ELEMENTOS

DE

ASTRONOMIA

TOMO I

Coeli enarrant gloriam Dei, et opera manuum ejus annuntiat firmamentum.

Ps. XVIII, 2.

ELEMENTOS

DE

ASTRONOMIA

PELO CONSELHEIRO

RODRIGO RIBEIRO DE SOUSA PINTO

LENTE DE PRIMA JUBILADO DA FACULDADE DE MATHEMATICA
E DIRECTOR DO OBSERVATORIO ASTRONOMICO
DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

TOMO I

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1873

PRIMEIRA PARTE

ADVERTENCIA

No meio do anno de 1866 estava impresso o mais essencial das duas primeiras partes d'esta obra, e da terceira a theoria da Lua, quando a urgencia de outros trabalhos astronomicos me obrigou a interromper a impressão.

Agora que me é possivel continual-a, publico o primeiro volume; ajuntando-lhe em supplemento o que para isso tinha reservado da primeira edição, e o que me pareceu conveniente accrescentar.

Para evitar repetições, colloquei o que diz respeito ás leis do movimento diurno nos proprios logares onde se descrevem os instrumentos de cujo uso resulta a demonstração d'ellas.

Na descripção dos instrumentos tive as mais das vezes presentes os do Observatorio de Coimbra; notando porem as principaes modificações que ulteriormente receberam.

Espero que este trabalho, alem de servir para a cadeira respectiva, não será inutil aos astronomos. Mas para estes não dispensará a leitura de tractados astronomicos mais extensos, e de memorias especiaes e noticias; como são os seguintes, que mais vezes consultei: a *Astronomia* de Biot, 3.ª edição; a *Astronomia* de Brunnow, traduzida pelos srs. Wolf, André e Lucas; as *Memorias* e *noticias mensaes* da Sociedade astronomica de Londres; e a introducção ao primeiro volume das *Observações astronomicas* do Observatorio naval de Washington.

Coimbra, 3 de janeiro de 1873.

Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto.

ADVERTENCIA

No meio do anno de 1866 estava impresso o mais essencial das duas primeiras partes d'esta obra, e da terceira a theoria da Lua, quando a urgencia de outros trabalhos astronomicos me obrigou a interromper a impressão.

Agora que me é possivel continual-a, publico o primeiro volume; ajuntando-lhe em supplemento o que para isso tinha reservado da primeira edição, e o que me pareceu conveniente accrescentar.

Para evitar repetições, colloquei o que diz respeito ás leis do movimento diurno nos proprios logares onde se descrevem os instrumentos de cujo uso resulta a demonstração d'ellas.

Na descripção dos instrumentos tive as mais das vezes presentes os do Observatorio de Coimbra: notando porém as principaes modificações que ulteriormente receberam.

Espero que este trabalho, alem de servir para a cadeira respectiva, não será inutil aos astronomos. Mas para estes não dispensará a leitura de tractados astronomicos mais extensos, e de memorias especiaes e noticias; como são os seguintes, que mais vezes consultei: a *Astronomia* de Biot, 3.ª edição; a *Astronomia* de Brunnow, traduzida pelos srs. *Woll*, André e Lucas; as *Memorias* e noticias mensaes da Sociedade astronomica de Londres; e a introducção ao primeiro volume das *Observações astronomicas* do Observatorio naval de *Washington*.

Coimbra, 3 de janeiro de 1873.

Rodrigo Ribeiro de Sousa Pinto.

ELEMENTOS DE ASTRONOMIA

PRIMEIRA PARTE

CAPITULO I

Primeiras noções

I Todos sabem que o *Sol*, depois de *nascer* no *Oriente*, se eleva de manhan sôbre o *horizonte*, com um movimento que vae decrescendo até se tornar insensivel ao meio dia; e que de tarde desce para o horizonte, com um movimento successivamente maior, até chegar ao seu *occaso* no *Occidente*.

Se algum tempo depois do occaso do sol, quando, pela diminuição da claridade do dia e approximação da noite, começa o ceu a mostrar-se povoado de *estrellas*, nos collocarmos em um logar eminente, veremos; que, emquanto alguns d'estes *astros* descem para a parte do horizonte occidental, outros sobem da parte do horizonte oriental: que todos seguem 'nestes movimentos a mesma ordem que se observára no do sol; e que, durante elles, conservam quasi todos entre si a mesma disposição relativa, e a mesma configuração dos grupos ou *constellações* em que, desde mui remota antiguidade, os astronomos os têm dividido.

Se, durante cada noite, seguirmos o curso das diversas estrellas, collocando-nos de modo que fique o oriente á nossa direita, o occidente á esquerda, o *norte* dè fronte, e o *sul* para traz de nós: conheceremos que ellas se demoram tanto mais sôbre o horizonte, e que o seu movimento no ceu é tanto mais lento, quanto mais proximas estão da estrella *polar* ou do *norte*, pertencente á constellação *boreal* chamada *Ursa maior*, ou *Barca;* que esta estrella parece immovel; e que as vizinhas d'ella não chegam a esconder-se debaixo do horizonte.

Emfim, nas noites de luar veremos a *Lua*, em qualquer das suas *phases* ou variações do crescente luminoso, seguir um curso similhante na parte do ceu onde a podemos observar.

Terminada a noite, reproduz-se, durante as vinte e quatro horas seguintes, a mesma serie de phenomenos que fica descripta.

2. Parece pois que todos os astros, de que havemos fallado, têm um movimento diurno em volta de um eixo, que passa pelo *polo do norte* ou *boreal*, e que a analogia e as observações nos fazem suppor prolongado até o *polo do sul* ou *austral* na parte opposta do ceu; que este gyro é na direcção e sentido d'oriente para occidente; que, para nós, a sua parte visivel sôbre o horizonte é tanto maior quanto menos distam as estrellas do polo boreal, e a sua parte invisivel tanto maior quanto menos distam as estrellas do polo austral; e finalmente que 'nelle os astros descrevem arcos, cujos planos são parallelos, e cujos raios são tanto menores quanto mais proximos ficam dos polos: como se toda a esphera celeste volvesse com um movimento de rotação em torno d'aquelle eixo, obliquo ao nosso horizonte.

3. Se observarmos mais attentamente os occasos das estrellas posteriores aos do sol e os nascimentos anteriores, acharemos que o sol se vae atrazando relativamente a ellas; sendo proximamente 4^m por dia, ou 2^h por mez, o valor medio d'este atrazamento: o que dá logar á diversidade das constellações, que são visiveis nas differentes epochas do anno; e á diversidade das alturas em que 'nellas se vêem á mesma hora as estrellas das constellações boreaes que não têm occaso. Por tanto o sol parece ter um *movimento proprio* d'occidente para oriente, cujo periodo é d'um anno.

O mesmo acontece a respeito da lua; sendo de mais de $\frac{3}{4}$ d'hora por dia, ou de 24^h por mez, o atrazamento medio do seu nascimento e do seu occaso. Portanto a lua parece ter um movimento proprio d'occidente para oriente, cujo periodo é de quasi um mez; movimento que tambem se conhece no ceu pelas mudanças de posição d'este astro relativamente ás estrellas.

Finalmente, entre as estrellas ha algumas que tomam o nome de *planetas*, ou *estrellas errantes*, porque mudam de logar relativamente ás outras, de modo que parecem mover-se no sentido *directo* do occidente para oriente, atrazando-se os seus nascimentos e occasos; depois ficar por algum tempo *estacionarias;* e emfim mover-se em sentido *retrogrado* de oriente para occidente, adiantando-se os seus nascimentos e occasos: ou inversamente. No entretanto mais tarde veremos que, apezar da diversidade apparente do sentido do movimento proprio dos planetas, este movimento tem sempre logar na realidade de occidente para oriente, em volta do sol (*a*).

4. Os nascimentos, occasos, e culminações das estrellas sempre correspondem, para cada logar d'observação, aos mesmos pontos. Mas, relativamente ao sol, á lua e aos planetas, o nascimento e o occaso correspondem a pontos que mudam successivamente de norte para sul, ou de sul para norte, sendo as suas digressões contidas dentro de limites mais ou menos estreitos; e no mesmo sentido variam as suas culminações.

Éstas digressões tornam-se mais sensiveis pelo intervallo de tempo que dura a porção visivel do curso diurno de cada astro, desde o seu nascimento até o seu occaso. Por exemplo, os *dias* proximos de 22 de Junho, no extremo boreal da digressão do sol, ou *solsticio de estio,* têm mais quasi tres horas do que os proximos de 22 de março e 22 de setembro, nos logares medios, ou *equinoccios da primavera* e *do outomno*; e'nestes têm mais quasi tres horas do que em 22 de dezembro, no extremo austral da digressão, ou *solsticio d'inverno:* de sorte que a variação total dos dias entre os dois solsticios é $5^h \frac{3}{4}$ proximamente. A mesma variação tem logar, em sentido contrário, relativamente ás noites.

5. Dos dois numeros precedentes resulta que os movimentos proprios do sol, da lua e dos planetas, participando principalmente da direcção d'occidente para oriente, e alguma cousa de norte para sul, ou de sul par norte, parecem ser em direcções obliquas a estas duas, porém mais proximas da primeira.

Observações mais exactas mostrarão com effeito que: o movimento proprio do sol tem logar no plano da *Ecliptica*, inclinado de 23° 27′ proximamente ao *Equador*, isto é, ao plano do circulo diurno que o sol descreve nos dias dos equinoccios; o da lua em um plano inclinado de

(*a*) Os planetas antigamente conhecidos eram: Mercurio, Venus, Marte, Jupiter e Saturno; dos quaes os quatro ultimos se vêem muito bem; e o primeiro difficilmente, pela sua proximidade do sol. No fim do seculo passado descobriu-se Herschel ou Urano, que se vê com difficuldade por causa da grande distancia a que está de nós: e no principio do seculo actual descobriram-se Ceres, Pallas, Juno e Vesta; que se chamam telescopicos, por ser necessario para os observar um bom telescopio, em razão da sua pequenez. Além d'estes conhecem-se hoje Neptuno, e muitos pequenos planetas de que adiante daremos noticia.

••

pouco mais de 5° á ecliptica; os dos planetas mais antigos, e de muitos dos outros, em planos tambem pouco inclinados á ecliptica, e comprehendidos em uma zona de menos de 10° chamada *Zodiaco;* e os d'alguns dos telescopicos em planos mais obliquos.

6. Emfim, de quando em quando apparecem no ceu os *cometas*: astros pouco brilhantes, cuja luz augmenta até certos limites, e depois diminue até desapparecer; que são acompanhados d'uma nebulosidade, ou tambem d'uma especie de cauda luminosa; e cujo movimento proprio entre as estrellas é muito variavel, sem ter o sentido determinado que apresenta constantemente o movimento dos planetas.

7. Em quanto ás distancias a que estão os astros, notaremos que as estrellas, vistas com os melhores telescopios, não apresentam *diametro apparente* sensivel: e que os diametros apparentes dos planetas e do sol augmentam sensivelmente, e mais ainda o da lua. Além d'isso algumas vezes os planetas occultam-nos as estrellas; e a lua occulta-nos as estrellas, os planetas, e o disco do sol, todo ou em parte; sem que aconteça nunca o inverso.

D'onde resulta que as estrellas estão a distancias prodigiosamente grandes de nós; o sol e os planetas a distancias menores: e a lua ainda mais proxima; apezar de vermos todos estes corpos como projectados na esphera apparente, que se costuma chamar *abobada celeste*, ou céu.

8. Tendo feito a resenha dos astros que o primeiro exame do ceu nos mostrou, devemos proceder a observações mais exactas, que tornem preciso o que por ora é vago, e corrijam os erros a que as apparencias nos podem ter levado: a fim de estudar o que respeita aos movimentos, e ás dimensões dos corpos celestes. Este estudo é o objecto da *Astronomia.*

Mas, como as observações têm de fazer-se em alguns dos pontos da terra, devemos antes proceder á investigação, ainda que imperfeita, da figura e dimensões d'este corpo.

CAPITULO II

Da terra

9. Ao viajante, que segue qualquer direcção, não desapparecem instantaneamente os montes e edificios, de que se vae affastando; mas tornam-se successivamente invisiveis as suas diversas partes, desde a base até o cume.

Se a viagem é na direcção d'oriente ou d'occidente, os nascimentos e occasos do sol e das estrellas vão correspondendo a objectos differentes; e se é na direcção de norte ou de sul, vão elevando-se as constellações boreaes e o polo boreal, e abatendo-se as constellações austraes e o pólo austral, ou inversamente.

A redondeza da terra, que estes phenomenos indicam, comprova-se pelas viagens maritimas feitas nas direcções d'occidente e oriente e de norte e sul. A primeira d'estas viagens foi emprehendida pelo nosso compatriota Fernando de Magalhaens, que, partindo d'um porto de Hespanha na direcção d'occidente, costeou a America, passou para o mar pacifico pelo estreito que depois se chamou de Magalhaens, continuou na mesma direcção até as Philippinas; e depois o seu navio, dobrando o cabo da Boa-Esperança, voltou á Europa, como se tivesse partido do oriente.

O mesmo confirmam os *eclipses da lua*, produzidos pela entrada d'este corpo no cone de sombra que a intercepção dos raios solares projecta de traz da terra: porque a linha, que separa a parte eclipsada da illuminada, é uma curva que volta a concavidade para a sombra. Mostra-se com effeito, pela correspondencia que nas phases da lua ha constantemente entre a grandeza e posição do crescente luminoso e a posição do sol, que ella é opaca, e que o seu brilho é devido á reflexão dos raios solares.

10. Se da eminencia O (Fig. 1), collocada em um horizonte livre, virmos os pontos extremos P,Q..., ou, inversamente, se dos pontos P,Q,... virmos só o cume da altura MO; e se determinarmos as distancias d'estes pontos a O: acharemos que P,Q,... são equidistantes de O, ao menos proximamente; e que os angulos POQ,..., medidos com o *sector de depressão*, são eguaes. Por conseguinte o cone circumscripto á superficie

terrestre é circular e recto. O que tambem se póde concluir de serem eguaes os angulos feitos pelos raios visuaes extremos PO,QO,... com o *fio a prumo*, ou os seus complementos, que são os *angulos de depressão*. E como acontece o mesmo, sem differença attendivel, em todos os logares onde podem fazer-se éstas observações, segue-se que a terra é espherica, ao menos proximamente.

É verdade que a superficie terrestre está coberta de montanhas, que difficilmente permittem fazer 'nella taes observações, e que parecem alterar a figura espherica. Mas notando que por toda a parte os mares se insinuam nos continentes, e communicam uns com os outros, sem que as margens sejam muito elevadas; que os grandes rios são navegaveis; e que as marés sobem 'nelles a grandes distancias das suas fozes: concebe-se que os continentes seguem na sua configuração geral a convexidade dos mares. E com effeito, a medição das maiores alturas do globo, e a determinação do raio terrestre, mostram que as montanhas, por mais elevadas que pareçam, são de pouca importancia quando se comparam com as dimensões do globo terrestre.

11. Supponhamos que se observa com o sector de depressão o angulo POQ $=2\theta$, constante para cada ponto O, e que se mede a altura MO por um nivelamento barometrico ou trigonometrico: e seja CP $=r$ o raio da terra, supposta espherica. O triangulo COP dá:

$$r=\frac{h\ \text{sen}\,\theta}{1-\text{sen}\ \theta}=\frac{h}{2\ \text{sen}^2\frac{1}{2}(90^\circ-\theta)}-h=\frac{h}{2\ \text{sen}^2\frac{1}{2}i}-h.$$

Assim (Cosmogr. de Faye, pag. 11), para $2\theta=179^\circ\ 29'$ e $h=75^m$, será $r=7400000^m$.

Ou tambem supponhamos que sôbre uma superficie horizontal se collocam duas estacas eguaes OP e O′P′ (Fig. 2), em distancia tal, que da extremidade d'uma não se veja senão a extremidade da outra, isto é, que a recta, que une éstas extremidades, toque a superficie terrestre em M. Chamando OO′$=2d$ a distancia das estacas, que suppomos medida, OP $=$ O′P′$=h$ a grandeza d'ellas, e CP $=r$ o raio da terra, é:

$$d^2=h\ (2r+h),\ \text{ou}\ r=\frac{d^2}{2h}-\frac{1}{2}h.$$

Por exemplo (Astron. de Herschel, n.° 28) para $h = 3^m,048$ e $2d = 12874^m,52$ será $r = 6797623^m$.

Na primeira d'estas formulas o erro de θ inflúe muito em r, por ser 2θ pouco differente de $180°$; e na segunda inflúe muito o êrro de d, por ser $\frac{d}{h}$ muito grande (*a*). Por tanto os effeitos da refracção, e a sua incerteza na proximidade do horizonte, devem influir gravemente na determinação de r obtida por estes dois meios, a qual não póde tomar-se senão como uma approximação imperfeita.

Por operações e calculos feitos com o maior escrupulo, como a Geodesia ensina, achou-se o raio médio da terra $r = 6366198^m$.

A altura 8500^m do *Dwalagiri*, uma das maiores do globo, é apenas $\frac{1}{749}$ do raio terrestre.

12. Sendo a terra proximamente espherica, a gravidade deve dirigir-se para o centro d'ella; e como este ponto fica a uma distancia dos diversos corpos d'um logar terrestre muito superior á que os separa uns dos outros, podemos dizer que, em cada logar da terra ou em logares proximos, os corpos gravitam por direcções parallelas. É o que a experiencia confirma: por quanto, suspendendo diversos graves por fios muito finos e flexiveis, acha-se que estes fios estão sempre dois e dois no mesmo plano visual, e que são sensivelmente equidistantes em toda a sua extensão; conseguintemente todos concorrem em um ponto collocado a uma distancia finita muito grande, ou no infinito.

A direcção da gravidade deve ser normal á superficie das aguas tranquillas, para que seja nulla a sua componente tangencial e haja equilibrio. O que tambem confirma a experiencia: porque mostra que a imagem

(*a*) É o que mostram as expressões differenciaes: vide pag 216

$$\delta r = \frac{h \cot \frac{1}{2} i}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i} \delta\theta \operatorname{sen} 1' + \frac{h\,(1 + 3 \cot^2 \frac{1}{2} i)}{8 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i} \delta\theta^2 \operatorname{sen}^2 1' + \ldots;$$

$$\delta r = \frac{d}{h} \delta h + \ldots$$

No primeiro exemplo é $\delta r = 952081\,\delta\theta + 90039\,\delta\theta^2 + 7926\,\delta\theta^3 + \ldots$ e por isso basta suppor $\delta\theta = 1'$ para explicar o erro de r.

No segundo exemplo é $\delta r = 2112\,\delta d$.

formada pela reflexão de qualquer dos fios, de que acabâmos de fallar, na superficie da agua contida 'num vaso largo, fica sempre no prolongamento do mesmo fio; ou que os fios e as suas imagens estão sempre dois e dois no mesmo plano visual.

D'estas experiencias resulta que, nos logares onde ellas se fazem, as direcções da gravidade concorrem sensivelmente em um ponto, e são normaes á superficie terrestre; por conseguinte esta superficie é espherica nos mesmos logares. O que concorda com a forma que no n.º 10 attribuimos á terra.

13. O apparelho assim composto d'um grave suspenso por um fio chama-se *fio a prumo*, ou *prumo;* a direcção do fio é a *vertical* do logar; e os pontos onde esta vertical produzida se suppõe encontrar a abobada celeste, um acima, outro abaixo do horizonte, chamam-se respectivamente *zenith* e *nadir*.

Qualquer plano que passe pela vertical chama-se *vertical*. Entre os verticaes distinguem-se: o *meridiano*, que passa pelos pólos; e o *primeiro vertical*, que é perpendicular ao meridiano. Passando a vertical pelo centro da terra, todos estes planos passam pelo mesmo ponto.

O *equador* (n.º 5) passa pelo centro da terra e é perpendicular ao eixo de rotação.

As tangentes OP,OQ,... á superficie terrestre (Fig. 3), tiradas por um ponto O elevado acima d'esta superficie e terminadas 'nella, determinam o *horizonte apparente* de O; o plano HOH', perpendicular á vertical CZ é o *horizonte racional* ou simplesmente *horizonte*; e o angulo $HOP = i$ é a *depressão do horizonte*.

É claro que o horizonte racional d'um logar, com qualquer dos seus verticaes, fórma sempre um systema de planos rectangulares; e que o equador, com qualquer dos meridianos, fórma outro systema rectangular.

Em fim, se pelo centro da terra imaginarmos tirado um eixo perpendicular á ecliptica (n.º 5), o seu prolongamento determinará na abobada celeste os *pólos da ecliptica*; e a ecliptica, com qualquer dos planos que passam pelo seu eixo, formará tambem um systema de planos rectangulares.

D'onde resultam os diversos systemas de coordenadas dos astros, de que tractaremos no capitulo seguinte.

CAPITULO III

Das coordenadas dos astros

14. Se em qualquer logar da terra tomassemos por eixos coordenados o traço do meridiano sôbre o horizonte, que se chama *meridiana*, a *perpendicular á meridiana*, e a *vertical*, poderiamos referir a estes eixos a posição de qualquer astro. A meridiana encontra a esphera celeste nos pontos *norte* e *sul*, que são as projecções esphericas dos polos boreal e austral sôbre o horizonte; e a perpendicular encontra a esphera celeste nos pontos *éste* e *oéste*. O *norte*, o *sul*, o *éste* e o *oéste* chamam-se pontos cardeaes.

Mas como no céu medimos somente os angulos feitos pelos raios visuaes dos astros uns com os outros, ou com rectas que se dirigem a pontos conhecidos da esphera celeste, devemos preferir o uso das coordenadas polares.

15. Suppondo conhecida a posição do meridiano, por meios que adiante indicaremos, ficará determinada a direcção do raio visual de qualquer astro, ou a projecção visual d'este astro na esphera celeste, quando se tiverem: o *azimuth*, angulo feito pelo plano vertical do astro com o meridiano, ou tambem a *amplitude*, complemento d'este angulo; e a *distancia zenithal*, angulo feito pela vertical com a direcção do astro, ou tambem a *altura* sôbre o horizonte, complemento d'aquella distancia.

E porque o zenith é polo do horizonte, mede-se o azimuth pelo angulo que o traço horizontal do plano vertical do astro faz com a meridiana. Este angulo conta-se ordinariamente a partir do norte, para o oriente ou para o occidente.

16. A intersecção da ecliptica com o equador, que se chama *linha dos equinoccios*, encontra a esphera celeste no ponto d'*aries* ou equinoccio da primavera, e no de *libra* ou equinoccio d'outomno. Suppondo conhecida esta intersecção, ficará tambem determinada a projecção do astro na esphera celeste, quando se tiverem: a sua *ascensão recta*, angulo feito pelo meridiano ou plano horario, que passa por aries, com aquelle que passa pelo astro; e a *declinação*, distancia do astro ao equador tomada sôbre o seu circulo meridiano, o qual tambem se chama *circulo de declinação*.

A ascensão recta tem por medida o arco do equador comprehendido entre o ponto d'aries e a projecção espherica do astro sôbre este círculo, contando do occidente para o oriente.

17. Finalmente tambem ficará determinada a projecção do astro quando se conhecerem: a *longitude*, angulo feito pelos dois circulos maximos, um dos quaes contém aries, outro o astro, e ambos o polo da ecliptica; e a *latitude*, distancia do astro á ecliptica tomada sôbre o círculo que contém o polo da ecliptica e o astro, o qual se chama *círculo de latitude*.

A longitude tem por medida o arco da ecliptica comprehendido entre o ponto d'aries e a projecção espherica do astro sôbre este círculo, contando de occidente para oriente.

18. Qualquer dos tres systemas: *azimuth* e *distancia zenithal*, *ascensão recta* e *declinação*, *longitude* e *latitude:* determina completamente a projecção do astro na esphera celeste; faltando somente conhecer a distancia á terra para fixar a sua posição no espaço. Mas, como é muitas vezes necessario transformar estas coordenadas umas nas outras, vejamos o modo de o fazer.

Sejam P, P′ (Fig. 4) os polos dos dois systemas, por exemplo o zenith e o polo do equador, ou o zenith e o polo da ecliptica, ou os polos do equador e da ecliptica; IE, IE′ os dois circulos correspondentes; *I* uma extremidade da intersecção respectiva, isto é, do traço do equador sôbre o horizonte, ou do traço da ecliptica sôbre o horizonte, ou da linha dos equinoccios; e *S* a projecção do astro na esphera celeste.

Chamaremos $IQ'=\alpha$, $SQ'=6$, as duas coordenadas do primeiro systema; $IQ=a$, $SQ=b$, as do segundo systema; e $E'IE=PP'=i$ a inclinação dos dois circulos IE, IE′. Por serem P′ e P polos de IE′ e IE respectivamente, são P′I e PI arcos de 90°; conseguintemente são I polo de P′P, os arcos IE′ e IE de 90°, e os angulos IP′E′ e IPE rectos. Temos, pois, no triangulo PP′S as seguintes partes:

$$P'P=i,\ P'S=90^\circ-\beta,\ PS=90^\circ-b,\ PP'S=90^\circ-\alpha,\ P'PS=90^\circ+a.$$

E o triangulo dá

$$\text{tang}\, a=\frac{\text{sen}\,\alpha\cos i-\text{tang}\,6\,\text{sen}\, i}{\cos\alpha},\ \text{sen}\, b=\text{sen}\,\alpha\cos 6\,\text{sen}\, i+\text{sen}\, 6\cos i\,..\,(1)$$

$$\tang \alpha = \frac{\operatorname{sen} a \cos i + \tang b \operatorname{sen} i}{\cos a}, \ \operatorname{sen} \beta = -\operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen} i + \operatorname{sen} b \cos i \ldots (2),$$

$$\cos a \cos . b = \cos \alpha \cos . \beta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

As formulas (1) e (2) são inteiramente analogas, menos em quanto ao signal de i.

As primeiras dão a e b quando se conhecem α, β, i; as segundas dão α e β, quando se conhecem a, b, i: ou tambem, achada uma das coordenadas por uma d'estas formulas, a equação (3) dá a outra.

19. Para accommodar as formulas (1) ao calculo logarithmico, façamos $\operatorname{sen} \alpha \cot \beta = \cot \varphi$; e similhantemente para as formulas (2) façamos $\operatorname{sen} a \cot b = \cot \psi$. Resultarão os systemas:

$$(4) \quad . \cot \varphi = \operatorname{sen} \alpha \cot \beta, \ \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos(\varphi + i)}{\cos \varphi}, \ \operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}(\varphi + i)}{\operatorname{sen} \varphi};$$

$$(5) \ldots \cot \psi = \operatorname{sen} a \cot b, \ \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a \cos(\psi - i)}{\cos \psi}, \ \operatorname{sen} \beta = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen}(\psi - i)}{\operatorname{sen} \psi}.$$

Se dividirmos a equação (3) pela primeira das equações (4), o que dará $\operatorname{sen} \beta \cot \alpha = \cos a \cos b \operatorname{tg} \varphi$, e depois eliminarmos $\operatorname{sen} \beta$ e $\cot \alpha$ entre esta equação e as duas ultimas de (4); e similhantemente a respeito de (3) e das duas ultimas de (5); resultarão os systemas:

$$(6) \ldots \cot \varphi = \operatorname{sen} \alpha \cot \beta, \ \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cos(\varphi + i)}{\cos \varphi}, \ \operatorname{tg} b = \operatorname{sen} a \operatorname{tg}(\varphi + i);$$

$$(7) \ldots \cot \psi = \operatorname{sen} a \cot b, \ \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a \cos(\psi - i)}{\cos \psi}, \ \operatorname{tg} \beta = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg}(\psi - i);$$

que são muito commodos, quando se querem calcular ambas as coordenadas a e b, ou α e β.

As equações (7) são as mesmas que as (6) escriptas em ordem inversa, mudando $\varphi + i$ em ψ: ou são as mesmas que as (6) escriptas na mesma ordem, mudando respectivamente φ, α, β, i em ψ, a, b, $-i$ (a).

20. Cumpre advertir que, se usamos das tábuas de logarithmos, é necessario na practica empregar cautelosamente estas fórmulas, ou outras quaesquer, examinando a influencia que os desprezos das tábuas podem ter nas quantidades que se procuram (v. o calc. nas Ephem. de Coimbra pag. 43). Entenda-se porém que, nos casos excepcionaes em que não basta a primeira potencia dos desprezos para calcular esta influencia, se devem aproveitar as superiores, ou recorrer á inspecção das tabuas; como fizemos na nota da pagina 7.

21. Se a origem, a que se referem as coordenadas primitivas, ou as transformadas, não é a intersecção I, será necessario determinar as coordenadas de I relativamente a essa origem, para que se possa usar das formulas precedentes.

Ordinariamente querem converter-se as longitudes e latitudes em ascensões rectas e declinações, e inversamente; ou os azimuths e distancias zenithaes em ascensões rectas e declinações, e inversamente.

No primeiro caso são:

$$a = \mathrm{AR},\ b = \mathrm{DC},\ \alpha = \text{long.},\ \beta = \text{lat.},\ i = \text{obl. da eclipt.} = \omega.$$

No segundo caso são:

$$a = \mathrm{A} - 90^\circ,\ b = 90^\circ - z,\ \alpha = 90^\circ - \mathrm{P},\ \beta = \mathrm{DC},\ i = \mathrm{D}:$$

representando P o angulo horario, $\pm(\mathrm{M} - \mathrm{AR})$; A o azimuth contado

(a) Se nos servissemos dos triangulos rectangulos ISQ, ISQ′, achariamos que ISQ′ dava logo a primeira das equações (6); que a comparação das expressões de cot SI tiradas dos dois triangulos dava a segunda das mesmas equações; e que ISQ dava logo a terceira. E veriamos assim que φ e ψ são, respectivamente, os angulos ~~I~~SQ′ e ~~I~~SQ (Calc. das Ephem., n.º 42).

…titude do logar, isto é, a distancia
…scensão recta do meridiano (a).

Pela tangente
$d\varphi < 0'',0118735$
Pelo seno
$d\alpha <$ tang $\alpha \times 6,023$

…$= 90° - \alpha$.

…a um exemplo.
…itude e a latitude geocentricas de
…$= + 1°.24'.46'',8$; e a obliqui-
…,4. Teremos pois o typo seguinte,
…censão recta a e a declinação d:

log. tg α *cl* cos φ …og. cos $(\varphi + \omega)$ …og tg a a	log. tg $(\varphi + \omega)$ log. sen a log. tg d d
9.8340071— 0.0004155 9.9538014 0.7882240— …148°.26'.48'',5	9.6874460 9.7187423 9.4061883 +14°.17'.40'',0

…mente um no outro os systemas d'azi-
…atitudes, facilmente mostra a figura (6),

…$\frac{\text{…} \operatorname{sen} A}{\text{…} A}$, $i = 90° - A$,

…$= -90° + A - hh'$,

…$= 90° - z$;

…zenith.

que são muito commodos, q … rde-
nadas a e b, ou α e β.

As equações (7) são as … in-
versa, mudando $\varphi+i$ em ψ … s na
mesma ordem, mudando res… i (a).

20. Cumpre advertir q … os, é
necessario na practica empre … utras
quaesquer, examinando a i … odem
ter nas quantidades que se … mbra
pag. 43). Entenda-se porém … basta
a primeira potencia dos des … devem
aproveitar as superiores, ou … fize-
mos na nota da pagina 7.

21. Se a origem, a q … s, ou
as transformadas, não é a … nar as
coordenadas de I relativame … ar das
formulas precedentes.

Ordinariamente querem … es em
ascensões rectas e declinaç … distan-
cias zenithaes em ascensões

No primeiro caso são:

$$a = \mathrm{AR},\ b = \mathrm{DC},\ \alpha = \ldots \omega.$$

No segundo caso são:

$$a = \mathrm{A} - 90°,\ b = 9 \ldots$$

representando P o angulo … contado

(a) Se nos servissemos … amos que
ISQ' dava logo a primeira das … essões de
cot SI tiradas dos dois triang … ; e que
ISQ dava logo a terceira. E … mente, os
angulos ISQ' e ISQ (Calc. d …

do norte; z a distancia zenithal; D a colatitude do logar, isto é, a distancia do polo do equador ao zenith; e M a ascensão recta do meridiano (*a*).

Com effeito, temos (Fig. 5)

$$Z = 90° + a = A, \quad P = 90° - \alpha.$$

22. Appliquemos as fórmulas (6) a um exemplo.

No dia 5 de julho de 1863 a longitude e a latitude geocentricas de Venus serão $\alpha = 145°.41'.32'',4$ e $\beta = +1°.24'.46'',8$; e a obliquidade da ecliptica será $\omega = 23°.27'.21'',4$. Teremos pois o typo seguinte, e o calculo respectivo, para achar a ascensão recta a e a declinação d:

β	log. tg β	log. tg α	log. tg $(\varphi + \omega)$
α	*cl* sen α	*cl* cos φ	log. sen a
φ	log. tg φ	log. cos $(\varphi + \omega)$	log. tg d
ω		log tg a	d
$\varphi + \omega$		a	
$+1°.24'.46'',8$	8.3921076	9.8340071—	9.6874460
145.41.32,4	0,2490008	0.0004155	9.7187423
		9.9538014	
2.30.21,0	8.6411084		9.4061883
23.27.21,4		0.7882240—	
			$+14°.17'.40'',0$
25.57.42,4		$148°.26'.48'',5$	

(*a*) Se quizermos converter directamente um no outro os systemas d'azimuths e distancias zenithaes, longitudes e latitudes, facilmente mostra a figura (6), que teremos:

$$\cos hh' = \frac{\cos \omega - \cos D \operatorname{sen} \Lambda}{\operatorname{sen} D \cos \Lambda}, \quad i = 90° - \Lambda,$$

$$\alpha = \text{long.} + 90° - L, \quad a = -90° + A - hh',$$

$$\beta = \text{latit.}, \quad b = 90° - z;$$

sendo L, Λ, a longitude e a latitude do zenith.

23. A multiplicação das primeiras das fórmulas (1) e (2) do n.º 18 pela (3) dá as duas, que muitas vezes se empregam nas transformações:

$$\left.\begin{array}{l}\cos b \operatorname{sen} a = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \cos i - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen} i\\ \cos\beta \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen} a \cos b \cos i + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} i\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Tambem são muito uteis as formulas de Neper, que dão:

$$\left.\begin{array}{l}\cot\frac{1}{2}(b+\beta) = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}i.\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+\alpha)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a-\alpha)},\\ tg\frac{1}{2}(b-\beta) = \quad tg\frac{1}{2}i.\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(a-\alpha)}.\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Estas equações resultam, pela eliminação de $\operatorname{sen}\frac{1}{2}S$, e de $\cos\frac{1}{2}S$, das quatro de Gauss:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}\frac{1}{2}(a+\alpha)\operatorname{sen}\frac{1}{2}i = \cos\frac{1}{2}S \operatorname{sen}\frac{1}{2}(b-\beta),\\ \cos\frac{1}{2}(a+\alpha)\operatorname{sen}\frac{1}{2}i = \operatorname{sen}\frac{1}{2}S\cos\frac{1}{2}(b+\beta),\\ \cos\frac{1}{2}(\alpha-a)\cos\frac{1}{2}i = \cos\frac{1}{2}S\cos\frac{1}{2}(b-\beta),\\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-a)\cos\frac{1}{2}i = \operatorname{sen}\frac{1}{2}S\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\beta+b),\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (a),$$

que podem ser uteis em questões em que entra S (*a*).

Mas, se não ha uma tábua do *nonagesimo*, que dê L e Λ, com o argumento M, é melhor converter umas nas outras as coordenadas, de que tractâmos, por intermedio das ascensões rectas e declinações.

(*a*) Das formulas (12) e (13) da *Trigonometria Espherica* (*Math. Pur.*, tom. 3.º) applicadas a A, B, C, resultam

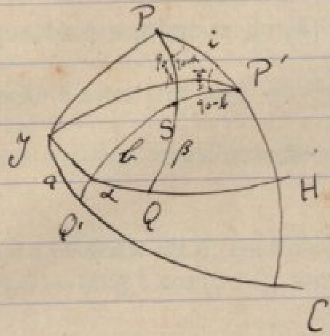
$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B \pm \operatorname{sen}\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}\Delta = \cos\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen}(p-b)\pm\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} c},$$

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B \mp \operatorname{sen}\frac{1}{2}B\operatorname{sen}\frac{1}{2}A = \operatorname{sen}\frac{1}{2}C\,\frac{\operatorname{sen} p \mp \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} c},$$

que dão as expressões de $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)$, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)$, $\cos\frac{1}{2}(A+B)$, $\cos\frac{1}{2}(A-B$, chamadas formulas de Gauss.

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen}(p-b)\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c} \qquad \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

$$2p = a + b + c$$



$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B) = \cos\frac{1}{2} C \; \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c \cdot \cos\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} c}$$

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha - a) = \cos\frac{1}{2} S \; \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}i \cdot \cos\frac{1}{2}(b-\beta)}{\operatorname{sen} i} = \cos\frac{1}{2} S \; \frac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}i \cdot \cos\frac{1}{2}(b-\beta)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}i\cos\frac{1}{2}i}$$

$$\cos\frac{1}{2}(\alpha - a)\cos\frac{1}{2} i = \cos\frac{1}{2} S \cos\frac{1}{2}(b-\beta)$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}, \quad \operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\cos\varphi} = \operatorname{tang}\theta \qquad \cot\varphi = \operatorname{sen}\alpha\cot\beta$$

$$\operatorname{tang}^2\varphi = \frac{\operatorname{tang}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1 = \frac{\operatorname{tang}^2\theta}{\operatorname{tang}^2\alpha} - 1 \qquad \frac{\operatorname{tang}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tang}^2\theta}{\operatorname{tang}^2\alpha} - 1$$

$$\cancel{\frac{1}{\cot^2\beta} - 1} = \cancel{\frac{1}{\cos^2\theta\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 + \cos^2\alpha}$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\beta} - \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\theta} + 1 = 0 = \operatorname{sen}^2\beta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\alpha\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\theta\cos^2\beta$$

etc.

A eliminação de $\operatorname{sen}\frac{1}{2}i$, e de $\cos\frac{1}{2}i$, daria as outras duas formulas de Neper.

24. Se na segunda das formulas (4) fizermos $\frac{tg\, a}{\cos\varphi} = tg\,\theta$, a eliminação de φ entre esta equação e a primeira de (4) dará $\cos\theta = \cos\alpha\,\cos\beta$; e depois a combinação d'estas tres dará $\operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\varphi}$.

Do que resulta a seguinte transformação de (4):

$$(10)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\cot\varphi = \operatorname{sen}\alpha\cot\beta,\ \cos\theta = \cos\alpha\cos\beta,\\ \operatorname{tang} a = \operatorname{tang}\theta\cos(\varphi+i),\ \operatorname{sen} b = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\varphi+i);\end{array}\right.$$

e similhantemente a de (5):

$$(10)'\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\cot\psi = \operatorname{sen} a\cot b,\ \cos\theta' = \cos a\cos b,\\ \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\theta'\cos(\psi-i),\ \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}(\psi-i).\end{array}\right.$$

25. Finalmente poderemos tambem combinar a primeira e a última das equações (4) e das equações (6), ou das equações (5) e das equações (7); o que dá os systemas:

$$\left.\begin{array}{l}\cot\varphi = \operatorname{sen}\alpha\cot\beta,\ \operatorname{sen} b = \dfrac{\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\varphi+i)}{\operatorname{sen}\varphi},\ \operatorname{sen} a = \operatorname{tg} b\cot(\varphi+i),\\ \cot\psi = \operatorname{sen} a\cot b,\ \operatorname{sen}\beta = \dfrac{\operatorname{sen} b\operatorname{sen}(\psi-i)}{\operatorname{sen}\psi},\ \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\beta\cot(\psi-i)\end{array}\right\}\ldots(11).$$

Segundo as circumstancias do problema de transformação, que tivermos de resolver, assim poderá convir uma ou outra das combinações indicadas nos n.os 18, 19, 23, 24, 25, que mais usualmente se empregam.

CAPITULO IV

Da atmosphera

26. A terra é por toda a parte cercada por um fluido raro, transparente, pesado, compressivel e elastico, que se chama *ar atmospherico* e constitue a *atmosphera*.

Este fluido, repercutindo, e disseminando pelo espaço, muitos raios solares, torna visiveis os objectos que, por não emittirem luz propria nem reflectida, ficariam d'outro modo invisiveis. E póde tornar sensivel a luz dos astros, quando ainda não apparecem sôbre o horizonte, ou quando já têm descido abaixo d'elle, em virtude dos raios que reflectindo-se nas camadas atmosphericas, se dirigem depois ao observador: phenomeno este que se chama *crepusculo*.

27. As observações meteorologicas e crepusculares mostram que a altura da atmosphera não chega á centesima parte do raio terrestre, ou a doze leguas proximamente. Para apreciar o limite d'esta altura, temos as seguintes indicações:

1.° A densidade da atmosphera diminue ao passo que 'nella nos elevamos. Ora, chamando (ρ) esta densidade ao nivel do mar e Δ a do mercurio, l e h as alturas de duas columnas fluidas, de densidades uniformes e eguaes respectivamente a (ρ) e Δ, que se equilibrassem, temos

$$l = h\frac{\Delta}{(\rho)};$$

o que, em París na temperatura do gêlo fundente, dá

$$l = 0^{m},76 \times 1462 = 7951^{m},12:$$

logo a altura da atmosphera é maior que este limite.

2.° Quando o sol está 17° ou 18° abaixo do horizonte, ainda o illumina pela reflexão dos seus raios na parte superior da atmosphera: conseguintemente, desprezando o angulo S (Fig. 7), que é muito pequeno, como adiante veremos, é NCO=LAS=AOS=17°.30′, ou OCA=8°.45′:

$$\text{e} \qquad CA = \frac{r}{\cos 8^\circ.45'} = 1,01\, r;\ AM = 0,01\, r.$$

Mas o limite torna-se menor quando se suppõe, como deve suppor-se, que a illuminação resulta de muitas reflexões consecutivas. Por exemplo, se o raio SN chegasse a O por tres reflexões em E, B, F (Fig. 8), este calculo daria AM, maior que a altura BM.

3.° Para que o barometro accuse $0^m,001$ de pressão atmospherica, como no vacuo das melhores machinas pneumaticas, será necessario subir á altura 52987^m; como se vê pela formula usual dos nivelamentos barometricos:

$$\text{altura} = 18393^m \left(1 + \frac{2\,(t+t_1)}{1000}\right) \log\left(\frac{h_1}{h}\right);$$

fazendo $h = 0^m,001$, e $h_1 = 0^m,76$, e desprezando a correcção das temperaturas.

Porém o limite sería menor não desprezando esta correcção; porque as variações de temperatura, que indicam as observações meteorologicas de Gay-Lussac, Humboldt e Boussingault, fazem crer que 'nelle $t+t_1$ se tornaria negativa.

4.° A discussão das observações meteorologicas de Gay-Lussac, Humboldt e Boussingault, feita por Biot (Astron., tom. 1, n.° 98) dá a altura da atmosphera $< 47000^m$.

26. A atmosphera inflecte os raios luminosos, fazendo-os chegar ao observador por direcções differentes d'aquellas pelas quaes são emittidos, sem que 'nesta inflexão os desvie dos planos verticaes que passam pelo observador e pelos respectivos objectos.

O estudo d'esse effeito, que se chama *refracção atmospherica*, de summa importancia na astronomia, será objecto d'um capitulo especial;

e para este reservâmos tambem as noções necessarias sôbre as leis da densidade, do calor e da humidade das camadas atmosphericas. Mas, em quanto o não fizermòs, supporemos as observações, de que havemos de servir-nos, correctas da refracção, isto é, taes quaes teriam logar sem a interposição da atmosphera. O que se consegue com sufficiente approximação, como veremos, pelas fórmulas:

$$\theta = \frac{60'',666.h}{(1+0,00366\ t).\ 0,\ 76} \tang (z-3,\ 25\ \theta),\ z' = z + \theta;$$

que dão a refracção θ e a distancia zenithal correcta z', quando se conhecem a distancia zenithal observada z, e as indicações h, t, do barometro e do thermometro.

CAPITULO V

Do gnomon

27. A alguma distancia acima do pavimento colloque-se uma placa furada, de modo que entrem pelo orificio os raios solares; suspenda-se do centro do orificio um fio a prumo; e do ponto onde o prumo toca o pavimento horizontal, como centro, descrevam-se diversos circulos.

Depois notem-se os pontos onde, de manhã e de tarde, o centro da imagem projectada no pavimento toca estes circulos; e divida-se ao meio cada arco de circulo comprehendido entre dois pontos assim marcados 'nelle : os pontos de divisão devem estar em uma recta, que passa pelo centro dos circulos, e que é a *meridiana* (n.° 14). Este apparelho chama-se um *gnomon*.

28. Para o mesmo fim, se a posição do logar o permitte, póde servir um apparelho chamado *dioptro*, que se compõe d'um chapa rectangular horizontal; de duas chapas verticaes paralellas fendidas verticalmente; e de dois fios verticaes, presos em dois pontos d'estas, de modo que o seu plano seja um vertical parallelo ás faces lateraes da chapa horizontal.

Pelos dois fios verticaes, servindo de miras, enfia-se o diametro vertical do sol nos instantes do seu nascimento e do seu occaso; tiram-se duas rectas parallelas aos traços horizontaes das faces lateraes nos mesmos instantes, e divide-se ao meio o angulo d'ellas por uma recta, que será a meridiana.

29. Mas, se qualquer das operações, indicadas nos dois numeros precedentes, se faz perto d'algum dos equinoccios: como o movimento proprio de norte para sul, ou de sul para norte, é então consideravel, deve a recta, que passa pelo centro da imagem no instante d'uma observação, comparar-se com a que passaria pelo centro na observação correspondente, se não houvesse aquelle movimento, isto é, se o sol, durante o intervallo das duas observações, se conservasse no mesmo parallelo. E por isso será necessario accrescentar, ou diminuir ao angulo observado das duas rectas o feito pela primeira com a direcção, que teria a segunda, se não houvesse movimento proprio, conforme se fizerem as observações entre o solsticio de estio e o de inverno, ou entre o solsticio de inverno e o de estio.

Para achar esta correcção basta repetir no dia seguinte a observação analoga á primeira do dia precedente, e dividir o angulo das rectas respectivas a éstas observações similhantes dos dois dias na razão do intervallo das observações correspondentes do mesmo dia para o das observações similhantes nos dois dias.

Assim, nas observações de que se tracta no n.º 28, que são ordinariamente aquellas em que póde ser necessaria a correcção, se chamarmos a o angulo das rectas pertencentes aos nascimentos nos dois dias, I o intervallo entre elles, i o entervallo entre o nascimento e o occaso do primeiro dia, será $\frac{ai}{I}$ a correcção.

30. Acertado um fio muito fino na direcção da meridiana, colloca-se por baixo d'elle uma chapa horizontal, cortada por um número impar de riscos parallelos equidistantes, de modo que o fio cubra exactamente o risco do meio. A imagem do sol, formada pelos raios que passam através do orificio circular, cujo centro está no vertical da meridiana, entra pela parte occidental, e vai atravessando cada um dos riscos parallelos.

Chamemos e e s os tempos da entrada e da sahida da imagem em um risco occidental; e' e s' os tempos da entrada e da sahida em um risco oriental tão distante da meridiana como o primeiro; $2i$ o intervallo de tempo decorrido entre as duas entradas ou entre as duas sahidas correspondentes; 2θ o intervallo de tempo decorrido entre a entrada e a sahida pelo mesmo risco; e finalmente T o tempo da passagem do centro da imagem pela meridiana. Serão:

$$T = e + \theta + i,\ T = e' + \theta - i,\ T = s - \theta + i,\ T = s' - \theta - i,$$

e por conseguinte $$T = \frac{e + s'}{2},\ T = \frac{e' + s}{2}.$$

Notando pois os instantes dos contactos da imagem com cada um dos riscos, e combinando por somma a entrada em cada risco com a sahida no risco equidistante do do meio, a metade de cada uma d'estas sommas será o valor do tempo da passagem pela meridiana. E como, em virtude dos erros da observação e da inexactidão das circumstancias suppostas, éstas semisommas são quasi sempre differentes, o meio entre ellas, isto é, a sua somma repartida pelo seu número, será com mais probabilidade o tempo da passagem meridiana.

31. Sejam assim os riscos e as entradas:

Riscos (1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

Entradas $e^{(1)}$ $e^{(2)}$ $e^{(3)}$ $e^{(4)}$ $e^{(5)}$ $e^{(6)}$ $e^{(7)}$;

Sahidas $s^{(1)}$ $s^{(2)}$ $s^{(3)}$ $s^{(4)}$ $s^{(5)}$ $s^{(6)}$ $s^{(7)}$.

Teremos:

$$T = \frac{e^{(1)} + s^{(7)}}{2} = \frac{e^{(2)} + s^{(6)}}{2} = \ldots \frac{e^{(i)} + s^{(8-i)}}{2},$$

que dão $$T = \frac{\Sigma_1^7 \left(e^{(i)} + s^{(8-i)}\right)}{14}.$$

E em geral $$T = \frac{\Sigma_1^{2n+1} \left[e^{(i)} + s^{(2n+2-i)}\right]}{4n+2},$$

se é $2n+1$ o número dos riscos.

O typo seguinte facilita o processo:

Riscos	1	2	3	4	5	6	7
Entradas	$e^{(1)}$	$e^{(2)}$	$e^{(3)}$	$e^{(4)}$	$e^{(5)}$	$e^{(6)}$	$e^{(7)}$
Sahidas	$s^{(7)}$	$s^{(6)}$	$s^{(5)}$	$s^{(4)}$	$s^{(3)}$	$s^{(2)}$	$s^{(1)}$
Sommas	2 T	2 T	2 T	2 T	2 T	2 T	2 T

$$\text{meio} = \frac{\Sigma\, 2\,T}{14}.$$

Para mais segurança nota-se o instante em que o centro do astro parece passar pelo risco do meio; e compara-se essa *estimativa* com o tempo deduzido das entradas e sahidas.

Daremos um exemplo d'este processo quando tractarmos do oculo meridiano, em que elle tambem se emprega.

32. O gnomon póde dar as distancias zenithaes; porque, repartindo a distancia do centro da imagem ao ponto da meridiana que serve d'origem, e que é a sua intersecção com o prumo pendente do centro do orificio, pela distancia d'estes dois pontos, que é a altura do gnomon, o quociente será a tangente trigonometrica da distancia zenithal.

Póde dar os azimuths, que são os angulos feitos pela meridiana com as distancias extrameridianas do centro da imagem á origem.

E póde dar a grandeza do anno. Porque, sendo B e A (Fig. 9) os pontos da meridiana onde nos solsticios de verão e de inverno se projecta o centro da imagem do sol: se, por exemplo, um dia pouco depois da primavera este centro se projecta em B, projectar-se-ha em a_1 passados 365 dias, e em a' no dia seguinte; d'onde resulta

$$\text{anno} = 365^{d} + 1^{d} \times \frac{\overline{a_1 a}}{\overline{a_1 a'}} = 365^{d},242\ldots$$

33. Vê-se pois que se poderia fazer com o gnomon um curso de observações, que, dando as duas coordenadas do sol, distancia zenithal e azimuth, e a hora da passagem pela meridiana, servissem para regular o relogio, e indagar as leis do movimento angular d'aquelle astro. Mas, sem desprezar o uso d'este instrumento, que ainda hoje se emprega para mostrar o andamento dos relogios relativamente ao tempo solar, e ao qual devemos preciosos resultados que nos legaram os astronomos antigos, torna-se agora indispensavel a adquisição de meios mais perfeitos para o estudo de astronomia. É o objecto de que vamos primeiramente occuparnos.

CAPITULO VI

Dos instrumentos necessarios para as observações astronomicas

34. Os instrumentos astronomicos podem reduzir-se a duas classes: instrumentos para auxiliar a vista, e assignar as posições dos astros; relogios para medir o tempo. Ha tambem apparelhos addicionaes; uns para verificar a horizontalidade ou verticalidade das partes dos instrumentos que devem ser horizontaes ou verticaes; outros para marcar pontos physicos, aos quaes se refiram as direcções dos raios luminosos que fazem ver os astros; outros emfim para ler bem as indicações que assignam as posições dos mesmos astros. Tractaremos d'estes apparelhos, e dos instrumentos a que se applicam.

I

Dos oculos astronomicos e dos telescopios de reflexão

35. *Oculos astronomicos.* As peças essenciaes d'estes instrumentos são dois vidros, um objectivo, outro ocular. O primeiro, reunindo pela refracção os raios luminosos emittidos de cada ponto do objecto, desenha este em miniatura no plano focal; o outro, collocado, exacta ou proximamente, a tal distancia que tem o mesmo foco que o primeiro, destróe ou modifica a divergencia com que os raios saem d'este último ponto, reduzindo-os á inclinação propria para pintarem distinctamente a imagem na retina.

Por se cruzarem os raios principaes no centro do objectivo, as imagens formam-se invertidas. A sua amplificação é o quociente da distancia focal F do objectivo repartida pela distancia focal φ do ocular, se este é simples: mas, se o ocular se compõe de duas lentes, cujas distancias focaes são f e φ, sendo D a distancia entre ellas, a amplificação é:

$$\frac{F.\,(f+\varphi-D)}{f.\,\varphi}.$$

Para evitar a dispersão da luz, os artistas fazem as lentes *achromaticas* pela combinação de *crown-glass* com *flint-glass*, que permitte tornal-as mais convexas, sem aquelle inconveniente, e diminuir porisso o volume dos oculos.

36. *Telescopios de reflexão.* Antes da construcção das lentes achromaticas augmentava-se a fôrça amplificante, sem o inconveniente da dispersão, usando dos telescopios de reflexão.

'Nestes telescopios os raios luminosos batem no grande espelho metallico, que é pequena porção d'uma superficie espherica; e, depois de 'nelle serem reflectidos, encontram o pequeno espelho, que os envia ao olho do observador, onde entram, reunindo-se antes no foco d'uma lente ocular.

O pequeno espelho póde ser concavo, ficar além do foco do grande, e enviar os raios a uma abertura feita no meio d'este; ou póde ser convexo, e ficar áquem do fóco do grande para diminuir a convergencia dos raios reflectidos por este; ou póde emfim ser plano, e inclinado de 45° ao eixo, para enviar os raios a uma abertura feita na parede do telescopio.

Éstas tres disposições encontram-se respectivamente nos telescopios de Gregory, Cassegrain e Newton; dos quaes os dois ultimos têm sôbre o primeiro a vantagem de reflectir os raios no pequeno espelho antes da sua reunião no fóco do grande, o que torna as imagens menos confusas; o segundo tem, além d'isso, a vantagem de ser 'nelle menor a aberração d'esphericidade; e o terceiro tem a de não ser furado no meio o grande espelho, aproveitando por isso maior número dos raios que dão a imagem mais distincta.

O grande telescopio de Herschel é o mais simples de todos. Os raios reflectidos em um enorme espelho, cujo eixo é inclinado ao do tubo, saem para um lado d'este último eixo, permittindo ao observador recebel-os sem interceptar a sua entrada no tubo.

Como os oculos e os telescopios de reflexão se estudam mais largamente na optica, limitamo-nos aqui a recordar éstas noções a respeito d'elles.

II

Dos reticulos

37. Para assignar precisamente a direcção dos raios visuaes dos astros, dispõem-se dentro do oculo, no plano focal do objectivo, uma chapa vazada circularmente, na qual estão distendidos fios muito tenues, que repartem o campo d'elle.

Em alguns reticulos um número impar de fios fixos, parallelos e equidistantes, d'ordinario cinco ou sete, é cortado por outro fio, tambem fixo, perpendicular a elles, occupando a intersecção com o fio do meio o centro da chapa. Em outros o espaço circular contido na chapa é dividido em quatro partes eguaes por dois fios fixos, que se cortam perpendicularmente no centro d'ella. Em outros, além d'estes dois fios fixos, ha outro fio movel parallelo a um d'elles; e o movimento é dado por um parafuso micrometrico. Em outros ha dois fios perpendiculares e fios inclinados: sendo d'estes mais conhecido o *reticulo rhomboidal*, composto de dois fios fixos, que se cortam perpendicularmente no centro da chapa, e de mais quatro fios, que unem consecutivamente as extremidades d'aquelles duas a duas. Finalmente ha tambem o *reticulo annular*, que consiste em um annel circular, na espessura do qual se póde observar a immersão e a emersão dos astros.

38. Para trazer o plano do reticulo á coincidencia com o plano focal do objectivo, de sorte que não haja o que se chama parallaxe dos fios; para dispôr os fios parallelamente a planos dados; e para collocar o centro em uma direcção dada, ha respectivamente tres parafuzos: um que dá á chapa movimento na direcção longitudinal; outro que lhe dá movimento de rotação no seu plano; e outro que lhe dá movimento transversal, ou perpendicular ao eixo do oculo. E para vêr distinctamente os fios póde a lente ocular approximar-se mais ou menos d'elles.

39. Os fios dos reticulos costumam ser de sêda, de teia d'aranha, ou de platina.

Os d'aranha, especialmente os que na teia se dirigem do centro para a circumferencia, são sufficientemente fortes, muito finos e eguaes; mas têm de commum com os de sêda o inconveniente de se resentirem das variações hygrometricas da atmosphera. Os de platina, sendo o fio d'este metal tirado pela fieira depois de cuberto com uma capa de prata, e mettido por fim em um acido que dissolve a prata, têm bastante finura e não estão sujeitos á influencia hygrometrica.

III

Dos nonios, e dos parafusos micrometricos

40. Seja $AB = a$ (Fig. 10) um arco de circulo dividido em n partes eguaes, cada uma das quaes chamaremos D; ab o arco concentrico de egual graduação do *nonio*, dividido em $n \pm k$ partes eguaes, cada uma das quaes chamaremos d; e emfim $D - d = \Delta$ a differença entre uma parte do limbo e uma do nonio.

Teremos $$a = nD = (n \pm k)\, d,$$

ou $$\Delta = \pm \frac{k}{n \pm k} . D:$$

e a differença entre i partes do limbo e outras tantas do nonio será

$$i\Delta = \pm \frac{i k D}{n \pm k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Conseguintemente, para que a divisão i do nonio coincida com uma do limbo, é necessario que o zero do nonio esteja adiantado ou atrazado do traço d'outra divisão do limbo a quantidade $\frac{i k D}{n \pm k}$; e o arco lido será egual ao terminado na divisão do limbo que precede ou segue o zero do nonio, mais ou menos aquella quantidade.

41. Ordinariamente divide-se o nonio em mais ou menos uma parte que as do arco egual do limbo. Então é $k = 1$; e a fórmula (1) dá:

$$i\Delta = \pm \frac{iD}{n \pm 1}.$$

Como, no caso de ter o nonio uma divisão de menos, a divisão do limbo, de que se deve subtrair a quantidade $\frac{iD}{n-1}$, é a seguinte á primeira do nonio, tambem se póde ajunctar á divisão precedente o complemento d'aquella quantidade para a grandeza d'uma divisão do limbo, isto é, ajunctar:

$$D - \frac{iD}{n-1} = \frac{n-1-i}{n-1} D.$$

Se as divisões do nonio começarem na extremidade opposta á que fica proxima da divisão do limbo que se lê, a leitura i' do nonio será $i' = (n-1) - i$; e por isso teremos de ajunctar $\frac{i'D}{n-1}$ á leitura do limbo.

Portanto:

1.° Se n divisões do limbo valem $n + i$ do nonio, a leitura i partes d'este, a qual se deve ajunctar á última divisão do limbo que precede o nonio, vale

$$i. \frac{D}{n+1}.$$

2.° Se n divisões do limbo valem $n - 1$ do nonio, a leitura i' partes d'este, a qual se deve ajunctar á última divisão do limbo que precede o nonio, vale

$$i'.\frac{D}{n-1}.$$

Advertindo que as divisões i se contam no sentido da graduação do limbo; e as i' no sentido opposto.

Nos instrumentos astronomicos o primeiro modo de dividir é o geralmente usado.

Assim, no Circular repetidor de Lenoir do Observatorio de Coimbra as divisões do limbo são de $10'$; e o nonio, dividido em 30 partes, abrange 29 d'aquellas divisões, dando a fracção $\frac{10'}{30}=20''$.

Por exemplo, se a divisão do limbo $37°40'$ precede immediatamente o zero do nonio, e se a divisão 19ª do nonio coincide com uma do limbo, o arco é $37°40'+20''\times 19=37°46'20''$.

42. Se unirmos dois nonios eguaes (Fig. 11) AO e BO: é claro que, em qualquer posição do todo AB, as posições dos traços do nonio OA desde O até A são as mesmas respectivamente que as dos traços do nonio BO desde B até O; de sorte que podemos supprimir a metade BC do segundo, substituida por OD, e a metade DA do primeiro, substituida por CO: restando o nonio CD, cujas divisões de O até C se seguirão na mesma ordem de D até O.

É claro que, se fizermos outro systema de divisões, que proceda de O para D e continúe de C até O, estes dois systemas servirão para ler as graduações, quer procedam no sentido de O para C, quer no sentido de O para D.

43. Supponhamos ligado o nonio com um parafuzo, na cabeça do qual está preso um index cuja extremidade percorre a circumferencia d'uma chapa circular; e dividida esta circumferencia em um grande número de partes. Dando movimento ao parafuso, até que a coincidencia com um traço do limbo, que tinha logar em uma divisão do nonio, passe a ter logar na divisão antecedente, isto é, até que o zero do nonio tenha retrogradado uma unidade d'elle; e dividindo o valor d'uma unidade do nonio pelo número das partes da circumferencia que o index percorreu: teremos o valor de cada uma d'estas partes.

Este apparelho que serve para ter as partes menores que a unidade do nonio, chama-se *parafuzo micrometrico* ou *micrometro*.

Assim, no Quadrante de Troughton do Observatorio de Coimbra, uma unidade do nonio da divisão interior corresponde a 0,54 do passo do micrometro, o que dá este passo $=\frac{60''}{0,54}=111''$; e porque a sua circumferencia está dividida em 111 partes, o micrometro dá segundos. As divisões do limbo são de $10'$, e o nonio dá minutos.

44. Algumas vezes adapta-se ao micrometro um microscopio, e no plano focal d'este se põe um reticulo; para ver as divisões do limbo onde se projecta o encruzamento dos fios.

Se uma divisão do limbo vale muitas circumferencias do micrometro, os fios correm ordinariamente no seu movimento ao longo d'uma serra dividida em partes taes que o encruzamento passe d'uma á outra em quanto o index faz uma revolução.

No Circular meridiano do Observatorio de Coimbra as divisões do limbo são de $5'$, as partes da serra de $1'$, e as divisões do mostrador do micrometro de $1''$.

IV

Dos niveis, e dos fios de prumo

45. Para tornar horizontaes ou verticaes, as linhas e os planos, ou para avaliar os pequenos angulos que fazem com o horizonte ou com a vertical, usa-se dos niveis e dos fios de prumo.

46. *Dos niveis.* O nivel de bolha d'ar é um tubo de vidro, cheio em parte d'agua, d'alcool ou d'ether, e em parte d'ar, ou tambem do vapor do fluido; sendo este tubo sustentado por um apparelho, cuja base assenta sôbre os planos a que o nivel se applica, e no qual ha parafuzos proprios para variar um pouco a inclinação do tubo relativamente á mesma base.

Em qualquer posição que se ponha o nivel, a bolha d'ar occupa sempre a parte mais elevada, procurando collocar-se de modo que seja horizontal a sua aresta culminante, ou o plano tangente ao meio d'ella.

Se o tubo é cylindrico, todas as inclinações ao horizonte fazem egualmente deslocar a bolha, a não se opporem a isso o attrito ou a capillaridade. Ésta deslocação póde accusar a falta de horizontalidade das rectas e dos planos, a que o nivel se applica; mas não póde medir a sua inclinação. Porisso os melhores niveis, hoje geralmente usados nas observações astronomicas, e proprios para medir a inclinação, são aquelles nos quaes o eixo do tubo tem uma pequena curvatura circular; e póde a figura do tubo considerar-se como gerada pelo movimento d'um annel, que se conserva sempre perpendicular ao eixo, e cujo centro percorre o mesmo eixo, gyrando em torno do centro de curvatura d'elle.

47. Para avaliar as pequenas inclinações por meio do nivel, divide-se uma parte do seu comprimento, entre cujos extremos se suppõem mover a bolha quando ellas têm logar, em pequenas porções; e medem-se os angulos que as mesmas porções subtendem no centro de curvatura. Esta medição faz-se applicando o nivel aos circulos que servem para as observações astronomicas, ou usando d'um instrumento proprio chamado *zygometro*.

O zygometro compõem-se de duas regoas, uma das quaes toma diversas inclinações sôbre a outra, movendo-se em tôrno d'uma charneira; e o movimento dá-se por meio d'um parafuso de passo conhecido, na cabeça do qual ha um micrometro que indica a quantidade d'elle.

Se, depois de horizontar com um nivel a regoa superior, cujo comprimento chamaremos a, collocarmos sôbre ella o nivel que pretendemos graduar, ou cuja graduação queremos verificar, e a fizermos levantar dando ao parafuso um movimento nh egual a n vezes o passo h; a inclinação i, correspondente ao arco que a bolha descrever, será dada por:

$$\operatorname{sen} i = \frac{nh}{a}, \text{ ou, em segundos, } i = \frac{nh}{a \operatorname{sen} 1''}.$$

Mas ordinariamente o micrometro dá logo o angulo i.

No zygometro do Observatorio de Coimbra o passo é de $74''$; e as divisões do micrometro são de segundo.

48. Quando um nivel está assim graduado, podêmos conhecer o raio de curvatura d'elle. Porque, se para a variação i d'inclinação a bolha percorrer uma parte do tubo egual a m^{mm}; chamando r o raio de curvatura, teremos, por ser $206264'',8$ o raio em segundos,

$$r : m :: 206264{,}8 : i; \text{ ou } r = m . \frac{206264{,}8}{i}.$$

Assim, para o nivel do circular meridiano do Observatorio de Coimbra, no qual são $m = 0^{mm},86$, e $i = 1'',016$, teremos $r = 174^{m},59$.

