Exmo. Snr. Reitor da Universidade

CONTRIBUÏÇÃO PARA O ESTUDO

DA

TEORIA DAS FUNÇÕES

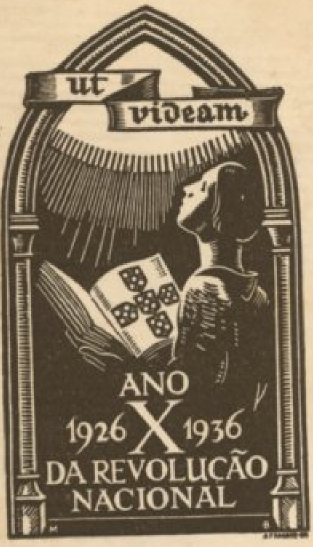
POR

LUÍS BEDA NETO

PRIMEIRA PARTE

ESPAÇÓIDES DE CONJUNTOS

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1934


ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

CONTRIBUÏÇÃO PARA O ESTUDO

DA

TEORIA DAS FUNÇÕES

CONTRIBUÏÇÃO PARA O ESTUDO

DA

TEORIA DAS FUNÇÕES

POR

LUÍS BEDA NETO

PRIMEIRA PARTE

ESPAÇÓIDES DE CONJUNTOS

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1934

SEPARATA

DA

Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra

VOL. IV — N.os 1 E 2

A MINHA MULHER

A MEUS PAIS

DISSERTAÇÃO PARA O ACTO DE DOUTORAMENTO EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS NA FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA.

CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO
DA
TEORIA DAS FUNÇÕES

CAPÍTULO I

NOÇÃO DE ESPAÇÓIDE

I

PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

1. Definição de espaçóide. — Seja **P** um conjunto constituído por uma infinidade de elementos de natureza qualquer. Representemos os diversos elementos dêste conjunto pelas letras **a**, **b**, **c**,... e empreguemos o sinal | colocado entre duas letras quando quisermos indicar que uma destas respresenta o mesmo elemento que a outra. O referido sinal pode ler-se: *o mesmo que*.

Associemos a cada par de elementos **a** e **b** um número real não negativo, a que chamamos *distância* entre **a** e **b** (ou entre **b** e **a**) e que designamos por $\overline{ab}$ (ou por $\overline{ba}$).

Diremos que **a** é *juxtaposto* a **b** (ou **b** *juxtaposto* a **a**) quando fôr $\overline{ab} = 0$, o que indicaremos por **a** ‖ **b** (ou **b** ‖ **a**). Por convenção um elemento juxtapõe-se a si próprio, isto é, de **a** | **b** resulta **a** ‖ **b**; porém de **a** ‖ **b** pode não resultar necessàriamente **a** | **b**.

Consideremos agora um *subconjunto* **A** de **P**, ou seja um conjunto formado por elementos de **P** [1]. Damos o nome de diâmetro de **A** ao limite superior das distâncias entre os elementos dêste conjunto tomados dois a dois de qualquer modo. O diâmetro dum elemento considera-se igual a zero.

[1] A definição de subconjunto não exclui o caso de **A** ser o próprio **P** ou de se reduzir excepcionalmente a um só elemento dêste conjunto.

Chamemos *conjunto limitado* a todo o conjunto **A** com o diâmetro finito.

Chamemos ainda *conjunto pròpriamente infinito* a todo o conjunto **A** que admita um subconjunto infinito de elementos não juxtapostos, dois quaisquer dêles.

Estabelecidas estas primeiras noções, suponhamos que tal definição de distância entre os elementos de **P** é determinada de forma que sejam verdadeiras as seguintes propriedades:

1) *Verifica-se a relação*

$$\overline{\mathrm{ac}} \leqq \overline{\mathrm{ab}} + \overline{\mathrm{bc}} \tag{1}$$

para quaisquer elementos **a**, **b** e **c**.

2) *A cada sucessão infinita de elementos*

$$\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_i, \ldots,$$

na qual seja $lim\, \overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}_{i'}} = 0$ [1], *corresponde um elemento* a *que satisfaz à condição* $lim\, \overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}} = 0$.

3) *Podemos dividir qualquer subconjunto de* **P**, *que seja limitado, num número finito de conjuntos* [2] *de diâmetros menores do que um número positivo qualquer prèviamente dado* [3].

---

[1] Subentende-se, nesta notação, que i e i' tendem para infinito. Logo, dizer que é $lim\, \overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}_{i'}} = 0$, é dizer que tende para zero qualquer sucessão de distâncias $\overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}_{i'}}$ quando as sucessões correspondentes dos índices i e i' tendem para infinito. Noutros têrmos: o símbolo $lim\, \overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}_{i'}} = 0$ exprime que a todo o número $\delta > 0$ corresponde um número inteiro $k > 0$ de modo que seja $\overline{\mathrm{a}_i \mathrm{a}_{i'}} < \delta$ para quaisquer valores de i e i' superiores a k.

[2] Considera-se um conjunto dividido em novos conjuntos quando a soma dêstes reproduz aquêle.

[3] Importa observar que é possível dar outras formas às presentes condições. Podemos, por exemplo, substituir a condição 2) pelo enunciado de BOLZANO-WEIERSTRASS, como veremos numa observação no n.º 6. Mais adiante [n.º 83] também veremos que a condição 3) é equivalente a um enunciado de BOREL-LEBESGUE e ainda a um enunciado de RIESZ-SIERPINSKI.

Notemos também que as hipóteses 2) e 3) convertem-se em teoremas quando o conjunto **P** não é pròpriamente infinito. Estes teoremas demonstram-se fàcilmente tendo em vista a proposição da *p.* 4, *l.* 21, e atendendo a que um conjunto não pròpriamente infinito é todo aquêle que pode dividir-se num número finito de conjuntos de diâmetros nulos.

Apresentadas as condições a que sujeitamos a definição de distância, chamemos *conjunto espaçado,* ou, mais simplesmente, *espaçóide,* a todo o sistema constituído por um conjunto infinito **P** e por uma definição de distância (nas referidas condições) entre os elementos dêste conjunto.

Assim, dizemos que o conjunto dos números dum certo intervalo fechado, o conjunto de todos os números reais e, mais geralmente, o conjunto dos pontos do espaço ordinário de n dimensões são espaçóides. Na verdade, conhecemos a definição de distância $\overline{pp'}$ entre dois pontos p e p' dêsse espaço e tal definição goza das propriedades seguintes: 1) é sempre verdadeira a relação $\overline{pp''} \leq \overline{pp'} + \overline{p'p''}$; 2) dada a sucessão de pontos $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, a condição $lim\, \overline{p_i p_{i'}} = 0$ assegura a existência dum ponto p (limite da sucessão) de modo que se tenha $lim\, \overline{p_i p} = 0$; sabemos, emfim, dividir qualquer conjunto de pontos, que seja limitado, num número finito de partes de diâmetros tão pequenos quanto quisermos. O conjunto de todos os números reais e imaginários, bem como qualquer conjunto infinito e fechado, constituído por números ou por pontos dum espaço ordinário de n dimensões, são outros espaçóides [1].

Convencionemos representar sempre um espaçóide pela letra **P**, afectada ou não de um ou mais índices. Um conjunto do tipo **P** é, pois, qualquer conjunto infinito (de elementos de natureza não especificada) associado a uma definição de distância entre os seus elementos nas condições citadas anteriormente.

2. Primeiras conseqüências. — Da relação (1) concluímos que *dois elementos juxtapostos a um terceiro são juxtapostos entre si,* isto é, de **a** ‖ **b** e **b** ‖ **c** resulta **a** ‖ **c**. Se diversos elementos são juxtapostos a um mesmo elemento **a**, dois quaisquer dêles são, pois, juxtapostos um ao outro. Dizemos, então, que os elementos considerados *juxtapõem-se entre si.*

Como vemos, a *juxtaposição* de elementos satisfaz às condições

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \;\therefore\; \mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b},\; \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \;\therefore\; \mathbf{a} \parallel \mathbf{c}$$

[1] Encontraremos depois novos exemplos de espaçóides.

correspondentes às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva da igualdade entre números.

A mesma relação (1) pode generalizar-se, anàlogamente ao que sucede no caso dos elementos serem números. Com efeito, considerando m elementos quaisquer $\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \ldots, \mathsf{u}, \mathsf{v}$ dum determinado espaçóide P, temos

$$\overline{\mathsf{a}\,\mathsf{v}} \lesssim \overline{\mathsf{a}\,\mathsf{b}} + \overline{\mathsf{b}\,\mathsf{v}} \lesssim \overline{\mathsf{a}\,\mathsf{b}} + \overline{\mathsf{b}\,\mathsf{c}} + \overline{\mathsf{c}\,\mathsf{v}}$$

e, por indução, vem

$$\overline{\mathsf{a}\,\mathsf{v}} \lesssim \overline{\mathsf{a}\,\mathsf{b}} + \overline{\mathsf{b}\,\mathsf{c}} + \cdots + \overline{\mathsf{u}\,\mathsf{v}}. \tag{2}$$

Se efectuarmos permutações circulares na sucessão dos elementos considerados, fàcilmente se concluirá, da presente relação, que:

Dada uma sucessão de m elementos de P, *considerando as distâncias entre cada dois elementos consecutivos e entre o primeiro e o último, uma qualquer destas m distâncias não excede a soma das restantes.*

Por conseguinte:

A diferença de duas das m distâncias (em valor absoluto) não é maior do que a soma das outras.

Daqui resulta que:

Se fôr $\mathsf{a} \parallel \mathsf{a}'$ *e* $\mathsf{b} \parallel \mathsf{b}'$, *também será* $\overline{\mathsf{a}\,\mathsf{b}} = \overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'}$.

Com efeito, basta escrever

$$|\,\overline{\mathsf{a}\,\mathsf{b}} - \overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'}\,| \lesssim \overline{\mathsf{a}\,\mathsf{a}'} + \overline{\mathsf{b}\,\mathsf{b}'}$$

e notar que é $\overline{\mathsf{a}\,\mathsf{a}'} = 0$ e $\overline{\mathsf{b}\,\mathsf{b}'} = 0$.

A distância entre dois elementos não se altera, pois, quando estes se substituem por outros que sejam juxtapostos aos primeiros.

Como segunda aplicação mostremos que:

É limitado qualquer conjunto soma dum número finito de conjuntos limitados de elementos de P.

Suponhamos, em primeiro lugar, que **A** é a soma de dois conjuntos limitados **B** e **C**, e comecemos por fixar dois elementos $\mathbf{b}'$ e $\mathbf{c}'$ de **B** e **C** respectivamente. Podemos escrever

$$\overline{\mathbf{b}\,\mathbf{c}} \leqq \overline{\mathbf{b}\,\mathbf{b}'} + \overline{\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'} + \overline{\mathbf{c}'\,\mathbf{c}}$$

para elementos quaisquer **b** e **c** dos conjuntos **B** e **C**, donde resulta, designando por Δ' e Δ'' os diâmetros dêstes conjuntos,

$$\overline{\mathbf{b}\,\mathbf{c}} \leqq \Delta' + \Delta'' + \overline{\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'}.$$

Logo o conjunto **A** é limitado, porque a distância entre dois quaisquer dos seus elementos não excede o número $\Delta' + \Delta'' + \overline{\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'}$.

Notemos que é

$$\Delta \leqq \Delta' + \Delta'' + \overline{\mathbf{b}'\,\mathbf{c}'}, \tag{3}$$

onde Δ representa o diâmetro do conjunto **A**; esta relação deduz-se da anterior, visto **b** e **c** representarem elementos quaisquer de **B** e **C** respectivamente.

Por ser limitada a soma de dois conjuntos limitados também é limitada a soma de três, de quatro, etc.

O seguinte enunciado permite-nos dar outra forma à definição de conjunto limitado:

Um conjunto **A** *é limitado ao mesmo tempo que o conjunto das distâncias* $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ *entre cada elemento* **a** *de* **A** *e um determinado elemento* **b**.

Com efeito, vimos há pouco que a soma de dois conjuntos limitados é igualmente limitada; logo, se **A** é limitado, o mesmo acontece ao conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$. O recíproco resulta da relação

$$\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{a}'} \leqq \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{a}'\,\mathbf{b}}$$

onde **a** e $\mathbf{a}'$ são elementos quaisquer de **A**.

3. Observação. — Consideremos um conjunto infinito **Q** submetido a uma definição de distância entre os seus elementos. Admitamos que esta definição de distância obedece às condições fundamentais 1) e 3), excepto à condição 2) que supomos não ser verdadeira em todos os casos; como vemos, o conjunto Q não se encontra *espaçado* com tal definição de distância.

A presente observação, que pretendemos justificar, consiste no seguinte:

O conjunto Q *pode considerar-se um subconjunto dum espaçóide* P, *sendo a definição de distância entre os elementos de* P *que pertencem a* Q *a mesma que adoptámos no conjunto* Q.

Seja

$$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_i, \ldots$$

uma sucessão de elementos de Q tal que se tenha $lim\, \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{a}_{i'}} = 0$ e que, no entanto, não satisfaça à condição 2). Consideremos tôdas as sucessões de elementos de Q que se encontrem neste caso e façamos a convenção seguinte: dar uma sucessão nestas condições é dar (ou definir) um *novo elemento*. Adicionemos ao conjunto Q todos estes novos elementos e designemos por Q' o conjunto assim constituído. Para maior simplicidade na exposição, também diremos que um elemento a de Q é dado pela sucessão $\mathsf{a}, \mathsf{a}, \ldots, \mathsf{a}, \ldots$. A qualquer elemento de Q' corresponde, pois, uma determinada sucessão de elementos de Q que, por convenção, define êsse elemento.

Eis a nova definição de distância: em geral, a distância entre dois elementos a' e b' de Q' definidos pelas sucessões

$$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_i, \ldots$$

$$\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \ldots, \mathsf{b}_i, \ldots$$

é o número $\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} = lim\, \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{b}_i}$; êste limite existe, de facto, porque da relação

$$|\, \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{b}_i} - \overline{\mathsf{a}_{i'} \mathsf{b}_{i'}} \,| \lesssim \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{a}_{i'}} + \overline{\mathsf{b}_{i'} \mathsf{b}_i} \quad [p.\ 4,\ l.\ 18]$$

resulta

$$lim\, |\, \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{b}_i} - \overline{\mathsf{a}_{i'} \mathsf{b}_{i'}} \,| = 0.$$

Temos assim definida a distância entre dois elementos novos, assim como entre um elemento novo e um elemento de Q: a distância entre o elemento a' e um elemento b de Q é, afinal,

$\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}} = lim\, \overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}}$. Depois, esta definição generaliza evidentemente a definição de distância, que supomos conhecida, entre dois elementos de $\mathfrak{Q}$. Temos definidas, em particular, as distâncias

$$\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_i} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

entre o elemento $\mathfrak{a}'$ e os têrmos da sucessão que o define.

Dadas estas noções, demonstremos que é $lim\, \overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}'} = 0$.

A um número dado $\delta > 0$ corresponde um inteiro $k > 0$ de modo que seja $\overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_{i'}} < \frac{\delta}{2}$ para todos os valores de i e i' superiores a k. Depois de escolhermos para i um valor qualquer superior a k, sujeitemos i' à mesma condição mas com um valor suficientemente grande para que se tenha

$$\overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}'} < \overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_{i'}} + \frac{\delta}{2},$$

o que é possível visto a distância $\overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}'}$ ser o limite de $\overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_{i'}}$ quando i' tende para infinito. Temos, então,

$$\overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}'} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

sendo esta desigualdade verdadeira para qualquer valor de i superior a k, o que nos dá $lim\, \overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}'} = 0$.

Em resumo, a introdução dos *novos elementos* no conjunto considerado $\mathfrak{Q}$ implica a *convergência* (como diremos no parágrafo seguinte) de tôdas as sucessões

$$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_i, \ldots$$

de elementos de $\mathfrak{Q}$ que satisfaçam à condição $lim\, \overline{\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_{i'}} = 0$. Além disso o novo conjunto $\mathfrak{Q}'$ constitui um espaçóide; é o que passamos a demonstrar:

1) *Dados os elementos* $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ *e* $\mathfrak{c}'$ *de* $\mathfrak{Q}'$ *verifica-se a relação*

$$\overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'} \lesseqgtr \overline{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'} + \overline{\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'}.$$

Com efeito, se estes elementos são dados respectivamente pelas sucessões

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots$$

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_i, \ldots$$

$$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_i, \ldots,$$

como temos

$$\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{c}_i} \lesseqgtr \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i} + \overline{\mathbf{b}_i\mathbf{c}_i},$$

resulta

$$\lim \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{c}_i} \lesseqgtr \lim \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{b}_i} + \lim \overline{\mathbf{b}_i\mathbf{c}_i},$$

isto é,

$$\overline{\mathbf{a}'\mathbf{c}'} \lesseqgtr \overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'} + \overline{\mathbf{b}'\mathbf{c}'}.$$

2) *A qualquer sucessão de elementos de* $\mathfrak{Q}'$,

$$\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_i, \ldots,$$

na condição de ser $\lim \overline{\mathbf{a}'_i\mathbf{a}'_{i'}} = 0$, *corresponde um elemento* $\mathbf{a}'$ *para o qual é* $\lim \overline{\mathbf{a}'_i\mathbf{a}'} = 0$.

Esta propriedade foi há pouco verificada no caso particular dos elementos da sucessão pertencerem todos a $\mathfrak{Q}$. Na hipótese contrária façamos corresponder a cada elemento $\mathbf{a}'_i$ um elemento $\mathbf{a}_i$ de $\mathfrak{Q}$ que satisfaça à desigualdade $\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}'_i} < \frac{1}{i}$ [1]. A sucessão

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots$$

é tal que $\lim \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}'_i} = 0$. Temos ainda

$$\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i'}} \lesseqgtr \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}'_i} + \overline{\mathbf{a}'_i\mathbf{a}'_{i'}} + \overline{\mathbf{a}'_{i'}\mathbf{a}_{i'}} \quad [p.\ 4,\ l.\ 13],$$

donde vem $\lim \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i'}} = 0$. Esta última sucessão define, portanto, um elemento $\mathbf{a}'$, e da relação

$$\overline{\mathbf{a}'_i\mathbf{a}'} \lesseqgtr \overline{\mathbf{a}'_i\mathbf{a}_i} + \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}'}$$

concluímos que é $\lim \overline{\mathbf{a}'_i\mathbf{a}'} = 0$, como desejávamos provar.

---

[1] Se $\mathbf{a}'_i$ fôr um elemento de $\mathfrak{Q}$, o elemento $\mathbf{a}_i$ poderá ser o próprio $\mathbf{a}'_i$.

3) *É possível dividir qualquer subconjunto de* $\mathfrak{Q}'$, *que seja limitado, num número finito de partes de diâmetros inferiores a qualquer número positivo prèviamente dado.*

Seja A' um subconjunto de $\mathfrak{Q}'$, limitado, e consideremos um número $\varepsilon > 0$. A cada elemento a' de A' corresponde sempre um elemento a de $\mathfrak{Q}$ para o qual é $\overline{\mathsf{a}\,\mathsf{a}'} < \frac{\varepsilon}{3}$. Designemos por A o conjunto dos elementos a *correspondentes* dos diversos elementos a' de A'. A um subconjunto de A corresponde um subconjunto de A' e a uma divisão de A em partes corresponde igualmente uma divisão de A' em partes.

O conjunto A é limitado porque, se a e b são dois dos seus elementos e a' e b' correspondentes deles em A', temos

$$\overline{\mathsf{a}\,\mathsf{b}} \lesseqgtr \overline{\mathsf{a}\,\mathsf{a}'} + \overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} + \overline{\mathsf{b}'\mathsf{b}},$$

donde vem

$$\overline{\mathsf{a}\,\mathsf{b}} < \frac{2}{3}\varepsilon + \overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'}.$$

Se dividirmos agora o conjunto A num número finito de partes de diâmetros menores do que $\frac{\varepsilon}{3}$, obteremos por correspondente uma divisão de A' em partes de diâmetros menores do que ε porque, para dois elementos a' e b' duma destas partes, temos, designando por a e b os correspondentes dêsses elementos no conjunto A,

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} \lesseqgtr \overline{\mathsf{a}'\mathsf{a}} + \overline{\mathsf{a}\,\mathsf{b}} + \overline{\mathsf{b}\,\mathsf{b}'} < \varepsilon.$$

Em conclusão, podemos dizer que: *o conjunto proposto* $\mathfrak{Q}$ *é um subconjunto dum espaçóide* $\mathsf{P} \mid \mathfrak{Q}'$ *no qual se conserva a mesma definição de distância entre os elementos de* $\mathfrak{Q}$. Êsse espaçóide poderá chamar-se *prolongamento do conjunto* $\mathfrak{Q}$ [1].

---

[1] Existe um perfeito paralelismo entre a exposição que seguimos nesta nota e a que podemos seguir nos princípios da teoria dos números irracionais quando, no estudo dêstes números, adoptamos o método de Bruno de Cabedo. (Veja-se Pacheco de Amorim, *Aritmética Racional*, p. 337 e segs.).

II

CONCEITO DE LIMITE DUMA SUCESSÃO DE ELEMENTOS DUM ESPAÇÓIDE

4. Definição de limite. — A definição de limite duma sucessão infinita

$$(1) \qquad \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots$$

de elementos dum espaçóide $\mathbf{P}$ baseia-se na definição de distância: dizemos que a sucessão (1) *converge* ou *tende para o elemento* $\mathbf{a}$ quando se verifica a condição $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}}=0$, isto é, quando a cada número $\delta>0$ corresponde de tal forma um inteiro positivo k que se tenha $\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}}<\delta$ para qualquer $i>k$. O elemento $\mathbf{a}$ chama-se um *limite* da sucessão e esta diz-se, neste caso, *convergente*.

É evidente que uma sucessão (1) na qual todos os têrmos são juxtapostos a um determinado elemento $\mathbf{a}$ converge necessàriamente para o mesmo elemento $\mathbf{a}$. Em particular, a sucessão

$$\mathbf{a}, \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{a}, \ldots$$

converge para o elemento $\mathbf{a}$.

Uma sucessão que não é convergente chama-se *divergente*.

A condição $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i'}}=0$ *é necessária para a convergência da sucessão* (1).

Com efeito, se a sucessão (1) converge para o limite $\mathbf{a}$, temos $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}}=0$, e de

$$\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i'}} \lesssim \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{a}_{i'}\mathbf{a}}$$

resulta $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}_{i'}}=0$.

A mesma condição assegura, por outro lado, a convergência da sucessão (1): é a hipótese 2), *p.* 2.

É necessàriamente limitado o conjunto dos têrmos duma sucessão convergente.

Na verdade, se a sucessão (1) converge para o limite $\mathbf{a}$, temos $lim\, \overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{a}} = 0$; logo é limitado o conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{a}}$ e o mesmo acontece ao conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{a}_{i'}}$ [*p*. 5, *l*. 19].

Os limites duma sucessão convergente são juxtapostos entre si.

Porque, se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são dois limites da sucessão convergente (1), as condições $lim\, \overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{a}} = 0$ e $lim\, \overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{b}} = 0$ dão

$$\overline{\mathbf{a}\, \mathbf{b}} \lesseqgtr lim\left(\overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{a}} + \overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{b}}\right) = 0\,,$$

donde vem $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Se uma sucessão converge para um limite $\mathbf{a}$, *também converge para qualquer elemento juxtaposto a* $\mathbf{a}$.

Com efeito, sendo $lim\, \overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{a}} = 0$ e $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, como é então $\overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{b}}$ (visto-que a distância entre dois elementos não se altera quando estes se substituem por elementos juxtapostos aos primeiros), temos

$$lim\, \overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{b}} = lim\, \overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{a}} = 0\,,$$

e a sucessão dada também converge para o limite $\mathbf{b}$.

Convencionemos designar qualquer limite da sucessão convergente (1) por meio do símbolo $lim\, \mathbf{a}_i$. Atendendo agora aos dois últimos enunciados, vemos que basta escrever $lim\, \mathbf{a}_i \parallel \mathbf{a}$, ou $\mathbf{a} \parallel lim\, \mathbf{a}_i$, para exprimir que o elemento $\mathbf{a}$ é um limite da sucessão convergente (1).

5. Elemento limite dum conjunto. Extensão do teorema de Bolzano-Weierstrass. — Chamemos *subsucessão* duma dada sucessão (1) de elementos de $\mathbf{P}$ a qualquer outra

$$\mathbf{a}_r\,,\ \mathbf{a}_s\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{a}_u\,,\ \ldots \tag{2}$$

que seja formada por têrmos da primeira, sem repetições e pela ordem em que nela se encontram. Os índices $r, s, \ldots, u, \ldots$ são, pois, números inteiros positivos e crescentes.

Dizemos que uma sucessão de elementos de $\mathbf{P}$ é *pròpriamente infinita* quando o conjunto dos têrmos é pròpriamente infinito, isto é, quando admite uma subsucessão na qual dois têrmos quaisquer não sejam juxtapostos.

Para que uma sucessão de elementos seja pròpriamente infinita *é suficiente que não admita uma subsucessão de têrmos juxtapostos entre si.*

Consideremos, com efeito, uma sucessão que não admita uma infinidade de têrmos juxtapostos entre si. Suprimamos todos os têrmos juxtapostos ao primeiro (excepto êste têrmo), suprimamos em seguida à sucessão restante os têrmos juxtapostos ao segundo (excepto êste), etc. Podemos continuar assim indefinidamente, visto suprimirmos, de cada vez, apenas um número finito de têrmos ou nenhum. Os têrmos não suprimidos constituem evidentemente uma subsucessão em que dois têrmos quaisquer não se juxtapõem um ao outro.

Por conseguinte *qualquer sucessão que não seja pròpriamente infinita admite uma subsucessão de têrmos juxtapostos entre si* [1].

---

[1] A proposição que acabámos de demonstrar é susceptível de tomar um aspecto mais geral, como vamos ver.

Consideremos uma sucessão infinita de elementos abstractos

$$a_1, a_2, \dots, a_i, \dots.$$

Admitamos que certa propriedade pode verificar-se ou não entre dois dêsses elementos dados arbitràriamente, e demonstremos a proposição seguinte:

A sucessão proposta admite uma subsucessão tal que: ou dois quaisquer dos seus têrmos satisfazem à referida propriedade, ou dois quaisquer deles não satisfazem.

Convencionemos dizer que diversos têrmos da sucessão considerada são *relacionados* ou *irrelacionados* uns com os outros, conforme dois quaisquer dêsses têrmos satisfazem ou não à propriedade de que nos ocupamos.

Suponhamos agora que a sucessão proposta não admite uma subsucessão de têrmos relacionados uns com os outros. Neste caso admite necessàriamente uma subsucessão $a_r, a_s, a_t, \dots$ tal que o seu primeiro têrmo a_r seja irrelacionado com cada um dos seguintes, porque, se assim não fôsse, se suprimíssemos à sucessão proposta os têrmos irrelacionados com o primeiro (excepto êste), se suprimíssemos em seguida à sucessão obtida os têrmos irrelacionados com o segundo desta sucessão (excepto êste) e se continuássemos assim sucessivamente, os têrmos restantes (que seriam em número infinito porque suprimiríamos, de cada vez, apenas um número finito dêles ou nenhum) constituïriam uma subsucessão de têrmos relacionados uns com os outros.

