad 36, eſt l n m, & ideo quadratum g c cum eo quod fit ex g c duplicato in c b, ſeu ex g c in duplum c b, & eſt 12, numerus quadratorum priorum, ducam igitur 1 poſitionem, dimidium numeri quadratorum additorum, ſemper in numerũ quadratorum priorum, & in ſe, & fient 1 quadratum p: 12 poſitionibus addenda ex alia parte, & etiam 2 poſitiones pro numero quadratorũ, habemus igitur iterum ex communi animi ſententia, quantitates infrà ſcriptas, inuicem æquales, & utraq; habent radicem, prima ex regula tertia, ſed ſecunda quantitas ex ſuppoſito, igitur ducta prima parte trinomij in tertiam, fit quadratũ dimidiæ partis ſecundæ trinomij, quia igitur ex dimidio ſecundæ in ſe, fiunt 900, quadrata, & ex prima in tertiam, fiunt 2 cubi p: 30 quadratis p: 72 poſitionibus quadratorum, ſimiliter erit deprimendo per quadrata, quia æqualia per æqualia diuiſa, producunt æqualia, ut 2 cu. p: 30 quadratis p: 72 poſitionibus æquantur 900, quare 1 cubus p: 15 quadratis p: 36 poſitionibus æquantur 450.

1 q̃d quad. p: 2 poſ. p, 12. q̃d ℞ p: q̃d. p: 12 poſ. additi numeri p: 36 æqualia.
2 poſ. p: 6 quadrato. p: 60 poſ p: 1 q̃d. p: 12 poſ. numeri additi.

Sufficit igitur deducendo ad regulam, habere ſemper 1 cubum p: numero priorum quadratorum, addita ei quarta parte p: numero poſitionũ tali, qualis eſt numerus ęquationis primus, ut ſi habuerimus 1 q̃d q̃dratum p: 12 quadratis p: 36, æqualia 6 quadratis p, 60 poſitionibus, habebimus 1 cubum p: 15 quadratis p: 36 poſitionibus æqualia 450, dimidio quadrati dimidij numeri poſitionum, & ſi haberemus 1 q̃d q̃dratum p: 16 quadratis p: 64 æqualia 80 poſitionibus, haberemus 1 cubum p: 20 quadratis p: 94 poſitionibus æqualia 800, & ſi haberemus 1 q̃d q̃dratum p: 20 quadratis p: 100, ęqualia 80 poſitionibus, haberemus 1 cubum p: 25 quadratis p: 100 poſitionibus æqualia 800, igitur hoc habito, in priore exemplo habuimus, 1 cub. p: 15 quadratis p: 36 poſitionibus æqualia 450, igitur rei ęſtimatio, per 17m capitulũ, eſt ℞ v: cubica $287\frac{1}{2}$ p: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica $287\frac{1}{2}$, m, ℞ $80449\frac{1}{4}$ m: 5, hic igitur eſt numerus quadratorum, qui duplicatus, eſt addendus ex utraq; parte, quia ſupponuntur 2 res addendæ, & numerus adendus ex utraq; parte, ex demonſtratione, eſt quadratum huius, cum eo quod fit ex hoc in 12, numerum quadratorum, manifeſtum eſt autem, quod ℞ quadrata primi aggregati, ſemper eſt 1 quadratum p: dimidio numeri quadratorum,

torum, absque alio, seu p:1 pos. p: dimidio prioris numeri quadratorū uelut 1 q̄d q̄d. p:6 quad. p:9 est 144 & 1 q̄d q̄d. p:2 pos, p:6 q̄dratorum p:p:1 q̄d. p:6 pos. numeri assumpti p:9 est ęq̄le 225 ℞ est 1 q̄d. p:1 pos. numeri assumpti p:3. Est aūt 1 pos. p:3 dimidium 2 pos. p:6 numeri quadratorum & ideo cum positio sit alterius generis à quadrato, oportet inuenire prius æstimationē eius & est numerus simplex addendus ut in præsenti exemplo erit ℞ v: cubica $287\frac{1}{2}$ p: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cub. $287\frac{1}{2}$ m: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p:1, & hoc quia dimidiū prioris numeri quadratorum fuit 6, & in addito trinomio fuit m:5, igitur totum fuit, ut dixi, uerum reliqua pars, fuit quadrata 6 p: duplo huius numeri, igitur fuit numerus q̄dratorum ℞ v: cubica 2300 p: ℞ 5148752 p: ℞ v: cubica 2300 m: ℞ 5148752 m:4, & numerus rerum ex supposito fuit 60, & numerus est (ut ostensum est) quadratum dictæ quantitatis, plus duodecuplo ipsius quantitatis, uerum quia ex supposito, ex numero quadratorum in numerum æquationis fit quadratum dimidij numeri rerum, igitur diuiso 900 quadrato dimidij numeri rerum, per numerum quadratorum, exibit numerus, quantitates igitur sunt hæ, ut uides, & quia latus a g est compositū ex lateribus duorum quadratorū a d & d h dimissis supple-

quadrata ℞ v: cubica 2300 p: ℞ 5148752 p: ℞ v: cubica 2300 m, ℞ 5148752 m: 4
res 60
900
numerus ℞ v: cubica 2300 p: ℞ 5148752 p: ℞ v: cubica 2300 m: ℞ 5148452 m:4

mentis, erunt ℞ primæ & tertię harū quantitatum iunctæ inuicem, ℞ v: totius aggregati, quare ℞ primæ & tertiæ quātitatis, æquantur 1 q̄drato p: ℞ v: cubica $287\frac{1}{2}$ p: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p: ℞ v: cubica $287\frac{1}{2}$ m: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p:1, sed ℞ primæ q̄ntitatis, est numerus rerum, quia est ℞ totidem quadratorum, & ℞ tertiæ quantitatis est numerus, quia tertia quantitas est numerus, habemus igitur 1 quadratum p: numero, æqualia rebus & numero, minue minorem numerū de maiore, accipiendo ℞, id est accipiendo ℞ denominatoris & numeratoris, habebis 1 q̄dratum p: hoc numero toto m: numero infra scripto æq̄lia numero rerū, huic scilicet, ℞ uniuersalissima ℞ v: cubicę 2300 p: ℞ v: cu. $287\frac{1}{2}$ p: ℞ $80449\frac{1}{2}$ p: ℞ v cu. $287\frac{1}{2}$ m: ℞ $80449\frac{1}{4}$ p: 4

30

℞ v: ma ℞ v: c. 2300 p: ℞ 5148752 p: ℞ v: cu. 2300 m: ℞ 5148752 m:4 ℞ 5148452 p: ℞ v: cubica 2300 m: ℞ 5148552 m: 4, nec refert, quod numerus ille sit compootus ex p: & m: nam tantum refert dicere, 1 qua-

quadratum p,8, æquatur 6 rebus, quantum dicere 1 quadratum p: 10 m:2, ęquatur 6 rebus, sequere igitur capitulum quintum, de quadrato & numero, æqualibus rebus, ducendo dimidium numeri rerum in se, & auferendo numerum æquationis inde residui sumendo ℞ generalem, quam addes dimidio numeri rerum, & habebis rem quæ fuit media quantitatum anologarum quæsitarum.

QVAESTIO VI.

Inuenias numerum, qui sit æqualis radici suæ quadratæ, & duabus radicibus cubicis pariter acceptis, dices igitur si talis numerus fuerit cū quadratum, radix sua quadrata necessariò est 1 cubus, & duæ radices cubicę sunt 2 quad. igitur 1 cū quadratum, ęquabitur 1 cubo p:2 quadratis, deducendo igitur ad inferiores denominationes per q̄d. erit 1 q̄d quadratum ęquale 1 positioni p:2, posui autem 2 radicibus cubicis, quia cum regula sit generalis, hoc tamen modo dupliciter solui potest, ut patebit. Namq; si 1 q̄d quadratum æquatur 1 positioni p:2, igitur 1 q̄d quadratum m: 1 æquabitur 1 positioni p:1, nam ab æqualibus æqualia auferuntur, diuide igitur ambo hæc, per 1 positionem p:1, communem diuisorem, habebis 1 cubum m:1 quadrato p:1 positione m:1, ęqualia 1, igitur 1 cubus p:1 positione, æquatur 1 quadrato p:2, igitur ex 18° capitulo, rei æstimatio est ℞ V: cubica ℞ $\frac{2241}{2916}$ p: $\frac{47}{54}$ m: ℞ V: cub. ℞ $\frac{2241}{2916}$ m: $\frac{47}{54}$ p: $\frac{1}{3}$, & cū quadratum huius est numerus quæsitus, cuius ℞ quadrata, & 2 radices cubicę sunt illi ęquales, & tales radices sunt duplum quadrati huis quantitatis cum suo cubo.

1 q̄d quad. m: 1
1 pos. p: 1
1 pos. p: 1
1 cu. m: 1 q̄d. p: 1 pos. m: 1
1

At regula generali sic faciemus quia enim 1 q̄d quadratum æquatur 1 positioni p:2, addemus ad utramq; partē 2 positiones q̄dratorum, cui subscripsimus q̄d. ut intelligas nō esse ex genere priorū denominationū, sed esse positiones q̄dratorum, igitur numerus addendus, est 1 quadratum numeri q̄dratorum, & hoc est, ut in tertia regula huius capituli, quadratum d f, nā hic additio supplementorū est ut d c, a c, d e, ad quadratū simplex a d, igitur sufficit addere quadratū d f, absque additione superficierum f l & m n, quæ erant necessariæ in exemplo quintæ quæstionis, quia

1 q̄d q̄d. p:2 pos. p:1 q̄d.
numeri q̄d. numeri q̄d.
2 pos. p:1 pos. p:2 p:1 q̄d.
numeri q̄d. numeri q̄d.
$\frac{1}{4}$ quad. 4 pos. p:2 cub.
numeri quad.
$\frac{1}{4}$ æquatur 2 cu. p:4 pos.
$\frac{1}{18}$ æquatur 1 cu. p: 2 pos.

igitur additis 2 positionibus p:1 q̃drato numeri quadratorum, ad 1
positionem p:2, fit totum 2 positiones numeri q̃dratorum p:1 pos.
p:2, p:1 quadrato numeri quadratorum, & hoc habet radicem, opor
tet ut quadratum dimidij mediæ quãtitatis, quæ est 1 positio, ęque-
tur ductui extremorum, igitur $\frac{1}{4}$ quadrati, ęquabitur quadrato, 2 cu
borum p:4 positionibus numeri prioris, quare abiectis quadratis
utrinq;, fiet $\frac{1}{4}$ æqualis 2 cubis p:4 positionibus, & $\frac{1}{8}$ æqualis 1 cubo
p:2 positionibus, quare rei æstimatio est ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞
v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$, hic igitur est numerus quadratorũ addendus
utriq; parti, & duplicatur, & quadratum huius erit numerus adden
dus ad utramq; partem, & gratia clarioris intelligentię apposui hic.

Prima 1 q̃d q̃d. p: q̃d. ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$
p: numero ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: 1 $\frac{1}{3}$.

Secunda q̃d. ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: 1 pos.
p: numero ℞ v: cu. $\frac{1051}{3454}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$.

Manifestum est igitur, quod ℞ primi, est 1 quad. p: ℞ v: cubica ℞
$\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cubica ℞ $\frac{2075}{6912}$ m $\frac{1}{16}$, & radix secundi, est res ℞ G. i. gene-
ralis ℞ v: cubicæ ℞ 19 $\frac{23}{2071}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero ℞
v^{ma} ℞ v: cubicæ $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ & hoc, ut
dixi, quia latus a d q̃drati, cõponitur ex a b & b c, lateribus q̃drato-
rum extremorum, absq; commemoratione supplemendorum. Ma-
nifestum est etiam, quod numerus, qui est cum 1 q̃d. est minor nume
ro qui est cum rebus, igitur habebimus 1 q̃dratum æquale rebus ℞
G ℞ v: cubicæ ℞ 19 $\frac{23}{2075}$ p: $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: cu. ℞ 19 $\frac{32}{2075}$ m: $\frac{1}{2}$ p: numero, hoc ℞
G ℞ v: cubicæ $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cu. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ m: ℞ v: cu. ℞
$\frac{2075}{6912}$ p: $\frac{1}{16}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{6912}$ m: $\frac{1}{16}$. Quare ducemus dimidium numeri
rerum in se, & est, ut ducamus totum in se, & fit idem, dempta ℞ v^{ma},
deinde accipiemus quartam partem producti, & est dimidium ulti-
mæ ℞ v: quæ est m: supra positæ, ideo addita, relinquetur numerus
totus compositus ℞ v^{ma} ℞ cub. v: $\frac{1051}{3456}$ p: ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: ℞ v: cub. $\frac{1051}{3456}$ m: ℞
$\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{2}{3}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{1}{128}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: $\frac{1}{128}$, & radix hu-
ius totius G, addita dimidio numeri rerum, id est huic numero ℞ v^{ma}
℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ p: $\frac{1}{128}$ m: ℞ v: cu. ℞ $\frac{2075}{442368}$ m: $\frac{1}{128}$, constituit rem.

Et si dixisset, quod numerus propositus æqueretur radici qua-
dratæ & cubicæ pariter acceptis, non potuisset solui, nisi hoc secun-
do modo, per regulam generalem. Deducere autem æstimationes
æquales ad idem, ut primam æstimationem ad secundam, iam te do
cui in libro quantitatum alogarum, quamuis sit difficillima ope-
ratio, & ideo complementum in his operationibus, est quasi extre-
mum, ad quod peruenit perfectio humani intellectus, uel potius
imaginationis, in hoc enim cognosces illorum differentiam.

QVAE-

QVAESTIO VII.

Si quis igitur dicat, inuenias numerum qui ductus in ℞ cubicam suam p:6, faciat 64, dices igitur, posito eo numero 1 cubo, habebimus 1 q̄d' quadratum p: 6 cubis æqualia 64, quare per septimam transmutandi regulam septimi capituli huius habebimus 1 q̄d' q̄d. æquale 6 rebus p:4, unde habita æstimatione ex hoc capitulo per nonam regulam eiusdem capituli, habebimus intentum. Et quibusdam adeo uidebuntur difficiles hę operationes, ut uix eas ueras esse credant, nos autem ostendimus modum, q̄ quantitates istę alogæ æquiualentes numeris, ad numeros reducantur, & dedimus demonstrationem utramque, & Geometricam à causa, & Arithmeticam ab effectu.

QVAESTIO VIII.

Fac ex 6 tres partes in continua proportione, quarum quadrata primę & secundę iuncta simul faciant 4, ponemus primam 1 positionem, quadratum eius est 1 quadratum, residuum igitur ad 4, est quadratum secundæ quantitatis, id est 4 m:1 quadrato, huius radicem, & 1 positionem detrahe ex 6, habebis tertiam quantitatem, ut uides, quare ducta prima in tertiam, habebis 6 positiones m:1 quadrato m:℞ v:4 quadratorū m:1 q̄d' quadrato ęqualia 4 m:1 q̄d quadrato secundæ, abiice 1 quadratum m: ex partibus, habebis 4 ęqualia 6 positionibus m:℞ v:4 quad.m:1 q̄d' quadrato, quare 6 positiones m:4 æquantur ℞ v:4 quadratorū m:1 q̄d' quadrato quare quadrata horū etiam æqualia sunt, à quibus abiice 4 quadrata cōmunia, ex utraq; parte, habebis tandē 32 quadrata p:16 p:1 q̄d' quadrato, æqualia 48 positionibus, quare addendo 240 utriq; parti, id est residuum quadrati dimidij numeri quadratorum, habebis 1 q̄d' quadratum p:32 quadratis p:156, æqualia 48 positionibus p:240, addas igitur 2 positiones quadratorum p:1 quadrato p:32 positionibus numeri quadratorum utrique parti, prima igitur pars habet radicem necessario, & quia uolumus secundam etiam habere, quæ est 2 positiones quadratorum p:48 positionibus, ex priori-

1 pos. | v:℞ 4 m:1 q̄d. | 6 m:1 pos.m: ℞ v:4 m:1 q̄d.
6 pos.m:1 quad.m:℞ v:4 quad.m:1 q̄d' quad.

4 | 6 pos.m:℞ v:4 quad.m:1 q̄d' quad.
6 pos.m:4 æqual.℞ v:4 quad.m:1 q̄d' quad.
36 quad.p:16 m:48 pos.æquantur
4 quad.m:1 q̄d' quad.

32 quad.p:16 p:1 q̄d' quad.æqualia 48 pos.

1 q̄d' quad.p:32 quad.p:256 æqualia 48
pos.p:240

bus p:1 quadrato p:32 positionibus numeri quadratorum p:240, ducemus primam partem trinomij in tertiam ut uides, et dimidium secundæ in se, & fient 576 quadrata æqualia 2 cub. p:64 quadratis p:480 pos. quadratorũ igitur 288 æquantur 1 cubo p:32 quadratis, p: pos. 240, quare per 17 capitulũ huius, habebimus

576 | quad.
2 pos. p:48 pos. p:1 quad. p:32 pos. p:240
quad. numeri quad.
2 cub. p:64 quad. p:480 pos. | q̄d.

1 cubum æqualem $101\frac{1}{3}$ rerum p:$420\frac{16}{27}$, inde habita huius æstimatione per suum capitulum, minue $10\frac{2}{3}$, tertiam partem numeri quadratorum, per 17 cap. & consurgit rei fictæ æstimatio, habebis igitur 1 quadratum p:16 p: dicta æstimatione, ex una parte, æqualia rebus quæ sunt ℞ dupli æstimationis inuentæ p: ℞ aggregati ex quadrato dictæ æstimationis, & eadem æstimatione ducta per 32, & 240 numero addito, hoc autem ut liquet, est minus priore numero, quia si loco 240 adderentur 256, essent æquales, igitur 1 quadratum p: æstimatione inuenta p:16 m: ℞ v: illa trium quantitatum, id est quadrati æstimationis cum eadem ducta per 32, & cum 240 tanquam uno numero, æquantur rebus quæ sunt secundum radicem dupli æstimationis inuentæ, quod est propositum.

QVAESTIO IX.

Inuenias numerum, cuius q̄d quadratum, cum quadruplo sui, & 8 æquetur decuplo sui quadrati, dicemus igitur 1 q̄d quadratum p: 4 pos. p:8, æquantur 10 quadratis. Quare semper positiones dabimus quadratis, & auferemus à q̄d quadrato, & habebimus 1 q̄d quadratum p: 8, æquale 20 quadratis m:4 positionibus, & quia uidemus numerum quadratorum esse magnum, & rerum paruum, ideo conabimur minuere numerum q̄dratorum potius, quàm augere, & faciemus ut diminutio sit ex utraque parte 2 quad. nam à minori imò à 2 quadratis semper fermè est incipiendum, quia non oportet ut uenias ad m: q̄d. ex parte rerum, quia sic non haberent radicē, subductis igitur 2 quadratis ex utraque parte,

1 q̄d quad. p:4 pos. p:8
10 quad.

1 q̄d q̄d. p:8 | 10 q̄d. m:4 pos.

1 quad quad. m:2 quad. p:8
8 quad. m:4 pos.

1 quad quad. m:2 quad. p:1
8 quad. m:4 pos. m:7

2 pos. | quad. p:2 pos.

1 quad quad. m:2 pos. m:2
quad. p:1 quad. p:2 pos. p:1
8 quad. m:2 pos. quad. m:4
pos. p:1 quad. p:2 pos. m:7

habebis

8 m:2 pos.q̄d. | 4 pos.	1 q̄d.p:2 pos.m:7
4 quad.	8 m : 2 pos.
8 quad.p:16 pos.m:56 m:2 cu.m:4 q̄d. p : 14 pos.quad.	
4 quad.p:30 pos. | 60 p: 2 cub.	
1 cub. p : 30 æquatur 2 quad. p : 15 pos.	
pos. 2	

habebis 1 quad' quadratum m : 2 quadratis p:8, ęqualia 8 quadratis m : 4 positionibus, clarum est autem quòd si 1 quad' quadratum m : 2 quadratis debet habere radicem, oportet ut numerus sit p : 1, sed erat p : 8, igitur oportebit auferre 7 ex utraque parte, habebimus igitur 1 quad' quadratum m:2 quadratis p: 1 æquale 8 quadratis m : 4 positionibus m : 7, addemus igitur per m: ut dictum est, 2 positiones quadratorum ad reliqua 2 quadrata m : ex regula, & addemus per p : ut in eadem, ad numerum 1 quadratum p : 2 positionibus ex utraque parte, quare habebimus partes æquales, quæ enim adduntur & minuuntur sunt æqualia, igitur 8 m: 2 positionibus quadratorum m : 4 positionibus, p :|1 quadrato p : 2 positionibus m : 7 numeri, habent radicem, multiplicando igitur primam partem, quæ est 8 m : 2 positionibus quadratorum, in tertiam, quæ est 1 quadratum p: 2 positionibus m:7, fit illud quod uides à latere, pro numero quadratorum, & hoc æquale esse debet 4 quadratis, qui est numerus ꝓductus, ex dimidio mediæ partis in se, quare abijciendo quad. utrinque, fiet illud multinomium, æquale 4, quare tandem reductis partibus ad suas cōsimiles erunt 2 cubi p:60, æquales 4 quadratis p:30 positionibus, & 1 cubus p:30, æqualia 2 quadratis p: 15 positionibus, quare res ualet 2, uel per capitulum, uel etiam solo sensu experiendo.