Como a bondade dos niveis é tanto maior quanto maior é o seu raio de curvatura, por ser qualquer pequena mudança d'inclinação accusada por um movimento mais sensivel da bolha, vê-se por este exemplo quanta é a utilidade e perfeição d'aquelles instrumentos. No entretanto não deve o raio ser tão grande que as mudanças, que a posição da bolha experimenta nas observações em que se usa da graduação do nivel, a façam habitualmente sair fóra da mesma graduação.

Posto isto, appliquemos o nivel á verificação da horizontalidade e da verticalidade das rectas.

49. *Verticalidade dos eixos de rotação.* Supponhamos que ao eixo de rotação PA (Fig. 12) está ligado um nivel; e que, depois de se revolver o tubo até que o arco ED, onde estão marcadas as divisões, bisseque longitudinalmente a bolha, o plano d'este arco passa pelo mesmo eixo, ou lhe é parallelo. Sejam: S o ponto do arco onde a tangente é horizontal, ou CS vertical, e que occupa o centro da bolha; X o ponto onde é CX parallela a PA, ou onde se collocaria o centro da bolha se PA fôsse vertical; O a origem das divisões, as quaes supporemos que procedem no sentido DE; D a extremidade que supporemos á nossa direita, e E a que supporemos á nossa esquerda.

Se dermos ao instrumento um movimento de 180° em volta do eixo de rotação PA, e o acompanharmos 'nesse movimento: é claro que os pontos O e X virão collocar-se para o outro lado de PA (Fig. 13), ás mesmas distancias a que antes estavam; e que o centro da bolha tomará a posição S', onde a tangente é horizontal, ou CS' vertical. Chamando pois I a inclinação ZPA do eixo de rotação, teremos evidentemente:

(Fig. 12) $$\mathrm{I = SX = OS - OX},$$

(Fig. 13) $$\mathrm{I = S'X = OX - OS'};$$

ou $$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{OS - OS'}}{2},\quad \mathrm{OX} = \frac{\mathrm{OS + OS'}}{2} = \mathrm{X}.$$

Mas, se chamarmos d', e' as coordenadas das extremidades direita e esquerda na primeira observação, e $2l'$ o comprimento da bolha; d'', e'' as coordenadas das mesmas extremidades na segunda observação, e $2l''$ o comprimento da bolha, teremos:

$$\mathrm{OS}=d'+l'=e'-l',\ \mathrm{OS'}=d''+l''=e''-l'',$$

ou
$$\mathrm{OS}=\frac{d'+e'}{2},\quad \mathrm{OS'}=\frac{d''+e''}{2};$$

e por conseguinte:

$$\mathrm{I}=\frac{d'-d''+l'-l''}{2}=\frac{e'-e''-(l'-l'')}{2},$$

$$\mathrm{X}=\frac{d'+d''+l'+l''}{2}=\frac{e'+e''-(l'+l'')}{2},$$

ou
$$\mathrm{I}=\frac{\frac{1}{2}(d'-d'')+\frac{1}{2}(e'-e'')}{2},\ \mathrm{X}=\frac{\frac{1}{2}(d'+d'')+\frac{1}{2}(e'+e'')}{2}.$$

50. Se for $2n$ o número total das observações, e chamarmos:

as leituras impares $d', d''', \ldots d^{(2n-1)};\ e', e''' \ldots e^{(2n-1)}$:

as leituras pares $d'', d^{\mathrm{IV}}, \ldots d^{(2n)};\ e'', e^{\mathrm{IV}}, \ldots e^{(2n)}$,

teremos assim:

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{I}=\dfrac{\Sigma_1^n[d^{(2i-1)}-d^{(2i)}+e^{(2i-1)}-e^{(2i)}]}{4n},\\[2ex] \mathrm{X}=\dfrac{\Sigma_1^n[d^{(2i-1)}+d^{(2i)}+e^{(2i-1)}+e^{(2i)}]}{4n}.\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (1)$$

Se o ponto O estiver no centro das divisões, e d'estas se contarem umas desde O para a esquerda, outras desde O para a direita, faremos as últimas negativas nas fórmulas precedentes; o que dará:

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{\Sigma_1^n\left[e^{(2i-1)} - e^{(2i)} - \left(d^{(2i-1)} - d^{(2i)}\right)\right]}{4n}, \\ X &= \frac{\Sigma_1^n\left[e^{(2i-1)} + e^{(2i)} - \left(d^{(2i-1)} + d^{(2i)}\right)\right]}{4n}. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (2)$$

51. As figuras (12) e (13) suppõe que na (12) o eixo de rotação se inclina para a parte de D; o que dá I positivo, e additivo ás distancias zenithaes dos astros que ficarem para a mesma parte de D.

Collocando pois sempre o instrumento de modo que o astro fique á direita do eixo de rotação nas observações impares, os valores de I devem applicar-se com os seus signaes ás distancias zenithaes lidas, para ter as distancias zenithaes correctas do êrro de verticalidade d'aquelle eixo.

Mas, se nas observações impares collocarmos o instrumento de modo que o astro fique á esquerda do eixo de rotação, applicar-se-ha ainda I com o seu signal ás distancias zenithaes, com tanto que na sua expressão (2) se mudem os d em e, e reciprocamente.

52. Se quizermos fazer vertical o eixo de rotação, moveremos os pés que o sustentam, até que as distancias das extremidades direita e esquerda da bolha ao ponto O sejam, respectivamente, $X - l$ e $X + l$.

Porém, depois que ésta verticalidade se tiver conseguido com grande approximação, será melhor attender nas observações ao pequeno erro I, que ainda restar, pelo modo que fica exposto.

E se quizermos não só tornar o eixo vertical, mas tambem restituir a bolha ao logar do tubo que occupava na primeira posição, as expressões:

$$\left.\begin{aligned} X &= OS' + \frac{OS - OS'}{2} \\ &= OS' + S'X \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} OS &= X + \frac{OS - OS'}{2} \\ &= X + SX \end{aligned}\right\},$$

m que devemos, com os parafuzos que dão movimento ao eixo, desfazer metade do espaço OS — OS′ percorrido pela bolha na passagem da primeira posição para a segunda, o que fará o eixo vertical; e, com os parafuzos do nivel, desfazer a outra metade, o que trará a bolha á primeira posição na qual a distancia do seu centro á origem era OS.

53. *Horizontalidade dos eixos de rotação.* Supponhamos o nivel suspenso de um eixo MN (Fig. 14) inclinado ao horizonte MH, ou posto sôbre este eixo. Se dermos ao nivel um movimento de 180°, trocando os pontos de suspensão, e ficando fixo o ponto A, este movimento terá logar á roda da recta AB perpendicular a MN; e 'nelle a recta AZ, vertical na primeira posição, descreverá metade d'um cone, para tomar a posição AZ′ (Fig. 15) que faz com a primeira AZ o angulo ZAZ′ duplo de NMH. Conseguintemente a bolha, que é sempre perpendicular á vertical, descreverá um arco egual a ZAZ′; e a inclinação NMH será metade d'este arco.

Estaremos assim no caso do n.° 50, considerando AB como eixo de rotação; e teremos as mesmas fórmulas, sendo I o angulo d'este eixo com a vertical, egual á inclinação de MN abaixo do horizonte. Mas, se o observador não mudar de posição com o nivel, as quantidades, que alli se referem ás leituras pares, mudarão de signal nas fórmulas (2).

Se na primeira posição do nivel a extremidade D ficar á nossa direita, a extremidade direita do eixo estará abatida ou elevada a respeito do horizonte, segundo fôr positivo ou negativo o valor de I.

Podemos tambem aqui applicar o que dissemos no n.° 52 para dar ao eixo a posição horizontal, e á bolha a primitiva. Bissecaremos o espaço percorrido pela bolha na passagem da primeira posição para a segunda; e destruiremos metade d'este espaço com o parafuzo que dá movimento ao eixo, e a outra metade com o parafuzo do nivel.

54. *Horizontalidade dos planos.* Para verificar a horizontalidade d'um plano póde usar-se do nivel, verificando por elle a horizontalidade de duas rectas, que se cruzem no mesmo plano.

55. *Fios a prumo.* Seja CP um fio a prumo, e AB uma recta que deve ser vertical (Fig. 16). Se em dois pontos A e B d'esta recta collocarmos duas chapas circulares, das quaes elles sejam os centros, marcados phisicamente, é claro que o fio a prumo CP, suspenso de modo que passe por A, deverá tambem passar por B, no caso de ser CBA vertical; e por isso, se não passar por ambos os pontos A e B, mudar-se-ha a inclinação da recta AB, ou o ponto de suspensão C, até que se verifique aquella condição.

O fio costuma estar encuberto na maior parte da sua extensão por um tubo que o defende da agitação do ar ambiente; e o pêzo costuma mergulhar-se, para o mesmo fim, em um vaso largo cheio de agua.

56. Para verificar a horizontalidade d'um eixo AB (Fig. 17), supponhamos que um ponto *m* da pequena marca N está com o ponto de suspensão C em uma recta C*m* perpendicular a AB. Se esta condição tiver logar, e fizermos coincidir C*m* com a direcção do prumo, será AB horizontal.

Para satisfazer a estas duas condições, póde levantar-se ou abaixar-se uma das extremidades de AB por um parafuzo, e póde mudar-se a posição do ponto *m* dando á marca *N* um movimento circular em volta do ponto *N* invariavelmente ligado com AB.

Supponhamos pois que, pelo movimento de AB, se traz C*m* á direcção do fio a prumo. Se, invertendo as extremidades de AB, o fio ainda passar por *m*, será C*m* perpendicular a AB, e vertical. Mas, se assim não acontecer, e o fio tomar a posisão CM′ (Fig. 18) relativamente a C*m*M, será necessario trazer CM a esta posição fazendo-lhe descrever o arco MCM′, metade por meio do parafuzo que levanta ou abaixa uma das extremidades de AB, e a outra metade pelo movimento circular do disco N, a que o ponto *m* é excentrico: o que fará coincidir C*m*, CN, CM′. Com effeito é claro que, pela inversão das extremidades de AB, a recta CM descreveu, em volta da perpendicular CE a AB, metade d'um cone recto, de modo que o angulo MCM′ é duplo do feito por CM com aquella perpendicular.

57. Para fazer vertical um plano, póde applicar-se-lhe um apparelho, que dá muita exactidão ao nivellamento, composto de duas régoas divididas muito afastadas AF e BG (Fig. 19), parallelas entre si e perpendiculares ao plano.

Collocando o plano de modo que o prumo, suspenso de um ponto C da primeira régoa, rase a outra em C′; e imaginando tirada a recta C*b* parallela no plano AB, será *b*CC′ o angulo de AB com a vertical; depois, movendo o plano em torno do eixo perpendicular DQ, até que os pontos A e B se troquem, e suspendendo o fio a prumo do ponto C′, este fio rasará AF em um ponto C″ tal que a parallela C′*b*′ a AB dividirá CC″ ao meio; e o angulo CC′C″ será o dobro da inclinação de AB para a direita, ou para a esquerda, da vertical, confórme estiver C″ para a direita, ou para a esquerda, de C. Chamando pois I esta inclinação; c e c'' as distancias de C e C″ a um ponto O marcado na régoa AF; x a distancia C*b* do mesmo ponto á intersecção da parallela C*b*′ a AB com aquella régoa; e Δ a distancia AB das régoas: teremos as fórmulas

$$x = \frac{c + c''}{2}, \ \tang \mathrm{I} = \frac{(c'' - c)}{2\Delta},$$

a primaira das quaes serve para trazer o plano á verticalidade, movendo AB até que o fio de prumo suspenso de C' passe por b'; e a segunda serve para conhecer a inclinação I, quando a não corrigimos, e preferimos attender a ella nos calculos.

Se tomarmos C'' para primeiro ponto de suspensão em um segundo par de operações; depois o ponto C'''' para primeiro ponto de suspensão em um terceiro par; e assim por diante: teremos, depois d'um número $2n$ de suspensões successivas do fio do prumo,

$$\tang \mathrm{I} = \frac{c''-c}{2\Delta},\ \tang \mathrm{I} = \frac{c''''-c''}{2\Delta} \ldots,\ \tang \mathrm{I} = \frac{c^{(2n)}-c^{(2n-2)}}{2\Delta},$$

cujo meio é

$$\tang \mathrm{I} = \frac{c^{(2n)}-c}{2n\Delta}.$$

58. A simplicidade do fio de prumo, e a facilidade com que se restaura e applica aos nivellamentos, fazem este instrumento muito util: mas, pelo que pertence á exactidão, basta comparar os maiores comprimentos, que nas applicações se lhe podem dar, com os raios dos niveis de bolha d'ar, que ordinariamente se empregam, para ver quanto estes são mais sensiveis.

V

Dos relogios

59. Como o tempo é a impressão que deixa na memoria a successão de muitos phenomenos, são proprios para o medir os espaços eguaes, percorridos do mesmo modo, ou as relações eguaes entre os espaços e as velocidades; mas a egualdade dos espaços é preferivel, por ser mais facil ao artista marcal-os com perfeição.

As clepsidras foram os relogios que primeiramente se usaram; mas, pela imperfeição da theoria dos fluidos, e por ser difficil conservar o nivel constante d'um fluido sem alterar o seu movimento vertical, ou marcar divisões deseguaes do espaço correspondentes a divisões eguaes do tempo, eliminaram-se estes instrumentos das observações astronomicas, logo que se inventaram outros mais perfeitos.

60. Um peso motor; um systema de rodas, que communica e modifica o movimento; ponteiros que indicam estes movimentos nas rodas correspondentes; e um pendulo, no qual prende a ancora cujas duas extremidades endentam alternativamente em uma roda no fim de cada oscillação: são os tres elementos que constituem essencialmente um relogio astronomico, e aos quaes podemos chamar *motor*, *indicador*, e *regulador* ou *moderador*.

Suppomos estudados na mechanica e na phisica, assim a descripção de cada uma das suas peças, e dos meios de as tornar mais seguras e menos sujeitas aos effeitos da fricção, como o calculo das relações que devem ter as suas dimensões para que ellas produzam o effeito desejado. Só fallaremos ainda dos compensadores, que dão a estes instrumentos a perfeição necessaria para as observações astronomicas, obstando á influencia das variações de temperatura no comprimento do pendulo.

61. No compensador solido (Fig. 20), que se costuma empregar nas pendulas astronomicas, as varas de ferro prendem superiormente na parte fixa S do pendulo, e inferiormente na parte movel R. O contrário succede a respeito das varas de cobre. D'onde resulta que a dilatação das varas de ferro tende a mover o systema de cima para baixo, e a dilatação das varas de cobre tende a movel-o debaixo para cima.

Assim, arranjando as varas metallicas de modo: que o comprimento total desde o ponto de suspensão até á extremidade inferior, o qual se compõe da somma das varas de ferro menos a das varas de latão, seja egual ao valor que deve ter; que a differença entre a somma das dilatações das varas de ferro e a das varas de latão seja nulla; e que a lentilha fique abaixo do apparelho compensador: este apparelho ficará interposto entre as extremidades do pendulo, conservando-lhe o mesmo comprimento apezar das mudanças de temperatura.

Substituindo, em logar de parte da haste do pendulo, uma vara de ferro encaixado 'num cylindro ôco de cobre, e presa ao mesmo cylindro por uma caravelha que atravessa estes dois corpos em dois de muitos buracos correspondentes que 'nelles ha, póde corrigir-se por tentativas a imperfeição que tem o compensador quando sahe das mãos do artista. Para isso basta mudar convenientemente a caravelha d'un racos para outros: porque, não influindo no comprimento do pendulo o movimento das extremidades livres da vara e do cylindro, só ha que attender ás distancias da caravelha ás outras duas extremidades; e como éstas distancias se fazem variar pela mudança da caravelha, varía tambem a dilatação do comprimento total, composto dos dois metaes que se dilatam desegualmente.

Usa-se tambem muito dos compensadores de mercurio. O vaso, que contém o mercurio na parte inferior do pendulo, serve de lentilha; e, quando a vara do pendulo se alonga ou encurta em virtude da elevação ou do abaixamento da temperatura, a dilatação do mercurio varia tambem de modo, que faz subir ou descer o centro d'oscillação tanto quanto a variação do comprimento do pendulo o faz descer ou subir. Pela addição, ou subtracção, conveniente de mercurio póde com facilidade aperfeiçoar-se o compensador.

62. No caso de não haver compensador: chamando $\tau = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ o tempo d'uma oscillação a 0°, e ε o coefficiente da dilatação do metal, será $\tau' = \tau\,(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\theta)$ a θ°; de sorte que, se τ fôr, por exemplo, 1″, o número t d'oscillações da pendula valerá $t''\,(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\theta)$, quand(a temperatura for θ.

63. As divisões do tempo, que se têm usado, são decimaes, ou sexagesimaes. Na primeira divide-se o dia em 10^h, a hora em 100′, e o minuto em 100″; na segunda divide-se o dia em 24^h, a hora em 60′, e o minuto em 60″.

Seja t o tempo contado 'num d'estes systemas, e reduzido a uma só especie. Chamando n o número de divisões d'essa especie que compõem o dia, será $\frac{t}{n}$ o tempo expresso em dias; e reduzindo $\frac{t}{n}$ a qualquer subdivisão do dia no outro systema, virá o tempo expresso nas unidades da mesma subdivisão.

Por exemplo, se fôr t um numero de minutos sexagesimaes, será $\frac{t}{24.60} = \frac{t}{1440}$ este tempo expresso em dias; e depois:

em horas dec. $\frac{10t}{1440}$, em min. dec. $\frac{1000t}{1440}$, em seg. dec. $\frac{100000t}{1440}$.

64. A reducção d'um tempo sideral S ao tempo correspondente do relogio H, ou inversamente, póde facilitar-se do modo seguinte:

Seja R o dia sideral expresso em unidades de tempo sideral, e $R-r$ o mesmo dia expresso em unidades de tempo do relogio; isto é, seja r o atrazo do relogio sôbre o tempo sideral em dia sideral. O tempo H do relogio reduzido a dia sideral será $\frac{H}{R-r}$, que convertido um unidades de tempo sideral, dará:

$$S=\frac{H}{R-r}R.$$

Inversamente, o tempo sideral S reduzido a dia sideral é $\frac{S}{R}$, que, convertido em unidades de tempo do relogio, dá:

$$H=\frac{S}{R}(R-r).$$

Assim, fazendo

$$\frac{r}{R-r}=\frac{r'}{R},$$

temos:

$$r'=r+\frac{r^2}{R-r},\quad H=S-\frac{Sr}{R},\quad S=H+\frac{Hr'}{R}.$$

E decompondo S ou H em partes aliquotas de R, poderemos calcular mais facilmente a correcção que tirada de S dá H, ou a que juncta a H dá S, usando da tabella seguinte:

S ou H	12^h	6^h	1^h	10^m
$-\frac{Sr}{R}$	$-\frac{1}{2}r$	$-\frac{1}{4}r$	$-\frac{1}{24}r$	$-\frac{1}{144}r$
$\frac{Hr'}{R}$	$+\frac{1}{2}r'$	$+\frac{1}{4}r'$	$+\frac{1}{24}r'$	$+\frac{1}{144}r'$.

Por exemplo, para $S=13^h\ 17^m\ 36^s$, teremos

$$H=13^h, 17^m 36^s-\left\{\frac{1}{2}r+\frac{1}{24}r+1,76\times\frac{1}{144}r\right\}=13^h\ 17^m 36^s-\frac{9,97}{18}r.$$

65. Para experimentar um relogio podemos comparal-o com um pendulo do modo seguinte:

Supponhamos que 'num dia sideral o pendulo faz R oscillações, e que o intervallo 1_a das pancadas, isto é, a duração das oscillações do relogio é um pouco menor que a duração 1_p das oscillações do pendulo. Se a differença for um submultiplo $\frac{1}{N}$ de 1_a, teremos:

$$1_p-1_a=\frac{1_a}{N}, \text{ ou } N\ 1_p=(N+1).\ 1_a.$$

Por conseguinte N oscillações do pendulo equivalerão a N + 1 do relogio; e no fim d'ellas as pancadas serão unisonas, pertencendo uma ao principio d'uma oscillação, e outra ao fim.

Passadas outras N oscillações do pendulo terá logar nova coincidencia de sons, mas ambos pertencentes ao principio d'uma oscillação. Assim, depois do número $N'=2N$ d'oscillações do pendulo, será:

$$N'\ 1_p=(N'+2).\ 1_a,$$

ou $$R.\ 1_p=\frac{N'+2}{N'}R.\,1_a=R.\ 1_a+\frac{2R}{N'}.\ 1_a;$$

e será $\frac{2R}{N'}$ o adiantamento do relogio em um dia sideral. O relogio será bom, quando este adiantamento for constante.

Por exemplo, se for $R=24^h$, $N'=2^h$, será 24 o numero d'oscillações de que em um dia o relogio se adianta relativamente ao pendulo.

66. Na apreciação da coincidencia, ou da separação das pancadas sempre ha incerteza.

Seja $2i$ ou $2i+1$ o numero das pancadas durante as quaes não se percebe a separação. Tomando por coincidencia o meio, e chamando e o erro, será $N'_1=N'\pm e$, e teremos proximamente:

$$\frac{2R}{N'_1}=\frac{2R}{N'}\mp\frac{2R}{N'}.\frac{e}{N'}.$$

Assim o erro do adiantamento, $\frac{2R}{N'}.\frac{e}{N'}$, é muito attenuado pela grandeza de N'; mas, por outra parte, a incerteza, ou o limite i de e, cresce com N'.

Por exemplo, no caso de $R=24^h$, $N'=2^h$, se for $i=20$, o erro do adiantamento será

$$<\left(24.\frac{20}{7200}=\frac{1}{15}\right).$$

Supponhamos agora feito um grande número n d'observações de coincidencias; e sejam

$$N'_1=N'+e_1,\ N'_2=N'+e_2,\ N'_3=N'+e_3, \ldots\ N'_x=N'+e_x,$$

as coincidencias tomadas como a primeira. Teremos resultados similhantes, e por conseguinte:

$$\frac{2R}{N'}=\frac{\Sigma_1^n\frac{2R}{N'_x}}{n}\pm\frac{2R}{nN'^2}\Sigma_1^n e_x.$$

Como a natureza dos erros e_x torna provavel que na sua somma $\Sigma\, e_x$ se compense a maior parte d'elles, será

$$\frac{2R}{N'} = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{2R}{N'_x}}{n},$$

com muito maior probabilidade de exactidão.

67. A passagem meridiana das estrellas offerece, como veremos, um meio muito facil, e muito seguro, de regular os relogios; mas, como as indicações d'estes instrumentos nos hão de servir para mostrar a uniformidade do movimento diurno, quizemos apontar um processo que não parecesse envolver circulo vicioso.

VI

Do quarto do circulo, e do seu uso. Do circulo de alturas e azimuths.

68. O *quarto de circulo* (Fig. 21) tem um limbo vertical, sôbre cujo plano gyra, em torno do centro, um oculo munido de seu reticulo, que se compõem de dois fios rectangulares, e acompanhado d'um nonio.

O plano do limbo gyra em roda d'uma columna, á qual deve ser parallelo, e que se colloca na posição vertical por meio d'um nivel, ou d'um fio a prumo; e a quantidade de seu movimento 'nesta rotação é marcada sôbre a circumferencia d'um circulo azimuthal por um index ligado á mesma columna.

Em alguns quartos de circulo o oculo é fixo ao limbo vertical; e este move-se em tôrno do eixo horizontal, passando as suas divisões pelo zero d'um nonio gravado em uma alça, á qual anda preso o nivel, e que tambem póde mover-se em volta do mesmo eixo horizontal.

Para fazer o eixo optico do oculo, isto é, a recta que passa pelo centro do objectivo e pelo encruzamento dos fios, parallelo ao plano do limbo, póde empregar-se o processo de que nos occuparemos quando tractarmos do *quadrante de Troughton*.

Para fazer verticaes o raio que passa pelo zero da graduação e pelo centro do circulo, e a columna, serve o nivel que acompanha a alça, usando d'elle em duas direcções encruzadas. Na primeira segue-se o processo explicado no n.º 52, desfazendo os espaços percorridos pela bolha nas duas posições, metade com o parafuzo d'um dos pés da columna, e outra metade com o parafuzo que dá movimento ao limbo. Na segunda, perpendicular á primeira, serve-se sómente do parafuzo do pé respectivo.

69. Se dermos o movimento azimuthal necessario para que um astro esteja no plano do limbo; e se movermos o oculo até que esse astro se projecte no encruzamento dos fios do recticulo, ou se movermos o quarto de circulo verticalmente até obter a mesma projecção, e trouxermos a alça á posição vertical, indicada pelo seu nivel: teremos a distancia zenithal pela leitura da divisão do limbo a que corresponder o zero do nonio da alidada, ou pela leitura da divisão do limbo que corresponder ao zero do nonio da alça.

70. Quando o astro se elevar sôbre o horizonte no seu movimento diurno, façamos corresponder o zero da alidada, ou o da alça, a alturas successivamente maiores, tendo sempre o cuidado no segundo caso de trazer a alça á verticalidade pelo movimento do quarto de circulo; esperemos que o astro se projecte na direcção do encruzamento dos fios em cada altura, dando para isso ao instrumento o necessario movimento azimuthal; e notemos os tempos em que têm logar estas projecções. Depois, quando o astro descer para o horizonte, façamos novamente corresponder o zero do nonio da alidada, ou o do nonio da alça, ás mesmas alturas em que se fizeram as observações durante a ascensão, mas em ordem inversa; e notemos egualmente os tempos em que o astro retoma éstas alturas. Advertindo que, relativamente a cada par d'observações dos astros que têm diametro sensivel, se deve tomar em uma a entrada do disco no fio, e em outra a sua sahida; e, para maior exactidão, se devem referir ambas ao mesmo contacto, superior ou inferior do fio.

Feito isto, se sommarmos os dois tempos correspondentes em que o astro chega á mesma altura, e tomarmos a metade da somma, acharemos para as differentes alturas, semisommas sensivelmente eguaes entre si, cada uma das quaes é o tempo em que o astro toca a maxima altura, ou em que o limbo está na direcção do meridiano.

A epocha da passagem pelo meridiano é assim intermedia entre os tempos nos quaes o astro chega á mesma altura na sua subida e na sua descida; e a media das semisommas d'estes tempos dá com mais segurança a mesma epocha.

71. Éstas observações, que se chamam *d'alturas correspondentes*, sendo feitas em dias successivos, mostram o andamento do relogio; e, se o astro observado for o sol, os tempos das passagens meridianas, que ellas dão, comparados com aquelles que dão as passagens da imagem do astro pela meridiana filar (n.° 30) servirão para verificar, ou para corrigir ésta meridiana.

72. Mas por variarem as refracções atmosphericas, no intervallo de cada par d'observações, em virtude da variação do estado da atmosphera, as alturas apparentes eguaes correspondem a alturas verdadeiras deseguaes; o que torna necessario applicar a cada semisomma dos tempos correspondentes uma correcção dependente da differença das duas refracções. Além d'isso, se o astro tiver movimento proprio em declinação, este movimento alterará a symetria das suas posições d'uma e d'outra parte do meridiano; d'onde provém a necessidade d'outra correcção dependente d'aquelle movimento.

Éstas duas correcções reunidas dão uma total, chamada *equação das alturas correspondentes*, que adiante deduziremos: advertindo desde já que muitas vezes se chama *equação* em astronomia o que é necessario accrescentar a uma quantidade principal para completar outra que d'ella differe pouco.

73. Como aqui os tempos se determinam pela observação das alturas, convém escolher circumstancias em que a dadas variações de tempo correspondam as maiores variações d'altura; inversamente do que se deveria fazer, se por meio dos tempos quizessemos determinar as alturas. Por isso se fazem éstas observações longe do meridiano; mas não tanto que a proximidade do astro torne incerta a correcção devida á refracção: e, se o astro tem movimento proprio, escolhe-se o tempo em que este movimento influe menos na correcção dependente d'elle (*a*).

(*a*) A equação $\cos P = \frac{\cos z - \cos \Delta \cos D}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D}$,

que se deduz do triangulo espherico comprehendido entre o zenith, o pólo e o astro, dá $\frac{\delta P}{\delta z} = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} P \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D} = \frac{1}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} D}$.

Por conseguinte a occasião em que δz é maior relativamente a δP é aquella em que o azimuth A é mais proximo de 90°.

Quando for $A = 90°$, será $\cos P = \operatorname{tg} D \cot \Delta$.

Tal é a razão porque se costuma fazer as observações das alturas correspondentes do sol, de manhan começando depois das sete horas, e acabando antes das dez; de tarde começando depois das duas horas, e acabando antes das cinco: e porque se escolhem para ellas, com preferencia, as epochas visinhas dos solsticios. Além de que, para verificar a meridiana, convém fazel-o nos seus pontos mais distantes, a fim de tornar mais sensivel o erro, se o houver.

74. Por exemplo:

Em 31 de janeiro de 1793 observaram-se no Observatorio de Coimbra as seguintes alturas correspondentes do Sol:

ALTURAS		MANHAN			TARDE			MEIO		
G.	M.	H.	M.	S.	H.	M.	S.	H.	M.	S.
23	10	9	14	29,0	14	29	12,0	11	51	50,5
23	30	9	17	10,0	14	26	32,5	11	51	51,7
23	40	9	18	31,0	14	25	7,0	11	51	49,5
23	50	9	19	51,0	14	23	50,0	11	51	50,5
24	0	9	21	14,5	14	22	26,0	11	51	50,2
24	10	9	22	38,0	14	21	2,0	11	51	50,0
24	20	9	24	0,0	14	19	37,0	11	51	48,5
24	30	9	25	27,0	14	18	14,5	11	51	50,7
24	40	9	26	51,0	14	16	51,0	11	51	51,0
24	50	9	28	15,0	14	15	28,0	11	51	51,5
25	0	9	29	42,0	14	13	59,0	11	51	50,5

Desprezando o septimo par, que differe mais da media dos outros, o meio d'estes é $11^h\ 51^m\ 50^s,6$; e como a equação das alturas correspondentes, relativa á variação da declinação, é $-12'',5$, o tempo da passagem do sol pelo meridiano

era $$11^h 51^m 38^s,1.$$

75. Tendo notado no circulo azimuthal a divisão a que corresponde o zero do nonio do seu index, quando se observa o astro no instante da

passagem meridiana, determinado pelo methodo precedente, supponhamos que se colloca o instrumento 'nessa posição, para observar as alturas meridianas d'uma estrella circumpolar de perpetua apparição (*a*).

Acharemos que a distancia zenithal na passagem superior, ou quando a estrella parece percorrer o campo do oculo da esquerda para a direita é a menor de todas; e que a distancia zenithal na passagem inferior, ou quando a estrella parece percorrer o campo do oculo da direita para a esquerda, é a maior de todas. E tambem acharemos que a semisomma ZP (Fig. 22) d'estas distancias é a mesma, no mesmo logar terrestre, para todas as estrellas circumpolares.

76. Depois se, acompanhando uma d'estas estrellas, ou outra qualquer, no seu movimento diurno, observarmos as suas distancias zenithaes AZ, A′Z, A″Z..., e os azimuths respectivos, acharemos, pela resolução de qualquer dos triangulos $A^{(n)}ZP$, que é a distancia $A^{(n)}P = AP$.

Chamando

$$ZP = D,\ A^{(n)}Z = z^{(n)},\ A^{(n)}\,ZP = \mathrm{A}^{(n)},\ A^{(n)}P = \Delta^{(n)},$$

(*a*) A mesma posição é intermedia entre as relativas a cada par d'alturas correspondentes, se não influem sensivelmente no azimuth as variações de declinação e refracção no intervallo d'ellas.

Se influem, ainda essa posição é intermedia entre as duas, depois de se atrazar a segunda da quantidade

$$\delta A = \frac{\operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} A \operatorname{sen} z}\,\delta\Delta + \left(\frac{1}{\operatorname{tang} A \operatorname{tang} z} - \frac{1}{\operatorname{sen} A \operatorname{tang} D}\right)\delta z.$$

É o que mostra a differenciação da equação

$$\cos A = \frac{\cos \Delta - \cos D \cos z}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} z},$$

attendendo a $\cos \Delta \cos z - \cos D = -\cos D \operatorname{sen}^2 z + \cos A \operatorname{sen} D \operatorname{sen} z \cos z$, que se tira d'ella.

Tambem é facil transformar a expressão de δA no systema

$$\operatorname{sen} S = \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} \Delta},\ \delta A = \frac{\delta\Delta}{\operatorname{sen} S \operatorname{sen} z} - \frac{\cot S}{\operatorname{sen} z}\,\delta z.$$

o calculo póde fazer-se pela fórmula:

$$\cos\Delta^{(n)} = \cos A^{(n)} \operatorname{sen} D \operatorname{sen} z^{(n)} + \cos D \cos z^{(n)},$$

que se transforma em qualquer dos tres systemas:

$$\cot\varphi = \cos A^{(n)} \operatorname{tang} z^{(n)},\ \cos\Delta^{(n)} = \frac{\cos z^{(n)} \operatorname{sen}(D+\varphi)}{\operatorname{sen}\varphi},$$

$$\cot\psi = \cos A^{(n)} \operatorname{tang} D,\ \cos\Delta^{(n)} = \frac{\cos D \operatorname{sen}(z^{(n)}+\psi)}{\operatorname{sen}\psi},$$

$$\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\Delta^{(n)} = \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}(D - z^{(n)}) + \operatorname{sen} z^{(n)} \operatorname{sen} D \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A^{(n)}.$$

D'estes o terceiro é menos sujeito á influencia dos erros tabulares, quando $\Delta^{(n)}$ é pequena.

Logo os logares das projecções das estrellas na esphera celeste são círculos cujos planos cortam perpendicularmente o eixo OP; de sorte que este eixo é o da rotação da esphera celeste, e P é o polo visivel.

A distancia polar da estrella acha-se immediatamente observando a sua distancia zenithal meridiana z, e tomando:

$$\Delta = z + D, \text{ ou } \Delta = \pm(D - z),$$

conforme passar o astro ao sul ou ao norte do zenith. No segundo caso deve usar-se do signal superior ou do inferior, segundo for a passagem superior ou inferior; isto é, deve usar-se d'aquelle dos dois signaes que fizer positiva a expressão de Δ.

77. Se fixando o instrumento no plano do meridiano, ou em qualquer vertical, notarmos os tempos das passagens consecutivas d'uma estrella por esse vertical, conheceremos o andamento do relogio relativamente á estrella; como melhor explicaremos quando tractarmos do *instrumento das passagens.*

78. Se dos mesmos triangulos tirarmos os valores dos angulos $ZPA^{(n)} = P^{(n)}$ pela fórmula:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} P^{(n)} = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{z^{(n)} + \Delta^{(n)} - D}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{z^{(n)} + D - \Delta^{(n)}}{2}\right)}{\operatorname{sen} \Delta^{(n)} \operatorname{sen} D} \right)}$$

ou pelo systema:

$$\cot \varphi = \cos A^{(n)} \operatorname{tang} z^{(n)}, \quad \cot P = -\frac{\cot A \cos (D + \varphi)}{\cos \varphi},$$

acharemos que estes angulos são proporcionaes aos intervallos de tempo comprehendidos entre o instante da passagem meridiana e os instantes em que se observam as respectivas distancias zenithaes. D'onde resulta que o movimento diurno dos astros é uniforme.

79. Portanto:

1.º O movimento diurno dos astros é circular e uniforme.

2.º O eixo, envolta do qual tem logar este movimento, parece passar pelo observador e por um ponto da esphera celeste, cuja distancia zenithal é a semisomma das duas distancias zenithaes de qualquer das estrellas circumpolares na suas passagens superior e inferior, correctas da refracção.

A exactidão d'estes resultados, e o modo como, para a obter, se devem corrigir as observações em que elles se fundam, serão o objecto de capitulos subsequentes, nos quaes faremos conhecer assim éstas correcções, como os instrumentos mais perfeitos, e as condições mais favoraveis, com que devem fazer-se as observações.

80. No genero dos instrumentos, que 'neste capitulo temos descripto, ha um mais perfeito, chamado *circular d'alturas e azimuths,* de que os astronomos usam muito.

A substituição d'um circulo inteiro em logar do quarto de circulo; e os cuidados empregados em fazer estavel a verticalidade do eixo de rotação, e em diminuir o attrito d'elle sôbre o circulo azimuthal, fazem este instrumento muito preferivel ao antigo quarto de circulo.

VII

Do equatorial

81. Supponhamos um apparelho similhante áquelles de que se tractou no capitulo precedente, mas collocado de modo que o seu eixo, em vez de ser vertical, seja parallelo ao eixo de rotação diurna. Teremos então (Fig. 23 e 24) o *equatorial* ou *machina parallatica*, fixo ou movel, no qual o movimento em ascensão recta, ou horario, do circulo de declinação, e o movimento em distancia polar do oculo, correspondem respectivamente ao movimento em azimuth do circulo vertical, e ao movimento em altura do oculo do altazimuth.

82. Se pelos movimentos, horario do circulo de declinação, e de distancia polar do oculo, dirigirmos o eixo optico para uma estrella; e depois a acompanharmos com o movimento do circulo de declinação, de modo que a conservemos no plano d'este circulo: continuaremos sempre a vêl-a sensivelmente na direcção do eixo optico; do qual se desviará apenas muito pouco em virtude de variações devidas á refracção, e a outras causas que fazem mudar a sua posição apparente. O que mostra que a declinação é constante.

Se compararmos este movimento do circulo de declinação, indicado no circulo equatorial, com o andamento d'um bom relogio, acharemos sempre os arcos equatoriaes em proporção com os intervallos de tempo correspondentes. E se o machinismo do relogio, regulado pelo tempo sideral, estiver ligado com o instrumento de modo que o movimento d'aquelle se communique tangencialmente ao circulo equatorial, a estrella não sahirá do plano do circulo de declinação. Por conseguinte o movimento é uniforme.

Ficam assim comprovadas materialmente a circularidade e a uniformidade do movimento diurno.

83. Mas o principal uso do equatorial é determinar as differenças d'ascensão recta e de declinação entre um astro desconhecido e um conhecido, por exemplo, entre um novo planeta ou cometa e as estrellas conhecidas, com as quaes os comparamos.

Para isso, além dos dois fios do reticulo focal do oculo, que se cruzam perpendicularmente entre si e ao eixo optico, e que devem ser, um perpendicular ao plano do círculo de declinação, outro parallelo ao mesmo plano, ha mais um fio movel parallelo ao primeiro; e o movimento dá-se-lhe por um parafuso micrometrico, cuja graduação se tem previamente determinado.

Supponhamos que uma estrella precede o astro, de cujo parallelo está tão proxima que, sem dar movimento ao oculo, se podem ver ambos no campo d'elle. Collocado o oculo de modo que a estrella siga o fio fixo parallelo ao equador, move-se o parafuso micrometrico até que o astro siga o fio movel.

Então a differença dos tempos sideraes das passagens da estrella e do astro pelo fio parallelo ao plano do círculo de declinação dará a differença das suas ascensões rectas em tempo: e a distancia entre os dois fios parallelos ao equador, indicada pelo micrometro do parafuso, dará a differença das declinações.

84. Em alguns equatoriaes o reticulo compõe-se de dois fios encruzados, e de mais quatro que unem as extremidades d'elles.

Supponhamos conhecido o intervallo de tempo Θ que as estrellas gastam em atravessar o fio AC (Fig. 25). Da razão entre este tempo e o actual θ, que o astro observado emprega em percorrer o parallelo ac, deduzir-se-ha a differença $(Cc)''$ das declinações, conhecendo BC em arco; por ser (a)

$$\frac{AC - ac}{AC} = \frac{\Theta - \theta}{\Theta} = \frac{Cc}{BC};\ \text{e}\ (Cc)'' = \frac{Cc}{BC}.\ (BC)''.$$

(a) Rigorosamente, chamando Θ o tempo gasto pela estrella de comparação em percorrer o fio AC, Θ' o tempo que 'nessa passagem gastaria o astro observado, d a declinação da estrella, $d' = d + \delta d$ a declinação do astro, e T o tempo em que uma estrella equatorial percorreria o mesmo fio: temos

$$\Theta = \frac{T}{\cos d},\ \Theta' = \frac{T}{\cos(d + \delta d)}$$

que, desprezando os termos da segunda ordem em δd, dão

$$\frac{\Theta'}{\Theta} = \frac{\cos d}{\cos(d + \delta d)} = 1 + \text{tang}\ d.\ \text{sen}\ 1''.\ \delta d.$$

Mas o modo de observação, de que se fallou no número precedente, é preferivel; principalmente quando o movimento equatorial, que conserva os astros no campo do oculo, é dado pelo machinismo do relogio, deixando livre a mão do observador para tomar com perfeição a distancia dos parallellos dos dois astros pelo movimento do parafuso micrometrico.

85. Para o mesmo fim póde servir o reticulo annular (Fig. 26).

A semisomma dos tempos da immersão em a e da emersão em a''', assim como a dos tempos da emersão em a' e da immersão em a'', dão o tempo da passagem em m, no círculo de declinação NCS.

Para outra estrella se achará simillhantemente o tempo da sua passagem em n. E a differença dos tempos sideraes assim achados será a das ascensões rectas das duas estrellas.

Em quanto ás declinações, fazendo:

$$a'CS=\varphi,\ b'CS=\varphi';\ Cm=x,\ Cn=x';\ a'm=y,\ b'n=y';\ Ca'=r;$$

teremos as equações:

$$(y)''=\frac{15(t_a''-t_a')}{2}\cos d=(r)''\operatorname{sen}\varphi,\ (y')''=\frac{15(t_b''-t_b')}{2}\cos d'=(r)''\operatorname{sen}\varphi',$$

$$x'-x=\sqrt{r^2-y'^2}-\sqrt{r^2-y^2}=r(\cos\varphi'-\cos\varphi)=mn,$$

E na equação do texto deve empregar-se Θ' em logar de Θ. Mas a correcção $\operatorname{tang} d \operatorname{sen} 1'' \delta d$ é muito pequena para estrellas pouco distantes do equador; e para as outras póde usar-se primeiramente de Θ, e achar o valor approximado de δd, com o qual se calculará depois o valor

$$\Theta'=\Theta+\Theta \operatorname{tang} d \operatorname{sen} 1'' \delta d,$$

ou

$$\Theta'=\frac{\Theta \cos d}{\cos.(d+\delta d)},$$

que se deve empregar definitivamente.

que dão successivamente $\varphi, \varphi', \frac{mn}{r}$, e por conseguinte (a) $d-d'=\frac{mn}{r}(r)''$; sendo $(r)''$ o raio do annel em segundos de arco de círculo maximo, que se deve ter determinado. Para determinação póde fazer-se mover o oculo de sorte que um objecto percorra o diametro parallelo ao circulo de declinação, no qual se achará no tempo

$$t+\frac{t_\alpha''-t_\alpha'}{2} \text{ ou } t+\frac{t_\alpha'''-t_\alpha}{2},$$

sendo o intervallo $\frac{t_\alpha''-t_\alpha'}{2}=\frac{t_\alpha'''-t_\alpha}{2}$ deduzido de contactos successivos $t_\alpha, t_\alpha'', t_\alpha', t_\alpha'''$ com os bordos do annel.

Mas, se no annel se tiver pôsto um fio parallelo ao equador, que passe pelo centro: a metade do intervallo de tempo gasto por uma estrella em percorrer esse diametro, multiplicado pelo coseno da declinação e por **15**, será o raio $(r)''$ (b).

(a) A differencial $\delta(mn)=-\operatorname{tg}\varphi'.\ \delta y'+\operatorname{tg}\varphi\ \ \delta y$ mostra que, perto das extremidades sul e norte do círculo, onde tang φ são muito pequenas, os erros δy e $\delta y'$ pouco influem em $x'-x$; e que, perto das extremidades éste e oeste, influem muito. Com tudo, como no primeiro caso a pequenez da corda torna mais difficil a apreciação dos instantes das immersões e das emersões, é necessario attender a este inconveniente.

No reticulo rhomboidal, sendo i a inclinação dos fios lateraes sôbre o equatorial, é

$$x'-x=(y'-y)\ \text{tang}\, i,\ \delta(x'-x)=\text{tang}\, i\ \delta(y'-y);$$

onde o factor tang i dá uma vantagem ou uma desvantagem constante, em qualquer logar do fio que se faça a observação.

Vê-se pois que, escolhendo bem o logar das observações, o reticulo annular tem vantagem sôbre o rhomboidal; e, além d'isso, não é necessaria 'nelle a orientação de fios.

(b) Se o astro b tem movimento proprio, será necessario corrigir estes resultados.

Sejam: δa o movimento em ascensão recta em um segundo de tempo sideral;

Correcções do equatorial

86. No equatorial devem ser: o eixo horario de rotação parallelo ao eixo dos polos, isto é, a mesma a inclinação e a orientação d'estes eixos; o plano do circulo de declinação parallelo ao eixo horario; e o eixo optico do oculo parallelo ao mesmo plano. É necessario tambem que se conheçam: o *index* do ponto polar, ou o do ponto equatorial, do circulo de declinação; e o *index* do ponto culminante do circulo horario na passagem meridiana.

Suppomos o eixo do instrumento proximamente orientado por uma marca meridiana, ou ao menos pela bissecção do intervallo de tempo decorrido entre o nascimento e o occaso d'algumas estrellas.

$\delta\Delta$ o movimento em distancia polar no mesmo tempo; e i a inclinação b_1bb''' do parallelo apparente bb''' (Fig. 27). Baixando a perpendicular Cp a bb''', e pendo

$$\tau = \frac{t_a'' - t_a}{2}, \quad \tau' = \frac{t_b''' - t_b}{2},$$

temos

$$bp = \frac{15\,(1 - \delta a)\,\tau' \cos d'}{\cos i}, \quad Cp = \sqrt{r^2 - \left[\frac{15\,(1 - \delta a)\,\tau' \cos d'}{\cos i}\right]^2}. \quad np = Cp \operatorname{tang} i;$$

e facilmente se vê que é

$$\operatorname{tang} i = \frac{\delta\Delta}{15\,(1 - \delta a) \cos d'}.$$

D'onde resultam:

$$\text{correcção de } \tau' = \frac{np\ \cos i}{15\,(1 - \delta a) \cos d'} = \frac{Cp \cdot \delta\Delta \cos i}{[15\,(1 - \delta a) \cos d']^2}, \qquad /\delta$$

$$\text{correcção de } \Delta = Cn - Cp = Cp\left(\frac{1}{\cos i} - 1\right) = \tfrac{1}{2}\, Cp \cdot \left(\frac{\delta\Delta}{15\,(1 - \delta a) \cos d'}\right)^2.$$

87. *Erro de inclinação do eixo horario do instrumento, e index do ponto polar.*

Sejam (Fig. 28) CP o eixo dos polos; π a extremidade norte do eixo horario do instrumento; o a posição do zero do circulo de declinação; n_1, e n as posições do zero do nonio quando o eixo optico está respectivamente na direcção de π e na direcção d'uma estrella S; e façamos

$$PC\pi = a, oC\pi = \alpha, n_1C\pi = nCS = c.$$

Observe-se a estrella S, que suppomos bem determinada, uma vez ficando superior a parte A do circulo e inferior a parte B, outra (Fig. 29) vez trocando-se as posições d'estas partes; e seja Δ a distancia polar PCS.

Se, começando a graduação em o, e procedendo no sentido πAB, forem l, l' as leituras oPn (Fig. 28), oQn (Fig. 29), nas duas posições, teremos:

na primeira posição $\quad \Delta = l + c + \alpha - a = l + i - a$

na segunda posição $\quad \Delta = 360° - l' - c - \alpha - a = 360° - l' - i - a.$

Estas equações dão o *abatimento* do eixo horario de rotação a respeito do eixo polar; e o *index* do ponto polar, isto é, a leitura correspondente á direcção $C\pi$ do eixo optico:

$$a = \frac{360° + l - l'}{2} - \Delta, \; -i = \frac{l + l' - 360°}{2} \ldots . (1).$$

88. Se as divisões procederem do pólo para o equador desde 0° até 90° em cada um dos quatro quadrantes, e o nonio estiver em um braço perpendicular ao oculo (Fig. 30 e 31), como no equatorial do Observatorio de Coimbra, teremos:

primeira posição $\quad ES = OP = P\pi + \pi O = P\pi + on - o\pi - On,$

segunda posição $ES = OP' = P'\pi' + \pi'O = P'\pi' + o'n + o'\pi' + On$;

ou $$d = a + l - \alpha - c = a + l - i$$

$$d = a + l' + \alpha + c = a + l' + i,$$

que dão
$$a = d - \frac{l+l'}{2},\ i = \frac{l-l'}{2} \ldots (2);$$

as quaes tambem resultariam de mudar em (1) primeiramente l' em $360° - l'$, e depois l e l' em $90° - l$ e $90° - l'$.

89. Podemos substituir á observação da estrella a posição horizontal do oculo. Se na primeira posição este aponta para o sul, e na segunda para o norte, deveremos substituir nas fórmulas (1) $180° + l'$ em logar de l'; e $90° + D$ em logar de Δ, sendo D a colatitude do logar: o que mudará (1) em

$$a = \frac{l-l'}{2} - D,\ -i = \frac{l+l'}{2} - 90° \ldots (1)'.$$

No equatorial de Coimbra fazendo estas mesmas observações, em ambas as quaes o braço do nonio se dirige para o zenith, teremos:

na primeira posição, ao sul, $\quad D = l - a + i$

na segunda posição, ao norte, $\quad D = l' - a - i$,

que dão
$$a = \frac{l+l'}{2} - D,\ i = \frac{l'-l}{2} \ldots (2)'.$$

90. *Erro d'orientação do eixo horario de rotação.*

Seja Δ a distancia polar conhecida d'uma estrella, que se observa a 6^h do meridiano, isto é, que se observa em um plano horario perpendicular ao meridiano. Chamando Δ_0 a distancia polar que dá a observação, a extremidade norte do eixo polar desviar-se-ha a quantidade $\gamma = \Delta - \Delta_0$ para leste ou para oeste, segundo for a observação anterior ou posterior á passagem meridiana. Se γ for negativa, o desvio será no sentido contrario, para oeste ou para leste.

91. *Erro de parallelismo do plano do circulo de declinação ao eixo de rotação.*

Seja ε o angulo a leste que faz o circulo de declinação com o eixo horario, isto é, seja $90° + \varepsilon$ o angulo que faz com o eixo horario o eixo de rotação do circulo produzido do lado d'este. Se pozermos o circulo de declinação de modo que fique horizontal o seu eixo, o angulo horario da projecção celeste H (Fig. 32) d'este eixo produzido será $90° - \delta P$; e, feita a operação a leste e a oeste, teremes dado ao instrumento um movimento horario de rotação $M = 180° - 2\delta P$,

de sorte que será
$$\delta P = 90° - \frac{1}{2} M.$$

Depois o triangulo ZPH, no qual são

$$ZP = D,\ P = 90° - \delta P,\ PH = 90° + \varepsilon,\ ZH = 90°,$$

dará
$$\cos P = \operatorname{tang} \varepsilon \cot D, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \operatorname{tang} D.\ \delta P.$$

92. *Erro do eixo optico.* Se observarmos duas passagens consecutivas d'uma estrella, tendo collocado o circulo a leste, proximamente no meridiano, e tendo dado o movimento horario de 180° para a segunda, o excesso do intervallo sideral das duas observações sôbre 24^h mostrará a inclinação do eixo optico sôbre o plano do circulo na primeira posição, para o oriente se for positivo; para occidente, se for negativo. Chamando θ este intervallo, será:

$$\text{collim. para or.} = \left(\frac{1}{2}\theta - 12^h\right) 15 \operatorname{sen} \Delta.$$

Se houver uma marca meridiana, desfaremos metade do espaço que o eixo optico descreve sôbre ella, na inversão, pelo movimento do reticulo.

93. Em quanto ao *index* do ponto culminante do circulo horario no instante da observação d'uma passagem meridiana, claro está que é a leitura correspondente á posição horizontal do eixo de rotação do circulo de declinação.

94. Os meios, que ficam expostos, determinam os erros instrumentaes relativos á posição do eixo horario, e á boa collocação do circulo de declinação e do eixo optico do oculo, tão approximadamente quanto é necessario para os corrigir pelo movimento dos parafusos respectivos, e quanto basta para as observações differenciaes, que não exigem o maior escrupulo em conseguir esse fim. Mas podem depois determinar-se simultaneamente com mais exactidão observando as passagens d'estrellas cujas ascensões rectas sejam bem conhecidas; do que prescindiremos 'neste logar.

VIII

Do oculo meridiano

95. O *oculo meridiano* ou *instrumento das passagens meridianas*, que serve para observar as passagens dos astros pelo meridiano, compõe-se de dois braços que se cruzam rectangularmente.

Um dos braços é o tubo do oculo. O outro, que contem o eixo de rotação do primeiro, é formado por dois troncos eguaes, junctos pelas bases maiores; e termina em extremidades ou munhões cylindricos.

As extremidades do braço de rotação descançam em golas da fórma de V, abertas em corrediças metallicas, as quaes estão presas a duas chumaceiras chumbadas em pilares que fazem parte d'um macisso de pedra cravado no terreno.

O oculo tem um reticulo de número par de fios, ordinariamente seis ou oito, um dos quaes é transversal, e os outros são perpendiculares a este, e equidistantes do medio dois a dois.

Em uma das extremidades do braço de rotação ha um semicírculo concentrico com elle. A alidade d'este circulo, movendo-se com o mesmo braço. indica o angulo que o eixo optico faz com a vertical, e traz assim mais facilmente o astro ao campo do oculo (*a*).

(*a*) Nos *instrumentos de passagens* modernos o semicirculo das alturas está preso ao tubo do oculo; e ao index d'estas anda annexo um nivel: de sorte que se um movimento do oculo desvia o nivel da sua posição, outro movimento egual do index o restitue a ella; e inversamente Ésta construcção é vantajosa por evitar que vergue o braço horizontal para a extremidade onde nas antigas se applicava o semicírculo, por diminuir o attrito na mesma extremidade, e por indicar melhor as mudanças d'altura.

Nos instrumentos de dimensões maiores os reticulos constam não só de oito fios fixos, ou mais, mas inda d'um fio cursor, parallelo aos verticaes, que se move por um parafuso micrometrico, para medir os desvios nas inversões, e para apreciar as correcções relativas á direcção do eixo optico e á orientação.

Para fazer contrapezo ao braço, e evitar o attrito, ligam-se os munhões com duas extremidades de duas alavancas, e suspendem-se pezos nas outras duas extremidades, á distancia conveniente dos pontos d'apoio.

96. O instrumento, quando está bem disposto para se fazerem com elle as observações, satisfaz ás condições seguintes:

1.ª *Horizontalidade do eixo de rotação.* Para verificar esta condição, suspende-se, parallelamente ao braço de rotação, um nivel que accusa a horizontalidade, como se disse no n.° 53. O corpo, pelo qual este nivel está suspenso, compõe-se de dois ramos rectangulares, que o braço toca sempre nos mesmos pontos quando se dá movimento ao oculo. E para verificar a uniformidade de posição do nivel no sentido do plano perpendicular ao eixo de rotação, serve outro nivel mais pequeno perpendicular a este eixo.

Dando ao oculo diversas inclinações sôbre o horizonte, obtendo em cada uma d'ellas as indicações do grande nivel, e conservando no pequeno uma posição constante da bolha, conhece-se a inclinação do eixo de rotação em cada uma das posições do oculo: o que serve para verificar a circularidade das extremidades do braço de rotação, ou para indicar as correcções de nivel que devem respectivamente empregar-se no calculo quando não se verifica aquella circularidade (*a*).

(*a*) Se os raios dos munhões não são eguaes nas secções onde se apoiam nas golas, o nivel não mostra esta imperfeição senão invertendo as extremidades do braço.

Supponhamos que as extremidades do braço (Fig. 33) têm differentes grossuras, de sorte que se podem considerar as secções que se apoiam nas golas, como bases d'um tronco de cone: e seja i a abertura d'este cone.

Na inversão a perpendicular an á aresta superior, da qual pende o nivel, descreve em volta da perpendicular ap á aresta inferior, que assenta nas golas, um cone cuja abertura é $2i$. Conseguintemente, se chamarmos a a inclinação accusada pelo nivel na primeira posição do braço, em que uma extremidade está mais elevada que a outra, e b a inclinação accusada pelo nivel na posição do braço invertido, temos:

$$a - b = 2i.$$

E como as inclinações do eixo 'nestas duas posições são:

$$\mathrm{I} = a - \frac{1}{2}\,i,\ \mathrm{I}' = b + \frac{1}{2}\,i;$$

resultam:

$$\mathrm{I} = a - \frac{1}{4}\,(a - b),\ \mathrm{I}' = b + \frac{1}{4}\,(a - b).$$

Tambem serve para verificar a horizontalidade do eixo de rotação um prumo, suspenso d'um ponto da extremidade objectiva, que, estando o oculo a prumo, deve bater em outro ponto d'uma marca posta na extremidade ocular (n.° 56).

O parafuso de chamada, posto pela parte debaixo da corrediça vertical d'uma das chumaceiras, serve com o parafuso do nivel, ou com o da marca da extremidade oculo, para trazer o eixo de rotação á horizontalidade, do modo ensinado nos n.^{os} 53 e 56.

collimação

$C = v_m + v_o$

97. *Perpendicularidade do eixo optico ao de rotação.* Para obter esta perpendicularidade, o que se chama *regular o eixo optico,* enfia-se uma marca distante, e nota-se o ponto d'ella onde se projecta o eixo; depois vira-se o braço horizontal de modo que se troquem as suas extremidades, e vê-se se o eixo ainda se projecta no mesmo ponto. No caso de não se projectar, move-se o reticulo por um parafuso lateral destinado para esse fim, até que o eixo se projecte no meio dos dois pontos onde se tinha projectado nas duas observações: e tenta-se successivamente esta bissecção, até que, em duas posições consecutivas, o eixo se projecte no mesmo ponto.

98. *Horizontalidade do fio transverso.* Para que este fio seja horizontal e os outros verticaes, dá-se o movimento de rotação á chapa que os contém, até que o transverso cubra uma recta horizontal traçada a grande distancia; e movendo o oculo, vê-se se os objectos cobertos pelos fios verticaes o continuam a ser.

99. *Orientação do eixo.* Marcada a meridiana approximadamente (n.^{os} 27 a 29), colloca-se o oculo de modo que, suspendendo dois fios a prumo, um do meio do ocular, outro do meio do objectivo, os seus prolongamentos encontrem aquella linha.

Depois verifica-se mais exactamente se o eixo optico está na direcção do meridiano, observando tres passagens consecutivas d'uma estrella circumpolar de perpetua apparição, e vendo se os dois intervallos, que separam estas passagens, são eguaes entre si, isto é, se são as semirevoluções diurnas da estrella. Se não o forem, move-se o parafuso da corrediça horizontal de uma das chumaceiras, de modo que a parte objectiva do oculo se desvie para o lado, oriental ou occidental, onde for maior o intervallo, até se conseguir a egualdade.

Esta prova suppõem o uso d'um bom relogio, experimentando pelo que se disse nos n.^{os} 65 e 66, e pelo que se hade dizer nos n.^{os} 104 e 105.

100. Collocado o instrumento, e feitas as verificações que ficam indicadas, procede-se ás observações das passagens meridianas, dirigindo o

oculo de modo que o astro entre no campo d'elle e siga o fio horizontal do reticulo, ou uma corda parallela e proxima d'esse fio, e notando depois a passagem por cada fio vertical. A semisomma das passagens por dois fios equidistantes do meridiano dá a epocha procurada; e o meio entre os valores d'ella assim achados dá a mesma epocha mais independente dos erros das observações. Teremos assim, como no n.º 31, para $2n+1$ fios verticaes,

$$T=\frac{\tau_1+\tau^{(2n+1)}}{2},\ T=\frac{\tau_2+\tau^{(2n)}}{2}\ \ldots\ldots;$$

e mais provavelmente $$T=\frac{\Sigma_1^{2n+1}\ \tau_x}{(2n+1)}.$$

Se o astro tem diametro sensivel, serão

$$T=\frac{e^{(1)}+s^{(2n+1)}}{2},\ T=\frac{e^{(2)}+s^{(2n)}}{2}\ \ldots\ldots;$$

e mais provavelmente $$T=\frac{\Sigma_1^{(2n+1)}\left(e^{(i)}+s^{(2n+2-i)}\right)}{2(2n+1)}.$$

Duração da passagem do semid. $\dfrac{s^{(i)}-e^{(i)}}{2}$.

A falta d'alguma entrada ou d'alguma sahida, ou a pouca confiança 'nella póde remediar-se com o conhecimento da duração da passagem do semidiametro por cada fio, tirada da Ephemeride, ou achada pela differença entre os dois toques em um dos fios.

Se o astro gasta tempo sensivel em desapparecer e reapparecer de trás dos fios, é melhor observar os dois toques dos lados do fio, e tomar a semisomma dos tempos d'elles.

A falta de equidistancia entre os fios correspondentes e o do meio exige uma correcção de que logo tractaremos.

Exemplo: No dia 6 de fevereiro de 1864, a observação da passagem meridiana do sol deu os seguintes resultados:

⊙	1	2	3	4	5	6	7	Meio ou $\frac{\Sigma}{14}$
Entr.	1	16	31	$20^h\ 42^m\ 45^s$	0,5	16	30	
Sah.	46	31	16	45 1	45,5	31	16	
S	47	47	47	87 46	46	47	46	$20^h 43^m 53^s,29$

E porque o tempo sideral ao meio dia verdadeiro era $21^h\ 18^m\ 1^s,53$, o relogio estava atrazado de $21^h\ 18^m\ 1^s,54 - 20^h\ 43^m\ 53^s,29 = 34^m\ 8^s,25$ sôbre este tempo.

101. Nas observações nocturnas, sendo vasados o braço horizontal e a columna de pedra na direcção d'elle, illumina-se o reticulo por uma luz, fronteira á extremidade d'esse braço, cujos raios, batendo em um espelho inclinado de 45° ao eixo do oculo, são reflectidos para o reticulo. E para que se vejam bem ao mesmo tempo o astro e o reticulo, põe-se na direcção do braço, entre o foco luminoso e o espelho, um corpo de forma tal que pela sua rotação gradúe a intensidade da luz, tomando posições nas quaes deixe passar maior ou menor porção d'ella.

IX

Uso do oculo meridiano para conhecer o andamento dos relogios

102. Estando horizontal o eixo de rotação, e bem regulado o eixo optico, se dirigirmos o oculo para qualquer estrella em noites successisivas, acharemos que os intervallos das passagens consecutivas dados por um bom relogio, são eguaes entre si, e aos das passagens consecutivas das outras estrellas.

'Nestas observações deve evitar-se o effeito da refracção, dispondo o reticulo de modo que os fios, onde se tomam as passagens, sejam parallelos ao plano vertical.

Mas, para que o isochronismo seja perfeito, é necessario applicar aos intervallos das passagens as correcções da variação da precessão, da *nutação* e da *aberração*, cujas leis adiante estudaremos, e que podem elevar-se a meio segundo de tempo, assim como a dos pequenos movimentos proprios das estrellas.

É necessario para o mesmo fim não usar das passagens d'estrellas muito proximas do polo; porque estas atravessam tão lentamente o campo do oculo, que é muito difficil apreciar bem os instantes em que estão nos planos visuaes dos eixos dos fios.

103. A respeito dos astros, que teem movimentos proprios consideraveis no intervallo das observações, não se dá este isochronismo; mas, quando estudarmos as leis d'aquelles movimentos, veremos que, se os intervallos das passagens se corrigissem do effeito d'elles, ainda subsistiria o mesmo isochronismo. O que confirma a generalidade e egualdade das revoluções diurnas dos corpos celestes.

104. A revolução diurna das estrellas, correcta da influencia da precessão, da nutação, da aberração, e do movimento proprio, dá para a medida do tempo a unidade mais perfeita que se tem achado; e que reune as vantagens: de ser commum o seu typo para toda a terra; de differir pouco da usualmente empregada, como adiante veremos; e de ser inalteravel, como se tem mostrado por considerações theoricas, e pela comparação das observações antigas com as modernas (Mec. *Poissan*, n.os 441, 442 e 443).

A esta unidade vamos referir todos os relogios astronomicos, os quaes, seja qual for o seu andamento, sempre se podem comparar com a *pendula sideral*, exactamente regulada pela revolução das fixas.

105. A comparação das passagens successivas d'uma estrella mostra se são eguaes as revoluções completas do relogio.

Para verificar que o andamento do relogio é uniforme durante cada revolução, comparemos entre si os intervallos das passagens de duas estrellas. Se forem τ, τ_1 as duas passagens consecutivas d'uma, em tempo do relogio que não regula exactamente pelo tempo sideral; τ', τ'_1, as duas passagens consecutivas da outra; r, r' os retardamentos do relogio sôbre a revolução sideral durante os intervallos $\tau - \tau_1$ $\tau' - \tau'_1$; e R esta revolução expressa em oscillações da pendula sideral, teremos:

$$\tau - \tau_1 = \mathrm{R} - r, \; \tau' - \tau'_1 = \mathrm{R} - r', \; \tau'_1 - \tau_1 = \tau' - \tau + r' - r.$$

Portanto, se a velocidade do ponteiro do relogio for a mesma, nos espaços que elle tem de percorrer nas partes do mostrador onde se acha durante os intervallos $\tau' - \tau'_1$, $\tau - \tau_1$, será $r = r'$, e $\tau'_1 - \tau_1 = \tau' - \tau$. D'onde resulta que, se observando as passagens de muitas estrellas que têem logar a differentes horas, forem eguaes os intervallos d'ellas, comcomparadas duas a duas, aos das passagens no dia seguinte, deveremos concluir que o andamento é bom durante o tempo que comprehendem estas passagens.

106. Quando o relogio retarda ou adianta consideravelmente sôbre o tempo sideral, encurta-se ou alonga-se a pendula. Mas, tendo-o assim approximado do andamento sideral, melhor será depois corrigir pelo calculo os tempos d'elle, quando ainda restar uma pequena retardação ou acceleração.