Pelo mesmo motivo a sucessão $a_s, a_t, \dots$ admite uma subsucessão $a_{r'}, a_{s'}, a_{t'}, \dots$ tal que o seu primeiro têrmo $a_{r'}$ seja irrelacionado com cada um dos seguintes, pois aquela sucessão ainda se encontra nas condições

Para que uma sucessão convergente seja pròpriamente infinita é necessário e suficiente que admita uma subsucessão de têrmos não juxtapostos a um limite $\mathbf{a}$ *da mesma sucessão.*

A condição é manifestamente necessária porque, se a sucessão proposta admite uma subsucessão em que dois têrmos quaisquer não sejam juxtapostos um ao outro, entre estes últimos têrmos apenas poderá encontrar-se um que seja juxtaposto ao elemento $\mathbf{a}$.

Recìprocamente, suponhamos que uma dada sucessão convergente (1) admite uma subsucessão de têrmos não juxtapostos a um dos seus limites $\mathbf{a}$. Suprimindo todos os têrmos juxtapostos a $\mathbf{a}$, caso existam, obtemos uma sucessão que já não admite uma infinidade de têrmos juxtapostos entre si, em virtude da condição $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} = 0$. Esta nova sucessão é, pois, pròpriamente infinita [*prop. prec.*], e o mesmo acontece à proposta.

Dizemos que um elemento $\mathbf{a}$ é *limite dum conjunto* $\mathbf{A}$ quando

---

da proposta. A sucessão $\mathbf{a}_{s'}$, $\mathbf{a}_{t'}$, ... admite, por sua vez, uma subsucessão $\mathbf{a}_{r''}$, $\mathbf{a}_{s''}$, $\mathbf{a}_{t''}$, ... em idênticas condições, e assim indefinidamente.

Os primeiros têrmos $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_{r'}$, $\mathbf{a}_{r''}$, ... das subsucessões mencionadas são evidentemente irrelacionados uns com os outros e constituem uma subsucessão da sucessão proposta. Por conseguinte, se esta não admite uma subsucessão de têrmos relacionados uns com os outros, como estamos a supor, é porque admite uma subsucessão de têrmos irrelacionados, e assim demonstramos a proposição que tínhamos em vista.

Como aplicação temos que:

Qualquer sucessão de números reais $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ *admite necessàriamente uma subsucessão monótona.*

Efectivamente, dois têrmos quaisquer a_h e a_k $(h < k)$ ou satisfazem à propriedade de ser $a_h < a_k$ ou não satisfazem.

Em particular, tôda a sucessão convergente de números reais admite uma subsucessão monótona, a qual ainda tende para o mesmo limite que a primeira, como é sabido.

Eis uma simples demonstração do teorema de Bolzano-Weierstrass baseada nestas considerações:

Qualquer conjunto A *de números reais, que seja limitado e infinito, admite um ponto limite.*

Com efeito, podemos extrair do conjunto A uma sucessão infinita de números reais todos diferentes, e a mesma sucessão ou admite uma subsucessão de números crescentes ou então de números decrescentes, subsucessão esta que tende necessàriamente para um limite.

é nulo o limite inferior das distâncias entre o elemento **a** e os elementos de **A** não juxtapostos a **a**. Em virtude da última proposição que demonstrámos, podemos dar a esta definição a forma seguinte, geralmente mais cómoda nas aplicações:

Elemento limite dum conjunto **A** *é todo o elemento de* **P** *que seja limite duma sucessão convergente pròpriamente infinita de elementos de* **A**.

Por fôrça dêste enunciado e da condição 2), *p.* 2, a existência dum elemento limite dum conjunto **A** reduz-se à existência duma sucessão pròpriamente infinita de elementos de **A** tal que seja $lim\, \overline{\mathbf{a}_i\, \mathbf{a}_{i'}} = 0$. A-propósito desta questão demonstremos o teorema seguinte:

Um conjunto **A**, *limitado e pròpriamente infinito, admite um elemento limite.*

Observemos, primeiro, que é possível extrair dum conjunto limitado e pròpriamente infinito um subconjunto nas mesmas condições, mas de diâmetro menor do que um número positivo dado δ. Com efeito, se dividirmos o conjunto considerado num número finito de conjuntos parciais de diâmetros menores do que δ, um dêles, pelo menos, será pròpriamente infinito.

Pôsto isto, consideremos um conjunto **A**, limitado e pròpriamente infinito. Seja $\mathbf{A}_1$ um subconjunto de **A**, pròpriamente infinito e de diâmetro menor do que 1. Seja $\mathbf{A}_2$ um subconjunto de $\mathbf{A}_1$, pròpriamente infinito e de diâmetro menor do que $\frac{1}{2}$. Continuemos assim indefinidamente, designando por $\mathbf{A}_i$, em geral, um subconjunto de $\mathbf{A}_{i-1}$, própriamente infinito e de diâmetro menor do que $\frac{1}{i}$. Obtemos assim uma sucessão infinita de conjuntos

$$\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_i,\ \ldots$$

cada um dos quais contém o conjunto imediatamente seguinte e de diâmetros que tendem para zero.

Consideremos agora um elemento $\mathbf{a}_1$ de $\mathbf{A}_1$, depois um elemento $\mathbf{a}_2$ de $\mathbf{A}_2$ mas não juxtaposto a $\mathbf{a}_1$, e assim sucessivamente. O elemento considerado $\mathbf{a}_i$, em geral, pertence ao conjunto $\mathbf{A}_i$ e não se juxtapõe a nenhum dos elementos anteriormente escolhidos (o que podemos conseguir, visto $\mathbf{A}_i$ ser pròpriamente infinito).

Construímos, dêste modo, uma sucessão pròpriamente infinita de elementos de **A**,

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i, \dots,$$

e que é convergente, porque da relação $\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} < \frac{1}{i''}$, onde i'' é o menor dos inteiros i e i', resulta $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} = 0$.

Um conjunto ilimitado pode não admitir elemento limite algum. Apenas podemos afirmar, em geral, que é possível extrair dum conjunto ilimitado uma sucessão de elementos cujas distâncias a um elemento dado tendam para infinito, como fàcilmente reconhecemos.

A êste respeito completemos a proposição anterior dizendo:

Para que um conjunto admita um elemento limite é necessário e suficiente que contenha um subconjunto limitado pròpriamente infinito.

A condição é necessária visto ser limitado o conjunto dos têrmos duma sucessão convergente, e é suficiente em virtude do teorema anterior.

6. Derivado duma sucessão de elementos. — Chamemos, dum modo geral, *limite duma sucessão* (1) de elementos de **P** a qualquer elemento que seja limite duma subsucessão convergente da mesma sucessão [1].

Chamemos *derivado duma sucessão* ao conjunto dos respectivos limites.

Chamemos ainda *sucessão limitada* a qualquer sucessão cujos têrmos constituam um conjunto limitado.

Uma sucessão limitada admite necessàriamente um derivado.

Tal afirmação é evidente se a sucessão dada contém uma infinidade de têrmos que sejam juxtapostos entre si; não sendo assim, é uma aplicação do teorema de Bolzano-Weierstrass

---

[1] Notemos que um limite duma sucessão pode não ser limite do conjunto dos respectivos têrmos. Em caso de convergência, um limite da sucessão só será limite do conjunto dos têrmos se êste conjunto fôr pròpriamente infinito.

porque a sucessão é, neste caso, pròpriamente infinita [*p*. 11, *l*. 32].

Uma sucessão ilimitada poderá não admitir derivado mas, visto tôda a sucessão convergente ser limitada, podemos afirmar, em conseqüência da proposição precedente, que:

Para a existência do derivado duma sucessão é necessário e suficiente que esta admita uma subsucessão limitada.

Para que uma sucessão limitada (1) *convirja para um limite* $\mathbf{a}$ *é necessário e suficiente que os elementos do derivado sejam juxtapostos a* $\mathbf{a}$.

Com efeito, se a sucessão (1) converge para o limite $\mathbf{a}$, todos os elementos do derivado são juxtapostos a $\mathbf{a}$, como é fácil reconhecer [*p*. 11, *l*. 3].

Recìprocamente, suponhamos que os elementos do derivado duma sucessão limitada (1) são juxtapostos a um elemento $\mathbf{a}$. Se não fôsse $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} = 0$, existiria um número positivo ε e uma subsucessão (2) da sucessão (1) que verificassem as desigualdades

$$\overline{\mathbf{a}_u \mathbf{a}} > \varepsilon \quad (u = r, s, \ldots).$$

Por conseguinte nenhuma subsucessão de (2) convergiria para o limite $\mathbf{a}$, e qualquer dos elementos do derivado da sucessão (2) não seria juxtaposto a $\mathbf{a}$ [*p*. 11, *l*. 8].

Observação. — *A hipótese* 2), *p*. 4, *converter-se-ia em teorema se tivéssemos admitido para hipótese o enunciado de* BOLZANO-WEIERSTRASS.

Com efeito, supondo que na sucessão (1) é $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} = 0$, verifica-se a desigualdade $\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_{i'}} < 1$ para quaisquer valores de i e i' superiores a certo número inteiro $k > 0$. A sucessão

$$\mathbf{a}_{k+1},\ \mathbf{a}_{k+2},\ \ldots$$

é, por conseguinte, limitada e o mesmo acontece à sucessão (1) [*p*. 4, *l*. 29]. Por êste motivo, e admitindo agora o enunciado de BOLZANO-WEIERSTRASS, podemos afirmar que existe uma subsucessão convergente (2) da sucessão (1) [*p*. 15, *l*. 26]. Seja $\mathbf{a}$ um limite desta sucessão convergente. Por ser

$$\overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} \lesseqgtr \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}_u} + \overline{\mathbf{a}_u \mathbf{a}}$$

e porque o segundo membro desta relação tende para zero quando i e u crescem para infinito [1], temos $lim\,\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{a}}=0$. A sucessão (1) converge, pois, para o limite $\mathbf{a}$ [2].

7. Algumas proposições sôbre limites. — Da definição de limite duma sucessão de elementos de $\mathbf{P}$ também se conclui, como para o caso dos limites de números, que:

Se uma dada sucessão converge para um limite, qualquer outra sucessão formada de todos ou parte dos têrmos da primeira e dispostos por qualquer ordem, converge ainda para o mesmo limite.

Mais geralmente:

Converge para um limite $\mathbf{a}$ *qualquer sucessão formada de têrmos de sucessões dadas, em número finito, que convergem para o mesmo limite* $\mathbf{a}$.

Devemos acrescentar, nestes enunciados, que um têrmo qualquer de qualquer das sucessões dadas e que figure na sucessão assim construída, pode repetir-se como têrmo desta, mas apenas um número finito de vezes.

Para a demonstração dêste caso mais geral consideremos m sucessões de elementos

$$\mathbf{a}_{h,1}\,,\ \mathbf{a}_{h,2}\,,\ \ldots,\ \mathbf{a}_{h,i}\,,\ \ldots \qquad (h=1,\,2,\,\ldots,\,m)$$

que convirjam para o mesmo limite $\mathbf{a}$. A estas m sucessões correspondem outras tantas de números

$$\overline{\mathbf{a}_{h,1}\mathbf{a}}\,,\ \overline{\mathbf{a}_{h,2}\mathbf{a}}\,,\ \ldots,\ \overline{\mathbf{a}_{h,i}\mathbf{a}}\,,\ \ldots \qquad (h=1,\,2,\,\ldots,\,m),$$

cada uma das quais tende para zero. Logo o enunciado é verdadeiro, visto assim ser para o caso de sucessões de números.

Outra maneira de proceder na demonstração consiste em notar que, dadas as condições do enunciado, são juxtapostos a $\mathbf{a}$

[1] Entende-se que i e u crescem para infinito através dos valores $i=1,\,2,\,\ldots$ e $u=r,\,s,\,\ldots$.

[2] Uma vez demonstrado o teorema de Bolzano-Weierstrass sôbre conjuntos de números quaisquer ou de pontos dum espaço de n dimensões, podemos seguir precisamente o caminho acima indicado para justificar o bem conhecido teorema de Cauchy sôbre limites de sucessões de números ou de pontos.

todos os elementos do derivado da sucessão construída daquele modo [*p.* 16, *l.* 8], como é fácil reconhecer.

Consideremos agora duas sucessões quaisquer

$$(3) \qquad \begin{array}{l} \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \ldots , \mathbf{a}_i , \ldots \\ \mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \ldots , \mathbf{b}_i , \ldots . \end{array}$$

Se existem os limites $lim\, \mathbf{a}_i \parallel \mathbf{a}$ *e* $lim\, \mathbf{b}_i \parallel \mathbf{b}$, *temos* $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} = \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$.

Porque, da relação

$$|\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} - \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}\, | \lesssim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}_{i'} \mathbf{b}}$$

e das condições $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} = 0$ e $lim\, \overline{\mathbf{b}_i \mathbf{b}} = 0$, resulta que é

$$lim\, |\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} - \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}\, | = 0 ,$$

ou $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} = \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$.

Temos, em particular, supondo ainda que **a** e **b** são limites das sucessões convergentes (3), $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$; mais particularmente, para um elemento qualquer **c**, vem $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{c}}$. Êste resultado pode enunciar-se dizendo que:

A distância entre dois elementos é uma função contínua dos mesmos elementos.

Podemos afirmar, por conseguinte, que, se dois quaisquer dos limites **a**, **b**, ..., **v** de *m* determinadas sucessões convergentes não são juxtapostos entre si, o mesmo acontece aos têrmos correspondentes destas sucessões, a partir de certa ordem.

Se fôr $lim\, \mathbf{a}_i \parallel lim\, \mathbf{b}_i$, *será* $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} = 0$.

Com efeito, supondo que as sucessões (3) convergem para os limites **a** e **b**, a igualdade já deduzida $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} = \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ dá $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{i'}} = 0$ no caso de ser $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

Nesta condição podemos escrever, em particular, $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = 0$.

Se fôr $lim\, \mathbf{a}_i \parallel \mathbf{a}$ *e* $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = 0$, *existirá* $lim\, \mathbf{b}_i$ *e teremos* $lim\, \mathbf{b}_i \parallel \mathbf{a}$.

Na verdade, por ser $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} = 0$, $lim\, \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = 0$ e

$$\overline{\mathbf{b}_i \mathbf{a}} \lesssim \overline{\mathbf{b}_i \mathbf{a}_i} + \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{a}} ,$$

temos $lim\, \overline{\mathbf{b}_i \mathbf{a}} = 0$.

Dêstes últimos enunciados deduzem-se, por evidência, os seguintes:

Se as sucessões (3) *forem convergentes, será necessário e suficiente para que seja* $\lim \mathbf{a}_i \parallel \lim \mathbf{b}_i$ *que se verifique a condição* $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = 0$.

Convergem ou divergem ao mesmo tempo duas sucessões de elementos (3) *tais que seja* $\lim \overline{\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i} = 0$; *o derivado duma das sucessões é, então, o derivado da outra.*

Um caso particular desta proposição é a seguinte:

Se os têrmos correspondentes de duas sucessões são juxtapostos entre si, estas convergem ou divergem ao mesmo tempo e o derivado duma das sucessões é o derivado da outra.

Logo, combinando êste enunciado com o da *p.* 11, *l.* 8, podemos dizer que:

A condição $\lim \mathbf{a}_i \parallel \mathbf{a}$ *continuará verdadeira se substituirmos todos os elementos* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{a}_i$, *ou apenas parte deles, por outros juxtapostos aos primeiros.*

III

LUGAR DUM CONJUNTO. — CONJUNTOS FECHADOS

8. Definições. — Chamemos *lugar* dum subconjunto $\mathbf{A}$ de $\mathbf{P}$ ao conjunto dos limites de tôdas as sucessões convergentes formadas com elementos de $\mathbf{A}$. O lugar do conjunto $\mathbf{A}$ será representado pelo símbolo $[\mathbf{A}]$. Da definição resulta imediatamente que o lugar de $\mathbf{A}$ é constituído pelos elementos dêste conjunto, pelos elementos que lhes são juxtapostos e pelos elementos limites do mesmo conjunto, visto considerarmos na definição de $[\mathbf{A}]$ tôdas as sucessões convergentes de elementos de $\mathbf{A}$, quer sejam ou não pròpriamente infinitas.

Dizemos que um conjunto $\mathbf{A}$ é *fechado* quando qualquer elemento do lugar $[\mathbf{A}]$ se juxtapõe a um elemento dêsse conjunto. Por outras palavras, um conjunto $\mathbf{A}$ é fechado quando qualquer sucessão convergente formada com elementos de A tende para um elemento dêste mesmo conjunto.

Para nos certificarmos de que um dado conjunto A é fechado, basta verificar que as sucessões pròpriamente infinitas, convergentes e formadas com elementos de A, caso existam, tendem para elementos dêste conjunto. De facto, cada uma das outras sucessões convergentes formadas com elementos de A tende para um dêstes elementos, pois os têrmos duma tal sucessão juxtapõem-se, a partir de certa ordem, a um elemento de A [*p.* 13, *l.* 1]. Logo podemos ainda dizer, por definição, que os conjuntos fechados são os que não admitem elementos limites (os finitos por exemplo) e aquêles em que os elementos limites se juxtapõem a elementos do mesmo conjunto.

Dizemos que um conjunto A é *totalmente fechado* quando coincide com o respectivo lugar: $\mathsf{A} \mid [\mathsf{A}]$. Um conjunto totalmente fechado é, pois, todo aquêle a que pertencem os limites das sucessões convergentes construídas com os seus próprios elementos.

Para que um conjunto fechado seja totalmente fechado é necessário e suficiente que contenha todos os elementos que são juxtapostos aos seus próprios elementos, como é evidente em virtude destas definições.

O lugar dum conjunto A *é um conjunto totalmente fechado.*

Com efeito, demonstremos que um limite a' duma sucessão convergente

$$\mathsf{a}'_1, \mathsf{a}'_2, \ldots, \mathsf{a}'_i, \ldots$$

de elementos de $[\mathsf{A}]$ pertence a êste conjunto. A cada elemento a'_i façamos corresponder um elemento a_i de A tal que seja $\overline{\mathsf{a}_i \mathsf{a}'_i} < \frac{1}{i}$, o que é possível visto a'_i ser limite duma sucessão de elementos de A. Resulta que é $lim\, \overline{\mathsf{a}_i \mathsf{a}'_i} = 0$ e a sucessão

$$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_i, \ldots$$

converge para o elemento a' [*p.* 18, *l.* 28]. Logo o elemento a' pertence ao lugar $[\mathsf{A}]$ que é, portanto, um conjunto totalmente fechado.

Também podemos dizer que o *lugar dum conjunto* A *é o* *menor conjunto totalmente fechado*[1] *a que pertence* **A**. Na verdade, vimos que [**A**] é um conjunto totalmente fechado a que pertence **A**; depois, qualquer outro conjunto que se encontre nestas condições também contém, por definição de conjunto totalmente fechado, os limites de tôdas as sucessões convergentes construídas com elementos de **A**, isto é, contém [**A**].

O lugar dum conjunto limitado também é limitado.

Consideremos, com efeito, um determinado elemento **b** e seja **a**′ um elemento qualquer do lugar [**A**] dum dado conjunto limitado **A**. Para um elemento **a** de **A** tal que se tenha $\overline{a'a}<1$, vem

$$\overline{a'b} \leqq \overline{a'a}+\overline{ab}<1+\overline{ab}.$$

Ora, esta relação mostra que, sendo limitado o conjunto das distâncias $\overline{ab}$ [*p.* 5, *l.* 19], o mesmo acontece ao conjunto das distâncias $\overline{a'b}$.

Da definição de lugar dum conjunto resulta por evidência que, dados dois conjuntos **A** e **B**, se fôr $A \,|{>}\, B$[2] será igualmente $[A] \,|{>}\, [B]$.

Também já sabemos que, da relação $[A] \mid [B]$, resultam as seguintes: $[A] \,|{>}\, B$ e $A \,|{<}\, [B]$; reciprocamente, se estas duas relações se verificarem, teremos $[A] \mid [B]$, visto ser então $[A] \,|{>}\, [B]$ e $[A] \,|{<}\, [B]$.

---

[1] Por definição, o *menor conjunto*, se existe, duma dada colecção de conjuntos é o que está contido em cada um dos outros da mesma colecção; o *maior conjunto*, se existe, é o conjunto da colecção a que pertencem todos os restantes. Noutros têrmos: o menor conjunto duma colecção de conjuntos é o produto de todos êles, se êste produto existe e se faz parte da colecção; o maior conjunto é a soma de todos, se esta soma é um conjunto da colecção.

[2] Por meio de $A \mid B$ indicamos que os conjuntos **A** e **B** são *coincidentes*, isto é, são constituídos pelos mesmos elementos. Generalizamos, dêste modo, uma notação já estabelecida a princípio.

Para indicar que os elementos de **A** são elementos de **B**, mas que estes dois conjuntos não coincidem, escrevemos $A < B$ (ou $B > A$) e dizemos: **A** *é menor que* **B** (ou **B** *é maior que* **A**).

Quando **A** é um subconjunto de **B** escrevemos $A \,|{<}\, B$ (ou $B \,|{>}\, A$) e dizemos: **A** *é o mesmo ou menor que* **B** (ou **B** *é o mesmo ou maior que* **A**). Tem igual significado qualquer das seguintes frases: **B** *contém* **A**, **A** *pertence a* **B**, **A** *está situado em* **B**, etc.

Observação. — É manifesto que todo o subconjunto infinito e fechado $\mathbf{A}$ dum espaçóide $\mathbf{P}$ é um outro espaçóide no qual a definição de distância entre os elementos é a mesma que em $\mathbf{P}$.

Logo podemos afirmar que o lugar dum conjunto infinito constitui um espaçóide, pois já sabemos que o lugar dum conjunto é necessàriamente fechado.

9. **Lugar duma soma e lugar dum produto de conjuntos.** — É evidente que *a soma dum número finito de conjuntos fechados é ainda um conjunto fechado* e que *o lugar da soma dum número finito de parcelas (conjuntos) é a soma dos lugares das parcelas:* se $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{V}$ são subconjuntos quaisquer de $\mathbf{P}$, temos

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}+\ldots+\mathbf{V}] \mid [\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]+\ldots+[\mathbf{V}].$$

A operação por meio da qual formamos o lugar dum conjunto é, pois, distributiva em relação à soma dum número finito de parcelas.

No caso duma infinidade de parcelas apenas se pode afirmar, em geral, que o *lugar da soma contém a soma dos lugares das parcelas.* Mas, se numa infinidade de conjuntos houver um $\mathbf{A}$ maior do que todos os outros, o lugar da soma será evidentemente o lugar de $\mathbf{A}$, quere dizer, ainda será a soma dos lugares das parcelas.

Também se reconhece fàcilmente que *o lugar da soma será a soma dos lugares das parcelas se esta última soma fôr um conjunto fechado.*

Uma soma de conjuntos e a soma dos respectivos lugares são conjuntos que admitem o mesmo lugar.

Com efeito, sejam $\mathbf{S}$ e $\mathbf{S}'$ respectivamente a soma de diversos conjuntos dados e a soma dos lugares dêstes conjuntos. Da relação $\mathbf{S} \mid< \mathbf{S}'$ vem $\mathbf{S} \mid< [\mathbf{S}']$. Por outro lado já dissemos que é $[\mathbf{S}] \mid> \mathbf{S}'$. Logo temos $[\mathbf{S}] \mid [\mathbf{S}']$.

Como corolário podemos afirmar que *o lugar duma soma de conjuntos não se altera quando substituímos alguns dêstes conjuntos por outros que admitam os mesmos lugares que os primeiros.*

O lugar da parte comum a diversos conjuntos, ou produto dêstes, quando existe, nem sempre é a parte comum aos lugares dos mesmos conjuntos. É o que sucede: com dois intervalos abertos sem pontos interiores comuns mas com um extremo comum; com o conjunto dos números racionais dum intervalo e o conjunto dos números irracionais do mesmo intervalo; com a infinidade numerada de conjuntos de números que se obtém juntando o número 1 a cada intervalo $\left(0, \frac{1}{i}\right)$ $(i=1, 2, \ldots)$, excluindo em todos o número zero.

Todavía, quando numa colecção de conjuntos houver um **A** menor do que todos os outros, o lugar do produto será o lugar de **A**, isto é, o produto dos lugares dos factores.

Imediatamente verificamos, como regra geral, que *o lugar do produto está contido no produto dos lugares dos factores.* Na verdade, um limite duma sucessão de elementos da parte comum a diversos conjuntos é elemento comum aos lugares dos mesmos conjuntos.

Pode, em particular, afirmar-se que: *o produto, caso exista, de diversos conjuntos totalmente fechados, em número finito ou infinito, é ainda um conjunto totalmente fechado.* Com efeito, o lugar do produto de diversos conjuntos totalmente fechados está contido no próprio produto que é, por isso, totalmente fechado.

Acêrca da existência do produto duma infinidade de conjuntos desta natureza, registemos a seguinte proposição:

Para que exista o produto duma infinidade de conjuntos totalmente fechados, um dos quais, pelo menos, supomos limitado, é necessário e suficiente que exista o produto de quaisquer dos mesmos conjuntos tomados em número finito.

Esta proposição, que adiante demonstraremos [n.os 43 e 83], é a correspondente extensão dum teorema de Riesz-Sierpinski para os conjuntos que estamos considerando [1].

10. Esferóide situado num espaçóide P. — Chamemos *esferóide* **F** *de centro num elemento* **c** *e de raio igual ao número* $\rho > 0$, ao conjunto dos elementos **f** de **P** que satisfaçam à condição $\overline{\mathbf{fc}} \lesssim \rho$.

---

[1] Veja-se Frechet, *Les Espaces Abstraits*, p. 232.

O diâmetro dum esferóide não excede o dôbro do raio, como é evidente.

Os *elementos exteriores a* **F** são os de **P** — **F**, caso existam, e o seu conjunto chama-se o *exterior de* **F**.

Os elementos de **F** que não são limites de elementos exteriores chamam-se *interiores* e o seu conjunto é o *interior do esferóide* **F**.

Os elementos de **F**, quando existem, que são limites de elementos exteriores chamam-se *elementos extremos de* **F**, e ao seu conjunto damos o nome de *estrema do esferóide* **F**. Como vemos, a estrema de **F** é o produto dos conjuntos **F** e [**P** — **F**].

Diremos que um conjunto é interior, exterior ou extremo em relação a um dado esferóide, conforme pertencer ao interior, ao exterior ou à estrema do mesmo esferóide.

Um esferóide é um conjunto totalmente fechado.

Com efeito, se o elemento **a** é limite duma sucessão convergente de elementos

$$\mathbf{f}_1,\ \mathbf{f}_2,\ \ldots,\ \mathbf{f}_i,\ \ldots$$

do esferóide **F**, as relações

$$\overline{\mathbf{f}_i\mathbf{c}} \lessgtr \rho \quad (i=1,\ 2,\ \ldots)$$

dão

$$lim\,\overline{\mathbf{f}_i\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{c}} \lessgtr \rho \quad [p.\ 18,\ l.\ 17].$$

Logo o elemento **a** pertence a **F** que é, portanto, um conjunto totalmente fechado.

Por tal motivo um elemento exterior a **F** só é limite de elementos que a partir de certa ordem são exteriores ao mesmo esferóide.

A estrema dum esferóide é um conjunto totalmente fechado.

Na verdade, a estrema **T** dum esferóide **F** é o produto dos conjuntos **F** e [**P** — **F**], e sabemos que um produto de conjuntos totalmente fechados é um conjunto que ainda satisfaz a esta condição.