Circa quod notanda sunt tria. Primum, quod reduxi rem ad experimentum in numeris, ut uideres ueritatem rei facilius, stultum est enim semper difficultatem addere difficultati, secundum, quod 1 cubus p:30 æqualis 2 quad. p: 15 rebus, habet aliam rei æstimationem quàm 2, quæ cognita est ex suo capitulo, sed pro nunc ne operatio longior euadat, eam relinquimus. Tertium notandum est, quod tu uides, demonstrationem sic tenere in m : sicut in p : & quod numerns semper est addendus necessariò, quia consurgit ex quadrato numeri quadratorum cum numero quadratorum priorum, seu quadrata sint addenda seu minuenda, ducto in dimidium numeri quadratorum minuen- Notandum.

Vu dorum

dorum. Hoc ſtante, diximus quod rei æſtimatio eſt 2, & addendæ ſunt 2 res per m: quadratorum, igitur minuemus 4 quadrata ex utraque parte, habebimus igitur 1 quadˀ quadratum m: 6 quadratis p: 1, æqualia 4 quadratis m: 4 poſitionibus m: 7, pro numero autem addendus eſt quadratus numeri dimidij quadratorum detractorum, & hoc dimidium eſt 2, quadratum cuius eſt 4, & ſimiliter productum ex numero priorum quadratorum in rei æſtimationem, quod productum eſt 4, igitur addemus 8 utrique parti, & fient tandem ut uides, 1 quadˀ quadratū m: 6 quadratis p: 9, æqualia 4 quadratis m: 4 poſitionibus p: 1, manifeſtum eſt autē quod ambo hæc habent radices duplices, ut uides, ſed facta reductione ueniunt neceſſariò ad duo capitula, uel 1 quadratum æquale 2 poſitionibus p: 2, uel 1 quadratum p: 2 poſitionibus æqualia 4, horum capitulorum æſtimationes ſunt ℞ 3 p: 1, & ℞ 5 m: 1, dico igitur quòd in æſtimationibus 1 quadˀ quadrati p: 4 poſitionibus p: 8, æquantur 10 quadratis, cuius probationis experimentum habes à latere dilucidum, ut patet, non declaro autem, an facta alia poſitione perueniremus ut dixi, cum 1 cubus p: 30, æquabatur 2 quadratis p: 15 rebus, ad alias duas æſtimationes, ſed ſi te delectat operatio, per te ipſum potes illud inquirere.

1 q̄dˀ quad. m: 2 q̄d. p: 1 m: 4 quad. p: 8
1 q̄dˀ q̄d. m: 6 quad. p: 1
8 quad. m: 4 poſ. m: 7 m: 4 quad. p: 8
4 q̄d. m: 4 poſ. p: 1

1 q̄dˀ q̄d. m: 6 q̄d. p: 9 —	1 quad. m: 3 3 m: 1 quad.
4 quad. m: 4 quad. p: 1 —	2 poſ. m: 1 1 m: 2 poſ.
1 q̄d. æqual. 2 poſ. p: 2 1 q̄d. p: 2 poſ. æqual. 4	℞ 3 p: 1 ℞ 5 m: 1

pᵃ æſtimatio	2ᵃ æſtimatio
res ℞ 3 p: 1 quad. 4 p: ℞ 12 q̄dˀ q̄d. 28 p: ℞ 768	res ℞ 5 m: 1 quad. 6 m: ℞ 20 q̄dˀ q̄d. 56 m: ℞ 2880
4 res ℞ 48 p: 4 q̄dˀ q̄d. ℞ 768 p: 28 p: 8	4 res ℞ 80 m: 4 q̄dˀ quad. m: ℞ 2880 p: 56 p: 8
aggreg. ℞ 1200 p: 40 10 quad. 40 p: ℞ 1200	aggreg. 60 m: ℞ 2000 10 q̄d. 60 m: ℞ 2000

QVAESTIO

QVAESTIO X.

Inuenias tres numeros in continua proportione, quorum aggregatum sit 8, & q̄dratum tertij, sit æquale aggregato ex q̄dratis primi & secundi, ponemus eos per primam regulam 1, 1 pos. 1 q̄d. erunt igitur quadrata 1, 1 quadratum, 1 quad quad. igitur 1 quad quad. æquatur 1 quadrato p: 1, quare ex capitulo deriuatiuorum uigesimoquarto, habebimus rei æstimationem ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & tertia quantitas, est eius quadratum, scilicet ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & prima fuit 1, igitur totum aggregatum est $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$, p: ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, hoc autem non est 8, ut propositum est, dic igitur per regulam trium quantitatum, si $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$ esset 8, quid esset 1 prima quantitas? duc 8 in 1, fit 8, diuide 8 per $1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & exit 4 p: ℞ v: ℞ 500 p: 10 m: ℞ v: ℞ 1920 p: 18, & hæc est prima quantitas, qua habita si duxeris eam per ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, habebis tertiam quantitatem, quam si duxeris denuò in primam quantitatem ultimo inuentarum, ℞ ^{G} producti, est secunda quantitas, & ne mireris quod tertiam quantitatem præponam secundæ in operatione, quia est longe simplicior.

1	pª
$\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$	2ª
℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	3ª
$1\frac{1}{2}$ p: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: ℞ v: ℞ $1\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$	

QVAESTIO XI.

Si quis dicat, inuenias numerum, qui ductus in ℞ suam cubicam m: 3, faciat 64. Pones illum 1 cubum, igitur ductus in ℞ cubicam m: 3 producit 1 quad quadratum m: 3 cubis, æqualia 64, igitur 1 quad quadratum m: 3 cubis, æquatur 64, dico quod possumus soluere modo septimæ quæstionis, & etiam alio modo, sine transmutatione, quo potest etiam solui septima quæstio, & facilius, sed uolui docere ambos modos, ut melius scires operari, debes igitur scire duo. Primum, quòd ut res debent semper manere ab alia parte, à qua est numerus cum quadratis, & non à parte quad quadrati, sic cubi, seu p: seu m: debent manere cum quad quadrato. Secundum, quòd ut numerus rerum nunquam debet uariari, sic nec numerus cuborum. Et possumus addere tertium his, scilicet, quòd ubi sunt res, peruenimus ad 1 quad quadratum p: quad. p: numero, æqualia quad. rebus p: uel m: & numero p: sic hic peruenimus ad quad' quadratum p: quad. p: numero, æqualia quad' quad. cubis p: uel m: & quad. p: Hoc intellecto, sic soluitur quæstio; addes ad numerum 2 positiones quadratorum, igitur ducto eius dimidio in se, fit 1 quadratum numeri quadratorum quadratorum, diuiso igitur eo per 64, habes $\frac{1}{64}$ quad. numerum quadratorum quadratorum, quare uides,

| $\frac{1}{64}$ q̄d.p: 1 | m: 3 cub. | 2 pos. | $\frac{1}{64}$ q̄d. | 2 pos. | 64
| q̄d' q̄d. q̄d. | q̄d' q̄d. q̄d.

quod addidisti ad habendam radicem $\frac{1}{16}$ quadrat. pro numero quad' quad. & 2 positiones pro numero quad. igitur addes eadem ad 1 quad' quadratum m: 3 cubis, & habebis $\frac{1}{46}$ quadrati p: 1, pro numero quad' quad. & m: 3 cubis & 2 positionibus, pro numero quad. igitur ad hoc ut habeat radicem, oportet ut extrema inuicem ducta, producant, quantum dimidium mediæ quantitatis in se, est autem dimidium 1 $\frac{1}{2}$ cubi, quod ductum in se, producit 2 $\frac{1}{4}$ cu' quadrata, & $\frac{1}{64}$ quadrati p: 1 numeri quad' quad. in 2 positiones numeri quad. producit $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 positionibus numeri cu' quadrati, nam quad' quadratum in quadratum, producit cu' quadratum, habes igitur $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 positionibus numeri cu' q̄d. æqualia 2 $\frac{1}{4}$ cu' quadratis, igitur cu' quadratum, ad cu' quadratum in æqualitate, sic numerus ad numerum, quare $\frac{1}{32}$ cubi p: 2 positionibus, æqualia 2 $\frac{1}{4}$, quare 1 cubus p: 64 positionibus æqualia 72, quare rei æstimatio, p: ℞ v: cubica ℞ 11005 $\frac{1}{27}$ p: 36, m: ℞ v: cubica ℞ 11005 $\frac{1}{27}$ m: 36, & duplum huius pro quadratis addetur utrique parti, radix igitur, ex una parte est 8 p: rebus sub numero æstimationis rei, ex alia autem quadrata sub numero ℞ v: $\frac{1}{64}$ quadrati, huius æstimationis addito 1, m: positionibus sub numero ℞ dupli huius æstimationis.

QVAESTIO XII.

Si quis dicat, 1 quad' quadratum p: 3, æquatur 12 rebus, addes 2 positiones quadratorum, & 1 quadratum numeri quadratorum, quare sic habebit ℞ quadratam sine numero ut clarum est, igitur addemus

1 q̄d' q̄d. p: 3 | 12 pos.
2 pos. q̄d. p: 1 q̄d. m: 3

1 q̄d' q̄d. p: 2 pos. p: 1 q̄d. | 2 pos. | 12 | 1 q̄d. m: 3
1 q̄d' q̄d. p: 6 quad. p: 9 | 6 quad. p: 12 pos. p: 6

mus ex alia parte pro numero quadratorum 2 positiones, & pro numero 1 quad. m: 3 habebis partes ut uides, quare multiplicatis partibus, habes 2 cubos æquales 6 rebus p: 36, & 1 cubum, æqualem 3 rebus p: 18, & res ualet 3, igitur partes sunt ut uides, & erit 1 quadratum p: 3, ℞ primæ partis, æqualis rebus ℞ 6 p: numero ℞ 6, & res quæsita erit, ℞ V: ℞ 6 m: 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ 1 $\frac{1}{2}$.

QVAESTIO XIII.

Inuenias numerum, cuius quad' quadratum cum duplo cubi, sit 1 p: ipso numero igitur dices, 1 quad' quadratum p: 2 cubis æquantur ad 1 positionem p: 1, hic non datur locus radici subtrahendæ, nec diuisioni. Sed dices ex prima regula, inuenias tres numeros in continua propotione, quorum aggregatum ad aggregatum secundi & tertij eandem habeat rationem, quam aggregatum secundi & tertij ad primum. Pones igitur eos 1, 1 pos. 1 quad. habebis igitur 1 quad' quadratum p: 2 cubis p: 1 quadrato, æqualia 1 quadrato p: 1 positioni p: 1, quare abiecto 1 quadrato communi, habebimus 1 quad' quadratum p: 2 cubis, æqualia 1 positioni p: 1, ergo iam scimus rationes quantitatum, quia uero ex aggregato in primam, fit quadratum aggregati secundæ & tertiæ, igitur tale aggregatum est diuisum secundum proportionem habentem medium & duo extrema, & eius minor portio est 1, igitur residuum (& est maior portio) est ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{1}{2}$, & hoc æquatur (ut supponitur) 1 quadrato p: 1 positione, igitur quantitates sunt ut uides.

Mediæ igitur quanti-	prima 1
tatis (quę est res) 1 quad'	2 res ℞ V: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$ m: $\frac{1}{2}$
quadratum p: 2 cubis æ-	3ª quad. ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: 1 m: ℞ V: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{5}{4}$

quantur ipsi quantitati p: 1, id est ℞ V: ℞ 1 $\frac{1}{4}$ p: $\frac{3}{4}$ p: $\frac{1}{2}$: & per hæc intelligis modos harum regularum, si exempla hæc diligenter cum suis operationibus animaduertas.

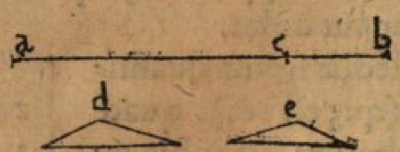
De modis ſuppoſitionum generalium ad artem maiorem pertinentibus, & regulis quæ extra ordinem ſunt, ac æſtimationibus diuerſi generis ab his quæ dictæ ſunt. CAP. XL.

CVm fuerit cubus æqualis quadratis & numero, ſi ab æſtimatione illa detrahatur, numerus quadratorum, relinquetur æſtimatio cubi & totidem quadratorum, æqualium numero qui ſit in eadem proportione cum numero primæ æquationis in qua eſt ipſa ſecunda æquatio ſeu æſtimatio ad primam æſtimationem, Exemplum, cubus æquatur 2 quadratis p:$1\frac{17}{64}$, & æſtimatio eſt $2\frac{1}{4}$, dico, quod ſi abijcias 2 numerum quadratorum relinquetur $\frac{1}{4}$, æſtimatio cubi & 2 quadratorum, æqualium $\frac{9}{64}$, qui numerus eſt in eadem proportione cum $1\frac{17}{64}$ numero prioris æquationis, in qua eſt $\frac{1}{4}$ æſtimatio ſecunda, ad $2\frac{1}{4}$ primam æſtimationem, cuius demonſtratio ſit hæc.

	æſtimat.
1 cu. æqual 2 quad. p:$1\frac{17}{64}$	$2\frac{1}{4}$
1 cu. p:2 quad. æqual $\frac{9}{64}$	$\frac{1}{4}$

DEMONSTRATIO.

Ponatur a b æſtimatio prima, & a c numerus quadratorum, & erit b c æſtimatio alicuius cubi & quadratorum, ſecundum a c numerum æqualium alicui numero, qui ſit e, ponatur uerò d numerus, qui cum quadratis a b ſecundum numerum a c æquetur cubo a b, quia igitur cubus a b æquatur producto ex a c & c b in quadratum a b, itemq́ producto ex a c in quadratum a b cum numero d, erit d æqualis producto c b in a b quadratum, & ſimiliter cubus c b cum producto a c in quadratum c b, æquatur numero, & æquatur etiam producto ex a b in quadratum b c, igitur propuctum a b in quadratum b c, æquatur e, uerùm producti b c in quadratum a b, ad productum a b in quadratum b c, ut a b ad b c per 143 libri de propor. colligitur, & in lib Alizæ. Proportio igitur d ad e, ut a b ad b c, quod erat probandum. Similiter ſequitur, permutando proportiones æquationum numerorum ad ſuas æſtimationes eaſdem eſſe, cum æſtimationum differentia fuerit numerus quadratorum.

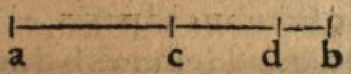


Cum

Cum fuerint cubus & quadrata, æqualia numero, item cubus æqualis totidem quadratis eidemq́ numero, erit proportio aggregati ex prima æstimatione & numero quadratorum, ad residuum, quod fit detracto à secunda æstimatione numero quadratorum, ut secundæ æstimationis ad primam duplicata, uelut si dicam, cubus & 3 quadrata, æquantur 20, & cubus æquatur 3 quadratis p:20, in prima æstimatio rei est 2, in secunda est ℞ v: cubica 11 p: ℞ 120 p: ℞ v: cubica 11 m: ℞ 120 p: 1, dico quod si addas 3 numerum quadratorum, ad 2 primam æstimationem (& fiet 5) & minuas idem 3, ex secunda æstimatione (& fiet ℞ v: cu. 11 p: ℞ 120 p: ℞ v: cu. 11 m: ℞ 120 m: 2) quod proportio 5 ad hanc radicem, est uelut ℞ v: cubicæ 11 p: ℞ 120 p: ℞ v: cubica 11 m: ℞ 120 p: 1, æstimationis secundæ, ad 2 æstimationem primam, duplicata, cuius rei est demonstratio hæc. 22.

Demonstratio.

Sit æstimatio prima b c, secunda a b, numerus quadratorum communis, a d, quia igitur cubus a b, ęqualis est productis a d & d b in quadratum a b, & a b est numerus quadratorum, erit productum ex d b in quadratum a b, æquale numero ęquationis, quare & cubo b c cum



producto a d in quadratum b c, igitur quod ex b d in quadratum a b, æquale est ei, quod ex aggregato a d & c b in quadratum c b, igitur per 7. sexti & 34 11 Elementorum, a d & c b, iunctorum, ad b d, uelut a b ad b c, ratio seu proportio duplicata.

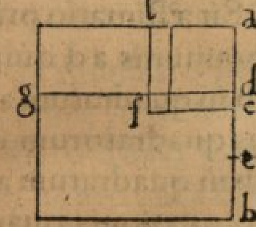
Cum fuerint quadrata æqualia cubo & numero, conuertetur capitulum in capitulum rerum æqualium cubo & numero, & æstimatio secunda semper est addenda uel detrahenda tertiæ parti numeri quadratorum, ut habeatur prima, & est ex his quæ ad septimum capitulum pertinēt, & modus est. Sume differentiam numeri æquationis ꝓpositi, & dupli cubi Tpq̄d. & eam pone pro numero, qui cum cubo æquatur rebus totidem, quotus est numerus, qui est tertia pars quadrati numeri quadratorum, ergo inuenta secunda æstimatione, pro habenda prima, addes eam Tpq̄d. si numerus fuit maior duplo cubi Tpq̄d. uel minues, si numerus fuit minor duplo cubi Tpq̄d. & conflatum uel residuum, est æstimatio prima. 3.

Exemplum, Cubus & 80, æquantur 9 quadratis, dupla cubũ 3, qui eſt ᴛpq̃d. fit 54, differentia cuius ab 80 eſt 26, igitur cubus p:26, æquabitur 27 rebus, eſt autem 27 tertia pars quadrati 9, igi tur æſtimatio ſecunda eſt 1, quæ addita ad 3 ᴛpq̃d: conſtituit 4, æſtimationem primam quia numerus, qui eſt 80, eſt maior duplo cubi ᴛpq̃d. quod eſt 54.

Aliud exemplum, Cubus p:5, æquatur 6 quadratis, duc 6 in ſe fit 36, huius tertia pars eſt 12, numerus rerum, inde detrahe 5, numerum æquationis, ex 16 duplo cubi 2 ᴛpq̃d. & relinquitur 11, igitur 1 cub. p:11, æquatur 12 rebus, æſtimatio autem eſt 1, detra he igitur 1 ex 2 ᴛpq̃d. quia numerus eſt minor duplo cubi ᴛpq̃d. relinquitur æſtimatio cubi p:5 æqualis 6 quad.

DEMONSTRATIO.

Demonſtratio autem huius eſt. ponatur a b numerus quadra torum 9, a c æſtimatio rei, cuius cubus p: 80 æquatur a b ductæ in a f quadratum a c, & ſit a d tertia pars a b, & ſimiliter d e & e b & a g ſuperficies æquidiſtantium laterum, & tertia pars quadrati a b per primã 6 Elemen. quia igitur ex b a in a c, fit cubus a f p: 80, erit quod ex b c in a f 80, quod igitur ex b d in a f, 80 p: eo quod ex c d in a f, detracto igitur quod ex b d in a h, & eſt duplum cubi a d, fiet quod ex b d in gnomonem, 26 p: eo quod ex c d in a f, at quod ex b d in gnomonem, æquale eſt quadruplo c d in quadratum a h, & duplo a d in quadratum h f, eo quod lineæ b e, c d, d a, d h, & reliquę ſupplementorum ſunt æquales inuicem, quadruplum igitur c d in quadratum a h cum duplo a d in quadratum h f, æquatur 26 p: eo quod ex c d in f a, at ex c d in f a, fit cubus c d, & duplum a d in quadratum f h, & c d in quadratum a h ſemel, igitur ablato eo quod ex c d in quadratum a h ſemel, & ex a d in quadratum h f bis, utrinq;, erit triplum c d in a h, æquale cubo c d p: 26, at quod ex c d in a h ter, æquale eſt ei, quod ex c d in a g ſemel, cum d h ſit tertia pars d g, igitur quod ex c d in a g tertiam partem quadrati a b: æquale eſt cubo ipſius c d p: 26.