Supponhamos que o retardamento sôbre a revolução sideral é r, isto é, que durante uma revolução das estrellas, a pendula faz 86400 — r oscillações. O tempo t, referido ao dia sideral como unidade, é

$$\frac{t}{86400 - r},$$

onde t e r são numeros de oscillações da pendula; por conseguinte o mesmo tempo expresso em segundos sideraes é

$$\frac{t\,.\,86400''}{86400-r}=t''+\frac{r\,.\,t''}{86400-r}.$$

Se o relogio se tinha acertado n dias antes da observação, o tempo d'elle contado desde esse dia é $n\,.\,86400+t$; o que substituido por t na expressão precedente dá (*a*)

$$n^d+t''+\frac{r\,(n\,.\,86400''+t'')}{86400-r}=n^d+t''+nr''+\frac{r\,(t''+nr'')}{86400-r}.$$

Emfim, se n dias antes da observação o relogio não se acertou pelo tempo sideral, mas se conheceu que o seu atrazo sôbre este tempo era R, o tempo sideral correspondente ao do relogio será

$$n^d+\mathrm{R}+nr''+t''+\frac{r\,(t''+\mathrm{R}+nr'')}{86400-r};$$

(*a*) O mesmo se póde achar do modo seguinte:
Como a retardação em n dias é nr, estes n dias dão o ponteiro do relogio atrazado nr a respeito das n revoluções completas; e por isso a correcção do tempo t deve ser toda a pertencente a $t+nr$: o que dá, a contar do último meio dia, o tempo correcto

$$t''+nr''+\frac{r\,(t''+nr'')}{86400-r},$$

ou, a contar desde que se acertou o relogio,

$$n^d+t''+nr''+\frac{r\,(t''+nr'')}{86400-r}.$$

ou, proximamente $\qquad = n^{d} + R + nr'' + t'' + \dfrac{r\,(t''+R)}{86400-r'}$

se n não for muito grande.

O estado de atrazo ou adiantamento R, em que se acha a pendula em um dado instante, chama-se o seu *estado absoluto* nesse instante.

Tambem advertiremos que este modo de regular os relogios não exige orientação do oculo meridiano; e por isso não ha petição de principio no que se disse no n.° 99.

Como o instante da passagem por um fio do reticulo se aprecia tanto melhor quanto mais rapida ella é, convem para regular os relogios usar das estrellas mais proximas do equador (n.° 102).

Correcções do oculo meridiano

107. Como a bondade dos resultados das observações feitas com o oculo meridiano exige que o instrumento, e as suas diversas partes, estejam dispostos com a maior exactidão, é necessario proceder 'nisto escrupulosamente.

Mas em vez de levar as tentativas até o ponto de conseguir a perfeição na horizontalidade do eixo de rotação, na perpendicularidade d'este ao eixo optico, e na orientação, a que raras vezes se poderá chegar, basta obter mecanicamente a approximação necessaria para depois corrigir sem difficuldade pelo calculo os effeitos dos pequenos erros que ainda restarem.

108. *Erro de nivel.* Segundo o que dissemos nos n.os 50 e 53, voltando-se o observador para o braço de rotação, de modo que lhe fique á direita a extremidade *occidental* d'este braço, chamemos D, E, as leituras direita e esquerda do nivel. Trocando depois as extremidades do nivel, e acompanhando-as o observador de modo que fiquem á sua direita e á sua esquerda as mesmas extremidades physicas que antes ficavam, sejam D′, E′, as novas leituras direita e esquerda. Teremos:

Elev. da extr. *occid.* do eixo, $$L=\frac{D-E-(D'-E')}{4}\ldots.(1).$$

Se esta quantidade sahir negativa, representará o abatimento da mesma extremidade.

109. *Erro de collimação.* No caso de se poder avaliar o angulo subtendido pelo espaço que descreve a projecção do eixo optico sôbre uma marca perpendicular á sua direcção, quando se invertem as extremidades do braço, será a collimação metade d'esse angulo. É o que acontece se ha um fio cursor vertical movido por um parafuso micrometrico.

O seguinte processo é muito bom:

Tomada a passagem d'uma estrella pelos fios que precedem o eixo optico ideal, inverta-se o braço de rotação de sorte que os mesmos fios sejam precedidos por aquelle eixo, e continuando a observação, tomem-se as novas passagens 'nestes fios.

Supponhamos que o eixo ideal (Fig. 34) não é o quarto fio, mas sim *a;* tomando então, como acabamos de dizer, o tempo t da passagem por um dos quatro primeiros fios na primeira posição do braço, depois o tempo t' da passagem pelo mesmo fio na segunda posição do braço, e chamando i o intervallo entre as passagens por este fio e pelo quarto, será

Err. de collim. para *oriente*, $$C = \frac{15\,(t' - t - 2i)\,\text{sen}\,\Delta}{2} \ldots\ldots (2);$$

onde a multiplicação por sen Δ serve de reduzir o arco de parallelo a arco de circulo maximo, como veremos.

Se C sahir negativo, representará o erro de collimação do fio do meio para occidente do ideal.

110. *Erro de azimuth.* No caso de se poder avaliar, por um fio cursor, o angulo que subtende o espaço comprehendido, na marca vertical meridiana, entre a projecção meridiana do eixo e a projecção actual, será esse angulo o desvio azimuthal. Mas é muito bom o seguinte processo.

Sendo PZS $=$ A (Fig. 35) o desvio azimuthal do oculo, o triangulo ZPS dá

$$\cos D \cos \delta P = \text{sen}\, D \cot \Delta - \text{sen}\, \delta P \cot A;$$

ou, desprezando as quantidades δP^2 e δA^2,

A não é nunca negativo

$$\delta P = \frac{A\ \text{sen}\,(D - \Delta)}{\text{sen}\,\Delta}.$$

111. Seja θ_1 o tempo sideral da passagem meridiana d'uma estrella;

t_1 o tempo da observação dado pelo relogio; τ o atrazo absoluto do relogio sôbre o tempo sideral, no instante d'ella; e r a sua retardação diurna: tudo em horas. Suppondo δP oriental, será

$$\theta_1 = t_1 + \tau + \frac{A}{15} \frac{\text{sen}\,(D - \Delta_1)}{\text{sen}\,\Delta_1}.$$

A passagem d'outra estrella dará similhantemente:

$$\theta_2 = t_2 + \tau + \frac{r\,(t_2 - t_1)}{24 - r} + \frac{A}{15} \frac{\text{sen}\,(D - \Delta_2)}{\text{sen}\,\Delta_2}.$$

E como é $$\theta_2 - \theta_1 = AR_2 \star - AR_1 \star,$$

estas equações dão emfim

Desvio da extremidade norte do oculo para *oriente:*

$$A = 15\left[t_2 - t + \frac{r\,(t_2 - t_1)}{24^h - r} - (AR\star_2 - AR_1\star)\right] \cdot \frac{\text{sen}\,\Delta_2\,\text{sen}\,\Delta_1}{\text{sen}\,D\,\text{sen}\,(\Delta_2 - \Delta_1)} \quad (3).$$

É mais conveniente.

Onde se vê que as estrellas mais proprias para a determinação de A são aquellas nas quaes as distancias polares Δ_2, Δ_1, differem entre si perto de 90°, e uma d'ellas é muito pequena. Por isso convem que uma das estrellas seja proxima do pólo.

112. É muito propria para o mesmo fim a observação das passagens meridianas, superior e inferior, d'uma estrella circumpolar, por exemplo, de α da Ursa menor. Como na passagem inferior a distancia polar é $360^\circ - \Delta_2$, torna-se então a fórmula (3) em:

Desvio da extremidade norte do oculo para *oriente:*

$$A = 15\left[t_2 - t_1 + \frac{r(t_2 - t_1)}{24^h - r} - (AR_2\star - AR_1\star)\right]\frac{\operatorname{sen}\Delta_2 \operatorname{sen}\Delta_1}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen}(\Delta_2 + \Delta_1)} \ldots (4).$$

Esta fórmula suppõe que a primeira passagem observada é a superior. Quando fôr a inferior, mudar-se-ha o signal do segundo membro

Correcção da passagem.

113. Supponhamos (Fig. 36) que a perpendicular ao eixo de rotação encontra a esphera celeste em Z', e não no zenith Z, isto é, que $ZZ' = L$ é o erro do nivel. Como o plano de ZZ' é perpendicular á meridiana, o ponto H do horizonte é pólo d'este arco; e por isso, quando se observa uma estrella S, o triangulo PSH dá

$$-\cos\delta'P \operatorname{sen} D = \cos D \cot\Delta - \operatorname{sen}\delta'P \cot L,$$

ou, desprezando δP^2 e L^2,

$$\delta' P = \frac{L\cos(D - \Delta)}{\operatorname{sen}\Delta}.$$

O erro de collimação, transportado ao parallello da estrella, dá

$$\delta''P = \frac{C}{15 \operatorname{sen} \Delta}.$$

Em fim (n.° 110) o erro d'azimuth dá

$$\delta'''P = \frac{A}{15} \frac{\operatorname{sen}(D - \Delta)}{\operatorname{sen} \Delta}.$$

Reunindo as tres correcções $\delta'P$, $\delta''P$, $\delta'''P$, teremos a correcção total devida aos erros de nivel, de collimação, e d'azimuth; e, se conhecermos tambem o atrazo absoluto τ do relogio no instante t da observação, o tempo da passagem meridiana de qualquer estrella correcto será:

$$\theta = t + \tau + \frac{L}{15} \frac{\cos(D - \Delta)}{\operatorname{sen} \Delta} + \frac{C}{15 \operatorname{sen} \Delta} + \frac{A}{15} \frac{\operatorname{sen}(D - \Delta)}{\operatorname{sen} \Delta} \ldots (5).$$

114. Ordinariamente corrigem-se os tempos das passagens do effeito da aberração devida ao movimento diurno da terra, de que adiante tractaremos; de sorte que as ascensões rectas apparentes deduzidas d'elles são affectas sómente da precessão, da nutação, e da aberração devida ao movimento annuo da terra.

$A = \pm \frac{0'',30846 \operatorname{sen} D}{\cos \delta \sqrt{1 - C^2 \cos D}}$

Adoptando o coefficieute de Bessel (Tab. Reg. pag. XII), serve ainda a fórmula (5) para obter a passagem meridiana superior das estrellas tambem correcta da aberração diurna, usando 'nella de $C' = C - 0'',3090 \operatorname{sen} D$, *
em logar de C.

* Pª a latitude de Coimbra $C' = C \mp 0'',2360$.
O signal − para as passagens superiores;
" + " " inferiores.

X

Do quadrante de Troughton.

115. O *quadrante de Troughton* é um quarto de circulo de grande raio, fixo a uma forte columna vertical, cuja extremidade inferior conica encaixa em um pedestal terminado em tres pés, e sustentado por um alicerce firme. Mais acima a columna atravessa o tôpo annular do mesmo pedestal; podendo assim girar dentro d'este, e transportar comsigo um prato azimuthal, cujas divisões passam por dentro das d'um circulo concentrico fixo 'naquelle tôpo.

Na columna está fixo um nivel de bolha d'ar, que indica a sua verticalidade; e nos tres pés do pedestal ha parafusos que servem para a levar a esse estado combinando os seus movimentos com os dos parafusos do nivel (n.º 52).

A verticalidade do quarto de circulo, e a da recta que passa pelo centro e pela extremidade da graduação correspondente ao zenith, são indicadas por um prumo; o qual, pendente d'um ponto proximo da extremidade superior do eixo, deve rasar e cubrir outro ponto inferior, que determina com o primeiro uma recta parallela áquella e ao plano do quarto de circulo.

Finalmente um *oculo de prova* assentado na parte superior do instrumento, ou a simultaneidade das passagens d'uma estrella muito proxima do zenith pelo quadrante e pelo oculo meridiano, servem para indicar a boa direcção do eixo optico (*a*).

O limbo tem duas divisões, uma interior de graus e subdivisões do

(*a*) O *oculo de prova* é um oculo ordinario, que encaixa em duas virolas de faces parallelas, e tem no foco um reticulo composto de dois fios encruzados. O seu eixo optico regula-se fazendo-o assentar successivamente sôbre duas faces oppostas, o que produz o mesmo effeito que a inversão do braço horizontal do oculo meridiano.

grau, outra exterior de 96 partes e subdivisões d'ellas, que facilmente se reduzem ás do grau (*a*). O nonio tem um micrometro para avaliar partes ainda mais pequenas (n.° 43).

116. Colloca-se o instrumento na direcção do meridiano enfiando pelo eixo optico o centro d'uma marca meridiana. Póde servir para isso a marca onde se projecta o eixo optico do instrumento das passagens, se o centro d'esta marca está a tão grande distancia que é insensivel o angulo pelo qual se veriam d'elle os dois instrumentos; e se não acontecer assim, poderá tomar-se, a partir d'aquelle centro e na direcção este-oeste, uma distancia egual á das meridianas que passam pelos dois instrumentos, e collocar-se ahi outra marca que servirá para orientar o quadrante.

Quando não houver marca meridiana, que pela sua boa collocação e grande distancia mereça confiança, pôr-se-ha o quadrante em direcção tal que sejam simultaneas as passagens d'uma estrella, distante do zenith, por elle e pelo oculo meridiano.

117. Para achar a distancia do zero do nonio ao ponto onde a recta, tirada pelo centro de rotação parallelamente ao eixo optico, encontraria a graduação, isto é, para achar o que marca o nonio quando a altura é nulla, e que se chama *erro de index:* observaremos em uma noite a distancia zenital d'uma estrella tão proxima do zenith, que esta distancia seja inferior a um supplemento de poucos graus que o limbo tem além do quadrante; e dando ao instrumento um movimento azimuthal de **180°**, repetiremos na noite seguinte a mesma observação, na qual o ocular ficará 'naquelle supplemento.

Sejam $HN = A'$ (Fig. 37), $HN' = A''$ as alturas lidas nas duas observações, e $ON = c$ o erro de index. É claro que, suppondo a face do limbo voltada para a parte anterior da figura, ficará na segunda observação voltada para a parte posterior; de sorte que, virando-se o observador sempre para o limbo, ficará em uma das observações o ponto O á direita da vertical, e na outra á esquerda: por conseguinte, se em uma das observações ficar O entre V e N, na outra ficará N entre V e O, ou V entre O e N.

Chamando pois A a altura HO, serão:

$$A' = A - c, \quad A'' = A + c;$$

(*a*) Juncta á Ephemeride de 1805 ha uma tabella de reducção das partes d'uma das divisões ás da outra.

e por conseguinte $$A = \frac{A' + A''}{2},\quad c = \frac{A'' - A'}{2}.$$

A segunda d'estas expressões é o erro de index, que se applicará ás alturas lidas com o signal que tiver.

118. Collocado o quadrante na posição vertical e na direcção do meridiano, regulado o eixo optico, e achado o erro de index, pelos processos ensinados nos números precedentes; se, dirigindo o oculo para as estrellas circumpolares, tomarmos as alturas d'ellas nas passagens superiores e nas inferiores, e applicarmos a estas alturas as correcções da refracção, da aberração e da nutação, acharemos que, para cada logar, é a mesma a sua semisomma, ainda mais exactamente do que pelo quarto de circulo (n.º 75).

Portanto o eixo de rotação da esphera celeste passa pelo observador. E como se obtem o mesmo resultado em qualquer logar da terra, seguese que as distancias entre os pontos da superficie terrestre se devem considerar como infinitamente pequenas relativamente ás distancias das estrellas á terra, e o eixo de rotação da esphera celeste como passando pelo centro da terra.

119. Na observação das distancias zenithaes é necessario attender á espessura do fio horizontal do reticulo, e, além d'isso, ao diametro do astro, se é sensivel.

Attende-se ao diametro do astro tomando o contacto de um dos seus bordos, o superior ou o inferior, um pouco antes da passagem meridiana, e o do outro bordo um pouco depois; para que na semisomma d'estas distancias desappareça a influencia do semidiametro, e para que sejam ambas sensivelmente eguaes ás distancias meridianas dos mesmos bordos, ou careçam apenas de pequenas correcções para se reduzirem a ellas. E attende-se á espessura do fio combinando os contactos com elle de modo que a espessura desappareça dos resultados; ou calculando o semidiametro apparente do fio, e corrigindo as distancias zenithaes do effeito d'elle.

Designemos: pelos indices S, I, postos superiormente os contactos dos bordos superior e inferior do astro; pelos indices s, i, postos inferiormente os toques nas partes superior e inferior do fio; por L acompanhados de indices as distancias lidas do meio do fio ao zenith; por z acompanhados de indices postos superiormente as distancias zenithaes dos dois bordos; por z sem indice a distancia zenithal do centro; por e o semidiametro apparente do fio; e por r o do astro. Para os diversos contactos, suppondo-os tomados em quanto não varía a distancia zenithal do astro, temos as equações:

$$z^{(I)}=L^{(I)}_{(s)}-e,\ z^{(I)}=L^{(I)}_{(i)}+e,\ z^{(S)}=L^{(S)}_{(s)}-e,\ z^{(S)}=L^{(S)}_{(i)}+e.$$

$$z=z^{(I)}-r,\ z=z^{(S)}+r,$$

das quaes se deduz:

$$z=\frac{z^{(I)}+z^{(S)}}{2}=\frac{L^{(I)}_{(s)}+L^{(S)}_{(i)}}{2}=\frac{L^{(I)}_{(i)}+L^{(S)}_{(s)}}{2},$$

$$e=\frac{L^{(I)}_{(s)}-L^{(I)}_{(i)}}{2}=\frac{L^{(S)}_{(s)}-L^{(S)}_{(i)}}{2},$$

$$r=\frac{L^{(I)}_{(s)}-L^{(S)}_{(s)}}{2}=\frac{L^{(I)}_{(i)}-L^{(S)}_{(i)}}{2}.$$

Assim:

Se combinarmos por somma bordos differentes do astro com bordos differentes do fio, teremos o dobro da distancia zenithal do centro. Se combinarmos por differença o mesmo bordo do astro com bordos differentes do fio, teremos o diametro apparente do fio. Se combinarmos por differença o mesmo bordo do fio com bordos differentes do astro, teremos o diametro apparente do astro.

Para obter e por muitas observações podemos applicar a sua expressão precedente ás distancias zenithaes dos dois bordos d'uma esphera de grande diametro situada a distancia consideravel do observador.

Póde tambem medir-se a parte, que o fio cobre, d'uma marca linear collocada longe do observador perpendicularmente ao mesmo fio e ao eixo optico, e dividir metade d'esta parte pela distancia do observador á marca; o que dá sen e: ou dividir a semi-espessura do fio pela distancia focal, o que dá o mesmo seno. A espessura do fio acha-se enrolando-o em um cylindro de modo que cubra uma parte d'elle, e dividindo o comprimento da parte coberta pelo número de voltas do fio enrolado.

XI

Do circular mural.

120. Com o *quadrante mural* fez Bradley observações que se avantajaram muito em exactidão ás dos observadores que o tinham precedido. Mas depois foi o quadrante substituido pelo *circular mural*, que é o melhor dos instrumentos d'esta classe.

No *circular mural* o eixo de rotação está em um braço curto e grosso, que sustenta o circulo. Este braço está forte e seguramente cravado em um muro cuja face é, ao menos proximamente, parallela ao meridiano; e ha parafuzos proprios para lhe dar pequenos movimentos, a fim de trazer o circulo á posição vertical e á direcção do meridiano.

Quando o circulo gyra á roda do eixo de rotação, transporta o oculo; e as suas divisões passam defronte de seis nonios que formam arcos concentricos ao mesmo circulo, dispostos a distancias eguaes uns dos outros em volta d'elle, e ligados firmemente ao muro.

O oculo tambem se póde mover sôbre o plano do circulo, de modo que o seu eixo corresponda successivamente a todas as divisões d'elle.

O reticulo costuma ter fios verticaes parallelos ao do meio, e perpendiculares a um horizontal. Parallelamente a este ha outro, movel por um parafuzo cujo micrometro indica a quantidade do seu movimento.

121. A verticalidade do circulo verifica-se com cuidado por um prumo, ao qual se póde applicar um systema de repetição similhante ao exposto no n.º 57.

O parallelismo do eixo optico ao plano do limbo e ao meridiano verificam-se respectivamente, como se disse nos n.os 115 e 116, pela simultaneidade das passagens, no vertical d'elle e no oculo meridiano, d'uma estrella muito proxima do zenith, e d'outra muito proxima do horizonte. Ainda que 'nesta verificação haja algum pequeno erro, a sua influencia nas distancias zenithaes é quasi sempre muito pequena, como logo veremos.

O erro de index, que é de grande importancia, póde determinar-se, como d'antes se fazia para o quadrante mural, pela comparação da distancia zenithal d'uma estrella proxima do zenith, tomada com um *sector zenithal* de que abaixo tractaremos, ou transportada d'outro observatorio, com a distancia zenithal da mesma estrella tomada com o circular mural. Mas usa-se mais para esse fim d'um systema de observação em que se tomam, e se reduzem á mesma epocha, as distancias zenithaes, da imagem directa d'um astro, e da sua imagem formada pela reflexão em um banho de mercurio: como vamos vêr.

122. Supponhamos que o zero d'um nonio fixo corresponde á divisão μ, quando o eixo optico se dirige para o zenith. μ é o que 'neste instrumento se chama *erro de collimação*, ou *erro de index*, ou *index do ponto zenithal.*

Segundo for necessario, para enfiar um astro, mover o circulo no sentido directo ou no retrogado relativamente ás suas divisões, assim estas irão passando successivamente pelo nonio no sentido retrogrado ou no directo. Chamando pois z a distancia zenital do astro, e D a indicação do nonio quando se observa a imagem directa; e suppondo que o circulo se move no sentido retrogrado: é

$$D = \mu + z.$$

O signal de z mudará, se o circulo se mover no sentido directo.

Quando se observa a imagem reflectida, esta imagem fica tanto abaixo do horizonte, quanto a directa está a cima d'elle; porque, sendo a distancia do objectivo do oculo ao banho de mercurio insensivel relativamente á distancia do astro, dois raios que partirem d'um ponto do astro, um para entrar directamente no oculo, outro para ser reflectido no banho de mercurio, devem considerar-se como parallelos. Assim a distancia da imagem reflectida ao nadir é egual á distancia z' do astro ao zenith, e por conseguinte a indicação do nonio é então

$$R = \mu + 180^\circ - z'.$$

123. No caso de serem as observações simultaneas, ou de se reduzirem á simultaneidade pelas correcções de que logo fallaremos, é $z=z'$; e as equações precedentes dão

$$\mu=\frac{D+R}{2}-90^\circ.$$

124. No caso de serem $z=180^\circ$ e $z'=0$ nas expressões de D e R do n.º 122, o que terá logar quando se observar a coincidencia das imagens directa e reflectida do fio transverso, isto é, quando se observarem o nadir directamente e o zenith pela reflexão, será:

$$D=180^\circ+\mu=R,\ \text{ou}\ \mu=D-180^\circ.$$

125. Como não podem ser simultaneas as duas observações do astro, que devem dar μ pela fórmula do n.º 123, procede-se do modo seguinte:

Suppondo que se conhecem proximamente a distancia zenithal meridiana do astro e o erro de index, move-se o círculo até que a direcção do oculo corresponda quasi ao supplemento d'aquella distancia, e lêem-se com cuidado os nonios: então espera-se que a imagem reflectida do astro entre no campo do oculo; quando ella entra, move-se, por meio do parafuzo micrometrico, o fio horizontal movel até tocar um dos bordos, superior ou inferior, um pouco antes da passagem meridiana; e lê-se depois opportunamente a quantidade d'este movimento, que se ajuncta á distancia zenithal resultante da leitura dos nonios. Feita esta observação move-se o limbo para observar a imagem directa, e fazer tocar pelo fio horizontal o bordo d'ella, de denominação contrária ao observado da imagem reflectida; e conseguido isso, lêem-se tambem as respectivas indicações dos nonios.

D'este modo de observar as duas passagens resultam dois erros, de que logo tractaremos: o primeiro, por ser a observação feita fóra do fio do meio, ou do fio que está parallelo ao plano do círculo; o segundo, por não ser meridiana a distancia observada.

126. O número μ póde determinar-se, sem intervenção do fio micrometrico, por observações simultaneas do mesmo astro feitas por dois observadores differentes com dois circulares muraes; sendo estes circulares collocados um perto do outro na mesma sala d'observações, a fim de estarem ambos sujeitos a circumstancias meteorologicas identicas.

Em uma serie d'observações de distancias zenithaes directas e reflectidas designemos por

$$D_1, D_2 \ldots D_n; \; R_1, R_2, \ldots R_n;$$

as tomadas no primeiro circular:

e por $$D'_1, D'_2, \ldots D'_n; \; R'_1, R'_2, \ldots R'_n;$$

as tomadas no segundo circular.

Suppondo, por exemplo, que as observações simultaneas duas a duas se fizeram na ordem seguinte:

$$D_1 \text{ e } D'_1, \; R_2 \text{ e } R'_2, \; D_3 \text{ e } R'_3, \; R_4 \text{ e } D'_4;$$

e chamando μ, μ' os erros de index dos nonios dos dois circulos, teremos:

$$D_1 = \mu + z_1, \; R_2 = \mu + 180° - z_2, \; D_3 = \mu + z_3, \; R_4 = \mu + 180° - z_4,$$

$$D'_1 = \mu' + z_1, \; R'_2 = \mu' + 180° - z_2, \; R'_3 = \mu' + 180° - z_3, \; D'_4 = \mu' + z_4,$$

das quaes se tiram

$$\mu' - \mu = D'_1 - D_1 = R'_2 - R_2 = \frac{D'_1 - D_1 + R'_2 - R_2}{2} = A,$$

$$\mu' + \mu = D_3 + R'_3 - 180° = D'_4 + R_4 - 180°$$

$$= \frac{D_3 + R'_3 + D'_4 + R_4}{2} - 180° = B;$$

e por conseguinte

$$\mu' = \frac{A+B}{2}, \ \mu = \frac{B-A}{2}.$$

127. O *circulo mural* e o *oculo meridiano* são os dois instrumentos mais perfeitos, de que até agora se tem usado nos grandes observatorios, e ainda se usa em alguns, para observar a distancia zenithal meridiana dos astros, e o tempo da sua passagem pelo meridiano; elementos estes, com o primeiro dos quaes se determinam as declinações dos astros, quando se conhece a do zenith que é a altura do polo, e com o segundo se determinam as suas ascensões rectas. Por isso é necessario attender no uso d'elles ás correcções que resultam de pequenos erros nas suas verificações; o que já fizemos no oculo meridiano, e vamos fazer no circular mural.

Correcções do circular mural

128. *Erro de verticalidade.* Supponhamos que o ponto zenithal Z (Fig. 38) se desvia para o oriente ou para occidente, e toma a posição Z', sendo o ponto horizontal H polo do arco $ZZ'=L$ que elle descreve. Chamando z' a distancia observada ao falso zenith, e z a distancia ao verdadeiro zenith, o triangulo SZZ' dá:

$$\cos z = \cos z' \cos L;$$

da qual, se z' não é muito pequena, se tira

$$\delta' z = z - z' = \cot z' \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} L}{\operatorname{sen} 1''}.$$

129. *Inclinação do raio visual ao plano do círculo.* Se o astro se observa fóra do fio do meio, ou se o raio visual, correspondente a este fio, não é parallelo ao plano do círculo, as distancias zenithaes lidas são projecções das observadas, e por isso carecem de ser reduzidas a estas.

Seja z'' a distancia zenithal observada (Fig. 39), z' a lida, p o arco perpendicular abaixado do astro sôbre o plano do círculo, e P o angulo horario. Teremos:

$$\cos z'' = \cos p \cos z', \quad \operatorname{sen} p = \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P.$$

que, por serem P. p, $z''-z'$, pequenos angulos, dão

$$z''-z'=\cot z \operatorname{sen}^2\Delta\,\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}P}{\operatorname{sen}1''}.$$

130. *Erro de orientação do raio visual.* Seja z a distancia zenithal meridiana, e z'' a observada (Fig. 40). O triangulo SPZ dá

$$\cos z''=\cos D\cos\Delta+\operatorname{sen}D\operatorname{sen}\Delta\cos P;$$

e é

$$z=\pm(\Delta-D),$$

segundo está o astro áo sul ou ao norte do zenith. D'onde resulta

$$\cos z-\cos z''=2\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen}D\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}P;$$

ou, sendo $z-z''$ um pequeno arco,

$$z-z''=-\frac{2\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen}D}{\operatorname{sen}z\operatorname{sen}1''}\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}P.$$

131. As correcções dos n.[os] 129 e 130 reunidas dão

$$\delta''z=z-z'=\left(\frac{\cos z\operatorname{sen}\Delta-\operatorname{sen}D}{\operatorname{sen}z}\right)\frac{2\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}P}{\operatorname{sen}1''};$$

ou, pondo por z o seu valor $\pm(\Delta - D)$ que tem logar na passagem superior,

$$\delta''z = \pm \operatorname{sen} 2\Delta \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''}.$$

Ajuntando pois as correcções $\delta'z$ e $\delta''z$, teremos a correcção total:

$$\delta z = \pm \operatorname{sen} 2\Delta \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''} + \cot z \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} L}{\operatorname{sen} 1''}.$$

E porque é $\delta\Delta = \pm \delta z$,

será em fim:

$$\delta\Delta = \operatorname{sen} 2\Delta \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''} \pm \cot z \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} L}{\operatorname{sen} 1''} \dots (1).$$

132. Nas passagens inferiores pelo meridiano, temos

$$\cos z'' = \cos D \cos \Delta - \operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta \cos P, \quad z = D + \Delta,$$

que dão

$$\cos z'' - \cos z = 2 \operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P,$$

ou $$z - z'' = \frac{2 \operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} 1''};$$

por conseguinte

$$\delta''z = \frac{\cos z \operatorname{sen} \Delta + \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} z} \cdot \frac{2 \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''},$$

ou

$$\delta''z = \frac{\operatorname{sen} 2\Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''};$$

e finalmente $\delta z = \delta' z + \delta'' z, \ \delta \lambda = \delta z.$

A formula (1) tem assim logar em ambas as passagens: devendo usar-se do signal — no segundo termo, quando estiver o astro entre o polo e o zenith.

133. *Inclinação do fio horizontal.* Seja $A_{/}CA'_{/}$ (Fig. 41) a recta horizontal que passa pelo centro C dos fios, projectada na esphera celeste; $S_{/}S'_{//}$ as posições d'uma estrella quando toca o fio transverso SCS' nos pontos $S_{/}$, $S'_{//}$. As distancias zenithaes lidas são $ZA_{/} = z_1$, $ZA'_{//} = z_2$; e os erros d'ellas são $A_{/}S_1 = e_1$, $A'_{//}S'_{//} = e_2$. Teremos pois

$$z_1 - e_1 = z_2 + e_2.$$

E como, fazendo $A_{/}C = h_1$, $A'_{//}C = h_2$, os pequenos triangulos $A_{/}CS_{/}$, $A'_{//}CS'_{//}$, dão

$$\frac{e_1}{h_1} = \frac{e_2}{h_2}, \text{ ou } \frac{e_1}{e_1 + e_2} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}, \ \frac{e_2}{e_1 + e_2} = \frac{h_2}{h_1 + h_2},$$

resultam

$$e_1 = \frac{(z_1 - z_2) h_1}{h_1 + h_2}, \ e_2 = \frac{(z_1 - z_2) h_2}{h_1 + h_2}.$$

Em outra distancia h_x do ponto C, será:

$$e_x = \frac{z_1 - z_2}{h_1 + h_2} . h_x, \ z = z_x \mp e_x \dots . (2).$$

Para cada estrella póde tomar-se por $\frac{h_x}{h_{/} + h_2}$ a razão dos intervallos de tempo correspondentes.

XII

Do circular meridiano.

134. O circular meridiano, hoje adoptado na maior parte dos bons observatorios, é a reunião do oculo meridiano com o circular mural em um só instrumento.

A uma extremidade do braço de rotação, que deve ser mais curto e mais grosso que o do simples oculo meridiano, está firmemente ligado um circulo graduado de grande raio; e na outra extremidade ha um systema proprio para fixar o braço de rotação, e para lhe dar pequenos movimentos.

Sôbre os pilares, onde assenta o braço de rotação, ha microscopios cujos eixos opticos, perpendiculares ao plano do circulo graduado, se projectam nas divisões do mesmo circulo que vão passando defronte d'elles; e, para completar as leituras, ha parafuzos micrometricos que movem os reticulos dos microscopios.

A luz proveniente d'um foco luminoso, sendo reflectida em espelhos convenientemente inclinados, illumina não só o reticulo do oculo, senão tambem a graduação do circulo nos logares onde deve ler-se, e os reticulos dos microscopios.

135. Os erros do eixo de rotação e do eixo optico d'este instrumento corrigem-se e apreciam-se como se disse nos n.os **96, 97, 108, 109, 110, 111**; e attende-se á influencia do que ainda restar d'elles nas passagens meridianas como se disse nos n.os **113** e **114**; advertindo que, se o observador não muda de posição quando se trocam as extremidades do nivel, deve usar-se, em logar da fórmula (1) do n.º **107**, da seguinte:

$$L = \frac{D - E + D' - E'}{4}.$$

A perpendicularidade do circulo ao eixo de rotação póde verificar-se como se disse no n.º 121.

136. O collimador, posto na extremidade do oculo onde se applica o olho do observador, é um ocular composto, dentro do tubo do qual ha um vidro que se póde inclinar á vontade. Dá-se a este vidro a inclinação necessaria para que, batendo 'nelle uma luz intensa recebida por uma abertura lateral, cheguem ao olho do observador duas imagens dos fios do reticulo, uma directa, outra proveniente da reflexão em um banho de mercurio posto debaixo do objectivo.

Se a imagem reflectida do fio do meio coincide com a directa, o eixo optico está no plano vertical. Se tambem a imagem reflectida do fio transverso coincide com a directa, o eixo optico é vertical, e por isso perpendicular ao eixo de rotação, já horizontal: conseguintemente a sua extremidade objectiva corresponde então ao ponto nadir.

137. Chamando ν a leitura correspondente ao nadir, a correspondente ao zenith será

$$\mu = \nu \pm 180^\circ;$$

o que é conforme com o que se disse no n.º 124.

Por conseguinte, chamando z a distancia zenithal observada do astro, e L a leitura correspondente, serão:

$$\mu = \nu \pm 180^\circ,\ L = \mu + z,\ z = L - \mu.$$

Se as leituras diminuirem quando crescerem as distancias zenithaes, mudaremos o signal de z nestas equações.

138. Attende-se á influencia nas distancias zenithaes dos erros da verticalidade do circulo, do eixo optico ou da direcção do raio visual, e de inclinação do fio transverso, como se disse nos n.os 131 e 133.

XIII

Do sector zenithal.

139. As equações dos n.^{os} 128, 129, 130,

$$\cos z_{,} = \cos z'' \cos L,\ \cos z'' = \cos p \cos z',\ \cos z - \cos z_{,} = 2 \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P,$$

ou
$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(z_{,} - z'') = \frac{\cos z'' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} L}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(z'' + z_1)},$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(z'' - z') = \frac{\cos z' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} p}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(z'' + z')},$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(z_{,} - z) = \frac{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(z_{,} + z)},$$

mostram que, no caso de ser muito pequena a distancia zenithal, podem os erros L, p, P dar correcções mais attendiveis, $z_{,} - z''$, $z'' - z'$, $z - z_{,}$. Por isso convém neste caso ser muito escrupuloso na correcção dos erros do zenith e do eixo optico, e na reducção das distancias zenithaes ao meridiano; e primeiro que tudo escolher um instrumento em que aquelles erros se possam attenuar mais efficazmente.

Para este fim reduz-se o limbo a um pequeno número de graus, dando-lhe um raio muito grande, e suspendendo-o d'um eixo de rotação similhante ao do oculo meridiano. Diminue-se assim a influencia dos erros da graduação; e tornam-se mais perfeitas, pela inversão, a verticalidade do limbo e a direcção do eixo optico.

O instrumento assim construido e assentado é o *sector zenithal.*

140. Com o sector observe-se uma estrella proxima do zenith em duas noites consecutivas, invertendo-o na segunda; e, suppondo o zero da graduação entre as duas posições do oculo, tome-se a semisomma das duas leituras. Esta semisomma será a distancia zenithal da estrella; e comparando-a com a primeira leitura, ter-se-ha o erro do index, como no n.° **117,**

$$\text{erro de index} = \frac{z+z'}{2} - z = \frac{z'-z}{2},$$

que se poderá applicar nas outras observações feitas com o mesmo instrumento.

Mas a avaliação das distancias zenithaes pela semisomma das duas leituras em posições inversas do limbo deve ter-se como mais exacta; e por isso ha *sectores zenithaes* de tal modo construidos, que o limbo, por estar preso a um apparelho, cujas extremidades conicas encaixam em duas barras horizontaes firmemente ligadas com o braço de rotação e podem gyrar em volta dos pontos de inserção 'nellas, se inverte mudando a face de *este* para *oeste*, ou ás avessas, sem que seja necessario inverter o mesmo braço.

Esta construcção permitte, pela rapidez da inversão, observar na mesma noite duas vezes o astro, em duas posições inversas, uma pouco antes da passagem meridiana, outra pouco depois, de um modo similhante ao indicado no n.° **125**; mas a reducção das distancias extrameridianas á meridiana deve fazer-se com muito escrupulo, como já dissemos.

XIV

Do instrumento de passagens no primeiro vertical.

141. Este instrumento, de que se usa em alguns observatorios, é um oculo similhante ao meridiano, collocado de modo que o eixo de rotação fique no plano meridiano, e o oculo no primeiro vertical, isto é, no plano vertical cujo azimuth é 90°.

Para collocar no meridiano o eixo de rotação do braço, que deve ser todo vasado, põe-se 'neste uma lente objectiva, e outra ocular com o competente reticulo; dirige-se para uma marca meridiana; e nota-se o ponto d'ella onde se projecta o encruzamento dos fios. Depois dá-se ao braço um movimento de rotação de 180° em torno do eixo, de modo que as extremidades do oculo que apontavam para léste e para oeste se troquem apontando respectivamente para oeste e para léste; e nota-se tambem o ponto da marca meridiana onde agora se projecta o mesmo encruzamento dos fios. Finalmente, movendo o reticulo, divide-se ao meio o espaço percorrido pela projecção sôbre a marca; e, conseguida a bissecção o mais perfeitamente que for possivel, move-se o braço até que o encruzamento se dirija para o centro da marca.

Collocado o eixo de rotação no meridiano, e nivellado, põe-se uma marca, a léste ou oeste, na direcção do eixo optico do oculo, e regula-se este eixo como se disse no n.° 97.

Ficando o eixo horizontal de rotação no meridiano, e o eixo optico do oculo perpendicular a elle, conseguintemente na direcção este-oeste, fica o instrumento na posição em que deve estar.

142. Seja (Fig. 42) $S'ZS''$ o primeiro vertical; $S'SS''$ o parallelo d'uma estrella, que atravessa aquelle circulo nos pontos S', S''; e P o polo.

O triangulo PZS', rectangulo em Z, dá

$$\cos P = \cot \Delta \tang D \; . \; . \; . \; (1);$$

onde Δ designa a distancia polar da estrella, e D a distancia do polo ao zenith, ou a *colatitude*. Portanto:

1.° Se a estrella é conhecida, e se a observação dá o intervallo de tempo P decorrido entre as passagens pelo meridiano e uma das passagens pelo primeiro vertical, ou o intervallo de tempo 2P decorrido entre as passagens pelo primeiro vertical, sendo estes intervallos convertidos em arco, a equação (1) dará a colatitude D.

2.° Se a estrella não é conhecida, mas é conhecida a colatitude de outro logar onde tambem se observam as duas passagens d'ella pelo primeiro vertical: chamando D′, P′, as quantidades relativas ao logar cuja colatitude não se conhece, as equações

$$\text{tang } D = \cos P \text{ tang } \Delta, \quad \text{tang } D' = \cos P' \text{ tang } \Delta,$$

darão

$$\text{tang } D' = \text{tang } D \,.\, \frac{\cos P'}{\cos P}.$$

3.° Se quizermos formar um catalogo d'estrellas por observações de passagens pelo primeiro vertical feitas em um logar cuja colatitude é conhecida, a equação (1) dará Δ; e os angulos horarios $\frac{S'PS''}{2} = P$, com as horas das observações, darão as passagens pelo meridiano, e por conseguinte as ascensões rectas.

143. Para a resolução d'estes problemas pelas passagens pelo primeiro vertical podem contribuir as observações em muitos fios parallelos, similhantemente ao que se faz nas passagens meridianas.

Seja M (Fig. 43) o encruzamento dos fios centraes no primeiro vertical; e supponhamos que se faz a observação das passagens nos pontos onde dois fios lateraes cortam o transverso, um em F ao norte de M, outro em F′ ao sul de M.

Chamemos $P_1 = ZPF$ o angulo horario observado em F; x o intervallo angular MF que separa este fio do do meio; A o azimuth FZP; e $a = 90° - A$ o angulo azimuthal MZF que subtende aquelle intervallo. Os triangulos MZF, ZPF darão

$$\text{sen } x = \text{sen } a \text{ sen } ZF = \cot A \text{ sen } \Delta \text{ sen } P_1,$$

$$\cos D \cos P_1 = \text{sen } D \cot \Delta - \text{sen } P_1 \cot A,$$

entre as quaes eliminando cot A, resulta

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} D \cos \Delta - \cos D \operatorname{sen} \Delta \cos P_1 \ldots . (2).$$

A observação no fio F′, attendendo a que nelle é $a = F'ZP - MZP = A' - 90°$, dará similhantemente:

$$-\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} D \cos \Delta - \cos D \operatorname{sen} \Delta \cos P_2 \ldots . (2)'.$$

Das equações (2) e (2)′ deduzem-se, por somma e por differença,

$$\operatorname{tang} D = \operatorname{tang} \Delta \cos \tfrac{1}{2}(P_1 + P_2) \cos \tfrac{1}{2}(P_1 - P_2) \ldots . (3),$$

$$\operatorname{sen} x = \cos D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(P_1 + P_2) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(P_1 - P_2) \ldots . (4).$$

Por tanto, fazendo a observação em dois fios equidistantes do fio do meio, a equação (3) dará a colatitude, se a estrella é conhecida, ou inversamente.

De sorte que esta observação equivale á que se fizesse no fio do meio, e para a qual fosse $\cos P = \cos \tfrac{1}{2}(P_1 + P_2) \cos \tfrac{1}{2}(P_1 - P_2)$.

A equação (4) dará o angulo x; e depois poderemos resolver os mesmos problemas, da determinação da latitude ou das distancias polares das estrellas, pela observação em um só fio, usando da equação (2), ou do systema equivalente

Uso d'esta formula

$$\operatorname{tang} k = \operatorname{tang} \angle \cos P_1,\ \operatorname{sen}(D - k) = \frac{\operatorname{sen} x \cos k}{\cos \Delta} \ldots . (5);$$

e mudando o signal de x no caso de se observar no fio lateral, que fica ao sul do fio do meio.

Pondo $\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{sen} k \operatorname{tang} P$, e eliminando $\operatorname{sen} k$ e $\operatorname{sen} \varphi$ entre

$$\operatorname{tang} k = \operatorname{tang} \Delta \cos P,\ \operatorname{tang} \varphi = \operatorname{sen} k \operatorname{tang} P,\ \operatorname{sen} \varphi = \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P,$$

das quaes só duas são distinctas, a segunda das equações (5) transforma-se em

$$\operatorname{sen}(D - k) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos \varphi}.$$

E esta, applicada a duas observações no mesmo fio, dará

$$\operatorname{sen}(D - k) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos \varphi}, \ \operatorname{sen}(D - k') = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos \varphi'};$$

e por isso

$$\operatorname{tang}\left(D - \frac{k + k'}{2}\right) = \operatorname{tang} \frac{k' - k}{2} \cot \frac{\varphi + \varphi'}{2} \cot \frac{\varphi - \varphi'}{2} \ldots . (6).$$

144. Como a passagem meridiana é intermedia entre as duas passagens pelo primeiro vertical, póde orientar-se este instrumento de um modo similhante ao empregado no n.° 99, quando ha o oculo meridiano para observar as passagens meridianas.

Assim este instrumento, pelo qual se resolvem facilmente os problemas indicados no n.° 142, póde collocar-se com muita exactidão pelas correcções de horizontalidade, collimação, e orientação, que se obtêm com tanto escrupulo como no oculo meridiano.

E, além d'esta vantagem, tem a importantissima: de não influirem nas observações feitas com elle as refracções, que alteram as distancias zenithaes e não os azimuths; nem a equação pessoal, que anticipa ou retarda egualmente as duas epochas nas quaes a estrella atravessa o primeiro vertical.

Correcções do instrumento de passagens no primeiro vertical

145. *Erro de collimação.* Seja ξ o erro de collimação do oculo para o norte. As ultimas equações do n.° 143 dão

$$\operatorname{sen}(D-k)=\frac{\operatorname{sen}\xi}{\cos\varphi},\ \operatorname{sen}(D-k')=\frac{\operatorname{sen}\xi}{\cos\varphi'}\ldots.(7);$$

e (6);

nas quaes se mudará φ' em $180°-\varphi'$, se na segunda observação se trocarem as extremidades do eixo de rotação.

Achado D, dará o erro de collimação a formula

$$\operatorname{sen}\xi=\operatorname{sen}(D-k)\cos\varphi=\operatorname{sen}(D-k')\cos\varphi'.$$

Se o erro ξ for para o sul, será negativo; e a correcção subtractiva.

146. *Erro de orientação.* Se ha um erro de orientação ν, o plano do instrumento, em logar de ser *sZs'*, é SZS' (Fig. 44).

Para duas estrellas S, S', os triangulos ZPS, ZPS', nos quaes são $PZS=90°-\nu$, $PZS'=90°+\nu$, dão

$$\cos D\cos P=\operatorname{sen}D\cot\Delta-\operatorname{sen}P\operatorname{tang}\nu\ldots.(a),$$

$$\cos D\cos P'=\operatorname{sen}D\cot\Delta'+\operatorname{sen}P'\operatorname{tang}\nu\ldots.(b).$$

As expressões de tang k e tang φ do n.° 143 transformam estas equações em

$$\operatorname{sen}(D-k)=\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\nu,\ \operatorname{sen}(D-k')=\operatorname{tang}\varphi'\operatorname{tang}\nu\ldots.(8),$$

que dão $$\operatorname{tang}\left(D-\frac{k+k'}{2}\right)=\operatorname{tang}\frac{k'-k}{2}\,\frac{\operatorname{sen}(\varphi-\varphi')}{\operatorname{sen}(\varphi+\varphi')}\ldots.(9);$$

mudando nesta equação φ' em $-\varphi'$, se a segunda observação se fizer para a mesma parte que a primeira.

E, achado D, dará o azimuth ν qualquer das equações

$$\tang \nu = \frac{\operatorname{sen}(D-k)}{\tang \varphi},\quad \tang \nu = \frac{\operatorname{sen}(k'-D)}{\tang \varphi'}.$$

'Nestas formulas, sendo P um angulo horario oriental e P' um occidental, ν é positivo quando a extremidade sul do braço de rotação se desvia para oriente.

Se, durante uma serie de observações, não ha desconfiança de variação azimuthal, basta que por duas d'ellas se determine ν; e depois as formulas (8) darão D por todas.

Póde fazer-se um uso analogo das equações do n.º 145.

Se se observa a mesma estrella, é $\Delta = \Delta'$; e a eliminação de $\tang \nu$ entre (a) e (b) dá logo

$$\tang D \cos \tfrac{1}{2}(P - P') = \tang \Delta \cos \tfrac{1}{2}(P + P').$$

147. Differenciando (2) ou (2') do n.º 143, e (a) ou (b) do n.º 146, em ordem a ξ e P, e a ν e P, respectivamente, e fazendo depois $\xi = 0$ e $\nu = 0$, acham-se tambem ξ e ν, quando se suppõem existir só um d'elles, pelas formulas

$$\xi = \pm \cos D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P\ \delta P,\quad \nu = \pm \cos D\ \delta P;$$

nas quaes se póde suppor $\delta P = AR - \dfrac{t + t'}{2}$, sendo t e t' os tempos sideraes das duas passagens observadas d'uma estrella.

148. *Erro de nivel.* Se ha erro i de nivel, o zenith apparente não coincide com o verdadeiro. Suppondo pois que a extremidade sul do eixo de rotação está elevada a quantidade angular i, isto é, que o falso zenith está ao norte do verdadeiro, será necessario ajunctar i ao valor de D dado pela formula (1).

149. Se existirem simultaneamente os erros ξ, ν, i; e se estes erros, já muito pequenos, se determinarem por uma marca a oriente ou ao occidente, e por um nivel, cada observação dará D pelas formulas

$$\operatorname{tang} k = \cos P \operatorname{tang} \Delta,\quad D = k + \xi \frac{\cos k}{\cos \Delta} + \nu \operatorname{sen} k \operatorname{tang} P + i \ldots . \;(10);$$

nas quaes se desprezam as potencias superiores dos erros, e será P negativo quando for occidental.

Mas, se não se conhecerem ξ e ν, poderão antes determinar-se por tres observações; porque, substituidas estas em (10), e eliminado $D - i$, as duas equações resultantes darão ξ, ν. Methodo de Struve

Como o signal do termo em ξ muda com a inversão do instrumento, e o do termo em ν com a mudança da observação oriental para a occidental, vê-se que se deve inverter o oculo no meio das passagens tanto orientaes como occidentaes, de modo que se tomem sempre nos mesmos fios physicos; e ler o nivel antes e depois das passagens tanto orientaes como occidentaes. Então, escrevendo as passagens orientaes consecutivas em uma columna, e as occidentaes em outra columna em ordem inversa, e chamando P_1, P_2, as semidifferenças dos tempos correspondentes das passagens oriental e occidental por um fio ao norte, e pelo mesmo fio ao sul, a formula (3) dará D, sensivelmente correcto; com tanto que no fim se applique i.

150. Se a distancia polar precisa da correcção $\delta\Delta$, a differenciação de (1) mostra que D precisará da correcção $\delta D = \frac{\operatorname{sen} 2D}{\operatorname{sen} 2\Delta}\,\delta\Delta$.

Se D é conhecido e se quer Δ, as equações $\operatorname{tg}\Delta = \frac{\operatorname{tg} k}{\cos P}$, $\operatorname{tg}\Delta_1 = \frac{\operatorname{tg} D}{\cos P}$, dão

$$\frac{\Delta - \Delta_{\prime}}{\cos^2\Delta} = \frac{1}{\cos P} \cdot \frac{k - D}{\cos^2 D} = -\frac{\operatorname{tang}\Delta \cot D}{\cos^2 D}\left(\xi \frac{\cos D}{\cos \Delta_{\prime}} + \nu \operatorname{sen} D \operatorname{tang} P + i\right),$$

isto é, $$\Delta = \Delta_{\prime} - \left(\xi \frac{\cos D}{\cos\Delta_{\prime}} + \nu \operatorname{sen} D \operatorname{tang} P + i\right) \cdot \frac{\operatorname{sen} 2\Delta}{\operatorname{sen} 2D}.$$

O mesmo se acharia, por dar (1) $\operatorname{tg} D\,\delta\Delta = \delta P . \operatorname{sen} P \operatorname{sen}^2\Delta$; e ser a *correcção* δP (n.º 147 e (1)) $= -\left(\frac{\xi}{\cos D \operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen} P} + \frac{\nu}{\cos D} + \frac{i \cot\Delta}{\operatorname{sen} P \cos^2 D}\right)$.

CAPITULO VII

Das ascensões rectas e declinações das estrellas; e do tempo sideral

151. Os processos, que ficam ensinados nos artigos precedentes, fazem conhecer a posição do meridiano em cada logar, e a altura do polo; e fornecem os meios mais exactos de observar o tempo da passagem de um astro pelo meridiano, a sua distancia zenithal meridiana, e a sua distancia zenithal em qualquer azimuth.

Estamos assim preparados para assignar as direcções visuaes dos astros, e as suas relações angulares, por qualquer dos dois systemas de coordenadas: *distancias zenithaes* e *azimuths*, ou *declinações* e *ascensões rectas*. Mas o exame attento dos meios d'observação empregados nos dois systemas faz ver que no primeiro não se póde usar d'instrumentos tão simples, tão estaveis, e tão appropriados á exactidão de cada uma das coordenadas, como no segundo; e demais, as observações feitas em pontos differentes da superficie terrestre não se podem comparar entre si, sem as reduzir primeiramente, por calculos não pouco trabalhosos, a um só logar. Por isso, sem desprezar o primeiro systema, que em alguns casos é vantajoso e até necessario, o segundo é o mais ordinariamente usado.

152. Se tomarmos por origem das ascensões rectas o plano horario d'uma estrella conhecida, ou, em geral, d'um ponto do qual se possa determinar o instante da passagem pelo meridiano, a differença entre esse tempo e o observado da passagem meridiana de qualquer outra estrella será a ascensão recta d'esta estrella.

O valor absoluto da somma da distancia zenithal meridiana com a co-latitude, ou da sua differença, segundo ficar a estrella ao sul ou ao norte do zenith, dará a distancia polar. E o complemento da distancia polar será a declinação; positiva se o astro estiver ao norte do equador, negativa se estiver ao sul.

153. O ponto cujo plano horario os astronomos costumam tomar para origem das ascensões rectas, é aquelle onde o sol atravessa o equador, quando as suas declinações passam de austraes a boreaes, e que é por conseguinte um dos da intersecção da ecliptica com o equador. Este ponto, que determinaremos quando tractarmos da theoria do sol, chama-se *Aries*, e costuma designar-se pelo signal ♈.

As ascensões rectas contam-se seguidamente de ♈, no sentido de occidente para oriente, desde 0° até 360°, ou de 0^h a 24^h; e as distancias polares contam-se seguidamente, do polo do norte para o do sul, desde 0° até 180°. Por estas duas coordenadas fica completamente definida a projecção d'um astro na esphera celeste, ou a direcção do seu raio visual.

154. A regra que se deu no n.° 100 para tomar o tempo da passagem pelo fio central d'um oculo meridiano suppõe que são equidistantes d'esta as passagens pelo primeiro e pelo último fio, pelo segundo e pelo penultimo, etc. Mas, quando não se póde tomar algumas d'estas passagens, ou quando não se dá a equidistancia supposta, é necessario determinar os intervallos de tempo que decorrem entre as passagens pelos fios consecutivos, ou entre as passagens por cada um dos fios lateraes e pelo do meio, a fim de reduzir tudo a este.

Para isso consideremos as duas posições S, S′, da estrella (Fig. 45), quando os seus raios visuaes passam por dois fios do reticulo equidistantes do medio; e o polo P. Chamando 2θ o angulo visual subtendido pelos dois fios, o qual é medido pelo arco de círculo maximo SS′; e 2P o angulo horario que elles comprehendem: o triangulo PSS′ dá

$$\cos 2P = \frac{\cos 2\theta - \cos^2\Delta}{\operatorname{sen}^2\Delta}, \text{ ou } \operatorname{sen} P = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\Delta}.$$

155. Se a estrella for equatorial, e chamarmos $P_{(e)}$ o angulo horario descripto por ella, entre os mesmos fios, será

$$\operatorname{sen} P_e = \operatorname{sen}\theta;$$

por conseguinte

$$\operatorname{sen} P_{(e)} = \operatorname{sen} P \operatorname{sen} \Delta \ldots . (1).$$

Quando P é muito pequeno, esta equação dá

$$\frac{P}{15} = \frac{P_e}{15 \operatorname{sen} \Delta} \ldots . (2).$$

Quando P não for muito pequeno, usaremos, em logar de (2), da equação rigorosa (1), ou da mais approximada

$$\frac{P}{15} = \frac{P_e}{15 \operatorname{sen} \Delta}\left(1 + \frac{1}{6} P_e^2 \operatorname{sen}^2 1'' \cot^2 \Delta\right) \ldots . (2').$$

Suppondo, por exemplo, $\frac{P_e}{15} = 14^s,3$, e $\Delta = 1^\circ.25'.15'',1$, a fórmula (2) dá $\frac{P}{15} = 9^m.36^s,70$; e as fórmulas (1) e (2') dão $\frac{P}{15} = 9^m.36^s,87$.

156. Chamando pois i_1, i_2, i_3, 0, i_5, i_6, i_7 os intervallos equatoriaes entre as passagens por cada fio e pelo fio do meio, o tempo da passagem pelo fio do meio terá qualquer das expressões

$$T = T + \frac{i_1}{\operatorname{sen} \Delta},\ T = T_2 + \frac{i_2}{\operatorname{sen} \Delta},\ T = T_3 + \frac{i_3}{\operatorname{sen} \Delta},\ T = T_4,$$

$$T = T_5 - \frac{i_5}{\operatorname{sen} \Delta},\ T = T_6 - \frac{i_6}{\operatorname{sen} \Delta},\ T = T_7 - \frac{i_7}{\operatorname{sen} \Delta},$$

cujo meio dá

$$T=\frac{(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7)+(i_1-i_7+i_2-i_6+i_3-i_5)\operatorname{cosec}\Delta}{7}..(3)$$

Em virtude da equação (2′), deverá cada termo i_m de (3) multiplicar-se por

$$1+\frac{1}{6}(15i_m)^2\operatorname{sen}^2 1''\cot^2\Delta,$$

quando a estrella for muito proxima do polo.

157. A determinação dos intervallos equatoriaes dos fios é assim um dos elementos necessarios para usar dos resultados das observações feitas com um oculo meridiano. São muito convenientes para os obter as estrellas proximas do polo, como a *polar;* porque, observando o intervallo $\frac{P}{15}$ relativo a uma d'estas estrellas, a equação (2) dá o intervallo equatorial correspondente

$$i=\frac{P}{15}\operatorname{sen}\Delta,$$

no qual o erro de $\frac{P}{15}$ é muito attenuado pelo factor sen Δ.

Na verdade a incerteza das observações é maior nas passagens de taes estrellas; mas póde diminuir-se a sua influencia tomando em cada fio dois ou tres toques, externos e central, e reunindo um grande número de observações; porque o meio d'estas se deve suppor menos affectado pelos erros fortuitos, e subsiste sempre a vantagem da multiplicação pelo pequeno factor sen Δ. Assim um número n de observações, relativas á mesma estrella e ao mesmo intervallo de dois fios, dará

$$i = \frac{\Sigma P}{15\,n} \operatorname{sen} \Delta.$$

Para se apreciar a vantagem da observação das estrellas circumpolares na determinação dos intervallos equatoriaes basta dizer que 4ˢ de erro no intervallo da passagem da polar dão apenas 0ˢ,1 de erro no intervallo equatorial.

Exemplo: Mais de setenta observações de intervallos de passagens da polar pelos fios verticaes do circular meridiano de Coimbra, que serviram desde 3 de junho de 1857, deram os seguintes resultados:

$$\frac{P_1}{15}-\frac{P_2}{15},\quad \frac{P_2}{15}-\frac{P_3}{15}\quad \frac{P_3}{15}\quad \frac{P_5}{15}\quad \frac{P_6}{15}-\frac{P_5}{15}\quad \frac{P_7}{15}-\frac{P_6}{15}$$

$$9.^{m}26^{s},473;\ 9^{m}.29^{s},705;\ 9^{m}.26^{s},397;\ 9^{m}.27^{s},774;\ 9^{m}.24^{s},878;\ 9^{m}.23^{s},070;$$

dos quaes, suppondo $\Delta = 1^{\circ}\,27'$, se tiram, pela fórmula $Pe = P \operatorname{sen} \Delta$,

$$i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_5 \quad i_6 \quad i_7$$

$$43^{s},07;\ 28^{s},74;\ 14^{s},33;\ 14^{s},35;\ 28^{s},64;\ 42^{s},89.$$

E applicando á fórmula (3), resulta

$$T = \frac{T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7+0^{s},26 \operatorname{cosec} \Delta}{7}.$$

158. A equação (1) tambem se póde achar do modo seguinte:

Sejam (Fig. 46) F,F′ dois fios do reticulo. Quando o astro está em S, a sua direcção SAO passa pelo ponto A do fio F; e quando está em S′, depois de ter descripto a parte SS′ do seu parallelo, a sua direcção S′A′O passa pelo ponto A′ do fio F′. Cortando pois o cone SOS′ pelo plano AmA' parallelo á base, os raios visuaes do astro, S,S′, passarão pelos pontos do arco AmA'. O arco AMA′ descripto com o raio OA seria aquelle pelo qual passariam os raios visuaes do astro, se o arco SS′ fôsse equatorial. Assim, chamando 2E, 2π, os arcos, equatorial e do parallelo, cujos raios extremos passariam por A, A′, e R, r os seus respectivos raios, teremos, por ser commum a corda AA′, e por ser $\frac{r}{R} = \operatorname{sen} \Delta$,

$$R \operatorname{sen} E = r \operatorname{sen} \pi, \quad \operatorname{sen} E = \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \Delta;$$

e, no caso de ser π um pequeno arco,

$$E = \pi \operatorname{sen} \Delta.$$

Portanto: *para achar o número de graus d'um pequeno arco do equador, cujo comprimento é egual ao d'um arco de parallelo que tem o número de graus π, deveremos multiplicar π pelo seno da distancia polar*. E inversamente: para passar do primeiro para o segundo é necessario dividir pelo seno da distancia polar.

159. Se por observações convenientemente reduzidas determinarmos assim as ascensões rectas e as declinações das estrellas, poderemos fazer um *catalogo de estrellas*, no qual se achem, ao lado d'uma columna onde se inscrevam os nomes d'ellas, outras columnas onde se inscrevam as suas ascensões rectas e declinações, ou as suas ascensões rectas e distancias polares.

As variações das coordenadas durante um anno costumam tambem inscrever-se em outras columnas com o titulo de *variações annuas* em declinação, ou em distancia polar. Inscrevem-se além d'isso as variações seculares d'estas; e os *movimentos proprios*, se as estrellas o têm.

160. Se com as declinações e com as differenças das ascensões rectas determinarmos as distancias angulares das estrellas umas ás outras pela fórmula

$$\cos \delta = \cos P \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \Delta' + \cos \Delta \cos \Delta',$$

ou $$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \delta = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\Delta - \Delta') + \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \Delta' \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P,$$

acharemos que estas distancias são constantes; prescindindo das variações de ordem inferior devidas aos movimentos proprios.

D'onde resulta que ou as variações principaes das ascensões rectas e declinações são devidas a movimentos de todas as estrellas, de tal sorte combinados que as distancias mutuas d'ellas ficam invariaveis; ou a mudanças na origem d'onde se contam aquellas coordenadas, isto é, a mudanças de posição do ponto de aries e do polo. Adiante veremos que d'estas duas hypotheses a segunda, que é incomparavelmente mais simples, tambem é a verdadeira; e que os movimentos do ponto de aries e do polo constituem a *precessão* e a *nutação*, de que já temos fallado.

A mesma invariabilidade das distancias angulares das estrellas, de qualquer ponto da terra que sejam vistas, é uma nova prova de que as distancias entre os pontos da superficie terrestre são insensiveis quando se comparam com as distancias das estrellas á terra.

161. Formado o catalogo de estrellas: se observarmos a distancia zenithal ZS (Fig. 47) d'uma estrella, em um logar cuja latitude seja conhecida, teremos no triangulo ZPS os lados $ZP = D$, $ZS = z$, $SP = \Delta$; o que fará conhecer o angulo horario pela fórmula:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} P = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(z + \Delta - D) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(z + D - \Delta)}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D}}.$$

E o tempo sideral, que é a *ascensão recta do meridiano convertida em tempo*, será, no instante da observação,

$$\frac{\text{♈}PE}{15} = \frac{P}{15} + \frac{\text{♈}PS}{15},$$

isto é, $t = \frac{P}{15} + \frac{AR\star}{15} \ldots\ldots (4).$

Esta fórmula é geral, se os angulos horarios P se contam sempre seguidamente de oriente para occidente desde 0° até 360°; mas, se alguns se contarem de occidente para oriente, será para esses negativo o primeiro termo $\frac{P}{15}$.

Comparando o tempo sideral assim calculado com aquelle que o relogio marcar no instante da observação, conheceremos 'nesse instante o estado absoluto do relogio relativamente ao tempo sideral (n.° 106).

CAPITULO VIII

Aspectos da esphera celeste para os differentes logares da terra. Latitudes e Longitudes terrestres. Rotação da terra.

I

Definições dos circulos celestes e terrestres.

162. Com referencia ao movimento circular e uniforme das estrellas em volta do eixo de rotação, definem-se os circulos principaes da esphera celeste, e as linhas correspondentes da superficie terrestre, de um modo independente da figura da terra. Assim:

Os circulos da esphera celeste nos quaes se projectam as estrellas pelos seus raios visuaes, durante o movimento diurno, são os *parallelos celestes*.

E d'estes parallelos aquelle, que é circulo maximo, chama-se *equador*.

Os pontos onde o eixo de rotação da esphera celeste a encontra, são os *polos celestes*.

Os circulos maximos, que passam pelo eixo de rotação, são os *meridianos celestes*.

163. Os pontos da superficie terrestre, cujas verticaes são parallelas ao equador celeste, formam o *equador terrestre*.

Os pontos da superficie terrestre, cujas verticaes são parallelas ao plano d'um meridiano celeste, formam o correspondente *meridiano terrestre*.

Os pontos da superficie terrestre, cujas verticaes são parallelas ao eixo de rotação, chamam-se, por analogia, *polos terrestres.*

Finalmente os pontos da superficie terrestre, cujas verticaes são parallelas ás arestas do cone, que têm por vertice o centro da esphera celeste e por base um parallelo celeste, formam o correspondente *parallelo terrestre.*

D'estas definições facilmente se vê que as linhas terrestres, de que temos tractado, são aquellas cujos pontos têm os seus zeniths nos circulos celestes correspondentes.

164. No caso de se considerar a terra como espherica, ou como um ellipsoide de revolução, estas linhas são curvas planas; o equador terrestre, e os parallelos terrestres, são intersecções circulares do plano do equador celeste, e dos cones formados pelas normaes parallelas ás arestas dos cones celestes, com a superficie terrestre; os meridianos terrestres são as intersecções dos planos dos meridianos celestes com a mesma superficie; e os polos terrestres são os pontos onde o eixo dos polos celestes, passando pelo centro da terra, atravessa a superficie d'ella.