Logo um elemento interior a **F** só é limite de elementos que a partir de certa ordem são interiores a êste esferóide.

Os elementos **t** *da estrema* **T** *do esferóide* **F** *satisfazem à condição* $\overline{\mathbf{tc}} = \rho$.

Com efeito, um elemento **t** de **T** é limite duma sucessão convergente

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots$$

de elementos exteriores a **F**. Mas, como é

$$\overline{\mathbf{a}_i\mathbf{c}} > \rho \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

temos

$$\lim \overline{\mathbf{a}_i\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{tc}} \geq \rho,$$

donde vem $\overline{\mathbf{tc}} = \rho$ porque **t** é um elemento de **F**.

Daqui resulta que são necessàriamente interiores a **F** os elementos **f** tais que seja $\overline{\mathbf{fc}} < \rho$.

Conhecida a definição de esferóide situado num certo espaçóide **P**, podemos dar as formas seguintes a algumas definições já estabelecidas anteriormente:

Um conjunto é limitado quando todos os seus elementos pertencem a um determinado esferóide.

Uma sucessão de elementos converge para um limite **a** *quando a cada esferóide de centro* **a** *corresponde uma ordem a partir da qual todos os têrmos da sucessão pertencem ao mesmo esferóide.*

Um elemento **a** *é limite duma sucessão de elementos quando qualquer esferóide de centro* **a** *contém uma infinidade de têrmos da sucessão.*

Um elemento **a** *pertence ao lugar de* **A** *quando existe o produto do conjunto* **A** *por qualquer esferóide de centro* **a**.

Um elemento **a** *é limite dum conjunto* **A** *quando existe e é pròpriamente infinito o produto dêste conjunto por qualquer esferóide de centro* **a**.

Um elemento é interior a um esferóide **F** *quando é centro dum esferóide contido no primeiro.*

Um elemento é extremo dum esferóide **F** *quando qualquer esferóide de centro neste elemento contém elementos de* **F** *e de* **P — F**.

Um elemento é exterior a um esferóide **F** *quando é centro dum esferóide contido em* **P — F**.

As demonstrações por meio das quais provamos que estas definições são equivalentes às que enunciámos mais atrás, não apresentam dificuldade alguma.

CAPÍTULO II

ESPAÇÓIDES COMPOSTOS

I

COMPOSIÇÃO DE ESPAÇÓIDES

11. Definições. — Consideremos um sistema de n espaçóides quaisquer dispostos numa sucessão

$$(1) \qquad \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots, \mathsf{P}_n$$

e enunciemos algumas definições relativamente a êste sistema de espaçóides.

Elemento composto é tôda a sucessão de n elementos pertencentes respectivamente aos espaçóides (1). Representemos por $\mathbf{a}^n$ o elemento composto

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n),$$

isto é, façamos

$$\mathbf{a}^n \mid (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n).$$

Ao número inteiro n damos o nome de *ordem do elemento composto* $\mathbf{a}^n$. Os elementos componentes

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$$

chamam-se *coordenadas do elemento composto;* $\mathbf{a}_1$ é a primeira coordenada de $\mathbf{a}^n$, $\mathbf{a}_2$ a segunda coordenada, etc.

As coordenadas do elemento $\mathbf{a}^n$ também se chamam *projecções* *simples* ou *projecções de primeira ordem* do mesmo elemento; $\mathbf{a}_1$ é a primeira projecção simples, $\mathbf{a}_2$ a segunda, etc.

Uma *projecção dupla* ou *projecção de segunda ordem do elemento* $\mathbf{a}^n$ é qualquer elemento composto, de segunda ordem, que admita por coordenadas duas das coordenadas do elemento $\mathbf{a}^n$ dispostas pela ordem em que se encontram neste elemento. Assim, a projecção dupla de $\mathbf{a}^n$ indicada pelos números inteiros r e s $(0<r<s<n+1)$ é o elemento de segunda ordem $(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s)$ onde a primeira e segunda coordenadas são respectivamente as coordenadas de ordem r e de ordem s de $\mathbf{a}^n$.

Em geral, a *projecção de ordem* k $(k<n)$ *do elemento* $\mathbf{a}^n$ representada pelos k índices

$$r, s, \ldots, u \quad (0<r<s<\ldots<u<n+1)$$

é o elemento composto de ordem k

$$(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s, \ldots, \mathbf{a}_u)$$

que tem por coordenadas respectivamente a de ordem r, a de ordem s, etc. do elemento $\mathbf{a}^n$. Um elemento composto de ordem n admite $\binom{n}{k}$ projecções de ordem k.

Consideremos agora n subconjuntos

$$(2) \qquad \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$$

dos espaçóides (1) respectivamente. Chamemos *conjunto composto* dos conjuntos (2) (conjuntos componentes), o qual representaremos por

$$(\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n),$$

ao conjunto de todos os elementos compostos de ordem n e de coordenadas pertencentes aos conjuntos (2) respectivamente. O número inteiro n é a *ordem* dêste conjunto composto.

Se os conjuntos (2) forem somas de vários conjuntos, é evidente que o respectivo composto será a soma dos conjuntos que se obtêm *compondo*, de tôdas as maneiras possíveis, cada parcela de A_1, com cada parcela de A_2, etc.

Designemos por P^n, em particular, o conjunto composto dos espaçóides (1):

$$\mathsf{P}^n \mid (\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots, \mathsf{P}_n).$$

Um subconjunto de P^n diz-se um *conjunto de ordem n* e será representado por A^n [1]. Êste conjunto admite projecções correspondentes às dos seus elementos: as *projecções simples* ou *de primeira ordem de* A^n são os conjuntos das primeiras coordenadas, das segundas coordenadas, etc. dos elementos de A^n; dum modo geral, a *projecção de ordem k do conjunto* A^n expressa pelos índices $r, s, \ldots, u$ é o conjunto das projecções dos elementos de A^n expressas pelos mesmos índices. Também dizemos que esta é a *projecção de* A^n *sôbre o espaçóide*

$$\mathsf{P}^k \mid (\mathsf{P}_r, \mathsf{P}_s, \ldots, \mathsf{P}_u)$$

(considerando desde já *espaçado* qualquer conjunto composto de espaçóides [*n.º seguinte*]). Em particular, sabemos o que se entende por *projecção do elemento* a^n *sôbre o espaçóide* P^k.

Chamemos projecção duma dada sucessão de subconjuntos de P^n sôbre o aludido espaçóide P^k, à sucessão das projecções dêstes subconjuntos sôbre o mesmo espaçóide P^k. Conforme fôr $k=1, 2, \ldots$, assim diremos que essa projecção é simples, dupla, etc.

Temos definido, em particular, o que seja uma determinada projecção duma sucessão de elementos de P^n.

Empregaremos algumas vezes a frase «*correspondentes projecções*» quando nos quisermos referir a projecções (de elementos ou de conjuntos, ou de sucessões de elementos ou de conjuntos, ou de uns e de outros) sôbre um determinado espaçóide P^k, isto é, relativas a um determinado sistema de índices crescentes $r, s, \ldots, u$, positivos mas inferiores a $n+1$.

12. Espaçamento de P^n. — Vejamos agora como *espaçar* o

[1] É claro que um conjunto de ordem n não é necessàriamente um conjunto composto.

conjunto P^n, a que daremos, então, o nome de *espaçóide composto de ordem n* [1].

Generalizando a definição de distância entre dois pontos do espaço euclidiano de coordenadas cartesianas rectangulares, chamemos distância entre os elementos

$$\mathsf{a}^n \mid (\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_n) \quad \text{e} \quad \mathsf{b}^n \mid (\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \ldots, \mathsf{b}_n)$$

do conjunto P^n ao número

$$\overline{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n} = \left(\overline{\mathsf{a}_1\mathsf{b}_1}^2 + \overline{\mathsf{a}_2\mathsf{b}_2}^2 + \ldots + \overline{\mathsf{a}_n\mathsf{b}_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{[2]}.$$

A distância $\overline{\mathsf{a}^n\mathsf{b}^n}$ não é excedida pela distância entre duas correspondentes projecções de a^n e b^n, quaisquer que estas sejam.

Também é evidente que, se fôr

$$\mathsf{a}_1 \parallel \mathsf{b}_1, \ \mathsf{a}_2 \parallel \mathsf{b}_2, \ \ldots, \ \mathsf{a}_n \parallel \mathsf{b}_n,$$

será $\mathsf{a}^n \parallel \mathsf{b}^n$ e recìprocamente. Em particular, se fôr $\mathsf{a}^n \mid \mathsf{b}^n$, será $\mathsf{a}^n \parallel \mathsf{b}^n$, quere dizer, um elemento de P^n é juxtaposto a si mesmo. Correspondentes projecções de elementos juxtapostos entre si são igualmente juxtapostas uma à outra, como é evidente.

Notemos que, se um dos conjuntos componentes admitir um subconjunto limitado e pròpriamente infinito, o mesmo acontecerá ao respectivo conjunto composto. Assim, se o primeiro conjunto componente P_1 admitir um subconjunto A_1 limitado e pròpriamente infinito, encontrar-se-á nestas mesmas condições, por exemplo, o subconjunto de P^n constituído por todos os elementos

$$(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}'_2, \ldots, \mathsf{a}'_n),$$

sendo a_1 qualquer elemento de A_1, e $\mathsf{a}'_2, \ldots, \mathsf{a}'_n$ determinados elementos dos conjuntos $\mathsf{P}_2, \ldots, \mathsf{P}_n$ respectivamente. Também serve de exemplo o caso mais geral dum conjunto A^n composto

---

[1] Preferimos dizer «espaçóide (e conjunto) *de ordem n*», e não «*de n dimensões*», porque esta última expressão tem sido tomada em sentidos inteiramente diferentes do nosso.

[2] Consideramos apenas o valor aritmético de cada raiz quadrada.

de conjuntos limitados, sendo um dêstes, pelo menos, pròpriamente infinito; na verdade, o conjunto A^n é pròpriamente infinito, como é evidente, e é limitado em virtude da seguinte proposição:

É condição necessária e suficiente para que um conjunto A^n *seja limitado, que sejam limitadas as suas projecções simples.*

Com efeito, supondo que

$$a^n \mid (a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad e \quad b^n \mid (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

são dois elementos quaisquer dum conjunto A^n, as relações

$$\overline{a_h b_h} \leqq \left(\overline{a_1 b_1}^2 + \overline{a_2 b_2}^2 + \ldots + \overline{a_n b_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \overline{a_1 b_1} + \overline{a_2 b_2} + \ldots + \overline{a_n b_n}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n)$$

ou

$$\overline{a_h b_h} \leqq \overline{a^n b^n} \leqq \overline{a_1 b_1} + \overline{a_2 b_2} + \ldots + \overline{a_n b_n}$$

mostram que, se fôr limitado o conjunto A^n, também serão limitadas as projecções simples e reciprocamente. Notemos, ainda, que é limitada qualquer projecção dum conjunto limitado A^n.

As propriedades fundamentais a que deve satisfazer a definição de distância $\overline{a^n b^n}$, decorrem, como vamos verificar, das mesmas propriedades a que submetemos a distância $\overline{ab}$ entre elementos de cada conjunto $P_1, P_2, \ldots, P_n$ [1].

---

[1] Poderíamos adoptar, nesta teoria, para definição de distância $\overline{a^n b^n}$ uma das expressões

$$\left(\overline{a_1 b_1} + \ldots + \overline{a_n b_n}\right)^{\frac{1}{2}}, \ \overline{a_1 b_1} + \ldots + \overline{a_n b_n}$$

bem como outras funções não negativas das distâncias

$$\overline{a_1 b_1}, \ \overline{a_2 b_2}, \ldots$$

(funções necessàriamente contínuas e nulas com estas distâncias). Mas também não haveria vantagem em nos afastarmos da generalização mais natural da definição de distância geométrica entre dois pontos do espaço euclidiano de coordenadas cartesianas rectangulares.

Depois, a expressão que preferimos para distância $\overline{a^n b^n}$ permite-nos

1) *Dados os elementos*

$$\mathrm{a}^n \mid (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n),\ \mathrm{b}^n \mid (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_n) \text{ e } \mathrm{c}^n \mid (\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_n),$$

verifica-se a relação

$$\overline{\mathrm{a}^n\mathrm{c}^n} \lesssim \overline{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^n} + \overline{\mathrm{b}^n\mathrm{c}^n}.$$

Para demonstrar que assim é, basta atender às relações

$$\overline{\mathrm{a}^n\mathrm{c}^n} = \left(\overline{\mathrm{a}_1\mathrm{c}_1}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{a}_n\mathrm{c}_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \left[\left(\overline{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1} + \overline{\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1}\right)^2 + \ldots + \left(\overline{\mathrm{a}_n\mathrm{b}_n} + \overline{\mathrm{b}_n\mathrm{c}_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\left[\left(\overline{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1} + \overline{\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1}\right)^2 + \ldots + \left(\overline{\mathrm{a}_n\mathrm{b}_n} + \overline{\mathrm{b}_n\mathrm{c}_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \lesssim \left(\overline{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{a}_n\mathrm{b}_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\overline{\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1}^2 + \ldots + \overline{\mathrm{b}_n\mathrm{c}_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} = \overline{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^n} + \overline{\mathrm{b}^n\mathrm{c}^n}\ [1].$$

---

demonstrar algumas proposições sôbre conjuntos de pontos dum hiperespaço e sôbre funções dêstes pontos quando, nos assuntos que adiante desenvolveremos, cada conjunto componente fôr constituído por números reais.

[1] Façamos

$$\overline{\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1} = \alpha_1,\ \overline{\mathrm{a}_2\mathrm{b}_2} = \alpha_2,\ \ldots,\ \overline{\mathrm{a}_n\mathrm{b}_n} = \alpha_n,\ \overline{\mathrm{b}_1\mathrm{c}_1} = \beta_1,\ \overline{\mathrm{b}_2\mathrm{c}_2} = \beta_2,\ \ldots,\ \overline{\mathrm{b}_n\mathrm{c}_n} = \beta_n$$

e demonstremos que é

$$[(\alpha_1 + \beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)^2]^{\frac{1}{2}} \lesssim (\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n)^{\frac{1}{2}} + (\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n)^{\frac{1}{2}}.$$

A presente relação deduz-se da seguinte:

$$(\alpha_1 + \beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)^2 \lesssim (\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n) + (\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n) +$$

$$+ 2\,(\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n)^{\frac{1}{2}}(\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Se desenvolvermos os quadrados que figuram no primeiro membro da última relação, imediatamente reconheceremos que ela é, por sua vez, uma conseqüência desta outra:

$$\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n \lesssim (\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n)^{\frac{1}{2}}(\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta relação depende da seguinte

$$(\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n)^2 \lesssim (\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n)(\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n),$$

As proposições que enunciámos no n.º 2, mas agora relativas ao conjunto P^n, deduzem-se da relação fundamental que acabámos de verificar.

2) *A qualquer sucessão de elementos de* P^n,

$$\mathsf{a}^n_1, \mathsf{a}^n_2, \ldots, \mathsf{a}^n_i, \ldots,$$

onde seja $lim\, \overline{\mathsf{a}^n_i\, \mathsf{a}^n_{i'}} = 0$, *corresponde um elemento* a^n *tal que temos* $lim\, \overline{\mathsf{a}^n_i\, \mathsf{a}^n} = 0$.

Com efeito, façamos

$$\mathsf{a}^n_i \mid (\mathsf{a}_{1,i}, \mathsf{a}_{2,i}, \ldots, \mathsf{a}_{n,i}) \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Da condição

$$lim\, \overline{\mathsf{a}^n_i\, \mathsf{a}^n_{i'}} = lim \left(\overline{\mathsf{a}_{1,i}\, \mathsf{a}_{1,i'}}^2 + \ldots + \overline{\mathsf{a}_{n,i}\, \mathsf{a}_{n,i'}}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

resultam as seguintes

$$lim\, \overline{\mathsf{a}_{1,i}\, \mathsf{a}_{1,i'}} = 0, \ \ldots, \ lim\, \overline{\mathsf{a}_{n,i}\, \mathsf{a}_{n,i'}} = 0.$$

Existem, portanto, elementos

$$\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_n,$$

respectivamente de

$$\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots, \mathsf{P}_n,$$

tais que seja

$$lim\, \overline{\mathsf{a}_{1,i}\, \mathsf{a}_1} = 0, \ \ldots, \ lim\, \overline{\mathsf{a}_{n,i}\, \mathsf{a}_n} = 0,$$

---

ou

$$(\alpha^2_1 + \ldots + \alpha^2_n)(\beta^2_1 + \ldots + \beta^2_n) - (\alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n)^2 \geq 0,$$

e que é verdadeira como mostra a identidade de Lagrange:

$$\begin{aligned}(\alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \ldots + \alpha^2_n)(\beta^2_1 + \beta^2_2 + \ldots + \beta^2_n) - (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \ldots + \alpha_n \beta_n)^2 = \\ = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1)^2 + \ldots + (\alpha_1 \beta_n - \alpha_n \beta_1)^2 + \\ + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2)^2 + \ldots + (\alpha_2 \beta_n - \alpha_n \beta_2)^2 + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (\alpha_{n-1} \beta_n - \alpha_n \beta_{n-1})^2.\end{aligned}$$

e, se fizermos

$$\mathsf{a}^n \mid (\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_n),$$

virá

$$lim\, \overline{\mathsf{a}^n{}_i \mathsf{a}^n} = lim \left(\overline{\mathsf{a}_{1,i}\, \mathsf{a}_1}^2 + \ldots + \overline{\mathsf{a}_{n,i}\, \mathsf{a}_n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0\,.$$

3) *É possível dividir qualquer conjunto limitado* A^n *num número finito de conjuntos de diâmetros inferiores a todo o número positivo prèviamente dado.*

Para a demonstração dêste enunciado já vimos que são limitadas as projecções simples

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$$

dum dado conjunto limitado A^n. Podemos, portanto, dividir cada conjunto projecção

$$\mathsf{A}_h \quad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

num número finito de conjuntos

$$\mathsf{A}_{h,i} \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

de diâmetros menores do que $n^{-\frac{1}{2}}\delta$, sendo δ é um número positivo prèviamente dado.

A estas divisões dos conjuntos A_h corresponde a seguinte divisão do conjunto considerado A^n num número finito de conjuntos parciais: cada conjunto parcial é constituído por todos os elementos de A^n de coordenadas pertencentes respectivamente a determinados dos conjuntos

$$\mathsf{A}_{1,i}, \mathsf{A}_{2,i'}, \ldots.$$

Os conjuntos parciais obtidos dêste modo têm os diâmetros menores do que δ porque, se

$$\mathsf{a}^n \mid (\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \ldots, \mathsf{a}_n) \quad \text{e} \quad \mathsf{b}^n \mid (\mathsf{b}_1, \mathsf{b}_2, \ldots, \mathsf{b}_n)$$

são dois elementos dum mesmo conjunto parcial, temos

$$\overline{\mathsf{a}^n \mathsf{b}^n} = \left(\overline{\mathsf{a}_1 \mathsf{b}_1}^2 + \overline{\mathsf{a}_2 \mathsf{b}_2}^2 + \ldots + \overline{\mathsf{a}_n \mathsf{b}_n}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(n\, n^{-1} \delta^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \delta\,.$$

13. Espaçóides compostos de origem P. — Os resultados precedentemente obtidos permitem-nos *espaçar,* por indução, uma infinidade de conjuntos que se formam por meio da *composição de conjuntos* aplicada sucessivamente a partir dum determinado componente **P**.

Na verdade, se, nas considerações que fizemos ùltimamente, imaginarmos, em primeiro lugar, que é

$$\mathsf{P}_1 \mid \mathsf{P}_2 \mid \ldots \mid \mathsf{P}_n \mid \mathsf{P},$$

teremos espaçado o conjunto de tôdas as sucessões de n elementos dum dado espaçóide **P**. Obteremos assim os espaçóides P^n mais simples ($n = 2, 3, \ldots$), de *origem* no conjunto **P**, a que podemos chamar *espaçóides compostos de primeira espécie em relação à origem* P ou, mais simplesmente, espaçóides P'.

Se supusermos agora que os componentes

$$\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots, \mathsf{P}_n$$

são conjuntos P' ou conjuntos **P** e P', obteremos novos conjuntos P^n, a que chamamos *espaçóides compostos de segunda ordem em relação à origem* **P**, ou espaçóides P''.

Em geral, damos o nome de espaçóides $\mathsf{P}^{(i)}$, ou *espaçóides* P^n *de espécie* i *em relação à origem* **P**, aos conjuntos espaçados compostos de ordem n ($n = 2, 3, \ldots$) que não são das espécies inferiores a i, mas que têm por componentes conjuntos destas espécies [1]. Claro está que, entre os componentes dum espaçóide composto de espécie i, deve figurar necessàriamente um, pelo menos, que seja de espécie $i-1$; de outro modo êsse espaçóide composto seria de espécie inferior a i.

Chamemos *espaçóides numéricos compostos* aos conjuntos espaçados que se constroem da maneira indicada, mas tomando para origem, em particular, o conjunto de todos os números reais e imaginários. Tais espaçóides são classificados em espécies, como acima dissemos.

É sabido que um espaçóide **P** admite diversos outros espa-

---

[1] O espaçóide **P** tomado para origem é considerado de espécie inferior à primeira.

çóides por subconjuntos: são os conjuntos infinitos e fechados contidos em P. A qualquer espaçóide contido num espaçóide numérico também damos esta mesma designação. Dêste modo, o conjunto dos números reais, o conjunto dos números dum intervalo fechado, o conjunto dos pontos duma circunferência, o conjunto dos números imaginários de afixos dum dado círculo, o conjunto dos pontos do espaço ordinário de n dimensões e o conjunto dos pontos duma recta ou duma esfera dêste espaço, são mais exemplos de espaçóides numéricos. Outro tanto podemos dizer dos conjuntos compostos dêstes, de primeira espécie ou de espécie superior à primeira.

Sob esta designação de espaçóides numéricos ainda incluiremos outros conjuntos, que mais adiante serão estudados, tais como: o conjunto dos conjuntos limitados de pontos do espaço ordinário de n dimensões, o conjunto dos conjuntos limitados de conjuntos limitados de pontos do espaço ordinário de n dimensões, etc. Duma maneira geral, *espaçaremos* o conjunto dos conjuntos limitados de elementos dum espaçóide dado, qualquer que êste seja.

14. Limite duma sucessão de elementos de P^n. — Demonstrámos no n.º 12 que a definição adoptada para distância entre os elementos dum dado conjunto composto de espaçóides satisfaz aos requisitos indicados no n.º 1. *Espaçado* assim o conjunto composto P^n, podemos afirmar que têm lugar, a respeito dêste conjunto, tôdas as definições e propriedades já estabelecidas, duma maneira geral, no primeiro capítulo.

Importa conhecer, a-propósito dos limites de elementos de P^n, mais as seguintes proposições:

Se a sucessão

$$(3) \qquad \mathrm{a}^n{}_1, \mathrm{a}^n{}_2, \ldots, \mathrm{a}^n{}_i, \ldots$$

de elementos de P^n *converge para o limite* a^n, *as projecções simples desta sucessão* [*p.* 29, *l.* 22] *convergem para as correspondentes projecções de* a^n, *e recìprocamente.*

Com efeito, façamos

$$\mathrm{a}^n \mid (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n) \quad \text{e} \quad \mathrm{a}^n{}_i \mid (\mathrm{a}_{1,i}, \mathrm{a}_{2,i}, \ldots, \mathrm{a}_{n,i}) \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Em virtude das relações

$$\overline{\mathbf{a}_{h,i}\,\mathbf{a}_h} < \overline{\mathbf{a}^n{}_i\,\mathbf{a}^n} < \overline{\mathbf{a}_{1,i}\,\mathbf{a}_1} + \overline{\mathbf{a}_{2,i}\,\mathbf{a}_2} + \ldots + \overline{\mathbf{a}_{n,i}\,\mathbf{a}_n}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n) \quad [p.\ 31,\ l.\ 12]$$

resulta que, se fôr $lim\,\overline{\mathbf{a}^n{}_i\,\mathbf{a}^n} = 0$, será

$$lim\,\overline{\mathbf{a}_{h,i}\,\mathbf{a}_h} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

e reciprocamente.

Dêste resultado concluímos a seguinte proposição mais geral:

Para a convergência da sucessão (3) *é necessário e suficiente que as suas projecções sejam convergentes; os limites das projecções são as correspondentes projecções dos limites da mesma sucessão* (3).

A segunda parte desta proposição pode exprimir-se dizendo que *as projecções dum elemento composto são funções contínuas dêsse elemento.*

Qualquer elemento limite duma projecção dum conjunto limitado $\mathbf{A}^n$ *é a correspondente projecção dum elemento limite de* $\mathbf{A}^n$.

Efectivamente, qualquer elemento limite $\mathbf{a}^k$ duma dada projecção $\mathbf{A}^k$ de $\mathbf{A}^n$ é limite duma sucessão convergente, pròpriamente infinita, de elementos de $\mathbf{A}^k$,

$$(4) \qquad \mathbf{a}^k{}_1,\ \mathbf{a}^k{}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}^k{}_i,\ \ldots,$$

e é evidente que uma sucessão de elementos de $\mathbf{A}^n$,

$$\mathbf{a}^n{}_1,\ \mathbf{a}^n{}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}^n{}_i,\ \ldots,$$

de que aquela seja projecção, também é pròpriamente infinita. Esta sucessão é limitada, visto supormos $\mathbf{A}^n$ limitado, e admite, por isso, uma subsucessão convergente, pròpriamente infinita,

$$(5) \qquad \mathbf{a}^n{}_r,\ \mathbf{a}^n{}_s,\ \ldots,\ \mathbf{a}^n{}_u,\ \ldots \quad [p.\ 15,\ l.\ 26].$$

A correspondente projecção desta última é a subsucessão

$$\mathbf{a}^k{}_r,\ \mathbf{a}^k{}_s,\ \ldots,\ \mathbf{a}^k{}_u,\ \ldots$$

da sucessão (4). Ora, o enunciado precedente diz-nos que o limite $\mathbf{a}^k$ desta sucessão [*p.* 17, *l.* 7] é a correspondente projecção dum limite da sucessão (5), ou seja dum elemento limite de $\mathbf{A}^n$.

15. Projecções dum esferóide situado em $\mathbf{P}^n$. — *As projecções dum esferóide situado num espaçóide composto são novos esferóides do mesmo raio e de centros nas correspondentes projecções do centro do esferóide dado.*

Consideremos uma das projecções do conjunto $\mathbf{P}^n$, por exemplo a projecção

$$\mathbf{P}^k \mid (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_k).$$

Seja $\mathbf{F}^n$ o esferóide de $\mathbf{P}^n$ de centro no elemento

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$$

e de raio ρ. Seja ainda $\mathbf{F}^k$ o esferóide de $\mathbf{P}^k$ de centro

$$(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k)$$

e do mesmo raio ρ, e provemos que $\mathbf{F}^k$ é a projecção de $\mathbf{F}^n$ sôbre o espaçóide $\mathbf{P}^k$.