Cum quæſtionis ſolutio ad multitudinem denominationum peruenerit, ſolutio plerunq; ſperari poteſt, nam ex mala tractatione ſæpius hoc euenit, unde ad pauciores & notas denominationes deducta soluitur, & generaliter. At cum ad capitulum paucarum sed inæqualium denominationum peruenerit, quæstionis solutio, nunquam generaliter ad cognitionem perueniet, cum semper in id incidat capitulum, quod generalem æstimationis inueniendæ regulam non habet: uelut si ad capitulum r p', quadratorum, rerum ac numeri deuenerit.

Cum uerò hoc in omnibus, tum maxime in Geometricis quæstionibus, quæ graues sunt, plurimum conferre solet, ut præuias alias, ac minus difficiles quæstiones soluas, huius libri auxilio, demum in regulas de modo solutiones has contrahes, inde illarum auxilio pedetentim procedens per positionis præcepta & regulas, ad aliquod tandem horum capitulorum notorum peruenies, ex quo dilucida solutio apparebit. 5a

Præter has autem æstimationes, aliæ quædam emergunt, quarum numerus est infinitus, nec ullius earum generalis est usus, uerùm quæ maximè sunt frequentes, tribus modis fiunt. Aut enim regula peculiari, ut in sexto libro ostensum est. tum magis in capitulis omnibus quantitatū continue proportionalium, ut facile est experiri. Aliæ autem ex iterata regularum uel capitulorum operatione, uel mixtione: ut cum ad quæsiti solutionem pluribus capitulis, uel regulis indigemus. Exemplum habes, superius, capite 35, Quæstion. 4: & capite 31, Quæstion. 2 huius, sed oportet perficere. Tertio modo habebis uarias æstimationes, cum capitula uel regulas non in numeris, sed iam uariatis æstimationibus exercueris, ut si dicam, fac ex R ultimi 8 m: R 2, duas partes, ex quarum ductu in radices alterius mutuo fiant numeri, qui iuncti inuicem faciant 4, operatio perueniet ad absonam quantitatem. 6a

Natura producti ex partibus numeri in R quadratam uel cubam uel alterius generis partis reliquæ, est de genere cubi, uel quad' quadrati, excepto quod quantitas sumenda est proximior maximè, non minori. Exemplum, si quis dicat, fac ex 10 duas partes, quarum productum unius in quadratum alterius faciat 9, & postmodum uelis dicere, fac ex aliquo numero duas partes, ex quarum ductu unius in quadratum alterius, fiat 18, tunc uides quòd talis productio est ex genere cubi, quia igitur, si proportio esset eadem, fieret hoc ex 20, quod est duplum 10, ut 18 est duplum 9, at quia est ex genere cubi, inueniemus duos terminos proportione continua medios inter 10 & 20, & sunt R cubica 2000 7a ca 2000 & ℞ cubica 4000, igitur numerus quęsitus est ℞ cubica 2000, nam una pars est ℞ cubica 2 alia ℞ 1458, ducta ℞ cubica 1458 in quadratum ℞ cub. 2 fit ℞ cubica 5832, quæ est 18. Dico igitur quod si dixisset, ut facias de 10 duas partes, ex quarum mutua multiplicatione in ℞ alterius fiat 12, quod hæc habet rationem cubicam, unde si diceremus, inuenias numerum ex cuius ductu uicissim partium in mutuas radices fiat 24, & uelis ex primis partibus inuenire alias, tunc inter 10 & 20 eadem ratione, qui se habent ut 9 & 18, accipies in ratione cubica duos terminos medios proportionales, & maior illorum qui est ℞ cubica 4000, est terminus quæsitus, nam una pars est ℞ cubica 4, alia ℞ cubica 2916, duc uicissim in ℞ quadratam alterius fiunt ℞ cubica 5832, & ℞ cub. 216, quæ sunt 18 & 6, & hæ iunctæ faciunt 24.

9	18
10	20
℞ cu.	℞ cu.
2000	4000

52 Quælibet æquatio cubi æqualis rebus & numero, conuertitur in consimilem, cuius numerus rerum constat ex diuisione prioris numeri rerum per numerum æquationis, & numerus æquationis est ℞ eius quod prouenit diuisa monade per numerum æquationis, ut in exemplo, cubus æquetur 6 positionibus p:2, diuide 6 numerum positionum per 2 numerum æquationis, exibit 3 numerus positionum secundæ æquationis, diuide etiam unitatem per 2 numerum æquationis, exit $\frac{1}{2}$, cuius ℞ est numerus æquationis, & ita in duobus reliquis exemplis. Inuentio autem æstimationis unius per aliam, est ualde difficilis, ueruntamen dico, quòd habita secunda ęstimatione, ipsa erit ℞ numeri rerum multiplicandarum cum monade seu uno per 1 cub. & per positiones, & numerum priorē ex alia parte, inde addes tot quadrata utriq; parti, quotus est numerus, qui prouenit diuiso uno per quadruplum quadrati eiusdem secundæ æstimationis, & habebis quad' quadratum p: cubo p: quadrato ex una parte, habentia ℞, quæ erit quad. p: pos. & ex alia quad. p: pos. p: numero, habentia similiter radicem, quæ erit positio p: numero, quare per capitulum, habebis æstimationem, ut in tertio exemplo, habes secundam rei æstimationem 1, pro habenda prima duc 1 positionem

1 cub. æqualis 6 pos. p: 2
1 cub. ęqualis 3 pos. p: ℞ $\frac{1}{2}$
1 cub. æqualis 4 pos. p: 4
1 cub. æqualis 1 pos. p: $\frac{1}{2}$
1 cub. æqualis 6 pos. p: 9
1 cub. æqualis $\frac{2}{3}$ pos. p: $\frac{1}{3}$

nem p: 1 (pro regula ſumitur 1) ſed 1 poſ. eſt propter quadratum æſtimationis rei, quod fuit etiam 1 in 1 cubum, & 6

1 cub.	6 poſ. p: 9
1 poſ. p: 1	1 poſ. p: 1
1 q̄d q̄d. p: 1 cub.	6 q̄d. p: 15 poſ. p: 9
1 q̄d q̄d. p: 1 cu. p: $\frac{1}{4}$ q̄d.	$6\frac{1}{4}$ q̄d. p: 15 poſ. p: 9
1 q̄d. p: $\frac{1}{2}$ poſ.	$2\frac{1}{2}$ poſ. p: 3

poſitiones p: 9, habebis 1 quad quadratum p: 1 cubo, æqualia 6 quadratis p: 9 p: 15 poſitionibus, deinde adde utrique parti $\frac{1}{4}$ quadrati, & eſt quod prouenit ſemper diuiſa unitate per quadruplum quadrati numeri poſitionum additarum, & habebis partes habentes ℞ quadratas, quare res eſt 3.

ARTIS MAGNAE HIERONYMI
CARDANI DE REGVLIS
ALGEBRÆ, FINIS.

HIERONYMI CARDANI

MEDIOLANENSIS, CIVIS QVE BONONIENSIS, MEDICI AC MATHEmatici præclarissimi, de Aliza regula, Libellus,

HOC EST,

OPERIS PERFECTI SVI SIVE ALGEBRAICÆ LOGISTICAE,

NVMEROS RECONDITA NVMErandi subtilitate, secundum Geometricas quantitates inquirentis, necessaria coronis, nunc demum in lucem editæ.

*

INDEX EORVM QVÆ IN HOC LIBRO CONTINENTVR.

æqualium

LVI.

HIERONYMI CARDANI MEDIOLANENSIS CIVIS'QVE BONONIENSIS, de Regula Aliza, libellus.

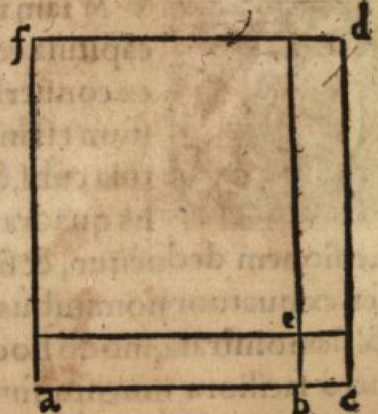
De suppositis ac modis, CAP. PRIMVM.

CVM iam in arte magna demonstrauerimus omnia capitula conuerti, modò duo principalia, nec iam ex conuersione, inuenta generalia fuerint, manifestum est inuento alio capitulo generali, præter capitula cubi, & rerũ æqualium numero, & cubi æqualis quadratis, & numero, quòd ex priore per conuersionem deducitur, & si generale sit, omnia capita seu ex tribus seu ex quatuor nominibus, generaliter non solum cognita esse, sed & demonstrata, mòdò hoc ipsum demonstratione inuentum sit. At uerò faciliora inuentu sunt, quæ ex tribus nominibus constant, quam quæ ex quatuor, non solum quia hæc pluribus partibus constent, sed quoniam hæc per illa habeantur. Horum autem quæ tribus nominibus constant facillimum est capitulum cubi ęqualis rebus & numero, cuius pars iam maxima ex prima regula habetur, & quòd secundum rationem capituli iam inuenti se habet: & etiam quòd ex illo in alia non contra conuersionem ostenderimus. Horum omnium causa de illo agemus.

In capitulo igitur Cubi æqualis rebus & numero, duo proponuntur speciatim, numerus æquationis, numerus etiam rerum: generaliter autem, quod cubus nunc alicuius lineæ seu quantitatis, propositis numeris simplici & rerum ęqualis est. Oportet autem ut generaliter hoc inueniamus & demonstratiuè & facillimè. Cum ergo cubus æqualis sit duabus quantitatibus diuersi generis (aliter non esset hoc generale, si ad solos numeros & eorum partes extenderetur) necesse est ut & ipse in duas tantum partes resoluatur, quarum una numerus sit, & asignato ęqualis: alia totidem partes contineat natura uarias, quot in rebus continentur de eis æquales. Quo circa necesse est cubum saltem ex duabus partibus constare natura diuersis, igitur & latus eius seu res, neq; enim ab unius generis natura plures per multiplicationem quotiescunq; repetitam plures quantitates diuersorum generum fieri possunt, ut ab Euclide in decimo libro demonstratum est. Verùm si in re contineantur duæ quantitates à numero alienæ, necesse est ut inter se sint incommensæ, aliter æquiualerent uni; at ex eiusmodi necesse est cubum fieri, *Propos. 20.*

qui tres partes contineat, numerum & duas rhete, ut rebus ac numero possit coæquari. Cum ergo diuiserimus rem in duas partes, oportet cubum tres eiusmodi progignere, & si in tres ut progignat quatuor atq; ita deinceps, & (ut dictum est) ut in illis sit numerus numero proposito æqualis: reliquę partes uerò ut sint ex natura partium lateris, & illarum aggregatis coæquales.

Rursus ut repetamus quæ dicta sunt, sit cubus a d ex linea a c diuisa trib. & constat quod in eo erunt quatuor partes diuersæ principales cubus a b, cubus b c, triplũ a b in quadratum b c, & triplum b c in quadratum a b. Oportet igitur accommodare numerum, & potest fieri septem modis, facilioribus, ut diximus, si non possumus inuenire æstimationem in faciliori, quomodo in difficiliori inueniemus? Primus ergo modus est, ut numerus tribuatur cubis:



atq; hic modus est inuentus, & est pars illa capituli quæ habetur in qua accipimus ℞ cubicas partium numeri pro rei partibus, & ita cubi illarum sunt numeri qui iuncti æquantur aggregato cuborum c c & e f & res ipsæ æquantur parallelipedis sex, quæ ex cubo a d residua sunt. Sed quoniam cubi a b & b c nunq; possunt esse minores quarta parte totius cubi a d, & hoc etiã non contingit nisi cùm fuerit a c diuisa per æqualia in b. Cùm igitur numerus fuerit minor quadrante cubi totius a d, non poterit ęquari cubis a b, b c: & ideò capitulum hac in parte non fuit generale.

Per 9. secundi El. & regula Dialec.

Sequitur ergo secundus modus, & est ut parallelipeda omnia dentur numero & cubi rebus: & quia parallelipeda non possunt esse maiora dodrante totius cubi, quia cubi non possunt pariter accepti esse minores quadrante, ideò nec hoc capitulum potest esse generale, quoniam cùm numerus fuerit maior dodrante totius cubi, non poterit tribui parallelipedis. Cùm ergo neutrũ istorum capitulorum possit esse generale per se, ambo tamen iuncta constituit capitulum generale: etiam primum seruit quando numerus non fuerit minor quadrante totius cubi, seu triente rerum, quod idem est: secundus cum numerus non fuerit maior dodrante totius cubi, seu maior triplo quantitatis rerũ, quod ad idem pertinet. Ex quo liquet quod cum numerus fuerit à quadrante ad dodrantem totius cubi, & est magna latitudo scilicet semissis, tunc ęstimatio potest haberi

beri per utranque regulam, quia numerus potest tradi cubis & parallelipeda rebus, & conuerso modo numerus parallelipedis & res ipsis cubis. Aestimatio ergo erit eadẽ, & duobus modis inuenta. Licet aũt uidere ex demõstratis in lib. de Proport. quòd proportio aggregati cuborũ ad aggregatum sex parallelipedũ est, ueluti aggregati quadratorum a b & b c partiũ detracto producto a b in b c ad triplum producti seu superficiei a b in b c, seu triplum superficiei a e. Propos.146

Tertius, quartus, quintusque modus non sunt adeo elegantes tametsi priores duo quippiam habeant pręcipui. Tertius siquidem est cum quatuor parallelipeda numero dantur, reliqua duo cum cubis rebus. Est autem hoc inter corpora illa præcipuum, quòd proportio ipsorum corporum est, ut quadratorum partium simul iunctorum ad ambo producta: uelut, capio rem 7, diuisam in 5 & 2. quatuor parallelipeda sunt 140 cubi partium cum duobus parallelipedis sunt 203, proportio 203 ad 140 est uelut 29 aggregati quadratorum 5 & 2 ad 20 duplum producti 5 in 2. Et similiter, in quarto modo numerus datur duobus tantum parallelipedis mutuis. Hoc tamen habet præcipui, quòd extenditur ad quadrantem ad unguem numeri, unde uidetur ad unguem perficere capitulum cum prima regula. Manifestum est ergo, quod in secundo modo oportet producere tertiam partem numeri ex mutuis parallelipedis, in tertio medietatem, in hoc autem totum numerum. Et semper aggregatum ex duobus mutuis parallelipedis æquale est ductui producti partium inuicem in aggregatum earum: seu in rem. Sed in quinto modo damus numerũ uni cubo, reliqua septem corpora rebus, ideò est ualde difficilis, & redit ad capitulum quatuor nominũ inde ex eo ad primum, ideò est deterius omnibus: si tamen posset inueniri, esset generale ut duo sequentia.

Sextus modus est, ut demus numerum uni cubo & tribus parallelipedis quæ fiunt ex latere cubi illius in quadrata lateris alterius cubi, & reliqua quatuor corpora, scilicet, cubum cum tribus parallelipedis rebus. Et ideò est difforme, quoniam quod ęquatur est simile scilicet cubi cum parallelipedis tribus aduersis, cui ęquatur dissimile, nam unum aggregatum æquatur numero aliud rebus. Præcipuum tamen est his corporibus, ut differentia aggregatorum sit æqualis cubo differentię laterum, uelut in exemplo posito primum aggregatum est 185, secundum 158, differentia est 27, cubus 3 differentis 5 & 2. Et hoc capitulum si inueniretur, esset generale.

Septimus modus est, cum numerum damus aggregato ex cubo & duobus cohęrentibus parallelipedis cum uno aduerso & res reliquis quatuor corporibus, uelut in exemplo ad 125 cubum 5 addo

 100 du-

100 duplũ parallelipedi 2 in 25, q̃dratum 5 & 20, parallelipedũ 5 in 4, q̃dratum 2, & totum fit 245, & similiter reliquum erit 8 ꝑ cubo, & 40 ꝑ duplo 5 in 4, q̃dratum 2 & 50, parallelipedum 2 in q̃dratũ, ut omnia sint 98. Pręcipuũ in hoc est, quod utraq; pars habet rationẽ q̃drati, & ℞ q̃drata fit ex 75 in ℞ unius partis, uelut ℞ 245 fit ex 7 in ℞ 5, & 98 ex 7 in ℞ 2. Et proportio talium corporum est uelut partium rei, id est uelut 5 ad 2. Patitur tamen & hoc difficultatem eandem cum priore, scilicet quod corpora similia generatione comparant naturis diuersis per se in genere, ut numero & rebus. Reliquæ aũt compositiones, aut sunt anomalę, uelut si daremus numerũ uni parallelipedo, uel trib. uel quinq; uel duobus, nõ mutuis aut q̃tuor, ex q̃bus duo mutua nõ essent, aut uni cubo et uni parallelipedo, uel duobus uel tribus nõ eiusdẽ generis. Aliæ sunt inutiles, uelut si daremus numerũ aggregato ex ambob. cubis, et duob. parallelipedis aut quatuor quomodocũq;, nã si numerus cũ paruus sit, nõ sufficit aggregato cuborũ, quomodo sufficit eidẽ si addant̃ parallelipeda.

De Regulis specialibus cap. XXV. Artis magnæ cubi æqualis rebus & numero. CAP. II.

PRima hic sit a d numerus rerũ ea ratione cõstructa supficie rectangula, ut altitudo eius c d ducta in residuũ, deducto q̃drato b d, q̃d sit a e ꝑducat f numerum, liquet ergo q̃d cubus c d seu c b cũ numero f ęquat̃ numero rerũ, id est parallelipedo ex b c in a d, sumat̃ ergo b l quarta pars b d, & totius a l latus a m, cui adijciat̃ m n dimidiũ b c, quæ in b l, erit ergo posita a n re corpus ex a n in a d rursus res ipsę dico q̃d cubus a n ęquat̃ totidẽ reb. a n, id est secundũ numerũ a d & numero f. nã q̃dratũ a n est æq̃le q̃drato a m & m n, quare supficie b. a l & b l ex supposito & duplo a m in m n, q̃d est ęq̃le duplo q̃drati m n (posita m o æq̃li m n) ꝑducti ex m n, in m o, & duplo ꝑducti m n in a o, duplũ aũt ꝑducti m n in m o, seu q̃drati m n est ex supposito ęq̃le duplo b l. q̃dratũ igit̃ a n est ęq̃le superficiei a l, & triplo b l, & duplo a o in m n, a l aũt cũ triplo b l est tota superficies a d: q̃dratũ igit̃ a n est ęq̃le a d superficiei a d, et duplo m n in a o, est aũt c d dupla m n igit̃ superficiei ex c d in a o, cubus ergo a n qui fit ex a n in q̃dratũ a n ęq̃lis est parallelipedo ex a n in a d & in c d in a o, sed ex a n, c d, a o, fit idem q̃d ex c d in superficiẽ ex a n in a o quę est ęq̃lis superficiei a e, nã ex a n in a o fit cũ q̃drato m n, q̃d est b l q̃dratũ a m, eo q̃ m n & m o sunt ęq̃les igit̃ detracta cõmuni superficiei b l ex a n in a o fit a c, & ex c d in a o ex supposito fit f numerus, igit̃ cubus a n æq̃lis est parallelipedis ex a n in a d, & ex c d in superficiẽ a e, q̃d est ęq̃le f, numero igit̃ cubus a n est ęq̃lis parallelipedo ex a n in a d cũ numero f, at ex a n in a d est numerus rerũ positarũ supponendo a n rẽ, quia adfuit numerus rerũ, igit̃ cubus est ęq̃lis rebus & nume-

Per 4. 2. Element.

Per 5. 2. Element.