II

Posições dos logares terrestres

165. A posição d'um logar terrestre costuma definir-se pela sua *longitude geographica*, isto é, pelo angulo que o seu meridiano celeste faz com um meridiano celeste dado; e pela sua *latitude geographica*, ou declinação do zenith, isto é, pelo angulo que a sua vertical faz com o equador celeste; angulo que é egual á *altura do polo sôbre o horizonte*, e complemento da *colatitude*.

Segundo é o horizonte d'um logar parallelo, perpendicular, ou obliquo ao equador celeste, assim costuma chamar-se, para esse logar, a esphera *parallela*, *recta* ou *obliqua*.

166. Nos calculos astronomicos, em vez de se empregar a *latitude geographica* ou *astronomica*, que é, como acabamos de ver, o angulo da vertical com o equador, emprega-se muitas vezes a *latitude geocentrica*.

Considerando a terra como um ellipsoide de revolução achatado nos polos; e chamando D a colatitude geographica, D_1 a geocentrica, a e b os eixos maior e menor da ellipse meridiana terrestre, e $\alpha = \frac{a-b}{a}$ o *achatamento:* mostra-se na geodesia que é, até os termos da primeira ordem em α,

$$D_1 = D + \alpha \operatorname{sen} 2D$$

(vej. *Calc. das eph. astr.* n.° 128 e *Geod. de* Francoeur n.° 178).

167. A latitude geographica d'um logar terrestre acha-se pelos processos ensinados nos n.os 118 e 142.

A longitude geographica d'um logar acha-se tomando a differença dos tempos, em que acontece um phenomeno instantaneo, contados em dois meridianos, um dos quaes é o do logar de que se tracta, e o outro é aquelle que serve d'origem ás longitudes terrestres.

Supponhamos, por exemplo, que tendo regulado um bom chronometro pelo tempo sideral do meridiano, que serve de origem, como é para nós o do Observatorio de Coimbra, o transportâmos a outro logar, onde se observa a distancia zenithal d'uma estrella conhecida.

Se conhecermos, pelos methodos proprios para determinar a latitude, a distancia do polo ao zenith, as equações do n.º 161 darão o instante da observação, em tempo sideral do logar,

$$t = \frac{P}{15} + \frac{AR_*}{15};$$

e este tempo, comparado com o t', que no mesmo instante mostra o chronometro, dará a differença de longitudes, ou a longitude do logar contada do meridiano de Coimbra de oriente para occidente,

$$L = 15\,(t' - t).$$

168. Se não fôr dada a latitude do logar, poderemos observar duas distancias zenithaes ZA, ZA′ d'uma estrella, e contar pelo chronometro o intervallo sideral $\frac{\theta}{15}$ das observações.

Então os triangulos ZPA, ZPA′, darão

$$\cos z = \cos P \operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta + \cos D \cos \Delta,$$

$$\cos z' = \cos (P + \theta) \operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta + \cos D \cos \Delta,$$

das quaes se tirarão os valores de D e P.

Em logar proprio tractaremos dos outros meios de determinar as longitudes, que fornecem as distancias da lua ao sol, aos planetas e ás estrellas, os eclipses, e outros phenomenos celestes.

169. No mar não se podem observar as distancias zenithaes, nem as distancias dos astros entre si, com os mesmos instrumentos de que nos costumamos servir em terra, por não o permittirem as oscillações do navio; e por isso os navegantes usam para esse fim dos *instrumentos de reflexão.*

'Nestes instrumentos, de que apenas fallaremos rapidamente, ha dois espelhos, um todo estanhado, e movel em torno de um eixo que é perpendicular ao plano d'um arco de circulo e passa pelo centro do mesmo arco; outro collocado fixamente, sôbre um raio do arco, e separado por uma linha perpendicular ao plano d'este, em duas partes, uma estanhada e outra transparente. O primeiro espelho ou *grande espelho,* é acompanhado no seu movimento por uma alidade, cuja extremidade percorre o arco; este arco é dividido em semigráus, que se lêem como se fôssem gráus; e um oculo está collocado de modo que o seu eixo optico atravessa a linha que separa as duas partes do *pequeno espelho.*

Suppondo que os dois espelhos estão collocados de tal modo que a alidade corresponda ao *zero* da graduação quando elles são parallelos, deverá 'nesta posição a imagem directa de um objecto vista pela parte não estanhada do pequeno espelho coincidir com a reflectida vista pela parte estanhada. Depois, se dirigirmos o instrumento de modo que vejamos a imagem directa de um objecto, e movermos a alidade até coincidir com essa imagem a reflectida de outro objecto, a leitura da graduação correspondente do limbo, que será dupla do arco percorrido pela alidade, mostrará a distancia angular dos dois objectos. Por exemplo, se collocando o instrumento verticalmente, o primeiro objecto fôr o horizonte apparente e o segundo fôr um astro, a leitura mostrará a altura do astro acima do horizonte apparente, da qual se tirará a depressão do horizonte apparente para ter a altura sôbre o horizonte (n.° 13).

Estes instrumentos, sendo sectores de 45°, 60°, ou circulos inteiros, podem mostrar angulos de 0 até 90°, de 0 até 120°, ou todos os angulos, e estão divididos em 90, 120, ou 720 partes. Mas o circulo inteiro tem além d'isso a vantagem *da repetição,* pela qual mostra angulos multiplos do que se procura; como se verá quando tractarmos d'uma vantagem similhante dos *circulares repetidores.*

170. O fundamento d'esta construcção é o theorema seguinte de optica: *Se um raio luminoso se reflectir successivamente em dois espelhos planos, o angulo feito pela direcção primitiva com a direcção final será duplo do angulo dos dois espelhos.*

Sejam EH, EH$'$ os dois espelhos (Fig. 48); SM o raio incidente; e MM$'$, M$'$S$'$ as suas direcções successivas. Os triangulos MS$'$M$'$, MEM$'$, dão

$$\mathrm{MM'K} = 2i' = \theta + 2i, \quad \mathrm{MM'H'} = i' = \mathrm{E} + i;$$

logo

$$2\mathrm{E} = \theta,$$

que é o theorema enunciado.

171. Suppondo a terra espherica é facil achar a distancia entre dois pontos d'ella, quando se conhecem as suas latitudes e a differença das suas longitudes. Porque, chamando L a differença das longitudes, D, e D$'$, as colatitudes, e d a graduação do arco de distancia, será

$$\cos d = \cos \mathrm{L} \operatorname{sen} \mathrm{D} \operatorname{sen} \mathrm{D'} + \cos \mathrm{D} \cos \mathrm{D'};$$

ou $$\cos \mathrm{L} \operatorname{tang} \mathrm{D} = \operatorname{tang} \varphi, \quad \cos d = \frac{\cos \mathrm{D} \cos(\mathrm{D'} - \varphi)}{\cos \varphi};$$

e o arco d convertido em metros, sendo $n = 111{,}11111$ kilometros, será nd.

Por exemplo, entre París e Coimbra, suppondo

$$\mathrm{L} = 10^\circ.42'30'', \quad \mathrm{D} = 49^\circ.47'.34'', \quad \mathrm{D'} = 41^\circ.9'.47'',$$

será $$nd = 1277^{kil},8.$$

III

Rotação da terra

172. No, que até aqui temos dicto, acham-se algumas razões, que devem inclinar-nos a attribuir o movimento diurno dos astros antes á rotação da terra do que á rotação da esphera celeste.

Com effeito o movimento diurno póde explicar-se tanto por um, como por outro modo; e as variações mais consideraveis das coordenadas das estrellas podem explicar-se tanto por movimentos proprios d'ellas, como pelas mudanças da intersecção da ecliptica com o equador e do eixo dos polos. Mas é muito mais simples, e por isso muito mais natural, attribuir estes phenomenos aos movimentos da terra, do que a movimentos das estrellas, que deveriam ser extremamente rapidos e differentes.

173. As medições geodesicas mostram, que a figura da terra differe muito pouco d'um ellipsoide de revolução achatado nos polos; e sabe-se pela Mechanica dos fluidos, que, se a terra foi primitivamente fluida, como provam os vestigios que 'nella se encontram dos tempos mais remotos, aquella figura devia resultar da combinação da fôrça attractiva das suas moleculas com a fôrça centrifuga devida ao movimento de rotação.

Mostra-se na Mechanica celeste, que, em virtude da figura ellipsoidal da terra, e da fôrça centrifuga, chamando G a gravidade no equador, g a gravidade em um parallelo cuja colatitude é D, e H uma constante, é

$$g = G + H \cos^2 D.$$

E como da formula conhecida

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

resulta, que o comprimento do pendulo de segundos é proporcional á gravidade: chamando A e a este comprimento no equador e nos parallelos de colatitude D, temos

$$a = A\frac{g}{G} = A + \frac{AH}{G}\cos^2 D = A + B\cos^2 D.$$

Ora determinando experimentalmente os comprimentos do pendulo de segundos em differentes latitudes, acha-se, que satisfazem a esta lei; por conseguinte vê-se por ella confirmada a hypothese da rotação da terra (Castro, *Mec.* n.º 155; Poiss., *Mec.* n.º 193; Franc. *Math. Pur.* p. III, n.º 165).

Além d'isso a analogia com os outros corpos celestes, nos quaes se tem conhecido a mesma figura e o movimento de rotação, são mais um motivo para admittir na terra esse movimento.

174. Mas a estas razões, que tornam muito provavel a rotação da terra, podemos já accrescentar outras, que a confirmam directamente.

Se não houvesse rotação da terra, um grave, que descesse de um ponto muito elevado acima da superficie terrestre, caíria no pé da vertical que passa por esse ponto; mas, havendo a rotação da terra, como a velocidade, proporcional á distancia ao eixo de rotação, é maior na região da atmosphera d'onde o corpo parte, do que na superficie terrestre, o grave deve caír para o oriente do pé da vertical. Ora as experiencias feitas, principalmente em Italia e Allemanha, não só mostraram este facto, mas deram desvios, tão conformes, quanto 'nellas se podia esperar, com a theoria da quéda dos graves. Esta theoria mostra (*Mech. Cel.* liv. X, cap. V, n.º 15), que, desprezando a resistencia do ar, o desvio é dado pela formula

$$\delta = \frac{2nh}{3}\sqrt{\frac{2h}{g}}.\operatorname{sen} D,$$

sendo n e g o movimento de rotação da terra e a quéda d'um grave em 1ˢ, e h altura dada.

175. Ultimamente M. Foucault achou que, fazendo oscillar o pendulo em um plano livre, a sua velocidade se compõe com a de rotação da terra de maneira que o plano de oscillação se desvia da posição inicial. Os geometras, cuja attenção sôbre aquelle objecto chamou a experiencia, acharam pelo calculo, e a observação confirmou, que o movimento angular, pelo qual varía o azimuth do plano de osciallção, é $15'' \cos D$ em cada segundo sideral.

Com effeito, considerando as tres rectas, meridiana, vertical e eixo de rotação da terra, que todas estão no plano do meridiano, e das quaes as duas primeiras se cortam rectangularmente, se decompozermos a velocidade angular de rotação da terra, que tem logar em um plano perpendicular ao eixo, nas que têm logar em planos perpendiculares á meridiana e á vertical, a última, que é azimuthal, será egual á resultante multiplicada pelo coseno do angulo que fazem entre si os planos respectivos ou os eixos que lhes são perpendiculares; angulo que é a colatitude. Sendo pois $15''$ o movimento angular da terra em 1^s de tempo sideral, será $15'' \cos D$ o movimento azimuthal apparente do plano de oscillação do pendulo no mesmo tempo.

176. O mesmo sabio, por um apparelho engenhoso do genero do systema de suspensão de Cardans, que chamou *gyroscopio*, conseguiu fixar no espaço a direcção do eixo livre de rotação d'um corpo symetrico, tornando-a independente da gravidade.

Assim, movendo-se o observador em volta da linha dos pólos, a sua mudança de posição relativamente ao mesmo eixo lhe parecerá um movimento d'este, do qual perceberá uma componente pela variação de azimuth do circulo vertical do apparelho.

CAPITULO IX

Refracções atmosphericas

177. Quando um raio luminoso passa d'um meio para outro, inflecte-se approximando-se ou afastando-se da normal á superficie commum, segundo é a passagem do meio menos denso para o mais denso, ou inversamente, e segundo a differença de natureza d'estes meios. Os angulos feitos pelo raio primitivo e pelo inflectido com a normal chamam-se respectivamente de *incidencia* e de *refracção*.

178. A experiencia mostra que, em meios não crystallizados: 1.° a inflexão se faz no plano que contém a normal e o raio incidente; 2.° a razão do seno do angulo de incidencia para o de refracção é constante; 3.° chamando *indice de refracção* a razão n d'aquelles dois senos, na passagem do vacuo para um meio, e ρ a densidade d'este, a quantidade $P=\dfrac{n^2-1}{\rho}$ fica constante, ainda que se sujeite o meio a differentes estados de condensação; 4.° se o raio atravessa muitos meios, a razão do seno de incidencia para o de refracção, que teria logar na passagem immediata do primeiro meio para o último, é egual á composta das que têm logar nas passagens do primeiro para o segundo, do segundo para o terceiro, e assim por diante até a do penultimo para o último; 5.° se um meio, que tem a densidade ρ e o poder refrangente P, é a mistura de differentes fluidos que têm as densidades ρ_1, ρ_2,.... e os poderes refrangentes P_1, P_2,...., é $P\rho=P_1\rho_1+P_2\rho_2+....$

179. Qualquer que seja o estado de condensação do ar, indicado pelo barometro e pelo thermometro, P é constante; mas não acontece o mesmo quando as camadas de ar estão desegualmente carregadas de hu-

midade; e por isso convem examinar a influencia que esta póde ter no effeito do poder refrangente.

Seja 1 um volume de ar humido que sustenta a pressão p; e ϖ a parte d'esta pressão que é sustentada pelo vapor aquoso contido no mesmo ar. Se o ar sêcco e o vapor se separassem de modo que o primeiro reduzido ao volume v sustentasse a pressão especifica p, o segundo reduzido ao resto $1-v$ do volume sustentaria egual pressão. Chamando pois $[\rho]$ a densidade do ar sêcco, $c\,[\rho]$ a do vapor, e ρ a densidade da mistura quando estes dois gazes se diffundem pelo espaço 1 para formar o ar humido, teremos o quadro seguinte:

	Ar sêcco	Vapor	Mixto	Ar diffundido	Vapor diffundido
Volumes	v	$1-v$	1	1	1
Densidades	$[\rho]$	$c[\rho]$	ρ	$v[\rho]$	$(1-v)\,c[\rho]$
Pressões especificas	p	p	p	$p-\varpi$	ϖ
Poderes refrangentes	P	P″	P′	P	P″

Por serem respectivamente $v[\rho]$, $(1-v)\,c[\rho]$, $1.\rho$, as massas do ar sêcco, do vapor, e do mixto, temos

$$v[\rho]+(1-v)\,c[\rho]=\rho.$$

E porque as pressões do mesmo fluido são inversamente proporcionaes aos volumes, temos

$$p-\varpi=pv,$$

que transforma a precedente em

$$\rho=[\rho]\frac{p-(1-c)\,\varpi}{p}\ldots\ldots(1).$$

180. Os poderes refrangentes do ar sêcco diffundido, do vapor diffundido, e do mixto multiplicados pelas respectivas densidades dão $Pv[\rho]$, $P''c(1-v)[\rho]$, $P'\rho$; e por isso (n.° 178,5°) é

$$P'\rho = Pv[\rho] + P''c(1-v)[\rho].$$

Mas as experiencias mostram que, debaixo da mesma pressão, as densidades do vapor e do ar sêcco são entre si na razão de 10:16, e que os poderes refrangentes dos mesmos fluidos são sensivelmente entre si na razão 16:10; isto é $\frac{10}{16} = c = \frac{P}{P''}$. Teremos pois

$$1 - c = \frac{3}{8},\ P'\rho = P[\rho].$$

Assim, em quanto ao producto do poder refrangente pela densidade, podemos substituir P em logar de P′, com tanto que, em vez da densidade ρ do ar humido, substituamos

$$[\rho] = \frac{p}{p-(1-c)\,\bar\omega}\,\rho = \frac{\rho}{1-\frac{3}{8}\,\frac{\bar\omega}{p}} \ldots\ldots (2).$$

181. Posto isto, seja (Fig. 49) TT′ a camada atmospherica que passa pelo observador; e VV′ a primeira camada atmospherica onde começam a refrangir-se os raios luminosos emittidos por um objecto. Entre os differentes raios luminosos, que provêm do ponto S, um, entrando na atmosphera em N pela direcção SNI, soffrerá refracções nas camadas successivas, até chegar ao observador O pela direcção OIS′; e a trajectoria descripta entre os pontos N, O, será uma curva, se as camadas atmosphericas variarem continua e gradualmente de densidade.

Como a terra e as camadas atmosphericas são proximamente esphericas e concentricas, o raio luminoso no seu trajecto conserva-se no plano vertical ZOS (n.º 178, 1.º). O angulo SOS'$=\theta$, que deve ajunctar-se á distancia *zenithal apparente* ZOS'$=z'$ para ter *a verdadeira* ZOS$=z$, é a refracção; e esta chama-se *astronomica* ou *terrestre*, segundo é o objecto exterior á atmosphera ou terrestre.

182. Sejam (Fig. 50) AA', BB', DD', EE'.... as superficies de separação das camadas atmosphericas. E chamemos:

$$z, z', z'', \ldots\ldots\ldots\ldots z^{(i)},$$

os angulos de incidencia d'um raio luminoso nos pontos O, M', M''...M$^{(i)}$;

$$\omega', \omega'', \ldots\ldots\ldots\ldots \omega^{(i)}$$

os angulos de refracção nos pontos M', M'', ...M$^{(i)}$;

$$n, n', n'', \ldots\ldots\ldots\ldots n^{(i)},$$

os indices de refracção, que teriam logar nas passagens do vacuo para as camadas superiores aos pontos O, M', M'', ... M$^{(i)}$.

Será (n.º 178, 4.º) $\quad \dfrac{\operatorname{sen}\omega^{(i)}}{\operatorname{sen}z^{(i)}}=\dfrac{n^{(i)}}{n^{(i-1)}}.$

Mas, suppondo a terra espherica, e chamando

$$a, r', r'', \ldots\ldots\ldots\ldots r^{(i)}$$

as distancias de O, M', M'', ... M$_i$ ao centro C, o triangulo M$^{(i-1)}$CM$^{(i)}$ dá

$$\frac{\operatorname{sen}z^{(i-1)}}{\operatorname{sen}\omega^{(i)}}=\frac{r^{(i)}}{r^{(i-1)}}.$$

Eliminando pois sen $\omega^{(i)}$ entre esta equação e a precedente, resultará

$$n^{(i-1)}\, r^{(i-1)} \operatorname{sen} z^{(i-1)} = n^{(i)} r^{(i)} \operatorname{sen} z^{(i)} = \text{const};$$

que, applicada aos pontos O e $M^{(i)}$, dará finalmente

$$n\, a \operatorname{sen} z = n^{(i)} r^{(i)} \operatorname{sen} z^{(i)} \ldots\ldots (3).$$

Esta equação é independente do número finito ou infinito das camadas interpostas entre O e $M^{(i)}$; envolve a condição da esphericidade das camadas atmosphericas de egual densidade; e depende dos poderes refrangentes e da lei das densidades.

183. Seja agora M (Fig. 51) um ponto da trajectoria NMO, e P′MP o angulo de contingencia. É claro que a somma de todos os angulos de contingencia desde M até outro ponto da curva será a variação total das posições da tangente entre estes dois pontos, isto é, será o angulo das duas tangentes; por conseguinte o integral do angulo de contingencia, tomado desde O até N será a refracção astronomica (Vid. nota I).

Para ter a expressão do angulo de contingencia abaixemos de C a perpendicular CP sôbre MP; e sejam $CP = x$, $MP = y$, $CM = r$.

O triangulo CMP dá

$$y^2 = r^2 - x^2,\quad x = r \operatorname{sen} \omega = \frac{a\sqrt{1 + P(\rho)}}{\sqrt{1 + P\rho}} \operatorname{sen} z';$$

e por conseguinte

$$y = \frac{r\sqrt{1 + P\rho - \frac{a^2}{r^2}(1 + P(\rho)) \operatorname{sen}^2 z'}}{\sqrt{1 + P\rho}},\quad dx = -\frac{aP\sqrt{1 + P(\rho)}.\operatorname{sen} z'}{2(1 + P\rho)^{\frac{3}{2}}}\, d\rho,$$

que substituidos na equação

$$d\theta = \frac{dx}{y},$$

tirada do triangulo differencial P′MP, reduzem em fim a equação differencial das refracções astronomicas a

$$d\theta = -\frac{a\mathrm{P}\,d\rho\sqrt{1+\mathrm{P}(\rho)}\,.\,\mathrm{sen}\,z'}{2r(1+\mathrm{P}\rho)\sqrt{1+\mathrm{P}\rho-\frac{a^2}{r^2}(1+\mathrm{P}(\rho))\,\mathrm{sen}^2 z'}} \ldots (4).$$

184. Para integrar completamente a equação (4) seria necessario exprimir ρ em funcção de r, isto é, seria necessario conhecer a lei que segue a densidade das camadas atmosphericas nas diversas alturas acima da superficie terrestre. No entretanto, quando z' não é proximo de 90°, a parte principal da expressão de θ é independente d'aquella lei: como vamos ver.

Fazendo $$\frac{\mathrm{P}(\rho)}{2(1+\mathrm{P}(\rho))} = \alpha,\ \frac{a}{r} = 1 - s,$$

a equação (4) transforma-se em

$$d\theta = -\frac{\alpha(1-s)\,\frac{d\rho}{(\rho)}\,\mathrm{sen}\,z'}{\left[1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)\right].\sqrt{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)-(1-s)^2\,\mathrm{sen}^2 z'}},$$

que, desenvolvida em serie, até os termos da segunda ordem relativamente a α e s, dá

$$d\theta = -\alpha \frac{d\rho}{(\rho)} \operatorname{tang} z' \left[1 + \alpha\left(1 - \frac{\rho}{(\rho)}\right)\frac{2\cos^2 z' + 1}{\cos^2 z'} - \frac{s}{\cos^2 z'}\right] \ldots (5).$$

Mas cumpre notar que entre os termos da terceira ordem ha um,

$$-\frac{3}{2}\alpha \operatorname{tang}^3 z' \frac{s^2 d\rho}{(\rho)},$$

que se torna consideravel quando z' é muito grande; e por isso a approximação, de que se tracta, não tem logar se não em quanto este termo da serie convergente se póde desprezar.

185. Integrando a equação (5), vem

$$\theta = -\alpha \operatorname{tang} z' \left\{\frac{\rho}{(\rho)} + \alpha \frac{2\cos^2 z' + 1}{\cos^2 z'}\left[\frac{\rho}{(\rho)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{(\rho)}\right)^2\right] - \frac{\int \frac{s\,d\rho}{(\rho)}}{\cos^2 z'}\right\},$$

que, tomado desde $\rho = (\rho)$, ou $s = o$, até $\rho = o$, dá

$$\theta = \alpha \operatorname{tang} z' \left\{1 + \alpha \frac{2\cos^2 z' + 1}{2\cos^2 z'} + \frac{\int_{(\rho)}^{o}\left(\frac{s\,d\rho}{(\rho)}\right)}{\cos^2 z'}\right\};$$

onde falta achar o integral indicado no último termo;

ou achar $$\int_{(\rho)}^{o}\left(\frac{\rho\, d s}{(\rho)}\right),$$

por ser $$\int\frac{s d\rho}{(\rho)}=\frac{s\rho}{(\rho)}-\int\frac{\rho ds}{(\rho)},$$

e conseguintemente $$\int_{(\rho)}^{o}\frac{s d\rho}{(\rho)}=-\int_{(\rho)}^{o}\frac{\rho ds}{(\rho)}.$$

186. A equação do equilibrio da atmosphera é

$$dp=-g\rho\, dr;$$

que, designando g e (g) a gravidade correspondente aos raios r e a, na latitude a que se referem as observações, isto é, sendo $g=(g)\frac{a^2}{r^2}$, se transforma em

$$dp=-(g)\, a\, \rho\, ds.$$

Esta equação integrada desde $p=(p)$ ou $\rho=(\rho)$, até $p=o$ ou $\rho=o$, dá

$$\int_{(\rho)}^{o}\left(\frac{\rho d s}{(\rho)}\right)=\frac{(p)}{(g)(\rho)a}=-\int_{(\rho)}^{o}\left(\frac{s d\rho}{(\rho)}\right);$$

e por isso, designando l a altura d'uma columna fluida, de densidade constante (ρ), que sustentasse a pressão (p), temos

$$(p)=(g)(\rho)\,l,\int_{(\rho)}^{o}\left(\frac{s\,d\rho}{(\rho)}\right)=-\frac{l}{a}.$$

Substituindo este integral na expressão de θ, e exprimindo θ em segundos, resulta em fim a expressão da parte da refracção astronomica independente da lei das densidades das camadas atmosphericas,

$$\theta=\frac{\alpha}{\operatorname{sen} 1''}\operatorname{tang} z'\left(1+\frac{\frac{1}{2}\alpha\left(2\cos^2 z'+1\right)-\frac{l}{a}}{\cos^2 z'}\right)\ldots\ldots(6)$$

187. Determinemos as constantes α e l.

Como $P(\rho)$ é uma quantidade muito pequena, teremos, desprezando o seu quadrado,

$$\alpha=\frac{1}{2}P(\rho),$$

isto é, α proporcional á densidade da camada de ar onde está o observador. Supponhamos que se conhecem os valores de α e l correspondentes á temperatura 0 indicada no thermometro centigrado e á pressão p dada pelo barometro; e sejam t, p', $(\rho)'$, a temperatura, a pressão e a densidade actuaes. Como as densidades estão na razão composta da directa das pressões e da inversa dos volumes, e como um volume v de ar, na temperatura 0° e debaixo d'uma dada pressão, se torna, na temperatura t e debaixo da mesma pressão, em $v'=v(1+mt)$, temos

$$\frac{(\rho)'}{(\rho)}=\frac{p'}{p}\cdot\frac{1}{1+mt};$$

sendo, pelas experiencias de Mr. Regnault, $m=0{,}003665$.

Suponhamos que o mercurio do barometro, cuja altura h' corresponde á pressão p', está na temperatura t'. Como as pressões, por serem medidas pelo peso da columna de mercurio, estão na razão composta da directa das alturas e da directa das densidades, isto é, da directa das alturas e da inversa dos volumes, e como o volume u d'uma dada massa de mercurio a 0° se torna em $u(1+nt)$ a $t°$, temos

$$\frac{p'}{p}=\frac{h'}{h}\cdot\frac{1}{1+nt};$$

sendo, pelas experiencias de Laplace e Lavoisier, $n=\frac{1}{5550}$.

O que transforma a expressão de $\frac{(\rho)'}{(\rho)}$ em

$$\frac{(\rho)'}{(\rho)}=\frac{h'}{h}\cdot\frac{1}{(1+mt)\,(1+nt')}.$$

Finalmente, se o comprimento 1 do metal da escala a 0° de temperatura se tornar em $1+ct''$ na temperatura t'', a unidade 1, que media h, tornar-se-ha em $1+ct''$ quando medir h', que por isso valerá $h'(1+ct'')$ das unidades de h. A expressão de $\frac{(\rho)'}{(\rho)}$ será pois

$$\frac{(\rho)'}{(\rho)}=\frac{h'}{h}\cdot\frac{1+ct''}{(1+mt)\,(1+nt')}\ldots\ldots(7).$$

Suppondo $c=\frac{n}{10}$, que é proximamente o meio entre os coefficientes das dilatações do latão e do cobre, e $t'=t''$, e fazendo $n'=n-\frac{1}{10}n$, será

$$\frac{(\rho')}{(\rho)}=\frac{h'}{h}\cdot\frac{1}{(1+mt)(1+n't')}\cdots\cdots(8);$$

onde se póde ainda suppor ordinariamente $t'=t$.

Em quanto a l, as equações

$$p=(g)(\rho)l,\ p'=(g)(\rho)\frac{p'}{p(1+mt)}l',$$

dão

$$\frac{l'}{l}=1+mt\cdots\cdots(9).$$

188. As experiencias feitas em París por Biot e Arago sôbre a velocidade da luz e sôbre a densidade do ar atmospherico dão

$$\alpha=0{,}000294212,\ \frac{l}{a}=0{,}00124896.$$

Os valores adoptados pelo auctor da Mechanica Celeste são

$$\alpha=0{,}000293876,\ \frac{l}{a}=0{,}00125255.$$

Com estes valores e com as formulas (8) e (9) teremos

$$\alpha'=\alpha\,.\frac{h'}{0{,}76}\cdot\frac{1}{(1+mt)\,(1+n't')},\ l'=(1+mt)\,l.$$

189. Para attender á humidade, a equação do equilibrio (n.º 186) dá verdadeiramente

$$\int_{(p)}^{o}(\rho' ds)=\frac{(p)}{a(g)},\ \text{ou}\ \frac{\int_{(p)}^{o}(\rho' ds)}{(\rho)'}=\frac{(p)}{a(g)\,(\rho)'},$$

que, no caso de ser $\frac{\varpi}{p}$ constante, se reduz, dividindo os termos da pri-

$\frac{3}{8}$ meira fracção por $1-\frac{(\varpi)}{(p)}$ [n.º 180, eq (2)], a

$$\frac{\int_{(p)}^{o}(\rho ds)}{(\rho)}=\frac{(p)}{a(g)(\rho)'}=\frac{l''}{a};$$

sendo $$l''=\frac{(p)}{(g)(\rho)'}=\frac{l'}{1-\frac{3}{8}\frac{(\varpi)}{(p)}}.$$

Por tanto, supposta $\frac{\varpi}{p}$ constante, attenderemos na equação (6) ás indicações do barometro, do thermometro, e do hygrometro, das quaes são principalmente importantes as duas primeiras, e mais a segunda, substituindo, em logar de α e l, as expressões:

$$\alpha' = \alpha . \frac{h'}{h(1+mt)(1+n't')}, \quad l' = l . \frac{1+mt}{1 - \frac{3}{8}\frac{(\varpi)}{(p)}}.$$

190. Sejam θ_0, θ, θ', as refracções, que respectivamente correspondem ás indicações do barometro $0^m,76$, $0^m,76$, h^m, e ás indicações do thermometro $0°$, $10°$, $t°$. Desprezando as variações de α e l dentro do parenthesis da fórmula (6), isto é, suppondo θ proporcional a α, e suppondo $t = t'$, teremos, em virtude de (8),

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{1}{(1+10m)(1+10n')}, \quad \frac{\theta'}{\theta_0} = \frac{h}{0,76} . \frac{1}{(1+mt)(1+n't)},$$

$$\theta' = \theta . \frac{h}{0,76} . \frac{(1+10m)(1+10n')}{(1+mt)(1+n't)}.$$

No *Connaissance des Temps* acham-se tres taboas: a primeira dá θ, com o argumento z'; a segunda dá $\frac{h}{0,76} = f$, com o argumento h; e a terceira dá $\frac{(1+10m)(1+10n')}{(1+mt)(1+n't)}$, com o argumento t. A refracção actual, correspondente á distancia zenithal apparente z', e ás indicações h e t do barometro e do thermometro, é pois

$$\theta' = \theta . f . f'.$$

Querendo attender á differença $t - t'$ das indicações dos thermometros exterior e interior, basta tomar

$$\theta'' = \theta' + n\theta'(t - t') = \theta' + \frac{\theta'}{1000} \cdot 0{,}18\,(t - t').$$

191. Se quizessemos integrar mais approximadamente a equação (4), seria necessario conhecer a relação $f(r, \rho) = 0$ entre r e ρ, para eliminar r. Essa relação, dependente da constituição atmospherica, que é definida principalmente pelos dados p, ϖ, t, deve resultar de quatro relações entre as quantidades r, p, ϖ, t, ρ. Duas d'estas são as leis *de dilatabilidade* e *de equilibrio*, dadas nos n.^{os} 187 e 186,

$$\frac{\rho}{(\rho)} = \frac{p}{(p)(1 + mt)}, \quad dp = -(g)\,\frac{a^2}{r^2}\,\rho'\,dr.$$

Para as outras duas, entre p e ρ e entre p e ϖ, têm os geometras adoptado diversas hypotheses, e taes que, satisfazendo ás observações meteorologicas feitas a diversas alturas, nas ascensões terrestres e aerostaticas, se prestassem ao mesmo tempo ao emprêgo dos methodos conhecidos para integrar a equação (4).

'Nestas equações é ρ ligado com ρ' (n.° 180) pela relação

$$\rho' = \frac{\rho}{1 - \frac{3}{8}\frac{\varpi}{p}}.$$

Mas cumpre advertir que, ainda quando as hypotheses adoptadas representassem satisfactoriamente o estado normal da atmosphera, tantas vezes é este perturbado, que conviria evitar o mais possivel as observações de grandes distancias zenithaes, porque 'nellas têm essas perturbações maior influencia.

Contentando-nos por isso com a exposição feita para achar a equação (6), a qual, nos limites em que tem logar, é independente de taes anomalias, só daremos no fim a taboa das refracções em todos os casos, extrahida do *Connaissance des Temps*.

E cumpre ainda notar que, fóra do limite de z em que é applicavel a formula (6), poderiamos usar sem grande inconveniente da formula de Bradley (n.° 26_a), cujos valores perto do horizonte não differem muito dos dados pelas melhores formulas.

192. Da formula (6) póde facilmente deduzir-se a de Bradley (n.° 26_a)

$$\theta = A \operatorname{tang} (z' - \nu\theta) \ldots\ldots (10).$$

Com effeito a formula (6) póde escrever-se assim:

$$\theta = \frac{\alpha}{\operatorname{sen} 1''} (M \operatorname{tang} z' - N \operatorname{tang}^3 z'),$$

sendo $$M = 1 + \frac{3}{2}\alpha - \frac{l}{a},\ N = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{l}{a};$$

ou $$M = 0{,}9991246,\ N = 0{,}00115815,$$

tomados em M e N por α e l os seus valores correspondentes á temperatura 10°, que segundo Laplace (n.° 188), são

$$\alpha = 0{,}00028275,\ \frac{l}{a} = 0{,}00129925.$$

Para comparar as duas equações, desenvolvamos (10), ou

$$\nu\theta = \nu A\,\frac{\tan z' - \operatorname{tg} \nu\theta}{1 + \tan z' \tan \nu\theta},$$

pela formula de Maclaurim, em serie ordenada segundo as potencias de tg z',

$$\nu\theta = f + f'.\tan z' + \frac{1}{2} f'' \tan^2 z' + \frac{1}{6} f''' \tan^3 z' \ldots$$

Teremos:

$$f = 0,\ f' = \nu A\,(1 - f'),\ f'' = 0,\ f''' = -6 f'^2 \left(1 - f' + \frac{1}{3} f'^2\right).$$

E a comparação com (6) dará

$$\alpha M \nu = f',\ \alpha N \nu = -\frac{1}{6} f''' = f'^2 \left(1 - f' + \frac{1}{3} f'^2\right);$$

d'onde se deduzem

$$f' = \frac{\frac{N}{M}}{1 - f' + \frac{1}{3} f'^2},\ \nu = \frac{f'}{\alpha M},\ A = \frac{\alpha M}{1 - f'}.$$

Effectuando os calculos numericos, acham-se

$$\nu = 3{,}952;\ A = 61'',274.$$

Para achar o valor Θ da refracção horizontal, a formula (10) dá

$$\Theta = A \cot \nu\,\Theta,$$

e por conseguinte

$$\nu\,\Theta \operatorname{sen}^2 1''\left(\nu\,\Theta + \frac{1}{3}(\nu\,\Theta)^3 \operatorname{sen}^2 1''\right) = \nu A \operatorname{sen} 1'' = \frac{f'}{1-f'},$$

ou
$$\Theta \operatorname{sen} 1'' = \frac{\sqrt{\left(\frac{f'}{1-f'}\right)}}{\nu}\left(1 - \frac{1}{6}\nu^2\Theta^2 \operatorname{sen}^2 1''\right)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{A \operatorname{sen} 1''}{\nu}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\nu^2\Theta^2 \operatorname{sen}^2 1''\right).$$

E effectuando os calculos numericos, teremos

$$\Theta = 29'46'',9.$$

Os valores de A e ν achados por Delambre são os referidos no fim do n.° 26_a, os quaes substituidos na expressão de Θ dão $\Theta = 32'.41'',9$, mais conforme com as observações.

193. Da formula

$$\nu\theta = \nu\Theta \tang \nu\Theta \tang (z' - \nu\theta),$$

ou, substituindo a razão $\frac{\operatorname{tg}\nu\theta}{\operatorname{tg}\nu\Theta}$ á dos arcos,

$$\tang \nu\theta = \tang^2 \nu\Theta \tang (z' - \nu\theta),$$

tiram-se $\quad \operatorname{tg}\nu\theta\,(1 \pm \operatorname{tg}^2 \nu\Theta) = \operatorname{tg}^2 \nu\Theta\,[\tang (z' - \nu\theta) \pm \operatorname{tg}\nu\theta],$

e por conseguinte

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \nu\Theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \nu\Theta} = \frac{\operatorname{tg}(z' - \nu\theta) + \operatorname{tg}\nu\theta}{\operatorname{tg}(z' - \nu\theta) - \operatorname{tg}\nu\theta},$$

ou $\quad \operatorname{sen}(z' - 2\nu\theta) = \cos 2\nu\Theta \operatorname{sen} z' \ldots\ldots (11),$

que é a fórmula de Simpson.

Esta fórmula tem sôbre a (10) a vantagem de dar directamente θ, sem recorrer a approximações successivas; mas tem o inconveniente, quando z' é grande, de exigir que se calcule com muita approximação o segundo membro d'ella (*a*).

(*a*) Com effeito, chamando Q o segundo membro, e M o modulo, a differenciação dá, em segundos,

$$\delta\theta = -\frac{\delta Q}{2\nu \operatorname{sen} 1'' \cos(z' - 2\nu\theta)}, \quad \delta\theta = -\frac{\tang (z' - 2\nu\theta) \,.\, \delta \log Q}{2\nu M \operatorname{sen} 1''},$$

expressões pelas quaes se vê que influe muito em θ o erro de Q ou o de log Q, quando z' é grande.

194. O coefficiente α da formula (6) tambem se determina por observações das estrellas circumpolares, ou do Sol.

Com effeito, se observarmos as distancias zenithaes d'uma estrella circumpolar nas suas passagens meridianas superior e inferior, e dérmos a (6) a fórma

$$\theta = A\alpha_1 + B\alpha_1{}^2,$$

teremos para cada uma das passagens, respectivamente,

$$z + A\alpha_1 + B\alpha_1{}^2 + \Delta = D,\quad z' + A'\alpha_1 + B'\alpha_1{}^2 - \Delta' = D;$$

e por conseguinte

$$z + z' + (A + A')\alpha_1 + (B + B')\alpha_1{}^2 + \Delta - \Delta' = 2D\ldots\ldots(12),$$

sendo Δ e Δ' as distancias polares da estrella, e D a distancia do polo ao zenith.

As distancias Δ e Δ' seriam eguaes, se no intervallo das passagens não variassem as causas chamadas *aberração* e *nutação*, que alteram a posição apparente da estrella, e as posições do polo celeste e do zenith: mas para calcular a differença $\Delta - \Delta'$ basta, como adiante veremos, que a distancia polar se conheça approximadamente.

Os coefficientes A, B, A', B', são funcções das respectivas distancias zenithaes apparentes z e z' e das indicações t e t', h e h', do thermometro e do barometro (n.os 186 e 187).

Portanto, se tivermos observações de muitas circumpolares nas duas passagens, formaremos muitas equações (12); e combinando-as pelo methodo das equações de condição, obteremos duas, por meio das quaes determinaremos α e D.

195. Mas como por uma parte as equações mais proprias para dar α são aquellas em que a estrella, distando mais do polo, passa mais perto do horizonte, por ser então maior o coefficiente $A + A'$; e por outra parte a equação (6) é menos exacta, e as refracções são mais incertas, para as estrellas que satisfazem a essa condição: vê-se que de taes observações não se tira tanta vantagem como á primeira vista pareceria; e por isso tambem se usa para a mesma determinação das observações do Sol na épocha do solsticio do estio.

Supponhamos que 'nesta épocha se observam duas distancias zenithaes do Sol, uma ZS_1 (Fig. 52) na sua passagem meridiana, outra, ZS'' longe do meridiano, por exemplo a 45° de distancia zenithal. Como então a distancia meridiana do Sol ao zenith de Coimbra é $< 17°$, podemos usar sem inconveniente para ella da refracção calculada com um valor imperfeito de α; e porque na mesma épocha a distancia polar vista do centro da terra se póde tomar por constante durante o intervallo de seis a sete horas, teremos, attendendo ás *parallaxes* (*a*),

$$S'P = ZS_, + \theta_, + D.$$

Conheceremos pois no triangulo $ZS'P$ os lados ZP, PS', e o angulo horario ZPS' dado pelo relogio; d'onde deduziremos ZS'. E como ZS'' é dada pela observação, teremos a refracção actual $\theta = ZS' - ZS''$; conseguintemente, substituindo em (6), acharemos α.

(*a*) Sendo S e S' os logares geocentricos, ϖ e ϖ' as parallaxes d'altura, Δ a distancia polar verdadeira: será

$$\Delta = ZS_, + \theta_, - \varpi + D;$$

o triangulo ZPS' entre Δ, D, ZS' dará ZS'; e depois teremos

$$\theta = ZS' - ZS'' + \varpi'.$$

Influencia da refracção nos diametros apparentes

196. Seja (Fig. 53) AA′ o diametro apparente d'um astro, ou em geral a distancia angular de dois pontos A e A′. Em virtude da refracção estes pontos elevam-se para B e B′ nos verticaes AZ, A′Z. Fazendo pois

$$ZB = z,\ ZB' = z',\ ZA = z + \theta,\ ZA' = z' + \theta',\ BZB' = a,$$

$$AA' = d,\ BB' = d';$$

e egualando as expressões de $\cos a$ tiradas dos triangulos AZA′, BZB′; teremos

$$\frac{\cos d - \cos(z+\theta)\cos(z'+\theta')}{\operatorname{sen}(z+\theta)\operatorname{sen}(z'+\theta')} = \frac{\cos d' - \cos z \cos z'}{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} z'} \ldots . (13).$$

Esta equação, que se póde simplificar e adaptar melhor á commodidade e exactidão dos calculos, dá o diametro verdadeiro d, quando se conhece o apparente d', ou inversamente. Mas como os diametros apparentes dos astros conhecidos não passam de limites pouco differentes de 32′, podemos para elles achar directamente formulas mais simples que resolvam o mesmo problema, sem passar pelas transformações da precedente.

197. Chamando (d) o semi-diametro horizontal, e considerando o arco AA′ como uma linha recta, sôbre a qual se contam os x a partir do centro, a equação do circulo AEA′ será

$$x^2 + y^2 = (d)^2.$$

Em virtude da refracção o diametro $AA'=2(d)$ passa para $BB'=2(d')$; e temos nos triangulos AZA', BZB',

$$\text{sen}(d)=\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,a\,\text{sen}\,(z+\theta),\ \text{sen}\,(d')=\text{sen}\,\tfrac{1}{2}\,a\,\text{sen}\,z,$$

que, desprezando as quantidades de terceira ordem relativamente a sen (d) e sen (d'), dão

$$(d)=(d')\,\frac{\text{sen}\,(z+\theta)}{\text{sen}\,z}=k(d');$$

e todas as abscissas se modificarão proporcionalmente, de sorte que será

$$x=kx'.$$

Para as ordenadas, chamando z e z' as distancias zenithaes correspondentes aos extremos de y', temos

$$z+\theta-(z'+\theta')=y;\ \text{ou}\ y'+\theta-\theta'=y.$$

E fazendo $\dfrac{\theta-\theta'}{z-z'}=c$, que podemos suppôr constante para todos os pontos do disco, como se vê nas taboas de refracção, vem

$$(1+c)y'=y.$$

Estas expressões de y e x substituidas na equação do circulo dão

$$(1+c)^2y'^2+k^2x'^2=(d)^2,\ \text{ou}\ y'^2=\frac{(d)^2}{(1+c)^2}-\frac{k^2}{(1+c)^2}x'^2;$$

equação, que pertence á ellipse, e que sendo comparada com

$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2, \text{ ou } y'^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x'^2,$$

dá

$$b=\frac{(d)}{1+c},\ a=\frac{(d)}{k}.$$

198. Se chamarmos CM $=d$ um dos semi-diametros inclinados da ellipse, e i o angulo que elle faz com BB', teremos

$$x'=d\cos i,\ y'=d\,\text{sen}\,i;$$

logo

$$d^2=y'^2+x'^2=b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}x'^2=b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}d^2\cos^2 i,$$

ou

$$d^2\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\,\text{sen}^2\,i\right)=a^2.$$

E substituindo 'nesta equação, em logar de a e b, os seus valores, teremos

$$d^2\left[1+\left(\frac{(1+c)^2}{k^2}-1\right)\text{sen}^2\,i\right]=\frac{(d^2)}{k^2}\dots\ (14),$$

que dá a relação entre o semi-diametro horizontal verdadeiro (d) e o inclinado apparente d.

199. Differenciando a expressão

$$\theta=\alpha(\text{M tang}\,z-\text{N tang}^3\,z)$$

do n.º 192, vem

$$\frac{\delta\theta}{\delta z}=c=\frac{\alpha \operatorname{sen} 1''}{\cos^2 z}(\mathrm{M}-3\,\mathrm{N}\operatorname{tang}^2 z)$$

$$=\mathrm{M}\operatorname{sen}\alpha\left[1+\left(1-3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\right)\operatorname{tang}^2 z-3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\operatorname{tang}^4 z\right].$$

E differenciando a última, vem

$$\frac{\delta c}{\delta z \operatorname{sen} 1''}=\frac{2\,\mathrm{M}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tang} z}{\cos^2 z}\left(1-3\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}\,(1+2\operatorname{tang}^2 z)\right).$$

Como esta expressão é positiva para $z=80°$, e com mais razão para z menor, vê-se que c cresce desde $z=0$ até $z=80°$, de sorte que é $\mathrm{M}\operatorname{sen}\alpha$ o seu minimo valor, e para pequenas distancias zenithaes os seus valores pouco differem d'este limite.

Mas a expressão $\frac{\operatorname{sen}(z+\theta)}{\operatorname{sen} z}=k$ dá, dentro dos mesmos limites de z,

$$k<1+\theta\operatorname{sen} 1''\cot z<1+\mathrm{M}\operatorname{sen}\alpha\,;$$

e por isso, mais sensivelmente, $\qquad k<1+c$:

logo o eixo horizontal a da ellipse é o eixo maior.

200. Fazendo $i=o$, resulta o semi-diametro horizontal $\frac{(d)}{k}=(d')$,

ou proximamente $\qquad (d)\,(1-\mathrm{M}\operatorname{sen}\alpha)$;

e a equação (14), depois de extrahir a raiz quadrada, póde escrever-se assim:

$$d \left\{ 1 + (c - \mathrm{M} \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen}^2 i \right\} = (d').$$

Nas taboas da Lua de Delambre, acha-se uma taboa (taboa v, folha 51), calculada pela fórmula precedente, desprezando nella o factor $\mathrm{M} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^2 i$, isto é, pela fórmula $d = (d') - (d') c \operatorname{sen}^2 i$. Para o mesmo fim vem uma taboa na Ephemeride de 1804 (pag. 241).

CAPITULO X

I

Das parallaxes

201. Quando dois observadores O e O′ (Fig. 54), collocados em em dois pontos differentes da superficie terrestre, vêem ao mesmo tempo um astro S, cuja distancia á terra não é tão grande que o angulo OSO′ seja insensivel, projectam este astro em dois pontos differentes s, s' da esphera celeste. Por isso, afim de tornar comparaveis as observações feitas em differentes logares da terra, reduzem-se essas observações ao que seriam se o observador estivesse no centro d'ella.

Sejam (Fig. 55) $SOZ' = s'Z' = z'$ a distancia zenithal, já correcta da refracção, d'um astro visto de O; $SCZ' = s''Z'' = z''$ a distancia zenithal que teria o mesmo astro se fôsse visto do centro da terra; e $OSC = s'\,s'' = \varpi$ o angulo, pelo qual o raio OC seria visto de S. Então z', z'', ϖ, são a *distancia zenithal apparente*, a *distancia zenithal verdadeira*, e a *parallaxe de altura*.

202. Chamando R a distancia CS do astro ao centro da terra, e r o raio terrestre OC, o triangulo OCS dá

$$\operatorname{sen}\varpi = \frac{r}{R}\operatorname{sen} z',\quad z' = z'' + \varpi.$$

Quando $z' = 90°$, a parallaxe é maxima; e designando-a por π, temos se $n\pi = \frac{r}{R}$. No caso de se suppôr a terra espherica, tem isto logar quando o astro está no horizonte; e por isso se costuma dar o nome de *parallaxe horizontal* á parallaxe maxima.

Teremos pois as quatro equações:

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sen}\pi = \frac{r}{R}, & \operatorname{sen}\varpi = \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} z', \\ \operatorname{sen}\varpi = \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen}(z'' + \varpi), & z'' - z' + \varpi = o; \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

da terceira das quaes se tira

$$\operatorname{tang}\varpi = \frac{\operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} z''}{1 - \operatorname{sen}\pi \cos z''} \ldots\ldots (1)'.$$

A primeira das equações (1) dá a parallaxe horizontal, quando se conhece a distancia do astro em raios terrestes, e inversamente; a segunda e a última dão a parallaxe da altura e a distancia zenithal verdadeira, quando se conhecem a parallaxe horizontal e a distancia zenithal apparente; a terceira e a última dão a parállaxe da altura e a distancia zenithal apparente, quando se conhecem a parallaxe horizontal e a distancia zenithal verdadeira.

A comparação das observações com as taboas astronomicas exige esta passagem d'uma das distancias zenithaes, verdadeira ou apparente, para a outra: porque as observações dão as distancias zenithaes apparentes; e as taboas astronomicas dão as coordenadas dos astros referidas ao centro da terra, das quaes (n.º 21) se deduzem as distancias zenithaes verdadeiras.

203. Como as parallaxes são pequenos angulos, ainda a da Lua que pouco chega a exceder 60′, a segunda e terceira das equações (1) exprimem-se, commoda e mais exactamente para o calculo, em series ordenadas segundo as potencias progressivas de sen π.

A segunda, pela expressão do arco no seno, dá, em segundos,

$$\varpi = \frac{\operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} z'}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{1}{6}\frac{\operatorname{sen}^3 \pi \operatorname{sen}^3 z'}{\operatorname{sen} 1''} + \ldots\ldots (2).$$

(formula de Maclaurin.)

A terceira (*Math. Pur. de Franc.* p. IV, pag. 77) dá

$$\varpi = \frac{\operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} z''}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{\operatorname{sen}^2 \pi \operatorname{sen} 2z''}{2 \operatorname{sen} 1''} + \frac{\operatorname{sen}^3 \pi \operatorname{sen} 3z''}{3 \operatorname{sen} 1''} \ldots\ldots (3),$$

ou
$$\varpi = \Sigma \frac{\operatorname{sen}^n \pi \operatorname{sen} n z''}{n \operatorname{sen} 1''}.$$

Nas formulas (2) e (3) podem quasi sempre desprezar-se os cubos da parallaxe horizontal, o que as reduz a

$$\varpi = \pi \operatorname{sen} z', \ \varpi = \pi \operatorname{sen} z'' + \tfrac{1}{2}\pi^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} 2z''.$$

204. O zenith, ao qual se referem as observações, é o dado pela direcção da vertical; mas como se mostra na Geodesia, que a figura regular, de que se approxima a da terra, é um ellipsoide de revolução que tem por eixo menor o dos polos, este zenith Z (Fig. 56), chamado *apparente*, differe do zenith *verdadeiro* Z' determinado pela direcção do raio terrestre, ao qual se referem as formulas precedentes. É necessario pois, quando se querem comparar as observações com as taboas astronomicas, passar das distancias zenithaes *apparentes* referidas ao zenith *apparente*, $ZS = z$, para as distancias zenithaes *verdadeiras* referidas ao zenith *verdadeiro*, $Z'S' = z''$; ou inversamente.

Como $Z'S = z'$, distancia zenithal *apparente* referida ao zenith *verdadeiro*, está ligada com z pelo triangulo $Z'ZS$, e com z'' pela parallaxe ϖ, deve resultar d'estas relações a de z com z'', que resolve o problema.

1.° No primeiro caso, chamando ω o angulo $Z'OZ$ do raio com a vertical; e A o azimuth *apparente* PZS: o triangulo $Z'ZS$ dá

$$\cos z' = \cos\omega \cos z - \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} z \cos A,$$

ou $$\operatorname{tang}\omega \cos A = \operatorname{tang}\varphi,\ \cos z' = \frac{\cos\omega \cos(z+\varphi)}{\cos\varphi} \ldots (4),$$

que determinam z'; depois a formula (2) dá ϖ; e finalmente a última das equações (1) dá z''.

Se as observações se fizerem com um instrumento de alturas e azimuths, achar-se-hão por ellas os valores de z e A, que entram nas formulas (4). Mas se nos servirmos das observações de alturas e angulos horarios, o triangulo PZS dará A pelas formulas

$$\cos D \cos A = \operatorname{sen} D \cot z - \operatorname{sen} A \cot P,$$

ou $$\cos D \operatorname{tang} P = \operatorname{tang}\psi,\ \operatorname{sen}(A+\psi) = \operatorname{tang} D \cot z \operatorname{sen}\psi.$$

2.° No segundo caso, chamando A$'$ o azimuth *verdadeiro* $ZZ'S'$, a formula (3) dá ϖ; depois a última das equações (1) dá z'; e finalmente o triangulo $ZZ'S$ dá

$$\cos z = \cos\omega \cos z' + \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} z' \cos A',$$

ou $$\operatorname{tang}\omega \cos A' = \operatorname{tang}\varphi,\ \cos z = \frac{\cos\omega \cos(z'-\varphi)}{\cos\varphi} \ldots (5).$$

Se as coordenadas verdadeiras conhecidas forem a ascensão recta a' e declinação d' do astro, o triangulo Z'PS' dará os valores de z'' e A', que entram em (3) e (5), pelas fórmulas

$$\cos z'' = \cos(\mathrm{D}+\omega)\,\mathrm{sen}\,d' + \mathrm{sen}(\mathrm{D}+\omega)\cos d' \cos \mathrm{P}',$$

e
$$\cot \mathrm{A}' = \frac{\mathrm{sen}(\mathrm{D}+\omega)\,\mathrm{tang}\,d' - \cos(\mathrm{D}+\omega)\cos \mathrm{P}'}{\mathrm{sen}\,\mathrm{P}'};$$

ou

$$\cos \mathrm{P}' \cot d' = \mathrm{tang}\,\varphi, \left\{ \begin{aligned} \cot z'' &= \frac{\mathrm{sen}\,d' \cos(\mathrm{D}+\omega-\varphi)}{\cos\varphi}, \\ \cot \mathrm{A}' &= \frac{\cot \mathrm{P}' \,\mathrm{sen}(\mathrm{D}+\omega-\varphi)}{\mathrm{sen}\,\varphi}. \end{aligned} \right.$$

Se com a' e d' tivessemos determinado as parallaxes de ascensão recta e declinação, pelas fórmulas que logo daremos, a distancia apparente z tirar-se-hia immediatamente do triangulo ZPS, no qual se conheceriam então D, P, $90°-d$.

205. Mostra-se na Geodesia que, tomando por unidade o raio do equador, as expressões do raio r, e do angulo ω d'este raio com a vertical, são

$$r = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\alpha \cos 2\mathrm{D},$$

$$\omega\,\mathrm{sen}\,1'' = (\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha^2)\,\mathrm{sen}\,2\mathrm{D} + \tfrac{1}{2}\alpha^2\,\mathrm{sen}\,4\mathrm{D},$$

sendo α o achatamento $\dfrac{a-b}{a}$, e desprezando α^2 na primeira.

206. Quando a distancia zenithal z é muito grande relativamente a ω, deve preferir-se ás fórmulas (4) a desenvolução de $z'-z$ em uma serie convergente ordenada segundo as potencias de sen ω.

Para isso, fazendo

$$z'-z=y,\ \text{sen}\,\omega=x,\ -\text{sen}\,z\cos A=B,$$

a expressão de $\cos z'$, que então toma a fórma

$$\cos(z+y)=Bx+\cos z.\sqrt{1-x^2},$$

dá (*Math. Pur. de Franc.* p. IV, pag. 79)

$$z'-z=\frac{\cos A}{\text{sen}\,1''}.\,\text{sen}\,\omega+\frac{\cot z\,\text{sen}^2 A}{2\,\text{sen}\,1''}.\,\text{sen}^2\omega+\ldots.$$

Similhantemente, em logar das fórmulas (5), teriamos esta serie, mudando 'nella z em z' e reciprocamente, A em A$'$, ω em $-\omega$.

207. Quando o astro está no meridiano: fazendo $A=0$ ou $A=180°$, segundo está o astro, a respeito do zenith, para a parte do polo ou para a do equador, as fórmulas precedentes dão

$$z'=z+\omega,\ \text{ou}\ z'=z-\omega.$$

Serão pois 'neste caso,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{ou} & z'=z\pm\omega,\ \text{sen}\,\varpi=\text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,z',\ z''=z'-\varpi,\\ \text{ou} & \text{sen}\,\varpi=\text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,(z''+\varpi),\ z'=z''+\varpi,\ z=z'\mp\omega\end{array}\right\}\ldots(6),$$

das quaes o primeiro systema serve para passar de z para z'', e o segundo serve para passar de z'' para z.

208. *Parallaxes de ascensão recta e declinação.* A parallaxe de altura influe na ascensão recta e na declinação, e dá as parallaxes d'estas coordenadas; ou as de angulo horario e distancia polar, $S'PS = \delta P'$, $SP - S'P = \delta \Delta'$, que são eguaes áquellas tomadas com signal contrário.

Para ter a parallaxe de angulo horario, os triangulos $Z'PS'$ e $Z'PS$ dão

$$\cot P' = \frac{\cot z'' \operatorname{sen} D' - \cos A' \cos D'}{\operatorname{sen} A'}, \cot(P' + \delta P') = \frac{\cot z' \operatorname{sen} D' - \cos A' \cos D'}{\operatorname{sen} A'},$$

de cuja differença se tira

$$\operatorname{sen} \delta P' = \frac{\operatorname{sen} \varpi \operatorname{sen} D' \operatorname{sen}(P' + \delta P') \operatorname{sen} P'}{\operatorname{sen} A' \operatorname{sen} z' \operatorname{sen} z''};$$

e eliminando z', A', e z'', pelas equações

$$\frac{\operatorname{sen} P'}{\operatorname{sen} A'} = \frac{\operatorname{sen} z''}{\operatorname{sen} \Delta'}, \operatorname{sen} \varpi = \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} z',$$

fica

$$\operatorname{seu} \delta P' = \frac{\operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} D' \operatorname{sen}(P' + \delta P')}{\operatorname{sen} \Delta'} \ldots\ldots (7).$$

200. Para resolver esta equação podemos, como nos n.os 202 e 203,

fazendo $$k = \frac{\text{sen}\,\pi\,\text{sen}\,D'}{\text{sen}\,\Delta'},$$

usar da formula rigorosa

$$\text{tang}\,\delta\,P' = \frac{k\,\text{sen}\,P'}{1 - k\cos P'},$$

ou da serie

$$\delta\,P' = \frac{k\,\text{sen}\,P'}{\text{sen}\,1''} + \frac{k^2\,\text{sen}\,2\,P'}{2\,\text{sen}\,1''} + \frac{k^3\,\text{sen}\,3\,P'}{3\,\text{sen}\,1''} + \ldots\ldots (8).$$

Ordinariamente basta o primeiro termo; o que dá a formula approximada

$$\delta\,P' = \frac{\pi\,\text{sen}\,D'\,\text{sen}\,P'}{\text{sen}\,\Delta'} \ldots\ldots (9),$$

que tambem resultaria da differenciação da expressão de $\cot P'$.

Achado o valor de $\delta\,P'$, teremos

$$P = P' + \delta\,P',\ (\text{ÁR}) = (\text{AR})' - \delta\,P'.$$

210. Para ter a parallaxe de declinação, os mesmos triangulos dão

$$\cot\Delta = \frac{\cot A'\,\text{sen}\,P + \cos P\cos D'}{\text{sen}\,D'},\ \cot\Delta' = \frac{\cot A'\,\text{sen}\,P' + \cos P'\cos D'}{\text{sen}\,D'},$$

de cuja differença, eliminando o azimuth por meio da segunda, se tira

$$\operatorname{sen}\delta\Delta'=\left\{\frac{\operatorname{sen}\Delta'\cos D'\operatorname{sen}\delta P'}{\operatorname{sen}D'\operatorname{sen}P'}-\frac{2\cos\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\delta P')\operatorname{sen}\frac{1}{2}\delta P'}{\operatorname{sen}P'}\right\}\operatorname{sen}(\Delta'+\delta\Delta'),$$

ou

$$\operatorname{sen}\delta\Delta'=\left\{\frac{\operatorname{sen}\pi\cos D'\operatorname{sen}(P'+\delta P')-2\cos\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\delta P')\operatorname{sen}\frac{1}{2}\delta P'}{\operatorname{sen}P'}\right\}.\operatorname{sen}(\Delta'+\delta\Delta')..(10)$$

$$=Q\operatorname{sen}(\Delta'+\delta\Delta');$$

e conseguintemente $\tang\delta\Delta'=\dfrac{Q\operatorname{sen}\Delta'}{1-Q\cos\Delta'}$,

ou

$$\delta\Delta'=\frac{Q\operatorname{sen}\Delta'}{\operatorname{sen}1''}+\frac{Q^2\operatorname{sen}2\Delta'}{2\operatorname{sen}1''}+\frac{Q^3\operatorname{sen}3\Delta'}{3\operatorname{sen}1''}+\ldots\ldots(11).$$

Para accommodar a expressão de Q ao calculo logarithmico, temos

$$Q=\frac{1}{\operatorname{sen}P'}\cdot\left\{\operatorname{sen}\pi\cos D'\operatorname{sen}(P'+\delta P)-\frac{\cos\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\delta P')\operatorname{sen}\delta P'}{\cos\frac{1}{2}\delta P'}\right\}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}(P'+\delta P')}{\operatorname{sen}P'}.\left\{\cos D'-\frac{\cot\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\delta P')\operatorname{sen}D'}{\cos\frac{1}{2}\delta P'}\right\},$$

que se decompõe no systema das duas

$$\frac{\cot\Delta'\cos(P'+\frac{1}{2}\delta P')}{\cos\frac{1}{2}\delta P'}=\tang\varphi,\ Q=\frac{\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}(P'+\delta P')\cos(D'+\varphi)}{\operatorname{sen}P'\cos\varphi}.$$

Ordinariamente basta o primeiro termo da formula (11). Então, desprezando as quantidades de segunda ordem relativamente a π, $\delta P'$, $\delta\Delta'$, ficará

$$\delta\Delta' = \pi\,(\cos D' \operatorname{sen} \Delta' - \operatorname{sen} D' \cos \Delta' \cos P') \ldots . (12),$$

que tambem se obteria differenciando a expressão de $\cot \Delta'$.

Achado o valor de $\delta\Delta'$, teremos

$$\Delta = \Delta' + \delta\Delta', \; d = d' - \delta\Delta'.$$

211. Se na differença das expressões de $\cot \Delta$ e $\cot \Delta'$ eliminarmos o azimuth por meio da primeira, acharemos

$$\operatorname{sen} \delta\Delta' = \operatorname{sen} \pi \cos D' \left\{ \operatorname{sen}(\Delta' + \delta\Delta') - \frac{\cos(\Delta' + \delta\Delta') \operatorname{tang} D' \cos(P' + \frac{1}{2}\delta P')}{\cos \frac{1}{2}\delta P'} \right\},$$

que se decompõem no systema das duas:

$$\frac{\operatorname{tang} D' \cos(P' + \frac{1}{2}\delta P')}{\cos \frac{1}{2}\delta P'} = \operatorname{tg} \psi, \; \operatorname{sen} \delta\Delta' = \frac{\operatorname{sen} \pi \cos D' \operatorname{sen}(\Delta' + \delta\Delta' - \psi)}{\cos \psi},$$

ou, pondo $\dfrac{\operatorname{sen} \pi \cos D'}{\cos \psi} = N,$

$$\delta\Delta' = \frac{N \operatorname{sen}(\Delta' - \psi)}{\operatorname{sen} 1''} + \frac{N^2 \operatorname{sen} 2(\Delta' - \psi)}{2 \operatorname{sen} 1''} + \frac{N^3 \operatorname{sen} 3(\Delta' - \psi)}{3 \operatorname{sen} 1''} + \ldots (13).$$

212. *Parallaxes de longitude e latitude.* Se nas formulas das parallaxes de ascensão recta e declinação substituirmos, em logar de P', a differença $L-l'$ entre a longitude L do zenith e a longitude l' do astro; em logar de D', a distancia $90°-\Lambda$ do pólo da ecliptica ao zenith; em logar da distancia polar Δ' do astro, a sua distancia $90°-\lambda'$ ao pólo da ecliptica: teremos, mudando os signaes, as parallaxes de longitude e latitude.