A projecção

$$\mathbf{f}^k \mid (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k)$$

dum elemento

$$\mathbf{f}^n \mid (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$$

de $\mathbf{F}^n$ é um elemento de $\mathbf{F}^k$, porque da condição

$$\overline{\mathbf{f}_1\mathbf{c}_1}^2 + \overline{\mathbf{f}_2\mathbf{c}_2}^2 + \cdots + \overline{\mathbf{f}_n\mathbf{c}_n}^2 \lessgtr \rho^2$$

resulta

$$\overline{\mathbf{f}_1\mathbf{c}_1}^2 + \overline{\mathbf{f}_2\mathbf{c}_2}^2 + \cdots + \overline{\mathbf{f}_k\mathbf{c}_k}^2 \lessgtr \rho^2.$$

Recìprocamente, um elemento

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k)$$

do F^k satisfaz à condição

$$\overline{\mathsf{f}_1\mathsf{c}_1}^2 + \cdots + \overline{\mathsf{f}_k\mathsf{c}_k}^2 + \overline{\mathsf{c}_{k+1}\mathsf{c}_{k+1}}^2 + \cdots + \overline{\mathsf{c}_n\mathsf{c}_n}^2 < \rho^2$$

e é, por isso, projecção do elemento

$$(\mathsf{f}_1, \ldots, \mathsf{f}_k, \mathsf{c}_{k+1}, \ldots, \mathsf{c}_n)$$

do esferóide F^n. Logo F^k é a projecção de F^n.

A projecção do interior de F^n *está contida no interior de* F^k; *a projecção da estrema de* F^n *contém a estrema de* F^k.

Com efeito, um elemento f^n interior a F^n é centro dum esferóide F'^n contido em F^n, e a projecção de F'^n é, como vimos, um esferóide contido em F^k e de centro na projecção f^k de f^n. Logo f^k é interior a F^k, e o mesmo se diz das projecções de todos os elementos interiores a F^n.

Daqui concluímos que um dado elemento da estrema de F^k só é projecção de elementos da estrema de F^n (todos juxtapostos entre si, evidentemente), quere dizer, a projecção da estrema de F^n contém a estrema de F^k.

II

A-PROPÓSITO DO LUGAR DUM CONJUNTO A^n

16. Lugares das projecções dum conjunto A^n. Lugar dum conjunto composto. — Consideremos um espaçóide composto de ordem n, seja A^n um dos seus subconjuntos e demonstremos as seguintes proposições:

Correspondentes projecções dos conjuntos A^n *e* $[\mathsf{A}^n]$ *admitem os mesmos lugares.*

Com efeito, seja A^k uma determinada projecção do conjunto A^n, e B^k a projecção [1] do respectivo lugar $[\mathsf{A}^n]$. Um elemento

[1] Subentende-se que as aludidas projecções são correspondentes umas das outras [*p.* 29, *l.* 24].

qualquer b^k de B^k é a projecção dum limite duma sucessão convergente de elementos de A^n e, portanto, limite da projecção da mesma sucessão [*p.* 37, *l.* 9]. Logo o elemento b^k (que é limite duma sucessão de elementos de A^k) pertence ao lugar $[\mathsf{A}^k]$.

Temos assim demonstrado que é $[\mathsf{A}^k] \mid > \mathsf{B}^k$, visto b^k representar um elemento qualquer de B^k. Por outro lado também temos a relação $\mathsf{A}^k \mid < [\mathsf{B}^k]$, por ser $\mathsf{A}^k \mid < \mathsf{B}^k$. Daqui resulta $[\mathsf{A}^k] \mid [\mathsf{B}^k]$ [*p.* 21, *l.* 19].

As projecções dum conjunto limitado e fechado A^n *são ainda conjuntos fechados.*

Consideremos uma determinada projecção A^k dum conjunto limitado e fechado A^n. Qualquer elemento limite a^k de A^k é projecção dum elemento limite a^n de A^n, como já demonstrámos [*p.* 37, *l.* 14]. Mas, por definição de conjunto fechado, a^n justapõe-se a um elemento de A^n, donde concluímos que a^k justapõe-se a um elemento de A^k [*p.* 30, *l.* 15]. Logo o conjunto A^k é fechado [*p.* 20, *l.* 10].

Notemos que, *se o conjunto limitado* A^n *fôr totalmente fechado, as respectivas projecções também serão totalmente fechadas,* como fàcilmente se reconhece [*p.* 20, *l.* 19], pois já sabemos que estas projecções são conjuntos fechados.

Os lugares das projecções dum conjunto limitado A^n *são as correspondentes projecções do lugar de* A^n.

Na verdade, se A^k e B^k são correspondentes projecções de A^n e $[\mathsf{A}^n]$, temos $[\mathsf{A}^k] \mid [\mathsf{B}^k]$ como já demonstrámos; mas $[\mathsf{A}^n]$ é um conjunto limitado [*p.* 21, *l.* 7] e totalmente fechado, donde resulta que B^k também é totalmente fechado em virtude do que acima dissemos. Logo temos $[\mathsf{A}^k] \mid \mathsf{B}^k$.

Correspondentes projecções dos conjuntos A^n *e* $[\mathsf{A}^n]$ *são limitadas ao mesmo tempo.*

Êste enunciado resulta imediatamente da relação já justificada $[\mathsf{A}^k] \mid [\mathsf{B}^k]$, porque o lugar dum conjunto limitado também é limitado.

O recíproco do segundo enunciado não é sempre verdadeiro, quere dizer, um conjunto limitado que admita conjuntos fechados por projecções pode não ser um conjunto fechado. Podemos dizer, no entanto, que:

Qualquer conjunto $\mathbf{A}^n$ *composto de conjuntos fechados também é um conjunto fechado.*

Com efeito, seja $\mathbf{A}^n$ um conjunto composto de conjuntos fechados

$$(1) \qquad \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n,$$

limitados ou não. Um limite $\mathbf{a}^n$ duma sucessão convergente de elementos de $\mathbf{A}^n$ tem por coordenadas limites de sucessões de elementos dos conjuntos (1) respectivamente. Logo $\mathbf{a}^n$ tem por coordenadas elementos juxtapostos a elementos daqueles conjuntos e é, por isso, elemento juxtaposto a um elemento de $\mathbf{A}^n$. O conjunto $\mathbf{A}^n$ é, pois, fechado.

De maneira análoga se demonstra que: *todo o conjunto* $\mathbf{A}^n$ *composto de conjuntos totalmente fechados é ainda totalmente fechado.*

O lugar dum conjunto composto é o conjunto composto dos lugares dos conjuntos componentes.

Sejam

$$\mathbf{A}^n \mid (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^n \mid ([\mathbf{A}_1], [\mathbf{A}_2], \ldots, [\mathbf{A}_n]).$$

É evidente a relação $\mathbf{A}^n \mid< \mathbf{B}^n$, donde vem $[\mathbf{A}^n] \mid< \mathbf{B}^n$, visto $\mathbf{B}^n$ ser um conjunto totalmente fechado, como acima dissemos. Além disso também é verdadeira a relação $[\mathbf{A}^n] \mid> \mathbf{B}^n$, porque um elemento de $\mathbf{B}^n$ admite por coordenadas limites de sucessões de elementos dos conjuntos (1) respectivamente e é, por tal motivo, limite duma sucessão de elementos do conjunto composto $\mathbf{A}^n$. As duas relações precedentes mostram que é $[\mathbf{A}^n] \mid \mathbf{B}^n$, como pretendíamos demonstrar.

17. Lugar das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto de segunda ordem. — Consideremos um espaçóide composto de segunda ordem

$$\mathbf{P}^2 \mid (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2).$$

Suponhamos que é $\mathsf{P}_1 \mid \mathsf{P}_2$ ou, mais geralmente, que um dos espaçóides componentes é um subconjunto do outro. Tomemos um subconjunto qualquer A^2 de P^2 e demonstremos as seguintes proposições:

O conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento de A^2 *e o conjunto análogo relativo a* $[\mathsf{A}^2]$ *admitem o mesmo lugar.*

Representemos por D o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento de A^2 e por D_1 o conjunto obtido da mesma forma a partir de $[\mathsf{A}^2]$. Justifiquemos primeiro a relação $[D] \mid > D_1$, e para isso mostremos que a distância $\overline{\mathsf{a}_1 \mathsf{a}_2}$ entre as coordenadas dum elemento $(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2)$ de $[\mathsf{A}^2]$ pertence ao lugar $[D]$. Êste elemento é limite duma sucessão convergente de elementos

$$(\mathsf{a}_{1,1}, \mathsf{a}_{2,1}), (\mathsf{a}_{1,2}, \mathsf{a}_{2,2}), \ldots, (\mathsf{a}_{1,i}, \mathsf{a}_{2,i}), \ldots$$

pertencentes a A^2. Mas, por ser $lim\, \mathsf{a}_{1,i} \parallel \mathsf{a}_1$ e $lim\, \mathsf{a}_{2,i} \parallel \mathsf{a}_2$ [*p.* 36, *l.* 29], temos $\overline{\mathsf{a}_1 \mathsf{a}_2} = lim\, \overline{\mathsf{a}_{1,i} \mathsf{a}_{2,i}}$ [*p.* 18, *l.* 12], isto é, a distância $\overline{\mathsf{a}_1 \mathsf{a}_2}$ pertence ao lugar $[D]$, e assim estabelecemos a relação $[D] \mid > D_1$.

As duas relações $[D] \mid > D_1$ e $D \mid < [D_1]$, a última das quais resulta de $D \mid < D_1$, mostram que é $[D] \mid [D_1]$.

É fechado o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto fechado A^2, *supondo limitada uma das suas projecções.*

Seja D o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento dum conjunto fechado A^2, no qual supomos limitada uma das projecções. Para considerar um limite d duma sucessão convergente de elementos de D, construa-se uma sucessão de elementos do conjunto A^2,

$$(2) \qquad (\mathsf{a}_{1,1}, \mathsf{a}_{2,1}), (\mathsf{a}_{1,2}, \mathsf{a}_{2,2}), \ldots, (\mathsf{a}_{1,i}, \mathsf{a}_{2,i}), \ldots,$$

determinada de forma que exista $lim\, \overline{\mathsf{a}_{1,i} \mathsf{a}_{2,i}} = d$. Supondo limitada a primeira projecção de A^2, por exemplo, também é limitado o conjunto das primeiras coordenadas dos têrmos de (2), assim como o conjunto das segundas coordenadas em virtude da relação

$$\overline{a_{2,i}\,a_{2,i'}} \leqq \overline{a_{1,i}\,a_{2,i}} + \overline{a_{1,i}\,a_{1,i'}} + \overline{a_{1,i'}\,a_{2,i'}}$$

e da condição de existir $lim\,\overline{a_{1,i}\,a_{2,i}}$. Logo a sucessão (2) é limitada [*p.* 31, *l.* 4], e, por êste motivo, admite uma subsucessão convergente [*p.* 15, *l.* 26], que representamos por

$$(a_{1,r}\,,\; a_{2,r})\,,\; (a_{1,s}\,,\; a_{2,s})\,,\; \ldots,\; (a_{1,u}\,,\; a_{2,u})\,,\; \ldots.$$

Seja $(a_1\,,\; a_2)$ um limite desta sucessão escolhido entre os elementos do conjunto fechado A^2. Temos

$$d = lim\,\overline{a_{1,i}\,a_{2,i}} = lim\,\overline{a_{1,u}\,a_{2,u}} = \overline{a_1\,a_2} \quad [p.\ 36,\ l.\ 29],$$

donde concluímos que o número d pertence a D. Êste conjunto é, por conseguinte, fechado.

O conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento de A^2 *admite por lugar o conjunto análogo relativo a* $[A^2]$, *supondo limitada uma das projecções de* A^2.

Com efeito, usando as mesmas notações que anteriormente, o primeiro enunciado dêste *n.º* diz que é $[D] \mid [D_1]$ e o segundo diz que D_1 é um conjunto fechado [*p.* 40, *l.* 30][1]. Logo temos $[D] \mid D_1$ como desejávamos provar.

18. Lugar das distâncias entre cada elemento dum conjunto A e cada elemento dum conjunto B. — Sejam **A** e **B** dois subconjuntos quaisquer dum mesmo espaçóide **P**. Como conseqüências dos últimos enunciados temos mais os seguintes que passamos a demonstrar:

O conjunto das distâncias entre cada elemento de **A** *e cada elemento de* **B** *e o conjunto análogo relativo a* [**A**] *e* [**B**] *admitem o mesmo lugar.*

---

[1] Tratando-se de conjuntos de números ou de pontos do espaço de n dimensões, um conjunto fechado pode considerar-se totalmente fechado.

O conjunto das distâncias entre cada elemento de **A** e cada elemento de **B** é o conjunto D já definido e relativo ao conjunto composto (**A**, **B**). O conjunto obtido da mesma maneira a partir de [**A**] e de [**B**] é o conjunto D_1 também já definido e relativo ao mesmo conjunto composto [*p*. 41, *l*. 17]. Temos, então, $[D] \mid [D_1]$, como demonstrámos mais atrás [*p*. 42, *l*. 5].

Se um dos conjuntos **A** *ou* **B** *fôr limitado e se ambos forem fechados, também será fechado o conjunto das distâncias entre cada elemento de* **A** *e cada elemento de* **B**.

Com efeito, neste caso o conjunto (**A**, **B**) é fechado [*p*. 41, *l*. 3], e o mesmo acontece ao conjunto D das distâncias entre cada elemento de **A** e cada elemento de **B** [*p*. 42, *l*. 22].

O conjunto das distâncias entre cada elemento de **A** *e cada elemento de* **B** *admite por lugar o conjunto análogo relativo a* [**A**] *e* [**B**], *supondo limitado um dos conjuntos* **A** *ou* **B**.

Efectivamente, se fôr limitado um dos conjuntos **A** ou **B**, teremos $[D] \mid D_1$ [*p*. 43, *l*. 13].

19. Algumas aplicações. — Admitindo agora que é $\mathbf{A} \mid \mathbf{B}$, das últimas proposições resultam imediatamente os seguintes casos particulares:

O conjunto das distâncias entre os elementos de **A** *e o conjunto análogo relativo a* [**A**] *admitem o mesmo lugar.*

É fechado o conjunto das distâncias entre os elementos dum conjunto limitado e fechado **A**.

O conjunto das distâncias entre os elementos de **A** *admite por lugar o conjunto análogo relativo a* [**A**], *supondo limitado o conjunto* **A**.

Esta proposição mostra que:

O diâmetro dum conjunto limitado é o diâmetro do respectivo lugar e representa a distância entre dois elementos dêste lugar convenientemente determinados.

Na verdade, podemos dizer que o limite superior dum conjunto de números reais, limitado superiormente, é o maior número do lugar dêsse conjunto[1]; logo, designando por D o conjunto das distâncias entre os elementos de $\mathbf{A}$ e por D_1 o conjunto das distâncias entre os elementos de $[\mathbf{A}]$, o diâmetro de $\mathbf{A}$ é o limite superior de D, ou o limite superior de $[D] \mid D_1$, ou o diâmetro de $[\mathbf{A}]$, ou a maior distância entre dois elementos dêste lugar, porque D_1 é um conjunto fechado.

O diâmetro dum conjunto limitado e fechado é a distância entre dois dos seus elementos convenientemente determinados.

Demonstremos finalmente, como aplicação do penúltimo enunciado, que:

O diâmetro da soma dum número finito de conjuntos limitados é o diâmetro da soma de dois deles convenientemente determinados.

Com efeito, consideremos a soma

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\ldots+\mathbf{V}$$

dum número finito de conjuntos limitados

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots, \mathbf{V}.$$

O diâmetro desta soma é a distância $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ entre dois elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ convenientemente determinados no lugar

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}+\ldots+\mathbf{V}].$$

Mas, devido à relação

$$[\mathbf{A}+\mathbf{B}+\ldots+\mathbf{V}] \mid [\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]+\ldots+[\mathbf{V}],$$

os elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ pertencem à soma de dois dos lugares

$$[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], \ldots, [\mathbf{V}];$$

[1] Da mesma forma podemos definir o limite inferior dum conjunto de números reais, limitado inferiormente, como sendo o menor número do lugar dêsse conjunto.

suponhamos que são $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$. O diâmetro da soma $[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]$ é precisamente $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$, visto não exceder o diâmetro de

$$[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]+\ldots+[\mathbf{V}].$$

Logo o diâmetro da soma considerada é o de $[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]$ ou de $[\mathbf{A}+\mathbf{B}]$, que é o diâmetro de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Se a soma duma infinidade de conjuntos fôr limitada e se a soma dos respectivos lugares fôr fechada, o diâmetro daquela soma será o diâmetro da soma de dois dêsses conjuntos convenientemente determinados.

Para a demonstração podemos seguir o mesmo caminho que ùltimamente, não esquecendo que o lugar da soma duma infinidade de conjuntos será a soma dos respectivos lugares se esta última soma fôr um conjunto fechado.

Observação. — Consideremos um conjunto $\mathbf{A}^n$ de ordem n, um conjunto $\mathbf{A}^2$ de segunda ordem e dois conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ pertencentes a um mesmo espaçóide. Consideremos ainda uma segunda colecção de conjuntos assim constituída: uma projecção qualquer de $\mathbf{A}^n$, o conjunto das distâncias entre as coordenadas de cada elemento de $\mathbf{A}^2$, o das distâncias entre cada elemento de $\mathbf{A}$ e cada elemento de $\mathbf{B}$, o das distâncias entre os elementos de $\mathbf{A}$ e o das distâncias reduzidas entre $\mathbf{B}$ e cada elemento $\mathbf{A}$ [*n.º* 20]. As três primeiras proposições que enunciámos em cada *n.º* do presente parágrafo, assim como as do *n.º* 24, resumem-se da seguinte maneira (particularizando, como vamos ver, a 2.ª e a 3.ª de cada *n.º* 17, 18 e 24):

Os conjuntos da segunda colecção e os que se obtêm de igual modo a partir dos lugares dos conjuntos da primeira admitem os mesmos lugares respectivamente.

Se os conjuntos da primeira colecção forem limitados e fechados, os da segunda serão fechados.

Se os conjuntos da primeira colecção forem limitados, a operação por meio da qual formamos o lugar dum conjunto será permutável com cada uma das operações por meio das quais *formamos os conjuntos da segunda colecção a partir dos da primeira.*

Emfim, mais tarde ver-se-á [*cap.* VIII] que estes resultados podem considerar-se aplicações de teoremas gerais sôbre funções contínuas que então enunciaremos.

CAPÍTULO III

DISTÂNCIA ENTRE DOIS CONJUNTOS

Antes de apresentarmos uma definição geral de *distância entre dois conjuntos,* vamos ocupar-nos da *distância reduzida* entre estes, para introduzir em seguida a noção de *desvio* dum conjunto a outro.

I

DISTÂNCIA REDUZIDA ENTRE DOIS CONJUNTOS

20. Definição de distância reduzida. — Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dois subconjuntos quaisquer dum espaçóide $\mathbf{P}$. Chamemos *distância reduzida* entre estes conjuntos ao limite inferior das distâncias $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ entre cada elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ e cada elemento $\mathbf{b}$ de $\mathbf{B}$. Representemos por $\underline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ a distância reduzida entre os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Claro está que é $\underline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}=\underline{\mathbf{B}\,\mathbf{A}}$.

Esta definição abrange, como caso particular, a distância reduzida entre um elemento e um conjunto. Se os dois conjuntos se transformam em simples elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, temos $\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}=\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$.

A distância reduzida $\underline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ é o limite inferior das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{a}\mathbf{B}}$ entre cada elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ e o conjunto $\mathbf{B}$; efectivamente, o limite inferior dum conjunto soma de conjuntos de números reais é o limite inferior dos limites inferiores dêstes conjuntos parcelas.

Os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dizem-se *ligados* entre si ou *separados* um do outro conforme fôr $\underline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}=0$ ou $\underline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}>0$.

A distância reduzida entre dois conjuntos é a distância reduzida entre os lugares dos mesmos conjuntos.

Com efeito, seja D o conjunto das distâncias entre cada elemento de $\mathbf{A}$ e cada elemento de $\mathbf{B}$, e D_1 o conjunto análogo relativo a $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$. A relação $[D] \mid [D_1]$ [*p.* 43, *l.* 25] mostra que os limites inferiores de D e D_1 são iguais [*p.* 45, *nota*], isto é, $\underline{\mathbf{A}\mathbf{B}} = \underline{[\mathbf{A}]\,[\mathbf{B}]}$.

A distância reduzida não se altera, pois, quando os conjuntos se substituem por outros que admitem os mesmos lugares que os primeiros.

Se os conjuntos $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são fechados e se um deles é limitado, a distância reduzida* $\underline{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ *representa a distância entre um elemento de* $\mathbf{A}$ *e um elemento de* $\mathbf{B}$ *convenientemente determinados.*

Porque, neste caso, o conjunto D é fechado [*p.* 44, *l.* 7].

Em particular, admitidas as condições do enunciado, se os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ligados entre si, podemos afirmar que um elemento dum dêstes conjuntos se juxtapõe a um elemento do outro. Os mesmos conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ conterão um elemento comum se, além destas condições, supusermos que um deles é totalmente fechado. Assim, dados um elemento $\mathbf{a}$ e um conjunto $\mathbf{B}$ totalmente fechado, a condição $\underline{\mathbf{a}\mathbf{B}} = 0$ exprime que o elemento $\mathbf{a}$ pertence ao conjunto $\mathbf{B}$.

Das duas últimas proposições imediatamente concluímos que:

Se um dos conjuntos $\mathbf{A}$ *ou* $\mathbf{B}$ *é limitado, a distância reduzida* $\underline{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ *representa a distância entre um elemento de* $[\mathbf{A}]$ *e um elemento de* $[\mathbf{B}]$ *convenientemente determinados.*

Por exemplo, se os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ligados entre si e se um deles é limitado, os lugares $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$ contêm um elemento comum. Recìprocamente, para que os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ sejam ligados é suficiente que $[\mathbf{A}]$ e $[\mathbf{B}]$ contenham um elemento comum.

A distância reduzida entre dois conjuntos de ordem n não é excedida pela distância reduzida entre duas correspondentes projecções dos mesmos conjuntos, quaisquer que estas sejam.

Porque a distância entre dois elementos compostos não é excedida, como já dissemos, pela distância entre duas correspondentes projecções dêstes elementos, quaisquer que sejam.

21. Relações entre distâncias reduzidas. — *Dados dois conjuntos quaisquer* **A** *e* **C** *e um conjunto limitado* **B** *de diâmetro* Δ, *verifica-se a relação*

(1) $$\underline{\mathbf{AC}} \leqq \underline{\mathbf{AB}} + \underline{\mathbf{BC}} + \Delta .$$

Com efeito, considerando um elemento **a** de [**A**], elementos **b** e **b′** de [**B**] e um elemento **c** de [**C**] tais que seja

$$\underline{\mathbf{ab}} = \underline{\mathbf{AB}} \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{b'c}} = \underline{\mathbf{BC}},$$

da relação

$$\underline{\mathbf{ac}} \leqq \underline{\mathbf{ab}} + \underline{\mathbf{bb'}} + \underline{\mathbf{b'c}}$$

deduz-se imediatamente a relação (1).

Em particular, quando o conjunto **B** se transformar num elemento **b**, será $\Delta = 0$ e

(2) $$\underline{\mathbf{AC}} \leqq \underline{\mathbf{Ab}} + \underline{\mathbf{bC}} .$$

A relação (1) generaliza-se do seguinte modo:

Dados dois conjuntos quaisquer **A** *e* **C** *e* k *conjuntos limitados*

$$\mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \ldots , \mathbf{B}_k ,$$

respectivamente de diâmetros

$$\Delta_1 , \Delta_2 , \ldots , \Delta_k ,$$

verifica-se a relação

(3) $$\underline{\mathbf{AC}} \leqq \underline{\mathbf{AB}_1} + \underline{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2} + \ldots + \underline{\mathbf{B}_k\mathbf{C}} + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_k .$$

A demonstração é imediata por indução.

No caso particular dêsses k conjuntos passarem a simples elementos

$$\mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \ldots , \mathbf{b}_k ,$$

virá

(4) $$\underline{\mathbf{AC}} \leqq \underline{\mathbf{Ab}_1} + \underline{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2} + \ldots + \underline{\mathbf{b}_k\mathbf{C}} .$$

22. Relação entre a distância reduzida $\underline{\mathbf{AB}}$ e os diâmetros dos conjuntos A, B e A + B. — *Designando por* Δ' *e* Δ'' *os diâ-*

metros de dois conjuntos limitados **A** *e* **B** *e por* Δ *o diâmetro da soma* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, *verifica-se a relação*

$$\Delta \lesssim \Delta' + \Delta'' + \underline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}. \tag{5}$$

Com efeito, considerando dois elementos **a** e **b** de **A** e **B** respectivamente, podemos escrever

$$\Delta \lesssim \Delta' + \Delta'' + \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} \quad [p.\ 5,\ (3)],$$

donde se deduz a relação (5), visto-que os elementos **a** e **b** são quaisquer de **A** e de **B**.

Em geral:

Designando por

$$\Delta_1\ \Delta_1, \ldots, \Delta_k$$

os diâmetros de k conjuntos limitados

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k \tag{6}$$

e por Δ *o diâmetro da soma dos mesmos conjuntos*[1], *temos a relação*

$$\Delta \lesssim \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_k + \underline{\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2} + \underline{\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3} + \cdots + \underline{\mathbf{A}_{k-1}\,\mathbf{A}_k}. \tag{7}$$

Com efeito, seguindo o método de indução, suponhamos que o enunciado é verdadeiro para os $k-1$ conjuntos

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{k-1}.$$

Seja $\mathbf{A}'$ a soma dêstes conjuntos e Δ' o respectivo diâmetro. Temos

$$\Delta \lesssim \Delta' + \Delta_k + \underline{\mathbf{A}'\,\mathbf{A}_k} \lesssim \Delta' + \Delta_k + \underline{\mathbf{A}_{k-1}\,\mathbf{A}_k}$$

e

$$\Delta' \lesssim \Delta_1 + \cdots + \Delta_{k-1} + \underline{\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2} + \cdots + \underline{\mathbf{A}_{k-2}\,\mathbf{A}_{k-1}},$$

---

[1] Já vimos que a soma dum número finito de conjuntos limitados é ainda um conjunto limitado [*p.* 4, *l.* 29].

donde se obtém a relação (7) que é, por conseguinte, verdadeira para qualquer k.

Em conseqüência temos a proposição seguinte:

Se dois dos conjuntos limitados (6), quaisquer que sejam, se puderem considerar extremos duma sucessão formada por alguns dos mesmos conjuntos, de tal forma que as distâncias reduzidas entre cada conjunto desta sucessão e o imediatamente seguinte não excedam o número ε, *será*

$$\Delta \lesssim \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_k + (k-1)\,\varepsilon . \tag{8}$$

Com efeito, recordemos, primeiro, que o diâmetro Δ da soma

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_k$$

é o diâmetro da soma de duas das parcelas convenientemente determinadas [*p.* 45, *l.* 11]; sejam estas $\mathbf{A}_r$ e $\mathbf{A}_v$. Consideremos agora uma sucessão formada por alguns dos conjuntos dados (6), de que $\mathbf{A}_r$ e $\mathbf{A}_v$ sejam extremos,

$$\mathbf{A}_r,\ \mathbf{A}_s,\ \ldots,\ \mathbf{A}_u,\ \mathbf{A}_v,$$

determinada de modo que seja

$$\underline{\mathbf{A}_r\mathbf{A}_s} \lesssim \varepsilon,\ \ldots,\ \underline{\mathbf{A}_u\mathbf{A}_v} \lesssim \varepsilon .$$

A relação (7) dá

$$\Delta \lesssim \Delta_r + \Delta_s + \ldots + \Delta_v + \underline{\mathbf{A}_r\mathbf{A}_s} + \ldots + \underline{\mathbf{A}_u\mathbf{A}_v},$$

donde se deduz imediatamente a relação (8) que desejávamos demonstrar.