& numero ꝓpositis. Hæc demonstratio ostendit q̃d hoc capitulum non orit̃ ex illis septem modis sed alia ratione. Ex hoc etiã sequitur q̃d capitulũ cubi & numeri ęq̃liũ rebus est simplicius, et ex se magis obuiũ cognitioni capitulo cubi ęq̃liũ rebus et numero. nã in eo sufficit ut inuenias partẽ in numero rerũ, cuius radix ducta in reliquã partẽ ꝑducat numerũ propositum. Hęc etiã regula non est generalis per se toti capitulo cubi ęq̃liũ rebus & numero, qa ubi numerus esset maior nõ satisfaceret, sed est generalis capitulo cubi & numeri ęq̃lium rebus. Secũda quoq; regula nec ex his demonstrat̃, sed accepta quacunq; parte cubi ꝓ numero reliqua est ęq̃lis rebus ex supposito, igit̃ superficies est æq̃lis numero rerũ. Si ergo ea superficies cũ eo quod ꝓuenit diuiso numero per eandẽ quantitatẽ fuerit q̃dratum illius quantitatis, igit̃ quantitas illa est res. Sed neq; hoc ad hoc ꝓpositũ pertinet, cũ ex illa diuisione rei nõ pendeat. & licet ad quadrati diuisionẽ quod cubi basis est, res diuisa intelligat̃, attamen illa diuisio magis pertinet ad capita cubi & numeri cõparatorum q̃dratis quã rebus. Tertia regula orit̃ ex tertio modo p̃cedentis diuisionis. Quarta regula similiter ex quarto modo demonstrat̃, nam duo cubi cũ quatuor parallelipedis ad duo reliqua parallelipeda eã obtinent ꝓportionẽ quam q̃drata partiũ rei diuisę cũ superficie unius partis in alterã ad alterã superficiem quæ quadratũ cõplet. Cũ ergo duo q̃drata et superficies ex una parte in aliã sint tres quantitates cõtinuę ꝓpositionis & radices extremarũ, seu latera q̃dratorũ ex supposito ducta in ipsa q̃drata mutuo ꝓducant numerũ ęq̃tionis & parallelipeda etiã, igit̃ parallelipeda sunt æqualia numero, reliqua aũt corpora rebus. ergo cũ cub. sit æq̃lis illis octo corporibus, erit etiã ęq̃lis rebus & numero. Quod uero sex illa corpora sint ęq̃lia rebus, cõstat ex cõstitutione cubi, et demõstratis in lib. de Proport. Quinta regula ex secundo modo originẽ ducit, uerùm cũ ibi demõstrata sit, nõ est ut eam repetã. Sexta regula huic ꝓposito non cõgruit, nã specialis est. Septima oritur ex quinta, sed uidet̃ ab ea diuersa, quia in illa supponit̃ ℞ tota scilicet ℞ v: 28 m: 3 quad. in hac dimidiũ ℞ 7 m: $\frac{1}{4}$ quad. Et quia in una ducũtur partes mutuo in q̃drata in alia aggregatũ in ꝓductũ partiũ: sunt tamẽ idẽ ut demõstratũ est in lib. de Proport. Pendet aũt per regulam de modo cum 1 cu. ęq̃lis sit 7 reb. p: 90 ex 7 m: q̃drato differentię q̃d est 1 quad. posita differẽtia 1 pos. (tanq; ꝓducto partiũ, & est semper ęq̃le differentiæ aggregati q̃dratorũ a ꝓducto unius partis in alterã) in ℞ v: 28 m: 3 q̃drata, inuentũ per regulã de modo fit 30 tertia pars numeri ęquationis. Sic octaua pẽdet ex tertia eodẽ ꝓcessu: sed q̃a positę sunt solũ ad inuentionẽ generis quantitatum q̃ multiplicatę in q̃drata uel radices ꝓducant numerum ideo omitto.

De modo inueniendi quantitates quæ seruiant capitulis per producta unius partis in aliam, & quadratum differentiæ partium. CAP. III.

CVm dixerit quis 1 cu. p̄ 8 æqualia 7 quadratis, tunc diuides 7 in duas partes, ex quarum una in alterius quadratum fit numerus, & semper oportet ut reliqua pars quæ nō in se ducitur sit binomium uel recisum primum, quia quadratum alterius necessariò est binomiū uel recisum primum. Ex Euclide igitur si debet numerum efficere ductum in reliquam partem, oportet ut sit illa secunda pars binomium uel recisum primum. Prima ergo pars potest esse binomium uel recisum primum, secundum & tertium, & potest etiam esse binomium quartum, quintum & sextum, non tamen recisum, quia cum prima sit R & secunda pars necessariò sit binomium, quia prima est recisum, igitur in utraq; esse R p: igitur non potest esse numerus ille qui ab initio diuisus est. Dico ergo quod diuiso numero quadratorū in duas partes, quas uocabimus principales, & eam quæ in se ducitur, uocabimus principalem, & pro aliis duabus partibus inueniendis, duc primam in duplum secundę, & à producto deducito quadratum primę, & R residui est pars addenda principalibus, aut detrahenda cum conditionibus condictis. Et similiter p numero producēdo duc differentiā principalium in se, & productum in duplum primæ principalis, & quod producitur, est quęsitus numerus. Exemplum ergo in proposito, diuido 7 in 4 & 3, duco 4 in duplū 3, fit 24, deduco ob quadratum 4, relinquitur 8, cuius R addita 4 uel detracta et ita addita uel detracta à 3 cōuerso modo cōstituit partes 4 p: R 8 et 3 m: R 8 uel 4 m: R 8 et 3 p: R 8. Et ideo notandū est quod sub æquatione eadem prima pars principalis, et secūda idem faciunt per binomium et recisum. Vtraq; enim harum æstimationum scilicet 4 p: R 8 et 4 m: R 8 est æstimatio 1 cu. p: 8 æqualium 7 quadratis. Pro numero ergo habendo æstimationis, seu qui producitur, cape 1 differentiam 4 et 3 partium principalium: et duc in se, fit 1, duc in 8 duplum primę principalis fit 8 numerus quęsitus. Exemplum ergo aliud, diuido 7 in 3 et 4, et fit 3 pars prima, duco in duplum 8 fit 24, aufero 9 quadratū primæ fit 15. Et erit pars R 15 detrahenda à 4 et addenda 3 propter ea quæ dicta sunt. Pro numero sume differentiam quæ est 1, duc in se fit 1, duc in duplum 3 primę principalis, fit 6 numerus quęsitus. habebo igitur 1 cu. p: 6 æqualia 7 quadrata. Et similiter diuido 7 in $1\frac{1}{2}$ et $5\frac{1}{2}$ et duco u duplum $5\frac{1}{2}$ in $1\frac{1}{2}$ fit $16\frac{1}{2}$ detraho $1\frac{1}{2}$ quadratum $1\frac{1}{2}$ relinquitur $14\frac{1}{4}$, huius igitur radici adde $1\frac{1}{2}$, et detrahe à $5\frac{1}{2}$ et fierent partes R $14\frac{1}{4}$ p: $1\frac{1}{2}$ et $5\frac{1}{2}$ m: R $14\frac{1}{4}$. At productum fit ex differentia

$5\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ in se & fit 16, & ducto 16 in 3 duplum $1\frac{1}{2}$ fit 48, simili modo ferè ex 8 duas partes, ex quarum ductu unius in quadratũ alterius fiat 9 posita una $4\frac{1}{2}$ alia $3\frac{1}{2}$, per secũdam regulam patet propositum, scilicet quòd producemus 9 uel 7. nam quadratum differentię est 1, & ductum in duplum $4\frac{1}{2}$ constituit 9, & in duplum $3\frac{1}{2}$ constituit 7, & ita si diuidatur in 5 & 3, producetur 40 uel 24. In prima ergo diuisione erunt partes $4\frac{1}{2}$ p: uel m: ℞ $11\frac{1}{4}$ & $3\frac{1}{2}$ p: uel m: eadem ℞ $11\frac{1}{4}$, & ita si diuiseris in $2\frac{1}{2}$ & $5\frac{1}{2}$ habebis 45, & erunt partes ℞ $21\frac{1}{4}$ p: $2\frac{1}{2}$ & $5\frac{11}{2}$ m: ℞ $21\frac{1}{4}$. nam aliter esse non potest, ut ab initio diximus. Et si diuiseris in $1\frac{1}{2}$ & $6\frac{1}{2}$ habebimus 75. Et ex hac operatione patet, quòd præter integra dimidia non potest ulla diuisio esse utilis. Sic enim duc diuisum in a & b, & sit c differentia, & quia si diuidatur per $4\frac{1}{4}$ & $5\frac{1}{2}$ uel $6\frac{1}{2}$ & $3\frac{1}{2}$, & sic de singulis differentia est numerus integer, ergo cum a & b non sunt, neq; integra neq; media, erunt maiora uel minora, ergo c est maius uel minus integro. Et quia numerus qui debet produci, necessariò fit ex quadrato c in duplum a, ubi a sit prima pars, & iam a non est nec integer numerus nec dimidium, igitur duplum a non est numerus, sed aliquis ex eadem denominatione cum c. At quia ducitur in se, & est ultra integrũ, aliquid erit productum, factum genere denominationis quadratæ, ut si sit $2\frac{1}{3}$ erit $5\frac{4}{9}$ at ductum 5 in $\frac{4}{9}$ in $7\frac{2}{3}$ duplum minoris, quia denominatio composita est ad $5\frac{4}{9}$ producit numerum ex genere fractorum, quorum denominator est 27 ut pote $41\frac{20}{27}$ ut demonstratum est suo loco, igitur productum non potest esse numerus aliquis integer, sed 10 non potest diuidi per integra & media nisi decem modis, ergo numerus æquationum non potest esse nisi decem. At 10 quadrata æqualia cubo & numero possunt æquari, ut demonstratum est in libro de Proportionibus usq; ad 148 numeris integris & singulis, ergo diuisio binomiorum & recisorum, & per integra nõ satisfacit, sed desunt 138 numeri integri: præter illos, in quibus sunt adiectæ partes ipsę numerorum quibus eadem ratione hæ quantitates satisfacere non possunt. Sed pro nunc, sufficiat ostendisse de integris, & quia capitula omnia conuertũtur, liquet quod idem defectus est in illis.

Considerandum præterea quod ex hac regula habetur proportio numeri cum additione producti ad numerum sine additione, uelut, si 8 diuisum in 3 & 5, producit 45, & additis partibus quæ sunt ex regula producitur 24, ut superius dixi ℞ ex regula secunda dico, quod proportio 45 ad 24, ut demonstratione patet se habet, ut 15 productum 5 in 3 ad 8 duplũ quadrati differentiæ. Et ita diuidẽdo 8 in 6 & 2, fit 24 primo modo, et per secundũ regulam fit 64, & proportio 24 ad 64, & uelut 12 ꝓducti ex 6 in 2 ad 32 duplũ quadrati 4 differentiæ.

De

De modo redigendi quantitates omnes, quæ dicuntur latera prima ex decimo Euclidis in compendium. CAP. IIII.

EVclides constituit uiginti quatuor lineas alogas, id est, irrationales, & unam rhete seu rationalem uicem habentem numeri.

Rationalis seu rhete, ut sex uel septem: aloga simpliciter quæ numero & rheti potentia tantum est commensa, ut ℞ sex uel septem, id est latus tetragonicum superficiei rhete, sed non quadratæ. Media & est latus tetragonicum superficiei alogæ simpliciter, ut ℞ ℞ 6 & ℞ ℞ 7. Ex comparatione autem alogarum inter se, uel cum rhetis consurgant sex genera binomiorum, de quibus dicemus.

Proprium primi binomij & similiter recisi est, quòd prima pars sit numerus, & secunda aloga, & quadrata harum differant numero quadrato, ut 3 p: ℞ 5, quorum quadrata sunt 9 & 5, differentia est 4, latera autem 9 & 4, sunt 3 & 2, & ita 3 m: ℞ 5 erit residuum primum. Et ita 4 p: ℞ 12. conueniunt autem, ut dictum est in tertio libro, tam binomij quam recisa, quòd primi & quarti prima pars est numerus 2 ℞: 2 & 5, secunda pars est numerus 2 ℞ 3 & 61, ambæ partes sunt ℞, sed primus ordo, id est 1 2 & 3, differunt à 2 ordine, id est 4 5 & 6, quòd in prima ordine pars maior, seu prima semper est potentior minore parte, seu secundo quadrato quantitate commensæ primæ parti, in secundo ordine incommensæ. Modus autem generalis omnibus binomijs & recisis habendi radicem est, ut ducas secundam partem in se, ut ℞ 12 per se fit 12, cuius sume quartam partem semper, & est 3, fac ex prima parte 4, duas partes producentes 3, et erunt 3 et 1. horum radices iunctę faciunt 4 p: ℞ 12, et in producendo quadrata, efficiũt semper rhete, et aloga fit ex duplo unius partis in alteram: & est regula quam posuimus in tertio libro operis perfecti. Cum uerò Euclides non poneret latus linearum hoc inuenit, ut acciperet superficiem ex rheti et binomio primo, cuius latus tetragonicum dixit esse aliquod binomium. Constat autem talem superficiem etiam esse binomium primum, et est tertia regula quæ ut antedicta excipitur ab Euclide. Omnis enim quantitas commensa binomio primo, est binomium primum. Sunt autem commensæ cum fuerit proportio earum, et numeri ad numerum ex dictis ab illo in decimo libro. Sed non sunt omnia binomia eiusdem speciei inter se commensa, et est quarta regula: nam ut uisum est 3 p: ℞ 5, et 4 p: ℞ 7 sunt binomia prima, et tamen inter se non sunt commensa ex eodem Euclide. Idem in omni genere cõtingit alogarum, scilicet ut commensæ sint eiusdem speciei, non tamen quę sunt eiusdem

Cap. 19. Regula 2.
Lib. 10. Propos. 54.
Propos. 66.
Propos. 6.
Propos. 17.

dem speciei inuicem cõmensæ sint. Inueni postmodum quod idem est ducere ℞ 5 in 3, & fit ℞ 45, quæ si ducatur in ℞ 5, fit ℞ 225, & est 15: si duxerimus ℞ 5, in se fit 25, & 5 in 3, fit 15, uide quanto facilius sit, & hæc est quinta regula. Sexta autem continet quatuor propositiones quæ inuicem conuertuntur, & est quod cum fuerint duæ quantitates a d maior & c minor, & diuisa fuerit a b in d, ita ut inter b d & d a cadat media, pars dimidia c, tunc si a b est potentior c quadrato commensæ b d est commensa d a etsi non, non. Et si b d est commensa d a tota a b, est potentior c commensa ipsi a b etsi non, non. Hoc autem pendet ex hoc quod abscisa de æquali d a quadratum a b superat quadratum c, quod est æquale quadruplo b d in d a per octauam secundi Elementorum in quadrato b e. Vsus autem harum linearum est, ut manifestum est a d binomia & recisa inuenienda, & ambas dictas bimedias. Septima regula sumitur ab Euclide, & est quod si superficies æqualis quadrato binomij ad rheten adiungatur, latus secundum est binomium primum. Et est eadem tertiæ regulæ licet uideatur conuersa. Cum enim ut in illa diximus latus binomij primi sit aliquod binomium, igitur quadrata binomiorum omnium sunt binomia prima, at latus illud rhete est tanquam proportio, & non uariat speciem, igitur latus illud alterum necio est binomium primum. Et omnia quæ hic dicuntur de binomijs, intelliguntur de suis residuis, & sunt generalia in omnibus quantitatibus comparando aggregatum ad recisum seu residuum, ideò per hanc octauam regulam tractabimus solum de sex generibus binomiorum, et quinque alijs, et ponemus nomina singillatim hic à latere. Modus quoque iungendi ℞ has, ut apparet in eodem tertio libro commodior est, ut diuidas maiorem radicē per minorē, & exeuntis accipe radicem

Rhete	Aloga	Media	
Binom 1	Binom	Res. 1	Resid
Binom 2	Bimed 1	Res. 2	Res. med 1
Binom 3	Bimed 2	Res. 3	Res. med 2
Binom 4	linea ma.	Res. 4	linea mi.
Binom 5	Pot. in Rat & Med	Res. 5	cũ Rat & Med
Binom 6	Pot. in duo Med	Res. 6	cũ Med & Med

cui adde, id est, & duc in se: & productum in quadratum minoris radicis ℞ productum est quæsiti. Decima regula est, quod huiusmodi diuisiones sunt magis conspicuæ in figura quàm in numeris, ueluti posita ℞ maximi aloga constat per 44. primi Elementorum posse super datam rhetem fieri superficiem æqualem illi. Eius ergo latus secundum erit, ut dixi in septima regula naturæ eiusdem, cuius est superficies, & cum eo latere potero diuidere superficiem rationalem seu rheten, & confestim ex prima diffinitione secundi Elementorum

torum habebo latus ſecũdum quod uix in numeris haberi poteſt, & cum habetur fit magno labore, ibi uerò ſtatim eſt conſpicuum, ſed ars generalis nondum eſt inuenta in numeris. Eſt autem iuxta undecimam regulam, ut inuenias reciſum uſq; ad quatuor quantitates, uelut: uolo diuidere 10 per ℞ 6 p: ℞ 15 p: ℞ 5 p: ℞ 2, pones reciſum ex æquis partibus contrarijs, & habebis diuidendum & diuiſorem: qui eſt 6 p: ℞ 120 m: ℞ 24. cui appone trinomium quod ductũ in reciſum producit 132 p: ℞ 17280. duc etiam trinomium illud in quadrinomium, & habebis diuidendum, quem tædij & breuitatis cauſa omitto. Rurſus

10	℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 p: ℞ 2
	℞ 6 p: ℞ 5 m: ℞ 3 m: ℞ 2
	6 p: ℞ 120 m: ℞ 24
	℞ 600 p: ℞ 500 m: ℞ 300 m: ℞ 200
	6 p: ℞ 120 p: ℞ 24
	133 p: ℞ 17280
	132 m: ℞ 17280

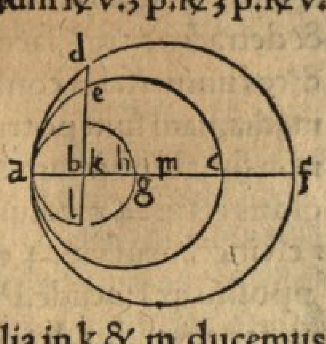
appono reciſum & duco in binomium, & fit 144 pro diuiſione, ducto autem reciſo in quantitatem quæ conſtat ex duodecim nominibus fiet diuidendum uigintiquatuor nominum. Forſan poterunt reduci ad pauciora, quia radices illæ ſint commenſæ. Et ſi tranſeant quatuor quantitates non commenſas in duobus caſibus adhuc poterit eſſe diuiſus. Vel quando habuerit radicem, ut 6 p: ℞ 24 p: ℞ 12 p: ℞ 8, uel cum habuerit diuiſorem: uelut ſi quis dicat, diuide 10 per ℞ 24 p: ℞ 15 p: ℞ 15 p: ℞ 12 p: ℞ 10 p: ℞ 5 p: ℞ 2 p: ℞ 2. Hic quia producitur ex ℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 2 in ℞ 3 p: ℞ 2 p: 1, diuidemus per regulam datam per alterum horum inde quod exit per reliquum. Et ideò poſſumus reducere ad unum caſum quando diuiſor diuidi poteſt per multinomium, ut ita dicam, ita ut minuatur numerus nominum. Nam inuentio lateris eſt quædam diuiſio. Conſyderanda eſt ultimo ratio proportionis ſuperficiei ad lineam. Et dico quod ſuperficies a ad lineam b c eſt, ut ſuper b c fiat ſuperficies rectangula æqualis a dico quod c d latus ſecundum eſt proportio, uel id quod adæquatur proportioni a ad b c, quia n ex proportione ducta in terminum fit, alter terminus ut in numeris uidemus: & eſt ex diffinitione proportionis, & ex latere c d in b c fit a, quia fit b d æqualis a, igitur c d dicetur proportio uera ſuperficiei a ad lineam b c. Et eſt magis conſpicua quàm ſuperficiei ad ſuperficiem, & lineæ ad lineam. Euclides tamen (ut dixi) prætermiſit, quoniam uidebat lineas in latitudine eſſe indiuiduas: nos tamen dicimus quod componitur ex lineis, ſicut ex fluxu puncti fit linea, & inſtantis tempus, & alia eodem modo, & hæc eſt duodecima regula.

Binomij ſecundi latus eſt bimedia prima, ut docet Euclides ſuo modo, poterit igitur uel ſub nomine ℞ v: oſtendi uel recta ratione.