Assim, fazendo

$$k'=\frac{\operatorname{sen}\pi\cos\Lambda}{\cos\lambda'},\ \operatorname{tang}\varphi'=\frac{\operatorname{tang}\lambda'\cos(L-l'-\frac{1}{2}\delta l')}{\cos\frac{1}{2}\delta l'},$$

$$Q'=\frac{\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}(L-l'-\delta l')\operatorname{sen}(\Lambda-\varphi')}{\operatorname{sen}(L-l')\cos\varphi'},$$

$$\frac{\cot\Lambda\cos(L-l'-\frac{1}{2}\delta l')}{\cos\frac{1}{2}\delta l'}=\cot\psi',\ \frac{\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\Lambda}{\operatorname{sen}\psi'}=N',$$

as parallaxes de $\delta l'$ e $\delta\lambda'$ de longitude e de latitude serão dadas pelas formulas:

$$\delta l'=-\left\{\frac{k'\operatorname{sen}(L-l')}{\operatorname{sen}1''}+\frac{k'^2\operatorname{sen}2(L-l')}{2\operatorname{sen}1''}+\frac{k'^3\operatorname{sen}3(L-l')}{3\operatorname{sen}1''}+\ldots\right\},$$

$$\delta\lambda'=-\left\{\frac{Q'\operatorname{sen}(90°-\lambda')}{\operatorname{sen}1''}+\frac{Q'^2\operatorname{sen}2(90°-\lambda')}{2\operatorname{sen}1''}+\frac{Q'^3\operatorname{sen}3(90°-\lambda')}{3\operatorname{sen}1''}+\ldots\right\},$$

$$\delta\lambda'=-\left\{\frac{N'\operatorname{sen}(\psi'-\lambda')}{\operatorname{sen}1''}+\frac{N'^2\operatorname{sen}2(\psi'-\lambda')}{2\operatorname{sen}1''}+\frac{N'^3\operatorname{sen}3(\psi'-\lambda')}{3\operatorname{sen}1''}+\ldots\right\},$$

213. A longitude L e a latitude Λ do zenith calculam-se, pelas formulas dos n.os 19 e 21, em funcção da sua ascensão recta, que é o tempo sideral reduzido a arco; da sua declinação, que é a altura do pólo sôbre o horizonte; e da obliquidade do equador a respeito da ecliptica.

Formulas de Olbers

214. Chamando **M** a ascensão recta do zenith; a' e a as ascensões rectas, verdadeira e apparente, do astro; P' e P os angulos horarios, verdadeiro e apparente: temos, pelos numeros precedentes,

$$\delta P' = P - P' = a' - a, \; P' = M - a', \; P = M - a,$$

$$k = \frac{\operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} D'}{\operatorname{sen}\Delta'}, \; \operatorname{tang}\delta P' = \frac{k \operatorname{sen} P'}{1 - k\cos P'}.$$

Mas é $$\operatorname{tang} a = \operatorname{tang}(a' - \delta P') = \frac{\operatorname{tang} a' - \operatorname{tang}\delta P'}{1 + \operatorname{tang} a' \operatorname{tang}\delta P'}:$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{logo} & \operatorname{tang} a = \dfrac{\operatorname{sen} a' - k \operatorname{sen} M}{\cos a' - k\cos M}, \\[2ex] \text{ou} & \operatorname{tang} a = \dfrac{\operatorname{sen} a' \operatorname{sen}\Delta' - \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} D' \operatorname{sen} M}{\cos a' \operatorname{sen}\Delta' - \operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} D' \cos M} \end{array}\right\} \ldots\ldots (14).$$

215. Tambem se póde achar a pelas formulas

$$\operatorname{tang} P = \frac{\operatorname{sen} P'}{\cos P' - k}, \quad a = M - P,$$

das quaes a primeira dá o angulo horario apparente em funcção do verdadeiro;

ou $$\frac{k}{\operatorname{sen} P'} = \operatorname{tang} \varepsilon, \quad \operatorname{tang} P = \frac{\operatorname{sen} P' \cos \varepsilon}{\cos (P' + \varepsilon)}, \quad a = M - P.$$

216. Em quanto ás declinações, temos (n.º 210)

$$Q = \frac{\operatorname{sen} \pi \cos D' \operatorname{sen} (P' + \delta P') - 2 \cos \Delta' \cos (P' + \frac{1}{2} \delta P') \operatorname{sen} \frac{1}{2} \delta P'}{\operatorname{sen} P'}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \pi \cos D' \operatorname{sen} P - \cos \Delta' (\operatorname{sen} P - \operatorname{sen} P')}{\operatorname{sen} P'},$$

e $$\operatorname{tang} \delta \Delta' = \frac{Q \operatorname{sen} \Delta'}{1 - Q \cos \Delta'}.$$

D'onde resulta $$\operatorname{tang} \Delta = \operatorname{tang} (\Delta' + \delta \Delta') = \frac{\operatorname{sen} \Delta'}{\cos \Delta' - Q}.$$

E porque é $$\cos \Delta' - Q = \frac{(\cos \Delta' - \operatorname{sen} \pi \cos D') \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} P'}$$

$$= \frac{(\cos \Delta' - k \cot D' \operatorname{sen} \Delta') \cos a \,(\operatorname{sen} M - \cos M \operatorname{tang} a)}{\operatorname{sen} (M - a')},$$

ou, em virtude de (14),

$$\frac{(\cot z'' - \cot z')\,\mathrm{sen}\,D'}{\mathrm{sen}\,A'} = \frac{\left[\frac{\cos z''}{\mathrm{sen}\,z''} - \frac{\cos z'}{\mathrm{sen}\,z'}\right]\mathrm{sen}\,D'}{\mathrm{sen}\,A'}$$

resulta

$$= \frac{\cos\beta'}{\mathrm{sen}\,\beta'} - \frac{\cos(\beta'+d\beta')}{\mathrm{sen}(\beta'+d\beta')}$$

ou

$$\frac{\mathrm{sen}\,\pi\,\mathrm{sen}\,D'\,\mathrm{sen}\,\beta'\,\mathrm{sen}(\beta'+d\beta')}{\mathrm{sen}\,A'\,\mathrm{sen}\,z'\,\mathrm{sen}\,z''} = \mathrm{sen}\,d\beta',$$

21
ascens
cta e d
Pa
no sys

tang

21
***l*, *l'*, 9**
milhan
das su

215. Tambem se póde achar a pelas formulas

$-\frac{1}{\sin^2 p_1} \, d p_1 =$

ou, em virtude de (14),

$$\cos \Delta' - Q = \frac{(\cos \Delta' - k \cot D' \operatorname{sen} \Delta') \cos a}{\cos a' - k \cos M},$$

resulta:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \Delta &= \frac{\operatorname{sen} \Delta' (\cos a' - k \cos M)}{\cos a (\cos \Delta' - k \cot D' \operatorname{sen} \Delta')}, \\ &\text{ou} \\ \operatorname{tang} \Delta &= \frac{\operatorname{sen} \Delta' \cos a' - \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} D' \cos M}{\cos a (\cos \Delta' - \operatorname{sen} \pi \cos D')} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (15).$$

217. As formulas (14) e (15) de Olbers dão immediatamente a ascensão recta e a distancia polar apparentes, em funcção da ascensão recta e distancia polar verdadeiras.

Para as accommodar ao calculo logarithmico, podemos transformal as no systema

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{\operatorname{sen} a'}{k \cos M}, \quad \operatorname{tang} \nu = \frac{\cos a'}{k \operatorname{sen} M}, \quad \cot \xi = k \cot D',$$

$$\operatorname{tang} a = \frac{\cos \nu \operatorname{sen} (M - \mu)}{\cos \mu \cos (M + \nu)}, \quad \operatorname{tang} \Delta = \frac{\operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} D' \operatorname{sen} \xi \cos (M + \nu)}{\cos a \cos \nu \operatorname{sen} (\Delta' - \xi)}.$$

218. Se 'nestes resultados usarmos respectivamente de L, 90°— Λ, l, l', 90° — λ, 90° — λ', em logar de M, D', a, a', Δ, Δ'; acharemos similhantemente as longitudes e latitudes apparentes dos astros em funcção das suas longitudes e latitudes verdadeiras.

III

Determinação da parallaxe horizontal.

219. Para fazer uso das formulas precedentes falta determinar a parallaxe horizontal π, que 'nellas entra.

Supponhamos que dois observadores O e $O_{,}$ (Fig 57), collocados no mesmo meridiano, observam as distancias zenithaes meridianas $LOZ = z$, $LO_{,}Z_1 = z_{,}$, d'um astro L. Nos triangulos COL, $CO_{,}L$, conhecem-se as quatro partes

$$LOC = 180^\circ - z', \; LO_1C = 180^\circ - z_{,}', \; OC = r, \; O_{,}C = r_{,}\,;$$

e ha as duas condições de ser $CL = R$ commum, e de ser

(Fig. 57) $$OCL + O_{,}CL = c + c_{,} = \varphi,$$

ou (Fig. 58) $$OCL - O_{,}CL = c - c_{,} = \varphi\,;$$

sendo φ a differença das latitudes geocentricas dos dois observadores.

Teremos pois as seis condições necessarias para resolver estes dois triangulos, que, usando do signal superior para a primeira figura, e do inferior para a segunda, dão

$$\operatorname{sen} \varpi = \operatorname{sen} (z' - c) = \frac{r}{R} \operatorname{sen} z',$$

$$\operatorname{sen} \varpi_{,} = \operatorname{sen} (z_{,}' - c_{,}) = \frac{r_{,}}{R} \operatorname{sen} z_{,}' = \frac{r_{,}}{r} \cdot \frac{r}{R} \operatorname{sen} z_{,}',$$

$$c \pm c_{,} = \varphi;$$

ou, substituindo em logar das razões dos senos das parallaxes de alturas as das mesmas parallaxes,

$$\varpi = z' - c = \pi \operatorname{sen} z', \quad \varpi_{,} = z_{,}' - c_{,} = \frac{r_{,}}{r} \pi \operatorname{sen} z_{,}', \quad c \pm c_{,} = \varphi.$$

E eliminando c e $c_{,}$, acharemos a parallaxe horizontal

$$\pi = \frac{L}{\operatorname{sen} z' \pm \frac{r_{,}}{r} \operatorname{sen} z_{,}'} = \frac{z' \pm z_{,}' - \varphi}{\operatorname{sen} z' \pm \frac{r_{,}}{r} \operatorname{sen} z_{,}'} \; \ldots . (16):$$

tendo logar, segundo ha pouco dissemos, o signal superior quando o astro está entre os dois zeniths; e o signal inferior, quando o astro está para a mesma parte dos dois zeniths, e mais proximo de Z_1.

220. Chamando λ e $\lambda_{,}$ as latitudes astronomicas ONE e $O_{,}N'E$ dos dois observadores; e ω e $\omega_{,}$ os angulos ZOZ' e $Z_{,}O_{,}Z_{,}'$ das suas verticaes com os raios: temos, no caso de estar o astro entre os dois zeniths,

Para latitudes de diversa denominação (Fig. 57) $\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \lambda + \lambda_{,} - \omega - \omega_{,}, \\ z' = z - \omega, \; z_{,}' = z_{,} - \omega_{,}; \end{array} \right.$

Para latitudes da mesma denominação (Fig. 59) $\begin{cases} \varphi = \lambda - \lambda_{,} - \omega + \omega_{,}, \\ z' = z - \omega, z_{,}' = z_{,} + \omega_{,}. \end{cases}$

O que substituido na expressão (16) de π, tomada com o signal superior, dá

$$\pi = \frac{z + z_{,} - \lambda \mp \lambda_{,}}{\operatorname{sen}(z - \omega) + \frac{r_{,}}{r}\operatorname{sen}(z_{,} \mp \omega_{1})} \ldots\ldots (17):$$

tendo logar o signal superior, quando as latitudes são de diversa denominação; e o signal inferior, quando as latitudes são da mesma denominação, e se chama $\lambda_{,}$ a mais pequena d'ellas.

221. No caso de estar o astro para a mesma parte dos dois zeniths, e mais proximo do zenith de $O_{,}$, temos:

Para latitudes de diversa denominação (Fig. 58) $\begin{cases} \varphi = \lambda + \lambda_{,} - \omega - \omega_{,}, \\ z' = z - \omega, z_{,}' = z_{,} + \omega_{,}; \end{cases}$

Para latitudes da mesma denominação (Fig. 60) $\begin{cases} \varphi = \lambda - \lambda_{,} - \omega + \omega_{,}, \\ z' = z - \omega, z_{,}' = z_{,} - \omega_{,}. \end{cases}$

O que substituido na expressão (16) de π, tomada com o signal inferior, dá

$$\pi = \frac{z - z_{,} - \lambda \mp \lambda_{,}}{\operatorname{sen}(z - \omega) - \frac{r_{,}}{r}\operatorname{sen}(z_{,} \pm \omega_{,})} = \frac{z - z_{,} - \lambda \mp \lambda_{,}}{\operatorname{sen}(z - \omega) + \frac{r_{,}}{r}\operatorname{sen}(-z_{,} \mp \omega_{,})} \ldots (18).$$

222. Examinando as fórmulas (17) e (18), vê-se que:

1.° A fórmula

$$\pi = \frac{r(z + z_{,} - \lambda - \lambda_{,})}{r \operatorname{sen}(z - \omega) + r_{,} \operatorname{sen}(z_{,} - \omega_1)}$$

suppõe que um dos observadores está no hemispherio boreal e o outro no hemispherio austral, e que o astro está entre os dois zeniths.

2.° Se ambos os observadores estiverem no mesmo hemispherio, austral ou boreal, deverão mudar-se os signaes de λ e ω relativos áquelle que estiver mais proximo do equador.

3.° Se o astro estiver para a mesma parte dos dois zeniths, deverá mudar-se o signal do z relativo ao zenith mais proximo do astro.

223. No caso de se suppôr a terra espherica,

é
$$r = r_{,},\ \omega = o,\ \omega_{,} = o;$$

e reduz-se a fórmula a

$$\pi = \frac{z + z_1 - \varphi}{\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z_1}:$$

na qual se deverá mudar z_1 em $-z_{,}$ quando estiver o astro para a mesma parte dos dois zeniths, e mais proximo de $Z_{,}$; e se deverá tomar por φ a somma arithmetica das duas latitudes, ou a sua differença, segundo estiverem os observadores em hemispherios differentes, ou no mesmo hemispherio.

224. Na expressão de π os erros absolutos, commettidos nas observações das distancias zenithaes, não só se conservam, mas podem avultar pela divisão por $\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z_{,}$ (*a*).

(*a*) Seja E o limite do erro de L; e ε o dos erros de z e $z_{,}$, isto é, $\varepsilon(\cos z + \cos z_{,}) = E'$ o do erro de $\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z_{,}$. Os limites dos erros correspondentes de π serão

$$\delta\pi = \frac{E}{\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z_{,}},\ \delta'\pi = -\frac{E' \operatorname{sen} \pi}{\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} z_{,}}.$$

Os multiplicadores de E e E' mostram que a influencia do primeiro d'estes erros é muito mais para recear que a do segundo.

Por isso é melhor escolher uma estrella, que esteja proxima do astro; e tomar em ambos os logares com bons equatoriaes as differenças das declinações apparentes dos dois astros. As differenças das declinações serão assim independentes dos erros absolutos dos instrumentos; e só influirá 'nellas a variação d'estes erros na passagem da observação d'um astro para a do outro.

Feito isto, por ser para as estrellas insensivel o angulo E (Fig. 61) das rectas $O\star$ e $O_{,}\star$, devem estas rectas considerar-se como parallelas; e, segundo estiver o astro entre as duas projecções da estrella, ou para a mesma parte de ambas, isto é, segundo ficar a estrella a respeito do astro mais boreal para um observador e mais austral para o outro, ou mais boreal ou mais austral para ambos, assim teremos, chamando δ e $\delta_{,}$ as differenças de declinação apparentes observadas nos dois logares:

(Fig. 61) $\begin{cases}\text{angulo L externo ao triangulo OLQ,}\\ L=\delta+Q=\delta+\delta_{,}+E=\delta+\delta_{,};\end{cases}$

(Fig. 62) $\begin{cases}\text{angulo L interno ao triangulo OLQ,}\\ L=Q-\delta=E+\delta_{,}-\delta=\delta_1-\delta.\end{cases}$

Teremos pois a fórmula

$$\pi=\frac{r(\delta+\delta_1)}{r\,\mathrm{sen}\,(z-\omega)+r_1\,\mathrm{sen}\,(z_{,}-\omega_{,})}\ldots\ldots(19).$$

1.° Esta fórmula suppõe que para um dos observadores a estrella está no norte, e para outro ao sul, do astro.

2.° Se para ambos os observadores a estrella estiver ao norte ou ao sul do astro, deverá mudar-se o signal da menor das quantidades δ ou δ_1.

225. O que temos dicto suppõe, que os dois observadores estão no mesmo meridiano. Se não estiverem, serão differentes os instantes em que elles tomam as differenças de declinação δ, δ_1, as quaes, no caso de ter o astro movimento sensivel em declinação no intervallo, não serão as mesmas que se fossem observadas simultaneamente. D'onde resulta a necessidade de reduzir uma ao tempo da outra.

Sejam:

$$
\begin{array}{lllll}
i & \epsilon & & & \\
 & & \dfrac{\epsilon'-\epsilon}{i'-i}=\delta\epsilon & & \\
i' & \epsilon' & & \dfrac{\delta\epsilon'-\delta\epsilon}{i''-i}=\delta^2\epsilon & \\
 & & \dfrac{\epsilon''-\epsilon'}{i''-i'}=\delta\epsilon' & & \dfrac{\delta^2\epsilon'-\delta^2\epsilon}{i'''-i}=\delta^3\epsilon\ldots\ldots: \\
i'' & \epsilon'' & & \dfrac{\delta\epsilon''-\delta\epsilon'}{i'''-i'}=\delta^2\epsilon' & \\
 & & \dfrac{\epsilon'''-\epsilon''}{i'''-i''}=\delta\epsilon'' & & \\
i''' & \epsilon''' & & &
\end{array}
$$

as raizes i, i', i'',....; as funcções correspondentes ϵ, ϵ', ϵ'',.... ; e as expressões compostas com as differenças das funcções e das raizes do modo que se vê no quadro precedente.

Para uma raiz t, que não diste muito d'aquellas ás quaes correspondem as funcções dadas, teremos, como se sabe, a funcção correspondente:

$$\epsilon_t=\epsilon+(t-i)\,\delta\epsilon+(t-i)(t-i')\,\delta^2\epsilon+(t-i)(t-i')(t-i'')\,\delta^3\epsilon+\ldots$$

Se conhecermos pois o intervallo θ das passagens do astro pelos dois meridianos; e chamarmos ϵ, e ϵ', ϵ'',... as differenças de declinação da estrella e do astro observadas no tempo i da passagem pelo meridiano mais oriental, e nos tempos i', i'',... ; teremos, para o tempo $i+\theta$ da passagem pelo segundo meridiano, immediata á que no primeiro meridiano tem logar no tempo i, o valor ϵ_t, que devemos tomar por δ. Mas, se ϵ, ϵ', ϵ'',... forem as declinações do astro observadas nas epochas das passagens meridianas, a expressão $\epsilon_t-\epsilon=c$ será a correcção que se deve applicar á differença de declinação do astro e da estrella observada no tempo i da passagem do astro pelo meridiano mais oriental, para ter a differença de declinação correspondente ao tempo $i+\theta$ da passagem pelo meridiano mais occidental, que se deve tomar por δ. Esta correcção reduz assim a differença de declinações observada no primeiro logar á que seria observada no ponto onde o parallello d'esse logar é cortado pelo meridiano do segundo.

Similhantemente corrigiremos a distancia zenital z; mas 'nisso basta empregar menos cuidado.

226. *Exemplo.* No meridiano do Cabo da Boa-Esperança, comparando Marte com a estrella λ de Aquario, achou Lacaille a differença apparente de declinações $26'',7$ entre o bordo boreal do disco do planeta e a estrella, mais austral que elle; sendo $z = 25°2'$ a sua distancia zenithal, com approximação de minutos. No mesmo instante, e no mesmo meridiano, Wargentin achou em Stokolmo a differença apparente de declinações $6'',6$ entre o mesmo bordo septentrional do disco do planeta e a estrella, mais boreal que elle; sendo $z_{,} = 68°14'$.

Por tanto, suppondo a terra espherica, a fórmula (19) dá

$$\pi = \frac{33'',3}{\operatorname{sen} 25°2' + \operatorname{sen} 68°14'},$$

ou

$$\pi = \frac{33'',3}{1,3518} = 24'',64.$$

Para achar a distancia de Marte no mesmo instante, temos

$$\log \operatorname{sen} 24'',64 = \log \operatorname{sen} 24''.\frac{24'',64}{24''} = 6.0772156,$$

e por conseguinte

$$R = \frac{r}{\operatorname{sen} 24'',64} = 8371,14.r.$$

CAPITULO XI

Do circular repetidor

227. Serve de base a este instrumento um circulo ou prato azimuthal, sustentado por tres pés equidistantes munidos de parafusos. O eixo de uma columna vertical, cuja extremidade inferior encaixa no centro d'aquelle prato, póde gyrar azimuthalmente, acompanhando-o um index que na circumferencia do mesmo prato indica a quantidade d'esse movimento.

Um circulo vertical de maior raio gyra na extremidade d'um eixo de rotação horizontal. Serve de contrapêso a este circulo um tambor ligado com a extremidade opposta do mesmo eixo; e no perimetro do tambor, que é dentado, póde entrosar um parafuzo sem fim ligado á columna, á qual prende então o circulo, permittindo-lhe sómente o movimento de rotação que por elle se lhe dá. Gyra á roda do centro do mesmo circulo um oculo, fixo em uma grade; e esta segura quatro nonios equidistantes e os respectivos microscopios, para multiplicar as leituras. Um grande nivel graduado, parallello ao circulo vertical e ligado á columna, accusa e mede os desarranjos d'esta parallelamente ao mesmo circulo. Um pequeno nivel, parallelo ao eixo de rotação horizontal, accusa as perturbações da verticalidade do limbo.

Nos circulares repetidores, que tambem são proprios para as operações geodesicas, ha um sector que prende a columna ao circulo, quando se tem dado a este a inclinação necessaria para aquellas operações. Um parafuso tangencial d'esse sector serve, nas observações em que o circulo deve ser vertical, para corrigir a falta de verticalidade accusada pelo pequeno nivel.

228. Para se observarem as distancias zenithaes com o circular repetidor devem primeiramente verificar-se: a verticalidade da columna; o parallelismo do circulo a ella; e o parallelismo do eixo optico ao mesmo circulo.

A verticalidade da columna verifica-se em duas posições cruzadas do circulo: uma na direcção d'um dos pés; a outra na direcção perpendicular a esta, isto é, na direcção perpendicular ao raio azimuthal, que divide ao meio o angulo dos raios que passam pelos outros dois pés. Em uma d'estas posições nivella-se com o parafuso do pé respectivo; dá-se ao circulo o movimento azimuthal de 180°; corrige-se com o parafuso do pé metade do espaço andado pela bolha 'nesse movimento, e com o parafuso do nivel a outra metade; volta-se depois á primeira posição por outro movimento azimuthal de 180°; e faz-se outra vez, por egual processo, com os parafusos do pé e do nivel a correcção do espaço que a bolha ainda percorreu: e assim até a exhaustão (n.° 52). Na posição perpendicular á primeira obtem-se a verticalidade só pelo movimento dos dois pés, entre os quaes é intermedio o ponto por onde passa o raio azimuthal perpendicular ao circulo; levantando um e abaixando egualmente o outro.

O parallelismo do circulo á columna verifica-se pelo fio de prumo, que se faz pender do ponto marcado em uma chapa applicada perpendicularmente ao limbo, e que deve tocar o ponto, equidistante do limbo, marcado em outra chapa: faz-se esta operação em dois logares differentes do limbo; e, sendo necessario, verificam-se os dois pontos das chapas por outra applicação do prumo, depois de dar ao circulo o movimento de rotação de 180° (n.° 57). Com o parafuso tangencial ao sector, de que fallámos no fim do número precedente, corrige-se o erro que accusar a applicação do prumo: e, feito isto, move-se o parafuso do pequeno nivel, até que a bolha fique entre dois pontos marcados pelo artista, e possa depois indicar facilmente as perturbações de verticalidade do circulo.

O parallelismo do eixo optico ao plano do circulo verifica-se por uma luneta de prova: ou tambem, dirigindo o eixo optico para um ponto distante; dando ao limbo um movimento azimuthal de 180°; movendo o oculo até que o eixo optico se projecte no mesmo ponto, ou em outro proximo; e destruindo, no último caso, a metade da distancia dos dois pontos pelo movimento do reticulo, ou do objectivo.

229. Feitas estas verificações, e fixado o oculo em tal parte do circulo que o zero do nonio da extremidade ocular corresponda ao zero da graduação, demos ao circulo os movimentos azimuthal e vertical necessarios para enfiar um objecto fixo: e supponhamos que 'nesta primeira observação o limbo ficou á direita do observador. Dando depois um movimento azimuthal de 180°, ficará o limbo á esquerda; e o oculo voltado para um ponto, cuja distancia ao zenith será egual á do objecto observado, mas para a parte opposta. Por tanto, se firmando então o circulo, e desprendendo o oculo, movermos este até que o eixo optico torne a en-

fiar o objecto, terá o mesmo eixo descripto um angulo duplo da distancia zenithal.

Trazendo de novo o circulo á primeira posição azimuthal, e procedendo a outro par de observações similhantes ás que acabâmos de indicar, mas sendo agora posição inicial do oculo no circulo a que tomára no fim do primeiro par, o eixo optico descreverá outro arco duplo da distancia zenithal; conseguintemente o arco descripto por elle desde o principio das quatro observações será quadruplo da mesma distancia.

Fazendo d'este modo um número $2n$ de observações, de sorte que se enfie o objecto nas impares pelo movimento do circulo, e nas pares pelo movimento do oculo, e chamando z a distancia zenithal do objecto, o arco percorrido pelo eixo optico do oculo será $2nz$. Portanto se fôr i o número de circumferencias inteiras por elle percorridas, e a o arco lido no fim da última operação, será

$$2nz = 360\,i + a,\ z = \frac{360\,i + a}{2n}.$$

Evita-se o trabalho de contar o número i das revoluções completas do oculo, lendo tambem o arco no fim do primeiro par de observações, e tomando a sua metade $z_{,}$; porque esta será um valor de z sufficientemente approximado para o fim de achar o número $i = \frac{2nz_1 - a}{360}$.

Sejam 0, α_1, α_2, α_3, as leituras dos quatro nonios no principio das observações; e A_o, A_1, A_2, A_3, as leituras dos nonios no fim. Os arcos percorridos por elles serão $A_o - 0$, $A_1 - \alpha_1$, $A_2 - \alpha_2$, $A_3 - \alpha_3$; por conseguinte o angulo descripto pelo eixo optico será mais exactamente $A = \frac{A_o + A_1 + A_2 + A_3 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{4}$; isto é, *a quarta parte da differença entre a somma das leituras finaes e a das leituras iniciaes* (a).

(a) Sejam 0, $\alpha_1{}'$, $\alpha_2{}'$, $\alpha_3{}'$, as leituras de comparação dos nonios no fim da operação. Tambem será $A_o = \frac{A_o + A_1 + A_2 + A_3 - \alpha_1{}' - \alpha_2{}' - \alpha_3{}'}{4}$, no caso de ser invariavel a posição de cada nonio relativamente ao eixo optico. Mas supponha-

230. Quando os objectos não são fixos, é necessario attender ao seu movimento no intervallo das observações; porque o arco descripto pelo oculo, durante cada par de observações, não é então duplo da distancia zenithal do objecto no principio d'esse par. Vejamos pois como nas observações da distancia zenithal dos astros se illudem os effeitos do seu movimento diurno.

São dois os usos astronomicos, para os quaes costuma servir o circulo repetidor: determinação da hora; e determinação da distancia zenithal meridiana. Tractaremos separadamente de cada um d'elles.

Supponhamos que se faz com o circular repetidor um par de observações, e que a ellas correspondem os angulos horarios P', P'', e as distancias zenithaes z', z'', cuja somma $z'+z''=\sigma$ se lê no circulo.

231. Se o andamento do relogio relativamente ao astro for proximamente conhecido, de sorte que, em uma serie de alguns minutos de duração, se possa converter com sufficiente exactidão o intervallo de tempo do relogio em intervallo de tempo do astro, as equações tiradas dos triangulos ZPS' e ZPS'',

$$z'+z''=\sigma,\ \cos z'=\cos P' \operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen} D+\cos\Delta\cos D,$$

mos que, durante a observação, os nonios se adiantam das quantidades e_0, e_1, e_2, e_3. Serão

$$A=A_0-e_0,\ e_1-e_0=\alpha_1'-\alpha_1,\ e_2-e_0=\alpha_2'-\alpha_2,\ e_3-e_0=\alpha_3'-\alpha_3.$$

O que dará

$$A=\frac{A_0+A_1+A_2+A_3-\alpha_1'-\alpha_2'-\alpha_3'}{4}-e_0,$$

$$A=\frac{A_0+A_1+A_2+A_3-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}{4}-\frac{e_0+e_1+e_2+e_3}{4}.$$

E como, em virtude das compensações, é provavelmente $e_0>\frac{e_0+e_1+e_2+e_3}{4}$, parece preferivel a segunda d'estas expressões, que é a adoptada no texto.

$$\cos z'' = \cos[P' + (P'' - P')] \operatorname{sen} \Delta' \operatorname{sen} D + \cos \Delta' \cos D,$$

nas quaes são desconhecidas z', z'', P', poderão dar estas quantidades. Mas, para mais exactidão e facilidade, reduzamos a uma epocha intermedia, na qual seja P o angulo horario. Se as differenças

$$P' - P = \delta P', \; P'' - P = \delta P'', \; \Delta' - \Delta = \delta\Delta', \; \Delta'' - \Delta = \delta\Delta'',$$

forem tão pequenas que possamos limitar-nos aos quadrados de δP e ás primeiras potencias de $\delta\Delta$, teremos:

$$z = f(P,\Delta), \; z' = z + \frac{dz}{dP}\delta P' + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dP^2}\delta P'^2 + \frac{dz}{d\Delta}\delta\Delta'.$$

E como de se tiram $\quad \cos z = \cos P \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D + \cos \Delta \cos D \ldots$ (1)

$$\frac{dz}{dP} = \frac{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen} z} = a,$$

$$\frac{d^2z}{dP^2} = \frac{dz}{dP}\,\frac{d \log\left(\frac{dz}{dP}\right)}{dP} = a(\cot P - a \cot z) = b,$$

$$\frac{dz}{d\Delta} = \frac{\operatorname{sen}\Delta \cos D - \cos P \cos\Delta \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{sen}(\Delta - D) + 2\cos\Delta \operatorname{sen} D \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}P}{\operatorname{sen} z} = c,$$

serão:

$$z'=z+a\delta P'+\tfrac{1}{2}b\delta P'^2+c\delta\Delta',\ z''=z+a\delta P''+\tfrac{1}{2}b\delta P''^2+c\delta\Delta'',$$

e conseguintemente

$$z=\frac{z'+z''}{2}-\frac{a(\delta P'+\delta P'')+b\left(\frac{\delta P'^2+\delta P''^2}{2}\right)+c(\delta\Delta'+\delta\Delta'')}{2}.$$

E para uma serie de $2n$ d'estas observações será

$$z=\frac{\Sigma z'}{2n}-\frac{a\Sigma\delta P'+b\Sigma\frac{2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}\delta P'}{\text{sen}\,1''}+c\,\Sigma\delta\Delta'}{2n}\ldots.(2).$$

232. Ordinariamente limita-se uma serie a tão poucas observações que nos intervallos d'ellas sejam insensiveis os dois últimos termos da da correcção de $\frac{\Sigma z'}{2n}$; o que reduz (2) a

$$z=\frac{\Sigma z'}{2n}-\frac{a\Sigma\delta P'}{2n}\ldots.(3).$$

E toma-se para epocha a correspondente ao angulo horario medio

$$\frac{\Sigma P'}{2n}=P+\frac{\Sigma\delta P'}{2n},$$

isto é toma-se $\frac{\Sigma\delta P'}{2n}=0$: o que reduz (3) a $z=\frac{\Sigma z'}{2n}$.

Basta pois, sem applicar correcção alguma, tomar a distancia zenithal media $\frac{\Sigma z'}{2n}$ como correspondente á epocha media $\frac{\Sigma t'}{2n}$.

E então fazem-se as observações por series consecutivas, cujas durações, ordinariamente de $8'$ a $10'$, sejam taes que em cada uma d'ellas se possa empregar a equação (3).

Mas para verificar se póde empregar-se a equação (3) com segurança, calcula-se pela equação (1) o angulo horario P_1 correspondente á distancia zenithal $\frac{\Sigma z'}{2n}$; depois calcula-se z pela fórmula (1) para o angulo horario $P_1 + \delta P_1$, sendo δP_1 metade da duração da serie convertida em angulo horario; e finalmente comparando $z - \frac{\Sigma z'}{2n}$ com esta mesma differença calculada pela fórmula $a\delta P_1$, vê-se se podem tomar-se como eguaes uma á outra, sem erro attendivel.

233. Supponhamos que, applicando este processo a um número i de series, achamos as seguintes distancias zenithaes, correctas da refracção e da parallaxe, e os tempos do relogio correspondentes:

$$\left\{\begin{array}{lllll} \text{Distancias} & z_1, & z_2, & z_3, \ldots\ldots\ldots & z_i \\ \text{Tempos} & t_1, & t_2, & t_3, \ldots\ldots\ldots & t_i \end{array}\right\}.$$

A fórmula (1), ou

$$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(z + \Delta - D) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(z + D - \Delta)}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta},$$

dará os angulos horarios respectivos

$$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots\ldots P_i.$$

Se o astro é uma estrella: ajunctando a estes angulos a ascensão recta d'ella, e repartindo as sommas por 15, teremos os tempos sideraes

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \theta_i.$$

Se o astro é o sol: subtrahindo as equações do tempo respectivas dos angulos horarios repartidos por 15, teremos os tempos medios.

Os atrazos absolutos do relogio serão pois

$$\theta_1 - t_1, \theta_2 - t_2, \theta_3 - t_3, \ldots\ldots\ldots\ldots \theta_i - t_i.$$

Se estas quantidades differirem pouco entre si, e irregularmente, tomaremos um meio entre ellas para ter com mais exactidão o atrazo do relogio: mas, se differirem entre si consideravelmente, e com regularidade, as suas differenças mostrarão o andamento do relogio.

234. Para que 'nestes resultados influam pouco os erros da distancia zenithal observada, convém que ás variações de z correspondam pequenas variações de P; e como a expressão de $\frac{dz}{dP} = a$ tirada de (1) dá

$$dP = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} P \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D}\, dz = \frac{1}{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} A}\, dz,$$

vê-se que, em quanto á escolha do astro, convém que a sua distancia polar se approxime de 90°; e, em quanto á hora da observação, convém que seja aquella em que o azimuth menos differe de 90°, isto é, em que o astro está mais proximo do primeiro vertical. Por isso costumam estas observações fazer-se sufficientemente longe do meridiano.

235. O uso da fórmula (2) permitte empregar series muito maiores.

Tomando por epocha a media dos tempos das observações, o que dá

$\Sigma(\delta P') = o$, e suppondo uniforme o movimento em declinação durante o intervallo d'ellas, ou $\Sigma(\delta\Delta') = o$, a fórmula (2) ficará reduzida a

$$z = \frac{\Sigma z'}{2n} - \frac{b\Sigma\left(\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \delta P}{\operatorname{sen} 1''}\right)}{2n} \ldots\ldots (4).$$

O sommatorio $\Sigma\left(\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \delta P'}{\operatorname{sen} 1''}\right)$ calcula-se facilmente pela taboa de $\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P'}{\operatorname{sen} 1''}$, que no fim d'este volume transcrevemos; e $\frac{b}{2n}$ calcula-se com facilidade pelas fórmulas seguintes:

$$\frac{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} z} = Q,\ Q \cot z \operatorname{sen} P = \operatorname{tang} \varphi,\ \frac{Q \cos(\varphi + P)}{2n \cos \varphi} = \frac{b}{2n}.$$

Para ter os angulos $\delta P'$ bastaria multiplicar por 15 os respectivos intervallos de tempo $\delta t'$ reduzidos proximamente a tempo do astro: mas estes intervallos reduzidos são até os argumentos da taboa que dá $\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P'}{\operatorname{sen} 1''}$.

Em quanto ao valor de z, que entra no calculo de b, basta tomar por elle a distancia media $\frac{\Sigma z'}{2n}$; e, quando muito, repetir depois o calculo de b com o primeiro valor de z determinado pela fórmula (4), isto é, calcular a fórmula (4) por duas approximações successivas.

Poderemos d'este modo empregar ordinariamente series de 20′ e mais.

236. *Determinação da distancia zenithal meridiana.* Sejam z a distancia zenithal meridiana; $z' = z + \delta$ a distancia zenithal observada, que se quer reduzir a ella; e $P = o$, P', os angulos horarios correspon-

dentes. A fórmula (1) dá

$$\cos z - \cos(z+\delta) = 2 \operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen} D \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P' = 2k,$$

da qual (Franc. *Math. Pur.* p. IV, n.º 67, 3.º), fazendo

$$m = \frac{2k}{\operatorname{sen} z \operatorname{sen} 1''} = \frac{\operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} z} \cdot \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P'}{\operatorname{sen} 1''},$$

se tira, em segundos,

$$\delta = m - \frac{1}{2} m^2 \cot z \operatorname{sen} 1'' + \frac{1}{6} m^3 \operatorname{sen}^2 1'' (1 + 3\cot^2 z) \ldots\ldots (5).$$

237. Se a quantidade m é muito pequena, podemos limitar-nos ao primeiro termo d'esta serie. Para o Sol póde ser necessario aproveitar os dois primeiros termos; e para a Lua os tres.

Na passagem superior a correcção δ é subtractiva de z'; e é $z = \pm(D-\Delta)$, segundo passa o astro ao norte ou ao sul do zenith. Na passagem inferior o segundo termo de (5) muda de signal; a correcção é additiva; e $z = D + \Delta$: como se vê mudando Δ em $360° - \Delta$; ou achando a correcção das distancias ao nadir pela mudança de z em $180° - z$.

238. A taboa do factor $\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P'}{\operatorname{sen} 1''}$, que transcrevemos da Astronomia de Biot, serve para todas as latitudes. Mas a de $\frac{\operatorname{sen} D \operatorname{sen}\Delta}{\operatorname{sen} z}$ é especial para cada colatitude D. Para a formar póde dar-se a este factor a fórma mais commoda

$$\frac{\operatorname{sen} D \operatorname{sen}\Delta}{\operatorname{sen}(\Delta \pm D)} = \frac{1}{\cot D \pm \cot\Delta}.$$

D'esta maneira se calculou para a latitude de Coimbra a taboa, que tambem ajunctamos, e cujo original achámos em um exemplar da Ephemeride para 1804. O seu argumento é a declinação do astro.

239. Se a distancia polar tambem varia, como acontece para o Sol: desprezando as variações da segunda ordem, acharemos immediatamente a parte da variação devida a $\delta\Delta$ differenciando a equação (1) relativamente a Δ e z', e fazendo $P'=0$; o que dá

$$\delta z = \frac{\operatorname{sen}(\Delta - D)}{\operatorname{sen} z} \cdot \delta\Delta = \pm \delta\Delta;$$

tendo logar o signal $\pm$, segundo está o astro ao sul ou ao norte do zenith. E na passagem inferior é $\delta z = \delta\Delta$.

A fórmula será pois

Nas passagens superiores:

$$z = z' - \left(m \mp \frac{m^2 \operatorname{sen} 1''}{2} \cot(\Delta - D) \pm \delta\Delta\right),$$

segundo está o astro ao sul ou ao norte do zenith.

E nas inferiores:

$$z = z' + \left(m + \frac{m^2 \operatorname{sen} 1''}{2} \cot(\Delta + D) - \delta\Delta\right);$$

sendo $\delta\Delta$ a distancia polar na epocha da observação, menos a distancia polar na epocha da passagem meridiana.

Para applicar esta fórmula a um número $2n$ de observações, sejam: R, R', os factores variaveis $\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P'}{\operatorname{sen} 1''}$, $\frac{2 \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2} P'}{\operatorname{sen} 1''}$; f o factor constante

$\frac{\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta}{\operatorname{sen} z}$; M a somma dos angulos horarios anteriores á passagem meridiana, contados em minuto de tempo; S a dos posteriores; e ϖ a variação da distancia polar em um minuto de tempo, contada em segundos de gráu, isto é, $\delta\Delta = P'\varpi$. A distancia zenithal meridiana será, nas passagens superiores,

$$z = \frac{\Sigma z'}{2n} - \frac{f}{2n}\left(\Sigma R - f \cot z\, \Sigma R'\right) \mp \frac{S-M}{2n}\varpi;$$

devendo usar-se do signal superior, ou do inferior, segundo estiver o astro ao sul ou ao norte do zenith. Na passagem inferior mudar-se-ha o signal de f, e usar-se-ha do signal superior do último termo.

A correcção $\frac{M-S}{2n}\varpi$ é importante nas observações do Sol proximas dos equinoccios, por ser então mais rapido o movimento do astro em declinação: mas quando este movimento é vagaroso, como acontece nas visinhanças dos solsticios, ou quando as observações são equidistantes da passagem meridiana, a correcção é pouco consideravel.

240. O, que fica dicto, suppõe o movimento do relogio regulado pelo do astro. Supponhamos porém que r é o retardamento do relogio em 24^h de tempo do astro.

Pondo $\frac{r}{86400-r} = r'$; chamando p' o angulo horario d'um astro ficticio, cujo movimento fosse conforme com o do relogio; e P' o angulo horario, que no mesmo tempo corresponde ao movimento do astro verdadeiro, teremos

$$\frac{P'}{15} = \frac{p'}{15} \cdot \frac{86400}{86400-r};$$

ou

$$\tfrac{1}{2}P' = (1+r')\,\tfrac{1}{2}p';$$

de sorte que deveremos multiplicar por $1+r'$ os argumentos com que procuramos os valores de R.

Mas, se desprezarmos r'^2 e $\operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} p'$, será

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} P' = (1+r') \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} p', \quad \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} P' = (1+2r') \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} p';$$

e teremos a fórmula ainda mais simples

$$z = \frac{\Sigma z'}{2n} - \frac{1+2r'}{2n} f\,(\Sigma R - (1+2r') f \cot z\, \Sigma R') \mp \frac{S-M}{2n}\, \varpi.$$

241. Se escrevessemos a primeira equação do n.º 236 debaixo da fórma

$$2 \operatorname{sen} z \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \delta \cos \tfrac{1}{2} \delta + 2 \cos z \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \delta = 2k,$$

ou

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \delta + (\cot z - \tfrac{1}{2} m \operatorname{sen} 1'') \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} \delta = \tfrac{1}{2} m \operatorname{sen} 1'';$$

desenvolvessemos em serie o valor de $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \delta$; e exprimissemos, como é sabido, $\frac{1}{2} \delta$ em $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \delta$; ou usassemos do theorema de Maclaurin; achariamos facilmente

$$\delta = \begin{cases} m - \tfrac{1}{2} m^2 \operatorname{sen} 1'' (\cot z - \tfrac{1}{2} m \operatorname{sen} 1'') \\[2ex] -\dfrac{1}{12} m^3 \operatorname{sen}^2 1'' \left(1 - 6 (\cot z - \tfrac{1}{2} m \operatorname{sen} 1'')^2\right). \end{cases}$$

242. A fim de tomar sensiveis em uma figura os effeitos das duas causas, que exigem a correcção das distancias zenithaes para as reduzir ao meridiano, seja s' (Fig. 63) o logar do astro; e $s'sSs''s'''$ o arco da esphera celeste, no qual se projecta o seu movimento.

Se o astro fosse uma estrella, descreveria no movimento diurno o parallelo $s'\,s'_{,}$; e por isso a distancia zenithal Zs' careceria de se lhe tirar a correcção $Zs'-Zs'_{,}$ para a tornar meridiana: mas como o astro, em quanto descreveu o angulo horario ZPs', teve o movimento em distancia polar $s'_{,}S$, a distancia meridiana $ZS=z$ é

$$z=Zs'-(Zs'-Zs'_{,})-s'_{,}S,$$

$$z=Zs-(Zs-Zs_{,})-s_{,}S,$$

expressões que dão

$$z=\frac{\Sigma Zs'}{2n}-\frac{\Sigma(Zs'-Zs'_{,})}{2n}-\frac{\Sigma s'_{,}S}{2n}.$$

E com effeito é

$$z'=f(\mathrm{P},\Delta),\ z=f(o,\Delta-\delta\Delta);$$

$$z=z'-[f(\mathrm{P},\Delta)-f(o,\Delta)]-[f(o,\Delta)-f(o,\Delta-\delta\Delta)].$$

243. Apezar da grande vantagem dos circulares repetidores, que dão as distancias zenithaes por leituras de arcos multiplos d'ellas, sujeitas sómente aos erros dos pontos extremos, ha 'nestes instrumentos as mais das vezes um erro, que affecta constantemente as mesmas distancias, e que procede talvez do jogo do oculo sobre o seu eixo, ou da falta de equilibrio entre as suas partes objectiva e ocular, ou de ambas estas causas.

Supponhamos que duas series de observações feitas para determinar a hora (n.º 233) são uma anterior e outra posterior á passagem pelo meridiano, e, quanto é possivel, equidistantes d'esta passagem. 'Neste caso o effeito do erro da distancia zenithal sôbre o angulo horario póde considerar-se como egual em ambas as series; e por isso chamando P, P', os angulos horarios oriental e occidental, calculados por ellas, e $\delta P = \delta P'$ os seus erros, tudo convertido em tempo; t, t', a epocha media de cada uma das series, reduzida a tempo sideral; θ, θ' as mesmas epochas em tempo do relogio; e r o retardamento diurno d'este; teremos:

na serie anterior á passagem meridiana $\quad t = \frac{AR*}{15} - (P + \delta P),$

na serie posterior á passagem meridiana $\quad t' = \frac{AR^*}{15} + (P' + \delta P):$

logo

$$\delta P = \left(\frac{\theta' - \theta}{2}\right)\left(1 + \frac{r}{86400 - r}\right) - \frac{P' + P}{2},\ t = t_{,} - \delta P,\ t' = t_{,}' + \delta P;$$

sendo $t_{,}$ e $t'_{,}$ os tempos taes quaes se deduzem das series sem a correcção de que tractamos.

Teremos assim os tempos correctos do effeito do erro da distancia zenithal; e este erro (n.° 234) será

$$\delta z = \frac{\text{sen}\, P\ \text{sen}\, \Delta\ \text{sen}\, D\, \delta P}{\text{sen}\, z}.$$

Mas póde achar-se z directamente pela observação das distancias zenithaes meridianas de estrellas bem conhecidas, uma das quaes fique ao sul, e outra ao norte do zenith, e ambas a distancias d'elle pouco differentes. Teremos então:

Para a estrella ao norte $\quad D = \Delta + (z + \delta z),$

Para a estrella ao sul $D = \Delta' - (z' + \delta z)$,

que dão a colatitude, e o erro de z, pelas formulas

$$D = \frac{\Delta + \Delta'}{2} - \frac{z' - z}{2},\ \delta z = \frac{\Delta' - \Delta}{2} - \frac{z' + z}{2}.$$

244. No circular repetidor, tal como o havemos descripto, ha ainda os inconvenientes: de ser a columna sujeita a abalar-se pelos movimentos violentos da atmosphera; de se inflectir, e dilatar desegualmente o tubo do oculo; e de ser o nivel fixo ligado sómente á columna, não accusando assim os desarranjos do circulo provenientes do eixo de rotação.

Para diminuir o primeiro inconveniente rodea-se a columna de arcos fortes, que partindo dos pés vão formar na parte superior uma especie de annel por onde ella passa. Para diminuir o segundo, liga-se o oculo a um circulo massiço que gyra por dentro do limbo, substituindo o seu movimento o da alidade dos antigos circulos. E finalmente para diminuir o terceiro usa-se, em logar do parafuso tangencial do tambor, de uma pinça que prende fortemente o limbo á columna na passagem das observações impares para as pares; e nas observações impares dão-se os pequenos movimentos ao limbo por um parafuso convenientemente collocado.

O último inconveniente não existe nos circulares de nivel movel com o circulo; mas o nivel é então de uso incommodo, por ser necessario movel-o no principio de cada par de observações, e torna estas mais morosas.

NOTA 1.ª

Sôbre a fórmula da refracção.

245. *A trajectoria descripta pelos raios luminosos na passagem pela atmosphera é tão pouco curva, que as rectas tiradas dos seus diversos pontos para o mesmo astro se podem suppor parallelas, pelo menos nos casos ordinarios de refracção.*

Para demonstrar esta proposição, avaliaremos a amplitude total da curva descripta pelo raio luminoso, no caso da refracção horizontal em que ella é maxima; e mostraremos depois que esta amplitude, vista do centro d'um astro, subtenderia um angulo extremamente pequeno, e como insensivel, ainda quando o astro fôsse a Lua, que é o mais proximo de nós.

Seja SL (Fig. 64) a distancia rectilinea primitiva do raio luminoso, que, entrando na atmosphera pela direcção SLA, começa a curvar-se em L, onde a densidade do ar é nulla ou insensivel. Designemos por M o ponto mais baixo da trajectoria, onde é ella horizontal; e supponhamos que a densidade do ar seja 'neste ponto a que convém á temperatura do gêlo fundente e á pressão $0^m,76$. Finalmente supponhamos que, chamando C o centro da terra e $CM=a$ o seu raio, é $CL=r=a+\frac{1}{100}a$; isto é, que a altura de L acima da superficie terestre é $\frac{1}{100}$ do raio da terra, número provavelmente muito superior á altura real da atmosphera (n.º 27).

Com estes dados a theoria das refracções faz conhecer o angulo $HLA=I$ que a direcção primitiva do raio luminoso faz com a horizontal LH, perpendicular ao raio CL, isto é, a depressão apparente do horizonte M para um observador collocado em L.

Tiremos por M a horizontal MH′, perpendicular a CM, e MS′ parallela á direcção primitiva do raio luminoso; o angulo H′MS′ será a refracção horizontal em M, que chamaremos R. Como a trajectoria é symmetrica em torno de M, se L″ é o ponto da sahida, correspondente ao da entrada L, os arcos LM, ML″ serão eguaes; e a corda LL″ será perpendicular a CM, ou parallela a MH′; por conseguinte os angulos H′MS′, ALQ, oppostos no parallelogrammo LM, serão eguaes; ou $ALQ = R$, e $HLQ = I + R = LCM$.

Posto isto, abaixando L″P perpendicular a LP, temos

$$LL'' = 2LQ = 2r \operatorname{sen}(I + R),\quad PL'' = 2r \operatorname{sen}(I + R) \operatorname{sen} R.$$

Como o astro S está na direcção do raio luminoso LS, toda a trajectoria LMM′, vista do centro de S, se projectará sôbre a linha PL″. Chamando pois D a distancia SP, a tangente trigonometrica do angulo visual subtendido pela mesma trajectoria é

$$\frac{PL''}{D} = \frac{2r \operatorname{sen}(I + R) \operatorname{sen} R}{D};$$

fórmula na qual se póde empregar por D, sem erro sensivel, a distancia do astro ao centro da terra, por ser muito pequeno o numerador e differir pouco esta distancia de D.

246. Resta avaliar numericamente as diversas partes d'esta expressão, para ver se a quantidade, que ella representa, se póde tornar sensivel.

Fazendo $z' = 90°$, e $z^{(i)} = 90° + I$ na equação (n.° 182)

$$\operatorname{sen} z^{(i)} = \operatorname{sen} z' \cdot \frac{a\sqrt{1 + P(\rho)}}{r\sqrt{1 + P\rho}},$$

ou

$$\cot^2 z^{(i)} = \cot^2 z' + (1 + \cot^2 z')\left[\frac{r^2 - a^2}{a^2} - \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{P[(\rho) - \rho]}{1 + P(\rho)}\right].$$

resulta

$$\operatorname{tang}^2 I = \frac{(r+a)(r-a)}{a^2} - \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{P[(\rho)-\rho]}{1+P(\rho)}.$$

Na parte da atmosphera, onde começa a ser sensivel a densidade, póde suppor-se $P\rho = o$; e ao nivel do mar, nas circumstancias meteorologicas que admittimos, o valor de α tirado das experiencias de Biot e Arago (pag. 188) dá $P(\rho) = 0{,}000588768$. Com estes valores, e com $\frac{r}{a} = 1{,}01$, a expressão de tang I dá $I = 7^\circ.57'$. Tal seria a depressão apparente HLA do horizonte M para um observador que estivesse em L, na altura $\frac{1}{100}$ do raio terrestre acima da superficie da terra.

Prescindindo de circumstancias extraordinarias e passageiras, e attendendo só ao estado ordinario da atmosphera, em equilibrio estavel, é $35'$ um dos maiores valores que póde ter a refracção horizontal. Suppondo pois $R = 35'$, será $R + I = 8^\circ.32'$.

Com estes dados teremos para a Lua, isto é, para $D = 60\,a$,

$$\frac{PL''}{D} = 2{,}02 \cdot \frac{\operatorname{sen} 8^\circ.32' \operatorname{sen} 35'}{60},$$

tangente, á qual corresponde o angulo $10'',5$.

Vê-se assim que, 'nestas supposições exageradas, dois raios visuaes tirados do centro da Lua para as duas extremidades L, L'', da trajectoria fariam entre si o angulo $10'',5$; por conseguinte, todas as rectas tiradas dos outros pontos da trajectoria para a Lua fariam entre si angulos ainda menores. Por exemplo, relativamente ao ponto Q, o angulo subtendido seria apenas $5''$; e seria ainda menor para o observador, que está em M e não em Q. Finalmente estes pequenos erros, já pouco sensiveis na refracção horizontal, que está sujeita a muitas outras causas de incerteza, tornar-se-íam inapreciaveis a menores distancias da Lua ao zenith, e mais ainda a respeito dos outros astros, que todos distam muito mais de nós.

Portanto podemos, sem receio de erro sensivel, desprezar absolutamente os angulos que os diversos raios visuaes fazem entre si no centro do astro, e suppol-os parallelos; e isto ainda com mais razão, por termos escolhido de proposito para o calculo precedente todas as circumstancias que contribuiam para augmentar aquelle angulo. (*Extr. da Astron. de Biot*).

247. Para examinar os limites de aproximação da fórmula de refracção (6) do n.º 86, teremos (n.º 184) de integrar o termo

$$-\frac{3}{2}\alpha \tan^5 z' . \frac{s^2 d\rho}{(\rho)};$$

o que exige a determinação da lei do decrescimento da densidade das camadas atmosphericas, ou ao menos dos limites que a comprehendem.

A densidade das camadas atmosphericas decresce á medida que ellas são mais elevadas; mas como a temperatura tambem diminue, o decrescimento das densidades é menos rapido, do que seria se a temperatura não variasse. D'onde resulta que a verdadeira lei da densidade está comprehendida entre a d'uma densidade constante, e a correspondente a uma temperatura constante.

Na hypothese d'uma temperatura constante tem logar a lei de Mariote, $\frac{p}{(p)}=\frac{\rho}{(\rho)}$; e eliminando ρ entre ella e a equação do equilibrio (n.º 186), resulta

$$\frac{dp}{p}=-\frac{(g)(\rho)ads}{(p)}=-\frac{ads}{l},\ p=Ce^{-\frac{as}{l}}.$$

Este integral, tomado desde $p=(p)$, ou $s=o$, dá

$$\frac{p}{(p)}=e^{-\frac{as}{l}},\ \text{ou}\ \rho=(\rho)e^{-\frac{as}{l}}.$$

Por onde se vê que 'nesta hypothese o crescimento das alturas em progressão arithmetica corresponde ao decrescimento das densidades em progressão geometrica.

248. O integral $\int s^2 d\rho = s^2\rho - 2\int \rho s ds$,

tomado entre os limites $s=o$ e $\rho=o$, reduz-se ao segundo termo tomado entre os mesmos limites: e $\int \rho s ds$ é proporcional á somma dos elementos $a\rho ds$ multiplicados pelas respectivas distancias as á camada cuja densidade é (ρ). Mas esta somma é maior na hypothese d'uma temperatura constante, do que na lei da natureza em que a temperatura decresce; porque aquella hypothese, dando menor densidade ás camadas, assigna á atmosphera uma altura maior que a verdadeira: logo, se calcularmos o integral na mesma hypothese, resultará um limite de erro ainda maior que o proveniente da verdadeira lei.

Para effectuar este calculo temos, integrando por partes, e attendendo á expressão de ρ do número precedente,

$$\int \frac{s^2 d\rho}{(\rho)} = \frac{s^2\rho}{(\rho)} + \frac{2l^2}{a} e^{-\frac{as}{l}} + \frac{2l^3}{a^2} e^{-\frac{as}{l}} + C,$$

$$= \frac{s^2\rho}{(\rho)} + \frac{2ls}{a}\frac{\rho}{(\rho)} + 2\frac{l^2}{a^2}\frac{\rho}{(\rho)} + C,$$

que, entre os limites $\rho=(\rho)$ ou $s=o$, e $\rho=o$, se reduz a $-2\frac{l^2}{a^2}$. Portanto o termo, de que se tracta, é

$$-\frac{3}{2}\frac{\alpha}{\text{sen } 1''}\text{tang}^5 z' \int \frac{s^2 d\rho}{(\rho)} = \frac{3\alpha}{\text{sen } 1''} \cdot \frac{l^2}{a^2}\text{tang}^5 z'.$$

Substituindo 'nesta expressão os valores de α e l (n.° 187), acha-se $0'',15$ para $z'=74°$, e $0'',004$ para $z'=60°$. Por onde se vê que até estes limites a fórmula de refracção (6) dá sufficiente approximação, quando se quer só exactidão até segundos, ou até centesimas de segundo.

NOTA 2.ª

Equação das alturas correspondentes

249. Seja ZPA o triangulo comprehendido entre o zenith, o polo, e a projecção do astro na esphera celeste. Temos

$$\cos P = \frac{\cos z - \cos \Delta \cos D}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D} \ldots\ldots (1).$$

Se o astro tem movimento proprio em declinação, ou se a refracção varia no intervallo das duas observações correspondentes, o angulo horario tambem variará. Mas como no intervallo das observações são pequenas as variações $\delta\Delta$ e δz, podemos achar a relação entre ellas e δP pela differenciação de (1), desprezando assim as quantidades de segunda ordem relativamente ás mesmas variações.

Differenciando pois a equação (1), e attendendo á mesma equação, que dá $\cos \Delta \cos z - \cos D = -\operatorname{sen}^2 \Delta \cos D + \operatorname{sen} \Delta \cos \Delta \cos P \operatorname{sen} D$, ou mudando A em P, z em Δ, e reciprocamente, nas equações da nota da pagina 46, teremos a *equação das alturas correspondentes*

$$\delta P = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} P \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} D} \cdot \delta z + \left[\frac{1}{\operatorname{tang} P \operatorname{tang} \Delta} - \frac{1}{\operatorname{sen} P \operatorname{tang} D}\right] \cdot \delta\Delta \ldots (2);$$

ou $$\operatorname{sen} S = \frac{\operatorname{sen} P \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} z},\ \delta P = \frac{\delta z}{\operatorname{sen} S \operatorname{sen} \Delta} - \frac{\cot S\, \delta\Delta}{\operatorname{sen} \Delta}.$$

250. 'Nesta equação entra a incognita P no segundo membro; mas como, chamando τ, em tempo do relogio, a epocha da observação anterior á passagem meridiana, e τ' a posterior, o intervallo $\frac{\tau'-\tau}{2}$ reduzido a arco differe do verdadeiro valor de P apenas uma quantidade da ordem de δP, vê-se que da sua substituição em logar de P no segundo membro só podem resultar erros da ordem d'aquelles que se desprezam.

251. Cumpre advertir que o desprezo das quantidades de segunda ordem relativamente a δP, δz, $\delta \Delta$, na equação (2) suppõem que não avultam muito os coefficientes d'estas variações, e que ellas são muito pequenas. Á primeira condição satisfaz-se não observando muito perto do meridiano, nem estrellas muito proximas do polo; e á segunda satisfaz-se tanto melhor quanto mais longe se observa do horizonte, e em tempo mais sereno, e quanto menor é o movimento do astro em declinação (*a*).

(*a*) Na equação das alturas correspondentes o effeito mais sensivel é ordinariamente o que resulta da mudança de declinação; e por isso attendamos ao termo $\frac{1}{2}\frac{d^2P}{d\Delta^2}$, isto é, tomemos

$$\delta P = \frac{dP}{dz}\delta z + \frac{dP}{d\Delta}\delta\Delta + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{d\Delta^2}\delta\Delta^2.$$

A differenciação dá

$$\frac{dP}{d\Delta} = \cot P \cot\Delta - \operatorname{cosec} P \cot D,$$

$$\frac{d^2P}{d\Delta^2} = -\cot P \operatorname{cosec}^2\Delta - \frac{dP}{d\Delta}(\cot\Delta \operatorname{cosec}^2 P - \cot D \cot P \operatorname{cosec} P)$$

$$= -\cot P \operatorname{cosec}^2\Delta - \frac{dP}{d\Delta}\cot\Delta - \left(\frac{dP}{d\Delta}\right)^2 \cot P.$$

Seja ϖ a variação de Δ em um minuto de tempo; e supponhamos que Δ varia uniformemente durante algumas horas, ou que é $\delta\Delta = \frac{P}{15}\varpi$. será

$$\frac{dP}{d\Delta}\delta\Delta = \left(\frac{P\cot\Delta}{15\operatorname{tang} P} - \frac{P\cot D}{15\operatorname{sen} P}\right)\cdot\varpi = \frac{c}{15}\cdot\varpi;$$

A primeira parte da equação é nulla quando as indicações meteorologicas do estado da atmosphera são as mesmas nos instantes da observação das alturas correspondentes. A segunda parte é nulla para o sol nos solsticios; e tambem desapparece quando é

$$\cos P = \frac{\operatorname{tang} \Delta}{\operatorname{tang} D}.$$

Mas para que esta segunda condição possa verificar-se é necessario que seja $\operatorname{tang} \Delta < \operatorname{tang} D$, o que relativamente ao sol não póde acontecer fóra dos tropicos.

252. Achado δP, e reduzido a tempo do relogio t: se chamarmos M a epocha da passagem meridiana em tempo do relogio, e θ, θ', os angulos horarios P, P', reduzidos á mesma especie de tempo, serão

$$M = \tau + \theta,\ M = \tau' - \theta' = \tau' - \theta - t;$$

logo $$M = \frac{\tau + \tau'}{2} - \frac{t}{2} \dots\dots (3).$$

253. Para o calculo do valor approximado de P, que se deve sub-

$$\frac{1}{2}\frac{d^2P}{d\Delta^2}\delta\Delta^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\varpi}{15}\right)^2\left[\frac{P^2 \operatorname{cosec}^2\Delta}{\operatorname{tang} P} + cP\cot\Delta + \frac{c^2}{\operatorname{tang} P}\right]\operatorname{sen} 1''.$$

onde se suppoem P expresso em minutos, e ϖ em segundos.

No caso de P extremamente pequeno, estas expressões reduzem-se a

$$\frac{dP}{d\Delta}\delta\Delta = \frac{\cot\Delta - \cot D}{15 \operatorname{sen} 1'}\cdot\varpi,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2P}{d\Delta^2}\delta\Delta^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\varpi}{15}\right)^2\left[\frac{P \operatorname{cosec}^2\Delta}{\operatorname{sen} 1'} + cP\cot\Delta + \frac{c^2}{P \operatorname{sen} 1'}\right]\operatorname{sen} 1''.$$

Assim a pequenez de P, ainda que não fosse practicamente limitada, não faria por isso muito grande o termo $\frac{dP}{d\Delta}$; como já notára o sr. D. Francisco Marquez. Mas poderia fazer attendivel o termo $\frac{1}{2}\frac{d^2P}{d\Delta^2}\delta\Delta^2$.

stituir no segundo membro da fórmula (2), é necessario converter o tempo $\frac{\tau'-\tau}{2}$ do relogio em tempo do astro, e multiplicar este por 15; e para o calculo de t, que entra na fórmula (3), é necessario inversamente dividir δP por 15, e depois converter o tempo $\frac{\delta P}{15}$ do astro em tempo do relogio. Façamos estas conversões.

Sejam: a_{ς}^{π} o adiantamento diurno do relogio, em tempo d'elle, sobre o tempo sideral, ou seja $R+a_{\varsigma}^{\pi}$ o tempo do relogio correspondente á revolução sideral R; a_{μ}^{ς} o adiantamento em um dia medio do tempo sideral sôbre o medio, ou $R+a_{\mu}^{\varsigma}$ o tempo sideral corresponde á revolução do sol medio R; e a_{α}^{μ} o adiantamento em um dia verdadeiro do tempo medio sôbre o solar apparente, ou $R+a_{\alpha}^{\mu}$ o tempo medio correspondente á revolução R do sol verdadeiro. Chamando em geral $^{m}F_{n}$ o factor de conversão do tempo da especie m no da especie n, ou o factor pelo qual se deve multiplicar o primeiro para o transformar no segundo, teremos:

$$R=\left(R+a_{\varsigma}^{\pi}\right).{}^{\pi}F_{\varsigma},\ R=\left(R+a_{\mu}^{\varsigma}\right).{}^{\varsigma}F_{\mu},\ R=\left(R+a_{\alpha}^{\mu}\right).{}^{\mu}F_{\alpha}.$$

E no caso de se conhecer directamente o adiantamento em um dia medio do relogio sôbre o tempo medio, teremos do mesmo modo

$$R=\left(R+a_{\mu}^{\pi}\right).{}^{\pi}F_{\mu}.$$

Sendo pois P, S, M, A, um intervallo de tempo expresso respectivamente em unidades de tempo do relogio, de tempo sideral, de tempo medio, e de tempo solar apparente, teremos:

$$\left\{\begin{array}{l} S = P.\,{}^{\pi}F_{\varsigma},\ \text{e}\ {}^{\pi}F_{\varsigma} = \dfrac{R}{R + a^{\pi}_{\varsigma}}; \\[2ex] M = S.\,{}^{\varsigma}F_{\mu},\ \text{e}\ {}^{\varsigma}F_{\mu} = \dfrac{R}{R + a^{\varsigma}_{\mu}}; \\[2ex] A = M.\,{}^{\mu}F_{\alpha},\ \text{e}\ {}^{\mu}F_{\alpha} = \dfrac{R}{R + a^{\mu}_{\alpha}}; \\[2ex] M = P.\,{}^{\pi}F_{\mu},\ \text{e}\ {}^{\pi}F_{\mu} = \dfrac{R}{R + a^{\pi}_{\mu}}. \end{array}\right.$$

254. Posto isto: 1.° seja conhecido o andamento do relogio relativamente ao tempo sideral.

Se o astro observado for uma estrella, exprimiremos S em P pela primeira equação; e teremos o tempo P do relogio em tempo S do astro, ou inversamente.