Quando o número considerado ε se puder reduzir a zero, diremos que os conjuntos dados (6) se encontram *ligados entre si*[1]. A êste respeito temos o seguinte caso particular da proposição precedente:

O diâmetro da soma dum número finito de conjuntos ligados entre si não excede a soma dos diâmetros das parcelas.

---

[1] No caso particular de considerarmos só dois conjuntos, temos a definição já dada a *p.* 48.

23. Continuïdade da distância reduzida entre um elemento e um conjunto. — *Se a sucessão de elementos*

$$\mathbf{a}_1\,,\ \mathbf{a}_2\,,\ \ldots,\ \mathbf{a}_i\,,\ \ldots$$

converge para o elemento $\mathbf{a}$, *temos* $\lim \underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}$, *qualquer que seja o conjunto dado* $\mathbf{B}$.

Com efeito, no caso de ser

$$\mathbf{A} \mid \mathbf{a}_i\,,\quad \mathbf{C} \mid \mathbf{B} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} \mid \mathbf{a}\,,$$

a relação (2) [*p.* 50] dá

$$\underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} \leqq \underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}\,,$$

ou

$$\underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} \leqq \underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}}\,.$$

Da mesma forma podemos escrever

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} \leqq \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{a}_i}\,.$$

Estas duas relações dão

$$|\,\underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}\,| \leqq \overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}}$$

e, por ser $\lim \overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{a}} = 0$, temos

$$\lim\,|\,\underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}\,| = 0\,,$$

ou seja $\lim \underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}$.

Podemos, por conseguinte, dizer que:

A distância reduzida entre um elemento e um conjunto é uma função contínua dêsse elemento.

24. Lugar das distâncias reduzidas entre cada elemento dum conjunto A e um conjunto B. — Sejam dados dois conjuntos **A** e **B** e demonstremos as seguintes proposições:

O conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de **A** *e o conjunto* **B** *admite o mesmo lugar que o conjunto análogo relativo a* [**A**] *e* [**B**].

Seja D o conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de **A** e o conjunto **B**, e D_1 o conjunto que se obtém da mesma forma a partir de [**A**] e de [**B**]. Notemos, primeiro, que D também é o conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de **A** e o conjunto [**B**] [*p.* 49, *l.* 1]; logo é evidente a relação $D|< D_1$ donde vem $D|<[D_1]$.

Por outro lado também é verdadeira a relação $[D]|> D_1$; efectivamente, como um elemento de D_1 é a distância reduzida $\underline{\mathbf{a}\,[\mathbf{B}]}$ entre o lugar [**B**] e um limite **a** duma sucessão convergente

$$\mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \ldots , \mathbf{a}_i , \ldots$$

de elementos de **A**, temos

$$\underline{\mathbf{a}\,[\mathbf{B}]} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} = lim\, \underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} \quad [prop.\ prec.].$$

As duas relações $D|<[D_1]$ e $[D]|> D_1$ dão $[D]\,|\,[D_1]$.

Se um dos conjuntos **A** *ou* **B** *fôr limitado e se* **A** *fôr fechado, também será fechado o conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de* **A** *e o conjunto* **B**.

Podemos considerar esta proposição como um corolário da da *p.* 42, *l.* 22. Com efeito, seja $\mathbf{A}^2$ o conjunto de segunda ordem constituído por todos os elementos compostos (**a**, **b**) nas seguintes condições: em cada elemento (**a**, **b**) a primeira coordenada **a** é um elemento de **A**, e a segunda coordenada **b** um elemento do lugar [**B**] determinado de tal forma que se tenha $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}$ [*p.* 49, *l.* 24]. Como um dos conjuntos **A** ou **B** é limitado por hipótese, segue-se que o conjunto $\mathbf{A}^2$ tem uma projecção limitada. Além disso êste conjunto é fechado, porque, se considerarmos uma sucessão convergente de elementos de $\mathbf{A}^2$,

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1), (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2), \ldots, (\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i), \ldots,$$

as sucessões

$$\mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \ldots , \mathbf{a}_i , \ldots$$

$$\mathbf{b}_1 , \mathbf{b}_2 , \ldots , \mathbf{b}_i , \ldots$$

convergirão respectivamente para elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de $\mathbf{A}$ e de $[\mathbf{B}]$, visto-que estes conjuntos são fechados, donde resultará

$$\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} = \lim \overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{b}_i} = \lim \underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}\,.$$

Conseqüentemente o elemento $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ pertencerá a $\mathbf{A}^2$, como mostram estas igualdades.

O conjunto $\mathbf{A}^2$ satisfaz, pois, às hipóteses da referida proposição a *p.* 42. Logo o conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ entre as coordenadas de cada elemento de $\mathbf{A}^2$, ou seja o conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}$, é necessàriamente fechado.

O conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de $\mathbf{A}$ *e o conjunto* $\mathbf{B}$ *admite por lugar o conjunto análogo relativo a* $[\mathbf{A}]$ *e* $[\mathbf{B}]$, *supondo limitado um dos conjuntos* $\mathbf{A}$ *ou* $\mathbf{B}$.

Com efeito, adoptando as mesmas notações de há pouco, a primeira proposição dêste *n.º* diz que é $[D] \mid [D_1]$, a segunda mostra que D_1 é um conjunto fechado. Temos, portanto, $[D] \mid D_1$.

II

DESVIO DUM CONJUNTO A A UM CONJUNTO B

25. Definição de desvio. — Damos o nome de *desvio* dum conjunto $\mathbf{A}$ a um conjunto $\mathbf{B}$ ao limite superior do conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{a}\mathbf{B}}$ entre cada elemento $\mathbf{a}$ do conjunto $\mathbf{A}$ e o conjunto $\mathbf{B}$. Representemos por $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ o desvio do conjunto $\mathbf{A}$ ao conjunto $\mathbf{B}$.

O desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ é finito quando $\mathbf{A}$ é um conjunto limitado, porque, designando por $\mathbf{b}$ um determinado elemento de $\mathbf{B}$, como é limitado o conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ para todos os elementos $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$, o mesmo acontece ao conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{a}\mathbf{B}}$ devido à relação $\underline{\mathbf{a}\mathbf{B}} \leqq \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$.

Quando os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem ilimitados, o desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ ainda poderá ser finito. Mas, quando $\mathbf{A}$ fôr ilimitado e $\mathbf{B}$ limitado, o desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ será necessàriamente infinito visto-que, designando por $\mathbf{a}$ um elemento qualquer de $\mathbf{A}$, por $\mathbf{b}$ um determinado elemento de $\mathbf{B}$ e por Δ o diâmetro dêste conjunto, virá

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} \lesseqgtr \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{B}\,\mathbf{b}} + \Delta \quad [p.\ 50,\ (1)],$$

ou

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} \lesseqgtr \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} + \Delta,$$

e esta relação mostra que, se fôr ilimitado o conjunto das distâncias $\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$, ilimitado será o conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}$.

Podemos dar a seguinte forma à definição de desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$, quando êste fôr finito. Seja ρ um número positivo tal que um esferóide qualquer de raio ρ e de centro num elemento de $\mathbf{A}$ contenha necessàriamente um elemento de $\mathbf{B}$. *O desvio* $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ *é o limite inferior do conjunto de todos os números* ρ *assim definidos.* Efectivamente, para qualquer dêstes números ρ temos $\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} \lesseqgtr \rho$ seja qual fôr o elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$, donde resulta $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}} \lesseqgtr \rho$. Por outro lado também é manifesto que um número qualquer maior do que o desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ é necessàriamente um dos números ρ. O desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ é, portanto, o limite inferior do conjunto de todos êsses números ρ. Se fôr $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}} = 0$, qualquer esferóide de centro num elemento de $\mathbf{A}$ conterá um elemento de $\mathbf{B}$, e reciprocamente.

Quando $\mathbf{B}$ fôr um conjunto fechado, ainda poderemos dizer que: *o desvio* $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ *é o menor número, positivo ou nulo, tal que um esferóide qualquer de raio igual a êsse número e de centro num elemento de* $\mathbf{A}$ *contém necessàriamente um elemento de* $\mathbf{B}$. De facto, tratando-se dum conjunto fechado $\mathbf{B}$, a qualquer elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ corresponde um elemento $\mathbf{b}$ de $\mathbf{B}$ que obedece à condição

$$\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} \lesseqgtr \overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}} \quad [p.\ 49,\ l.\ 11],$$

e o esferóide de centro $\mathbf{a}$ e raio $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ contém um elemento de $\mathbf{B}$.

Como casos particulares da definição de desvio temos $\overrightarrow{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$.

Claro está que os desvios $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{B}\,\mathbf{A}}$ podem não ser iguais. Assim, já dissemos que, para $\mathbf{A}$ limitado e $\mathbf{B}$ ilimitado, o primeiro dêstes desvios é finito e o segundo infinito; também é evidente que temos $\overrightarrow{\mathbf{a}\,\mathbf{A}} = 0$ e $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{a}} > 0$ quando $\mathbf{a}$ é um elemento de $\mathbf{A}$ e quando êste conjunto contém elementos não juxtapostos ao elemento $\mathbf{a}$.

O desvio $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ *não se altera quando os conjuntos* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *se substituem por outros que admitem os mesmos lugares que os primeiros.*

Noutros têrmos: são iguais os desvios $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ e $\overrightarrow{[\mathbf{A}][\mathbf{B}]}$. Com efeito, seja D o conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de $\mathbf{A}$ e o conjunto $\mathbf{B}$, e D_1 o das distâncias reduzidas entre cada elemento de $[\mathbf{A}]$ e o conjunto $[\mathbf{B}]$. Sabemos que é $[D] \mid [D_1]$ [*p.* 53, *l.* 25]; logo são iguais os limites superiores de D e de D_1, ou seja $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{[\mathbf{A}][\mathbf{B}]}$.

Como aplicação podemos dizer que: o desvio $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ é o menor número tal que um esferóide qualquer de raio igual a êsse número e de centro num elemento de $\mathbf{A}$ contém necessàriamente um elemento do lugar $[\mathbf{B}]$. Na verdade, é $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{A}[\mathbf{B}]}$.

Se $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *são conjuntos fechados e se* $\mathbf{A}$ *é limitado, o desvio* $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ *representa a distância entre um elemento de* $\mathbf{A}$ *e um elemento de* $\mathbf{B}$ *convenientemente determinados.*

De facto, existe neste caso um elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ e um elemento $\mathbf{b}$ de $\mathbf{B}$ que satisfazem às condições

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \underline{\mathbf{aB}} \quad [p.\ 54,\ l.\ 16]^{1} \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{aB}} = \underline{\mathbf{ab}} \quad [p.\ 49,\ l.\ 24].$$

Se $\mathbf{A}$ *é um conjunto limitado, o desvio* $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ *representa a distância entre um elemento de* $[\mathbf{A}]$ *e um elemento de* $[\mathbf{B}]$ *convenientemente determinados.*

Na verdade, é $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{[\mathbf{A}][\mathbf{B}]}$ e os conjuntos $\mathbf{A}$ e $[\mathbf{A}]$ são limitados ao mesmo tempo.

Se $\mathbf{B}$ *é um conjunto totalmente fechado e se é* $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = 0$, *verifica-se a relação* $\mathbf{A} | \!< \mathbf{B}$.

Com efeito, nestas condições vem $\underline{\mathbf{aB}} = 0$ para um elemento qualquer $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$, donde resulta que $\mathbf{a}$ é um elemento de $\mathbf{B}$, porque êste conjunto é totalmente fechado [*p.* 49, *l.* 20].

[1] O desvio $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$ seria infinito se tivéssemos suposto $\mathbf{A}$ ilimitado e $\mathbf{B}$ limitado.

Se é $\overrightarrow{AB}=0$, *verifica-se a relação* $[A] | < [B]$ *e reciprocamente.*

Porque, sendo $\overrightarrow{AB}=0$, também é $[A] \overrightarrow{[B]}=0$.

Dados dois conjuntos de ordem n, A^n *e* B^n, *o desvio* $\overrightarrow{A^n B^n}$ *não é excedido pelo desvio duma projecção qualquer de* A^n *à correspondente projecção de* B^n.

Esta proposição resulta imediatamente da análoga com respeito à distância reduzida [*p.* 49, *l.* 31].

26. Relação entre desvios. — *Dados os conjuntos* A, B *e* C *verifica-se a relação*

$$\overrightarrow{AC} \lesssim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}. \tag{1}$$

Suponhamos, primeiro, que B e C são conjuntos fechados. A qualquer elemento a de A corresponde, então, um elemento b de B tal que

$$\overline{ab} = \underline{aB} \lesssim \overrightarrow{AB} \quad [p.\ 49,\ l.\ 11],$$

e ao elemento b corresponde, da mesma forma, um elemento c de C tal que

$$\overline{bc} \lesssim \overrightarrow{BC}.$$

A relação

$$\overline{ac} \lesssim \overline{ab} + \overline{bc}$$

combinada com as precedentes dá

$$\overline{ac} \lesssim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$$

e ainda

$$\underline{aC} \lesssim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$$

donde se deduz a relação (1), visto a representar um elemento arbitrário de A.

A mesma relação também será verdadeira se os conjuntos B e C não forem simultâneamente fechados, pois já dissemos que o desvio não se altera quando os conjuntos se substituem pelos respectivos lugares.

Notemos as relações

$$\overrightarrow{AC} \gtrsim \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC} \gtrsim \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}, \tag{2}$$

que imediatamente se deduzem da que acabámos de demonstrar.

A relação (1) mostra que, se forem finitos os desvios $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$, o mesmo acontecerá ao desvio $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$.

Para quaisquer conjuntos em número finito

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{U}, \mathbf{V}$$

podemos imediatamente generalizar a relação (1) do seguinte modo:

$$(3) \qquad \overrightarrow{\mathbf{AV}} \lesssim \overrightarrow{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} + \ldots + \overrightarrow{\mathbf{UV}}.$$

27. Relações entre desvios, distâncias reduzidas e diâmetros dos conjuntos. — *Se* Δ *e* Δ' *são os diâmetros dos conjuntos limitados* **A** *e* **B** *respectivamente, verifica-se a relação*

$$(4) \qquad \Delta \lesssim \Delta' + 2\overrightarrow{\mathbf{AB}}.$$

Com efeito, designando por **a** e **a'** dois elementos quaisquer de **A**, temos

$$\underline{\mathbf{a\,a'}} \lesssim \underline{\mathbf{aB}} + \underline{\mathbf{Ba'}} + \Delta' \quad [p.\ 50,\ (1)]$$

e

$$\underline{\mathbf{a\,a'}} \lesssim \Delta' + 2\overrightarrow{\mathbf{AB}},$$

donde se obtém a relação (4), porque **a** e **a'** são elementos quaisquer do conjunto **A**.

Registemos também a relação

$$(5) \qquad \overrightarrow{\mathbf{AB}} \lesssim \Delta + \Delta' + \underline{\mathbf{AB}},$$

que se deduz da relação (5) a *p.* 51 atendendo a que o desvio $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ não excede o diâmetro da soma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Outra relação que importa conhecer é a seguinte:

Dados três conjuntos **A**, **B** *e* **C**, *limitados ou não, temos*

$$(6) \qquad \underline{\mathbf{AC}} \lesssim \underline{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}}.$$

Para a demonstração consideremos um número positivo ε e fixemos elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ que obedeçam à condição

$$\underline{\mathbf{ab}} < \underline{\mathbf{AB}} + \varepsilon .$$

Determinemos em seguida um elemento $\mathbf{c}$ do lugar $[\mathbf{C}]$ de modo que seja $\underline{\mathbf{bc}} = \underline{\mathbf{bC}}$. A relação

$$\overline{\mathbf{ac}} \lesssim \overline{\mathbf{ab}} + \overline{\mathbf{bc}}$$

dá, então,

$$\overline{\mathbf{ac}} \lesssim \underline{\mathbf{AB}} + \varepsilon + \underline{\mathbf{bC}},$$

donde se obtém

$$\underline{\mathbf{AC}} \lesssim \underline{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} + \varepsilon,$$

e, como ε é um número positivo arbitrário, vem a relação (6) que pretendíamos demonstrar.

Consideremos agora conjuntos quaisquer, em número finito,

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \ldots, \mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V}.$$

É imediata a seguinte generalização de (6):

$$\underline{\mathbf{AV}} \lesssim \underline{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} + \ldots + \overrightarrow{\mathbf{UV}}. \tag{7}$$

Da mesma relação (6) também se deduz a seguinte:

$$\underline{\mathbf{UV}} \lesssim \underline{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{AC}} + \overrightarrow{\mathbf{BD}} + \ldots + \overrightarrow{\mathbf{TV}}. \tag{8}$$

Com efeito, temos

$$\begin{gathered}\underline{\mathbf{BC}} \lesssim \underline{\mathbf{BA}} + \overrightarrow{\mathbf{AC}}\\ \underline{\mathbf{CD}} \lesssim \underline{\mathbf{CB}} + \overrightarrow{\mathbf{BD}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \underline{\mathbf{UV}} \lesssim \underline{\mathbf{UT}} + \overrightarrow{\mathbf{TV}},\end{gathered}$$

donde se conclui a relação (8) somando e fazendo reduções evidentes.

28. Desvio duma soma de conjuntos a outra soma de conjuntos. — Se notarmos que o limite superior dum conjunto soma de conjuntos de números reais é o limite superior dos limites superiores das parcelas, tornar-se-á evidente que:

O desvio $\overrightarrow{AB}$ *duma soma* $A \mid \sum A'$ *de conjuntos* A' *(em número finito ou infinito) a um conjunto* B *é o limite superior dos desvios* $\overrightarrow{A'B}$ *de cada parcela* A' *ao conjunto* B.

Imaginemos agora o conjunto B também decomposto em partes, $B \mid \sum B'$, e façamos corresponder a cada conjunto A' um (ou mais) conjuntos B'. Podemos afirmar que:

O desvio $\overrightarrow{AB}$ *não excede o limite superior dos desvios* $\overrightarrow{A'B'}$ *de cada conjunto* A' *a um dos correspondentes* B'.

Com efeito, seja A' uma das parcelas de A e B' um dos conjuntos correspondentes de A'. A relação $B \mid > B'$ dá $\underline{a'B} \leq \underline{a'B'}$ para qualquer elemento a' de A'. Daqui resulta $\overrightarrow{A'B} \leq \overrightarrow{A'B'}$, e, como o desvio $\overrightarrow{AB}$ é o limite superior dos desvios $\overrightarrow{A'B}$, o mesmo desvio $\overrightarrow{AB}$ não excede o limite superior do conjunto dos desvios $\overrightarrow{A'B'}$.

III

DISTÂNCIA ENTRE DOIS CONJUNTOS

29. Definição de distância entre dois conjuntos. — Sejam A e B dois subconjuntos quaisquer dum dado espaçóide P. Ao maior dos desvios $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ damos o nome de *distância* entre os conjuntos A e B. A distância entre estes conjuntos é, pois, o limite superior do conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de A e de B e os conjuntos B e A respectivamente. Assim: a distância entre o conjunto dos números do intervalo $(0, 1)$ e o conjunto dos números da forma $\frac{i}{h+i}$ $(h = 1, 2, \ldots)$ é igual a $\frac{1}{1+i}$; a distância entre dois intervalos de extremos nferiores α e α' e de extremos superiores β e β' é o maior dos módulos $|\alpha - \alpha'|$ e $|\beta - \beta'|$. Considerando o espaçóide P dos pontos do espaço ordinário de n dimensões, a distância entre duas hiperesferas dêste espaço que tenham o mesmo raio (círculos ou esferas, em particular) é a distância entre os centros; a distância entre duas hiperesferas do mesmo centro é a diferença dos raios; a distância entre duas hiperesferas quaisquer é a distância entre os centros aumentada da diferença dos raios. A distância entre um conjunto **A** e a soma de todos os esferóides do mesmo raio ρ e de centros nos diversos elementos de **A** não excede o número ρ.

Designemos por $\overline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ a distância entre os conjuntos **A** e **B**. Da definição resulta que é $\overline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{B}\,\mathbf{A}}$.

A distância $\overline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ é necessàriamente finita quando os conjuntos **A** e **B** são limitados, e infinita quando um dêstes conjuntos é limitado e o outro ilimitado, como resulta das considerações análogas que fizemos a propósito do desvio [*p.* 55]. Se ambos os conjuntos **A** e **B** forem ilimitados, a respectiva distância poderá ser finita ou infinita[1].

Suponhamos que existe um número positivo ρ tal que todo o esferóide de raio ρ e de centro num elemento de **A** ou de **B** contém necessàriamente um elemento de **B** ou de **A**. A distância $\overline{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ é, então, finita, e pode definir-se como sendo o limite inferior de todos os números ρ sujeitos a tal condição, como resulta do que

[1] Notemos que um dado espaçóide ilimitado **P** admite sempre dois subconjuntos ilimitados a uma distância infinita um do outro. Para citar um exemplo, considere-se uma sucessão de elementos de **P**,

$$(1) \qquad \mathrm{a}_1,\ \mathrm{a}_2,\ \ldots,\ \mathrm{a}_i,\ \ldots,$$

determinada de forma que a seguinte sucessão de distâncias tenda para infinito:

$$(2) \quad \overline{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2},\ \overline{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_3},\ \overline{\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3},\ \overline{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_4},\ \overline{\mathrm{a}_2\mathrm{a}_4},\ \overline{\mathrm{a}_3\mathrm{a}_4},\ \ldots,\ \overline{\mathrm{a}_1\mathrm{a}_i},\ \overline{\mathrm{a}_2\mathrm{a}_i},\ \ldots,\ \overline{\mathrm{a}_{i-1}\mathrm{a}_i},\ \ldots.$$

Para determinar uma tal sucessão basta que seja: a_1 um elemento qualquer de **P**; a_2 um elemento exterior ao esferóide de raio 2 e de centro em a_1; a_3 um elemento exterior a cada um dos esferóides do mesmo raio 3 e de centros em a_1 e a_2; em geral a_i um elemento exterior a cada um dos esferóides de raio i e de centros nos elementos $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_{i-1}$.

Determinada a sucessão (1) de tal modo que a sucessão (2) tende para infinito, segue-se que a distância reduzida do têrmo a_i a qualquer conjunto constituído por outros têrmos da sucessão (1) tende igualmente para infinito com i, como é evidente. Logo a distância entre o conjunto dos têrmos de ordem ímpar da sucessão (1) e o conjunto dos de ordem par da mesma sucessão, por exemplo, é necessàriamente infinita.

dissemos a *p.* 56, *l.* 11. No caso de ser $\overline{AB}=0$, qualquer esferóide de centro num elemento de A ou de B contém um elemento de B ou de A, e reciprocamente. Se A e B são conjuntos fechados, ainda podemos dizer que a distância $\overline{AB}$ é o menor dos números ρ atrás definidos [*p.* 56, *l.* 22].

Como caso particular da definição de distância temos evidentemente $\overline{aB}=\overline{Ba}=\overrightarrow{Ba}$ e, quando os conjuntos se reduzem a simples elementos, a distância entre os dois conjuntos reduz-se à distância entre êsses elementos. A definição de distância entre dois conjuntos é, pois, uma generalização da definição de distância entre dois elementos.

A distância entre dois conjuntos é a distância entre os lugares dos mesmos conjuntos.

Na verdade, como a distância $\overline{AB}$ é o maior dos desvios $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$, e como é

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{[A][B]} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{[B][A]} \quad [p.\ 57,\ l.\ 6],$$

resulta $\overline{AB}=\overline{[A][B]}$.

Logo a distância entre dois conjuntos não se altera quando estes se substituem por outros que admitem os mesmos lugares que os primeiros.

Se A *e* B *são conjuntos limitados e fechados, a distância* $\overline{AB}$ *é a distância entre um elemento de* A *e um elemento de* B *convenientemente determinados.*

Com efeito, o maior dos desvios $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ é, no caso de A e B serem limitados e fechados, a distância entre um elemento de A e um elemento de B convenientemente determinados [*p.* 57, *l.* 16].

Das duas últimas proposições resulta que:

A distância $\overline{AB}$ *entre dois conjuntos limitados é a distância entre um elemento de* [A] *e um elemento de* [B] *convenientemente determinados.*

É condição necessária e suficiente para que se anule a distância $\overline{AB}$ *que seja* $[A] \mid [B]$.

Com efeito, para que se tenha $\overline{AB}=0$ é necessário e suficiente que seja $\overrightarrow{\mathbf{AB}}=0$ e $\overrightarrow{\mathbf{BA}}=0$. Ora, estas condições são necessárias e suficientes para que se virifiquem as relações

$$[\mathbf{A}]|\!<[\mathbf{B}] \quad \text{e} \quad [\mathbf{B}]|\!<[\mathbf{A}] \quad [p.\ 58,\ l.\ 1],$$

donde vem $[\mathbf{A}]\,|\,[\mathbf{B}]$.

Quando $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem conjuntos totalmente fechados, a distância $\overline{\mathbf{AB}}$ anular-se-á sòmente se tivermos $\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}$.

Dados dois conjuntos de ordem n, $\mathbf{A}^n$ *e* $\mathbf{B}^n$, *a distância* $\overline{\mathbf{A}^n\mathbf{B}^n}$ *não é excedida pela distância entre duas correspondentes projecções dêstes conjuntos, quaisquer que elas sejam.*

Para a verificação do presente enunciado basta atender ao enunciado análogo para o desvio [*p.* 58, *l.* 3].

Por conseqüência, se fôr $\overline{\mathbf{A}^n\mathbf{B}^n}=0$, também será nula a distância entre duas correspondentes projecções de $\mathbf{A}^n$ e $\mathbf{B}^n$, quaisquer que sejam.

30. Relação fundamental entre distâncias. — *Dados os conjuntos* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *verifica-se a relação*

$$(1) \qquad \overline{\mathbf{AC}} \lesssim \overline{\mathbf{AB}}+\overline{\mathbf{BC}}.$$

Com efeito, sabemos que é

$$\overrightarrow{\mathbf{AC}} \lesssim \overrightarrow{\mathbf{AB}}+\overrightarrow{\mathbf{BC}} \quad [p.\ 58,\ (1)],$$

donde se deduz

$$\overrightarrow{\mathbf{AC}} \lesssim \overline{\mathbf{AB}}+\overline{\mathbf{BC}}.$$

Da mesma forma se obtém

$$\overrightarrow{\mathbf{CA}} \lesssim \overline{\mathbf{CB}}+\overline{\mathbf{BA}}.$$

Ora, uma das últimas relações pode escrever-se

$$\overline{\mathbf{AC}} \lesssim \overline{\mathbf{AB}}+\overline{\mathbf{BC}},$$

como pretendíamos demonstrar.

Esta relação mostra que, se forem finitas as distâncias $\overline{\mathbf{AB}}$ e $\overline{\mathbf{BC}}$, finita será a distância $\overline{\mathbf{AC}}$.