Capiamus ergo ℞ 72 p:8,& per secundam regulam ducamus 8 in se fit 64,cuius pars quarta est 16,fac ex ℞ 72 duas partes,ex quarum ductu inuicem fiet 16.accipio per quintam secundi Elementorum dimidium ℞ 72,quod est ℞ 18,& duco in se fit 18, abijcio 16, remanet 2,cuius ℞ addita & detracta à ℞ 18, & facit ℞ 32 & ℞ 8 per nonam regulam:igitur ℞ harũ partium. i. ℞ ℞ 32 p: ℞ ℞ 8,constituunt bimediam primam, & subtractæ una ab altera residuum bimedij primi.Sunt.n.commensę tantum potentia,nam quadratum ℞ ℞ 8, est dimidium quadrati ℞ ℞ 32, nam ℞ 8 est dimidium ℞ 32: & continent superficiem rheten, & maior est potentior breuiore in quadrato ℞ 8 cuius latus est ℞ ℞ 8 incõmensa in longitudine ℞ ℞ 32,quod est propositum. Et iste modus est omnibus alijs longe facilior,& à nobis pro exemplo explicatur.

Binomij tertij sumatur radix ut ℞ 32 p: ℞ 24,& erit ℞ ℞ 18 p: ℞ ℞ 2,quæ potestate tantum commensæ sunt, & continent superficiem mediam 1 ℞ ℞ 36,seu ℞ 6, & in hoc differt à priore,& maior est potentior minore in quadrato ℞ ℞ 8, quæ est ℞ ℞ 18 incommensa in longitudine,sicut ℞ dimidij ad radicem totius:aut radix 3 ad ℞ 2,& hæc uocatur bimedia secundam.

Binomij quarti ut 3 p: ℞ 6,inuenio radicem:capioq́ ad uitandas fractiones 6 p: ℞ 24,cuius accipio ℞,quæ est ℞ v:3 p: ℞ 3 p: ℞ v: 3 m: ℞ 3,ducito primum ℞ v:3 p: ℞ 3,in se fit 3 p: ℞ 3,duc ℞ 3 m: ℞ 3 fit 3 m: ℞ 3 iunge,fiunt 6 duc ℞ v:3 p: ℞ 3 in ℞ v:3 m: ℞ 3,fit quadratum ducendo unamquamq; seorsum in se, & fiunt 3 p : ℞ 3,& 3 m: ℞ 3,inde inuicem,& fiunt 6 inde accipiendo ℞ quæ erit ℞ 6, & hoc erit productum ℞ v:3 p: ℞ 3,in ℞ v:3 m: ℞ 3. Sed quia oportet bis multiplicare fient,duc ℞ 6 quę sunt ℞ 24.Sed quia per quartam secundi Elementorum quadratum ℞ v: 3 p: ℞ 3 p: ℞ v: 3 m: ℞ 3, æquale est quadratis partium cum duplo unius in alteram.igitur quadratum ℞ v: 3 p: ℞ 3 p: ℞ v:3 m: ℞ 3,est 6 p: ℞ 24,est quadratum ℞ v:3 p: ℞ 3 p: ℞ v: m: ℞ 3.In figura autem capiemus a b, cui triplam faciemus b c in directum coniunctam, & sumemus medium a c quod sit h,delineabimus super id circulum a e c, & ducemus ex a b ad perpendiculum b e, quæ erit latus seu ℞ 3 hanc adiungemus a c in directum, & abscindemus ab a c,& fient b f 3 p: ℞ 3,& b g 3 m: ℞ 3 super c a,igitur & a f diuisis per æqualia in k & m ducemus circulos ad f & a l,& ex parte e producemus b e d latus b f,& ex aduerso b l latus b g. Itaque id erit æqualis ℞ v:3 p: ℞ 3,& ℞ v:3 m: ℞ 3. Ex hoc patet quod Geometrica ostensio est clarior arithmetica: &



ut ita dicam euidẽtior, ea uero q̃ fit per numeros eſt fidelior, certior
& ſecurior, quia experimento ꝓbatur, ut ſupra feci. Et eſt tertiadeci-
ma regula, ſequit̃ etiam alia pulchra quartadecima, ſcilicet in ordine
(licet nõ ad artem multũ) & eſt quod ſicut unũ eſt principiũ in reb.
naturalibus, ita etiã in tranſitu arithmeticorũ ad Geometricas figu-
ras monas, quã quidam appellant unitatẽ, eſt principiũ neceſſarium
39ª decimi. inuentionis, ſuper qua fundat̃ tota ars. Dico modo q̃d ℞ v:3 p: ℞ 3
p: ℞ v:3 m: ℞ 3, cõueniunt oẽs ꝓprietates lineę maioris. Nã ſunt duę
Per 16 prop. quãtitates potentia incõmenſę, omne enĩ binomiũ eſt incõmenſum
ſuo reciſo, etiã eſt uera in omnib. alogis, & facile demonſtrat̃, & eſt
regula quintadecima, & ambo q̃drata pariter accepta ſunt rhete, &
ꝓductum unius in alterã mediam, nam quadrata iuncta faciũt 6, &
Propoſ. 33. productũ unius in alterã eſt ℞ 6. Notandũ q̃d apud Euclidẽ addit̃
una operatio, ſcilicet q̃d partes in ſe ducunt̃, & additur quadratum
medię partis minoris inde ſumit̃ ℞ v: 1. Et hæc operatio in numeris
eſt ſuperflua, quia poſſumus accipere radicẽ cuiuslibet quantitatis.
Binomij quinti, & eſt ut ℞ 24 p: 4, ducemus dimidiũ minoris in ſe ꝑ
ſecundam regulã fiet 4, fac ex ℞ 24 duas partes ꝓducentes 4, & erũt
medietates ℞ 6, quę ductę in ſe faciũt 6, adijce 4, relinquitur 2, cuius
℞ addita ad ℞ 6, facit ℞ 6 p: ℞ 2, & detracta ℞ 6 m: ℞ 2, & harũ quan
Propoſ. 40. titatũ ℞ v: conſtituũt quantitatem quæ poteſt in rheten & mediam.
Quadrata quidẽ harum ſunt ℞ 24, & productum unius in alterã eſt
℞ 4 quod eſt 2, cuius duplũ eſt 4 numerus binomij. Et ſunt potẽtia
incõmenſæ, quoniam ſunt ut dixi binomiũ, & reciſum ℞ 6 p: ℞ 2, cũ
℞ 6 m: ℞ 2. Omnes igit̃ hæ quantitates cũ ſint radices binomiorũ in
ſe ductę, ꝓducunt ſuũ binomium. Et eſt regula ſextadecima. Eadẽ
ut dixi intelligẽda ſunt de reciſis & reſiduis, q̃ ſunt radices reciſorũ.
Binomij ſexti, & eſt ut ℞ 24 p: ℞ 12 ducemus ℞ 12, in ſe fit 12, cuius
quarta pars eſt 3, faciemus ex ℞ 24 duas partes quę ꝓducant 3, et du
cemus ℞ 6 dimidiũ ℞ 24, in ſe fit 6, aufer 3, relinquit̃ 3, cuius ℞ addita
& detracta ex ℞ 6, facit ℞ 6 p: ℞ 3, & ℞ 6 m: ℞ 3, quarũ quantitatũ ra-
dices uniuerſales conſtituunt iunctæ quantitatẽ, quæ poteſt in duo
media, nam ſunt potentia primum incommenſę, quia quadrata illa-
rum ſunt binomium & reciſum. Deinde quia compoſitum ex qua-
dratis eſt ℞ 24 medium, & productum unius in alterum eſt ℞ 3, & ℞
3 eſt incõmenſa ℞ 24, eſt enim ꝓportio unius ad alteram ℞ 8 cõſtat
Propoſ. 41. ꝓpoſitũ ex Euclide. Pręter hoc demonſtrat quod dictę alogę quan
titates, aliter diuidi non poſſunt ut ſint ex eodẽ genere, in quo erant
ante ſeparationẽ. Vt pote 6 p: ℞ 20 eſt diuiſum in 6 & ℞ 20, & conſti
tuit binomiũ primum, aliter ut idẽ conſtituat diuidi non poteſt. Cũ
diuiſa fuerint quãtitates rhete per reſiduũ aliquod exibit binomiũ

eiuſdē ordinis commēſum partib. ſuis illi reſiduo: etſi per binomiũ
exibit reſiduũ eiuſdē ordinis, ſimiliter cōmenſum partibus, et erunt
partes illę binomiorũ cum reciſis, & etiam binomiorũ & reciſorum
eadē proportione, & ex ductu reſidui in binomiũ ſemper ꝓducitur Prop. 112. 113. & 114.
rhete. Et hęc demōſtrant ab Euclide in fine 10 li. Ex his cōſtat q̃d bi-
nomio cōmenſo binomio reſidui aut reſiduo commenſo reſiduo bi
nomij rhete ſemper ꝓducit. Itē ſi latus ſecundũ ſuꝑficiei ę q̃lis q̃dra-
to lineę potētia tantũ rationalis diuidat binomio uel reſiduo, exibit
binomiũ uel reciſum cũ eadē ꝓportione partiũ, quandoq; eiuſdē or
dinis quandoq; diuerſi. Velut diuidendo ℞ 24 p: ℞ 3 p: ℞ 2, exit ℞ 72
m: ℞ 48. At ꝓportio ℞ 72 ad ℞ 48, eſt ut ℞ 3 ad ℞ 2, & ſunt eiuſdē or
dinis. At ſi diuidas eandem ℞ 24 p 2 p: ℞ 2, exibit ℞ 24 m: ℞ 12, q̃ licet
habeant partes in eadē ꝓportione, eadem tñ ſunt binomium cũ reci
ſo eiuſdē ordinis, ſed binomiũ eſt ordinis quarti & reciſum ſexti. Ex
q̊ patet unũ mirum quod licet non poſsint eſſe quatuor quantitates
in eadē ꝓportione, quarũ tres ſint numeri, & quarta ſit potentia tan
tum rationalis, poſſunt tamē eſſe quatuor quantitates, quarum tres
erunt potentia tantũ rationales, & una erit numerus, & poterit eſſe
quãtitatis alogę ad numerũ ꝓportio, uelut alterius alogę ad alogã,
ſeu ut duarũ alogarum. Sequit etiam quod duæ quantitates incom
menſæ habebũt ambas partes cōmenſas, ut 2 p: ℞ 3, & 5 p: ℞ 12, nam
cum ſint binomia primi & quarti ordinis ſunt incōmenſa, & tamē 2
& 5 ſunt cōmenſa, & ſimiliter ℞ 12 & ℞ 3, cum una ſit dupla ad aliam.

De conſyderatione binomiorum & reciſorum continentium figu-
ram rheten, ubi de æſtimatione capitulorum. CAP. V.

CVm omne binomiũ & reciſum poſsit eſſe latus ſuperficiei
numeratę, ideò nō diſtinguã niſi ratione partiũ, in quibuſ-
dã em̃ maior pars eſt numerus, in quibuſdã minor, in qui-
buſdã neutra. Proponã aũt exemplum in oĩbus. Dico quod æſtima
tio in binomio uel reciſo, in quo nō eſt nu
merus, nō eſt idonea in hoc caſu: quia de-
tracta à numero relinq̃t tres quan-
titates incōpoſitas numerũ et duas
radices, et ex radicibus illis in ſe du
ctis non fit niſi numerus, & una ra-
dix numeri, ergo in ꝓducto non poterũt ſe delere. Examinemus er-
go rem per ſingula capita, & dicamus quod ſi cubus eſt 24, ęquetur
32 rebus rei æſtimatio cum ſit duplex eſt 3 p: ℞ 5, & 3 m: ℞ 5, & ipſe
conficiunt iunctæ 6 æſtimationem cubi æqualis 32 rebus p: 24,
& quia ex 32 oportet facere duas partes, ex quarum una in radi-
cem, alterius fiat 24, duco ergo 3 p: ℞ 5, in ſe ſit 14 p: ℞ 180,

4 p: ℞ 2	14	2 p: ℞ 3	2
4 m: ℞ 2		4 m: ℞ 12	
℞ 6 p: 2	2	℞ 6 p: 2	12
℞ 6 m: 2		℞ 216 m: 2	
℞ 6 p: ℞ 2	4	℞ 6 p: ℞ 12	24
℞ 6 m: ℞ 2		℞ 216 m: ℞ 79	

detraho ex 32, relinquuntur 18 m:℞180. Et hic ductus in 3 p:℞5 debet producere 24 numerum æstimationis. Apparet ergo in hoc primo exemplo quod oportet diuisionem fieri in binomio primo, nam 18 m:℞180 & 14 p:℞180 sunt binomia prima, quia habẽt radicẽ, & illa etiã oportet ut sit binomiũ primum, quia ducta in binomiũ primum, ꝑducit numerũ. Et

18 m:℞180
2 p:℞5

24

14 p:℞180
3 p:℞5
18 m:℞180

si residuũ non fuisset binomiũ primum, sed quartũ, etiã radix binomij primi fuisset binomium quartũ, aliter nõ potuisset ꝑducere numerum. Secundum exemplũ igitur sit 1. cu. p:12 æqualia 34, rebus rei æstimationes sunt 3 p:℞7, & 3 m:℞7, quæ componunt 6 æstimationem 1 cu æqualis 34 rebus p:12, duco ergo 3 p:℞7 gratia exempli in se fit 16 p:℞252 detraho ex 24, relinquuntur 18 m:℞252, ex quo & 3 p:℞7, producitur 12 ad unguem. Ista sunt plana. Tertium est 1 cu. p:8, æquatur 18 rebus, & æstimatio est ℞6 m:2 (omitto nũc integram) quadratum ℞6 m:2 est 10 m:℞96, residuum ℞96 p:8. Causa est ergo, quod binomium primum relinquitur residuum quin & econuersò. Quia ergo fuit radix residuum quintum res bene se habet. Idem dico de binomio & residuo secundis. Et in hoc genere habet fermè plura exempla quam in primo uelut uides. Et ℞12 m:3 est recisum secundum, & ℞6 m:2 est recisum quintum, & 3 m:℞5 recisum primum, & 3 m:℞7 recisum quartum. habes igitur omnia exempla.

℞96 p:8
℞6 m:2

8

1 cu. p:8 æqual. 18 pos.
æstim. ℞6 m:2

1 cu. p:48 æqual 25 rebus
æstim. ℞ $3\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$

1 cu. p:21 æqual. 16 rebus
æstim. ℞ $9\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$

1. cu. p:18 æqual. 19 rebus
æstim. ℞ $17\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$

1 cu. p:18 æqual. 15 rebus
æstim. ℞ $8\frac{1}{4}$ m: $1\frac{1}{2}$

1 cu. p:18 æqual. 39 rebus
℞12 m:3

1 cu. p:12 æqual. 34 rebus
æstim. 3 p:℞7, uel 3 m:℞7

1 cu. p:24 æqual 34 rebus
æstim. 3 p:℞5, uel 3 m:℞5

Primum igitur consyderandum est, quod in primo & quarto potest esse rei ęstimatio binomium & recisum, ut uides in duobus ultimis exẽplis, sed in secundo & quinto nõ potest esse nisi recisum. Probatur, nam si sit binomiũ primum, igitur residuum erit, uel residuum primi uel quarti modi, ergo per præcedentem ductum in recisum secundi uel quinti generis nõ producit numerum. Sunt igitur sex æstimationum genera binomium, primum, quartum, & recisum primi quarti, itemq́ secundi & quinti modi. Secundum est, quod cum

sint

sint duæ æstimationes in hoc capitulo cubi & numeri ęqualium rebus, uel æquales uel inæquales, & in reciso secundo, & quinto non possit esse suum binomium, & secunda æstimatio habeatur per primam (ducto illius dimidio in se, & triplicato producto & detracto à numero rerum) ℞ residui deducto dimidio, æstimationis primæ est æstimatio secunda: uelut 1 cu. p: 18 æquatur 39 rebus & rei æstimatio est ℞ 12 m: 3, duco ℞ 3 m: $1\frac{1}{2}$, in se fit $5\frac{1}{4}$ m: ℞ 27, triplica fit 153 m: ℞ 243, detrahe ex 39 numero rerum, relinquitur $33\frac{1}{4}$ p: ℞ 243, à cuius radice uniuersali detrahe ℞ 3 m: $1\frac{1}{2}$, dimidium primæ æstimationis erit secunda æstimatio ℞ v: $23\frac{1}{4}$ p: ℞ 243, ablata ℞ 3 m: $1\frac{1}{2}$, & hoc totum constat esse æquale 69, necesse est ut secunda æstimatio sit numerus, uel aliquid quod se habeat ad priorem æstimationem, ut ℞ v: $23\frac{1}{4}$ p: ℞ 243 p: $1\frac{1}{2}$ m: ℞ 3 ad recisum secundum. Et ita liceret per eandem regulam inuenire secundam æstimationem. Tertium est, quod cum in eodem numero puta 18 inueniantur plures æstimationes ut pote puta ℞ 17 $\frac{1}{4}$ m: $\frac{1}{2}$ & ℞ 8 $\frac{1}{4}$ m: 1 $\frac{1}{2}$ & ℞ 12 m: 3. Ita oporteret sub eodem numero rerum idem facere. Et hoc magis conueniret ad rei intelligentiam.

Quartum, quod uidemus numerum rerum in numeros non solum integros sed etiam fractos uelut in quarto exẽplo 19 diuiditur in 17 $\frac{1}{2}$ & 1 $\frac{1}{2}$ in Quinto autem 15 in 10 $\frac{1}{2}$ & 4 $\frac{1}{2}$ & in secundo 25 in 3 $\frac{1}{2}$ & 21 $\frac{1}{2}$ & in tertio 16 in 11 $\frac{1}{2}$ & 4 $\frac{1}{2}$ Consyderare igitur oportet num in alias.

Quintum, quod uidemus numerum æquationis si sit compositus, ut 18 12 24 facile habere æstimationem & plures etiam, si autem primus difficile est inuenire unam solam.

De operationibus p: & m: secundum communem usum. CAP. VI.

IN multiplicatione & diuisione p: fit semper ex similibus 1
m: ex contrarijs, unde p: ductum in p: & diuisum per p: & m: ductũ in m: et diuisum per m: producunt semper p: Et ita p: in m: uel m: in p: uel p: diuisum per m: uel m: per p: producit m.

In additione omnia retinent suam naturam, in detractione com- 2
mutant, ut p: additum fit p: m: m: detractum p: uicem gerit m: m: detractum p. Sin autem uincatur, relinquitur id à quo detrahitur, ut m: 4 à m: 6 relinquitur m: 2 quia m: à quo detrahitur p: maius.

℞ p: est p: ℞ m: quadrata nulla est iuxta usum communem, sed de 3
hoc inferius agemns, de cubica dubium non est, nam ℞ 1 cu. m: 8 est m: 2.

Si quis dicat diuide 8 p: 2 p: ℞ 6 uel ℞ 6 p: 2 tum inuenies ambo 4
recisa

recisa ℞ 6 m: 2, & 2 m: ℞ 6, quod est uere m: ducas ergo recisa in 8 pro quantitate diuidenda, fiunt ℞ 384 m: 16 & 16 m: ℞ 384, quod est m: hoc igitur cum primum sit diuidendum per p: 2, exit manifestè ℞ 96 m: 8. Secundum diuiditur per m: 2, exit ex prima regula, idem scilicet ℞ 96 m: 8.

℞ 6 p: 2
8 — ℞ 6 m: 2
℞ 384 m: 16 p: 2
8 — 2 m: ℞ 6
16 m: ℞ 384 2 p: ℞ 6
m: 2
℞ 96 m: 8
℞ 96 m: 8

Recisum autem quod componitur ex p: & m: potest habere radicem, & illa constat ex p: & m: ut 5 m: ℞ 24 eius ℞ est ℞ 3 m: ℞ 2.

De examine æstimationum, sumptarum ex regula secunda & tertia, secundi capituli. CAP. VII.