Se o astro observado for o sol, exprimiremos primeiramente S em P pela primeira equação, depois M em S pela segunda, e finalmente A em M pela terceira; o que dará

$$A = P.\,{}^{\pi}F_{\varsigma}.\,{}^{\varsigma}F_{\mu}.\,{}^{\mu}F_{\alpha};$$

e por esta converteremos o tempo P do relogio em tempo A do astro, ou inversamente.

2.° Seja conhecido o andamento do relogio relativamente ao tempo medio.

Se o astro observado for uma estrella, exprimiremos M em P pela quarta equação, e depois S em M pela segunda, o que dará

$$S = P.\frac{{}^{\pi}F_{\mu}}{{}^{\varsigma}F_{\mu}},$$

por meio da qual se converte o tempo P do relogio em tempo sideral S, ou inversamente.

Se o astro observado for o sol, exprimiremos M em P pela quarta equação, e depois A em M pela terceira, o que dará

$$A = P.{}^{\pi}F_{\mu}.{}^{\mu}F_{\alpha},$$

por meio da qual se converte o tempo do relogio em tempo do astro, ou inversamente.

Teremos assim, desprezando os quadrados e productos de

$$a^{\pi}_{\varsigma},\ a^{\varsigma}_{\mu},\ a^{\mu}_{\alpha},\ a^{\pi}_{\mu}:$$

Quando se observa uma estrella:

$$S = P\left(1 - \frac{a^{\pi}_{\varsigma}}{R}\right), \text{ ou } S = P.\left(1 + \frac{a^{\varsigma}_{\mu} - a^{\pi}_{\mu}}{R}\right).$$

Quando se observa o sol:

$$A = P\left(1 - \frac{a^{\pi}_{\varsigma} + a^{\varsigma}_{\mu} + a^{\mu}_{\alpha}}{R}\right), \text{ ou } A = P.\left(1 - \frac{a^{\pi}_{\mu} + a^{\mu}_{\alpha}}{R}\right).$$

255. *Adiantamentos.* 1.° O adiantamento a^{π}_{ς} do tempo do relogio sôbre o sideral em um dia sideral conhece-se pela observação das passagens meridianas consecutivas d'uma estrella.

2.° O adiantamento a^{ς}_{μ} do tempo sideral sôbre o medio em um dia medio conhece-se do seguinte modo:

Seja T o anno tropico, T = 365,242264 dias medios. Este tempo equival a T + 1 = 366,242264, dias sideraes, determinados pelas passagens meridianas do ponto ♈.

Chamando 1^{μ} o dia medio e 1^{ς} o dia sideral, temos

$$T.1^{\mu} = (T+1).1^{\varsigma},$$

que dá

$$1^{\varsigma} = 1^{\mu} - \frac{1^{\mu}}{T+1},\ 1^{\mu} = 1^{\varsigma} + \frac{1^{\varsigma}}{T},$$

isto é,

$$86400^{s\varsigma} = 86400^{s\mu} - \frac{86400^{s\mu}}{366,242264},$$

$$86400^{s\mu} = 86400^{s\varsigma} + \frac{86400^{s\varsigma}}{365,242264};$$

portanto são:

$$a^{\varsigma}_{\mu} = \frac{86400^{s\varsigma}}{365,242264} = 236^{s\varsigma},5553,$$

$$a^{\mu}_{\varsigma} = -\frac{86400^{s\pi}}{366,242264} = -235^{s\pi},9094:$$

a primeira das quaes dá o *adiantamento*, em um dia medio, do tempo sideral sôbre o medio expresso em segundos sideraes; e a segunda dá o *retardamento*, em um dia sideral, do tempo medio sôbre o sideral expresso em segundos medios.

3.° Para achar o adiantamento $\overset{\mu}{\underset{\alpha}{a}}$ do tempo medio sôbre o solar em um dia verdadeiro, se chamarmos θ e θ' os tempos medios de duas passagens consecutivas do sol verdadeiro pelo meridiano, contados desde o primeiro meio dia medio, e E, E', as equações do tempo que lhes correspondem, teremos:

$$\theta = 0^{hm} - E,\ \theta' = 24^{hm} - E',\ \theta' - \theta = 24^{hm} + E - E';$$

e como o intervallo $\theta' - \theta$ das duas passagens equivale a 24^{hv}, será

$$24^{hv} = 24^{hm} + E - E',$$

ou
$$86400^{s\,verd.} = 86400^{s\,med.} + E - E'.$$

Portanto

$$\overset{\mu}{\underset{\alpha}{a}} = E - E'.$$

4.° Finalmente, se $R + \overset{\pi}{\underset{\alpha}{a}}$ for, em tempo do relogio, o intervallo de duas passagens meridianas consecutivas do sol, equivalente ao mesmo intervallo em tempo medio $R + E - E'$, será 'nelle $\overset{\pi}{a}_{\alpha} + E' - E$ o adiantamento do relogio sôbre o tempo medio. Por conseguinte o adiantamento $^{\pi}a_{\mu}$ do tempo do relogio sôbre o medio, em um dia medio, será (*a*)

$$^{\pi}a_{\mu} = \left(^{\pi}a_{\alpha} + E' - E\right) \cdot \frac{R}{R+E-E'},$$

ou proximamente $$^{\pi}a_{\mu} = {}^{\pi}a_{\alpha} + E' - E.$$

(*a*) Tambem se póde achar esta fórmula do modo seguinte. Sejam θ, θ', os tempos do relogio das passagens meridianas consecutivas do sol verdadeiro; E, E', as equações do tempo correspondentes; e E_p, E_p', estas equações convertidas em tempo do relogio. Os tempos do relogio em que teriam logar as passagens meridianas do sol medio, são $\theta + E_p$, $\theta' + E_p'$; por conseguinte é

$$^{\pi}a_{\mu} = {}^{\pi}a_{\alpha} + E_p' - E_p.$$

E porque é $$E_p' - E_p = (E' - E) \cdot \frac{R + {}^{\pi}a_{\mu}}{R},$$

a eliminação de $E_p' - E_p$ conduz á mesma equação

$$^{\pi}a_{\mu} = \frac{R\left(^{\pi}a_{\alpha} + E' - E\right)}{R + E - E'}.$$

TABOA

DOS VALORES DE $\dfrac{2\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}p'}{\mathrm{sen}\,1''}$, EM SEGUNDOS.

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

SEG.	0^m	1^m	2	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m
0	0,0	2,0	7,8	17,7	31,4	49,1	70,7	96,2
1	0,0	2,0	8,0	17,9	31,7	49,4	71,1	96,9
2	0,0	2,1	8,1	18,1	31,9	49,7	71,5	97,1
3	0,0	2,2	8,2	18,3	32,2	50,1	71,9	97,6
4	0,0	2,2	8,4	18,5	32,5	50,4	72,3	98,1
5	0,0	2,3	8,5	18,7	32,7	50,7	72,7	98,5
6	0,0	2,4	8,7	18,9	33,0	51,1	73,1	99,0
7	0,0	2,4	8,8	19,1	33,3	51,4	73,5	99,4
8	0,0	2,5	8,9	19,3	33,5	51,7	73,9	99,9
9	0,0	2,6	9,1	19,5	33,8	52,1	74,3	100,4
10	0,1	2,7	9,2	19,7	34,1	52,4	74,7	100,8
11	0,1	2,7	9,4	19,9	34,4	52,7	75,1	101,3
12	0,1	2,8	9,5	20,1	34,6	53,1	75,5	101,8
13	0,1	2,9	9,6	20,3	34,9	53,4	75,9	102,3
14	0,1	3,0	9,8	20,5	35,2	53,8	76,3	102,7
15	0,1	3,1	9,9	20,7	35,5	54,1	76,7	103,2
16	0,1	3,1	10,1	20,9	35,7	54,5	77,1	103,7
17	0,2	3,2	10,2	21,2	36,0	54,8	77,5	104,2
18	0,2	3,3	10,4	21,4	36,3	55,1	77,9	104,6
19	0,2	3,4	10,5	21,6	36,6	55,5	78,3	105,1
20	0,2	3,5	10,7	21,8	36,9	55,8	78,8	105,6
21	0,3	3,6	10,8	22,0	37,2	56,2	79,2	106,1
22	0,3	3,7	11,0	22,3	37,4	56,5	79,6	106,6
23	0,3	3,8	11,1	22,5	37,7	56,9	80,0	107,0
24	0,3	3,8	11,3	22,7	38,0	57,3	80,4	107,5
25	0,3	3,9	11,5	22,9	38,3	57,6	80,8	108,0
26	0,4	4,0	11,6	23,1	38,6	58,0	81,3	108,5
27	0,4	4,1	11,8	23,4	38,9	58,3	81,7	109,0
28	0,4	4,2	11,9	23,6	39,2	58,7	82,1	109,5
29	0,5	4,3	12,1	23,8	39,5	59,0	82,5	110,0
30	0,5	4,4	12,3	24,0	39,8	59,4	83,0	110,4

ARGUMENTO : *Angulo horario em tempo*

Seg.	0^m	1^m	2^m	3^m	4^m	5^m	6^m	7^m
30	0,5	4,4	12,3	24,0	39,8	59,4	83,0	110,4
31	0,5	4,5	12,4	24,3	40,1	59,8	83,4	110,9
32	0,6	4,6	12,6	24,5	40,3	60,1	83,8	111,4
33	0,6	4,7	12,8	24,7	40,6	60,5	84,2	111,9
34	0,6	4,8	12,9	25,0	40,9	60,8	84,7	112,4
35	0,7	4,9	13,1	25,2	41,2	61,2	85,1	112,9
36	0,7	5,0	13,3	25,4	41,5	61,6	85,5	113,4
37	0,7	5,1	13,4	25,7	41,8	61,9	86,0	113,9
38	0,8	5,2	13,6	25,9	42,1	62,3	86,4	114,4
39	0,8	5,3	13,8	26,2	42,5	62,7	86,8	114,9
40	0,9	5,4	14,0	26,4	42,8	63,0	87,3	115,4
41	0,9	5,6	14,1	26,6	43,1	63,4	87,7	115,9
42	1,0	5,7	14,3	26,9	43,4	63,8	88,1	116,4
43	1,0	5,8	14,5	27,1	43,7	64,2	88,6	116,9
44	1,1	5,9	14,7	27,4	44,0	64,5	89,0	117,4
45	1,1	6,0	14,8	27,6	44,3	64,9	89,5	117,9
46	1,2	6,1	15,0	27,9	44,6	65,3	89,9	118,4
47	1,2	6,2	15,2	28,1	44,9	65,7	90,3	118,9
48	1,3	6,4	15,4	28,3	45,2	66,0	90,8	119,5
49	1,3	6,5	15,6	28,6	45,5	66,4	91,2	120,0
50	1,4	6,6	15,8	28,8	45,9	66,8	91,7	120,5
51	1,4	6,7	15,9	29,1	46,2	67,2	92,1	121,0
52	1,5	6,8	16,1	29,4	46,5	67,6	92,6	121,5
53	1,5	7,0	16,3	29,6	46,8	68,0	93,0	122,0
54	1,6	7,1	16,5	29,9	47,1	68,3	93,5	122,5
55	1,6	7,2	16,7	30,1	47,5	68,7	93,9	123,1
56	1,7	7,3	16,9	30,4	47,8	69,1	94,4	123,6
57	1,8	7,5	17,1	30,6	48,1	69,5	94,8	124,1
58	1,8	7,6	17,3	30,9	48,4	69,9	95,3	124,6
59	1,9	7,7	17,5	31,1	48,8	70,3	95,7	125,1
60	2,0	7,8	17,7	31,4	49,1	70,7	96,2	125,7

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

Seg.	8^m	9^m	10^m	11^m	12^m	13^m	14^m	15^m
0	125,7	159,0	196,3	237,5	282,7	331,8	384,7	441,6
1	126,2	159,6	197,0	238,3	283,5	332,6	385,6	442,6
2	126,7	160,2	197,6	239,0	284,2	333,4	386,5	443,6
3	127,2	160,8	198,3	239,7	285,0	334,3	387,5	444,6
4	127,8	161,4	198,9	240,4	285,8	335,2	388,4	445,6
5	128,3	162,0	199,6	241,2	286,6	336,0	389,3	446,5
6	128,8	162,6	200,3	241,9	287,4	336,9	390,2	447,5
7	129,4	163,2	200,9	242,6	288,2	337,7	391,1	448,5
8	129,9	163,8	201,6	243,3	289,0	338,6	392,1	449,5
9	130,4	164,4	202,2	244,1	289,8	339,4	393,0	450,5
10	131,0	165,0	202,9	244,8	290,6	340,3	393,9	451,5
11	131,5	165,6	203,6	245,5	291,4	341,2	394,8	452,5
12	132,0	166,2	204,2	246,2	292,2	342,0	395,8	453,5
13	132,6	166,8	204,9	247,0	293,0	342,9	396,7	454,5
14	133,1	167,4	205,6	247,7	293,8	343,7	397,6	455,5
15	133,6	168,0	206,3	248,5	294,6	344,6	398,6	456,5
16	134,2	168,6	206,9	249,2	295,4	345,5	399,5	457,5
17	134,7	169,2	207,6	249,9	296,2	346,3	400,5	458,5
18	135,3	169,8	208,3	250,7	297,0	347,2	401,4	459,5
19	135,8	170,4	208,9	251,4	297,8	348,1	402,3	460,5
20	136,4	171,0	209,6	252,2	298,6	349,0	403,3	461,5
21	136,9	171,6	210,3	252,9	299,4	349,8	404,2	462,5
22	137,4	171,2	211,0	253,6	300,2	350,7	405,1	463,5
23	138,0	172,9	211,6	254,4	301,0	351,6	406,0	464,5
24	138,5	173,5	212,3	255,1	301,8	352,5	407,0	465,5
25	139,1	174,1	213,0	255,9	302,6	353,3	408,0	466,5
26	139,6	174,7	213,7	256,6	303,5	354,2	408,9	467,5
27	140,2	175,3	214,4	257,4	304,3	355,1	409,9	468,5
28	140,7	175,9	215,1	258,1	305,1	356,0	410,8	469,5
29	141,3	176,6	215,8	258,9	305,9	356,9	411,7	470,5
30	141,8	177,2	216,4	259,6	306,7	357,7	412,7	471,5

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

SEG.	8^m	9^m	10^m	11^m	12^m	13^m	14^m	15^m
30	141,8	177,2	216,4	259,6	306″7	357,7	412,7	471,5
31	142,4	177,8	217,1	260,4	307,5	358,6	413,7	472,6
32	143,0	178,4	217,8	261,1	308,4	359,5	414,6	473,6
33	143,5	179,0	218,5	261,9	309,2	360,3	415,6	474,6
34	144,1	179,7	219,2	262,6	310,0	361,2	416,5	475,6
35	144,6	180,3	219,9	263,4	310,8	362,1	417,5	476,6
36	145,2	180,9	220,6	264,1	311,6	363,0	418,4	477,6
37	145,8	181,6	221,3	264,9	312,5	363,9	419,4	478,7
38	146,3	182,2	222,0	265,7	313,3	364,8	420,3	479,7
39	146,9	182,8	222,7	266,4	314,2	365,7	421,3	480,7
40	147,5	183,4	223,4	267,2	315,0	366,6	422,2	481,7
41	148,0	184,1	224,1	267,9	315,8	367,5	423,2	482,8
42	148,6	184,7	224,8	268,7	316,6	368,4	424,2	483,8
43	149,2	185,4	225,5	269,5	317,4	369,3	425,1	484,8
44	149,7	186,0	226,2	270,2	318,3	370,2	426,1	485,8
45	150,3	186,6	226,9	271,0	319,1	371,1	427,0	486,9
46	150,9	187,3	227,6	271,8	319,9	372,0	428,0	487,9
47	151,5	187,9	228,3	272,6	320,8	372,9	429,0	488,9
48	152,0	188,5	229,0	273,3	321,6	373,8	430,0	490,0
49	152,6	189,2	229,7	274,1	322,4	374,7	430,9	491,0
50	153,2	189,8	230,4	274,9	323,3	375,6	431,9	492,0
51	153,8	190,5	231,1	275,6	324,1	376,5	432,8	493,1
52	154,4	191,1	231,8	276,4	325,0	377,4	433,8	494,1
53	154,9	191,8	232,5	277,2	325,8	378,3	434,8	495,2
54	155,5	192,4	233,3	278,0	326,7	379,2	435,7	496,2
55	156,1	193,1	234,0	278,8	327,5	380,2	436,7	497,2
56	156,7	193,7	234,7	279,5	328,4	381,1	437,7	498,2
57	157,3	194,4	235,4	280,3	329,2	382,0	438,7	499,2
58	157,8	195,1	236,1	281,1	330,0	382,9	439,6	500,3
59	158,4	195,7	236,8	281,9	330,9	383,8	440,6	501,4
60	159,0	196,3	237,5	282,7	331,8	384,7	441,6	502,5

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

Seg.	16^m	17^m	18^m	19^m	20^m	21^m	22^m	23^m	24^m	25^m
0	502,5	567,1	635,8	708,3	784,9	865,3	949,5	1037,8	1129,9	1225,9
1	503,5	568,2	636,9	709,5	786,2	866,6	951,0	1039,3	1131,4	1227,5
2	504,6	569,3	638,1	710,8	787,5	868,0	952,4	1040,8	1133,0	1229,2
3	505,6	570,4	639,3	712,1	788,8	869,4	953,8	1042,3	1134,6	1230,8
4	506,7	571,6	640,5	713,3	790,1	870,8	955,3	1043,8	1136,2	1232,5
5	507,7	572,7	641,7	714,6	791,4	872,1	956,7	1045,3	1137,7	1234,1
6	508,8	573,8	642,9	715,9	792,7	873,5	958,2	1046,8	1139,3	1235,7
7	509,8	574,9	644,1	717,1	794,0	874,9	959,6	1048,3	1140,9	1237,3
8	510,9	576,1	645,3	718,4	795,4	876,3	961,1	1049,8	1142,5	1239,0
9	511,9	577,2	646,4	719,6	796,7	877,6	962,5	1051,3	1144,0	1240,6
10	513,0	578,3	647,6	720,9	798,0	879,0	963,9	1052,8	1145,6	1242,3
11	514,0	579,4	648,8	722,1	799,3	880,4	965,4	1054,3	1147,2	1243,9
12	515,1	580,6	650,0	723,4	800,7	881,8	966,9	1055,9	1148,8	1245,6
13	516,1	581,7	651,2	724,6	802,0	883,2	968,3	1057,4	1150,4	1247,2
14	517,2	582,8	652,4	725,9	803,3	884,6	969,8	1058,9	1152,0	1248,8
15	518,3	583,9	653,6	727,1	804,6	886,0	971,2	1060,4	1153,6	1250,5
16	519,3	585,1	654,8	728,4	806,0	887,4	972,7	1062,0	1155,2	1252,2
17	520,4	586,2	656,0	729,6	807,3	888,8	974,1	1063,5	1156,8	1253,8
18	521,4	587,3	657,2	730,9	808,6	890,2	975,5	1065,0	1158,3	1255,5
19	522,5	588,5	658,4	732,2	809,9	891,6	977,0	1066,5	1159,9	1257,1
20	523,6	589,6	659,6	733,5	811,3	893,0	978,5	1068,1	1161,5	1258,8
21	524,6	590,7	660,8	734,7	812,6	894,4	979,9	1069,6	1163,1	1260,4
22	525,7	591,9	662,0	736,0	813,9	895,8	981,4	1071,1	1164,7	1262,1
23	526,8	593,0	663,2	737,2	815,2	897,2	982,9	1072,6	1166,3	1263,7
24	527,9	594,1	664,4	738,5	816,6	898,6	984,4	1074,2	1167,9	1265,4
25	528,9	595,2	665,6	739,7	817,9	900,0	985,8	1075,7	1169,5	1267,0
26	530,0	596,4	666,8	741,0	819,2	901,4	987,3	1077,2	1171,1	1268,7
27	531,1	597,5	668,0	742,3	820,5	902,8	988,8	1078,7	1172,7	1270,3
28	532,2	598,7	669,2	743,6	821,9	904,2	990,3	1080,3	1174,3	1272,0
29	533,2	599,8	670,4	744,8	823,2	905,6	991,8	1081,8	1175,9	1273,7
30	534,3	601,0	671,6	746,1	824,6	907,0	993,2	1083,3	1177,5	1275,4

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

Seg.	16^m	17^m	18^m	19^m	20^m	21^m	22^m	23^m	24^m	25^m
31	535,4	602,1	672,8	747,4	825,9	908,4	994,7	1084,8	1179,1	1277,1
32	536,5	603,3	674,1	748,7	827,3	909,8	996,2	1086,4	1180,7	1278,8
33	537,5	604,4	675,3	749,9	828,6	911,2	997,6	1087,9	1182,3	1280,4
34	538,6	605,6	676,5	751,2	829,9	912,6	999,1	1089,5	1183,9	1282,1
35	539,7	606,7	677,7	752,5	831,2	914,0	1000,6	1091,0	1185,5	1283,8
36	540,8	607,9	678,9	753,8	832,6	915,5	1002,1	1092,6	1187,1	1285,5
37	541,9	609,0	680,1	755,0	833,9	916,9	1003,5	1094,1	1188,7	1287,1
38	543,0	610,2	681,3	756,3	835,3	918,3	1005,0	1095,7	1190,3	1288,8
39	544,1	611,3	682,5	757,6	836,6	919,7	1006,5	1097,2	1191,9	1290,5
40	545,2	612,5	683,8	758,9	838,0	921,1	1008,0	1098,8	1193,5	1292,2
41	546,2	613,6	685,0	760,2	839,3	922,5	1009,4	1100,3	1195,1	1293,8
42	547,3	614,8	686,2	761,5	840,7	923,9	1010,9	1101,9	1196,7	1295,5
43	548,4	615,9	687,4	762,8	842,0	925,3	1012,4	1103,4	1198,3	1297,2
44	549,5	617,1	688,7	764,1	843,4	926,8	1013,9	1105,0	1199,9	1298,9
45	550,6	618,2	689,9	765,3	844,7	928,2	1015,4	1106,5	1201,5	1300,5
46	551,7	619,4	691,1	766,6	846,1	929,6	1016,9	1108,1	1203,1	1302,2
47	552,8	620,5	692,3	767,9	847,5	931,0	1018,4	1109,6	1204,7	1303,9
48	553,9	621,7	693,6	769,2	848,9	932,4	1019,9	1111,2	1206,7	1305,6
49	555,0	622,8	694,8	770,5	850,2	933,8	1021,4	1112,7	1208,0	1307,3
50	556,1	624,0	696,0	771,8	851,6	935,2	1022,8	1114,3	1209,6	1309,0
51	557,2	625,2	697,2	773,1	852,9	936,6	1024,3	1115,8	1211,2	1310,7
52	558,3	626,4	698,4	774,5	854,3	938,1	1025,8	1117,4	1213,9	1312,4
53	559,4	627,5	699,6	775,8	855,6	939,5	1027,3	1118,9	1214,5	1314,1
54	560,5	628,7	700,9	777,1	857,0	940,9	1028,8	1120,5	1216,1	1315,7
55	561,6	629,9	702,2	778,4	858,4	942,3	1030,3	1122,0	1217,7	1317,4
56	562,7	631,1	703,5	779,7	859,8	943,8	1031,8	1123,6	1219,4	1319,1
57	563,8	632,2	704,7	781,0	861,1	945,2	1033,3	1125,1	1221,0	1320,8
58	564,9	633,4	705,9	782,3	862,5	946,6	1034,8	1126,7	1222,6	1322,5
59	566,0	634,6	707,1	783,6	863,9	948,1	1036,3	1128,3	1224,2	1324,2
60	567,1	635,8	708,3	784,9	865,3	949,6	1037,8	1129,9	1225,9	1325,9

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

Seg.	26^m	27^m	28^m	29^m	30^m	31^m	32^m	33^m	34^m	35^m
0	1325,9	1429,7	1537,5	1649,0	1764,6	1884,0	2007,4	2134,6	2265,6	2400,6
1	1327,6	1431,4	1539,3	1650,9	1766,6	1886,0	2009,4	2136,8	2267,8	2402,9
2	1329,3	1433,2	1541,1	1652,8	1768,5	1888,0	2011,5	2138,9	2270,0	2405,2
3	1331,0	1434,9	1542,9	1654,7	1770,5	1890,0	2013,6	2141,1	2272,2	2407,5
4	1332,7	1436,7	1544,8	1656,6	1772,4	1892,1	2015,7	2143,2	2274,5	2409,8
5	1334,4	1438,5	1546,6	1658,5	1774,3	1894,1	2017,8	2145,3	2276,7	2412,0
6	1336,1	1440,3	1548,4	1660,4	1776,3	1896,1	2019,9	2147,5	2278,9	2414,3
7	1337,8	1442,1	1550,2	1662,3	1778,3	1898,1	2022,0	2149,7	2281,2	2416,6
8	1339,5	1443,9	1552,1	1664,2	1780,3	1900,2	2024,1	2151,8	2283,4	2418,9
9	1341,2	1445,6	1553,9	1666,1	1782,3	1902,2	2026,2	2153,9	2285,6	2421,2
10	1342,9	1447,4	1555,8	1668,0	1784,2	1904,3	2028,3	2156,1	2287,8	2423,5
11	1344,6	1449,2	1557,6	1669,9	1786,2	1906,3	2030,4	2158,3	2290,0	2425,8
12	1346,3	1451,0	1559,5	1671,9	1788,2	1908,4	2032,5	2160,5	2292,3	2428,1
13	1348,0	1452,8	1561,3	1673,8	1790,1	1910,4	2034,6	2162,6	2294,5	2430,4
14	1349,7	1454,5	1563,2	1675,7	1792,1	1912,4	2036,7	2164,8	2296,8	2432,7
15	1351,4	1456,3	1565,0	1677,6	1794,1	1914,4	2038,8	2166,9	2299,0	2435,0
16	1353,2	1458,1	1566,9	1679,5	1796,1	1916,5	2040,9	2169,1	2301,3	2437,3
17	1354,9	1459,9	1568,7	1681,4	1798,1	1918,5	2043,0	2171,2	2303,6	2439,6
18	1356,6	1461,6	1570,5	1683,3	1800,0	1920,6	2045,1	2173,4	2305,8	2441,9
19	1358,3	1463,4	1572,4	1685,2	1802,0	1922,6	2047,2	2175,6	2308,0	2444,2
20	1360,1	1465,2	1574,3	1687,2	1804,0	1924,7	2049,3	2177,8	2310,2	2446,5
21	1361,8	1466,9	1576,1	1689,1	1805,9	1926,7	2051,4	2179,9	2312,4	2448,8
22	1363,5	1468,7	1578,0	1691,0	1807,9	1928,8	2053,5	2182,1	2314,7	2451,1
23	1365,2	1470,5	1579,8	1692,9	1809,9	1930,8	2055,7	2184,3	2316,9	2453,4
24	1367,0	1472,3	1581,7	1694,8	1811,9	1932,9	2057,8	2186,5	2319,2	2455,7
25	1368,7	1474,1	1583,5	1696,7	1813,8	1935,0	2059,9	2188 6	2321,5	2458,0
26	1370,4	1475,9	1585,3	1698,6	1815,8	1937,0	2062,0	2190,8	2323,7	2460,3
27	1372,1	1477,7	1587,2	1700,5	1817,8	1939,0	2064,1	2193,0	2325,9	2462,6
28	1373,9	1479,5	1589,1	1702,5	1819,8	1941,1	2066,2	2195,2	2328,2	2464,9
29	1375,6	1481,3	1590,9	1704,4	1821,8	1943,1	2068,3	2197,3	2330,4	2467,2
30	1377,4	1483,1	1592,7	1706,3	1823,8	1945,2	2070,4	2199,5	2332,7	2469,5

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

Seg.	26^m	27^m	28^m	29^m	30^m	31^m	32^m	33^m	34^m	35^m
31	1379,0	1484,9	1594,6	1708,2	1825,8	1947,2	2072,6	2201,7	2334,9	2471,8
32	1380,8	1486,7	1596,5	1710,2	1827,8	1949,3	2074,7	2203,9	2337,2	2474,2
33	1382,5	1488,5	1598,3	1712,1	1829,8	1951,3	2076,8	2206,1	2339,4	2476,5
34	1384,2	1490,3	1600,2	1714,0	1831,8	1953,4	2078,9	2208,3	2341,7	2478,8
35	1385,9	1492,1	1602,1	1715,9	1833,8	1955,5	2081,0	2210,5	2343,9	2481,1
36	1387,7	1493,9	1604,0	1717,9	1835,8	1957,6	2083,2	2212,7	2346,2	2483,5
37	1389,4	1495,7	1605,9	1719,8	1837,8	1959,6	2085,3	2214,9	2348,5	2485,8
38	1391,2	1497,5	1607,7	1721,7	1839,8	1961,7	2087,4	2217,1	2350,7	2488,1
39	1392,9	1499,3	1609,6	1723,6	1841,8	1963,7	2089,6	2219,3	2353,0	2490,4
40	1394,7	1501,1	1611,5	1725,6	1843,8	1965,8	2091,7	2221,5	2355,2	2492,8
41	1396,4	1502,9	1613,3	1727,5	1845,8	1967,8	2093,8	2223,7	2357,5	2495,1
42	1398,2	1504,7	1615,2	1729,5	1847,8	1969,9	2095,9	2225,9	2359,7	2497,4
43	1399,9	1506,5	1617,1	1731,5	1849,8	1972,0	2098,0	2228,1	2361,9	2499,7
44	1401,7	1508,4	1619,0	1733,4	1851,8	1974,1	2100,2	2230,3	2364,2	2502,1
45	1403,4	1510,2	1620,8	1735,3	1853,8	1976,1	2102,3	2232,5	2366,4	2504,4
46	1405,2	1512,0	1622,7	1737,3	1855,8	1978,2	2104,5	2234,7	2368,7	2506,7
47	1406,9	1513,8	1624,6	1739,2	1857,8	1980,3	2106,6	2236,9	2371,0	2509,0
48	1408,7	1515,6	1626,5	1741,2	1859,8	1982,4	2108,8	2239,1	2373,3	2511,4
49	1410,4	1517,4	1628,3	1743,1	1861,8	1984,4	2110,9	2241,3	2375,5	2513,7
50	1412,2	1519,2	1630,2	1745,1	1863,8	1986,5	2113,1	2243,5	2377,8	2516,1
51	1413,9	1521,0	1632,1	1747,0	1865,8	1988,6	2115,2	2245,7	2380,1	2518,4
52	1415,7	1522,9	1634,0	1749,0	1867,8	1990,7	2117,4	2247,9	2382,4	2520,8
53	1417,4	1524,7	1635,9	1750,9	1869,8	1992,7	2119,6	2250,1	2384,6	2523,1
54	1419,2	1526,5	1637,7	1752,9	1871,8	1994,8	2121,7	2252,3	2386,9	2525,4
55	1420,9	1528,3	1639,6	1754,8	1873,8	1996,9	2123,8	2254,5	2389,2	2527,7
56	1422,7	1530,2	1641,5	1756,8	1875,9	1999,0	2126,0	2256,7	2391,5	2530,1
57	1424,4	1532,0	1643,3	1758,7	1877,9	2001,0	2128,1	2258,9	2393,7	2532,4
58	1426,2	1533,8	1645,2	1760,7	1879,9	2003,1	2130,3	2261,1	2396,0	2534,8
59	1427,9	1535,6	1647,1	1762,6	1882,0	2005,3	2132,4	2263,4	2398,3	2537,1
60	1429,7	1537,5	1649,0	1764,6	1884,0	2007,4	2134,6	2265,6	2400,6	2539,5

TABOA II DE $\left[\dfrac{2\,\text{sen}^4 \frac{1}{2} p'}{\text{sen}\,1''} = R'\right]$

ARGUMENTO: *Declinação*

Ang. hor.	R′	Differença	Ang. hor.	R′	Differença
1ᵐ. 0ˢ	0″,0000	1	10ᵐ. 20ˢ	0″,1066	70
2 . 0	0 ,0001	7	10 . 30	0 ,1136	74
3 . 0	0 ,0008	16	10 . 40	0 ,1210	77
4 . 0	0 ,0024	35	10 . 50	0 ,1287	81
5 . 0	0 ,0059	8	11 . 0	0 ,1368	85
5 . 10	0 ,0067	9	11 . 10	0 ,1453	89
5 . 20	0 ,0076	10	11 . 20	0 ,1542	93
5 . 30	0 ,0086	10	11 . 30	0 ,1635	97
5 . 40	0 ,0096	12	11 . 40	0 ,1732	101
5 . 50	0 ,0108	13	11 . 50	0 ,1833	105
6 . 0	0 ,0121	14	12 . 0	0 ,1938	109
6 . 10	0 ,0135	15	12 . 10	0 ,2047	114
6 . 20	0 ,0150	17	12 . 20	0 ,2161	120
6 . 30	0 ,0167	18	12 . 30	0 ,2281	124
6 . 40	0 ,0185	19	12 . 40	0 ,2405	129
6 . 50	0 ,0204	20	12 . 50	0 ,2534	134
7 . 0	0 ,0224	22	13 . 0	0 ,2668	139
7 . 10	0 ,0246	24	13 . 10	0 ,2807	145
7 . 20	0 ,0270	26	13 . 20	0 ,2952	150
7 . 30	0 ,0296	27	13 . 30	0 ,3102	156
7 . 40	0 ,0323	29	13 . 40	0 ,3258	162
7 . 50	0 ,0352	31	13 . 50	0 ,3420	168
8 . 0	0 ,0383	33	14 . 0	0 ,3588	174
8 . 10	0 ,0416	35	14 . 10	0 ,3762	180
8 . 20	0 ,0451	37	14 . 20	0 ,3942	186
8 . 30	0 ,0488	39	14 . 30	0 ,4128	193
8 . 40	0 ,0527	42	14 . 40	0 ,4321	200
8 . 50	0 ,0569	44	14 . 50	0 ,4521	207
9 . 0	0 ,0613	47	15 . 0	0 ,4728	214
9 . 10	0 ,0660	49	15 . 10	0 ,4942	221
9 . 20	0 ,0709	52	15 . 20	0 ,5163	228
9 . 30	0 ,0761	55	15 . 30	0 ,5391	235
9 . 40	0 ,0816	58	15 . 40	0 ,5626	243
9 . 50	0 ,0874	61	15 . 50	0 ,5869	251
10 . 0	0 ,0935	64	16 . 0	0 ,6120	
10 . 10	0 ,0999	67			
10 . 20	0 ,1066				
10 . 30					

TABOA III DE [log. f. = Cl. (tang. lat. — tang. decl.)]

ARGUMENTO: *Declinação.*

Declin. Austr.	Log. de f.	Declin. Austr.	Log. de f.	Declin. Austr.	Log. de f.	Declin. Austr.	Log. de f.
30°. 0'	9.84690	24°. 0'	9.88923	18°. 0'	9.93173	12°. 0	9.97557
29 . 50	9.84808	23 . 50	9.88040	17 . 50	9.93292	11 . 50	9.97682
29 . 40	9.84926	23 . 40	9.89157	17 . 40	9.93412	11 . 40	9.97807
29 . 30	9.85045	23 . 30	9.89275	17 . 30	9.93531	11 . 30	9.97932
29 . 20	9.85163	23 . 20	6.89392	17 . 20	9.93651	11 . 20	9.98058
29 . 10	9.85281	23 . 10	9.89509	17 . 10	9.93771	11 . 10	9.98183
29 . 0	9.85399	23 . 0	9.89627	17 . 0	9.93891	11 . 0	9.98309
28 . 50	9.85517	22 . 50	9.89744	16 . 50	9.94011	10 . 50	9.98436
28 . 40	9.85635	22 . 40	9.89862	16 . 40	9.94131	10 . 40	9.98562
28 . 30	9.85753	22 . 30	9.89979	16 . 30	9.94251	10 . 30	9.98689
28 . 20	9.85870	22 . 20	9.90097	16 . 20	9.94372	10 . 20	9.98816
28 . 10	9.85988	22 . 10	9.90214	16 . 10	9.94492	10 . 10	9.98943
28 . 0	9.86106	22 . 0	9.90332	16 . 0	9.94613	10 . 0	9.99070
27 . 50	9.86224	21 . 50	9.90450	15 . 50	9.94734	9 . 50	9.99198
27 . 40	9.86341	21 . 40	9.90567	15 . 40	9.94855	9 . 40	9.99326
27 . 30	9.86459	21 . 30	9.90685	15 . 30	9.94976	9 . 30	9.99454
27 . 20	9.86576	21 . 20	9.90803	15 . 20	9.95097	9 . 20	9.99582
27 . 10	9.86694	21 . 10	9.90921	15 . 10	9.95219	9 . 10	9.99711
27 . 0	9.86811	21 . 0	9.91038	15 . 0	9.95340	9 . 0	9.99840
26 . 50	9.86929	20 . 50	9.91156	14 . 50	9.95462	8 . 50	9.99969
26 . 40	9.87046	20 . 40	9.91274	14 . 40	9.95584	8 . 40	0,00098
26 . 30	9.87163	20 . 30	9.91393	14 . 30	9.95706	8 . 30	0,00228
26 . 20	9.87281	20 . 20	9.91511	14 . 20	9.95828	8 . 20	0,00358
26 . 10	9.87398	20 . 10	9.91629	14 . 10	9.95951	8 . 10	0,00488
26 . 0	9.87515	20 . 0	9.91747	14 . 0	9.96073	8 . 0	0,00619
25 . 50	9.87633	19 . 50	9.91865	13 . 50	9.96195	7 . 50	0,00750
25 . 40	9.87750	19 . 40	9.91984	13 . 40	9.96318	7 . 40	0,00881
25 . 30	9.87867	19 . 30	9.92102	13 . 30	9.96441	7 . 30	0,01012
25 . 20	9.87985	19 . 20	9.92221	13 . 20	9.96564	7 . 20	0,01144
25 . 10	9.88102	19 . 10	9.92340	13 . 10	9.96688	7 . 10	0,01276
25 . 0	9.88219	19 . 0	9.92458	13 . 0	9.96811	7 . 0	0,01408
24 . 50	9.88336	18 . 50	9.92577	12 . 50	9.96935	6 . 50	0,01541
24 . 40	9.88454	18 . 40	9.92696	12 . 40	9.97059	6 . 40	0,01674
24 . 30	9.88571	18 . 30	9.92815	12 . 30	9.97183	6 . 30	0,01807
24 . 20	9.88688	18 . 20	9.92934	12 . 20	9.97308	6 . 20	0,01940
24 . 10	9.88805	18 . 10	9.93053	12 . 10	9.97432	6 . 10	0,02074
24 . 0	9.88923	18 . 0	9.93173	12 . 0	9.97557	6 . 0	0,02209

TABOA III **Continuação**

Argumento: *Declinação*

Declin. Austr.	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.
6°. 0′	0,02209	0°. 0′	0,07298	6°. 0′	0,13065	12°. 0′	0,19876
5 . 50	0,02343	0 . 10	0,07448	6 . 10	0,13237	12 . 10	0,20086
5 . 40	0,02478	0 . 20	0,07598	6 . 20	0,13411	12 . 20	0,20296
5 . 30	0,02613	0 . 30	0,07749	6 . 30	0,13586	12 . 30	0,20508
5 . 20	0,02749	0 . 40	0,07900	6 . 40	0,13761	12 . 40	0,20721
5 . 10	0,02885	0 . 50	0,08052	6 . 50	0,13937	12 . 50	0,20936
5 . 0	0,03021	1 . 0	0,08204	7 . 0	0,14114	13 . 0	0,21152
4 . 50	0,03158	1 . 10	0,08357	7 . 10	0,14292	13 . 10	0,21369
4 . 40	0,03295	1 . 20	0,08511	7 . 20	0,14471	13 . 20	0,21588
4 . 30	0,03432	1 . 30	0,08665	7 . 30	0,14651	13 . 30	0,21808
4 . 20	0,03570	1 . 40	0,08819	7 . 40	0,14831	13 . 40	0,22029
4 . 10	0,03708	1 . 50	0,08975	7 . 50	0,15013	13 . 50	0,22252
4 . 0	0,03846	2 . 0	0,09130	8 . 0	0,15195	14 . 0	0,22476
3 . 50	0,03985	2 . 10	0,09287	8 . 10	0,15378	14 . 10	0,22702
3 . 40	0,04125	2 . 20	0,09444	8 . 20	0,15563	14 . 20	0,22930
3 . 30	0,04264	2 . 30	0,09601	8 . 30	0,15748	14 . 30	0,23159
3 . 20	0,04404	2 . 40	0,09760	8 . 40	0,15934	14 . 40	0,23389
3 . 10	0,04545	2 . 50	0,09918	8 . 50	0,16121	14 . 50	0,23621
3 . 0	0,04686	3 . 0	0,10078	9 . 0	0,16309	15 . 0	0,23855
2 . 50	0,04827	3 . 10	0,10238	9 . 10	0,16498	15 . 10	0,24090
2 . 40	0,04969	3 . 20	0,10399	9 . 20	0,16688	15 . 20	0,24327
2 . 30	0,05111	3 . 30	0,10560	9 . 30	0,16879	15 . 30	0,24566
2 . 20	0,05254	3 . 40	0,10722	9 . 40	0,17071	15 . 40	0,24806
2 . 10	0,05397	3 . 50	0,10885	9 . 50	0,17264	15 . 50	0,25048
2 . 0	0,05540	4 . 0	0,11048	10 . 0	0,17458	16 . 0	0,25292
1 . 50	0,05684	4 . 10	0,11212	10 . 10	0,17654	16 . 10	0,25538
1 . 40	0,05828	4 . 20	0,11377	10 . 20	0,17850	16 . 20	0,25786
1 . 30	0,05973	3 . 30	0,11542	10 . 30	0,18047	16 . 30	0,26035
1 . 20	0,06119	3 . 40	0,11709	10 . 40	0,18246	16 . 40	0,26286
1 . 10	0,06264	3 . 50	0,11876	10 . 50	0,18446	16 . 50	0,26539
1 . 0	0,06411	5 . 0	0,12043	11 . 0	0,18646	17 . 0	0,26794
0 . 50	0,06557	5 . 10	0,12211	11 . 10	0,18848	17 . 10	0,27051
0 . 40	0,06704	5 . 20	0,12381	11 . 20	0,19052	17 . 20	0,27310
0 . 30	0,06852	5 . 30	0,12550	11 . 30	0,19256	17 . 30	0,27571
0 . 20	0,07000	5 . 40	0,12721	11 . 40	0,19461	17 . 40	0,27834
0 . 10	0,07149	5 . 50	0,12892	11 . 50	0,19668	17 . 50	0,28099
0 . 0	0,07298	6 . 0	0,13065	12 . 0	0,19876	18 . 0	0,28367

TABOA III **Continuação**

ARGUMENTO: *Declinação*

Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.
18°. 0′	0,28367	24°. 0′	0,39785	30°. 0′	0,57192	36°. 0′	0,92529
18 . 10	0,28636	24 . 10	0,40165	30 . 10	0,57827	36 . 10	0,94189
18 . 20	0,28908	24 . 20	0,40550	30 . 20	0,58473	36 . 20	0,95922
18 . 30	0,29182	24 . 30	0,40939	30 . 30	0,59130	36 . 30	0,97735
18 . 40	0,29458	24 . 40	0,41333	30 . 40	0,59801	36 . 40	0,99636
18 . 50	0,29737	24 . 50	0,41732	30 . 50	0,60484	36 . 50	0,01632
19 . 0	0,30017	25 . 0	0,42135	31 . 0	0,61180	37 . 0	0,03735
19 . 10	0,30301	25 . 10	0,42544	31 . 10	0,61891	.....	....
19 . 20	0,30586	25 . 20	0,42957	31 . 20	0,62616	.....	....
19 . 30	0,30875	25 . 30	0,43375	31 . 30	0,63355	.....	....
19 . 40	0,31165	25 . 40	0,43799	31 . 40	0,64110	.....	....
19 . 50	0,31459	25 . 50	0,44228	31 . 50	0,64882	.....	....
20 . 0	0,31754	26 . 0	0,44663	32 . 0	0,65670	43 . 0	1,05943
20 . 10	0,32053	26 . 10	0,45103	32 . 10	0,66476	43 . 10	1,03314
20 . 20	0,32354	26 . 20	0,45549	32 . 20	0,67300	43 . 20	1,00817
20 . 30	0,32658	26 . 30	0,46001	32 . 30	0,68143	43 . 30	0,98443
20 . 40	0,32965	26 . 40	0,46459	32 . 40	0,69006	43 . 40	0,96180
20 . 50	0,33275	26 . 50	0,46923	32 . 50	0,69890	43 . 50	0,94018
21 . 0	0,33588	27 . 0	0,47393	33 . 0	0,70795	44 . 0	0,91946
21 . 10	0,33903	27 . 10	0,47871	33 . 10	0,71724	44 . 10	0,89959
21 . 20	0,34222	27 . 20	0,48355	33 . 20	0,72676	44 . 20	0,88047
21 . 30	0,34543	27 . 30	0,48845	33 . 30	0,73653	44 . 30	0,86207
21 . 40	0,34868	27 . 40	0,49343	33 . 40	0,74657	44 . 40	0,84431
21 . 50	0,35196	27 . 50	0,49849	33 . 50	0,75689	44 . 50	0,82715
22 . 0	0,35528	28 . 0	0,50362	34 . 0	0,76750	45 . 0	0,81055
22 . 10	0,35863	28 . 10	0,50882	34 . 10	0,77842	45 . 10	0,79447
22 . 20	0,36201	28 . 20	0,51411	34 . 20	0,78966	45 . 20	0,77887
22 . 30	0,36542	28 . 30	0,51948	34 . 30	0,80125	45 . 30	0,76373
22 . 40	0,36887	28 . 40	0,52493	34 . 40	0,81321	45 . 40	0,74901
22 . 50	0,37236	28 . 50	0,53047	34 . 50	0,82555	45 . 50	0,73470
23 . 0	0,37588	29 . 0	0,53610	35 . 0	0,83831	46 . 0	0,72075
23 . 10	0,37945	29 . 10	0,54182	35 . 10	0,85151	46 . 10	0,70716
23 . 20	0,38305	29 . 20	0,54764	35 . 20	0,86518	46 . 20	0,69391
23 . 30	0,38668	29 . 30	0,55355	35 . 30	0,87936	46 . 30	0,68096
23 . 40	0,39036	29 . 40	0,55957	35 . 40	0,89407	46 . 40	0,66832
23 . 50	0,39409	29 . 50	0,56569	35 . 50	0,90936	46 . 50	0,65596
24 . 0	0,39785	30 . 0	0,57192	36 . 0	0,92529	47 . 0	0,64387

TABOA III **Continuação**

ARGUMENTO: *Declinação*

Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.
47°. 0'	0,64387	53°. 0'	0,31720	59°. 0'	0,08673	65°. 0'	9.88633
47 . 10	0,63203	53 . 10	0,30999	59 . 10	0,08093	65 . 10	9.88088
47 . 20	0,62044	53 . 20	0,30284	59 . 20	0,07515	65 . 20	9.87544
47 . 30	0,60908	53 . 30	0,29576	59 . 30	0,06938	65 . 30	9.86999
47 . 40	0,59793	53 . 40	0,28873	59 . 40	0,06364	65 . 40	9.86455
47 . 50	0,58700	53 . 50	0,28176	59 . 50	0,05791	65 . 50	9.85910
48 . 0	0,57627	54 . 0	0,27485	60 . 0	0,05221	66 . 0	9.85365
48 . 10	0,56572	54 . 10	0,26799	60 . 10	0,04652	66 . 10	9.84819
48 . 20	0,55537	54 . 20	0,26119	60 . 20	0,04084	66 . 20	9.84274
48 . 30	0,54519	54 . 30	0,25443	60 . 30	0,03518	66 . 30	9.83728
48 . 40	0,53517	54 . 40	0,24772	60 . 40	0,02954	66 . 40	9.83181
48 . 50	0,52532	54 . 50	0,24107	60 . 50	0,02392	66 . 50	9.82634
49 . 0	0,51562	55 . 0	0,23446	61 . 0	0,01830	67 . 0	9.82087
49 . 10	0,50608	55 . 10	0,22789	61 . 10	0,01270	67 . 10	9.81539
49 . 20	0,49667	55 . 20	0,22137	61 . 20	0,00712	67 . 20	9.80990
49 . 30	0,48740	55 . 30	0,21489	61 . 30	0,00154	67 . 30	9.80440
49 . 40	0,47827	55 . 40	0,20845	61 . 40	9.99598	67 . 40	9.79890
49 . 50	0,46926	55 . 50	0,20205	61 . 50	9.99043	67 . 50	9.79339
50 . 0	0,46037	56 . 0	0,19569	62 . 0	9.98489	68 . 0	9.78787
50 . 10	0,45161	56 . 10	0,18937	62 . 10	9.97936	68 . 10	9.78234
50 . 20	0,44295	56 . 20	0,18307	62 . 20	9.97383	68 . 20	9.77681
50 . 30	0,43441	56 . 30	0,17684	62 . 30	9.96832	68 . 30	9.77126
50 . 40	0,42597	56 . 40	0,17062	62 . 40	9.96282	68 . 40	9.76570
50 . 50	0,41764	56 . 50	0,16444	62 . 50	9.95732	68 . 50	9.76013
51 . 0	0,40940	57 . 0	0,15830	63 . 0	9.95183	69 . 0	9.75454
51 . 10	0,40126	57 . 10	0,15218	63 . 10	9.94635	69 . 10	9.74895
51 . 20	0,39321	57 . 20	0,14609	63 . 20	9.94087	69 . 20	9.74334
51 . 30	0,38525	57 . 30	0,14004	63 . 30	9.93540	69 . 30	9.73771
51 . 40	0,37738	57 . 40	0,13401	63 . 40	9.92994	69 . 40	9.73208
51 . 50	0,36959	57 . 50	0,12801	63 . 50	9.92447	69 . 50	9.72642
52 . 0	0,36188	58 . 0	0,12204	64 . 0	9.91902	70 . 0	9.72075
52 . 10	0,35425	58 . 10	0,11610	64 . 10	9.91356	70 . 10	9.71507
52 . 20	0,34670	58 . 20	0,11018	64 . 20	9.90811	70 . 20	9.70936
52 . 30	0,33922	58 . 30	0,10428	64 . 30	9.90266	70 . 30	9.70364
52 . 40	0,33181	58 . 40	0,09841	64 . 40	9.89722	70 . 40	9.69790
52 . 50	0,32447	58 . 50	0,09256	64 . 50	9.89177	70 . 50	9.69214
53 . 0	0,31720	59 . 0	0,08673	65 . 0	9.88633	71 . 0	9.68637

TABOA III **Continuação**

ARGUMENTO : *Declinação*

Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.
71°. 0'	9.68637	77°. 0'	9.45765	83°. 0'	9.13673	89°. 0'	8.24838
71 . 10	9.68057	77 . 10	9.45046	83 . 10	9.12496	89 . 10	8.16810
71 . 20	9.67475	77 . 20	9.44320	83 . 20	9.11293	Pass. inf.	
71 . 30	9.66890	77 . 30	9.43588	83 . 30	9.10064		
71 . 40	9.66304	77 . 40	9.42849	83 . 40	9.08807	89 . 10	8.15742
71 . 50	9.65715	77 . 50	9.42102	83 . 50	9.07520		
72 . 0	9.65123	78 . 0	9.41349	84 . 0	9.06203	89 . 0	8.23556
72 . 10	9.64529	78 . 10	9.40588	84 . 10	9.04852	88 . 50	8.30147
72 . 20	9 63933	78 . 20	9.39819	84 . 20	9.03467	88 . 40	8.35843
72 . 30	9.63334	78 . 30	9.39042	84 . 30	9.02045	88 . 30	8.40856
72 . 40	9.62732	78 . 40	9.38257	84 . 40	9.00583	88 . 20	8.45330
72 . 50	9.62127	78 . 50	9.37463	84 . 50	8.99080	88 . 10	8.49367
73 . 0	9.61519	79 . 0	9.36661	85 . 0	8.97532	88 . 0	8.53045
73 . 10	9.60908	79 . 10	9.35849	85 . 10	8.95936	87 . 50	8.56420
73 . 20	9.60294	79 . 20	9.35028	85 . 20	8.94290	87 . 40	8.59539
73 . 30	9.59677	79 . 30	9.34197	85 . 30	8.92588	87 . 30	8.62435
73 . 40	9.59057	79 . 40	9.33356	85 . 40	8.90828	87 . 20	8.65139
73 . 50	9.58433	79 . 50	9.32504	85 . 50	8.89004	87 . 10	8.67673
74 . 0	9.57805	80 . 0	9.31642	86 . 0	8.87111	87 . 0	8.70057
74 . 10	9.57174	80 . 10	9.30768	86 . 10	8.85143	86 . 50	8.72307
74 . 20	9.56539	80 . 20	9.29882	86 . 20	8.83093	86 . 40	8.74437
74 . 30	9.55900	80 . 30	9 28984	86 . 30	8.80954	86 . 30	8.76459
74 . 40	9.55257	80 . 40	9.28074	86 . 40	8.78717	86 . 20	8.78383
74 . 50	9.54610	80 . 50	9.27151	86 . 50	8.76372	86 . 10	8.80218
75 . 0	9.53959	81 . 0	9.26214	87 . 0	8.73907	86 . 0	8.81970
75 . 10	9.53304	81 . 10	9.25262	87 . 10	8.71309	85 . 50	8.83648
75 . 20	9.52644	81 . 20	9.24296	87 . 20	8.68560	85 . 40	8.85256
75 . 30	9.51979	81 . 30	9.23315	87 . 30	8.65643	85 . 30	8 86801
75 . 40	9.51310	81 . 40	9.22318	87 . 40	8.62532	85 . 20	8.88287
75 . 50	9.50636	81 . 50	9.21314	87 . 50	8.59199	85 . 10	8.89717
76 . 0	9.49956	82 . 0	9.20273	88 . 0	8.55610	85 . 0	8.91097
76 . 10	9.49272	82 . 10	9.19223	88 . 10	8.51718	84 . 50	8.92428
76 . 20	9.48582	82 . 20	9.18155	88 . 20	8.47466	84 . 40	8.93715
76 . 30	9.47886	82 . 30	9.17067	88 . 30	8.42779	84 . 30	8.94959
76 . 40	9.47185	82 . 40	9.15958	88 . 40	8.37552	84 . 20	8.96164
76 . 50	9.46478	82 . 50	9.14827	88 . 50	8.31643	84 . 10	8.97332
77 . 0	9.45765	83 . 0	9.13673	89 . 0	8.24838	84 . 0	8 98465

TABOA III **Continuação**

ARGUMENTO: *Declinação*

Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.
84°. 0′	8.98465	78°. 0	9.25571	72°. 0′	9.40638	66°. 0′	9.50985
83 . 50	8.99565	77 . 50	9.26094	71 . 50	9.40974	65 . 50	9.51231
83 . 40	9.00634	77 . 40	9.26609	71 . 40	9.41306	65 . 40	9.51476
83 . 30	9.01673	77 . 30	9.27116	71 . 30	9.41635	65 . 30	9.51718
83 . 20	9.02683	77 . 20	9.27616	71 . 20	9.41960	65 . 20	9.51959
83 . 10	9.03667	77 . 10	9.28108	71 . 10	9.42283	65 . 10	9.52198
83 . 0	9 04626	77 . 0	9.28594	71 . 0	9.42602	65 . 0	9.52435
82 . 50	9.05560	76 . 50	9.29073	70 . 50	9.42919	64 . 50	9.52671
82 . 40	9.06471	76 . 40	9.29545	70 . 40	9.43232	64 . 40	9.52905
82 . 30	9.07360	76 . 30	9.30011	70 . 30	9.43543	64 30	9.53138
82 . 20	9.08228	76 . 20	9.30470	70 . 20	9.43850	64 . 20	9.53369
82 . 10	9.09076	76 . 10	9.30924	70 . 10	9.44155	64 . 10	9.53598
82 . 0	9.09905	76 . 0	9.31371	70 . 0	9.44457	64 . 0	9.53826
81 . 50	9.10715	75 . 50	9.31813	69 . 50	9.44756	63 . 50	9.54052
81 . 40	9.11508	75 . 40	9.32249	69 . 40	9.45053	63 . 40	9.54277
81 . 30	9.12283	75 . 30	9.32679	69 . 30	9.45347	63 . 30	9.54500
81 . 20	9.13042	75 . 20	9.33104	69 . 20	9.45638	63 . 20	9.54722
81 . 10	9.13786	75 . 10	9.33524	69 . 10	9.45927	63 . 10	9.54942
81 . 0	9.14514	75 . 0	9.33938	69 . 0	9.46213	63 . 0	9 55161
80 . 50	9.15228	74 . 50	9.34348	68 . 50	9.46497	62 . 50	9.55379
80 . 40	9.15928	74 . 40	9.34753	68 . 40	9.46778	62 . 40	9.55595
80 . 30	9.16615	74 . 30	9.35152	68 . 30	9.47057	62 . 30	9.55810
80 . 20	9.17288	74 . 20	9.35547	68 . 20	9.47334	62 . 20	9.56024
80 . 10	9.17949	74 . 10	9.35938	68 . 10	9.47609	62 . 10	9.56236
80 . 0	9.18598	74 . 0	9.36324	68 . 0	9.47881	62 . 0	9.56447
79 . 50	9.19235	73 . 50	9 36705	67 . 50	9.48151	61 . 50	9.56656
79 . 40	9.19861	73 . 40	9.37083	67 . 40	9.48419	61 . 40	9.56865
79 . 30	9.20476	73 . 30	9.37456	67 . 30	9.48685	61 . 30	9.57072
79 . 20	9.21080	73 . 20	9.37825	67 . 20	9.48948	61 . 20	9.57278
79 . 10	9.21674	73 . 10	9.38190	67 . 10	9.49210	61 . 10	9.57482
79 . 0	9.22358	73 . 0	9.38551	67 . 0	9.49469	61 . 0	9.57686
78 . 50	9.22833	72 . 50	9.38908	66 . 50	9.49727	60 . 50	9.57888
78 . 40	9.23398	72 . 40	9.39261	66 . 40	9.49982	60 . 40	9.58089
78 . 30	9.23954	72 . 30	9.39611	66 . 30	9.50236	60 . 30	9.58289
78 . 20	9.24502	72 . 20	9.39957	66 . 20	9.50487	60 . 20	9.58488
78 . 10	9.25040	72 . 10	9.40299	66 . 10	9.50737	60 . 10	9.58686
78 . 0	9.25571	72 . 0	9.40638	66 . 0	9.50985	60 . 0	9.58882

TABOA IV

REFRACÇÕES

Para 0^m,760 do Barometro, e + 10° do Thermometro centigrado

ARGUMENTO: *Altura apparente*

Altura apparente	Refracção	Diff. p. 10′	Altura apparente	Refracção	Diff. p. 10′
0° 0′	33′ 47″,9	112″,7	5° 0′	9′ 54″,8	15″,8
10	31 55 ,2	104 ,8	10	9 39 ,0	15 ,1
20	30 10 ,4	97 ,2	20	9 23 ,9	14 ,3
30	28 33 ,2	90 ,1	30	9 9 ,6	13 ,7
40	27 3 ,1	83 ,5	40	8 55 ,9	13 ,1
50	25 39 ,6	77 ,3	50	8 42 ,8	12 ,5
1 0	24 22 ,3	71 ,6	6 0	8 30 ,3	12 ,0
10	23 10 ,7	66 ,4	10	8 18 ,3	11 ,4
20	22 4 ,3	61 ,6	20	8 6 ,9	11 ,0
30	21 2 ,7	57 ,1	30	7 55 ,9	10 ,5
40	20 5 ,6	53 ,1	40	7 45 ,4	10 ,1
50	19 12 ,5	49 ,4	50	7 35 ,3	9 ,7
2 0	18 23 ,1	46 ,0	7 0	7 25 ,6	9 ,3
10	17 37 ,1	42 ,9	10	7 16 ,3	9 ,0
20	16 54 ,2	40 ,1	20	7 7 ,3	8 ,6
30	16 14 ,1	37 ,4	30	6 58 ,7	8 ,3
40	15 36 ,7	35 ,1	40	6 50 ,4	8 ,0
50	15 1 ,6	32 ,9	50	6 42 ,4	7 ,7
3 0	14 28 ,7	30 ,8	8 0	6 34 ,7	7 ,5
10	13 57 ,9	29 ,0	10	6 27 ,2	7 ,1
20	13 28 ,9	27 ,3	20	6 20 ,1	7 ,0
30	13 1 ,6	25 ,7	30	6 13 ,1	6 ,7
40	12 35 ,9	24 ,2	40	6 6 ,4	6 ,5
50	12 11 ,7	22 ,9	50	5 59 ,9	6 ,2
4 0	11 48 ,8	21 ,6	9 0	5 53 ,7	6 ,1
10	11 27 ,2	20 ,5	10	5 47 ,6	5 ,9
20	11 6 ,7	19 ,4	20	5 41 ,7	5 ,6
30	10 47 ,3	18 ,4	30	5 36 ,1	5 ,6
40	10 28 ,9	17 ,5	40	5 30 ,5	5 ,3
50	10 11 ,4	16 ,6	50	5 25 ,2	5 ,2
5 0	9 54 ,8	15 ,8	10 0	5 20 ,0	5 ,0

TABOA IV **Continuação**

ARGUMENTO: *Altura apparente*

Altura apparente	Refracção	Diff. p. 10′	Altura apparente	Refracção	Diff. p. 10′
10° 0′	5′ 20″,0	5″,0	14°	3′ 50″,0	2″,58
10	5 15 ,0	4 ,9	15	3 34 ,5	2 ,28
20	5 10 ,1	4 ,7	16	3 20 ,8	2 ,03
30	5 5 ,4	4 ,6	17	3 8 ,6	1 ,82
40	5 0 ,8	4 ,5	18	2 57 ,7	1 ,64
50	4 56 ,3	4 ,4	19	2 47 ,8	1, 49
11 0	4 51 ,9	4 ,2	20	2 38 ,9	1 ,35
10	4 47 ,7	4 ,2	21	2 30 ,8	1 ,24
20	4 43 ,5	4 ,0	22	2 23 ,4	1 ,14
30	4 39 ,5	3 ,9	23	2 16 ,6	1 ,05
40	4 35 ,6	3 ,8	24	2 10 ,3	0 ,97
50	4 31 ,8	3 ,7	25	2 4 ,4	0 ,90
12 0	4 28 ,1	3 ,6	26	1 59 ,0	0 ,84
10	4 24 ,5	3 ,6	27	1 54 ,0	0 ,79
20	4 20 ,9	3 ,4	28	1 49 ,3	0 ,74
30	4 17 ,5	3 ,4	29	1 44 ,8	0 ,69
40	4 14 ,1	3 ,2	30	1 40 ,7	0 ,65
50	4 10 ,9	3 ,2	31	1 36 ,8	0 ,62
13 0	4 7 ,7	3 ,2	32	1 33 ,1	0 ,58
10	4 4 ,5	3 ,0	33	1 29 ,6	0 ,55
20	4 1 ,5	3 ,0	34	1 26 ,3	0 ,53
30	3 58 ,5	2 ,9	35	1 23 ,1	0 ,50
40	3 55 ,6	2 ,9	36	1 20 ,1	0 ,48
50	3 52 ,7	2 ,7	37	1 17 ,2	0 ,46
14 0	3 50 ,0	2 ,6	38	1 14 ,5	0 ,44
			39	1 11 ,9	0 ,42
			40	1 9 ,4	0 ,40
			41	1 7 ,0	0 ,38
			42	1 4 ,7	0 ,37
			43	1 2 ,5	0 ,36
			44	1 0 ,3	0 ,34

TABOA IV **Continuação**

ARGUMENTO: *Altura apparente*

Altura apparente	Refracção	Diff. p. 10′	Altura apparente	Refracção	Diff. p. 10′
44°	1′ 0″,3	0″,34	68°	0′ 23″,6	0″,20
45	0 58 ,3	0 ,33	69	0 22 ,4	0 ,19
46	0 56 ,3	0 ,32	70	0 21 ,2	0 ,19
47	0 54 ,3	0 ,31	71	0 20 ,1	0 ,19
48	0 52 ,5	0 ,30	72	0 18 ,9	0 ,19
49	0 50 ,7	0 ,29	73	0 17 ,8	0 ,19
50	0 48 ,9	0 ,28	74	0 16 ,7	0 ,18
51	0 47 ,2	0 ,28	75	0 15 ,6	0 ,18
52	0 45 ,5	0 ,27	76	0 14 ,5	0 ,18
53	0 43 ,9	0 ,26	77	0 13 ,5	0 ,18
54	0 42 ,3	0 ,26	78	0 12 ,4	0 ,18
55	0 40 ,8	0 ,25	79	0 11 ,3	0 ,18
56	0 39 ,3	0 ,24	80	0 10 ,3	0 ,18
57	0 37 ,9	0 ,24	81	0 9 ,2	0 ,17
58	0 36 ,4	0 ,23	82	0 8 ,2	0 ,17
59	0 35 ,0	0 ,23	83	0 7 ,2	0 ,17
60	0 33 ,7	0 ,22	84	0 6 ,1	0 ,17
61	0 32 ,3	0 ,22	85	0 5 ,1	0 ,17
62	0 31 ,0	0 ,22	86	0 4 ,1	0 ,17
63	0 29 ,7	0 ,21	87	0 3 ,1	0 ,17
64	0 28 ,4	0 ,21	88	0 2 ,0	0 ,17
65	0 27 ,2	0 ,20	89	0 1 ,0	0 ,17
66	0 26 ,0	0 ,20	90	0 0 ,0	
67	0 24 ,8	0 ,20			
68	0 23 ,6	0 ,20			

TABOA V

Primeiro factor para corrigir as refracções medias da taboa IV

ARGUMENTO: *Barometro*

Barometro	Factor	Barom.	Factor	Barom.	Factor	Barom.	Factor
M.		M.		M.		M.	
0, 710	0, 934	0, 730	0, 961	0, 750	0, 987	0, 770	1, 013
711	936	731	962	751	988	771	014
712	937	732	963	752	989	772	016
713	938	733	964	753	991	773	017
714	939	734	966	754	992	774	018
715	0, 941	735	0, 967	755	0, 993	775	1, 020
716	942	736	968	756	995	776	021
717	943	737	970	757	996	777	022
718	945	738	971	758	997	778	024
719	946	739	972	759	999	779	025
720	0, 947	740	0, 974	760	1, 000	780	1, 026
721	949	741	975	761	001	781	028
722	950	742	976	762	003	782	029
723	951	743	978	763	004	783	030
724	953	744	979	764	005	784	032
725	0, 954	745	0, 980	765	1, 007	785	1, 033
726	955	746	982	766	008	786	034
727	957	747	983	767	009	787	036
728	958	748	984	768	011	788	037
0, 729	0, 959	0, 749	0, 986	0, 769	1, 012	0, 789	1, 038

TABOA V

Segundo factor para corrigir as refracções medias da Taboa IV

ARGUMENTO: *Thermometro centigrado*

Therm.	Factor	Therm.	Factor	Therm.	Factor	Therm.	Factor
— 29°	1,168	— 9°	1,076	+ 11°	0,996	31°	0,927
28	1,163	8	1,071	12	0,993	32	0,924
27	1,158	7	1,067	13	0,989	33	0,921
26	1,153	6	1,063	14	0,985	34	0,918
25	1,148	5	1,059	15	0,982	35	0,915
24	1,144	4	1,055	16	0,978	36	0,912
23	1,139	3	1,051	17	0,975	37	0,908
22	1,134	2	1,047	18	0,971	38	0,905
21	1,129	1	1,043	19	0,968	39	0,902
20	1,125	— 0	1,039	20	0,964	40	0,899
19	1,120	+ 1	1,035	21	0,961	41	0,896
18	1,115	2	1,031	22	0,957	42	0,893
17	1,111	3	1,027	23	0,954	43	0,890
16	1,106	4	1,023	24	0,950	44	0,887
15	1,102	5	1,019	25	0,947	45	0,884
14	1,097	6	1,015	26	0,944	46	0,881
13	1,093	7	1,011	27	0,940	47	0,878
12	1,089	8	1,007	28	0,937	48	0,876
11	1,084	9	1,004	29	0,934	49	0,873
10	1,080	10	1,000	30	0,931	50	0,870

TABOA VII

Angulo ω do raio com a vertical e logarithmos do raio r, para o achatamento $\frac{1}{299}$.