Considerando conjuntos quaisquer em número finito,

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots, \mathbf{U}, \mathbf{V},$$

podemos escrever a relação

$$(2) \qquad \overline{\mathbf{AV}} \lesssim \overline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{BC}} + \dots + \overline{\mathbf{UV}},$$

que generaliza a (1) da página anterior; êste resultado obtém-se imediatamente por indução.

31. Relações entre distâncias, desvios, distâncias reduzidas e diâmetros dos conjuntos. — *Se* Δ *e* Δ' *são os diâmetros dos conjuntos limitados* **A** *e* **B** *verifica-se a condição*

$$(3) \qquad |\Delta - \Delta'| \lesssim 2\overline{\mathbf{AB}}.$$

Com efeito, da relação (4), a *p.* 59, deduzimos

$$\Delta \lesssim \Delta' + 2\overline{\mathbf{AB}};$$

da mesma forma podemos escrever

$$\Delta' \lesssim \Delta + 2\overline{\mathbf{AB}},$$

relações estas que nos dão a (3) que desejávamos obter.

Da relação (5), a *p.* 59, também deduzimos

$$(4) \qquad \overline{\mathbf{AB}} \lesssim \Delta + \Delta' + \underline{\mathbf{AB}},$$

atendendo à definição de distância e à igualdade $\underline{\mathbf{AB}} = \underline{\mathbf{BA}}$.

Dados os conjuntos **A**, **B** *e* **C**, *limitados ou não, temos:*

$$(5) \qquad \underline{\mathbf{AC}} \lesssim \underline{\mathbf{AB}} + \overline{\mathbf{BC}}.$$

Esta relação também se deduz da correspondente para o desvio [*p.* 59, (6)], e pode generalizar-se, como vamos ver, de qualquer das seguintes formas:

Dados conjuntos quaisquer em número finito,

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \ldots, \mathsf{T}, \mathsf{U}, \mathsf{V},$$

temos

(6) $$\underline{\mathsf{AV}} \lesssim \underline{\mathsf{AB}} + \overline{\mathsf{BC}} + \overline{\mathsf{CD}} + \ldots + \overline{\mathsf{UV}}$$

e

(7) $$|\underline{\mathsf{AB}} - \underline{\mathsf{UV}}| \lesssim \overline{\mathsf{AC}} + \overline{\mathsf{BD}} + \ldots + \overline{\mathsf{TV}}.$$

A relação (6) obtém-se imediatamente atendendo a (2). Para deduzirmos a (7) escrevamos, primeiro,

$$\underline{\mathsf{UV}} - \underline{\mathsf{AB}} \lesssim \overline{\mathsf{AC}} + \overline{\mathsf{BD}} + \ldots + \overline{\mathsf{TV}},$$

que se obtém da relação (8), a *p.* 60. Se considerarmos agora os mesmos conjuntos dispostos pela ordem inversa da primeira, poderemos escrever, da mesma forma,

$$\underline{\mathsf{AB}} - \underline{\mathsf{UV}} \lesssim \overline{\mathsf{AC}} + \overline{\mathsf{BD}} + \ldots + \overline{\mathsf{TV}}.$$

Ora, as duas últimas relações dão-nos a (7) que desejávamos demonstrar.

Em particular, para quatro conjuntos

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D},$$

temos

(8) $$|\underline{\mathsf{AB}} - \underline{\mathsf{CD}}| \lesssim \overline{\mathsf{AC}} + \overline{\mathsf{BD}},$$

e, quando fôr $\mathsf{D} \mid \mathsf{B}$, virá

(9) $$|\underline{\mathsf{AB}} - \underline{\mathsf{BC}}| \lesssim \overline{\mathsf{AC}}.$$

Dados os conjuntos

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D},$$

verifica-se a relação

(10) $$|\overrightarrow{\mathsf{AD}} - \overrightarrow{\mathsf{BC}}| \lesssim \overline{\mathsf{AB}} + \overline{\mathsf{CD}}.$$

Com efeito, das relações já conhecidas [*p.* 59, (3)]

$$\overrightarrow{AD} \lesssim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{BC} \lesssim \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

deduzem-se as seguintes

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} \lesssim \overline{AB} + \overline{CD}$$

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} \lesssim \overline{AB} + \overline{CD},$$

donde se obtém a relação (10).

Registemos também as relações

$$(11) \qquad |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}| \lesssim \overline{BC} \quad \text{e} \quad |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}| \lesssim \overline{AB},$$

que se deduzem de (10) supondo que os conjuntos dados são respectivamente

$$A, A, B, C$$

para a primeira relação, e

$$A, B, C, C$$

para a segunda.

As relações (10) e (11) podem manifestamente generalizar-se de combinação com a (2) [*p.* 65]. Assim, se considerarmos um número finito de conjuntos quaisquer

$$A, B, C, \ldots, L, M, N, O, \ldots, U, V,$$

teremos a seguinte generalização de (10)

$$(12) \quad |\overrightarrow{AV} - \overrightarrow{MN}| \lesssim \overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{LM} + \overline{NO} + \ldots + \overline{UV}.$$

32. Distância entre duas somas de conjuntos. — Da proposição que enunciámos a *p.* 61, *l.* 5, resulta evidentemente que:

Se decompusermos os conjuntos **A** *e* **B** *em conjuntos* **A′** *e* **B′**,

$$A \mid \sum A' \quad e \quad B \mid \sum B',$$

em número finito ou infinito, a distância $\overline{AB}$ *será o limite superior dos desvios* $\overrightarrow{A'B}$ *e* $\overrightarrow{B'A}$ *dos conjuntos* A' *e* B' *aos conjuntos* B *e* A *respectivamente.*

Da proposição a *p.* 61, *l.* 11, deduz-se da mesma maneira que:

Se associarmos cada conjunto A' *a um (ou mais) conjuntos* B' *de tal forma que um qualquer dos conjuntos* B' *corresponda a um (ou mais) conjuntos* A', *a distância* $\overline{AB}$ *não excederá o limite superior das distâncias* $\overline{A'B'}$ *entre os conjuntos de cada par assim constituído.*

Com efeito, basta notar que os desvios $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ não excedem o limite superior das distâncias $\overline{A'B'}$ entre conjuntos de cada par, por não excederem os limites superiores dos desvios $\overrightarrow{A'B'}$ e $\overrightarrow{B'A'}$ respectivamente.

Por exemplo, se as distâncias $\overline{A'B'}$ forem tôdas nulas, também será $\overline{AB}=0$.

Se tivermos

$$A \mid A_1 + A_2 + \ldots + A_i + \ldots,$$

a distância $\overline{AB}$ não excederá o limite superior das distâncias

$$\overline{A_i B} \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Se tivermos

$$A \mid A_1 + A_2 + \cdots + A_k$$

e

$$B \mid B_1 + B_2 + \ldots + B_k,$$

a distância $\overline{AB}$ não excederá a maior das distâncias

$$\overline{A_i B_i} \quad (i=1, 2, \ldots, k),$$

nem a maior das distâncias

$$A_i B_h \quad (i \neq h).$$

Assim podemos escrever

$$\overline{AB} \lesssim \overline{A_1 B_1} + A_2 B_2 + \ldots + A_k B_k.$$

Como caso particular da última proposição temos que:

Dados os conjuntos A *e* B, *se a cada elemento* a *de* A *fizermos corresponder um elemento* b *de* B *de modo que um elemento qualquer de* B *seja correspondente dum elemento de* A, *a distância* $\overline{\mathsf{AB}}$ *não excederá o limite superior das distâncias* $\overline{\mathsf{ab}}$ *entre os elementos de cada par assim constituído.*

Dados dois conjuntos A *e* B *e um número positivo* ε, *a cada subconjunto* A' *de* A *corresponde um subconjunto* B' *de* B *tal que temos*

(13) $$\overline{\mathsf{A'B'}} \lesssim \overrightarrow{\mathsf{A'B}} + \varepsilon .$$

Consideremos, com efeito, um subconjunto A' de A. Se a cada elemento a' dêste subconjunto fizermos corresponder os elementos b' de B para os quais é

$$\overline{\mathsf{a'b'}} < \underline{\mathsf{a'B}} + \varepsilon \lesssim \overrightarrow{\mathsf{A'B}} + \varepsilon ,$$

o conjunto B' de todos os elementos b' correspondentes dos diversos elementos a' do conjunto A' verificará a relação (13), como se depreende da proposição anterior.

Se o conjunto A *é a soma de diversos conjuntos* A', $\mathsf{A} \mid \sum \mathsf{A}'$, *dados um outro conjunto* B *e um número positivo* ε, *a cada conjunto* A' *corresponde um subconjunto* B' *de* B *de tal modo que temos* $\mathsf{B} \mid \sum \mathsf{B}'$ e

(14) $$\overline{\mathsf{A'B'}} \lesssim \overline{\mathsf{AB}} + \varepsilon .$$

Consideremos uma parcela A' de A e seja a' um elemento de A'. A êste elemento a' façamos corresponder os elementos b' de B que verifiquem a seguinte condição:

$$\overline{\mathsf{a'b'}} \lesssim \overline{\mathsf{AB}} + \varepsilon [1].$$

---

[1] Para demonstrar a existência de elementos b' de B que satisfaçam à condição

$$\overline{\mathsf{a'b'}} \lesssim \overline{\mathsf{AB}} + \varepsilon ,$$

basta notar que existe um elemento b' de B, pelo menos, tal que

$$\overline{\mathsf{a'b'}} < \underline{\mathsf{a'B}} + \varepsilon \lesssim \overline{\mathsf{AB}} + \ .$$

O conjunto $\mathbf{B}'$ de todos os elementos $\mathbf{b}$ correspondentes dos diversos elementos $\mathbf{a}'$ de $\mathbf{A}'$ satisfaz à relação (14). Façamos corresponder a cada parcela $\mathbf{A}'$ do conjunto dado $\mathbf{A}$ o subconjunto $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{B}$ assim determinado e demonstremos que é $\mathbf{B} \mid \sum \mathbf{B}'$. A cada elemento $\mathbf{b}$ de $\mathbf{B}$ corresponde necessàriamente um elemento $\mathbf{a}'$ de $\mathbf{A}$ tal que

$$\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}} < \underline{\mathbf{A}\,\mathbf{b}} + \varepsilon \leqq \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \varepsilon .$$

O elemento $\mathbf{a}'$ pertence a um dos conjuntos $\mathbf{A}'$, e esta desigualdade mostra que o elemento $\mathbf{b}$ pertence ao conjunto $\mathbf{B}'$ correspondente dêsse $\mathbf{A}'$. Como vemos, o conjunto $\mathbf{B}$ é a soma de todos os conjuntos $\mathbf{B}'$.

Logo, dados dois conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, a cada número positivo ε e a cada decomposição de $\mathbf{A}$ em vários subconjuntos, em número finito ou infinito, opõe-se uma decomposição de $\mathbf{B}$ em subconjuntos correspondentes dos primeiros, de tal forma que a distância entre dois subconjuntos correspondentes, quaisquer, não excede o número $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \varepsilon$.

Em particular, podemos dizer que: dados dois conjuntos quaisquer $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, a cada número positivo ε opõe-se uma decomposição do conjunto $\mathbf{B}$ em subconjuntos $\mathbf{B}'$ correspondentes dos elementos de $\mathbf{A}$, de tal forma que as distâncias $\overline{\mathbf{a}\mathbf{B}'}$ entre cada elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ e o correspondente subconjunto $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{B}$ não excedem o número $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \varepsilon$.

Dados os conjuntos $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$, *supondo êste fechado, a cada subconjunto* $\mathbf{A}'$ *de* $\mathbf{A}$ *corresponde um subconjunto* $\mathbf{B}'$ *de* $\mathbf{B}$ *tal que temos*

$$\overline{\mathbf{A}'\mathbf{B}'} \leqq \overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{B}} . \qquad (15)$$

Efectivamente, como $\mathbf{B}$ é um conjunto fechado, a cada elemento $\mathbf{a}'$ dum dado subconjunto $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{A}$ corresponde um elemento $\mathbf{b}'$ de $\mathbf{B}$, pelo menos, sujeito à condição

$$\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'} = \underline{\mathbf{a}'\,\mathbf{B}} \leqq \overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{B}} \quad [p.\ 49,\ l.\ 11].$$

Por conseguinte, o conjunto $\mathbf{B}'$ constituído por todos os elementos $\mathbf{b}'$ assim determinados satisfaz à relação (15), como é evidente.

Se o conjunto fechado A *é a soma de vários conjuntos* A', $\mathsf{A} \mid \sum \mathsf{A}'$, *dado um outro conjunto fechado* B, *a cada conjunto* A' *corresponde um subconjunto* B' *de* B *tal que temos* $\mathsf{B} \mid \sum \mathsf{B}'$ e

$$(16) \qquad \overline{\mathsf{A}'\mathsf{B}'} \leq \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}.$$

Consideremos, com efeito, uma parcela A' de A. A cada elemento a' de A' corresponde um elemento b' de B, pelo menos, que satisfaz à condição

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} \leq \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}$$ [1].

Seja B' o conjunto de todos os elementos b' correspondentes dos diversos elementos a' de A'. A cada parcela A' de A corresponde, desta maneira, um subconjunto B' de B que satisfaz à relação (16). Demonstremos que é $\mathsf{B} \mid \sum \mathsf{B}'$. Dado um elemento b de B, podemos determinar um elemento a' de A de modo que seja

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{A}\,\mathsf{b}} \leq \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}},$$

e, se A' é uma parcela de A a que pertence a', o elemento b pertence ao conjunto B' correspondente de A'. Logo o conjunto B é a soma de todos os conjuntos B'.

Reproduzindo por outras palavras a presente proposição, podemos dizer que: dados dois conjuntos fechados A e B, a cada decomposição de A em subconjuntos A' opõe-se uma decomposição de B em subconjuntos B' correspondentes dos primeiros, de modo que a distância $\overline{\mathsf{A}'\mathsf{B}'}$ entre dois subconjuntos correspondentes, quaisquer, não excede a distância $\overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}$.

Esta distância $\overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ é o limite superior das distâncias $\overline{\mathsf{A}'\mathsf{B}'}$,

---

[1] Prova-se a existência de elementos b' de B tais que

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} \leq \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}$$

notando que existe um elemento b' de B que obedece à condição

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} = \underline{\mathsf{a}'\,\mathsf{B}} \leq \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}},$$

porque B é um conjunto fechado.

como fàcilmente se reconhece tendo em vista a proposição a *p.* 68, *l.* 6.

Em particular: dados dois conjuntos fechados $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, é possível determinar uma decomposição do conjunto $\mathbf{B}$ em subconjuntos $\mathbf{B}'$ correspondentes dos elementos de $\mathbf{A}$, de tal forma que as distâncias $\overline{\mathbf{a}\mathbf{B}'}$ entre cada elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ e o correspondente subconjunto $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{B}$ não excedem a distância $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}}$.

CAPÍTULO IV

ESPAÇÓIDES DE CONJUNTOS

No presente capítulo ocupar-nos-emos do *espaçamento* do conjunto de todos os subconjuntos limitados dum dado espaçóide **P**. Êste espaçamento consiste em demonstrar que — referindo-nos sòmente a conjuntos limitados — a definição que ùltimamente apresentámos de distância entre dois conjuntos satisfaz às propriedades fundamentais estabelecidas no primeiro capítulo [*p.* 2].

Antes porém de tratarmos de tal *espaçamento,* convém introduzir as noções de *limite integral* e de *limite comum* duma sucessão de conjuntos.

I

LIMITES INTEGRAL E COMUM DUMA SUCESSÃO DE CONJUNTOS

33. Definições. — Seja dada uma sucessão infinita de conjuntos quaisquer

(1) $$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots$$

pertencentes a um mesmo espaçóide **P**. De acôrdo com a definição que demos a *p.* 11, *n.º* 5, diremos que uma *subsucessão* de (1) é tôda a sucessão

(2) $$\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s, \ldots, \mathbf{A}_u, \ldots$$

formada por têrmos de (1), mas dispostos pela ordem em que se encontram nesta sucessão ($r < s < \ldots$).

Extrair uma sucessão de elementos da sucessão de conjuntos (1) é considerar uma sucessão de elementos

$$(3) \qquad \mathsf{a}_1 , \mathsf{a}_2 , \ldots , \mathsf{a}_i , \ldots$$

pertencentes respectivamente aos têrmos de (1). Mais geralmente, extrair uma sucessão de subconjuntos da sucessão (1) é considerar uma sucessão de subconjuntos dos têrmos correspondentes de (1).

Compreende-se, desta forma, o que seja uma sucessão de elementos

$$(4) \qquad \mathsf{a}_r , \mathsf{a}_s , \ldots , \mathsf{a}_u , \ldots$$

extraída duma subsucessão (2) de (1).

Eis agora as seguintes definições: o *limite integral* da sucessão de conjuntos (1) é o conjunto dos limites de tôdas as sucessões de elementos (4), convergentes, extraídas das diversas subsucessões (2) de (1); o *limite comum* da mesma sucessão (1) é o conjunto dos limites de tôdas as sucessões de elementos (3), convergentes, extraídas da sucessão (1). Por exemplo, se cada têrmo de ordem ímpar de (1) representar o conjunto dos números do intervalo $(0 , 2)$ e cada têrmo de ordem par o conjunto dos números do intervalo $(1 , 3)$, o limite integral da sucessão será o intervalo $(0 , 3)$ e o limite comum o intervalo $(1 , 2)$.

Representemos por $\ddot{\mathsf{A}}$ e $\dot{\mathsf{A}}$, ou por $\overset{..}{lim}\, \mathsf{A}_i$ e $\dot{lim}\, \mathsf{A}_i$, respectivamente o limite integral e o limite comum da sucessão de conjuntos (1).

É manifesto que entre os limites $\ddot{\mathsf{A}}$ e $\dot{\mathsf{A}}$ existe a relação $\ddot{\mathsf{A}} \,|\!> \dot{\mathsf{A}}$, quere dizer, o limite integral duma sucessão de conjuntos contém o limite comum da mesma sucessão. Também é evidente que estes limites não dependem da ordem dada aos têrmos da sucessão.

As definições de limite integral e de limite comum duma sucessão de conjuntos aplicam-se ainda ao caso particular dos têrmos da sucessão se reduzirem a simples elementos, e generalizam a definição dada de limite duma sucessão de elementos dum espaçóide. Na verdade, verificamos imediatamente que, para uma sucessão convergente de elementos

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots,$$

qualquer dos limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$ é constituído pelos limites *lim* $\mathbf{a}_i$ (todos juxtapostos entre si, como sabemos).

O limite integral duma sucessão de elementos é o respectivo derivado, e existirá tôdas as vezes que esta sucessão admitir uma subsucessão limitada [*p.* 16, *l.* 6]; o limite comum só existirá quando a sucesssão fôr convergente.

Retomando o caso geral duma sucessão de conjuntos (1), podemos dizer que os limites integral e comum são respectivamente a soma dos limites integrais e a soma dos limites comuns de tôdas as sucessões de elementos extraídas da sucessão dada (1).

Dissemos mais atrás [*p.* 22, *l.* 13] que a operação por meio da qual formamos o lugar dum conjunto é distributiva em relação à soma dum número finito de parcelas, e que pode não acontecer o mesmo no caso destas serem em número infinito. A êste respeito notemos agora que, numa sucessão infinita de conjuntos quaisquer, o lugar da soma dos têrmos é a soma do limite integral com os lugares dos têrmos da mesma sucessão:

$$[\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \cdots + \mathbf{A}_i + \cdots] \mid \ddot{\mathbf{A}} + [\mathbf{A}_1] + [\mathbf{A}_2] + \cdots + [\mathbf{A}_i] + \cdots.$$

Observação. — Descendo ao caso particular do conjunto $\mathbf{P}$ dos pontos dum espaço ordinário, é manifesto que as definições de limite integral e de limite comum são distintas das definições de *limite completo* e de *limite restrito* duma sucessão de conjuntos[1]. Aquelas definições generalizam a definição habitual de limite duma sucessão de pontos; estas não generalizam.

A existência dos limites completo e restrito implica a existência dos limites integral e comum; estes contêm respectivamente aquêles, como é evidente.

Dum modo geral podemos dizer que não se verificam outras relações entre tais limites. Todavia, nas sucessões decrescentes

[1] Os limites completo e restrito duma sucessão de conjuntos foram considerados pela primeira vez por E. Borel (*Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 18).

de conjuntos fechados, os limites completo e integral (ou os limites restrito e comum) coincidem necessàriamente; com efeito, se numa sucessão de conjuntos fechados cada têrmo contém o imediatamente seguinte, qualquer dos mencionados limites reduz-se ao produto de todos os têrmos da sucessão.

Os limites completo e restrito aparecem na teoria da medida dos conjuntos e dos integrais definidos; os limites integral e comum têm aplicações de carácter inteiramente diferente, como veremos.

34. Algumas propriedades dos limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$. — *Podemos caracterizar um elemento qualquer* $\mathbf{a}$ *do limite integral* $\ddot{\mathbf{A}}$ *da sucessão de conjuntos (1) pela condição necessária e suficiente de existir uma subsucessão (2) de (1) de modo que seja* $\lim \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} = 0$.

Com efeito, um elemento $\mathbf{a}$ de $\ddot{\mathbf{A}}$ é limite duma sucessão de elementos (4), extraída duma subsucessão (2) de (1), e temos

$$\lim \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} \leqq \lim \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{a}_u} = 0 .$$

Recìprocamente, suponhamos que um determinado elemento $\mathbf{a}$ tem por correspondente uma subsucessão (2) de (1) de forma que seja $\lim \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} = 0$. Considerando uma sucessão de elementos (4) extraída de (2) e sujeita à condição

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{a}_u} < \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} + \frac{1}{u} \quad (u = r, s, \ldots),$$

temos $\lim \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{a}_u} = 0$. Logo o elemento $\mathbf{a}$ pertence a $\ddot{\mathbf{A}}$.

Um elemento qualquer $\mathbf{a}$ *do limite comum* $\dot{\mathbf{A}}$ *da sucessão de conjuntos (1) é caracterizado pela condição necessária e suficiente de ser* $\lim \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_i} = 0$.

A demonstração é análoga à da proposição antecedente.

O limite integral duma sucessão de conjuntos (1) é a soma dos limites comuns das diversas subsucessões de (1).

Esta proposição resulta manifestamente das definições dadas para os limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$.

O limite comum duma sucessão de conjuntos (1), quando existe, é o produto dos limites integrais das diversas subsucessões de (1).

Com efeito, o limite $\dot{\mathbf{A}}$ da sucessão de conjuntos (1) está contido, evidentemente, no produto dos limites integrais das subsucessões de (1). Êste produto, por sua vez, está contido em $\dot{\mathbf{A}}$, porque, se um elemento $\mathbf{a}$ do referido produto não verificasse a condição $lim\, \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_i} = 0$ a que deve satisfazer um elemento de $\dot{\mathbf{A}}$, teríamos

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} > \varepsilon \quad (u = r, s, \ldots)$$

para um certo número positivo ε e para uma certa subsucessão (2) de (1), o que seria incompatível com a condição de o elemento $\mathbf{a}$ pertencer ao limite integral da sucessão (2).

O limite integral duma sucessão de conjuntos é um conjunto totalmente fechado.

Para demonstrar que o limite integral $\ddot{\mathbf{A}}$ da sucessão (1) é um conjunto totalmente fechado, consideremos um limite $\mathbf{a}'$ duma sucessão convergente, qualquer, de elementos de $\ddot{\mathbf{A}}$,

$$(5) \qquad \mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_i, \ldots.$$

A cada têrmo $\mathbf{a}'_i$ desta sucessão façamos corresponder um elemento $\mathbf{a}_u$ dum têrmo $\mathbf{A}_u$ de (1) de modo que u seja crescente com i e que se verifique a desigualdade $\overline{\mathbf{a}'_i\,\mathbf{a}_u} < \frac{1}{i}$. Os têrmos da sucessão (5) encontram-se assim em correspondência com os têrmos duma outra

$$(6) \qquad \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s, \ldots, \mathbf{a}_u, \ldots$$

extraída duma subsucessão de (1) e, visto ser $lim\, \overline{\mathbf{a}'_i\,\mathbf{a}_u} = 0$, a sucessão (6) converge para o limite $\mathbf{a}'$ [*p*. 18, *l*. 27]. O elemento $\mathbf{a}'$ pertence, pois, ao conjunto $\ddot{\mathbf{A}}$ [1].

---

[1] Esta proposição faz ver, mais uma vez, que o lugar $|\mathbf{A}|$ dum conjunto $\mathbf{A}$ é um conjunto totalmente fechado. Na verdade, o lugar $|\mathbf{A}|$ é o limite integral da sucessão

$$\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}, \ldots.$$

A mesma proposição também faz ver que o derivado duma sucessão de elementos é um conjunto totalmente fechado.

O limite comum duma sucessão de conjuntos é um conjunto totalmente fechado.

Com efeito, já vimos que o produto de vários conjuntos totalmente fechados ainda é um conjunto totalmente fechado [*p.* 23, *l.* 17]. Ora, o limite comum duma sucessão de conjuntos é o produto dos limites integrais das suas diversas subsucessões, e estes são conjuntos totalmente fechados como demonstrámos ùltimamente.

Se

$$(7) \qquad \mathbf{A}'_1, \mathbf{A}'_2, \ldots, \mathbf{A}'_i, \ldots$$

é uma sucessão de subconjuntos de soma limitada, extraída da sucessão (1), temos $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}'_i \ddot{\mathbf{A}}} = 0$.

Consideremos uma sucessão (7) de subconjuntos dos têrmos da mesma ordem da sucessão (1), e suponhamos que é limitada a soma

$$\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}'_2 + \ldots + \mathbf{A}'_i + \ldots.$$

Se não fôsse $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}'_i \ddot{\mathbf{A}}} = 0$, poderíamos determinar um número $\varepsilon > 0$ e uma subsucessão

$$(8) \qquad \mathbf{A}'_r, \mathbf{A}'_s, \ldots, \mathbf{A}'_u, \ldots$$

da sucessão (7) de maneira a verificar as desigualdades

$$\overrightarrow{\mathbf{A}'_u \ddot{\mathbf{A}}} > \varepsilon \quad (u = r, s, \ldots).$$

Em cada têrmo $\mathbf{A}'_u$ existiria um elemento $\mathbf{a}_u$ que fizesse $\overline{\mathbf{a}_u \ddot{\mathbf{A}}} > \varepsilon$ e, por ser limitada a soma dos têrmos da sucessão (8), limitada seria a sucessão dos elementos

$$(9) \qquad \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s, \ldots, \mathbf{a}_u, \ldots.$$

Para um limite $\mathbf{a}$ desta última sucessão teríamos $\overline{\mathbf{a}\, \ddot{\mathbf{A}}} \geq \varepsilon$ [*p.* 53, *l.* 2] e, em oposição a êste resultado, viria $\overline{\mathbf{a}\, \ddot{\mathbf{A}}} = 0$, pois o elemento $\mathbf{a}$ pertenceria a $\ddot{\mathbf{A}}$, porque a sucessão (9) é extraída da (8) e portanto da (2). A condição $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}'_i \ddot{\mathbf{A}}} = 0$ é, por conseguinte, verdadeira.

Se $\mathbf{A}'$ *é um subconjunto limitado do limite comum* $\dot{\mathbf{A}}$ *da sucessão de conjuntos (1), temos* $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{A}_i} = 0$.