PRoponamus quod cubus æqualis sit 18 rebus p: 30, unde rei æstimatio iuxta partem capituli inuentam, sit ℞ cu. 18 p: ℞ cu. 12. & supra augendo numerum extenditur in infinitum. Et si dederimus parallelipeda omnia numero, oportebit ex hac æstimatione facere duas partes, ex quarum ductu in quadrata mutuo fiat 10 tertia pars numeri. Quare etiam ex ductu aggregati, seu æstimationis in productum fiet idem. Diuidam ergo 10 per ℞ cu. 18 p: ℞ cu. 12, exit ℞ cu. 12 m: 2 p: ℞ cu. 5 $\frac{1}{3}$ productum, diuidam ℞ cu. 18 p: ℞ cu. 12 in duas partes, quæ ductæ inuicem producant ℞ cu. 12 m: 2 p: ℞ cu. 5 $\frac{1}{3}$ & erunt partes. Dico ergo quod cum duo parallelipeda cum simili æstimatione possint æquari etiam 30, sex parallelipeda poterunt æquari 90, & multo amplius ueluti cubus æquatur 18 rebus p: 58, rei æstimatio est ℞ cu. 54 p: ℞ cu. 4. Et si cubus æquetur 18 rebus p: 75 rei æstimatio erit ℞ cu. 72 p: ℞ cu. 3. Et si quis dicat 1 cu. æquatur 18 rebus p: 33 rei æstimatio, per eandem regulam erit ℞ cu. 24 p: ℞ cu. 9. Diuidam ergo 11 per ℞ cu. 24 p: ℞ cu. 9, exit ℞ cu. 21 $\frac{1}{3}$ m: 2 p: ℞ cu 3. Partes igitur erunt similiter si cu. æqualis sit 18 rebus p: 42 erit æstimatio ℞ cu. 36 p: ℞ cu. 6. Et parallelipeda 14, diuide 14 ergo per ℞ cu. 36 p: ℞ cu. 6, exit ℞ cu. 48 m: 2 p: ℞ cu. 1 $\frac{1}{3}$, duc ℞ cu. 4 $\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{3}{4}$, in se fit ℞ cu 20 $\frac{1}{4}$ p: 3 p: ℞ cu. $\frac{9}{16}$, detrahe ex hoc quod produci uis, id est aggregatum relinquitur 5 m: ℞ cu. $\frac{3}{4}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{48}$ p: ℞ partes erunt.

Per quintam 2[i] Elem.

℞ cu 2 $\frac{1}{4}$ p: ℞ cu. 1 $\frac{1}{2}$ p: ℞ v: 5 m: ℞ cu. $\frac{3}{16}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{12}$.
Et ℞ cu. 2 $\frac{1}{4}$ p: ℞ cu. 1 $\frac{1}{2}$ m: ℞ v: 5 m: ℞ cu. $\frac{3}{16}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{12}$.

℞ cu. 3 p: ℞ cu. 1 $\frac{1}{8}$ p: ℞ v: 5 m: ℞ cu. $\frac{1}{3}$ m: ℞ cu. $\frac{3}{64}$.
p: ℞ c. 3 p: ℞ cu. 1 $\frac{1}{8}$ m: ℞ v: 5 m: ℞ cu. $\frac{1}{3}$ m ℞ cu. $\frac{3}{64}$.

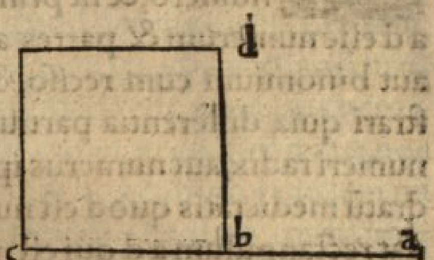
℞ cu. 4 $\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{3}{4}$ p: ℞ v: 5 m: ℞ cu. 6 $\frac{3}{4}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{48}$ p:
℞ cu. 4 $\frac{1}{2}$ p: ℞ cu. $\frac{3}{4}$ m: ℞ v: 5 m: ℞ cu. 6 $\frac{3}{4}$ m: ℞ cu. $\frac{1}{48}$.

De

De natura laterum parallelipedorum. CAP. VIII.

Sit parallelipedum ex a b in c d quadratum æquale numero: & dico primo quod si a b fuerit latus cubi, & cubus b c numerus, erunt a b & b c commensæ: Nam proportio a b ad b c est ut numeri, ad numerum igitur sunt commensę, quod si a b sit latus cubi, & non commensum b c clarũ est, quod cubus b c non potest esse numerus per præcedentem, neq; b c ipsa. Tertiò dico quod si cubus b a non sit numerus, & parallelipedum sit numerus, nec b c est latus cubicum numeri: aliter essent parallelipedi ad cubum, ut a b ad b c, & ideò ut numeri ad numerum, & ab commensa b c, quod est contra Euclidem. Omnis enim commensa lateri cubi est latus cubi. Dico demum quod in hoc casu a b non est commensa b c. nam cum cubus b c non sit numerus, & parallelipedum sit numerus, ergo parallelipedum est incommensum cubo b c, sed a b ad b c, ut parallelipedi ad cubum igitur a b est incommensa b c, quod est quartum.

Per sextam diff. 10 El.

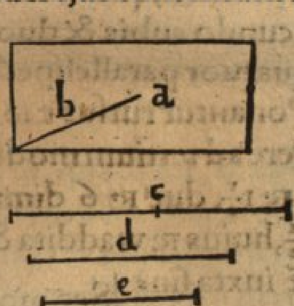


Per 33am 11i & 10am, & 6am propos. 10 Elem.

Per 10am 10i Elem.

Quomodo ex quacunq; linea constituantur duo parallelipeda, non maiora quarta parte cubi lineæ propositæ. CAP. IX.

Sit parallelipedum a, cuius altitudo b, proposita linea cuius duplum cubi medietatis non sit minus parallelipedo proposito, uolo datam lineam sic diuidere, ut contentum sub c altitudine in superficiem partiũ, sit æquale à parallelipedo. Inter c & b statuatur media proportione d, & fiat ut c ad d ita lateris tetragoni a ad e lineam, erit ergo superficiei a ad quadratum c, uelut c ad d duplicata, quare ut c ad b, quæ etiam est dupla ꝓportioni c ad d, parallelipeda, ergo ex c in quadratum e, & ex b in a erunt æqualia, quia ergo parallelipedum ex b in a non est maius parallelipedo ex c in quadratum medietatis eius, neque ergo parallelipedum ex c in quadratum e maius erit parallelipedo ex c in quadratum medietatis ipsius, c ergo e, nõ est maius medietate c. Ex c igitur facio duas partes, quarum rectangulum sit æquale quadrato c per ea quæ demonstrauimus in Geometria & habebimus partes lineæ propositas. Cum igitur parallelipedum ex c in superficiem, ex suis partibus sit æquale parallelipedo ex b in a sequitur per demonstrata in libro de Proportionibus, quod duo mu



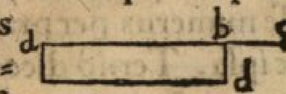
Per 24am 11i Elem.

Per 143 propos.

tua parallelipeda partium c lineæ propositæ sunt æqualia paralleli= pedo ex b in a, quod est propositum.

Quomodo conueniant partes cum linea proposita in parallelipedo. CAP. X.

1 Sit proposita primùm a c linea diuisa in b, ut parallelipe= dum ex tota a c in superficiem a d ex a b in b c sit æquale numero, & sit primò a c numerus, constat quod oportet a d esse numerum & partes a b, b c numeros aut binomium cum reciso, & potest demon= strari quia differentia partium necessariò est numeri radix, aut numerus ipse ad hoc, ut qua dratū medietatis quod est numerus, quia a c tota est numerus, exce= dat rectangulum a d qui est numerus, quoniam ex illo in a c nume= rum fit numerus e. Exempli causa, sit a c tota, b & e numerus 36. pos= sum ex secundo modo tribuere numerum sex parallelipedis, & tūc duo erunt 12, diuide 12 per a c, exit 2 superficies a d, igitur partes erūt 3 p: ℞ 7 & 3 m: ℞ 7. Et duo cubi erūt 90 p: ℞ 8092. Et 90 m: ℞ 8092, quod totum est 180, unde parallelipedis relinquuntur 36. Possum dare dimidium e iuxta tertium modum uni parallelipedo, & erunt partes 3 p: ℞ 6 & 3 m: ℞ 6, possum iuxta quartum modum tribuere totum 36 duobus parallelipedis, & partes erunt 3 p: ℞ 3, & 3 m: ℞ 3. Et in primo casu cubus æquabitur 30 rebus p: 36. In secundo cubus equabitur 30 rebus etiam p: 36. Et in tertio rursus eodem modo, sed discrimen est, quoniam in primo casu 30 res æquatur cubis solum, in secundo cubis & duobus parallelipedis: in tertio duobus cubis & quatuor parallelipedis.



Ex quinta secundi El.

2 Ponantur rursus e 12 a c ℞ 24 diuidam e totum, sed melius est re= ducere ad tertium modum diuidēdo dimidium, scilicet 6 per ℞ 24, exit ℞ $1\frac{1}{2}$, duc ℞ 6 dimidium ℞ 24, in se fit 6, abijce ℞ $1\frac{1}{2}$, & fit 6 m: ℞ $1\frac{1}{2}$, huius ℞ v: addita & detracta a ℞ 6 ostendit partes, proponam autē iuxta singulos modos.

Sec. mod.	℞ 6 p: ℞ v: 6 m: ℞ $\frac{2}{3}$	℞ 6 m: ℞ v: 6 m: ℞ $\frac{2}{3}$
Ter. mod.	℞ 6 p: ℞ v: 6 m: ℞ $1\frac{1}{2}$	℞ 6 m: ℞ v: 6 m: ℞ $\frac{2}{3}$
Quar. mod.	℞ 6 p: ℞ v: 6 m: ℞ 6	℞ 6 m: ℞ v: 6 m: ℞ 6.

Constat hanc estimationem inutilem esse, nam habemus cubum per parallelipeda duo uel qua= tuor, uel sex equalia numero. At reliquum ergo est ℞ aliqua ut pote ℞ 13824 m: 12 aut m: 6, uel m: 4, sed hoc diuiso per ℞ 24, quæ est res, nullus potest prodire numerus, igitur cubus non potest æquari re= bus sub aliquo numero integro uel fracto.

3 Simili ratione sed alia tamen causa ostendo, quod si a c sit ℞ cu. numeri simplex quòd non potest satisfacere. Proponamus ergo quod

quod a c sit ℞ cu.40, & e sit 2, & accipio quartum modum in hoc casu, ut faciliorem seu simpliciorē diuido 2 per ℞ cu.40, exit ℞ cu. $\frac{1}{5}$ superficies a d, diuido a c per æqualia, fit ℞ cu.5, duco in se fit ℞ cu.25, detraho ℞ cu. $\frac{1}{5}$ relinquitur ℞ cu.12$\frac{4}{5}$, huius ℞ addo & detraho a d ℞ cu.5, partes erūt ℞ cu.5 p: ℞ cu. ℞ 12$\frac{4}{5}$, & ℞ cu.5 m: ℞ cu. ℞ 12$\frac{4}{5}$, Istarum igitur partium duo tantum parallelipeda faciunt 2, reliquum igitur à cubo ℞ cu.40, manifestum est quòd necesse sit esse numerū, & est 38.38 igitur diuisum per rem quæ p: ℞ cu.40 necessariò producit ℞ cu. igitur numerus rerum non potest esse numerus uerus, sed ℞ cu. ut si quis dicat cubus æquatur rebus, ℞ cu. 100 p: 10, hoc autem non uenit in usum. Quęrimus enim nos cubum ęqualem numero rerum, & numero seu integro seu fracto. Et dato quòd incideremus in talem casum hoc esset rarò, nec habemus regulam generalem, sed posset inueniri, uelut in binomijs uel recisis prout nunc subiungemus.

Proponatur nunc (postquàm priores tres modi parū utiles sunt, 4
nam primus est notus etiam sine capitulis, & est cuiq; obuiam, nec est generalis, nec ut in pluribus saltem, reliqui duo prorsus inutilis, nec ulla ℞ alia simplex ut ℞ ℞, uel ℞ ℞' pª, uel ℞ quadrata potest eadem ratione esse utilis, quia cubus eius necessariò esset è genere primæ ℞, & detracto e recisum, ergò diuisum per rem non posset exire numerus ullus) quod a c sit duę ℞ quadratæ, dico quod & hic modus inutilis est, nam detracto numero e relinquetur cubus recisum, & ita non potest diuidi per rem ut prodeat numerus, nam in cubo binomij uel recisi ubi ambę partes sint radices, nō potest prodire numerus, ut constat.

Et neq; potest a c esse ℞ ℞, uel ℞ ℞' uel ℞ cu. quadrata, quia tales 5
perueniunt ad radices eiusdē generis, unde detracto numero fiunt recisæ, sed recisum non potest diuidi per ℞ ullam unius generis, ut prodeat numerus, igitur non poterit esse numerus rerum uerus in æquatione. Sed neq; ex ℞ 2 & ℞ ℞ 18, nec ex ℞ ℞ ℞ 8 & ℞ ℞ 2, nam quamuis tria parallelipeda in prima sint 18, & in secunda 6, relinquuntur tamen tres naturæ diuersæ, ut in prima ℞ 8, & ℞ ℞ 5832, & ℞ ℞ 23328, cōstat autem quod ℞ ℞ non potest magis esse commensa ℞ simplici quam ℞ simplex numero. Ergo ℞ ℞ 23328, nec ℞ ℞ 5832 possunt esse commensæ cum ℞ 8, sed neq; inter se: quia ℞ 5832 fit ex ℞ 18 in ℞ ℞ 18, & ℞ ℞ 23328 fit ex 6 in ℞ ℞ 18, at 6 & ℞ 18 non sunt commensæ, licet diuisæ 23328 per 5832 exeat 4, & ideo contingit, quia diuisa ℞ ℞ 23328 per ℞ ℞ 5832 exit ℞ ℞ 2, igitur non sunt commensæ. Cum ergo in re non sint nisi duo genera quantitatum

in diuidendo, & eſt reſiduum cubi tria, non poterit prodire numerus rerum. Et ita in omnibus ſimilibus.

Cor^m 1. Ex quo patet quòd hoc eſt generale, licet explicuerimus de parallelipedo, qualiſcũq; tribuatur pars cubi ipſi numero, reliquum erit plurium partium non commenſarum quàm ſint in re, igitur non poterunt eſſe res ſub numero aliquo.

Cor^m 2. Ex hoc etiam ſequitur quòd quo plures erunt eiuſmodi partes incommenſæ, eo fiet diſcrimen numeri partium cubi detracto numero à partibus radicis maius, ergo multo minus poteris reſiduum diuiſum per rem reddere numerum ut proponebatur.

6 Nec poteſt eſſe una ℞ v: quadrata, neq; cuba neq; alterius generis: nam ſi ſit ℞ quadrata, idem ſequitur quod in ſecunda regula. Sin autem cubica diſſoluetur, ergo nõ poterit continere rem, id eſt ℞ v: cu. ſub aliquo numero. Neq; ℞ v: quadrata iuncta alteri ℞ ſimplici, nam ut dixi in corrolario ſecundo præcedentis, quo plures fuerint partes incommenſæ in re, eo plures erunt in cubo in comparatione ad reliquas.

Neceſſe eſt igitur ut huiuſmodi æſtimatio uniuerſalis ſit aut ſub binomio, in quo ſit numerus, aut in quo non ſit, aut trinomio in quo ſit numerus, aut in quo non ſit, aut in pluribus nominibus in quo ſit, aut in quo non ſit, aut in quãtitate ſylueſtri, ſcilicet quæ non ſit in aliquo genere radicum, nec compoſita ex illis, nec per detractionem relicta. uelut quantitas cuius ℞ ducta in reſiduum ad 12 producat 2, ubi capitulum inuentum non eſſet.

Partes cubi quot & quæ, & de neceſsitate illarum, & quæ incommenſæ. CAP. XI.

Repetamus igitur & dicamus quod latus cubi, cuius quantitas quæritur, ſi debet æquari cubus duobus rebus & numero, oportet ut cubus ſic diuiſus in duo ſaltem, ergo latus eius, nam ex uno non prouenit niſi unum: ergo in duo ſaltem, cum ergo fuerint duæ partes, dum fit cubus, neceſſe eſt ut fiat quadratum totius, & hoc conſtat ex tribus partibus diuerſis natura, & ſi prima potentia a c & a b ſint incommenſæ omnibus inuicem incommenſis, nam proportio quadrati a c ad id quod fit ex a c in c b, eſt uelut a c ad c b, & ſimiliter proportio eius quod fit ex a c in c b ad quadratum b c eodem modo, ergo quod

go quod

go quod fit ex a c in c b, est incommensum utrique. Quadrata etiam a c & c b inter se incommensa ergo per demonstrata ab Euclide erunt tres superficies in quadrato a b, quadratum a c, c b, duplum a c in c b omnes incommensæ, cubus autem a b constat ex a c, & c b in tres dictas superficies, & fiunt quatuor genera corporum: unum ex a c in quadratum, a c, aliud ex b c in quadratum b c, tria ex a c in quadratum a b, & tria ex b c in quadratum a c. (Hæc autem non recito, quia reuocare uelim constructionem cubi in memoriam, sed cum alibi sint demonstrata, ut possim quæ opus est ostendere) Quare primum quæ fiunt ex a c in quadrata b c sunt incommensa cubo b c, quia se habent ut a c ad c b, & eadem ratione quæ fiunt ex b c in quadrata a c, & similiter quæ fiunt ex a c in quadrata b c ad ea quæ fiunt ex b c in quadrata a c, sunt enim omnia ut dixi in proportione a c ad c b, ut à latere uides. Sed posui numeros ut clarius uideres proportionem, & ipsos ductus mutuos semel tantum, repræsentantes parallelipeda ex a c in quadratum a b, & c b in quadratum a c. Dico etiam quod perabsurdum esset accipere partes commensas inuicem a c & c b, quia sic esset perinde ac si essent una & eadem quantitas. Hoc stante habes proximas esse incommensas. At proportio f ad d est duplicata ei quæ est a c ad c b, ubi ergo a c & c b essent potestate commensæ d & f essent commensæ, & e & g. Si uerò secunda potestate, ut si una esset numerus alia ℞ cu. uel ambæ ℞ cu. commensæ tunc cubi inuicem essent commensæ, sed ad parallelipeda utraque incommensi. Etiam ipsa parallelipeda incommensa sunt, ut liquet inter se, quoniam sunt in proportione a c ad c b. Et similiter ℞ quad. 2 & ℞ cu. quad 32, & ℞ quad. 3, & ℞ cu. quad. 108, sunt commensæ potestate secunda. Primæ enim ductæ ad cubum, producunt ℞ quad. 8, & ℞ quad. 32, secundæ ℞ quadrata 27, & ℞ quadrata 180, quæ sunt inuicem duplæ. Vnde notandum quòd aliud est ℞ cu. esse secunda potestate commensas, nam omnes tales sunt, & earum cubi necessariò sunt numeri aliud ipsas esse commensas uelut ℞ cub. 16 p: ℞ cu. 2, uel m: ipsæ enim solæ sunt quarum parallelipeda sunt numeri, quod demonstratur: nam si non sint commensæ a c & c b, igitur nec g & f, nec d & e, sed d & g sunt numeri, quia cubi ℞ cu. igitur e & f non possunt esse numeri. Non ergo potest esse a b composita ex duabus ℞ cubicis incommensis, quia parallelipeda non essent numeri: neque commensis, quia esset una ℞ cubum, & cubus totus numerus. Nullæ ergo duæ quantitates aliquo modo si non adsit nu-

d	e	f	g
8	12	18	27

merus possunt satisfacere parallelipedis pro numero, ut reliquum cubi satisfaciat rebus, nam si omnino sint incommensę longitudine prima & secunda potentia, erunt quatuor producta incommensa: ergo dato quòd unũ esset numerus, tria illa reliqua nõ possent continere duas quæ sunt in rebus numero, ergo non datur numerus rerum. Si autem essent commensæ longitudine, essent una quantitas, igitur non satisfaceret. Si uerò commensæ potentia secunda, & essent ℞ cu. cubi essent numeri non parallelipeda, sin autem nõ essent ℞ cu. erit e ad f, ut a c ad c b, sed a c non est commensum c b, ergo nec e cum f, igitur duo incommoda sequentur primum, quòd si unum parallelipedum est numerus, alterum non erit, quare non poterit fieri regula generalis. Secundum quod aggregatum cuborum, quod erit eiusdem naturæ, non poterit uni parti conuenire secundum numerum, quia est in proportione commensa ad quamcunq; partem cum quadrato unius earum, cum ergo sit quadratum non numerus nisi quantitas sit ℞, & si sit, tunc est contra dicta, cõstet quod non potest fieri æquatio. Exemplum dictum est ℞ cu. quad. 32 p: ℞ 2 cubus secũdum simplicia parallelipeda ad laborem fugiendum est ℞ quad. 72 p: ℞ cu. quad. 2048 p: ℞ cu. quad. 8192. Hic constat nullum fieri numerum, ideò conuenire non potest. Dico modo quòd nullum parallelipedum potest in his suppositis esse numerus: aliter sint a & b non ℞ cubice in secunda potentia commensæ, & producant parallelipedum c numerũ si fieri potest, & quia sunt potentia secunda commensæ, capio duas ℞ cu. in eadem proportione d & e, quæ producant f, parallelipedum, erit ergo ex dictis f ℞ cu. numeri, at c numerus est, ergo proportio c ad f, ut numeri ad ℞ cu. talis est triplicata ex Euclide ei quæ est a ad d, at d ℞ cu. est alicuius numeri, igitur a est numerus, uel ℞ cu. numeri, quod est contra suppositum. Sed neq; possunt esse potentia prima commensæ partes, quia sic esset f ad d, & g ad e, ut numeri ad numerum. Essent ergo hæ duæ quantitates, si igitur una est numerus reliqua non potest continere a c & c b, quæ sunt longitudine incommensæ: si nulla ergo cubus non æquatur numero. Neq; poterunt hæ duæ partes esse ℞ v: cu. Quoniam si commensę erunt una: hoc autem demonstratum est esse non posse, si incommensæ fient quatuor partes in cubo incommensæ, ergo una erit superflua. Relinquitur tandem ut una sit numerus alia ℞, ut uidebimus, uel ut sint plures quam duæ partes. Videamus ergo de tribus partibus primum cubicis omnibus, & incommensis, ut sunt ℞ cu. 6 ℞ cu. 5 & ℞ cu. 2, cognosces autem esse incommensas longitudine, quando (ut dixi) numeri illarum ducti in quadratum,