ARGUMENTO: *Latitude*

Lat	ω	Log. r	Lat	ω	Log. r	Lat.	ω	Log. r	Lat.	ω	Log. r
°	°		°	°		°	°		°	°	
0	0 0′,0	0,0000000	23	8′15,″7	9.9997799	46	11′30,″3	9.9992512	69	7′43,″3	9.9887342
1	0 24,0	9,9999996	24	8 32, 1	7641	47	11 29, 1	2258	70	7 25, 1	7174
2	0 48,0	9982	25	8 47, 9	7424	48	11 27, 1	2005	71	7 6, 3	7013
3	1 11,9	9961	26	9 3, 1	7228	49	11 24, 2	1752	72	6 47, 1	6859
4	1 35,8	9930	27	9 17, 6	7027	50	11 20, 5	1502	73	6 27, 3	6713
5	1 59,5	9891	28	9 31, 5	6820	51	11 16, 0	1252	74	6 7, 0	6573
6	2 23,1	9843	29	9 44, 7	6608	52	11 10, 7	1005	75	5 46, 3	6441
7	2 46,5	9786	30	9 57, 1	6392	53	11 4, 5	0759	76	5 25, 2	6317
8	3 9,8	9721	31	10 8, 8	6171	54	10 57, 5	0515	77	5 3, 7	6201
9	3 32,7	9648	32	10 19, 8	5946	55	10 49, 7	0275	78	4 41, 8	6093
10	3 55,5	9566	33	10 30, 1	5717	56	10 41, 2	9.9990037	79	4 19, 5	5993
11	4 17,9	9476	34	10 39, 5	5484	57	10 31, 8	9.9989802	80	3 57, 0	5901
12	4 40,1	9377	35	10 48, 2	5248	58	10 21, 7	9571	81	3 34, 1	5818
13	5 1,8	9271	36	10 56, 2	5009	59	10 10, 8	9344	82	3 11, 0	5743
14	5 23,3	9157	37	11 3, 3	4767	60	9 59, 1	9121	83	2 47, 6	5676
15	5 44,3	9035	38	11 9, 6	4522	61	9 46, 7	8902	84	2 24, 1	5619
16	6 4,9	8905	39	11 15, 1	4267	62	9 33, 6	8688	85	2 0, 3	5570
17	6 25,1	8768	40	11 19, 8	4027	63	9 19, 8	8479	86	1 36, 4	5530
18	6 44,9	8624	41	11 23, 6	3777	64	9 5, 4	8275	87	1 12, 4	5498
19	7 4,1	8472	42	11 26, 6	3525	65	8 50, 2	8077	88	0 48, 3	5476
20	7 22,8	8314	43	11 28, 8	3273	66	8 34, 4	7884	89	0 24, 2	5463
21	7 41,0	8149	44	11 30, 1	3019	67	8 18, 0	7697	90	0 0, 0	5458
22	7 58,6	7977	45	11 30, 6	2766	68	8 0, 9	7517			

TABOA DAS MATERIAS

DA

ASTRONOMIA

REFRACÇÕES ATMOSPHERICAS

PARALLAXES

CIRCULAR REPETIDOR

NOTA 1.ª

SOBRE A FORMULA DE REFRACÇÃO

NOTA 2.ª

EQUAÇÃO DAS ALTURAS CORRESPONDENTES

TABOAS

ERRATAS DA PRIMEIRA PARTE DA ASTRONOMIA

Paginas	*Linhas*	*Erros*	*Emendas*
12	ultima	ISQ′ e ISQ	SIQ′ e SIQ
15	4	tang$a$	tang α
16	penultima	1462	10462
17 e 19	Em logar da numeração 26 e 27, *leia-se:* 26_a e 27_a		
22	17	em B	em a
35	18	CN	CE
»	antepenult.	Cb	Ob′
39	6	Em dia	Em um dia
44	29	do astro	do horizonte
48	15	envolta	em volta
52	4	determinação	esta determinação
53	penultima	: supprima-se o factor τ'	
57	14	determinar-se	determinar-se aquelles erros
60	8	oculo	ocular
68	antepenult.	e δA^2	e A^2
70	5	sen Δ_3 sen Δ_1	sen Δ_2 sen Δ_1
71	4 subindo	pag. XII	pag. XXII
109	penultima	10°42′30″	10°43′47″
»	ultima	1277,8	1278,9
111	4 subindo	n e g	n e $\frac{1}{2}g$
128	2	νA^2	νA
»	3	Maclaurim	Maclaurin
129	2	61,″274	60″,634
»	4 sub.	29′46″,9	29′38″,8
132	3 e 10 sub.	θ	θ_1
142	8	cot z″	cos z″
153	4 sub.	$O_1N'E$	O_1N_1E
156	6 sub.	no norte	ao norte
161	2 sub.	$A_0 =$	$A =$
162	11	Supponhamos	*Determinação da hora.* Supponhamos
164	3	$\frac{1}{2} b \,\delta P''$	$\frac{1}{2} b \,\delta P''^2$
177	7	pag. 188	n.° 188
178	8	n.° 86	n.° 186
186	ultima	$s\pi$	$s\mu$

Na pag. 7, nota, está trocado o signal do 2.º termo de δr; mas é melhor o seguinte:

(a) É o que mostram as differenças respectivas:

$$\delta r = \frac{h \operatorname{sen}(i - \frac{1}{2}\delta\theta) \operatorname{sen} \frac{1}{2}\delta\theta}{2 \operatorname{sen}^2 (\frac{1}{2} i - \frac{1}{2}\delta\theta) \operatorname{sen} \frac{21}{2} i}, \quad \delta r = \frac{(2d + \delta d)\,\delta d}{2h}.$$

Assim, no 1.º exemplo, $\delta\theta = 1'12'',5$ explicaria o erro de r.

As parallaxes que na pag. 148 n.º 212, segundo o costume, se chamaram de ascensão recta e declinação, são as δP e $\delta\Delta$ de angulo horario e distancia polar.

SUPPLEMENTO

Á PRIMEIRA PARTE DOS ELEMENTOS DE ASTRONOMIA

Na pag. 7, nota, está trocado o signal do 2.º termo de δr: mas é melhor o seguinte:

(a) É o que mostram as differenças respectivas:

$$\delta r = \frac{h \operatorname{sen}(i - \frac{1}{2}\delta b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\delta b}{2\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}\delta b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}i}, \quad \delta r = \frac{(2d + \delta d)\,\delta d}{2h}.$$

Assim, no 1.º exemplo, $\delta b = -1' 48''$, 5 explicaria o erro de r.

As parallaxes que na pag. 148 n.º 212, segundo o costume, se chamaram de ascensão recta e declinação, são as δP e $\delta \Delta$, de angulo horario e distancia polar.

CIRCULAR MERIDIANO

I

Estudo do instrumento

Amplificação

256. D'entre os differentes processos empregados, exporemos os dois seguintes; remettendo para outros á Astronomia de Lalande n.° 2435, e á Physica de Pouillet, 6.ª edição, tomo 2.°, n.° 126.

1.° Tomemos um prisma de crystal birefrangente, tornado achromatico por outro refrangente; e seja nelle a o angulo que separa as duas imagens devidas á refracção ordinaria e á extraordinaria. Para que, vendo um circulo com o prisma, as duas imagens se toquem, é necessario que seja a o diametro apparente do circulo.

Posto isto, supponhamos que, descrevendo em uma taboa muitos circulos concentricos, a uma distancia dada, e sendo conseguintemente conhecidos os diametros apparentes d'elles vistos a essa distancia, as duas imagens do circulo, cujo diametro apparente é d, se tocam sendo vistas pelo oculo com um ocular, diante do qual se colloca o prisma. Então é a o diametro apparente da imagem focal amplificada pelo ocular; e como o diametro apparente do circulo visto sem oculo é d, será a amplificação $\frac{a}{d}$ (Vej. a Astronom. d'Arago, tomo 1.°, pag. 126).

Este meio é muito simples, e o melhor de todos.

2.° Supponhamos que, expondo ao sol os vidros ocular e objectivo, ou por outro meio, se medem as suas distancias focaes: teremos (n.° 35)

$$\text{amplif.} = \mathrm{F}\frac{f+\varphi-\mathrm{D}}{\varphi f}.$$

No circular meridiano de Coimbra achamos $F = 1^m, 244$; e:

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{lente n.}^\circ\ 63 & f = 0^m,0238 & \varphi = 0^m,0260 & D = 0^m,0195 \\ \text{lente n.}^\circ\ 102 & f = 0^m,0150 & \varphi = 0^m,0200 & D = 0^m,0107 \end{array}\right\}.$$

Por conseguinte as amplificações são:

$$\text{lente n.}^\circ\ 63 \ldots \frac{1,244 \times 0,0303}{0,0238 \times 0,0260} = 61; \ \text{lente n.}^\circ\ 102 \ldots \frac{1,244 \times 0,0243}{0,0150 \times 0,0200} = 101.$$

Este meio, em oculares de grande força, exige muito cuidado, por causa da influencia dos erros que se commettem na medição das pequenas distancias focaes das lentes oculares; mas no presente exemplo as amplificações, que achamos, coincidem quasi com os numeros marcados nos dois oculares.

Munhões

257. Se os munhões não têm egual grossura: chamando a e b as inclinações que dá a formula do n.° 135 nas duas posições do braço de rotação, as verdadeiras inclinações do eixo de rotação nellas (n.° 96, (a)) serão:

$$1.^a \text{ posição } \ I = a - \tfrac{1}{4}(a-b); \quad 2.^a \text{ posição } \ I' = b + \tfrac{1}{4}(a-b).$$

E, chamando α o angulo, que, em ambas as posições, faz com o horizonte a recta que une os ponctos de contacto dos munhões com as golas, e i a abertura do cone formado pelas arestas extremas, é

$$i = \tfrac{1}{2}(a-b), \ \alpha = a - i = b + i = \tfrac{1}{2}(a+b).$$

No circular de Coimbra pareceu-nos achar, por muitas leituras, $b = -1'',75$, quando $a = o$; o que, sendo assim, daria $\alpha = -i = -0'',88$.

Collocando o oculo em differentes inclinações, e procedendo nellas d'este modo, ver-se-ha se as curvas de contacto dos munhões com as golas são similhantes e similhantemente postas.

Leituras

258. Se as secções dos munhões não são circulares, ou se o centro do circulo não está na recta que une os centros d'ellas, ficará este centro differentemente elevado nas differentes inclinações do oculo; mas as leituras A e B differirão, em sentido contrario uma da outra, do que seriam se o centro se conservasse na mesma altura. O mesmo acontece quando o braço muda de inclinação, ou quando sobe ou desce em virtude das mudanças de dilatação das peças que o sustentam.

Sejam $A'+a'$, $B'-a'$, as leituras da observação d'um astro, que têm a quantidade a', uma de mais, outra de menos, devida a esta causa; e sejam $A+a$, $B-a$, as leituras do Nadir, affectas similhantemente da quantidade a. Será:

$$\pm z = A' - A - 180^\circ = B' - B - 180^\circ = \frac{A' - A + B' - B}{2} - 180^\circ;$$

ou
$$\pm z = \frac{(A'+a') - (A+a)}{2} + \frac{(B'-a') - (B-a)}{2} - 180^\circ;$$

e portanto a media é independente da differença $2(a'-a)$ dos resultados parciaes $A'+a'-(A+a)-180^\circ$, $B'-a'-(B-a)-180^\circ$.

Assim, no circular de Coimbra, no qual é 2,244 a razão do comprimento $0^m,727$ do braço para o $0^m,324$ do raio do circulo, $1''$ de elevação da extremidade occidental faz diminuir $2'',24$ as leituras do microscopio A, e augmentar $2'',24$ as do microscopio B, isto é, faz variar de $4'',5$ as differenças das leituras dos dois microscopios: o que não influe na media, como acabamos de ver.

E vê-se tambem que a *equação pessoal*, fazendo ajustar para cima ou para baixo o encruzamento dos fios em ambos os microscopios, e por conseguinte ler tanto de mais em um quanto de menos em outro, não influe na media das duas leituras.

Divisões do micrometro

259. Para avaliar as divisões do micrometro do reticulo collocado na extremidade ocular, basta, ajustada a collimação, fazer andar um espaço a este micrometro, por exemplo, uma volta inteira; depois mover o

oculo até repetir o ajuste da collimação; e finalmente lêr com os microscopios fixos o arco percorrido neste movimento. Esse arco, repartido pelo numero de divisões da circumferencia do micrometro, dará o valor de cada divisão.

No circular de Coimbra achamos assim, para cada divisão, o valor $0'',415$.

Tambem se pode conseguir o mesmo, medindo o espaço que percorre o fio sobre a marca em virtude do movimento do micrometro.

Diametro do fio

260. Para medir o diametro do fio horizontal, basta pôr em contacto as suas duas imagens, reflectida e directa, ficando uma vez a primeira ao norte da segunda, e outra vez a segunda ao norte da primeira. Como a distancia dos eixos das duas imagens reflectidas é dupla do movimento que se deu ao micrometro, e tambem dupla do diametro do fio, será este diametro egual áquelle movimento.

Tambem se pode mover o micrometro do ocular, de sorte que o fio toque successivamente com os seus dois bordos um dos bordos da marca; este movimento será o diametro do fio.

Foi assim que, applicando os dois processos ao fio horizontal que serviu no circular meridiano de Coimbra desde maio de 1856, achamos o meio $1'',60$.

Em quanto aos fios verticaes, se for necessario medir o seu diametro separadamente, podem tomar-se os contactos d'uma estrella circumpolar com os dois bordos do fio, e converter em arco de circulo maximo o tempo decorrido entre as duas observações.

Intervallos dos fios

261. Para conhecer os intervallos equatoriaes dos fios serve o processo indicado no n.º 157.

Se o intervallo equatorial i se determinou por n observações d'uma estrella, reduzidas suppondo a declinação d: suppondo a declinação $d+(\delta\, d)''$, o intervallo equatorial, será

$$i - \frac{i \operatorname{sen} 1'' \operatorname{tang} d \,\Sigma\, \delta\, d}{n}.$$

Se o intervallo actual das passagens deve ser I, suppondo d a declinação; suppondo $d+(\delta d)''$ a declinação, o intervallo actual será $I+I \operatorname{sen} 1'' \operatorname{tang} d\,\delta d$. Assim, para $I=9^m 26^s,32$ e $d=88°33'$, será o intervallo $I+0^s,108\,\delta d$.

262. Supponhamos conhecido assim o intervallo actual I de dois fios do reticulo.

Se ha um fio vertical movel, ligado a um parafuso micrometrico, munido d'um apparelho tal que se possam contar facilmente o numero de voltas e as fracções de volta do index, tomar-se-hão mais exactamente por meio d'elle as passagens das estrellas muito proximas do polo, que atravessam lentamente o campo do oculo, do modo seguinte:

Conhecido previamente o numero N de voltas e fracção de volta necessarias para que o fio movel toque successivamente dois fios consecutivos do reticulo, supponhamos que, depois de operar o contacto d'elle com um d'estes fios, a estrella, da qual se quer observar a passagem pelo fio seguinte, está entre ambos; e que, tocando o parafuso do micrometro, se opera no tempo t o contacto do fio movel com a estrella, dadas n voltas e fracção de volta do index: é claro que, chamando I o intervallo actual dos fios, o tempo em que a estrella ha de tocar o fio seguinte, é $t+\left(1-\frac{n}{N}\right)I$.

A lembrança d'este processo de contactos artificiaes é devida, segundo nos parece, ao sabio astronomo do observatorio de París o sr. Villarceau.

Divisões do nivel

263. Estas divisões avaliam-se como se disse no n.° 47. No nivel, que serve no circular meridiano de Coimbra, o seu valor é $1'',016$, como se disse no n.° 48.

Leituras do micrometro

264. Quando se move o micrometro do ocular no sentido das divisões, supponhamos que o fio vae realmente de norte para sul, como acontece no circular meridiano de Coimbra. Sejam N, O, as medias das leituras dos microscopios, relativas ao nadir e ao astro; n, o, as leituras dos movimentos que se deram ao micrometro; e δ a reducção $\frac{\operatorname{sen} 2\Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''}$ ao meridiano (n.os 131 e 132).

Temos então:

astro ao sul.... $z = z' + \delta = O - N - 180° + \delta + o - n;$

astro ao norte.. $\begin{cases} \text{p. sup. } z = z' - \delta = N - O - 180° + n - (\delta + o) \\ \text{p. inf. } z = z' + \delta = N - O - 180° + n + (\delta - o) \end{cases}$

Nas passagens inferiores, e nas do sul, as leituras o são negativas. Por isso, nas passagens ao norte, a correcção da distancia zenithal é a somma arithmetica do movimento do micrometro relativo á observação do astro com a reducção; somma que se tira nas passagens superiores, e se ajunta nas inferiores.

Equações pessoaes

265. As differenças da equação pessoal do tempo da passagem meridiana podem determinar-se com o proprio instrumento. Um observador notará as passagens d'uma estrella, pouco distante do equador, por alguns dos pares de fios correspondentes, 1.° e 7.°, 2.° e 6.°, 3.° e 5.°, 4.°; e outro observador notará a passagem pelos pares restantes. A differença das medias dos dois observadores, reduzidas ao fio do meio, será a differença das suas equações pessoaes.

Alguns astronomos têm procurado determinar esta differença pela observação simultanea da passagem por cada fio. Assim em Greenwich usou-se d'um ocular composto de dois ramos, que faziam entre si o angulo de 120°, e para os quaes era distribuida a luz na bifurcação por um prisma recto de base equilatera. Em cada um dos ramos tomava um observador a mesma passagem, e a differença dos tempos contados pelos dois observadores dava immediatamente a differença das equações pessoaes. Notou-se porem que, trocando-se os dois observadores, a differença variava.

A equação pessoal da distancia zenithal poderia tambem determinar-se pelo proprio instrumento. Um observador tomaria as distancias zenithaes d'uma circumpolar nos momentos das passagens por alguns dos fios, e outro tomal-as-ia nos das passagens pelos fios restantes. Reduzidas estas distancias zenithaes a meridianas (n.° 263), a differença entre as medias dos dois observadores seria a differença das suas equações pessoaes.

Nas observações em muitos fios convem que cada observador tome pares correspondentes, para evitar a influencia da inclinação do fio horizontal.

Se no instrumento ha dois fios horizontaes proximos para observar a posição do astro no meio do intervallo entre elles, convem que o observador tome previamente a distancia zenithal de objectos, que se possam considerar como fixos, collocando-os successivamente no fio inferior, no meio do intervallo e no fio superior, afim de determinar a differença entre as semi sommas das extremas e as tomadas no meio do intervallo; differença, que depois applicará a estas, como uma equação pessoal, nas observações referidas ao mesmo meio.

Tem sido muitas as tentativas para determinar as equações pessoaes, relativas e mais ainda as absolutas, e para assignar as suas causas; mas é certo que os resultados não têm correspondido ás esperanças que ellas faziam conceber. Pode consultar-se a esse respeito a nota 1.ª juncta ao tomo 2.º da traducção franceza da Astronomia de Brunnow.

II

Correcções instrumentaes

Nos n.^{os} **108** a **113** determinamos os erros de nivel, de collimação e d'azimuth do circular meridiano, e a correcção da passagem meridiana que elles exigem.

Ajunctaremos agora algumas cousas, que ou são convenientes na practica, ou mais rigorosas na theoria.

266. *Erro de nivel.* Para verificar que é parallela ao eixo de rotação a tangente ao meio da bolha, inverteremos o nivel, e com os seus parafusos verticaes traremos a bolha ao meio do intervallo que pela inversão tiver percorrido; o que collocará aquella tangente em um plano parallelo ao eixo: e depois, volvendo o eixo, veremos se a bolha fica immovel. Se não ficar immovel, procuraremos, com os parafusos horizontaes do nivel, leval-a a esse estado.

267. Nos nivellamentos divide-se em París a serie de pares de leituras do nivel em grupos de tres pares consecutivos; e combina-se cada par medio com a semisomma dos adjacentes, para evitar a influencia das variações graduaes da temperatura. Assim, sendo D e E, D′ e E′, D″ e E″, tres pares consecutivos, toma-se

$$L = \frac{\frac{D+D''}{2} - \frac{E+E''}{2} + D' - E'}{4}.$$

E se tivermos assim, por exemplo, tres grupos, será a inclinação

$$\frac{\frac{L+L''}{2} + L'}{2}.$$

268. *Erros de nivel e collimação.* Quando ha um fio cursor parallelo aos verticaes, podem avaliar-se os erros de nivel e de collimação pelas distancias entre as imagens directas dos fios e as imagens dos fios correspondentes reflectidas em um banho de mercurio. Este processo funda-se em que a distancia angular das duas imagens d'um fio é dupla da distancia angular d'uma d'ellas á vertical.

Se ha sómente um dos erros, de nivel ou de collimação, basta uma observação para o determinar por este processo. Mas se existem ambos, é necessario observar em duas posições invertidas do braço, para que n'uma se combinem aquelles erros por somma, e na outra por differença, em virtude da mudança de signal do de collimação.

Assim, se o eixo de rotação não está bem nivellado, a elevação L da extremidade occidental faz caminhar a imagem reflectida do fio do meio a quantidade 2L relativamente á directa para occidente; e o erro de collimação C para oriente a faz correr a quantidade $2C$ para occidente: de sorte que, por estas duas causas, a imagem reflectida correrá para occidente a quantidade $2L+2C$. Invertendo o eixo, será a collimação em sentido contrario, e a imagem reflectida correrá para occidente a quantidade $2L-2C$.

Chamando pois E, E′, as quantidades de que a imagem reflectida está a occidente da directa nas duas posições do braço, serão

$$L=\frac{E+E'}{4},\quad C=\frac{E-E'}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Mas, se os munhões não são eguaes, teremos $E=2I+2C$, $E'=2I'-2C$, e por tanto

$$C=\frac{E-E'}{4}-\frac{I-I'}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2);$$

sendo I, I′, dados pelas formulas da nota do n.º 96.

269. Suppondo correcto o erro de nivel, e chamando: i_1, i_7, os intervallos que separam os fios primeiro e ultimo do fio do meio; d_1, d_7, as distancias da imagem directa do primeiro fio á reflectida do ultimo, e da imagem reflectida do primeiro á directa do ultimo, ambas para a parte d'este; e C o desvio do fio do meio a respeito do vertical, para a parte do primeiro fio: teremos

$$2(i_1+C)=i_1+i_7+d_7,\quad 2(i_7-C)=i_1+i_7-d_1,$$

que dão

$$2C=i_1-i_7+\frac{d_1+d_7}{2}.$$

Comparando do mesmo modo os outros fios correspondentes, e sommando, acharemos

$$7\,\mathrm{C}=\frac{d_1+d_2+d_3+d_4+d_5+d_6+d_7}{2}+i_1-i_7+i_2-i_6+i_3-i_5.$$

270. *Erros de collimação e orientação.* Quando ha duas marcas meridianas, uma ao sul e outra ao norte, podem corrigir-se os erros de eixo optico e de azimuth sem inverter o braço de rotação, dirigindo o oculo para uma d'ellas e depois para a outra.

Pelo movimento de um dos parafusos, do reticulo ou do braço, dirige-se o eixo optico para o centro d'uma das marcas; depois, invertendo o oculo para ver a outra e notando o ponto d'ella onde se projecta o eixo optico, leva-se este á direcção do centro fazendo-lhe percorrer o intervallo dos dois pontos, pelo movimento egual dos parafusos do braço e do reticulo.

No caso de haver divisões na marca, ou um fio cursor vertical no reticulo, podem medir-se os erros de eixo optico e de azimuth. Sejam: d a distancia da projecção do eixo optico ao centro d'uma das marcas; e d' a distancia da projecção do mesmo eixo ao centro da outra marca, para a mesma parte, oriental no occidental, que a primeira. Teremos

$$\mathrm{C}=\tfrac{1}{2}(d+d'),\quad \mathrm{A}=\tfrac{1}{2}(d-d').$$

Correcção da passagem

271. No n.º 113 determinamos a correcção devida aos erros de nivel, de collimação e de azimuth, applicando o principio da superposição, isto é, desprezando as potencias superiores á primeira. Ainda que esta approximação seja sufficiente na practica, indicaremos como se pode resolver o problema rigorosamente.

Sejam Z, P, S, Q, (Fig. 64) o zenith, o polo, o astro e a extremidade occidental do eixo de rotação, projectados na esphera celeste.

Segundo as notações que adoptamos, são $\mathrm{ZQ}=90^\circ-\mathrm{L}$, $\mathrm{QZP}=90^\circ-\mathrm{A}$, $\mathrm{QS}=90^\circ+\mathrm{C}$. Chamemos δt o angulo horario do astro, m o angulo QPZ, e a o arco QP.

O triangulo QPZ dará a e m expressos em L, A, D; depois o triangulo QPS dará $m+\delta t$ expresso em a, Δ, C, isto é, em L, A, D, Δ, C; e por conseguinte δt expresso nas mesmas quantidades.

Com effeito, estes triangulos QSP, QPZ, dão as quatro equações:

$$-\text{sen}\, C = \cos(m+\delta t)\ \text{sen}\,\Delta\ \text{sen}\, a + \cos\Delta \cos a$$ (QSP)

$$= (\cos m \cos\delta t\ \text{sen}\, a - \text{sen}\, m\ \text{sen}\,\delta t\ \text{sen}\, a)\ \text{sen}\,\Delta + \cos\Delta\cos a,$$

$$\cos a = \text{sen}\, A \cos L\ \text{sen}\, D + \text{sen}\, L \cos D,$$ (QPZ)

$$\cos m\ \text{sen}\, a = \frac{\text{sen}\, L - \cos D \cos a}{\text{sen}\, D},\ \text{sen}\, m\ \text{sen}\, a = \cos A \cos L;$$ (QPZ)

a primeira das quaes, em virtude das duas ultimas, e depois em virtude da segunda, dá

$$\text{sen}\, C = \left\{\begin{array}{l} -\text{sen}\, L\,(\text{sen}\, D\ \text{sen}\,\Delta \cos\delta t + \cos D\cos\Delta) \\ -\text{sen}\, A \cos L\,(\text{sen}\, D\cos\Delta - \cos D\ \text{sen}\,\Delta\cos\delta t) \\ +\cos A\cos L\ \text{sen}\,\Delta\ \text{sen}\,\delta t \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Esta equação determina o angulo horario $\frac{\delta t}{15}$, que no n.º **113** se chamou $\Theta - t - \tau$.

272. Se desprezarmos os quadrados de sen A, sen C, sen L, sen A, a equação (3) reduz-se a

$$C = -L\cos(D-\Delta) + \delta t\ \text{sen}\,\Delta - A\ \text{sen}\,(D-\Delta),$$

ou $$\frac{\delta t}{15} = \frac{C}{15\ \text{sen}\,\Delta} + \frac{L\cos(D-\Delta)}{15\ \text{sen}\,\Delta} + \frac{A\ \text{sen}\,(D-\Delta)}{15\ \text{sen}\,\Delta},$$

que é identica como a formula (5) do n.º **113**.

A esta formula de Mayer pode dar-se a forma que dá Bessel,

$$\frac{\delta t}{15} = a + b \cot \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta \ldots . (4);$$

sendo $a = \frac{L}{15} \operatorname{sen} D - \frac{A}{15} \cos D,\ b = \frac{L}{15} \cos D + \frac{A}{15} \operatorname{sen} D,\ c = \frac{C}{15}$:

formula mais commoda que a de Mayer, quando se fazem muitas observações durante as quaes não variam os erros de nivel, de collimação e d'azimuth.

273. Suppondo observadas tres passagens, e conhecido o retardamento diario r do relogio: se fizermos

$$\theta - t = h,\ \theta' - t' - \frac{r\,(t' - t)}{24^h - r} = h',\ \theta'' - t'' - \frac{r\,(t'' - t)}{24^h - r} = h'',$$

as tres equações

$$h = \tau + a + b \cot \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta,\ h' = \tau + a + b \cot \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta',$$

$$h'' = \tau + a + b \cot \Delta'' + \operatorname{cosec} \Delta'',$$

darão, para determinar b e c,

$$h' - h = \frac{b \operatorname{sen}(\Delta - \Delta')}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \Delta'} + \frac{2 c \operatorname{sen}\left(\frac{\Delta - \Delta'}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta + \Delta'}{2}\right)}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \Delta'},$$

$$h'' - h' = \frac{b \operatorname{sen}(\Delta' - \Delta'')}{\operatorname{sen} \Delta' \operatorname{sen} \Delta''} + \frac{2 c \operatorname{sen} \frac{\Delta' - \Delta''}{2} \cos \frac{\Delta' + \Delta''}{2}}{\operatorname{sen} \Delta' \operatorname{sen} \Delta''};$$

depois, tendo antes conhecido um dos erros A ou L, as equações

$$b=\frac{L}{15}\cos D+\frac{A}{15}\operatorname{sen} D,\quad a=\frac{L}{15}\operatorname{sen} D-\frac{A}{15}\cos D,$$

darão o outro e a; e finalmente qualquer tres primeiras equações fará conhecer o estado do relogio τ.

Correcção das distancias zenithaes

274. Estas distancias corrigem-se como se disse nos n.os 131 e 132, nos quaes se chamou P o que chamamos aqui δt.

Se a observação se faz em um dos fios lateraes, deve comprehender-se em C a distancia d'esse fio ao do meio, para ter δt.

INSTRUMENTO DE PASSAGENS PELO PRIMEIRO VERTICAL

275. Sejam (Fig. 65) Z, P, S, Q, pontos analogos aos da figura 64. Segundo a notação que adoptamos, são

$$QZ = 90° + i,\ QZP = \nu,\ QS = 90° - \xi.$$

Chamamos t o angulo horario do astro, e a o arco PQ.

Sem repetir os calculos, que se fizeram para o circular meridiano, basta mudar nos resultados L em $-i$, A em $90° - \nu$, C em $-\xi$, e δt em t. A formula (3) tornar-se-ha em:

$$\operatorname{sen}\xi = \left\{\begin{array}{l} -\operatorname{sen} i\,(\operatorname{sen} D \operatorname{sen}\Delta \cos t + \cos D \cos\Delta) \\ +\cos\nu \cos i\,(\operatorname{sen} D \cos\Delta - \cos D \operatorname{sen}\Delta \cos t) \\ -\operatorname{sen}\nu \cos i \operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen} t \end{array}\right\} \ldots\ldots\ (5),$$

que se deverá combinar com a (1) do n.° 142

$$\operatorname{tang} D \cot\Delta = \cos P \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6),$$

ou, pondo $P = t + \delta t$,

$$\operatorname{tang} D \cot\Delta = \cos t \cos\delta t - \operatorname{sen} t \operatorname{sen}\delta t \ldots\ldots\ (6)'.$$

Então as equações (5), (6), (6′), dariam D, P δt, expressos em Δ, t, i, ξ, ν; ou Δ, P, δt, expressos em D, t, i, ξ, ν.

Tal

276 … s cos t, desprezando os quad… t, virá a formula

… cot Δ … D sen t);

e se pu… a equação (6′), desprezand… pressão de δt, dará

… :

como t…

27…

tang Δ… 2 tang Δ sen² $\frac{1}{2}$ t.

Na… possam desprezar os quadra… $=$ sen 2Δ sen² $\frac{1}{2}t$, e por …

… i . . . . (7).

27… pequena, ainda podemos s… ha de (5); o que dará

sen (I… Δ) } . . . . (8).

$\tan t = \tan\Delta \cos t$

$\tan(D-\delta K) = \tan\Delta\cos t = \frac{\tan D - \delta K}{1+\tan D.\delta K}$

$\tan D - \delta K = \tan\Delta\cos t + \tan\Delta \tan D \cos t.\delta K$

$= \tan\Delta\,\delta t$

$= \tan\Delta(\tan D\cot\Delta + \sin t.\delta t) = \tan D + \tan\Delta\sin t\,dt$

$\tan D - \delta K = \tan D + \tan\Delta\sin t.\delta t + \tan^2 D.\delta K$

$\delta K(1+\tan^2 D) = -\tan\Delta\sin t.\delta t$

$\delta K = -\tan\Delta\sin t.\delta t\cos^2 D$

$\delta K = \frac{\xi\cos D}{\cos\Delta} + v\cos D\tan\Delta\sin t + i$

$= \xi\frac{\cos D}{\cos\Delta} + v.\sin D\tan t + i$

INSTRUM[...] O VERTICAL

275. [...] os da figura 64. Segundo a n[...]

Chamamos *t*[...]

Sem rep[...]lar meridiano, basta mudar [...] $-\xi$, e δt em t. A formula ([...]

sen $\xi =$ { [...] .... (5),

que se dever[...]

ou, pondo P[...]

tang [...] (6)'.

Então as [...]ssos em Δ, t, i, ξ, ν; ou Δ[...]

Tal é a solução theorica rigorosa do problema.

276. Se entre as equações (5) e (6′) eliminarmos cos t, desprezando os quadrados e productos de sen i, sen ξ, sen ν, sen δt, virá a formula

$$\delta t = -\left(\frac{\xi}{\cos D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} t} + \frac{\nu}{\cos D} + \frac{i \cot \Delta}{\cos^2 D \operatorname{sen} t}\right);$$

e se puzermos $\operatorname{tang} k = \operatorname{tang} \Delta \cos t$, $D = k + \delta k$, a equação (6′), desprezando os quadrados de δk, e substituindo esta expressão de δt, dará

$$\delta k = \xi \frac{\cos D}{\cos \Delta} + \nu \operatorname{sen} D \operatorname{tang} t + i:$$

como tinhamos achado nos n.[os] 150 e 149.

277. A equação $\operatorname{tang} k = \operatorname{tang} \Delta \cos t$ dá

$$\operatorname{tang} \Delta - \operatorname{tang} k = \operatorname{tang} (\Delta - k)\ (1 + \operatorname{tang}\Delta \operatorname{tang} k) = 2 \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} t.$$

Nas observações tão proximas do zenith, que se possam desprezar os quadrados de tang $(\Delta - k)$, esta equação dará $\Delta - k = \operatorname{sen} 2\Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t$, e por conseguinte

$$D = \Delta - \frac{\operatorname{sen} 2\Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t}{\operatorname{sen} 1''} + \xi + \nu \operatorname{sen} D \operatorname{tang} t + i \ldots . (7).$$

278. No caso de não ser tang $(\Delta - D)$ muito pequena, ainda podemos substituir $\cos t$ por $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t$ na segunda linha de (5); o que dará

$$\operatorname{sen} (D - \Delta) = \left\{\begin{array}{l} -2 \cos D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t + \dfrac{\operatorname{sen} \xi}{\cos \nu \cos i} \\ + \dfrac{\operatorname{tang} i}{\cos \nu} (\operatorname{sen} D \operatorname{sen} \Delta \cos t + \cos D \cos \Delta) \\ + \operatorname{tang} \nu \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} t \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (8).$$

Considerando: que, em virtude do triangulo ZPS, o factor de $\frac{\tang i}{\cos \nu}$ é $\cos z$; que o mesmo triangulo dá $\operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} z \operatorname{sen} A$; e que a differença entre $\operatorname{sen} A \tang \nu$ e $\tang \nu$ é da terceira ordem, por ser da primeira o seno da differença entre o azimuth A e 90°: a formula (8) pode ser substituida, sem erro attendivel, pelo systema:

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen} t,$$

$$\operatorname{sen}(D-\Delta) = \left\{ \begin{array}{l} -2\cos D \operatorname{sen}\Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t + \dfrac{\operatorname{sen}\xi}{\cos \nu \cos i} \\ + \tang \nu \operatorname{sen} z + \dfrac{\tang i \cos z}{\cos \nu} \end{array} \right\} \ldots\ldots (9);$$

a segunda das quaes, no caso de serem $D-\Delta$, e por conseguinte z, muito pequenos, concorda approximadamente com (7).

Se a observação não for feita no fio do meio, deve substituir-se $\xi + x$ em logar de ξ, tendo x a significação que se lhe deu no n.° **143**.

279. No uso da formula (9) ha a vantagem de que o erro de nivel i, cuja influencia não se anniquila pelas inversões como a de ξ, nem pela combinação da passagem oriental com a occidental como a de ν, é attenuado pelo factor $\cos z$; vantagem de importancia, quando a estrella não está muito proxima do zenith.

280. Nos instrumentos de passagens de pequenas dimensões usam os constructores allemães dos oculos angulares *(lunettes brisées)*, compostos de dois ramos, um ocular, outro objectivo, que se cortam perpendicularmente, e em cuja intersecção ha um prisma ou um espelho de tal sorte collocado, que os raios luminosos vindos do objecto na direcção do ramo objectivo se reflectem e tomam a direcção do ramo ocular, pelo qual chegam ao observador.

Por este artificio, collocado o ramo ocular na direcção do eixo de rotação, o observador segue o movimento do astro, conservando-se commodamente na mesma posição.

Se o reflector é um prisma recto, que tem por base um triangulo rectangulo isoscoles, colloca-se uma das faces eguaes perpendicularmente ao eixo do ramo objectivo, formando a maior um angulo de 45° com os eixos dos dois ramos. Se é um espelho plano, colloca-se perpendicularmente ao plano dos eixos dos dois ramos, e de modo que a sua projecção sobre este plano faça angulos de 45° com os mesmos eixos.

Illumina-se o reticulo por uma luz collocada na extremidade opposta do eixo de rotação, passando os raios luminosos directamente a través do prisma ou d'uma porção transparente do espelho.

Estes oculos têm os inconvenientes de se perder luz na reflexão, de ser o eixo optico exaggeradamente alterado pelas deslocações e deformações que pode soffrer o reflector, de tornar a falta de symmetria do oculo mais difficil o calculo da influencia da flexão; e tambem de offerecer difficuldade a construcção de bons prismas, sobre tudo para instrumentos grandes: o que restringe o seu uso ás pequenas dimensões, como são as do instrumento de passagens transportavel de Repsold que possuem os observatorios astronomicos de Lisboa e de Coimbra.

Mas é grande a vantagem de se poder sempre nivelar, nas distancias zenithaes respectivas, e conservar suspenso o nivel nas inversões; porque não se elimina por estas, nem pela combinação das duas passagens, o erro i, como se eliminam ξ e ν.

Correcções do Equatorial

281. Sejam (fig. 66): P o polo do mundo, π o polo do instrumento; Q_1 a projecção do eixo do circulo de declinação no céu quando está no meridiano, Q_0 quando está no plano $P\pi$, e Q quando está o astro S no plano do circulo de declinação. Ponhamos $PS=\Delta$, $\pi S=\Delta'$,
b $PQ=90^\circ-\cancel{D}$, $QPQ_0=T$, $Q\pi Q_0=t-t_0$, $SP\pi=\tau$, $Q_0PZ=h$; e $P\pi=a$, $Q\pi=90^\circ-\varepsilon$, $SQ=90^\circ+c$; isto é, sejam h, a, ε, c, os erros d'orientação e de inclinação do eixo optico, de inclinação do circulo de declinação, e de collimação.

O triangulo $QP\pi$ dá:

/b
$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sen}\cancel{D}=\operatorname{sen}\varepsilon\cos a-\cos\varepsilon\operatorname{sen}a\cos(t-t_0),\\
&\cos T=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon-\operatorname{sen}\cancel{D}\cos a}{\cos\cancel{D}\operatorname{sen}a}=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}a+\cos\varepsilon\cos a\cos(t-t_0)}{\cos\cancel{D}},\\
&\cos\cancel{D}\operatorname{sen}T=\operatorname{sen}(t-t_0)\cos\varepsilon.
\end{aligned}\right\}\ldots\ (a)$$

E os triangulos SPQ, $SP\pi$, dão:

/b
$$\left.\begin{aligned}
-\operatorname{sen}c&=\operatorname{sen}\cancel{D}\cos\Delta+\cos\cancel{D}\operatorname{sen}\Delta\cos(\tau-T),\\
\cos\Delta'&=\cos\Delta\cos a+\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen}a\cos\tau;
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (b)$$

a primeira das quaes, em virtude das (a), se reduz a:

$$-\operatorname{sen}c=\left\{\begin{array}{l}
\cos\Delta\{\operatorname{sen}\varepsilon\cos a-\cos\varepsilon\operatorname{sen}a\cos(t-t_0)\}\\
+\operatorname{sen}\Delta\left\{\begin{array}{l}\cos\tau\,(\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}a+\cos\varepsilon\cos a\cos(t-t_0))\\
\quad+\operatorname{sen}\tau\cos\varepsilon\operatorname{sen}(t-t_0)\end{array}\right\}
\end{array}\right\}.$$

Portanto, se forem conhecidos os erros instrumentaes, e se das leituras se deduzirem Δ' e $t - t_0$, as equações (b) darão Δ e τ, ou a distancia polar Δ e o angulo horario $\tau + h$ do astro.

282. Simplifiquemos esta determinação, attendendo á pequenez de a, ε, c; e deduzamos das leituras as quantidades referidas.

A ultima equação, desprezando os quadrados e productos de sen a, sen ε, sen c, reduz-se a

$$-c = \cos\Delta\left(\varepsilon - a\cos(t - t_0)\right) + \operatorname{sen}\Delta\cos\left(\tau - (t - t_0)\right):$$

o que dá

$$\tau = 90° + t - t_0 + \operatorname{cotang}\Delta\left(\varepsilon - a\cos(t - t_0)\right) + c\operatorname{cosec}\Delta;$$

ou

$$\theta = 90° + t - t_0 + h + \operatorname{cotang}\Delta\left(\varepsilon - a\cos(t - t_0)\right) + c\operatorname{cosec}\Delta \ldots\ldots \quad (1),$$

chamando $\theta = \tau + h$ o angulo horario SPZ.

283. O triangulo πPQ_1 dá

$$-\cos Q_0\pi Q_1\cos a = \operatorname{sen} a \operatorname{tang}\varepsilon - \operatorname{sen} Q_0\pi Q_1\cot h;$$

por conseguinte $\qquad Q_0\pi Q_1 = h,$

desprezando os quadrados e productos de sen a e sen ε.

O triangulo $S_0\pi Q_0$ dá

$$-\operatorname{sen} c = \cos S_0\pi Q_0 \operatorname{sen}\Delta'_0\cos\varepsilon + \cos\Delta'_0\operatorname{sen}\varepsilon;$$

e por conseguinte $$S_0 \pi Q_0 = 90° + \varepsilon \operatorname{cotang} \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta,$$

ou $$S_0 \pi Q_0 = 90° + \varepsilon \operatorname{cotang} \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta',$$

desprezando os quadrados e productos de sen c, sen ε, sen $(\Delta - \Delta'_0)$, sen $(\Delta - \Delta')$.

Chamando pois $\theta' - h$ o angulo $S \pi Q_0$, será

$$\theta' - h = t - t_0 + 90° + \varepsilon \operatorname{cotang} \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta$$

$$= \tau' + \varepsilon \operatorname{cotang} \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta;$$

e a equação (1) tomará a fórma do systema

$$\left.\begin{aligned} \theta' &= t - t_0 + h + 90° + \varepsilon \operatorname{cotang} \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta' \\ &= \tau' + \varepsilon \cot \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta', \\ \theta &= \theta' - a \operatorname{cotang} \Delta' \operatorname{sen} (\theta' - h) \\ &= \tau' - a \cot \Delta' \operatorname{sen} (\tau' - h) + \varepsilon \cot \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1').$$

Desprezando as quantidades da mesma ordem, e attendendo a (1), a segunda das equações (b) dá

$$\Delta = \Delta' - a \operatorname{sen} (t - t_0) = \Delta' + a \cos (\theta' - h) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

284. Se na posição inicial do instrumento se suppõem a extremidade Q_0 do eixo do circulo de declinação para a parte opposta, isto é, se este eixo, que temos supposto a oriente do circulo quando se observa o objecto S, está a occidente, a leitura inicial é $180° + t_0$; e as distancias da extremidade do eixo, que é opposta a Q_0, e occupa o logar d'esta, ao ponto π e ao oculo são $90° + \varepsilon$ e $90° - c$: portanto, nesta inversão, devemos pôr

$t - t_0 + 180°$ em logar de $t - t_0$, e mudar os signaes de ε e c; substituindo, em vez das formulas $(1')$, as seguintes:

$$\left.\begin{aligned}\theta' &= t_1 - t_0 + h - 90° - \varepsilon \operatorname{cotang} \Delta' - c \operatorname{cosec} \Delta' \\ &= \tau'_1 - \varepsilon \cot \Delta' - c \operatorname{cosec} \Delta', \\ \theta &= \theta' - a \operatorname{cotang} \Delta' \operatorname{sen} (\theta' - h) \\ &= \tau'_{,} - a \cot \Delta' \operatorname{sen} (\tau' - h) - \varepsilon \cot \Delta' - c \operatorname{cosec} \Delta' \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (1')_1$$

Em quanto á formula (2): como neste caso a leitura da distancia polar é o complemento para 360° da que era na primeira posição, deverá substituir-se o complemento d'ella em vez d'essa distancia; o que dará:

$$\Delta = 360° - \Delta'_1 + a \cos (\theta' - h) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)_{,}.$$

285. Se chamarmos $\delta\theta$ e $\delta\Delta$ os erros d'index das leituras dos circulos horario e de declinação, deverão nas formulas precedentes substituir-se $\tau + \delta\theta$ em logar de τ e $(\Delta') + \delta\Delta$ em logar de (Δ').

286. As formulas (2) e $(2)_{,}$ dão

$$\delta\Delta = 180° - \frac{\Delta' + \Delta'_1}{2};$$

e, no meridiano,

$$a = \Delta - 180° - \frac{\Delta' - \Delta'_1}{2}.$$

Quando o eixo do circulo de declinação se colloca na posição horizontal, o circulo passa pelo zenith; e por isso nas duas posições horizontaes do eixo a leste e oeste póde o oculo, supposto c nullo, dirigir-se para aquelle ponto.

Nestas posições são os valores de $t - t_0 + 90°$ e $t_{,} - t_0 - 90$

$+\delta h$ $-\delta h$

$\frac{t - t_1}{2} + 180 - 2\delta h$

pequenos angulos $\pm\delta P$, e θ nullo: portanto, dirigindo nellas o oculo para o zenith, as equações $(1')$ e $(1')_1$ darão

$$0 = t - t_1 + 180° + 2\varepsilon \cot D,$$

ou

$$-\varepsilon = \left(90° - \frac{t_{\prime} - t}{2}\right) \operatorname{tang} D;$$

e

$$\delta P = -\varepsilon \cot D = 90° - \frac{t_{\prime} - t}{2}.$$

Em quanto a h, suppondo o eixo do circulo em Q_1, ou $t - t_0 = -h$, a equação (2) daria

$$\operatorname{sen} h = \frac{\Delta' - \Delta}{a}.$$

O que tudo é conforme com o que se disse nos n.os 87, 90 e 91, onde se chamaram respectivamente $-a$, i, $-\varepsilon$, $-\eta$, o que chamamos aqui a, $\delta\Delta$, ε, $ah \operatorname{sen} 1''$. Os movimentos, no sentido do meridiano e no perpendicular a elle, que se deveriam dar ao polo do instrumento para o rectificar, seriam a e $\gamma = ah \operatorname{sen} 1''$.

287. Mas, suppondo que existem simultaneamente todos os pequenos erros ε, c, a, h, $\delta\Delta$, $\delta\theta$, e querendo determinal-os, podemos recorrer ás observações de duas estrellas conhecidas feitas com o eixo do circulo de declinação nas duas posições; o que dará as equações:

$$\begin{cases} \theta = \tau + \delta\theta - a \cot \Delta \operatorname{sen}(\theta - h) + \varepsilon \cot \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta \\ \theta_{\prime} = \tau_{\prime} + \delta\theta - a \cot \Delta \operatorname{sen}(\theta_{\prime} - h) - \varepsilon \cot \Delta - c \operatorname{cosec} \Delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta' = \tau' + \delta\theta - a \cot \Delta' \operatorname{sen}(\theta' - h) + \varepsilon \cot \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta' \\ \theta'_1 = \tau'_1 + \delta\theta - a \cot \Delta' \operatorname{sen}(\theta'_1 - h) - \varepsilon \cot \Delta' - c \operatorname{cosec} \Delta' \end{cases}$$

$$\Delta = (\Delta) + \delta\Delta + a \cos(\theta - h), \qquad \Delta = 360° - (\Delta_1) - \delta\Delta + a \cos(\theta_{\prime} - h),$$

$$\Delta' = (\Delta') + \delta\Delta + a \cos(\theta' - h), \qquad \Delta' = 360° - (\Delta_1') - \delta\Delta + a \cos(\theta_1' - h).$$

Se as inversões do instrumento se fizerem com tal promptidão que sejam muito pequenos da primeira ordem os senos das semidifferenças entre os angulos horarios correspondentes, sen $\frac{1}{2}(\theta-\theta_1)$, sen $\frac{1}{2}(\theta-\theta'_1)$: a differença entre as duas equações do terceiro systema, ou entre as duas do quarto, dará $'\delta\Delta$; as differenças entre as duas equações do primeiro systema e entre as duas do segundo darão duas resultantes em ε e c, que farão conhecer estes dois erros; a differença entre as duas primeiras equações do primeiro e segundo systema ou entre as duas segundas dos mesmos systemas, e a differença entre as duas primeiras equações do terceiro e quarto systema ou entre as duas segundas dos mesmos systemas, darão duas resultantes que farão conhecer a e h, suppondo já conhecidos ε e c; e finalmente, suppondo já conhecidos ε, c e a, qualquer das equações dos dois primeiros systemas dará $\delta\theta$.

288. Mas, por mais bem acabado que seja o equatorial, a direcção obliqua do seu eixo principal, o seu grande comprimento, e as dimensões relativamente inferiores que por isso tem o circulo de declinação, são causa da sua menor estabilidade, da influencia mais sensivel da inflexão, e da imperfeição das suas leituras absolutas.

D'ahi vem que o principal uso d'este instrumento é, como dissemos no n.° 83, a determinação das differenças de ascensão recta e declinação entre os astros desconhecidos e os conhecidos muito proximos d'elles.

Para isso o reticulo, de que fallamos naquelle numero, costuma inscrever-se em um annel que, movendo-se no seu plano em volta do centro d'uma chapa circular graduada, mostra, por um index que gyra com elle, a quantidade angular d'esse movimento.

Supponhamos (Fig. 67) que, disposto o fio E_1O_1 perpendicularmente ao circulo da declinação, e movendo o oculo de modo que a estrella S se projecte no encruzamento dos fios fixos, se faz gyrar o reticulo em volta do centro S, até que o fio $S\pi$ tome a direcção SS′ que passa pelo outro astro S′, e por conseguinte o fio E_1O_1 a direcção perpendicular; e que se faz mover o fio movel parallelo a este, até passar por S′.

Chamando d o espaço SS′ percorrido pelo fio movel perpendicular a AB, que é a *distancia*, e p' o movimento angular $\pi SS'$ do reticulo, que se chama *angulo de posição*, as differenças de declinação e de ascensão recta, $S'Q_1$ e SQ_1 sen Δ, serão $\Delta-\Delta'=d\cos p'$, $\theta-\theta'=d\,\mathrm{sen}\,p'\,\mathrm{sen}\,\Delta$.

Porem, como o polo do instrumento π não coincide com o polo do mundo P, os dois fios na sua posição primitiva deviam ter as direcções EO e SP; por conseguinte é necessario substituir nas formulas precedentes o angulo $p=p'+PS\pi$ em logar de p'. E como o angulo $PS\pi$ é dado immediatamente pela formula $\operatorname{sen} PS\pi = \operatorname{sen}(\tau - h)\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\Delta}$, ou $PS\pi = a\frac{\operatorname{sen}(\tau - h)}{\operatorname{sen}\Delta}$, que se tira do triangulo πSP, teremos mais exactamente o systema das tres equações:

$$p = p' + a \operatorname{sen}(\tau - h) \operatorname{cosec} \Delta,$$

$$\Delta - \Delta' = d \cos p,\ \theta - \theta' = d \operatorname{sen} p \operatorname{sen} \Delta.$$

Sem este reticulo, que é bom no equatorial do Observatorio de Coimbra, aquelle instrumento seria muito imperfeito.

289. *Micrometro de dupla imagem.* Para medir os diametros dos planetas e as pequenas distancias serve tambem o micrometro de dupla imagem, devido ao illustre astronomo real de Greenwich o sr. Airy.

Consiste em um ocular de quatro lentes, a segunda das quaes, a contar do lado objectivo, é partida em duas metades, uma fixa, e outra movel perpendicularmente ao eixo por meio d'um parafuso micrometrico; sendo tambem movel todo o ocular em volta do eixo, e indicada em um circulo concentrico a quantidade d'este movimento.

É facil conceber que por este ocular se pode medir a distancia de dois astros muito proximos, visto um por uma das metades da lente e outro pela outra; e o angulo de posição.

Para ter noções claras e exactas: da sua construcção; dos seus inconvenientes e vantagens; das modificações por que tem passado para satisfazer, quanto é possivel, ás condições d'achromatismo e de nitidez e perfeição das imagens; das verificações que exige o seu uso; e do modo de observar com elle as distancias, segundo a sua grandeza: podem consultar-se: o vol. das Observações de Greenwich de 1840, pag. LXV; o vol. XV das Memorias da sociedade astronomica de Londres, pag. 199; os volumes das noticias mensaes da mesma sociedade, X, pag. 160, e XXVI, paginas 193 e 305.

XV

Instrumentos azimuthaes

290. Combinando duas a duas a distancia zenithal, o azimuth, e o angulo horario, resultam os tres systemas differentes de coordenadas, *distancia zenithal* e *azimuth, distancia zenithal meridiana* e *ascensão recta, azimuth* e *angulo horario.*

Dos dois primeiros, ha mais tempo usados, já tractámos. O ultimo, proposto por Bessel, para observações feitas no azimuth constante de 90°, está em uso, como dissemos no capitulo precedente. M. Babinet propoz extendel-o a todos os azimuths.

291. Os triangulos ZPE, ZPE′, entre o zenith Z, o polo P, e as posições E, E′, da estrella no seu parallelo, dão

$$\left\{\begin{array}{l}\cot\Delta\,\mathrm{sen}\,D=\cot A\,\mathrm{sen}\,P+\cos D\cos P,\\[2ex] \cot\Delta\,\mathrm{sen}\,D=\cot A'\,\mathrm{sen}\,P'+\cos D\cos P',\end{array}\right.$$

logo $$\cos D=\frac{\cot A\,\mathrm{sen}\,P-\cot A'\,\mathrm{sen}\,P'}{\cos P'-\cos P}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1).$$

Para obter D e Δ teremos pois os dois systemas

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{tang}\,\varphi=\dfrac{\mathrm{sen}\,P\,\mathrm{tang}\,A'}{\mathrm{sen}\,P'},\ \cos D=\dfrac{\mathrm{sen}\,P\,\mathrm{sen}\,(A-\varphi)}{2\,\mathrm{sen}A\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}(P'+P)\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}(P'-P)};\\[3ex] \mathrm{tg}\,\psi=\mathrm{tang}\,A\cos D,\ \mathrm{tang}\,\Delta=\dfrac{\mathrm{tang}\,D\,\mathrm{sen}\,\psi}{\mathrm{sen}\,(P+\psi)}\end{array}\right\}(2)$$

292. Se fôr maximo o angulo A, isto é, se a observação corresponder ao instante em que o movimento do astro é vertical, o triangulo ZPE será rectangulo em E. Teremos pois 'neste caso as equações

$$\operatorname{sen}\Delta = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} D,\ \cot\Delta \operatorname{sen} D = \cot A' \operatorname{sen} P' + \cos D \cos P',$$

que dão

$$\cos D = \frac{\cot A' \cos P' \pm \dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}(A+A')\operatorname{sen}(A-A')}}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} A'}}{\operatorname{sen} P'} \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

ou os systemas

$$\left.\begin{array}{l} \cot\varphi = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}(A+A')\operatorname{sen}(A-A')}}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} A' \cos P'},\ \cos D = \dfrac{\cot P' \operatorname{sen}(\varphi \pm A')}{\operatorname{sen} A' \operatorname{sen}\varphi}, \\ \operatorname{sen}\Delta = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} D \end{array}\right\} \ldots (4).$$

E se, além d'isso, A' corresponder ao instante em que o angulo horario é de seis horas sideraes, teremos $P'=90°$. Substituindo pois na fórma (3), acharemos então

$$\left.\begin{array}{l} \cos D = \dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}(A+A')\operatorname{sen}(A-A')}}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} A'}, \\ \operatorname{sen}\Delta = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} D \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

293. Se A corresponder ao primeiro vertical, teremos $A=90°$.

Substituindo em (1), serão

$$\left.\begin{aligned}&\cos D = \frac{\cot A' \operatorname{sen} P'}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(P+P) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(P'-P)},\\ &\cot \Delta = \cot D \cos P\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

E se, além d'isso, A′ corresponder ao instante em que o angulo horario é de seis horas sideraes, teremos $P' = 90°$. A equação (1) e o triangulo rectangulo ZPE' darão pois

$$\left.\begin{aligned}&\cos D = \frac{\cot A'}{\cos P'},\ \operatorname{tang} \Delta = \operatorname{tang} A' \operatorname{sen} D,\\ \text{ou}\quad &\cos D = \frac{\cot A'}{\cos P'},\ \cos \Delta = \frac{\cos A' \cos P}{\sqrt{\operatorname{sen}(A'+P)\operatorname{sen}(A'-P)}}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (7).$$

Apreciação dos resultados

294. *Probabilidade.* Seja $\varphi(E)$ a probabilidade do que uma observação está inquinada do erro E, ou a frequencia relativa d'esse erro.

Ainda que os erros fortuitos não se sujeitam a leis rigorosas, comtudo admittem-se a respeito d'elles algumas proposições que podem servir para determinar a probabilidade da sua existencia.

1.ª Os erros não passam de certos limites superiores.

2.ª Os erros eguaes para mais ou para menos são egualmente provaveis.

3.ª Os erros são mais frequentes e variam menos á medida que são menores; de sorte que o maior valor de $\varphi(E)$ corresponde a E nullo.

295. D'estas proposições, e das regras de probabilidades que na algebra se ensinaram, têm os geometras derivado as expressões seguintes:

$$\varphi(\mathrm{E})=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\mathrm{E}^2}, \quad \mathrm{P}_a=\int_0^a \frac{2he^{-h^2\mathrm{E}^2}}{\sqrt{\pi}}d\mathrm{E}=\int_0^{ah}\frac{2e^{-t^2}dt}{\sqrt{\pi}};$$

chamando P_a a probabilidade de que o valor absoluto d'um erro não exceda a.

296. Se dois erros fôrem egualmente provaveis, será $ah=a'h'$; por conseguinte os valores de h são inversamente proporcionaes a esses erros, ou directamente proporcionaes á *precisão;* e a constante h pode tomar-se como a medida da precisão d'uma observação.

Considerando porem n observações, acha-se que a precisão da media d'ellas é $h\sqrt{n}$.

297. *Erros.* Chama-se *erro provavel* ε o erro de probabilidade $\frac{1}{2}$, ou o que está no meio da serie de todos os erros; isto é, o que satisfaz á equação

$$\frac{1}{2}=\int_0^{\varepsilon h}\frac{2e^{-t^2}dt}{\sqrt{\pi}}.$$

A taboa conhecida dos valores do integral do segundo membro (Ritter, *moindres carrés*) mostra que satisfaz a esta equação o valor

$$\varepsilon h = 0,47694.$$

Chama-se *erro medio para recear* ε_2, ou simplesmente *erro medio*, aquelle cujo quadrado é a somma dos quadros dos erros verdadeiros dividida pelo numero das observações.

Imprimindo a condição do maximo na probabilidade composta das probabilidades de todos os erros, acha-se

$$\varepsilon_2 h \sqrt{2} = 1, \text{ ou } \varepsilon = 0,67449\, \varepsilon_2.$$

Chama-se *erro apparente* ε_1 a differença entre cada uma das observações e a media de todas. D'onde resulta $\Sigma \varepsilon_1 = 0$.

298. *Pesos.* Se duas observações têm desegual precisão, de sorte que uma é tão precisa como seria a media de p conformes com a outra, diz-se que a primeira tem p vezes mais *peso* que a segunda, isto é, que, tomando por unidade o peso d'esta, é p o d'aquella.

Teremos por conseguinte

$$\frac{1}{E'\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{p}}{E\sqrt{2}}, \text{ ou } \frac{p}{1} = \frac{E^2}{E'^2}:$$

isto é, *os pesos reciprocamente proporcionaes aos quadrados dos erros;* ou os erros reciprocamente proporcionaes ás raizes quadradas dos pesos.

299. Postos estes principios, estabeleçamos as formulas, que são usadas na apreciação dos resultados.

Sejam ε_1, ε_1', ε_1'',... os erros apparentes de n observações e ε_1^2 a somma dos quadrados d'elles, isto é,

$$\Sigma \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + \varepsilon_1''^2 + \ldots$$

Se a media precisa da correcção δ, os verdadeiros erros serão

$$\varepsilon_1 + \delta,\ \varepsilon_1' + \delta,\ \varepsilon_1'' + \delta, \ldots\ldots;$$

e teremos, attendendo a $\Sigma \varepsilon_1 = 0$,

$$\Sigma(\varepsilon_1 + \delta)^2 = \Sigma \varepsilon_1^2 + n\delta^2 = n\varepsilon_2^2.$$

Como δ é o *erro* da media, cujo peso é n vezes maior que o de cada uma; e, como, pelo que fico dicto, os pesos são inversamente proporcionaes aos quadrados dos erros: será $n\,\delta^2 = \varepsilon_2{}^2$; e a equação proposta se transforma em $n\,\varepsilon_2{}^2 = \Sigma\,\varepsilon_1{}^2 + \varepsilon_2{}^2$, que dá

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{\Sigma\,\varepsilon_1{}^2}{n-1}}.$$

Por conseguinte (n.^{os} 297 e 298):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Erro provavel d'uma observação} \ldots\ldots & 0{,}67449\sqrt{\dfrac{\Sigma\,\varepsilon_1{}^2}{n-1}} \\ \text{Erro provavel da media} \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{,}67449\sqrt{\dfrac{\Sigma\,\varepsilon_1{}^2}{n\,(n-1)}} \end{array}\right\} \ldots (1).$$

300. Dizer que uma observação tem o peso p é, segundo fica definido, o mesmo que dizer que essa observação pode considerar-se como equivalente a p observações do peso 1.