Com efeito, se não existisse o limite $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{A}_i} = 0$, teríamos $\overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{A}_u} > 2\varepsilon$ para um certo número positivo ε e para todos os têrmos $\mathbf{A}_u$ duma certa subsucessão (2) de (1). A cada têrmo $\mathbf{A}_u$ poderíamos opor um elemento $\mathbf{a}'_u$ de $\mathbf{A}'$ que verificasse a desigualdade $\underline{\mathbf{a}'_u \mathbf{A}_u} > 2\varepsilon$, e um elemento limite $\mathbf{a}'$ da sucessão assim obtida,

$$\mathbf{a}'_r,\ \mathbf{a}'_s,\ \ldots,\ \mathbf{a}'_u,\ \ldots,$$

pertenceria necessàriamente ao limite comum $\dot{\mathbf{A}}$, pois êste é um conjunto totalmente fechado, como sabemos. Seja

$$\mathbf{a}'_{r'},\ \mathbf{a}'_{s'},\ \ldots,\ \mathbf{a}'_{u'},\ \ldots$$

uma infinidade de têrmos desta sucessão determinados de tal forma que se tenha

$$\overline{\mathbf{a}'_{u'}\,\mathbf{a}'} < \varepsilon \quad (u' = r',\ s',\ \ldots).$$

A relação

$$\underline{\mathbf{a}'\,\mathbf{A}_{u'}} \gtrless \underline{\mathbf{a}'_{u'}\,\mathbf{A}_{u'}} - \underline{\mathbf{a}'_{u'}\,\mathbf{a}'},$$

que se deduz de

$$\underline{\mathbf{A}_{u'}\,\mathbf{a}'_{u'}} \lesssim \underline{\mathbf{A}_{u'}\,\mathbf{a}'} + \underline{\mathbf{a}'\,\mathbf{a}'_{u'}} \quad [p.\ 50,\ (2)],$$

dar-nos-ia, por conseguinte,

$$\underline{\mathbf{a}'\,\mathbf{A}_{u'}} > \varepsilon \quad (u' = r',\ s',\ \ldots),$$

em discordância com a condição $lim\, \underline{\mathbf{a}'\,\mathbf{A}_i} = 0$ a que deveria satisfazer o elemento $\mathbf{a}'$ de $\dot{\mathbf{A}}$ [*p.* 76, *l.* 23].

Conseqüentemente existe $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{A}_i} = 0$.

35. Casos de existência e de coincidência dos limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$ [1]. — O limite integral duma sucessão de conjuntos (1) existirá sempre que pudermos extrair desta sucessão uma de ele-

[1] No capítulo V estudaremos outros casos de existência e de coincidência dos limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$ além dos que vamos agora considerar.

mentos que por sua vez admita uma subsucessão limitada. Assim, se fôr limitado o conjunto soma

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \cdots + \mathbf{A}_i + \cdots,$$

o limite integral existirá necessàriamente.

O limite comum duma sucessão de conjuntos pode não existir, ainda que seja limitada a soma dêstes conjuntos. É o que acontece com uma simples sucessão de elementos que seja divergente.

Acêrca da existência dos limites integral e comum duma sucessão de conjuntos quaisquer, eis as seguintes proposições:

Dada a sucessão de conjuntos (1), se fôr $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_{i'}\mathbf{A}_i} = 0$ $(i' < i)$ [1] *existirão os limites* $\ddot{\mathbf{A}}$ *e* $\dot{\mathbf{A}}$ *e teremos* $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$.

Comecemos por considerar um determinado elemento $\mathbf{b}$ e escrevamos a relação

$$\underline{\mathbf{b}\,\mathbf{A}_i} \lesssim \underline{\mathbf{b}\,\mathbf{A}_{i'}} + \overrightarrow{\mathbf{A}_{i'}\mathbf{A}_i} \quad [p.\ 59,\ (6)].$$

Dado um número $\delta > 0$ e admitindo a condição do enunciado, podemos fixar o índice i' de forma que seja $\overrightarrow{\mathbf{A}_{i'}\mathbf{A}_i} < \delta$ para qualquer inteiro $i > i'$. A relação anterior dá então, para estes valores de i,

$$\underline{\mathbf{b}\,\mathbf{A}_i} \lesssim \underline{\mathbf{b}\,\mathbf{A}_{i'}} + \delta.$$

Conseqüentemente é limitado o conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{b}\,\mathbf{A}_i}$ $(i > i')$, e o mesmo sucede ao conjunto de tôdas as distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{b}\,\mathbf{A}_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Dito isto, se tomarmos em cada conjunto $\mathbf{A}_i$ um elemento $\mathbf{a}_i$ tal que seja

$$\underline{\mathbf{b}\,\mathbf{a}_i} < \underline{\mathbf{b}\,\mathbf{A}_i} + \delta \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

obteremos uma sucessão de elementos

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots,$$

[1] Os inteiros i e i' tendem de qualquer forma para infinito, mas respeitando a relação $i' < i$.

sucessão esta que é limitada por ser limitado o conjunto das distâncias de cada têrmo a um determinado elemento $\mathbf{b}$. O derivado desta sucessão faz parte do limite integral de (1), que existe por conseguinte.

Para demonstrar a existência de $\dot{\mathbf{A}}$ e a relação $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$ consideremos um elemento $\mathbf{a}$ de $\ddot{\mathbf{A}}$ e determinemos uma subsucessão (2) de (1) de modo que se tenha $lim\, \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} = 0$. Como é também $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}_u \mathbf{A}_i} = 0$ $(u < i)$ [1], a relação

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_i} \lesseqgtr \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} + \overrightarrow{\mathbf{A}_u \mathbf{A}_i}$$

dá $lim\, \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_i} = 0$, quere dizer, o elemento $\mathbf{a}$ pertence ao limite comum da sucessão (1) [*p.* 76, *l.* 23], que existe portanto. Torna-se assim manifesta a relação $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$.

Dada a sucessão de conjuntos (1), se fôr $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}_i \mathbf{A}_{i'}} = 0$ $(i > i')$ *e se existir* $\ddot{\mathbf{A}}$, *também existirá* $\dot{\mathbf{A}}$ *e teremos* $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$.

A demonstração segue as mesmas linhas da segunda parte da demonstração do enunciado anterior; simplesmente devemos substituir a desigualdade $u < i$ por $u > i$ [2].

A-propósito da existência do limite comum duma sucessão de conjuntos acrescentemos ainda as seguintes proposições:

Para que uma dada sucessão de conjuntos (1) admita um

---

[1] Para conservar a relação $u < i$ podemos fazer tender i para infinito através dos valores

$$i = r+1,\ r+2,\ \dots,$$

e dar sempre a u o valor do têrmo da sucessão $r,\ s,\ \dots$ imediatamente menor do que i. Por outras palavras: para o cálculo do limite $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}_u \mathbf{A}_i}$, a sucessão dos desvios $\overrightarrow{\mathbf{A}_u \mathbf{A}_i}$ pode ser a seguinte:

$$\overrightarrow{\mathbf{A}_r \mathbf{A}_{r+1}},\ \overrightarrow{\mathbf{A}_r \mathbf{A}_{r+2}},\ \dots,\ \overrightarrow{\mathbf{A}_r \mathbf{A}_s},\ \overrightarrow{\mathbf{A}_s \mathbf{A}_{s+1}},\ \dots.$$

[2] Para manter a relação $u > i$ no cálculo do limite $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}_u \mathbf{A}_i}$, basta considerar a sucessão dos desvios

$$\overrightarrow{\mathbf{A}_r \mathbf{A}_1},\ \overrightarrow{\mathbf{A}_s \mathbf{A}_2},\ \dots$$

dos têrmos da sucessão (2) aos têrmos correspondentes da sucessão (1).

limite comum é necessário e suficiente que tôdas as subsucessões de (1) admitam limites integrais e que exista o produto de todos estes limites. Tal produto é o limite comum da sucessão (1).

É o que se depreende da demonstração do enunciado que se encontra a *p.* 76, *l.* 31.

Para que a sucessão de conjuntos (1) admita um limite comum é necessário e suficiente que tôdas as subsucessões de (1) admitam limites integrais e que exista o produto de quaisquer dêstes limites tomados em número finito, supondo um deles limitado.

Efectivamente, como tais limites integrais são conjuntos totalmente fechados [*p.* 77, *l.* 11], segue-se que, se existir o produto de quaisquer dêsses limites tomados em número finito e se um deles fôr limitado, também existirá o produto de todos [*p.* 23, *l.* 25], que é o limite comum da sucessão (1) [1].

36. Comparação dos limites integrais e comuns de certas sucessões de conjuntos. — *Dadas duas sucessões de conjuntos*

$$(10) \qquad \mathbf{A}_1\,,\ \mathbf{A}_2\,,\ \ldots,\ \mathbf{A}_i\,,\ \ldots$$

$$(11) \qquad \mathbf{B}_1\,,\ \mathbf{B}_2\,,\ \ldots,\ \mathbf{B}_i\,,\ \ldots,$$

se fôr $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\,\mathbf{B}_i} = 0$, *teremos as relações* $\ddot{\mathbf{A}} \mid< \ddot{\mathbf{B}}$ *e* $\dot{\mathbf{A}} \mid< \dot{\mathbf{B}}$.

Com efeito, a um elemento **a** de $\ddot{\mathbf{A}}$ corresponde uma subsucessão de (10),

$$\mathbf{A}_r\,,\ \mathbf{A}_s\,,\ \ldots,\ \mathbf{A}_u\,,\ \ldots,$$

tal que é $\lim \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} = 0$ [*p.* 76, *l.* 10]. Mas a relação

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}_u} \leqslant \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} + \overrightarrow{\mathbf{A}_u\,\mathbf{B}_u}$$

também dá $\lim \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}_u} = 0$. Logo o elemento **a** pertence a $\ddot{\mathbf{B}}$ e temos $\ddot{\mathbf{A}} \mid< \ddot{\mathbf{B}}$.

Da mesma forma se demonstra a relação $\dot{\mathbf{A}} \mid< \dot{\mathbf{B}}$.

---

[1] Importa observar que esta proposição não tem interferência alguma nas demonstrações que mais adiante apresentaremos [*n.os* 43 e 83] do teorema a *p.* 23, *l.* 25, no qual baseámos a referida proposição.

São evidentes os seguintes corolários:

Se entre os têrmos de duas sucessões de conjuntos (10) e (11) existirem as relações

$$A_1 |< B_1,\ A_2 |< B_2,\ \ldots,\ A_i |< B_i,\ \ldots,$$

também será $\ddot{A} |< \ddot{B}$ *e* $\dot{A} |< \dot{B}$.

Se fôr $\lim \overrightarrow{A_i B} = 0$, *teremos* $\ddot{A} |< [B]$; *se fôr* $\lim \overrightarrow{B A_i} = 0$, *teremos* $[B] |< \dot{A}$.

Porque o conjunto $[B]$ pode considerar-se limite integral e limite comum da sucessão

$$B,\ B,\ \ldots,\ B,\ \ldots.$$

Se fôr $\lim \overline{A_i B_i} = 0$, *teremos* $\ddot{A} \mid \ddot{B}$ *e* $\dot{A} \mid \dot{B}$.

Em particular:

Se fôr $\lim \overline{A_i B} = 0$, *teremos* $\ddot{A} \mid \dot{A} \mid [B]$.

Os limites integral e comum duma sucessão de conjuntos são os mesmos limites da sucessão dos lugares dos têrmos da primeira.

Com efeito, dada a sucessão de conjuntos (1), temos $\overline{A_i [A_i]} = 0$, donde vem $\lim \overline{A_i [A_i]} = 0$, que nos dá, como já sabemos,

$$\ddot{\lim}\, A_i \mid \ddot{\lim}\, [A_i] \quad \text{e} \quad \dot{\lim}\, A_i \mid \dot{\lim}\, [A_i].$$

Os limites integral e comum duma sucessão de conjuntos não se alteram, por conseqüência, quando todos ou alguns dêsses conjuntos se substituem por outros que admitem os mesmos lugares que os primeiros.

Consideremos agora k sucessões de conjuntos

(12) $$A_{h,1},\ A_{h,2},\ \ldots,\ A_{h,i},\ \ldots$$
$$(h = 1, 2, \ldots, k)$$

e seja

(13) $$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_i,\ \ldots$$

uma sucessão formada de têrmos das sucessões (12). Cada têrmo $\mathsf{A}_{h,i}$ que figure em (13) poderá repetir-se como têrmo desta sucessão, mas apenas um número finito de vezes.

Se notarmos que a sucessão (13) contém uma infinidade de têrmos duma, pelo menos, das sucessões (12) e se atendermos ás duas primeiras proposições do *n.º* 7 [*p.* 17], veremos que:

Se as k sucessões (12) admitem o mesmo limite integral, êste contém o limite integral $\ddot{\mathsf{B}}$ de (13).

Se as k sucessões (12) admitem o mesmo limite comum, êste pertence ao limite comum $\dot{\mathsf{B}}$ de (13).

Como caso particular vem a proposição seguinte:

Dada uma sucessão de conjuntos (1) e uma subsucessão (2) da primeira, entre os limites integrais e comuns existem as relações

$$\ddot{\mathit{lim}}\, \mathsf{A}_i | > \ddot{\mathit{lim}}\, \mathsf{A}_u \quad \text{e} \quad \dot{\mathit{lim}}\, \mathsf{A}_i | < \dot{\mathit{lim}}\, \mathsf{A}_u .$$

37. Caso em que é limitada a soma dos têrmos duma sucessão de conjuntos. Outros modos de definir os limites $\ddot{\mathsf{A}}$ e $\dot{\mathsf{A}}$. — *O limite integral duma sucessão de conjuntos (1) de soma limitada é o menor conjunto totalmente fechado* $\ddot{\mathsf{A}}$[1] *para o qual temos* $\mathit{lim}\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \ddot{\mathsf{A}}} = 0$.

Com efeito, supondo limitada a soma dos têrmos da sucessão (1), temos $\mathit{lim}\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \ddot{\mathsf{A}}} = 0$ como caso particular da proposição a *p.* 78, *l.* 9. Além disto também já sabemos que outro conjunto totalmente fechado B na condição $\mathit{lim}\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \mathsf{B}} = 0$ contém necessàriamente o limite integral $\ddot{\mathsf{A}}$ [*p.* 83, *l.* 6]. Conseqüentemente o limite $\ddot{\mathsf{A}}$ é o menor conjunto totalmente fechado para o qual temos $\mathit{lim}\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \ddot{\mathsf{A}}} = 0$.

O limite comum duma sucessão de conjuntos (1) de soma limitada é o maior conjunto $\dot{\mathsf{A}}$ *para o qual temos* $\mathit{lim}\, \overrightarrow{\dot{\mathsf{A}}\, \mathsf{A}_i} = 0$.

Sendo limitada a soma dos têrmos da sucessão (1), o mesmo

---

[1] Já dissemos numa nota a *p.* 21 o que se entende por *maior e menor conjuntos duma dada colecção de conjuntos.*

sucede, evidentemente, ao limite comum desta sucessão. Temos, portanto, $\lim \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}_i}=0$, como resulta da proposição a *p.* 79, *l.* 1. Mas, como qualquer outro conjunto $\mathbf{B}$ que satisfaça à condição $\lim \overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{A}_i}=0$ é necessàriamente um subconjunto de $\dot{\mathbf{A}}$ [*p.* 83, *l.* 6], segue-se que o limite comum $\dot{\mathbf{A}}$ é o maior conjunto (necessàriamente fechado) que faz $\lim \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}_i}=0$.

Notemos que a demonstração não exclui o caso de ser ilimitada a soma dos têrmos da sucessão (1), contanto-que seja limitado o respectivo limite comum. Logo, se numa sucessão de conjuntos quaisquer (1) o respectivo limite comum fôr limitado, êste será o maior conjunto $\dot{\mathbf{A}}$ para o qual temos $\lim \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}_i}=0$

Numa sucessão de conjuntos (1) de soma limitada, a condição $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}}=0$ *é necessária e suficiente para que seja* $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$.

A condição é necessária porque, sendo $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$, como é $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\ddot{\mathbf{A}}}=0$ [*p.* 84, *l.* 17] e $\lim \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}_i}=0$ [*prop. prec.*], a relação

$$\overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} \leqq \overrightarrow{\mathbf{A}_i\ddot{\mathbf{A}}}+\overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}_{i'}} \quad [p.\ 58,\ (1)]$$

dá $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}}=0$.

A condição é suficiente, porque do limite $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}}=0$ resulta, em particular, que é $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}}=0$ $(i<i')$, donde se deduz a coincidência $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$ [*p.* 80, *l.* 10].

Reünindo esta proposição com as duas primeiras do *n.º* 35 [*p.* 79] podemos dizer que:

Numa sucessão de conjuntos (1) de soma limitada, uma qualquer das condições

$$\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}}=0\ (i<i'),\quad \lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}}=0\ (i>i'),\quad \lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}}=0$$

é necessária e suficiente para que seja $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$.

Como vemos, duma qualquer das duas primeiras condições resulta necessàriamente a terceira, sempre que se tratar duma sucessão de conjuntos (1) de que a soma seja limitada.

Do que dissemos a *p.* 82, *l.* 6, ainda deduzimos o seguinte:

Para que uma sucessão de conjuntos, de que a soma seja limitada, admita um limite comum, é necessário e suficiente que exista *o produto dos limites integrais de quaisquer das respectivas subsucessões tomadas em número finito. O produto de todos estes limites integrais é o limite comum da sucessão proposta.*

38. Limites integral e comum duma soma e dum produto de sucessões de conjuntos. — *Se os têrmos duma dada sucessão de conjuntos*

$$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_i, \ldots$$

são somas de k conjuntos

$$\mathbf{S}_i \mid \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i + \cdots + \mathbf{V}_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots),$$

temos as relações

$$\ddot{\mathbf{S}} \mid \ddot{\mathbf{A}} + \ddot{\mathbf{B}} + \cdots + \ddot{\mathbf{V}}$$

e

$$\dot{\mathbf{S}} \mid\!> \dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{B}} + \cdots + \dot{\mathbf{V}}.$$

Por outras palavras: o limite integral da soma dum número finito de sucessões [1] é a soma dos limites integrais das parcelas, e o limite comum contém a soma dos limites comuns das parcelas. Estas afirmações são evidentes.

No caso da soma duma infinidade de sucessões sòmente podemos dizer, em geral, que:

Os limites integral e comum da soma contêm respectivamente a soma dos limites integrais e a soma dos limites comuns das parcelas.

---

[1] Chamamos *soma* e *produto* de diversas sucessões de conjuntos, respectivamente à sucessão das somas e à sucessão dos produtos dos primeiros têrmos, dos segundos têrmos, etc., das mesmas sucessões. Estas sucessões chamam-se, então, *parcelas da soma* e *factores do produto*.

É claro que o produto de diversas sucessões de conjuntos pode não existir.

A soma duma sucessão de conjuntos com um conjunto $\mathbf{A}$ é a soma desta sucessão com a sucessão

$$\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}, \ldots,$$

e identicamente se define o produto duma sucessão de conjuntos por um conjunto $\mathbf{A}$.

Consideremos, por exemplo, uma infinidade numerada de sucessões, nas quais todos os têrmos são um mesmo conjunto $\mathbf{A}$, excepto o primeiro têrmo da primeira, o segundo têrmo da segunda, etc., que são substituídos por um outro conjunto $\mathbf{B}$. Os limites integrais (ou comuns) destas sucessões são o lugar $[\mathbf{A}]$, a respectiva soma é o mesmo $[\mathbf{A}]$, o limite integral (ou comum) da sucessão soma é o lugar $[\mathbf{A}]+[\mathbf{B}]$ e não o lugar $[\mathbf{A}]$ se supusermos, por exemplo, que é $[\mathbf{A}]<[\mathbf{B}]$.

Os limites integral e comum do produto de diversas sucessões, em número finito ou infinito, pertencem respectivamente, ao produto dos limites integrais e ao produto dos limites comuns dos factores.

Esta proposição também é evidente. No exemplo de há pouco o limite integral (ou comum) do produto das sucessões é o lugar $[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]$ [1], o produto dos limites integrais (ou comuns) das mesmas sucessões é o lugar $[\mathbf{A}]$, e teremos $[\mathbf{A}\times\mathbf{B}]<[\mathbf{A}]$ se fôr, por exemplo, $[\mathbf{B}]<[\mathbf{A}]$.

39. Projecções dos limites integral e comum duma sucessão de conjuntos de ordem n. — *As projecções do limite integral* $\ddot{\mathbf{A}}^n$ *duma sucessão de conjuntos de ordem* n,

$$\mathbf{A}^n_1,\ \mathbf{A}^n_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}^n_i,\ \ldots, \tag{14}$$

pertencem aos limites integrais das correspondentes projecções da mesma sucessão.

Com efeito, seja $\mathbf{B}^k$ uma determinada projecção de $\ddot{\mathbf{A}}^n$ e

$$\mathbf{B}^k_1,\ \mathbf{B}^k_2,\ \ldots,\ \mathbf{B}^k_i,\ \ldots \tag{15}$$

a correspondente projecção da sucessão proposta. Um elemento $\mathbf{b}^k$ de $\mathbf{B}^k$ é projecção dum elemento $\mathbf{a}^n$ de $\ddot{\mathbf{A}}^n$, e a êste elemento corresponde uma subsucessão de (14),

$$\mathbf{A}^n_r,\ \mathbf{A}^n_s,\ \ldots,\ \mathbf{A}^n_u,\ \ldots,$$

---

1 Supomos que existe o produto $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$. A relação $[\mathbf{B}]<[\mathbf{A}]$ que a seguir escrevemos, não implica necessàriamente a existência dêsse produto.

tal que é $lim\, \underline{\mathbf{a}^n\, \mathbf{A}^n_u} = 0$. Conseqüentemente de

$$\underline{\mathbf{b}^k\, \mathbf{B}^k_u} \lessgtr \underline{\mathbf{a}^n\, \mathbf{A}^n_u} \quad [p.\ 49,\ l.\ 31]$$

resulta $lim\, \underline{\mathbf{b}^k\, \mathbf{B}^k_u} = 0$, quere dizer, o elemento $\mathbf{b}^k$ pertence ao limite integral $\ddot{\mathbf{B}}^k$ da sucessão (15). Temos, portanto, $\mathbf{B}^k | < \ddot{\mathbf{B}}^k$, como desejávamos provar.

Notemos que a coincidência $\mathbf{B}^k \mid \ddot{\mathbf{B}}^k$ pode não dar-se necessáriamente; basta recordar que, para $\ddot{\mathbf{A}}^n$ ilimitado, $\mathbf{B}^k$ pode não ser um conjunto fechado [*p.* 40, *l.* 10]. Um outro exemplo é a sucessão dos segmentos do plano $x O y$ que unem o ponto $(1, 0)$ aos pontos

$$(0, 1), (0, 2), \ldots, (0, i), \ldots,$$

pois que o limite integral desta sucessão é a semirecta $x = 1$ com $y > 0$, a projecção do limite integral sôbre o eixo $O x$ é o ponto $(1, 0)$ e o limite integral da sucessão das projecções dêsses segmentos é o segmento do eixo $O x$ que une a origem ao ponto $(1, 0)$.

Da mesma forma se demonstra a proposição seguinte:

As projecções do limite comum da sucessão de conjuntos (14) pertencem aos limites comuns das correspondentes projecções da mesma sucessão.

Se a soma dos conjuntos (14) é limitada, as projecções do limite integral $\ddot{\mathbf{A}}^n$ *são os limites integrais das correspondentes projecções da mesma sucessão.*

Com efeito, no caso em que é limitada a soma dos têrmos da sucessão (14), o limite integral $\ddot{\mathbf{A}}^n$ satisfaz à condição $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}^n_i\, \ddot{\mathbf{A}}^n} = 0$ [*p.* 84, *l.* 17] e, por ser

$$\overrightarrow{\mathbf{B}^k_i\, \mathbf{B}^k} \lessgtr \overrightarrow{\mathbf{A}^n_i\, \ddot{\mathbf{A}}^n} \quad [p.\ 58,\ l.\ 3],$$

temos da mesma forma $lim\, \overrightarrow{\mathbf{B}^k_i\, \mathbf{B}^k} = 0$. Daqui deduz-se $\ddot{\mathbf{B}}^k | < \mathbf{B}^k$ [*p.* 83, *l.* 6], porque $\mathbf{B}^k$ é um conjunto totalmente fechado [*p.* 40, *l.* 19], relação esta que, juntamente com a já demonstrada $\mathbf{B}^k | < \ddot{\mathbf{B}}^k$, dá $\mathbf{B}^k \mid \ddot{\mathbf{B}}^k$. Logo, quando nos referirmos a uma sucessão de conjuntos cuja soma seja limitada poderemos dizer, resumidamente, que os limites integrais das projecções são as projecções dos limites integrais.

Observação. — Não é verdadeira, em todos os casos, a proposição análoga para o limite comum. Por exemplo, supondo que se trata duma sucessão de conjuntos de pontos do plano xOy, se cada têrmo de ordem ímpar é o segmento de recta de extremos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, e cada têrmo de ordem par o segmento de extremos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, o limite comum da sucessão é o ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de intersecção dêsses segmentos, a primeira projecção do limite comum é $\frac{1}{2}$ e o limite comum da sucessão das primeiras projecções dêsses segmentos é o segmento de extremos $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

II

ESPAÇAMENTO DO CONJUNTO DOS SUBCONJUNTOS LIMITADOS DE P

40. Juxtaposição de conjuntos. — Apresentámos já uma definição geral de distância entre dois conjuntos, mas esta distância, definida com tão grande generalidade, torna-se infinita nalguns casos: quando um dos conjuntos é limitado e o outro ilimitado, e ainda, possìvelmente, quando ambos os conjuntos são ilimitados [*p.* 62, *nota*]. A-fim-de evitar estes casos particulares na definição de distância entre dois conjuntos — como é necessário para que estes sejam elementos dum espaçóide — consideremos por agora, sòmente conjuntos limitados.

Seguindo as mesmas denominações que no *n.º* 1, diremos que os conjuntos **A** e **B** são juxtapostos um ao outro (**A** ‖ **B**) quando fôr $\overline{\mathbf{AB}} = 0$. Dois conjuntos são, pois, juxtapostos quando cada elemento de qualquer deles é limite duma sucessão de elementos do outro, isto é, quando todo o esferóide de centro num elemento de qualquer dêstes conjuntos contém um elemento do outro.

Já vimos que da condição $\overline{\mathbf{AB}} = 0$ se conclui $[\mathbf{A}] \mid [\mathbf{B}]$ e recìprocamente [*p.* 63, *l.* 32]. Logo, para que dois conjuntos sejam juxtapostos, é necessário e suficiente que admitam o mesmo lugar, ou, o que é o mesmo, é necessário e suficiente que cada um deles seja um subconjunto do lugar do outro [*p.* 21, *l.* 19]. Por exemplo, o conjunto dos números racionais dum intervalo e o conjunto dos números irracionais do mesmo intervalo juxtapõem-se um ao outro.

É evidente que, se cada elemento de qualquer dos conjuntos **A** e **B** é juxtaposto a um elemento do outro, estes conjuntos são juxtapostos entre si. Dois conjuntos totalmente fechados e juxtapostos são coincidentes.

Correspondentes projecções de conjuntos juxtapostos de ordem n são igualmente conjuntos juxtapostos [*p.* 64, *l.* 12].