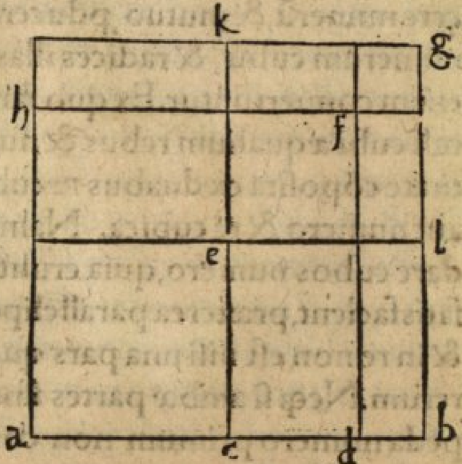
Ex cap. 10.

a—b—c
d—e—f

tum, alterius nõ ꝓducunt numerum cubũ, neq; tunc R cu. unius du cta in alterius q̃dratum producit numerũ conuertunt, ergo sic ꝓdu cere numerũ, & mutuo ꝓducere, & numeros ꝓducere eodẽ modo numerum cubũ, & radices illas commensas esse. Et cõtraria horum etiam conuertuntur. Ex quo tandem cõcluditur, partem illam capi- tuli cubi æqualium rebus & numero non posse consistere in quan- titate cõposita ex duabus R cubicis simplicibus aut uniuersalibus, aut numero & R cubica. Nam in numero & R cubica oportebit dare cubos numero, quia erunt numeri, ergo in numero paruo non satisfacient, præterea parallelipeda incommensa erunt & duæ R cu. & in re non est nisi una pars quæ sit R cu. igitur non erit numerus rerum. Neq; si ambæ partes sint R cu. quoniam si dederis paralleli- peda numero primum non conuenient cu. necessario, si non sint commensa, sint R cu. ergo non numerus. Præterea cubi erunt nu- meri, ergo non poterunt res continere per numerum, cum res con- stet ex duabus R cu. sic enim R cu ductæ in numerum, producerent numerum. Neq; possumus dare utrunq; cubum p: numero ubi nu- merus sit minor quarta parte totius cubi, ut docuimus, ubi autem est maior uel æqualis, damus, & fit illa pars capituli cubi ęqualis re- bus & numero, quæ iam nota est, igitur reliqua pars in hac æqua- tione nullum habet locum. Neq; possumus dare differentiam cubo rum numero, ut in R cu. p: & m: uelut R cu. 6 m: R cu. 2, quia paralle- lipeda m: erunt maiora & p: minora, ergo cum in re R cu. p: sit ma- ior R cu. m: necessario, nullo modo res poterunt contineri per nu- merum in parallelipedis, sed bene iungendo p: cum m: & m: cum p: rerum cum cubo fiet ad unguem capitulum cubi, & rerũ æqualium numero. Sed neq; æstimatio potest constare ex numero, & R qua- drata, ut sit generalis, hoc enim est demonstratum suprà, neque po- test constare ex numero & R v: quadrata quia in cubo erunt duæ partes præter numerum incommensæ (quia R v: non est potentia prima commensa numero) & in re una tantum ergo non constabit numerus rerum. Neque ex numero & R v: cu. quoniam oportebit dare cubos numero, & parallelipeda erunt duo incommensa, ergo ut prius cum sit tantum una R v: cu. non poterunt res numero ali- quo contineri in cubo. Iam ergo uentum est necessario ad triarios, sit ergo a b diuisa in tres partes, quæ omnes sint R cu. incommensæ, nec in eadem proportione, & constat quod fient octo genera cor- porum, unum quod erit numerus qui constabit ex cubo singula- rum partium. Cum enim a c, c d, d b, sint R cu. numerorum, erunt cu bi earum numeri: quare & aggregatum eorum numerus. Secun- dum corpus cõstabit ex sexcuplo corporis, cuius latera sunt omnes partes

Cap. 3. in fine.

partes scilicet a c, c d, d b, iam ergo habes nouem corpora. reliqua decemocto cum sint tria, & tria æqualia, erunt ergo sex, primum constabit ex c d in triplum quadrati a c, secundum ex b d in triplum quadrati a c, tertium ex a c in triplum quadrati c d, quartum ex b d in triplum quadrati c d, quintum ex a c in triplum quadrati b d, sextum ex c d in triplum quadrati b d, cum ergo sint septem partes incommensę in cubo, & tres tantum in re, cubus non poterit æquari rebus sub aliquo numero. Ostendo modo quod ita sit: nam in superficie a g sunt tria quadrata a e, e f, f g: & sex superficies quarum binæ, & binæ sunt æquales d e e h, & d l h k, & l f, f k. At ex a c, c d, d b, in sua quadrata fiunt tres cubi, ex a c uerò in f l, f k, idem fit quod ex c d in d l h k, & ex b d in d e, e h igitur constat de nouem iam corporibus in duo redactis. Dico modo quod ex una parte in quadratum alterius fiunt tria corpora, ut pote ex a c in e d, e h, & ex c d in, fiunt tria parallelipeda ex c d in quadratum a c, igitur cum binæ quantitates residuę multiplicentur, in quadratum tertiæ fient sex aggregata ex tribus parallelipedis, omnia igitur uiginti septem reducta ad octo.



Per 43. 1ⁱ El.

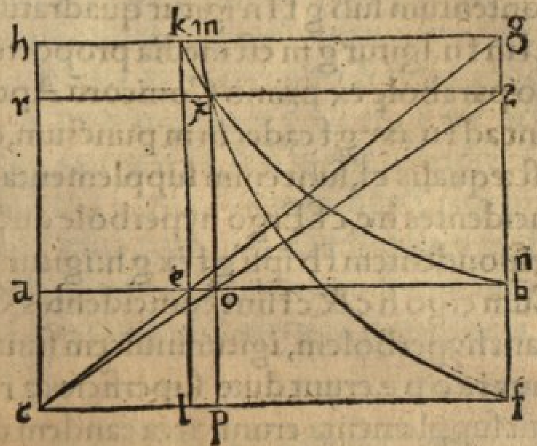
De modo demonstrandi Geometricè æstimationem cubi & numeri æqualium quadratis. CAP. XII.

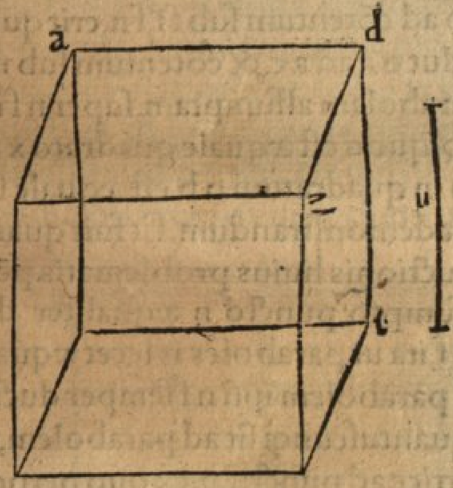
Sint quadrata duodecim æqualia cubo, & centum nonaginta duobus numero, gratia exempli, & constat ex supradictis, quod si numerus esset maior ducentis quinquaginta sex, quod propositum esset falsum, & si esset ipse numerus ducens quinquaginta sex, quod latus cubi esset octo seu bes eiusdem numeri quadratorum, & ideò proposuimus numerum illo minorem. Et ex eisdem constat quod si numerus esset dimidium maximi numeri, scilicet centum uiginti octo, quod res esset tertia pars numeri quadratorum propositorum, quia proportio quadrati bessis ad quadratum trientis est uelut besis ad id quod prouenit diuiso centum uiginti octo solido proposito per quadratum besis, quod est sexaginta quatuor, exit enim duo qui est quarta pars octo, ut sexdecim quadratum quatuor, trientis est quarta pars sexaginta quatuor quadrati octo besis numeri quadratorum propositi. Nos ergo sumpsimus alium numerum ab his ut dixi. Proponatur ergo

Prop. 27.

corpus

corpus solidum d q t z rectilineum & ęquidistantium laterum ac superficierum, cuius ima superficies sit d q t quadrata, & sit totum solidum centum nonaginta duo, scilicet numerus propositus, & eius altitudo sit linea d z, & sit a b data duodecim æqualis, scilicet numero quadratorum proposito, & diuisa ita ut b e sit dupla ad e a. Et duabus c b & d q subtendatur linea quædam u, & sit d z ad a c, ut e b ad u, erit ergo quadrati e b ad quadratum q t, ut e b ad u, quare ut d z ad a c: igitur solidum quod sub a c & quadrato e b æquale solido d q t z, propositum igitur est sic diuidere a b, ut solidum ex una parte in quadratum alterius sit æquale solido ex a c in quadratum e b. Et hoc nos docet facere Eutocius Ascalonita in secundum de Sphæra, & cylindro bifariam, sed sufficiat adduxisse primam illius demonstrationem. Non adducam autem propositiones ex Euclide tanquam notissimas, erigo ergo a c ad perpendiculum super a b, & compleo superficiem a b e f, & duco c e usque occurrat f b in g, & compleo similiter superficiem ęquidistantium laterum h g c f, & duco ex e ęquidistantem c h, quę





sit l e k, & resecetur g m, æqualis d q, & duabus lineis a b & e b subtendatur in continua proportione f n. Ducatur ergo super g f axe paraboles quæ transibit per m, ut ostendam, & similiter ex b, ducatur circa coincidentes h c & c f hyperboles quæ transibit per k, per ea rursus quæ demõstrata sunt ab Apollonio in secundo cronicorũ Elementorum. Vbi ergo se diuident k b & m f in x, ducã r x s æquidistantem a b & x p æquidistantem r c, quæ secabit a b in o, quem punctum dico esse quæsitum. Ducam ergo e o quam ostendam pertingere ad s, quia ergo ut e a ad a c, ita quadratum b e ad quadratum g m, & ideo rectanguli ex c f in f n ad idem, at ut e a ad a c, ita e f ad f g,

DD &ut

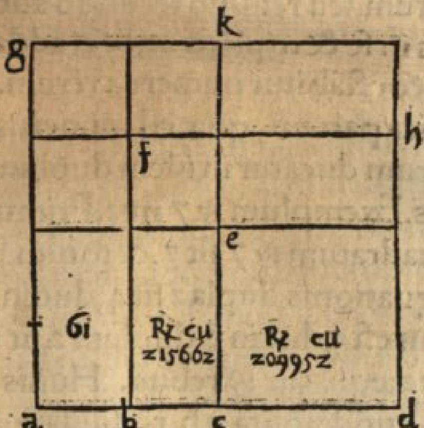
& ut c f ad f g dic quadratum c f ad id quod sub c f, f g, quare ut id quod sub c f, f n ad quadratum g m, ita quadratū c f ad id quod sub c f, f g. Igitur quadratum c f ad id quod sub c f, f n, ut id quod sub c f, f g ad quadratum g m. At ut quadratum c f ad contentum sub c f f n, ita c f ad f n, & ut c f ad f n, ita contenti sub c f, f g ad contentum sub f g & f n, igitur ut c f: f g ad quadratum g m, ita contenti sub c f, f g ad contentum sub g f, f n igitur quadratum g m æquale ei quod fit ex g f in f n. Igitur g m est media proportione inter g f & f n. Ducta ergo parabolę ex primo Conicorū Apollonij per f, ita ut ductæ possint ad f n axe g f cadet in m punctum, quod est primum. Et quia h e est æqualis e f, sunt enim supplementa, erunt h l & a f æqualia, & coincidentes h c, c f. Ergo hyperbole ducta ex b resecabit proportione respondentem f b ipsi g f ex g h: igitur cadet in k, quod est secūdum. Cum ergo h c & c f sint coincidentes, & rectangula r x p, & a b f tangant hyperbolem, igitur inuicem sunt æqualia, detracta igitur communi a o p c, erunt duæ superficies a r x o, & a b p f æquales. Et cum sint supplementa erunt circa eandem diametrum. Igitur c o cadat in f, quod est tertium. Quoniam ergo c f ad f f, ut c p ad p o, & ideò ut a o ad a c, & ut c f ad f f ita contenti sub c f, f n, quod est quadratum e b ad cōtentum sub f f, f n, erit quadrati e b ad contentum sub f f, f n, uelut o a ad a c, & cōtentum sub n f, f f æquale quadrato f x, propter parabolam assumptam, super n f igitur quadrati e b ad quadratum o b, quod est æquale quadrato x f, uelut o a ad a c, igitur solidum ex a o in quadratum o b est æquale solido ex a c in quadratū c b, quod fuit demonstrandum. Et fuit quartum, liquet autem quod ratio constructionis huius problematis pēdet ex his duobus, primum quod assumpto puncto n æqualiter distante a uertice paraboles, qui est f, ita ut paraboles resecet æqualem ex perpendiculari ducta ex n ad parabolem ipsi n f semper ducta ad perpendiculum ex illo axe g f, quantuscunque sit ad parabolem, media illa est inter n f, & lineam à uertice ad punctum, ex quo perpendicularē eduxisti. Alterum pendet ex cōstructione hyperbolis, nam cum ducta ad perpendiculum super axe, & axis inciderint in duas rectas ad perpendiculum illæ in quas incidunt, uocantur coincidentes, & semper faciunt superficies æquales extra contentas. Vt in exemplo sumpto puncto k cum uertice k c est æqualis c b, & sumpto puncto x cum uertice fit x c æqualis eidē c b. Ex quo sequitur manifestè quod x c est æqualis k c, ideò hoc euenit, quia semper k est æqualis x l, ubicunque punctus x statuatur. Apparet ergo quod proposita a b 12 semper f n erit eadem quia in proportione a d, a b & e b, & ideò $5\frac{1}{3}$. Et si d q t z ponatur 192, erit a c 3, & si 128, erit a c 2, & si 64, erit 1. Et in primo casu x c semper

Per nonam octaui Elem. (margin, beside "contentum sub g f, f n … g f in f n")

Per 34am undecimi El. (margin, beside "uelut o a ad a c … parabolam assumptam") per erit 36, in secundo 24, in tertio erit 12. Posita ergo f ſ quad. c, erit x ſ in omni caſu res numero ℞ $5\frac{1}{3}$, igit͂ r x erit 12 m: rebus ℞ $5\frac{4}{3}$, quia ergo x p eſt æqualis ſ f, erit ſuperficies r p, atq; ideo a f 12 quad. m: cu. ℞ $5\frac{1}{3}$, & hoc poteſt eſſe æquale 36 & 24 & 12, uel cuicunq; numero. Cum ergo reduxerimus ad unum cubum, fient in omni caſu 8 quadrata, ſcilicet ducta quantitate a b, quæ eſt 12 per f n, quæ eſt $5\frac{1}{3}$, fit 64 tum eſt 8. Igitur ſuppoſita a b ſolum 12, quantumcunque ſit ſolidum d q t z, erunt ſemper 8 quadrata æqualia cubo & numero, qui producitur ducta a c & a b, & producto in ℞ $5\frac{1}{3}$, ſi ergo b c ſit 36, erit numerus 6912, & ſi fuerit 24, erit ℞ 3172, & ſi fuerit 12, erit ℞ 168. Et æſtimatio in ſe ducta producet ſ f, quæ ducta in n f, & eius ſumpta radice proueniet ſ x pars quæſita, nam ipſa eſt æqualis o b. Ergo ducta in ſe, & detracta ab a b, & uno in alterum ducto proueniet ſolidum d q t z. Et ideo facilis operatio Geometrica difficillima eſt arithmeticè, nec etiam ſatisfacit.

De inuentione partium trinomij cubici, quod cubum producit cum duabus partibus tantum cubicis. CAP. XIII.

ET dico modo quod ſi aſſumatur trinomium cubicum, ex cuius ductu partium producatur numerus, quod producentur duæ partes tãtum, quæ ſint ℞ cubicæ, ſed in re ſunt tres partes cubicæ incõmenſæ, ut dictum eſt, igitur partes cubi non poſſunt cõtinere partes rerum ſecundum numerum. Ex quo ſequitur quod cum res fuerit ex tribus radicibus cubicis in cõtinua proportione, quod idem ſequetur, nam ℞ cu. 12 p: ℞ cu. 6 p: ℞ cu. 3 producunt quantum media ducta ad cubum, igitur inuicem ductæ producunt ℞ cu. 216, quæ eſt 6. Hoc igitur generaliter ſic demonſtratur. Supponatur trinomium cubicum a b c d, ſolũ cum hac conditione, quod corpus ex a b, b c, c d ſit numerus, cõſtat ergo quod ſunt nouem corpora, quæ ſunt æqualia numero. Reliqua decem octo, fiunt tria, ut dictum eſt, ex a b in quadratũ b c, & ex c d in quadratum a b, quæ dico eſſe commenſa, uelut & ex b c in quadratũ c d. Nam quod



Per 17^mi ſexti Elem.

℞ cu. 3 ℞ cu. 4 ℞ cu. 18.

1296.	216	972.	729
162.	27	288.	216
48	8	36	27

fit ex a b in quadratum b c, ad id quod fit ex c d in quadratum a b ſe habet, ut quadratum b c ad id quod fit ex a b in c d, at quadratum b c ſe habet ad id quod fit ex a b in c d, ut numerus ad numerum, nam ex b c in quadratum ſuum fit cubus, qui eſt numerus, & ex b c in rectangulum a b, in c d fit parallelipedum ęquale numero, igitur proportio b c quadrati ad ſuperficiem a b in c d, eſt uelut numeri ad numerum. ea igitur ratione etiam quod ex b c in quadratum c d, igitur fient duo tantum ℞ cu. incommenſæ, at in radice ſunt tres, igitur nō poſſunt res æquari cubis aſſumptæ per numerum. At ſi propoſueris partem numerum uelut ℞ cu. 32 p: ℞ cu. 16 p: 2, proueniunt 152 p: ℞ cu. 131072 p: ℞ cu. 128000. Ideò cum ſit longe minor proportio quàm partium rei, non poterit cubus æquari certo numero rerum. uide etiam infrà.

Per 3 2am undecimi Elem.

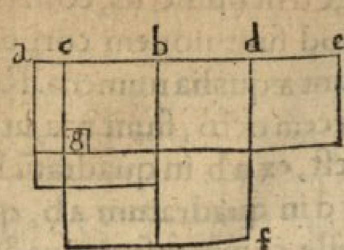
Cap. 51.

De inuentione generis æſtimationis. CAP. XIIII.

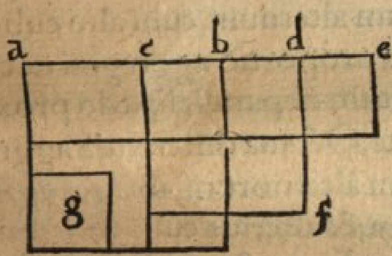
Cap. 13. Artis magnæ.