Sejam pois A′, A″,... muitas observações; e p', p'',... os seus pesos respectivos. Estas observações equivalem a $p' + p'' + \ldots$, das quaes cada uma das p' desse o resultado A′, cada uma das p'' o resultado A″,...: portanto a media, que se deve tomar, é

$$A = \frac{p'A' + p''A'' + \ldots}{p' + p'' + \ldots\ldots} \ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

e o seu peso é $P = p' + p'' + \ldots\ldots$

301. Chamando E′, E″,... as differenças entre A e cada uma das observações, teremos $\quad E' = A - A',\ E'' = A - A'', \ldots\ldots\ldots;$

por conseguinte $\quad \Sigma\,p\,E = A\,\Sigma p - \Sigma p\,A' = 0,$

e

$$\Sigma p\,(E + \delta)^2 = \Sigma p\,E^2 + \delta^2\,\Sigma p.$$

Mas, sendo $E + \delta$ o erro d'uma observação que tem o peso p, seria $(E + \delta)\sqrt{p}$ o d'uma que tivesse o peso 1; conseguintemente, chamando (ε_2) o erro medio para recear da unidade de peso, poderemos suppor

$$\Sigma p\,(E + \delta)^2 = n\,(\varepsilon_2)^2.$$

Em quanto ao erro δ da media: como o peso d'ella e' Σp, será $\delta^2 \Sigma p = (\varepsilon_2)^2$; o que transformará a equação proposta em

$$n\,(\varepsilon_2)^2 = \Sigma p E^2 + (\varepsilon_2)^2,$$

ou
$$(\varepsilon_2) = \sqrt{\frac{\Sigma p E^2}{n-1}}.$$

Portanto (n.os 297 e 298)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Erro provavel da unidade de peso}\ldots\ldots 0,\ 67449\sqrt{\dfrac{\Sigma p E^2}{n-1}} \\ \text{Erro provavel da media}\ldots\ldots\ldots\ldots 0,\ 67449\sqrt{\dfrac{\Sigma p E^2}{p(n-1)}} \end{array}\right\}\ldots\ldots(3).$$

302. Se o resultado é a somma ou a differença de duas observações independentes, e chamamos e', e'', os erros d'estas observações, o erro medio da somma é $e = \sqrt{e'^2 + e''^2}$;
por conseguinte (n.° 298)

$$k p' = \frac{1}{e'^2},\ k p'' = \frac{1}{e''^2},\ k p = \frac{1}{e'^2 + e''^2},$$

que dão
$$p = \frac{p' p''}{p' + p''}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

Se uma das observações é exacta, o seu peso p'' é infinito; o que reduz (4) a $p = p'$, como deve ser.

Se o resultado provier de sommas ou differenças d'um numero n de observações independentes, vêr-se-ha com facilidade, pela composição successiva, que, chamando π_n o producto dos n pesos $p', p'', \ldots\ldots\ldots\ldots$ das observações, e $\Sigma \pi_{n-1}$ a somma dos productos distinctos d'elles $n-1$ a $n-1$, o peso do resultado é

$$p = \frac{\pi_n}{\Sigma \pi_{n-1}}.$$

303. Por exemplo, se durante a passagem d'um astro pelos fios do reticulo do circular meridiano, o observarmos i vezes com egual confiança, e fizermos uma vez a observação do nadir, o peso da distancia zenithal deduzida das i observações do astro, combinadas por differença com a do nadir, e reduzidas ao mesmo fio, será $\frac{i}{i+1}$, tomando por unidade o peso d'uma observação do astro. E como, para $i=1$, o peso da distancia zenithal é assim $\frac{1}{2}$: vê-se que, tomando por unidade o peso da distancia zenithal deduzida d'uma só observação combinada com a do nadir, o peso da distancia deduzida das i observações combinadas com a do nadir será $\frac{2\,i}{i+1}$.

Mas, por ser $\frac{i}{i+1} - \frac{i-1}{i} = \frac{1}{(i+1)\,i}$, vê-se que se ganha successivamente menos em augmentar o numero dos pontos do fio horizontal nos quaes se observa a distancia zenithal.

304. Se a collimação tambem se observa duas vezes, por exemplo no principio e no fim, o peso é $\frac{2\,i}{i+2}$. E como o peso da distancia zenithal, que dá a observação do astro em um só ponto do fio horizontal combinada com as duas do nadir, é $\frac{2}{3}$: se tomarmos este peso por unidade, será $\frac{3\,i}{i+2}$ o da distancia deduzida das i observações.

305. Se tivermos n distancias zenithaes d'uma circumpolar na passagem superior, e n' na passagem inferior, todas de egual confiança e reduzidas á mesma epocha, será $\frac{nn'}{n+n'}$ o peso da latitude geographica deduzida, tomando por unidade o d'uma semidistancia zenithal. Mas, se quizermos tornar por unidade o peso d'uma distancia zenithal: como os erros das distancias são duplos dos erros das semidistancias, serão os pesos d'estas quadruplos dos pesos d'aquellas; por conseguinte o peso da latitude referido ao peso d'uma distancia zenithal como unidade será $\frac{4\,nn'}{n+n'}$.

306. As mesmas reflexões têm logar na determinação das differenças de longitudes terrestes pelas differenças de passagens meridianas das estrellas culminantes e da Lua. Mas nestas, por ser necessario dividil-as pelo movimento horario m em ascensão recta da Lua em segundos, e depois multiplicar por 3600 para reduzir o resultado a segundos, os erros das differenças de passagens, dadas em segundos, vem a multiplicar-se por $\frac{3600}{m}$; e portanto deve multiplicar-se por $\left(\frac{m}{3600}\right)^2$ o que der a regra do n.º 302, para ter o peso do resultado.

307. Supponhamos, por exemplo, que em dois observatorios se fizeram em uma noite a e a' observações de egual confiança de passagens das mesmas estrellas culminantes, e as das passagens da Lua. Os pesos respectivos da media dos intervallos entre as passagens da Lua e das estrellas em cada observatorio serão $\frac{a}{a+1}$ e $\frac{a'}{a'+1}$, tomando por unidade o d'uma passagem; o peso da differença d'estas medias nos dois observatorios será $\frac{a\,a'}{a+a'+2\,a\,a'}$; e o peso da differença de longitudes será

$$\frac{m^2\,aa'}{(3600)^2\,(a+a'+2\,aa')}.$$

Se no primeiro observatorio se usa d'um instrumento tal que o peso d'uma observação feita nelle é k vezes o d'uma observação feita no segundo, serão $\frac{k^2 a}{k\,a+k}=\frac{k\,a}{a+1}$ e $\frac{a'}{a'+1}$ os pesos da media dos intervallos das passagens em cada observatorio, tomando por unidade o peso d'uma passagem no segundo; e o peso da differença de longitudes será

$$\frac{m^2\,k\,aa'}{(3600)^2\,(k\,a+a'+(k+1)\,aa')}.$$

Mas, tomando por unidade o peso da longitude deduzida da comparação de dois intervallos entre as passagens, um em cada observatorio, isto é, o peso da longitude deduzida para $a = 1$ e $a' = 1$, será o peso do resultado

$$\frac{2(k+1)aa'}{ka + a' + (k+1)aa'}.$$

Por onde se vê que, se o peso se tomou suppondo $k = 1$, e não é assim, deverão multiplicar-se os pesos calculados naquella hypothese

por $$\frac{k(a + a' + 2aa')}{ka + a' + (k+1)aa'},$$

quando a unidade de peso é o peso d'uma passagem;

e por $$\frac{(k+1)(a + a' + 2aa')}{2(ka + a' + (k+1)aa')},$$

quando a unidade é o peso da longitude que se deduz de dois intervallos, um em cada observatorio.

308. Para as applicações numericas do que fica exposto leia-se a *Posição geographica do Observatorio astronomico da Universidade*, 1867.

309. Se uma quantidade é determinada por duas series de observações, feitas com instrumentos differentes, ou em circumstancias differentes, sejam: n' o numero das observações da primeira serie, $\varepsilon_2' = \sqrt{\frac{\Sigma E'^2}{n'-1}}$ o erro medio d'ellas, e A' o resultado; n'', ε''_2, A'' as quantidades analogas da segunda serie. Como os pesos de A', A'', são respectivamente proporcionaes a $\frac{n''}{\varepsilon'^2_2}$ e $\frac{n''}{\varepsilon''^2_2}$, o resultado final, deduzido d'ambas, será:

$$A = \frac{\frac{n'}{\varepsilon'^2_2}A' + \frac{n''}{\varepsilon''^2_2}A''}{\frac{n'}{\varepsilon'^2_2} + \frac{n''}{\varepsilon''^2_2}} = \frac{n'A' + \left(\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon''_2}\right)^2 n''A''}{n' + \left(\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon''_2}\right)^2 n''}.$$

310. Se um resultado for a somma ou a differença de duas quanti-

dades, uma dada por n' observações cujo o erro medio é $\varepsilon'_2 = \sqrt{\frac{\Sigma E'^2}{n'-1}}$,

e outra por n'' cujo o erro medio é $\varepsilon''_2 = \sqrt{\frac{\Sigma E''^2}{n''-1}}$, o peso d'elle será

$$\pi = \frac{\frac{n'}{\varepsilon'^2_2} \cdot \frac{n''}{\varepsilon''^2_2}}{\frac{n'}{\varepsilon'^2_2} + \frac{n'}{\varepsilon''^2_2}} = \frac{n' n''}{n' \varepsilon''^2_2 + n'' \varepsilon'^2_2}.$$

311. Para a explicação e demonstração dos principios fundamentaes, de que fizemos uso na exposição d'estas doutrinas, podem lêr-se os seguintes escriptos: Liagre — *Calcul des probabilités*, 1852; Ritter — *Manuel de l'application de la methode des moindres carrés au calcul des observations*, 1858; Airy — *On the algebraical and numerical theory of errors of observations*, 1861.

Medias

312. Aproveitamos esta occasião para advertir que não deve confundir-se a media das medias de muitos grupos com a media geral.

Assim, sendo:

$A_1, A_2, \ldots A_i \ldots i$ sommas de observações de egual peso;
$n_1, n_2, \ldots n_i \ldots$ o numero de observações de cada somma:

a media das medias é $\frac{\Sigma \frac{A_x}{n_x}}{i}$, e a media geral é $\frac{\Sigma A_x}{\Sigma n_x}$, tomando x desde 1 até i.

Portanto o erro, que resulta de tomar a media das medias como media geral, corrige-se ajunctando áquella

$$\frac{\Sigma A_x}{\Sigma n_x} - \frac{\Sigma \frac{A_x}{n_x}}{i}.$$

Por exemplo, combinando no circular meridiano duas a duas as observações feitas nos fios correspondentes, tomando as medias d'ellas, e depois a media das medias, a correcção será

$$\frac{\Sigma A_x}{7} - \frac{\Sigma \frac{A_y + A_{8-y}}{2}}{4},$$

onde se devem tomar os inteiros x desde 1 até 7, e y desde 1 até 4;

isto é,
$$\frac{\Sigma A_x - 7 A_4}{56}.$$

FIM.

ADVERTENCIA SOBRE O N.º 266.

Quando no n.º 266 se diz — volvendo o eixo — deve entender-se que se volve o eixo junctamente com o nivel; ou tambem sómente o nivel, pondo sempre em contacto os mesmos pontos com os munhões.

TABOA DAS MATERIAS DO SUPPLEMENTO

CIRCULAR MERIDIANO

INSTRUMENTO DE PASSAGENS PELO PRIMEIRO VERTICAL

CORRECÇÕES DO EQUATORIAL

INSTRUMENTOS AZIMUTHAES

APRECIAÇÕES DOS RESULTADOS

ADDITAMENTOS

Á

PRIMEIRA PARTE

ADDITAMENTOS A' PRIMEIRA PARTE

Ao numero 11

Eratosthenes, notando que, no instante do solsticio, o sol illuminava o fundo d'um poço em Syena, suppunha então nulla a distancia zenithal do sol neste logar; e como no mesmo instante achou $7°12'$ para distancia zenithal do sol em Alexandria, que julgava estar no meridiano de Syena, concluiu que era $7°12'$, ou $\frac{360°}{50}$, a differença de latitudes dos dois logares. Por outra parte a medição da distancia entre elles deu-lhe 5000 stadios. Suppondo pois a terra espherica, achou que o circulo maximo d'ella é $5000^{st} \times 50 = 250000^{st}$.

D'onde resulta, tomando o stadio por 85 toezas,

$$R = \frac{250000 \times 85 \times 1^m,94904}{2 \times 3,1416} = 6591402^m.$$

Este valor, mais approximado do que os obtidos no n.º 11 (*) pelos

(*) Extrahimos do livro alli citado o primeiro d'aquelles numeros, que é o menos approximado. Calculando-o, achariamos 7378564.

meios a que alli era necessario restringir-nos, ainda o será mais quando fizermos nelle as correcções de que precisam as hypotheses geographicas de Eratosthenes.

Com effeito Syena fica 3° ao nascente de Alexandria; e as latitudes d'estes dois logares são respectivamente 24°8'N e 31°12'N. Assim o triangulo espherico APS, comprehendido entre o polo *P* e os dois logares *A*, *S*, dará a distancia espherica d'estes 7°32'50''. E portanto o raio da terra

$$\text{será } 6591402^{m} \times \frac{7^{\circ}12'}{7^{\circ}32'50''} = 6289154^{m}.$$

Ainda que a hypothese da esphericidade, e sobretudo a necessaria imperfeição das medições feitas, não permittissem que Eratosthenes obtivesse o valor de *R* com a exactidão que hoje tem, comtudo cabe-lhe a gloria de ser o primeiro que indicou o processo, que, mais aperfeiçoado, ainda hoje se prefere na determinação das dimensões e figura da terra.

Abster-nos-hemos de entrar na resolução d'este problema, que é o objecto da Geodesia. Alem dos tractados especiaes, podem consultar-se a respeito d'elle: o capitulo XVIII da Astronomia de Biot, 3.ª ed. tomo 3.°; e o n.° I do capitulo VI da já citada traducção franceza da Astronomia de Brunnow, tomo 1.°

Ao numero 18

No estudo dos systemas de coordenadas e dos instrumentos seguimos a ordem que nos pareceu mais propria para que os alumnos gradual e opportunamente fossem conhecendo: o que respeita á determinação das posições dos astros e das leis do seu movimento diurno; os instrumentos, compostos ou conjugados, que servem para essa determinação; e os aperfeiçoamentos que elles foram successivamente experimentando. Habilitados com esse estudo, apresentaremos agora uma classificação systematica das coordenadas.

As observações feitas com os instrumentos, cujo eixo é ou vertical ou polar, podem determinar as direcções dos astros por uma das intersecções dos dois cones, cujo eixo é vertical ou polar, e dos dois planos, vertical ou horario, dos quaes o segundo pode ser dado ou directamente ou pelo relogio.

Das seis combinações d'estes quatro elementos dois a dois resulta a classificação das coordenadas absolutas observaveis.

Teremos assim:

Coordenadas angulares absolutas observaveis

Intersecções de		*Systemas de coordenadas*
Cone com cone	....	Distancia zenithal, e declinação (*)
Plano com plano	....	Azimuth, e asc. rect. (ou angulo hor.)
Cone zenit. com	plano vert.....	Distancia zenith., e azimuth
	plano hor.....	Dist. zenit., e asc. rect. (ou ang. hor.)
Cone polar com	plano vert.....	Declin., e azimuth. (*)
	plano hor.....	Declin., e asc. rect. (ou ang. hor.).

(*) Não serve na practica como systema de coordenadas.

Coordenadas angulares differenciaes relativamente a uma estrella de comparação

|Differenças d'ascensão recta e declinação|

|Distancia e angulo de posição|

Coordenadas angulares não observaveis

|Longitudes e latitudes|

A *meridiana*, a *perpendicular* e a *vertical* formam um systema de eixos coordenados rectangulares, que podem servir para as tranformações. No gnomon podem medir-se directamente as duas coordenadas horizontaes da imagem.

Como systemas de transformação, rectilineos ou angulares, adoptam-se ainda outros, segundo as condições da commodidade dos calculos; do que teremos occasiões de vêr exemplos.

Aos numeros 142 e 143

Para escolher as estrellas, e collocar o oculo na direcção conveniente, tiram-se do triangulo ZPS as formulas

$$\cos P = \text{tang}\, D \cot \Delta,\ \cos z = \frac{\cos \Delta}{\cos D} \ldots\ldots\ldots\ (a).$$

Estas formulas, calculadas approximadamente, darão os tempos sideraes

$t = AR \mp \frac{P}{15}$, em que hão de observar-se as passagens oriental e occidental pelo fio do meio, e a altura correspondente $90° - z$.

As formulas (2) e (2') do n.° 143, com as correspondentes

$$\cos z_1 = \cos P_1 \,\text{sen}\,\Delta\,\text{sen}\,D + \cos\Delta\cos D,\ \cos z_2 = \cos P_2 \,\text{sen}\,\Delta\,\text{sen}\,D + \cos\Delta\cos D,$$

farão conhecer os instantes em que a estrella ha de tocar o primeiro fio nas duas passagens, e as alturas respectivas; tomando por x a distancia angular entre este fio e o do meio.

Mas, para facilitar o calculo, podem comparar-se os valores de $\cos P_1$, $\cos P_2$, e os de $\cos z_1$, $\cos z_2$, com os respectivos (a) de $\cos P$ e $\cos z$. Ter-se-hão assim:

Oriente

$$\left\{\begin{array}{l} \cos P - \cos P_1 = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos D\,\text{sen}\,\Delta},\ \cos z - \cos z_1 = \dfrac{\text{sen}\,x\,\text{sen}D}{\cos D}, \\ \\ \text{Occidente} \\ \\ \cos P_2 - \cos P = \dfrac{\text{sen}\,x}{\cos D\,\text{sen}\,\Delta},\ \cos z_2 - \cos z = \dfrac{\text{sen}\,x\,\text{sen}\,D}{\cos D}, \end{array}\right\}$$

isto é,

Oriente

$$\left.\begin{cases} \operatorname{sen}\frac{1}{2}\delta P = \dfrac{\operatorname{sen} x}{2\cos D}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen}(P+\frac{1}{2}\delta P)},\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}\delta z = \dfrac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} D}{2\cos D}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}(z+\frac{1}{2}\delta z)} \\ \text{Occidente} \\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}\delta P = -\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\cos D}\,\dfrac{1}{\operatorname{sen}\Delta\operatorname{sen}(P+\frac{1}{2}\delta P)},\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}\delta z = -\dfrac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} D}{2\cos D}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen}(z+\frac{1}{2}\delta z)} \end{cases}\right\}(b).$$

E aos valores de P e z dados por (a) applicar-se-hão as reducções δP e δz aos correspondentes ás passagens pelo primeiro fio.

Pelas formulas (a) e (b) formamos, para a latitude do Observatorio de Coimbra, as taboas juntas ao opusculo intitulado: *Uso do instrumento de passagens pelo primeiro vertical*, 1870 e 1871.

Aos numeros 281 até 287

A formula (2) do n.º 283 é approximada até a primeira ordem dos erros intrumentaes; porque o triangulo $S\pi Q$ (Fig. 66) mostra que a differença entre $\pi S = \Delta'$ e o angulo lido, $SQ\pi = \Delta''$, dos planos QS e $Q\pi$, é da segunda ordem.

Para levar a approximação até os termos da segunda ordem, como logo se verá que convem quando Δ'' é pequena, sirvamos-nos antes dos triangulos $PQ\pi$, SQP. Pondo $\beta = SQP = \Delta'' - PQ\pi$, estes triangulos dão

$$\operatorname{sen} PQ\pi = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen}(t-t_o)}{\cos b},$$

$$\cos \Delta = \cos c \cos b \cos \beta - \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b.$$

Da segunda, ou

$$\cos \beta - \cos \Delta = 2\left(\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(b+c) \cos^2 \frac{1}{2}\beta - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(b-c) \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\beta\right),$$

tira-se, desprezando as quantidades da terceira ordem,

$$\Delta = \beta + \frac{1}{2}(c^2+b^2) \operatorname{sen} 1'' \cot \beta + cb \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cosec} \beta,$$

ou, com a mesma ordem de approximação,

$$\Delta = \Delta'' - a \operatorname{sen}(t-t_o) + \frac{1}{2}(c^2+b^2) \operatorname{sen} 1'' \cot \Delta'' + cb \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cosec} \Delta'' .. \quad (b).$$

Mas, se for sufficientemente approximada a formula (2), bastará, (triangulo $SQ\pi$), substituir nella $\Delta'' + \frac{1}{2}(c^2+\varepsilon^2) \operatorname{sen} 1'' \cot \Delta'' + c\varepsilon \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cosec} \Delta''$ em logar de Δ', como se faz na Astronomia de Brunnow.

Os factores $\cot \Delta''$ e $\operatorname{cosec} \Delta''$ dos termos de segunda ordem mostram a necessidade de attender a estes termos quando Δ'' for muito pequena.

Altazimuth

Substituindo em logar de P o zenith, o equatorial torna-se em um altazimuth, ao qual serão applicaveis as formulas relativas ao primeiro, e de que se podem considerar como casos particulares o circular meridiano e o oculo de passagens no primeiro vertical, cujos eixos horizontaes estão respectivamente nas direcções éste - oeste e norte-sul.

AZIMUTHS I. Assim a formula (1) do n.º 282, contando os azimuths A desde o plano perpendicular a $Z\pi Q_0$, ou fazendo $SZ\pi Q_0 = A \pm 90^\circ, t - t_0 = A'$, dá

$$A = A' \pm (\varepsilon \mp a \cos A') \cot z \pm c \,\mathrm{cosec}\, z \ldots \quad (b):$$

onde se devem empregar os signaes superiores, ou os inferiores, segundo ficar o eixo do circulo vertical antes ou depois do mesmo circulo, contando desde a origem das divisões azimuthaes; similhantemente ao que se disse no n.º 284 (*).

II. Como no altazimuth se pode conhecer b pelo nivellamento, a primeira das expressões (a) do n.º 281, que dá $b = \varepsilon - a \cos A'$, serve para determinar as constantes ε e a.

Com effeito, nivellando em tres posições, nas quaes as differenças entre o primeiro azimuth instrumental e os outros dois sejam m, n, as tres equações

$$b_1 = \varepsilon - a \cos A_1', \quad b_2 = \varepsilon - a \cos (A_1' + m), \quad b_3 = \varepsilon - a \cos (A_1' + n),$$

(*) Se pelo movimento azimuthal de 180° se transportasse Q a uma nova posição Q', dos triangulos QZS e Q'ZS, nos quaes seriam: $ZQ = b$, $QS = 90^\circ + c$, $SZQ = A - (a - a_0)$; e $ZQ' = b$, $Q'S = 90^\circ + c$, $SZQ' = (a' - a_0) - A$: tirar-se-ia

$$-\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b \cos z + \cos b \operatorname{sen} z \cos (A - (a - a_0))$$

$$-\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} b \cos z + \cos b \operatorname{sen} z \cos ((a' - a_0) - A),$$

que, desprezando as quantidades de segunda ordem, dariam as mesmas expressões de A:

$$A = a - a_0 + 90^\circ + b \cot z + c \,\mathrm{cosec}\, z,$$

$$A = a' - a_0 - 90^\circ - b \cot z - c \,\mathrm{cosec}\, z.$$

É a demonstração empregada na pagina 44 do 2.º vol. da Astronomia de Brunnow.

desenvolvidos os cosenos de $A_1'+m$, $A_1'+n$, e eliminados sen A_1', cos A_1', por meio d'ellas e de $\text{sen}^2 A_1'+\cos^2 A_1'=1$, darão ε e a expressos em b_1, b_2, b_3, m, n.

E tambem darão A_1', do qual a differença para a leitura (A) do primeiro arco dará a correcção d'indice azimuthal δ (A), e por conseguinte

$$A'=(A)+\delta(A).$$

III. O resto das constantes pode determinar-se pelas equações de condição deduzidas das (b), como se disse no n.° 287.

Assim, observando um objecto nas duas posições invertidas do instrumento, fará conhecer c a differença das equações

$$A_1=A'_1+b_1\cot z_1+c\,\text{cosec}\,z_1,$$

$$A_2=A'_2-b_2\cot z_2-c\,\text{cosec}\,z_2,$$

nas quaes: serão A_1-A_2 nulla e $z_1=z_2$ se o objecto distante observado é immovel, ou conhecidas pelas leis do movimento diurno se o objecto é uma estrella, por exemplo, a polar; serão dados b_1, b_2, pelo nivel; e z_1, z_2, pela observação das alturas, podendo mesmo tomar-se por ellas a media $\dfrac{z_1+z_2}{2}$.

Depois a comparação do valor de A, dado pela observação d'uma estrella conhecida, com o do azimuth Z contado do meridiano, e deduzido do triangulo PZS, fará conhecer a correcção h que se deve ajuntar a A para ter

$$Z=(A)+\delta(A)+h\pm b\cot z\pm c\,\text{cosec}\,z.$$

Distancias zenithaes

As distancias zenithaes são dadas pela formula correspondente á (b),

$$z=\zeta'-a\,\text{sen}\,A'+\frac{1}{2}(c^2+b^2)\,\text{sen}\,1''\cot\zeta'+cb\,\text{sen}\,1''\,\text{cosec}\,\zeta'.$$

O termo a sen A′, que é o angulo $ZQ\pi$, pode ser dado por um nivel parallelo ao plano do circulo, como no circular repetidor.

Designando p, n, as leituras do nivel em uma posição do circulo, e p, n, as das mesmas partes physicas na posição opposta, e suppondo positivo o valor correspondente á inclinação para a parte contraria á do astro, como na figura, será (n.º 50)

$$a \operatorname{sen} A' = ZQ\pi = \frac{(p-n)-(p'-n')}{4}.$$

O arco ζ' é a differença entre as leituras l e π relativas ao astro e ao ponto zenithal π do instrumento. Suppondo que na primeira posição se vai de π para a direcção do astro no sentido da graduação, será

$$\begin{array}{ll} 1.^a \text{ posição} & \zeta' = l - \pi, \\ 2.^a \text{ posição} & \zeta' = \pi - l', \\ \text{e por tanto} & \zeta' = \dfrac{l-l'}{2}, \pi = \dfrac{l+l'}{2}. \end{array}$$

Substituindo pois na expressão de z, teremos finalmente:

$$z = \frac{1}{2}\left(l - l' + \frac{(p-n)-(p'-n')}{2}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}(c^2+b^2) \operatorname{sen} 1'' \cot \frac{l-l'}{2} + cb \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cosec} \frac{l-l'}{2};$$

ou

$$z = l - \pi + \frac{(p-n)-(p'-n')}{4}$$

$$+ \frac{1}{2}(c^2+b^2) \operatorname{sen} 1'' \cot (l-\pi) + cb \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cosec} (l-\pi),$$

devendo mudar-se l e π em $360° - l$ e $360° - \pi$ na posição opposta.

Oculo Meridiano

Neste instrumento o eixo de rotação deve estar na linha éste-oeste.

Adoptando o signal superior do ultimo termo de (*b*), e chamando ν o desvio da extremidade oriental do eixo para o sul, aquella equação dá

$$A = \nu + b \cot z + c \operatorname{cosec} z,$$

onde *b* e *c* representam a elevação da mesma extremidade e o erro de collimação para occidente. E como o triangulo comprehendido entre o polo, o zenith e o astro, dá

$$\frac{\operatorname{sen} \delta P}{\operatorname{sen} z} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} \Delta}, \text{ ou } \delta P = A \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} \Delta},$$

é

$$\delta P = \nu \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sen} \Delta} + b \frac{\cos z}{\operatorname{sen} \Delta} + \frac{c}{\operatorname{sen} \Delta},$$

ou

$$\delta P = \nu \frac{\operatorname{sen} (\Delta - D)}{\operatorname{sen} \Delta} + b \frac{\cos (\Delta - D)}{\operatorname{sen} \Delta} + \frac{c}{\operatorname{sen} \Delta}.$$

A correcção $-\delta P$ da passagem meridiana será portanto

$$t - \tau = -\nu \frac{\operatorname{sen} (\Delta - D)}{\operatorname{sen} \Delta} - b \frac{\cos (\Delta - D)}{\operatorname{sen} \Delta} - \frac{c}{\operatorname{sen} \Delta}.$$

Tomando porem *b* e *c* com signaes contrarios aos que temos supposto, isto é, representando *b* a elevação da extremidade occidental do eixo e *c* a collimação para oriente, teremos, como no n.º **113**,

$$t - \tau = \nu \frac{\operatorname{sen} (D - \Delta)}{\operatorname{sen} \Delta} + b \frac{\cos (D - \Delta)}{\operatorname{sen} \Delta} + \frac{c}{\operatorname{sen} \Delta}.$$

Instrumento de passagens no primeiro vertical

Neste instrumento, fazendo as hypotheses do n.º 275, é o erro d'azimuth

$$\delta A = -(\nu + b \cot z + c \operatorname{cosec} z).$$

Ora os triangulos entre o zenith, o astro e o polo, um no instante da passagem pelo actual eixo optico, outro no da passagem pelo que estivesse collocado exactamente no primeiro vertical, dão

$$\cos D \cos P = \operatorname{sen} D \cot \Delta + \operatorname{sen} P \operatorname{tang} \delta A, \ \cos D \cos P' = \operatorname{sen} D \cot \Delta;$$

de cuja differença,

$$2 \cos D \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(P' - P) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(P' + P) = \operatorname{sen} P \operatorname{tang} \delta A,$$

se tira $\quad \delta A = (P' - P) \cos D.$

Portanto é

$$P' = P - \left(\frac{\nu}{\cos D} + b \frac{\cot z}{\cos D} + c \frac{\operatorname{cosec} z}{\cos D}\right),$$

ou $$P' = P - \left(\frac{\nu}{\cos D} + b \frac{\cot \Delta}{\cos^2 D \operatorname{sen} P} + \frac{c}{\cos D \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} P}\right),$$

como no referido numero.

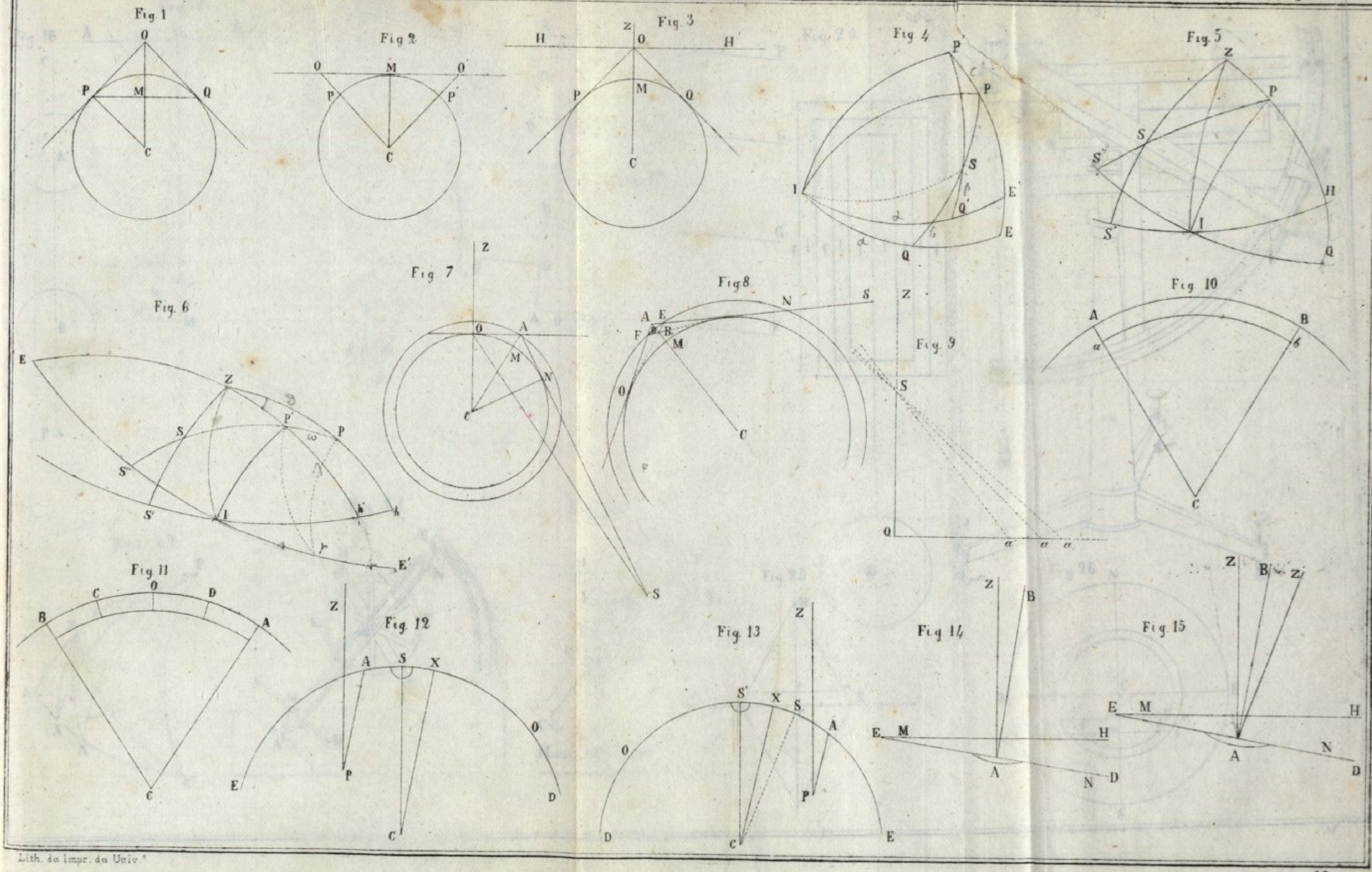
Sobre as correcções instrumentaes das observações feitas com o altazimuth, com o equatorial e com o circular meridiano, podem consultar-se os cap. III, IV e V do segundo tomo da citada traducção franceza da Astronomia de Brunnow.

ADDITAMENTO ÁS ERRATAS DA PRIMEIRA PARTE

Pag.	*Linh.*	*Erros*	*Emendas*
(*) 2	4	pertencente á	perto da
19	antepen.	teria a segunda	teria
45	5 sub.	$-12'',5$	$-11^s,3$
»	3 sub	$38^s,1$	$39^s,3$
20	(do supplemento)	D	*b*
27	10 *supprima-se:* no capitulo precedente		

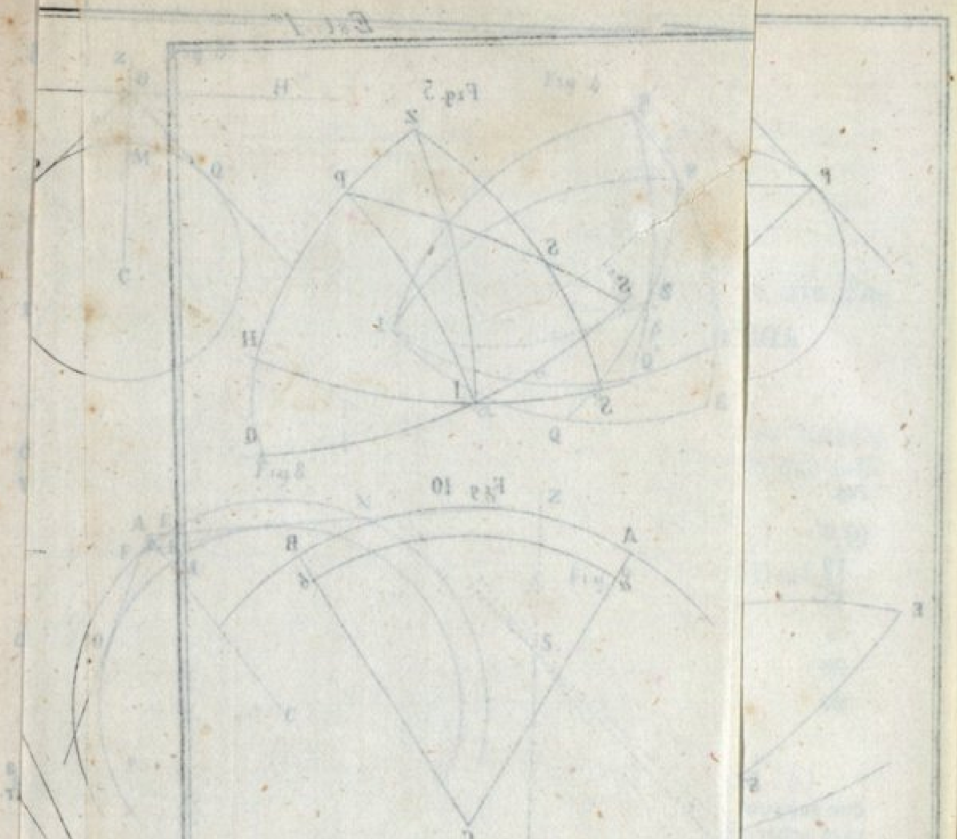
(*) Das constellações visinhas da polar só mencionamos a *Barca*, por ser a que suppomos conhecida do leitor, e porque o alinhamento do *leme* costuma servir para achar a estrella.

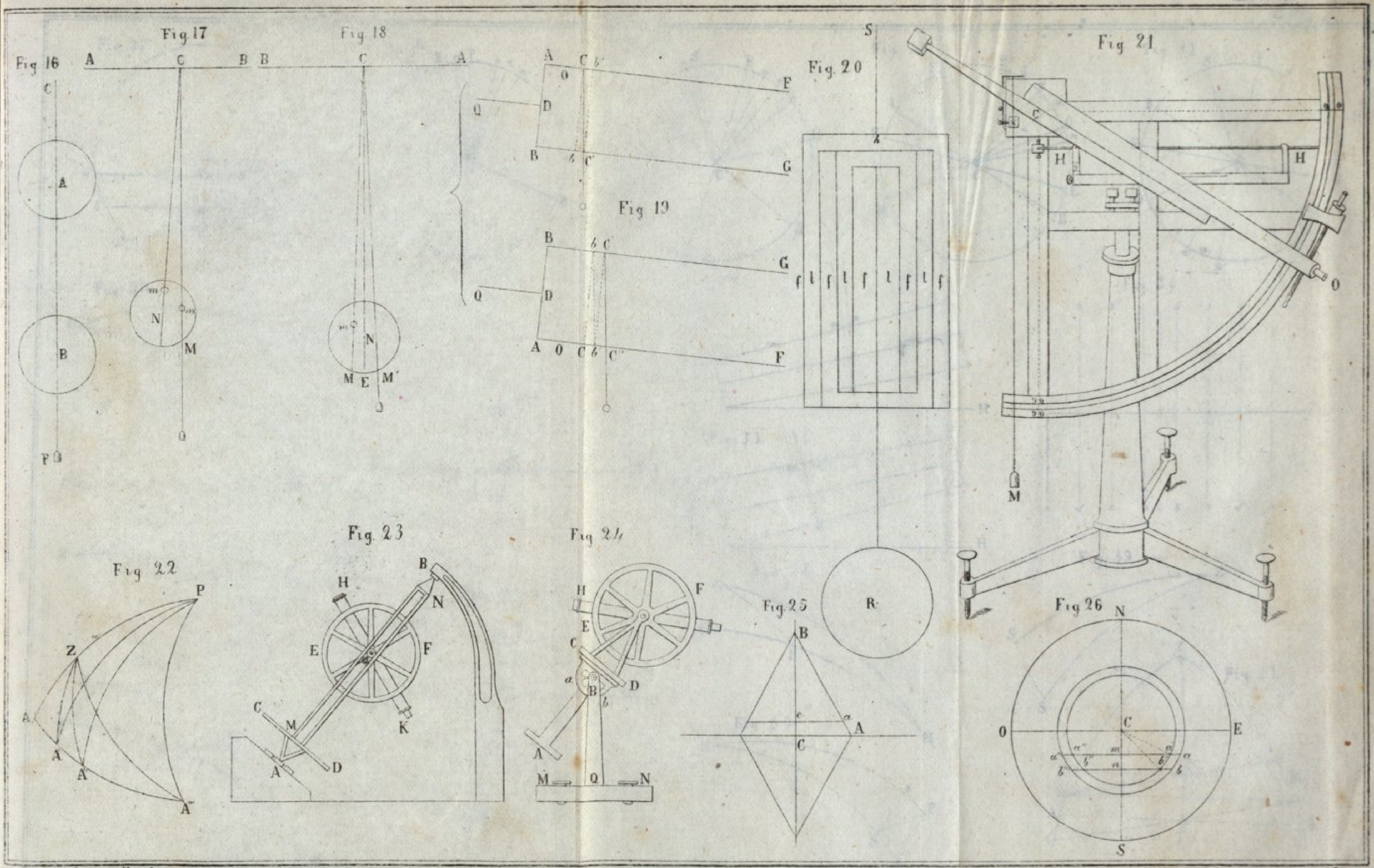
Est. 1ª



Lith. da Impr. da Univ.ª

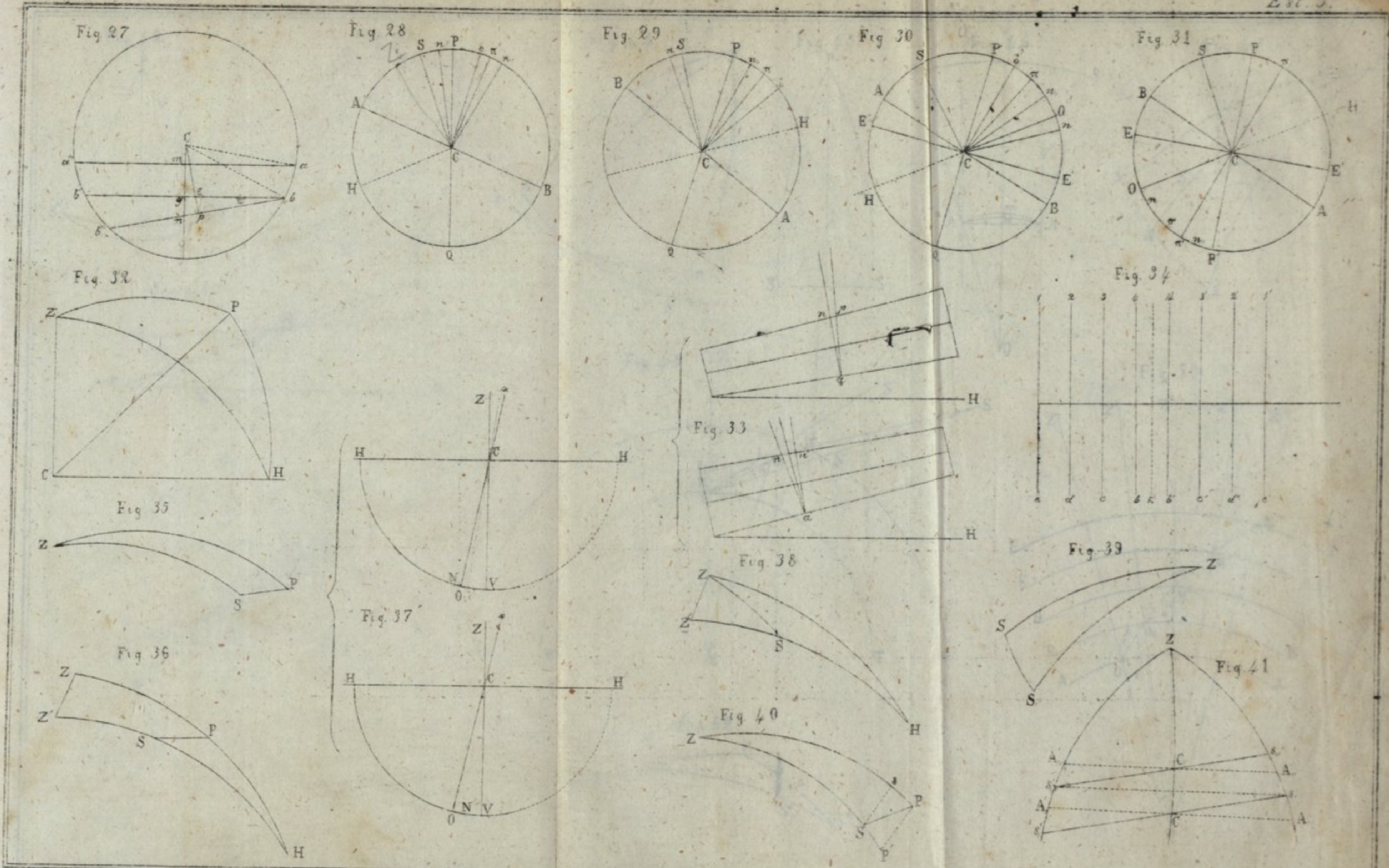
M.





Lith. da Impr. da Univ.e

M.



Lith. da Impr. da Univ.ᵉ

M

Fig. 42

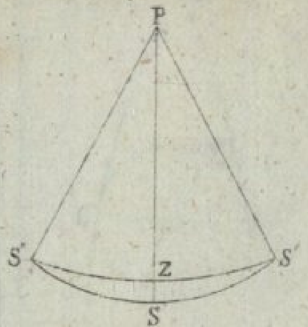


Fig. 43

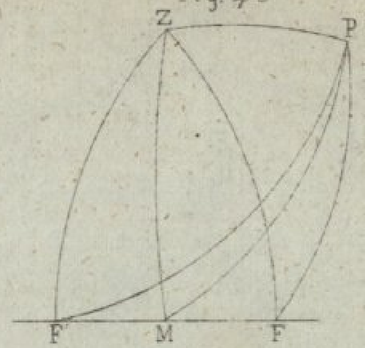


Fig. 44

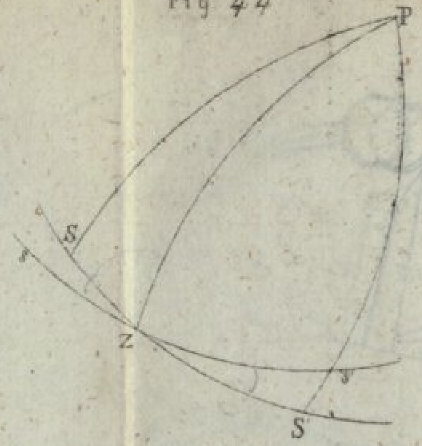


Fig. 45

Fig. 46

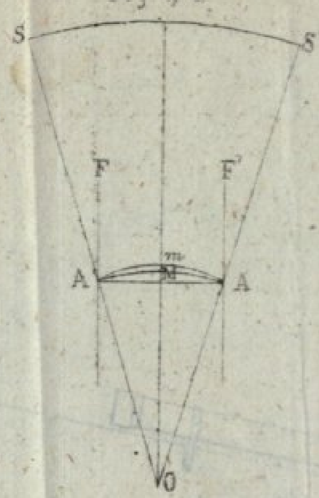


Fig. 47

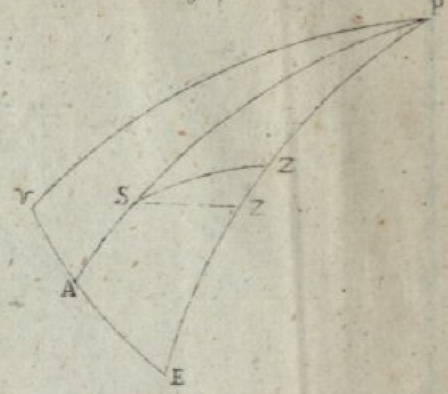


Fig. 48

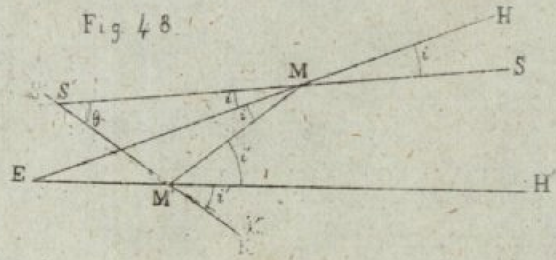


Fig. 49

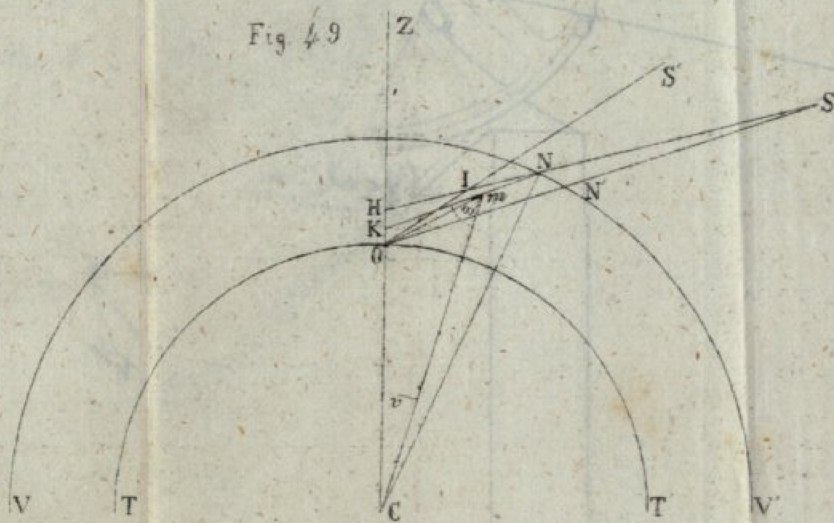


Fig. 50

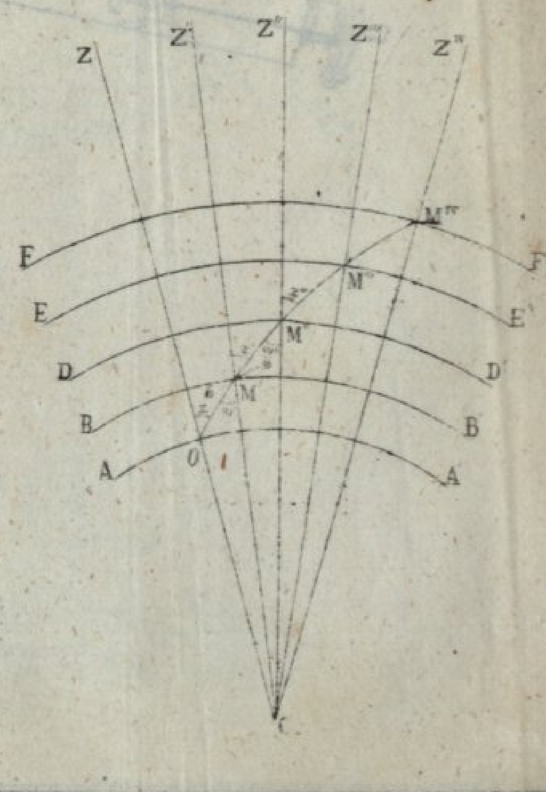


Fig. 51

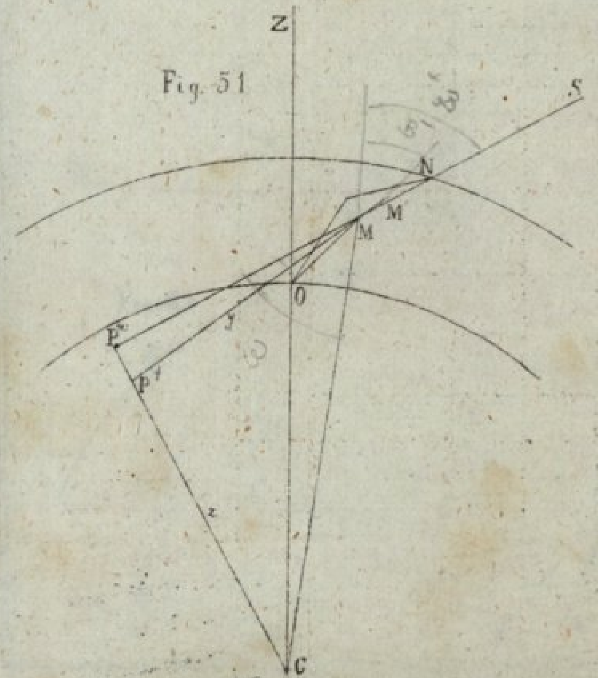
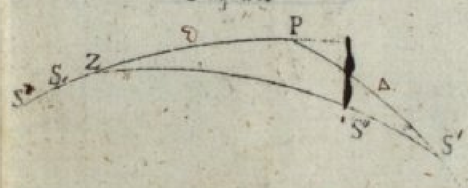


Fig. 52



Lith. da Impr. da Univ.

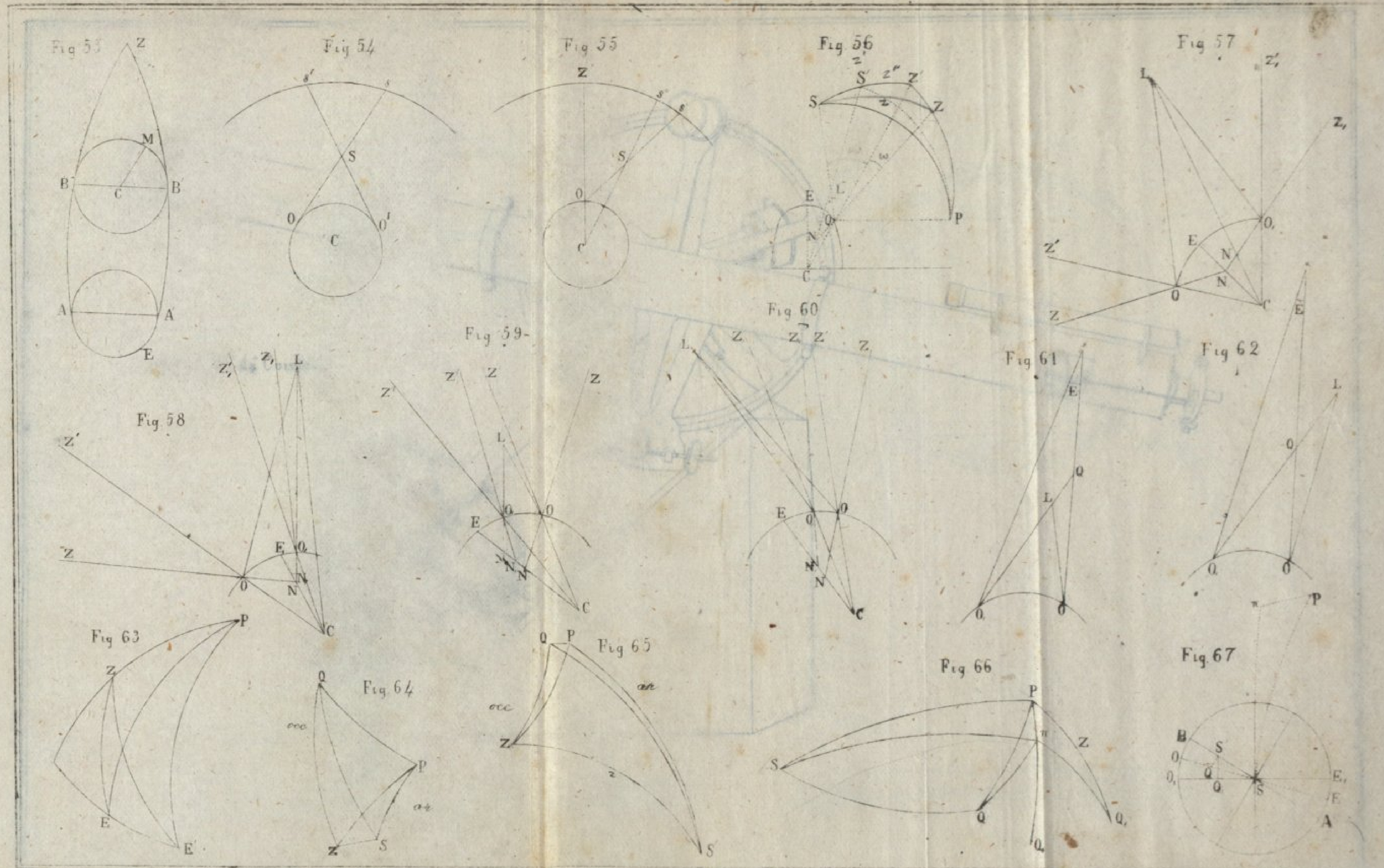
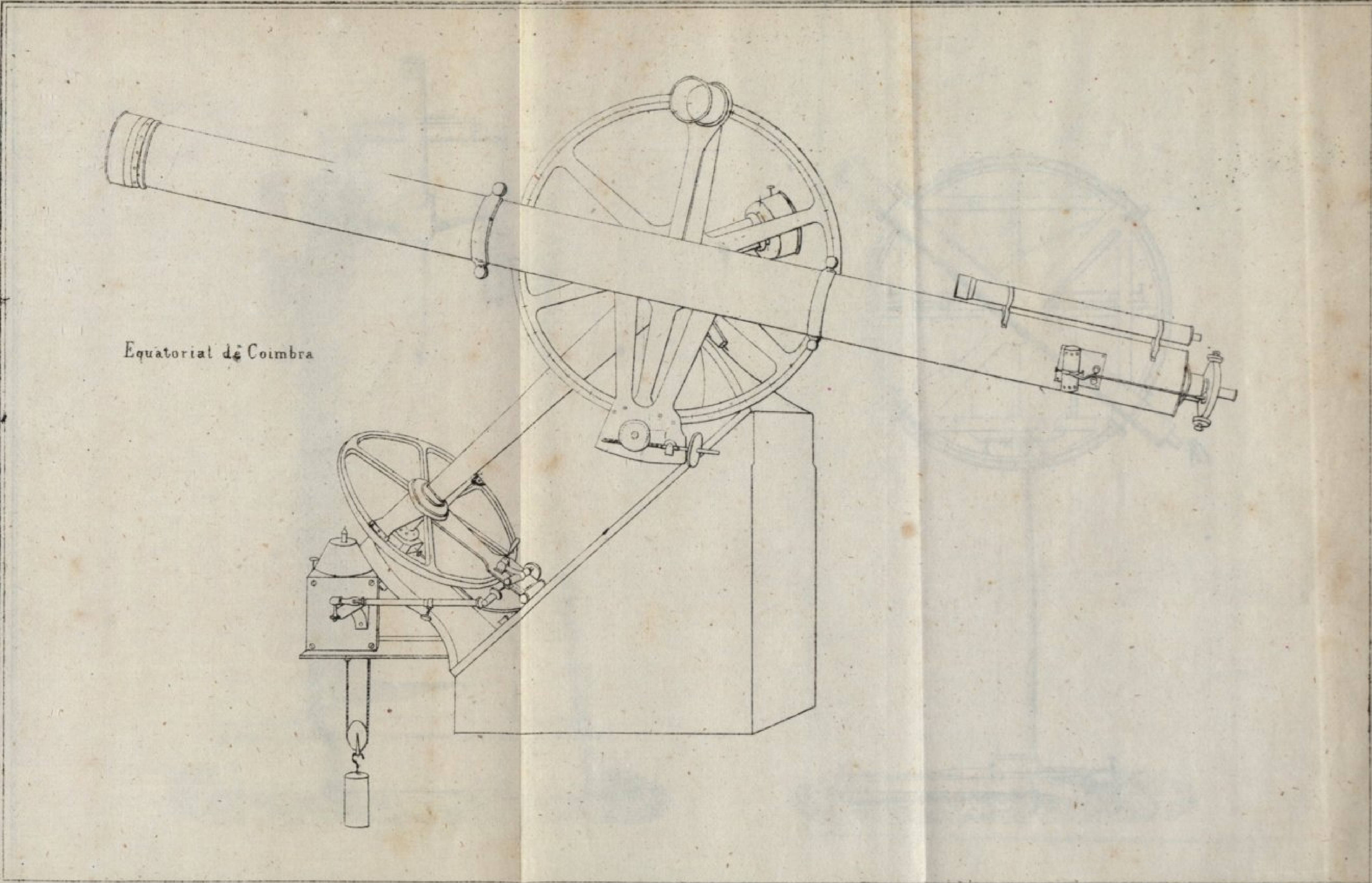


Fig 53
Fig 54
Fig 55
Fig 56
Fig 57
Fig 58
Fig 59
Fig 60
Fig 61
Fig 62
Fig 63
Fig 64
Fig 65
Fig 66
Fig 67

Fig 5

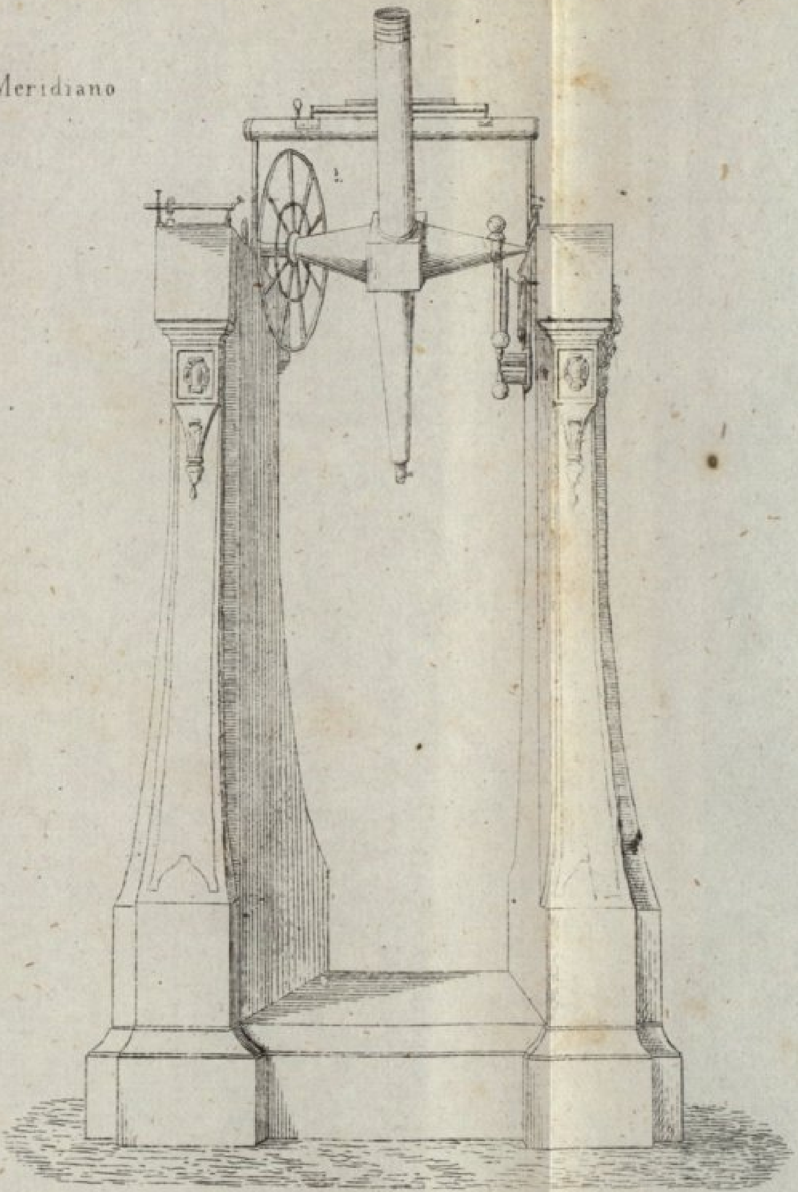
Fig 6

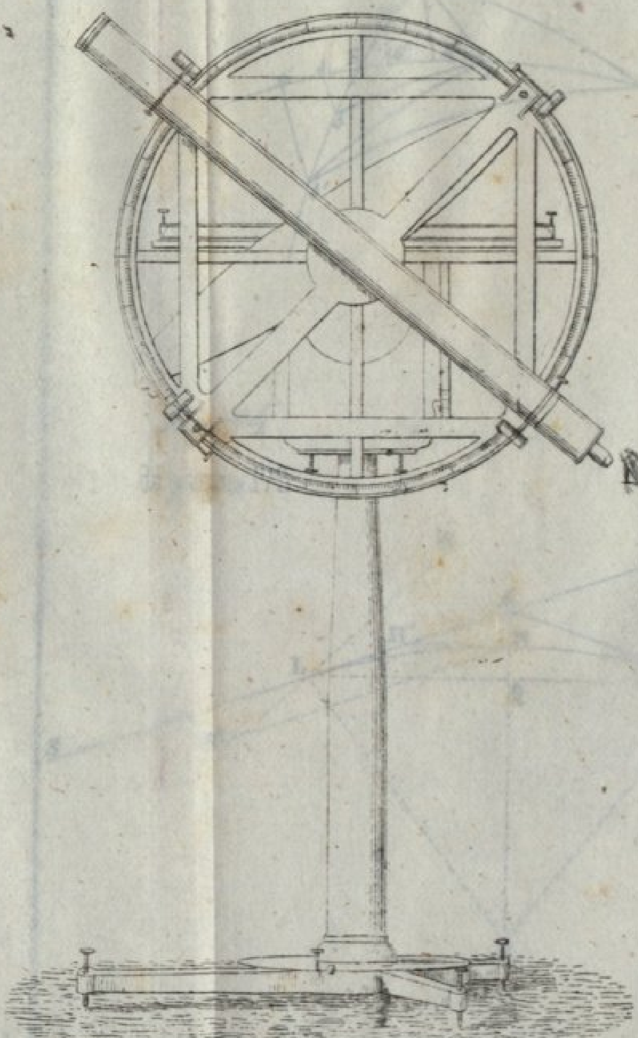


Lith. da Impr. da Univ.ᵉ

M

Circular Meridiano





Lith. da Impr. da Univ.e

M.

Fig. 63

da pagina 172

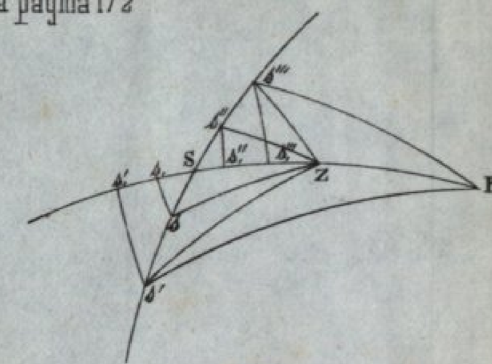
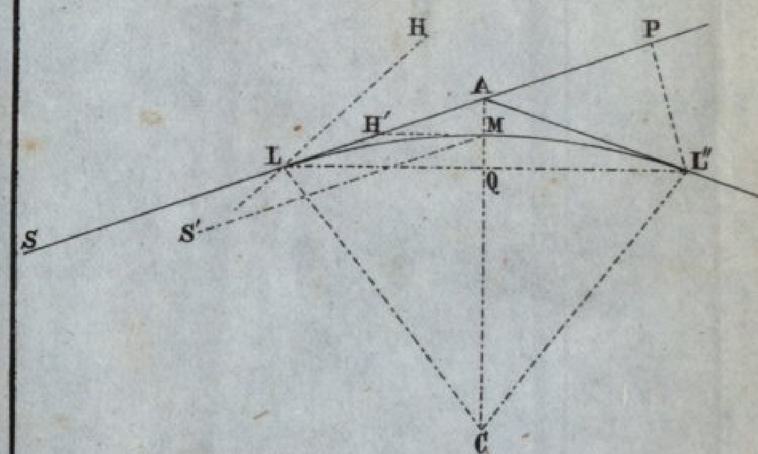


Fig. 64

da pagina 175



S. PINTO

ASTRONOMIA

1