Observação. — Um conjunto de números reais juxtaposto a um dado intervalo é qualquer conjunto *denso* nêsse intervalo. Em geral, a definição de conjuntos juxtapostos (que abrange o caso dos conjuntos ilimitados) generaliza a definição de — *conjunto* A , *de pontos dum espaço ordinário, denso sôbre um conjunto perfeito* B *que admite o primeiro por subconjunto* [1].

41. Conjuntos limitados de conjuntos. — Representemos por (**A**) um conjunto qualquer de subconjuntos limitados **A** dum dado espaçóide **P**. Diremos que (**A**) é um conjunto limitado quando fôr limitado superiormente o conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{A}\,\mathbf{A}'}$ entre os conjuntos constituintes de (**A**), ou elementos de (**A**), tomados dois a dois de todos os modos possíveis. O limite superior do conjunto destas distâncias é o diâmetro de (**A**).

Um conjunto (**A**) será pròpriamente infinito quando admitir um subconjunto infinito de elementos não juxtapostos, dois quaiquer deles.

Num conjunto limitado (**A**) *também é limitado o conjunto dos diâmetros dos conjuntos constituintes de* (**A**).

Para a justificação dêste enunciado basta notar que, se **A** e **A**$'$ são conjuntos elementos de (**A**) e Δ e Δ' os respectivos diâmetros, temos

$$|\Delta-\Delta'|\lessgtr 2\,\overline{\mathbf{A}\,\mathbf{A}'} \quad [p.\ 65,\ (3)].$$

Designando por α o diâmetro de (**A**) e por δ o limite inferior dos diâmetros Δ dos conjuntos elementos de (**A**), da última re-

[1] Para esta definição veja-se, por exemplo, Vicente Gonçalves, *Lições de Cálculo e Geometria*, *p.* 55, *l.* 27.

lação deduz-se fàcilmente a seguinte:

(1) $$\Delta \lesssim \delta + 2\alpha.$$

Um conjunto (**A**) *é limitado ao mesmo tempo que a soma* **S** *dos conjuntos constituintes de* (**A**).

Sejam **a** e **a**′ dois elementos quaisquer do conjunto soma **S**, **A** e **A**′ as parcelas a que pertencem tais elementos, Δ e Δ' os diâmetros dêstes conjuntos. Podemos escrever, atendendo à relação (5) a *p.* 51,

(2) $$\overline{\mathbf{a}\mathbf{a}'} \lesssim \Delta + \Delta' + \underline{\mathbf{A}\mathbf{A}'} \lesssim \Delta + \Delta' + \overline{\mathbf{A}\mathbf{A}'}.$$

Mas, se o conjunto (**A**) é limitado, os números $\overline{\mathbf{A}\mathbf{A}'}$ admitem um limite superior, e o mesmo sucede aos números Δ [*prop. prec.*]. Por conseguinte também é limitado superiormente o conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}\mathbf{a}'}$, como resulta da relação (2), quere dizer, o conjunto **S** é limitado.

Designando por α o diâmetro de (**A**) e por δ o limite inferior dos diâmetros Δ, como fizemos há pouco, das relações (1) e (2) concluímos que o diâmetro de **S** não excede o número

$$2(\delta + 2\alpha) + \alpha = 2\delta + 5\alpha.$$

Recìprocamente, suponhamos agora que **S** é um conjunto limitado e demonstremos que o mesmo acontece a (**A**). Neste caso, como os diversos conjuntos **A** são evidentemente limitados, como a distância entre dois quaisquer dêstes conjuntos é a distância entre dois elementos convenientemente determinados nos respectivos lugares [*p.* 63, *l.* 29], como estes elementos pertencem ao lugar |**S**| [*p.* 22, *l.* 17] e como |**S**| é um conjunto limitado [*p.* 21, *l.* 7], segue-se que (**A**) também é um conjunto limitado. O diâmetro de (**A**) não excede o de |**S**|, isto é, não excede o de **S** [*p.* 44, *l.* 29].

42. Verificação das propriedades fundamentais. — Continuemos a considerar um determinado espaçóide **P** e todos os conjuntos limitados **A**, **B**, ... nêle contidos, únicos de que nos ocupamos, por emquanto. Designemos ainda por (**A**) um conjunto qualquer constituído por alguns dos conjuntos **A**, **B**, ...

Demonstremos agora que o conjunto de todos os conjuntos $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots$ é um novo espaçóide, supondo que adoptamos a definição já enunciada de distância entre dois conjuntos.

1) *Dados os conjuntos* A, B *e* C, *tem lugar a relação*

$$\overline{\mathsf{A}\mathsf{C}} \lesssim \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}} + \overline{\mathsf{B}\mathsf{C}}.$$

E o que já demonstrámos no *n.º* 30 [*p.* 64].

2) *Se a sucessão de conjuntos*

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_i, \ldots$$

satisfaz à condição $lim\, \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_{i'}} = 0$, *existe um conjunto* A *tal que temos* $lim\, \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}} = 0$.

Com efeito, nesta condição, como a um dado número $\delta > 0$ corresponde um inteiro positivo k tal que temos $\overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_k} < \delta$ para todo o $i > k$, segue-se que é limitado o conjunto das distâncias

$$\overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_k} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Por conseguinte também é limitado o conjunto de tôdas as distâncias $\overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_{i'}}$ [*p.* 5, *l.* 19], assim como o conjunto soma

$$\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \ldots + \mathsf{A}_i + \ldots.$$

Existe, portanto, o limite integral $\ddot{\mathsf{A}}$ e, da condição $lim\, \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_{i'}} = 0$[1], vem $\ddot{\mathsf{A}} \mid \dot{\mathsf{A}}$ [*p.* 85, *l.* 12].

Ora, designando por A êste limite único, temos $lim\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \mathsf{A}} = 0$ e $lim\, \overrightarrow{\mathsf{A} \mathsf{A}_i} = 0$, por se tratar duma sucessão de conjuntos cuja soma é limitada [*p.* 84, *l.* 17 e 27], resultados estes que nos dão $lim\, \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}} = 0$, como desejávamos demonstrar.

3) *É possível dividir qualquer conjunto limitado* (A) *de conjuntos* A *num número finito de partes de diâmetros menores do que um número positivo* δ *prèviamente dado.*

---

[1] É evidente que as condições $lim\, \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_{i'}} = 0$ e $lim\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_{i'}} = 0$ são equivalentes.

Para tanto comecemos por dividir o conjunto $\mathbf{S}$, soma dos conjuntos $\mathbf{A}$ constituintes de $(\mathbf{A})$, num número finito de conjuntos parciais de diâmetros menores do que δ [*p.* 2, 3)] [1]. Sejam

(3) $$\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \ldots, \mathbf{S}_k$$

os conjuntos parciais assim obtidos. Em seguida formemos grupos com os conjuntos $\mathbf{A}$ do modo seguinte: os conjuntos $\mathbf{A}$ contidos em $\mathbf{S}_1$, os contidos em $\mathbf{S}_2$, etc.; os conjuntos $\mathbf{A}$ (distintos dos já considerados) contidos em $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, os contidos em $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_3$, etc. Em geral, os conjuntos $\mathbf{A}$ de $(\mathbf{A})$ pertencentes a um mesmo grupo correspondem a determinados dos conjuntos (3),

(4) $$\mathbf{S}_r, \mathbf{S}_s, \ldots, \mathbf{S}_u,$$

da seguinte maneira: cada um daqueles conjuntos está contido na soma

$$\mathbf{S}_r + \mathbf{S}_s + \ldots + \mathbf{S}_u$$

e não em nenhuma soma de conjuntos (3) que seja formada por menor número de parcelas.

Os grupos assim constituídos são em número finito, e pode suceder que um ou outro seja desprovido de conjuntos $\mathbf{A}$, como é evidente.

Demonstremos agora que os diâmetros dêsses grupos de conjuntos são menores do que o número considerado δ. Um determinado grupo corresponde, como vimos, a determinados conjuntos (4). Estes dividem qualquer conjunto $\mathbf{A}$ do mesmo grupo em partes:

$$\mathbf{A} \mid \mathbf{A}_r + \mathbf{A}_s + \cdots + \mathbf{A}_u,$$

sendo

$$\mathbf{A}_r \mid \mathbf{A} \times \mathbf{S}_r, \quad \mathbf{A}_s \mid \mathbf{A} \times \mathbf{S}_s, \ \ldots, \ \mathbf{A}_u \mid \mathbf{A} \times \mathbf{S}_u .$$

Temos, da mesma forma, para qualquer outro conjunto $\mathbf{A}'$ do referido grupo,

$$\mathbf{A}' \mid \mathbf{A}'_r + \mathbf{A}'_s + \ldots + \mathbf{A}'_u .$$

---

[1] Já demonstrámos que a soma $\mathbf{S}$ é um conjunto limitado [*p.* 91, *l.* 3].

Mas a distância $\overline{\mathbf{A}\mathbf{A}'}$ não excede a maior das distâncias

$$\overline{\mathbf{A}_r\mathbf{A}'_r},\ \overline{\mathbf{A}_s\mathbf{A}'_s},\ \ldots,\ \overline{\mathbf{A}_u\mathbf{A}'_u}\quad [p.\ 68,\ l.\ 21],$$

e, como estas distâncias não excedem respectivamente os diâmetros dos conjuntos (4), vem $\overline{\mathbf{A}\mathbf{A}'} < \delta$. Por conseguinte o diâmetro de cada grupo não excede o número δ, como desejávamos demonstrar.

43. Demonstração dum teorema de Riesz-Sierpinski. — Como aplicação da doutrina exposta anteriormente apresentemos a seguinte demonstração dum teorema de Riesz-Sierpinski, já enunciado a *p.* 23, e estendido a conjuntos de elementos dum espaçóide qualquer:

Para que exista o produto duma infinidade de conjuntos totalmente fechados, um dos quais supomos limitado, é necessário e suficiente que exista o produto de quaisquer dêsses conjuntos tomados em número finito.

A condição é manifestamente necessária. Para demonstrar que é suficiente suponhamos, primeiro, que a soma dos conjuntos dados $\mathbf{A}$ é limitada. Neste caso o conjunto $(\mathbf{A})$ de todos os conjuntos $\mathbf{A}$ também é limitado [*p.* 91, *l.* 3], e podemos, por isso, dividi-lo num número finito de subconjuntos $(\mathbf{A}')$ de diâmetros inferiores a um número dado $\frac{1}{i}$. Tomemos um só conjunto elemento $\mathbf{A}'$ de cada subconjunto $(\mathbf{A}')$, seja $\mathbf{A}_i$ o produto dêstes conjuntos $\mathbf{A}'$, que existe por hipótese, e demonstremos que é verdadeira a desigualdade $\overline{\mathbf{A}_i\mathbf{A}} < \frac{1}{i}$, seja qual fôr o elemento $\mathbf{A}$ do conjunto $(\mathbf{A})$. Com efeito, se $(\mathbf{A}')$ é o subconjunto de $(\mathbf{A})$ a que pertence o elemento dado $\mathbf{A}$, e se $\mathbf{A}'$ é o elemento de $(\mathbf{A}')$ que é factor na formação do produto $\mathbf{A}_i$, temos, em virtude da relação $\mathbf{A}_i | < \mathbf{A}'$,

$$\overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}} \lesssim \overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{A}} \lesssim \overline{\mathbf{A}'\mathbf{A}} < \frac{1}{i}.$$

Procedendo desta maneira para todos os valores inteiros e positivos de i, obtemos a sucessão de conjuntos

$$\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_i,\ \ldots,$$

sucessão esta que admite um limite integral $\ddot{\mathbf{A}}$ [*p.* 80, *l.* 2], e na qual é $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}_i \mathbf{A}} = 0$ seja qual fôr o elemento $\mathbf{A}$ de $(\mathbf{A})$. Daqui resulta que o limite integral $\ddot{\mathbf{A}}$ satisfaz à condição $\ddot{\mathbf{A}} \mid < \mathbf{A}$, porque $\mathbf{A}$ é um conjunto totalmente fechado [*p.* 83, *l.* 6]. Como vemos, existe o produto de todos os conjuntos dados $\mathbf{A}$, pois o limite integral $\ddot{\mathbf{A}}$ pertence a qualquer deles.

Podemos até afirmar que $\ddot{\mathbf{A}}$ coincide com o produto de todos os conjuntos $\mathbf{A}$, porque êste produto está evidentemente contido em qualquer dos têrmos da sucessão anterior e, por conseguinte, está contido no limite $\ddot{\mathbf{A}}$.

Suponhamos agora que a soma dos conjuntos $\mathbf{A}$ é ilimitada. Entre estes existe, por hipótese, um conjunto limitado que designamos por $\mathbf{A}'$. Substituamos cada um dos restantes conjuntos $\mathbf{A}$ pelo correspondente produto $\mathbf{B} \mid \mathbf{A}' \times \mathbf{A}$. Como existe o produto de $\mathbf{A}'$ por quaisquer dos conjuntos $\mathbf{A}$ em número finito, também existe evidentemente o produto de quaisquer dos conjuntos $\mathbf{B}$ em número finito. Logo existe o produto de todos os conjuntos $\mathbf{B}$ (porque é limitada a respectiva soma), que é o produto de todos os conjuntos dados [1].

O teorema que acabâmos de demonstrar pode generalizar-se do seguinte modo:

Para que exista o produto duma infinidade de conjuntos totalmente fechados, é necessário e suficiente que exista o produto de quaisquer dêsses conjuntos tomados em número finito, supondo que um dos produtos é limitado.

Com efeito, como na infinidade de conjuntos dados existem alguns, em número finito, que, por hipótese, admitem um produto limitado, segue-se que, se substituirmos na mesma infinidade estes últimos conjuntos pelo respectivo produto, obteremos uma nova infinidade de conjuntos mas nas condições do teorema precedente. Ora o produto dos conjuntos da nova infinidade é justamente o produto de todos os conjuntos dados.

44. Espaçóides de conjuntos de origem P. — A teoria que desenvolvemos precedentemente mostra, em resumo, como *espaçar* o conjunto $\mathbf{P}_1$ dos subconjuntos dum determinado espaçóide

[1] Veremos no *n.º* 83 uma outra demonstração dêste teorema.

P[1]. Diremos, então, que o espaçóide P é a *base* do novo espaçóide P_1.

Da mesma forma podemos *espaçar* o conjunto P_2 dos subconjuntos de P_1, depois o conjunto P_3 dos subconjuntos de P_2, e assim sucessivamente. Sabemos construir, portanto, uma infinidade de espaçóides

(5) $$\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots, \mathsf{P}_i, \ldots,$$

de natureza diferente dos já considerados no *n.º* 13 [*p.* 35], por meio da — *formação de conjuntos de conjuntos* — aplicada sucessivamente a partir dum certo espaçóide P.

Aos conjuntos (5) chamamos *espaçóides de conjuntos* e ao conjunto P a *origem* dos mesmos espaçóides. Dizemos que estes são respectivamente de primeira espécie, de segunda espécie, etc., em relação à origem P.

Quando esta origem fôr o conjunto de todos os números reais e imaginários, obteremos os *espaçóides numéricos de conjuntos,* que podem ser de primeira espécie, de segunda espécie, etc. Também chamamos espaçóide numérico de conjuntos a qualquer espaçóide contido num dos precedentes.

Observação. — É evidente que o conjunto P pertence a P_1, pois consideram-se subconjuntos particulares de P os seus próprios elementos. De igual modo se nota que P_1 pertence a P_2, que êste pertence a P_3 e que, em geral, cada têrmo da sucessão (5) pertence ao têrmo imediatamente seguinte. Logo cada têrmo P_i admite por subconjuntos todos os têrmos de ordem inferior a i.

Somos levados, por conseqüência, à consideração do conjunto

$$\mathsf{S} \mid \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2 + \cdots + \mathsf{P}_i + \cdots$$

da totalidade dos elementos dos conjuntos P_i $(i = 1, 2, \ldots)$, pois encontra-se naturalmente definida a distância entre dois elementos quaisquer da soma S: dois elementos de S pertencem, na verdade, a um mesmo conjunto P_i. A relação fundamental

---

[1] Continuamos a considerar sòmente os subconjuntos de P que são limitados. Esta restrição é de resto indispensável para o *espaçamento* de P_1, como veremos numa observação que se encontra no final do *n.º* 55.

entre distâncias é evidentemente verdadeira mas, a-pesar-disso, tal definição de distância não leva o conjunto **S** à classe dos espaçóides, visto não obedecer, como vamos verificar, a tôdas as propriedades características dêstes conjuntos.

Com efeito, observemos, por exemplo, que não é possível dividir todo o subconjunto limitado de **S** num número finito de conjuntos de diâmetros menores do que um número positivo qualquer prèviamente dado. Para citar um caso simples, tomemos dois elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de **P**, não juxtapostos um ao outro, e consideremos o subconjunto **A** de **S** constituído pelos elementos

$$\mathbf{a}\,,\ \mathbf{b}\,,\ \mathbf{A}_1\,,\ \mathbf{A}_2\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{A}_i\,,\ \ldots\,,$$

em que: $\mathbf{A}_1$ é o conjunto dos elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$; $\mathbf{A}_2$ é o conjunto dos elementos $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{A}_1$; em geral $\mathbf{A}_i$ é o conjunto dos elementos

$$\mathbf{a}\,,\ \mathbf{b}\,,\ \mathbf{A}_1\,,\ \mathbf{A}_2\,,\ \ldots\,,\ \mathbf{A}_{i-1}\,.$$

Fàcilmente reconhecemos, por indução, que a distância entre dois elementos quaisquer de **A** é igual a $\overline{\mathbf{ab}}$. O conjunto **A** é, pois, limitado e de diâmetro $\overline{\mathbf{ab}}$, mas não podemos dividi-lo num número finito de partes de diâmetros inferiores à distância $\overline{\mathbf{ab}}$, como é evidente. Êste conjunto **A** não satisfaz ao enunciado de Bolzano-Weierstrass: é limitado e pròpriamente infinito mas não admite elemento limite algum.

45. Espaçóides, em geral, de origem P. — As duas operações — *composição de conjuntos e formação de conjuntos de conjuntos* — permitem-nos construir ainda outros espaçóides (a começar por um certo espaçóide **P**) de formas mais complicadas (em relação a **P**) do que os já mencionados nos *n.os* 13 e 44. De facto, os espaçóides de conjuntos de origem **P** podem figurar como origens na formação de espaçóides compostos, e estes, por sua vez, servem de origens a novas infinidades de espaçóides de conjuntos.

Todos os espaçóides que se obtêm por intermédio das aludidas operações aplicadas a partir dum dado conjunto **P** podem dispor-se numa infinidade numerada de grupos, como a seguir indicamos: o grupo $(\mathbf{P}_0)$ constituído ùnicamente pelo conjunto $\mathbf{P}_0 \mid \mathbf{P}$; o grupo $(\mathbf{P}')$ dos espaçóides compostos de componentes **P**;

o grupo (P_1) dos espaçóides de conjuntos de bases nos dos grupos (P_0) e (P') [*p.* 96, *l.* 1]; o grupo (P'') dos espaçóides compostos em cada um dos quais um dos componentes pertence a um dos grupos (P') ou (P_1), e cada um dos restantes componentes a um dos grupos (P_0), (P') ou (P_1); o grupo (P_2) dos espaçóides de conjuntos de bases nos dos grupos (P_1) e (P''). Em geral, o grupo $(\mathsf{P}^{(i)})$ é constituído pelos espaçóides compostos em cada um dos quais um dos componentes pertence a um dos grupos $(\mathsf{P}^{(i-1)})$ ou (P_{i-1}), e cada um dos restantes componentes a um dos grupos anteriores a $(\mathsf{P}^{(i)})$; o grupo (P_i) é constituído pelos espaçóides de conjuntos de bases nos dos grupos (P_{i-1}) e $(\mathsf{P}^{(i)})$.

Aos diversos conjuntos dos grupos

$$(\mathsf{P}'),\ (\mathsf{P}_1),\ (\mathsf{P}''),\ (\mathsf{P}_2),\ \ldots,\ (\mathsf{P}^{(i)}),\ (\mathsf{P}_i),\ldots \tag{6}$$

chamemos, em geral, ***espaçóides de origem*** P.

Imediatamente reconhecemos que os espaçóides compostos

$$\mathsf{P}',\ \mathsf{P}'',\ \ldots,\ \mathsf{P}^{(i)},\ \ldots$$

de origem P, definidos no *n.º* 13, *p.* 35, fazem parte respectivamente dos grupos

$$(\mathsf{P}'),\ (\mathsf{P}''),\ \ldots,\ (\mathsf{P}^{(i)}),\ \ldots,$$

e que os espaçóides de conjuntos

$$\mathsf{P}_1,\ \mathsf{P}_2,\ \ldots,\ \mathsf{P}_i,\ \ldots$$

com a mesma origem P, definidos no *n.º* precedente, fazem parte respectivamente dos grupos

$$(\mathsf{P}_1),\ (\mathsf{P}_2),\ \ldots,\ (\mathsf{P}_i),\ \ldots.$$

Dizemos que os restantes espaçóides dos grupos (6) são *mixtos* em relação à origem P.

Os espaçóides dos grupos (P') e (P_1) são de *primeira espécie,* os dos grupos (P'') e (P_2) são de *segunda espécie;* em geral, dizemos que os espaçóides dos grupos $(\mathsf{P}^{(i)})$ e (P_i) são de *espécie i* em relação à origem P.

Damos o nome de *espaçóides numéricos*, duma maneira geral, aos espaçóides de origem no conjunto de todos os números reais e imaginários. Também damos essa designação a qualquer espaçóide contido num dêstes últimos.

Os espaçóides numéricos podem ser conjuntos compostos ou conjuntos de conjuntos; uns e outros podem ser mixtos ou não, e classificam-se em espécies como acima dissemos.

Estas breves considerações bastam para pôr em evidência a grande generalidade da teoria já exposta até agora, e para mostrar como as duas operações a que nos temos referido conduzem a espaçóides extremamente complexos em relação ao conjunto P tomado para origem.

46. Potência do conjunto dos espaçóides de origem P. — *É numerável o conjunto dos espaçóides de origem* P.

Como já dispusemos tais espaçóides numa infinidade numerada de grupos (6), obteremos a demonstração do enunciado se provarmos que os espaçóides de cada grupo constituem uma infinidade numerável.

Para isso notemos, primeiro, que:

É numerável o conjunto de todos os espaçóides compostos nos quais os componentes são têrmos duma certa infinidade numerável de espaçóides.

Efectivamente, se formarmos uma sucessão com esta infinidade de conjuntos, cada um dos referidos espaçóides compostos será determinado por um sistema de índices, em número finito, indicadores das ordens dos componentes na mesma sucessão [1].

---

[1] *É numerável qualquer conjunto cujos elementos sejam definidos por índices em número finito, embora êste número possa variar de elemento para elemento, índices êsses que tomam todos os valores inteiros positivos independentemente uns dos outros.*

Com efeito, basta notar que, se fizermos corresponder a cada elemento dum tal conjunto o número inteiro cuja decomposição em factores primos tem a forma $2^{\alpha}.3^{\beta}.\ \ldots$ sendo α, β, ... os índices de que depende êsse elemento, teremos estabelecido uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto considerado e os números inteiros em cada um dos quais os factores primos diferentes são consecutivos a partir de 2.

(Deve-se a Vicente Gonçalves a idea desta demonstração).

Por conseguinte, se supusermos que os grupos anteriores a $(\mathsf{P}^{(i)})$ são numeráveis, o mesmo acontecerá ao grupo $(\mathsf{P}^{(i)})$, visto cada espaçóide dêste grupo admitir por componentes alguns dos espaçóides do grupo numerável

$$(\mathsf{P}_0)+(\mathsf{P}')+(\mathsf{P}_1)+\ldots+(\mathsf{P}^{(i-1)})+(\mathsf{P}_{i-1})\,.$$

O grupo (P_i) também será numerável, como é evidente. Logo, atendendo a que os grupos anteriores a (P'') são numeráveis, concluímos, por indução, que o mesmo acontece a todos os grupos da sucessão (6).

47. Os limites de conjuntos. Primeira extensão do teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS. — Uma vez espaçado o conjunto dos subconjuntos limitados dum dado espaçóide, manter-se-á verdadeira tôda a doutrina exposta desde o princípio se imaginarmos que os elementos então considerados a, b, ... representam subconjuntos dêsse espaçóide, quaisquer mas limitados.

São verdadeiras, em particular, tôdas as definições e proposições sôbre limites de conjuntos, correspondentes às que se encontram enunciadas e demonstradas no *cap.* I, § II.

Assim, a definição de convergência duma sucessão

$$(7) \qquad \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_i, \ldots$$

de subconjuntos limitados de P é a definição já conhecida da *p.* 10: *a sucessão (7) converge para o conjunto limitado* A *quando temos*

$$lim\, \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}} = 0\,.$$

Também podemos dizer que uma sucessão (7) de conjuntos limitados converge para um conjunto limitado A quando cada número $\delta > 0$ determina uma ordem k tal que, para $i > k$, a um elemento qualquer de A_i ou de A corresponde um elemento de A ou de A_i a uma distância do primeiro menor do que δ.

É claro que a definição de convergência duma sucessão de subconjuntos limitados de P generaliza a definição de convergência duma simples sucessão de elementos.

É particularmente importante a seguinte extensão do teorema de Bolzano-Weierstrass, que se apresenta como resultado desta teoria:

Qualquer conjunto de conjuntos limitados, limitado e pròpriamente infinito, admite um conjunto limite.

Se atendermos a que um conjunto de conjuntos limitados é limitado ao mesmo tempo que a soma dêstes conjuntos, poderemos enunciar da seguinte forma o teorema precedente:

Qualquer conjunto pròpriamente infinito de conjuntos de soma limitada admite um conjunto limite.

Podemos afirmar, portanto, que é sempre possível extrair uma sucessão convergente de conjuntos duma sucessão qualquer de conjuntos de soma limitada.

A doutrina dos limites de conjuntos será exposta detalhadamente no capítulo imediato. Nesse mesmo capítulo generalizaremos a definição agora dada de limite duma sucessão de conjuntos; consideraremos conjuntos quaisquer, e não sòmente conjuntos limitados.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

NOÇÃO DE ESPAÇÓIDE

I

PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

II

CONCEITO DE LIMITE DUMA SUCESSÃO DE ELEMENTOS DUM ESPAÇÓIDE

III

LUGAR DUM CONJUNTO. — CONJUNTOS FECHADOS

CAPÍTULO II

ESPAÇÓIDES COMPOSTOS

I

COMPOSIÇÃO DE ESPAÇÓIDES

II

A-PROPÓSITO DO LUGAR DUM CONJUNTO A^n

CAPÍTULO III

DISTÂNCIA ENTRE DOIS CONJUNTOS

I

DISTÂNCIA REDUZIDA ENTRE DOIS CONJUNTOS

II

DESVIO DUM CONJUNTO A A UM CONJUNTO B

III

DISTÂNCIA ENTRE DOIS CONJUNTOS

CAPÍTULO IV

ESPAÇÓIDES DE CONJUNTOS

I

LIMITES INTEGRAL E COMUM DUMA SUCESSÃO DE CONJUNTOS

II

ESPAÇAMENTO DO CONJUNTO DOS SUBCONJUNTOS LIMITADOS DE P

BEDA
NETO

TEORIA DAS FUNÇÕES

DISSERTAÇÃO