CVm ſit conſtitutum quod æſtimatio cubi & numeri ſit duplex, aut binomium & ſuum reciſum primum, aut reciſum quintum, & ex utraq; fiat æſtimatio cubi æqualis rebus & numero neceſſe eſt, ut cum ex binomio & ſuo reciſo fiat numerus, & ex reciſo quinto, & numero binomium quintum, ut capituli cubi æqualis rebus & numero ſit tantū inuenta ęſtimatio binomij quinti ultra numerum. Ideò primum quæramus habita æſtimatione cubi & numeri, ſed non dati æqualium rebus numerum rerum & æquationis. Propoſito ergo binomio primo uel quarto, aut reſiduo eorum, ſeu reſiduo ſecundo aut quinto, ducatur pars quæ eſt numerus in ſe & triplicetur, & ei addatur quadratum partis, quę eſt radix, & conflabitur numerus rerum. Deinde pro numero ęquationis duplica partem, quæ eſt numerus, & duc in ſe, & reſiduum à numero rerum ducatur in idem duplum numeri, & fiet numerus æquationis. Exemplum ℞ 7 m: 2. Primum duc 2, in ſe fit 4, triplica fit 12, adde quadratum ℞ 7 fit 7, & totum 19 numerus rerum. Inde pro numero æquationis dupla 2 fit 4, duc in ſe fit 16, differentia à 19 numero rerum eſt 3, duc in 4 duplum 2, fit 12 numerus æquationis. Igitur 1 cu. p: 12 æquatur 19 rebus. Huius cauſa eſt quòd poſita a b re diuiſa, quomodocunque in c, ita quod b c ſit numerus, & a c alia quantitas, et iuxta quadratum b c addantur duo alia quadrata ei æqualia, & eadem ſumantur cum quadrato a c pro numero rerū illæ res erunt æquales cubo aſſum-

Vide cap. 5 ſupra.



ptæ li-ptæ lineæ a b cum eo quod fit ex duplo b c in differentiam numeri rerũ à duplo quadrati b c, quod sit b d, nam si tria quadrata b c cum quadrato a c sunt numerus rerum, ergo res sunt æquales tribus cubis b c, & triplo a c in quadratum b c, & cubo a c, & parallelipedo ex b c in quadratum a c, detraho igitur cubum a b ex illis corporibus, relinquetur differentia dupli cubi b c, duplo b c, in quadratum a c, at uerò numerus ex supposito sit ex duplo b c in differentiam e f, à numero rerum quæ est quadratum b c, minus quadrato a c, nam quadratum c f continet quater quadratum b c, & numerus rerum continet quadratum b c, ter & insuper quadratum a c, igitur facto g æquali quadrato a c, duplum quadrati b c excedit numerum rerum in gnomone g, at demonstratum est quod res excedunt cubum a b, in differentia dupli cubi a b, ab eo quod fit ex b c in quadratum a c, quod est g, ideoq; in duplo b c in gnomonem, igitur numerus hic additus cubo æquatur rebus. Idem dices si numerus esset minor radice, sed a b residuum, eodem enim modo procedit demonstratio, sed oportet mutare figuras. Idem uerò cõtingit ubi cubus sit æqualis rebus & numero, & sit binomium secundum aut quintum, ut sit numerus rerum triplum quadrati b c, cum quadrato a c eritq; numerus, id quod fit ex duplo c b in differentiam quadrati c f, à quadrato dupli b c, quod sit c f. Erunt enim tres triplum cubo b c, triplum parallelipedi a c in quadratum b c, cubus a c, & parallelipedum ex b c in quadratum a c, detrahãtur hęc octo corpora ex cubo a b, relinquetur differentia cubi a b, ab octo corporibus duplum b c in quadratum a c, à duplo cubi b c, at numerus fit ex supposito ex duplo b c in differentiam c f quadrati à tribus superficiebus quadratis b c, cum quadrato a c, hæc autem est quantum differentia quadrati a c, à quadrato b c, cum triplum quadrati b c sit commune utrisque quantitatibus, fiat igitur g quadratum b c in quadrato a c, cum sit minus ergo numerus æquatur duplo b c in gnomonem g, cubus autem a b excedit res, ut demonstratum est in differentia dupli b c in quadratum a c, à duplo cubi b c, sed duplum b c in gnomonem g est æquale duplo excessus b c in quadratũ a c à duplo cubi b c, quoniam sunt eædem altitudines & superficies, ergo cubus æquatur rebus & numero assumptis.



Ex hoc patet quod hæc æquatio est inæqualis, ideò neq; generaliter potest tradi regula, nam numerus datur duplo parallelipedi cor.[m]

minoris partis in gnomonem, qui est differentia quadratorum partium, liquet etiam quod talis gnomo in omni casu est æqualis rebus solis, ubi partes suppositæ sint dimidium numeri plus una re, & minus una re.

De inuentione partium rei per partes cubi. CAP. XV.

D E F G
27 18 12 8

VBi propositę sint partes cubi a c notæ, ex quibus uelis scire quantitatem lineæ a c. Quinque suppositis id ages cognitis. Primum ut scias proportionem partium singularum aut excessum, quæ continetur his regulis. Prima proportio cubi ad cubum est triplicata lateris ad latus. Secũda proportio cubi ad parallelipedum, quod fit ex quadrato lateris sui est ut partium lineæ. Tertia proportio cubi ad parallelipedum alternum est, ut partiũ lineæ duplicata. Quarta proportio parallelipedorum inuicem, est ut partium lineæ. Quinta proportio aggregati cuborum ad aggregatum duorum mutuorum parallelipedum est uelut aggregati quadratorum partium lineæ, detracto parallelogramo ipsarum ad illud parallelogramum. Sexta proportio cubi cum parallelipedo proximo ad parallelipedum alternum, cum alio cubo est ut partium linię duplicata. Septima proportio aggregati ex cubo & parallelipedo alterno, ad aggregatum ex parallelipedo proximo, & alio cubo est uelut partium lineæ. Octaua differentia aggregati ex cubo, & triplo parallelipedorum alternorum, ab aggregato parallelipedorum trium proximorum, & alterius cubi est cubus differentiæ partium lineæ. Secundum suppositum debet reducere parallelipeda, & cubos semper ad unum præterquam in hac octaua regula, ut unum uni comparetur. Tertium suppositum proportiones partium reducũtur ad proportionem 1 cu. 1 quad. 1 pos. & 1 ipsius proportionis, ita ut 1 pos. sit ipsa proportio. Vnde si quis dicat, fuit parallelipedum 4, & residuum cubi 104, dico tu scis constitutionem cubi, & pones 1 cub. p: 1 pro re p: 1, & habebis 1 cu. p: 3 cu. quad. p: 3 cu. p: 1, & hoc est in proportione ad 1 cu. ut 108, quod fit restituto 4 ad 104, ad 4 ut 27 ad 1. ℞ autem cubica 1 cu. cu. p: 3 cu. quad. p: 3 cu. p: 1, est 1 cu. p: 1, radix cu. 1 cu. est 1 pos. ℞ cu. 27 est 3, igitur 1 cu. p: 1 æquatur 3 pos. Et in hoc supposito ingreditur scientia compositionis cubi ex cubis partium, & sex parallelipedis, quorum tria sunt similia & æqualia, & tria similiter inter se, & quod fiunt ex una parte in alterius quadratum & cognitio extrahendi ℞ cu. & quadratum, & diuidendi per communem diuisorem, cum fuerint plures denominationes. Quartum suppositum

tum est, ut scias quod cum uolueris iungere aliquas ℞ eiusdem generis aut detrahere, diuides unum per aliud, & accipe ℞ illius generis prouentus, & pro additione adde 1. & pro detractione auferto, & quod fit, ducito ad quadratum, si fuit ℞ quadrata, uel ad cubum si cuba, & productum multiplicabis per diuisorem, & quod prouenit est quæsitum. Quintum suppositum est, ut adiuues te cum regulis generalibus Algebraticis, & de modo.

Si quis ergo dicat cubus & duo parallelipeda altrinsecus sunt 24, & cubus alter cum duobus parallelipedis 18, igitur per tertium suppositum 1 cub. p: 2 pos. est sexquitertium 2 quad. p: 1, & æquale $2\frac{2}{3}$ quad p: $1\frac{1}{3}$, & habebis $\frac{10}{27}$, rerum p: $\frac{700}{729}$, æqualia cubo & rei æstimatio cum $\frac{8}{9}$ TPNQ. est rei æstimatio.

Et generaliter posito uno cubo, putà a b cum quartis parte nota erit reliquum notum. Quia ab nota: ergo si cubus b c, igitur b c, igitur parallelipeda, uel si parallelipedum, diuiso eo per a b, uel quadratum a b prodibit b c. igitur tota a c.

Ex difficilioribus autem modis primus est cum cubi & tria parallelipeda proxima cognita sunt: habebis tamen rei æstimationem ℞ cubica totius, uelut unum aggregatum sit 48, aliud 16 erit res 4 latus cubicum 64 totius. Secundum adhuc difficilius, cum cubi, & duo parallelipeda proxima nota fuerint, nam nec licebit assequi rem, ut in priore, subiacet tamen inuentioni, & habet æqualitatem. Vltimum est, cum est anomalum, ut aggregatum ex duobus parallelipedis unius generis, & uno uel tribus ex alio genere, uel duo cubi cum uno parallelipedo, uel duobus ex uno genere, alio ex alio genere, uel cubus & tria parallelipeda unius generis cum parallelipedo alterius generis. Et ita de alijs modis inæqualitatis.

Demum est compositio notior cubi cum duobus parallelipedis proximo, & uno remotiore, nam primum talia aggregata sunt in proportione partium lineę. Et singula eorum habent radicem quadratum, uelut unum sit 20, aliud 80, erit proportio partium lateris totius cubici quadrupla, igitur ponemus unam 1 pos. aliam 4, inde producemus 64 cu. p: 48 cu. p: 12 cu. p: 1 cu. & hęc sunt æqualia 100, res igitur est ℞ cu. $\frac{4}{5}$. Aliter ponemus proportionem 1 quad. erunt partes ut a latere: dissolue in duo aggregata proposita, habebis partes, ut uides. igitur cum sit proportio illarum quadrupla, multiplicabis aggregatum minus per 4, & assumes ℞ quadratum partium quam semper

1 cu. q̄n. p: 3 q̄d q̄d. p: 3 q̄d. p: 1.
1 cu q̄d. p: 2 q̄d q̄d. p: 1 q̄d. — 1 cu. p: 1 pos.
1 q̄d q̄d. p: 2 q̄d. p: 1.
4 q̄d q̄d. p: 8 q̄d. p: 4 — 2 q̄d. p: 2.
$\frac{1}{2}$ pos.

per habent, quia ab initio habuerunt, & pòst duxisti per numerum, habes igitur 1 cu p:1 pos. æqualia 2 quad p:2, & ideò semper poteris diuidere unum per aliud, habebit ergo $\frac{1}{2}$ pos. æqualia duplæ. Circa quod nota quòd cum 1 cu.p:1 pos. sit æquale 2 quad.p: 2 pos. igitur diuidendo unum per aliud, prouenit unum, & iam prouenit $\frac{1}{2}$ pos. igitur $\frac{1}{2}$ pos. est 1, & 1 pos. est 2, & ego posui 1. quad. pro proportione, res ergo redit ad idem. Sed hoc uolui ostendere ob reliqua.

Quòd quadrinomij ex radicibus cub. cubus ad tres partes, quarum duæ sint tantum R cubæ, reducitur aut longè plures. CAP. XVI.

ET sit primò quadrinomium ex R cubicis in continua proportione, in quibus non sit numerus, ut R cu.3 p:R cu.6 p: R cu.12 p:R cub.24 est: ergo R cub. 24 ad R cu. 3 triplicata proportio, at 6 ad 3, ut R cu.6 ad R cu.3 triplicata, igitur R cu.3 est dimidium R cu.24, igitur faciũt R cu. quæ est R au.81, sed R cu.81 ducta in R cu.72, productum ex R cu.6 in R cu.12, producit R cu.729, scilicet 9 duplicatam, igitur per supradicta quadrinomium illud reductum ad cubum non habet nisi duas R cub. ideò res non possunt æquari cubo. Ostendo modo quòd ex producto ex cu.72 in R cu.81 fiat numerus, quia per dicta productum ex R cu.3 in R cu.6, inde in R cu.12, cum sint in continua proportione. Pariter ex R cu.6 in R cu.12, & exinde in R cu.24 fit numerus: igitur ex producto R cu. 6 in R cu.12 in R cu.3, & in R cu.24 fiunt numeri, ergo in aggregatum fit numerus, quod erat demonstrandum.

Si uerò inter illas R cub. sit numerus, uelut R cub.2 p:R cu.4 p:R cu.8 p:R cu.16. Idem continget ut palam est, producuntur enim R cu.128 & 4, & reliquæ omnes illis commensæ sunt, ut facilè demonstrari potest, idem fiet in trinomio solo ex R cu.16 p: R cu.4 p: R cu. 2. Et eo magis ut de hoc nõ sit dubitatio, quia sumus in casu priore.

Si uerò sint tales, ut duæ in quadratum alterius producant numerum iam cõmensæ sunt. Et ideò non sunt amplius quatuor, sed tres: si una R alterius nihil refert in hoc casu, capiamus ergo R cu.2 R cu. 3 R cu.4 R cu.5. Et manifestum est quod fiunt plures R cu. non commensæ quam quatuor reducendo ad cubum. Ergo nullum quadrinomium ex R cubicis non est idoneum.

Quot modis numerus possit produci ex non numero. CAP. XVII.

PRimum numerus quilibet producitur ex his numeris, à quib. diuidi potuit. Et ita si uolo diuidere 10, potest diuidi per numerum alogon qui cõstet ex quatuor radicibus incommensis,

commensis non tamen ultra etiamsi sit una pars numerus. Et si sint ℞ cub. non ultra tres. Et fit hoc per recisa, ut in tertio lib. operis perfecti, uelut si diuidens sit ℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 p: ℞ 2, inuenies suum recisum, ut uides. Et ita si uolo diuidere per ℞ cu 4 p: ℞ cu. 3 p: ℞ cu. 2, ut docuit Scipio Terrus Bononiensis. Et manifestum est quod

Exemplum primum

℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 p: ℞ 2
℞ 6 p: ℞ 5 m: ℞ 3 m: ℞ 2

6 p: ℞ 120 m: ℞ 24

Exemplum secundum

℞ cu 4 p: ℞ cu. 3 p: ℞ cu. 2
℞ cu. 16 p: ℞ cu. 9 p: ℞ cu. 4 m: ℞ cu. 12 m: 2 m: ℞ cu. 6

Productum 9 m: ℞ cu. 648
81 p: ℞ cu. 4199645 ℞ cu 472392

Diuisor 81.

assumuntur quadrata illarum p: & producta inuicem pro m. Productum autem est aggregatum cuborum partium. 1. 4 & 3 & 2, quod est 9 m: ℞ cubica tripla ei quę fit ex prima in extremam, scilicet ℞ cu. 24, quæ triplicata producit ℞ cu. 648. Et eadem ratione inuenies suum trinomium eodem modo, ut uides ducendo partes in seipsas & inter se. Et ita conficies numerum diuisorem. Sed hæc ut dixi alio pertinent.

Hoc ipsum est quod uolebam docere, scilicet quod ubi non possis diuidere numerum propter multitudinem partium, sufficiet supponere, uelut uolo diuidere 10 per ℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 p: ℞ 2 p: sufficiet supponere diuisorē diuidendo, & habebis

10
℞ 6 p: ℞ 5 p: ℞ 3 p: ℞ 2 p: 1

Et cum hoc potes operari multiplicando, diuidendo, addendo & detrahendo ad unguem, sicut in fractis numeris fieri solet. Velut uolo diuidere 20 per hunc numerum exibit ℞ 24 p: ℞ 20 p: ℞ 12 p: ℞ 8 p: 2. Et ita habes quod 10 producitur ex quibusuis numeris diuidentibus cum suo alterno.

At propriè fit primo ex quibusuis binomijs & recisis, quorum differentia partium est in se ductarum, est ille idem numerus, uelut ex ℞ 11 p: 1 & ℞ 11 m: 1, & ℞ 12 m: ℞ 2 & ℞ ℞ 12 p: ℞ 2, & ita de alijs, & ita potest produci ut 4 p: ℞ 6 & 4 m: ℞ 6 & 5 p: ℞ 15 & 5 m: ℞ 15.

Secundo potest produci ex binomio, & reciso proportionem habentibus, ut 4 p: ℞ 12, & 2 m: ℞ 3, producunt enim 2, proposito ergo, quouis binomio uel reciso inuenias suum alternū, & duc inuicem, & producto diuide numerum propositum, & id quod exit, duc per secundò inuentum, & habebis quæsitum, uelut uolo inuenire numerum qui ductus per 3 p: ℞ 7, producat 10 inuento 3 m: ℞ 7, & ductis inuicem fit 2, diuide 10 per 2, exit 5, duc 5 in 3 m: ℞ 7, fit 15 m: ℞

 175, duc

175, duc 15 m:℞ 175 in 3 p:℞ 7, fit 45 m:℞ 12 25, cuius ℞ est 35, detrahe à 45, relinquitur 10.

Tertio, fit ex fractis eodem modo, quo in primo ℞ $17\frac{1}{5}$ p:℞ $3\frac{1}{5}$ in ℞ $17\frac{1}{3}$ m:℞ $7\frac{1}{3}$, producunt 10, & ita in numeris, uelut $3\frac{1}{6}$ p:℞ $\frac{1}{36}$, & $3\frac{1}{6}$ m:℞ $\frac{1}{36}$, & ita in alogis, uelut $3\frac{1}{3}$ p:℞ $\frac{6}{25}$, & $3\frac{1}{5}$ m:℞ $\frac{6}{25}$.

Quarto, si uelis duos numeros quorum quadrata differant in 10 facilè hoc est cum quouis numero, exemplum capio 2 & 10, duc 2 in se fit 4, detrahe à 10, remanent 6, diuide per 2 exit 3, huius dimidium per se sumptum & additum ad 2, producit quadrata quorum differentia est 10, nam quadrata $3\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$ differunt in 10. Similiter capio $2\frac{1}{5}$ duco in se, fit $4\frac{21}{25}$, detraho ex 10 relinquuntur $5\frac{4}{25}$, diuide per $2\frac{1}{5}$, & est ac si diuidas $\frac{129}{25}$ per $\frac{11}{5}$, quod est ac si diuideres 1295 per 55, exeunt ergo $2\frac{19}{55}$, cuius dimidiũ est $1\frac{19}{110}$, adde ad $2\frac{1}{5}$, fiet $3\frac{14}{110}$ & $1\frac{19}{110}$, producunt quadrata quorum differentia est 10.

Producitur insuper à numeris simplicibus quibuslibet, qui sunt in ordine eodem, & producunt numerum iuxta naturã eius, ut à ℞ 10 in se: & à ℞ ℞ quauis, quæ ducta in aliam ℞ ℞, producat ℞ 100, & ab analogis ut ℞ 20 in ℞ 5, producunt 10, quia proportio ℞ 20 ad ℞ 10 est ut ℞ 10 ad ℞ 5. Et proportio ℞ 50 ad ℞ 10, ut ℞ 10 ad ℞ 2. Et quæuis ℞ cubicę inuicem ductę producentes 1000, cubum 10, ut ℞ cu. 1000 in ℞ cu. 10, ℞ cu. 200 in ℞ cu. 5, & ℞ cu. 50 in ℞ cu. 20. Et ita 10 ꝑducit͂ ab omnibus ℞ relatis ꝑducentibus 100000 ℞ primũ 10.

Quod ultima diuisio cubi non satisfacit capitulo proposito. CAP. XVIII.

Cap. 15. Porrò, ultima diuisio cubi superius data, licet sit speciosa ualde non satisfacit capitulo proposito, uti neq; æstimatio binomiorum uel recisorũ primi uel quarti ordinis, nec recisorum secundi uel quinti. Sed nec ęstimatio differentię ℞ cub. nec ℞ quadrata aut cuba differt à numero per ℞ quadratam aut cubam aliter recisum esset æquale radici simplici, quod esse non potest, sed est differentia recisum. Sed ueniamus ad aggregata, quorum unum parti sit æquale nũmero, si capitulum debet esse generale & diuisio utilis, igitur hoc modo triplex est radix quadrata cubica & corporea. Quadrata est per rationem compositionis ex duabus partibus, atq; duabus uelut diuiso cubo 125 in 100, & 25 radix quadrata 100, est composita ex 8 & 2, & tota est 10, & quadratum 8 est 64, & quadratum 2 est 4, & duplum 8 in 2 est 32, qui omnes iuncti faciunt 100. Et ita est compositum ex quatuor corporibus 64, 16. 16 & 4. Et ita reliquę partis quæ est 25 radix, est 4 & 1, & corpora 16, 4. 4 & 1, quæ sunt 25. Proportio igitur partium est ut partium cubi, nam 8 ad 2, &

4 ad 1,