

de sorte que deveremos multiplicar por $1 + r'$ os argumentos com que procuramos os valores de R.

Mas, se desprezarmos r'^2 e $\text{sen}^3 \frac{1}{2} p'$, será

$$\text{sen} \frac{1}{2} P' = (1 + r') \text{sen} \frac{1}{2} p', \quad \text{sen}^2 \frac{1}{2} P' = (1 + 2r') \text{sen}^2 \frac{1}{2} p';$$

e teremos a fórmula ainda mais simples

$$z = \frac{\Sigma z'}{2n} - \frac{1 + 2r'}{2n} f(\Sigma R - (1 + 2r') f \cot z \Sigma R) \mp \frac{S - M}{2n} \bar{a}.$$

241. Se escrevessemos a primeira equação do n.º 236 debaixo da forma

$$2 \text{sen } z \text{sen} \frac{1}{2} \delta \cos \frac{1}{2} \delta + 2 \cos z \text{sen}^2 \frac{1}{2} \delta = 2k,$$

$$\text{tang} \frac{1}{2} \delta + (\cot z - \frac{1}{2} m \text{sen } 1'') \text{tang}^2 \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} m \text{sen } 1'';$$

desenvolvessemos em serie o valor de $\text{tang} \frac{1}{2} \delta$; e exprimissemos, como é sabido, $\frac{1}{2} \delta$ em $\text{tang} \frac{1}{2} \delta$; ou usassemos do theorema de Maclaurin; acharíamos facilmente

$$\delta = \begin{cases} m - \frac{1}{2} m^2 \text{sen } 1'' (\cot z - \frac{1}{2} m \text{sen } 1'') \\ - \frac{1}{12} m^3 \text{sen}^2 1'' (1 - 6 (\cot z - \frac{1}{2} m \text{sen } 1'')^2). \end{cases}$$

242. A fim de tomar sensíveis em uma figura os effectos das duas causas, que exigem a correção das distancias zenithaes para as reduzir

ao meridiano, seja s' (Fig. 63) o logar do astro; e $s'ss''s'''$ o arco da esfera celeste, no qual se projecta o seu movimento.

Se o astro fosse uma estrella, descreveria no movimento diurno o paralelo $s's'$; e por isso a distancia zenithal Zs' careceria de se lhe tirar a correcção $Zs' - Zs'_1$ para a tornar meridiana: mas como o astro, em quanto descreveu o angulo horario ZPs' , teve o movimento em distancia polar s/S , a distancia meridiana $ZS = z$ é

$$z = Zs' - (Zs' - Zs'_1) - s/S,$$

$$z = Zs - (Zs - Zs_1) - s/S,$$

expressões que dão

$$z = \frac{\sum Zs'}{2n} - \frac{\sum (Zs' - Zs'_1)}{2n} - \frac{\sum s/S}{2n}.$$

E com effeito é

$$z' = f(P, \Delta), \quad z = f(o, \Delta - \delta\Delta);$$

$$z = z' - [f(P, \Delta) - f(o, \Delta)] - [f(o, \Delta) - f(o, \Delta - \delta\Delta)].$$

243. Apesar da grande vantagem dos circulares repetidores, que dão as distancias zenithaes por leituras de arcos multiplos d'ellas, sujeitas sómente aos erros dos pontos extremos, ha' nestes instrumentos as mais das vezes um erro, que affecta constantemente as mesmas distancias, e que procede talvez do jogo do oculo sobre o seu eixo, ou da falta de equilibrio entre as suas partes objectiva e ocular, ou de ambas estas causas.

Supponhamos que duas series de observações feitas para determinar a hora (n.º 233) são uma anterior e outra posterior á passagem pelo meridiano, e, quanto é possivel, equidistantes d'esta passagem. Neste

caso o effeito do erro da distancia zenithal sôbre o angulo horario pôde considerar-se como igual em ambas as series; e por isso chamando P, P' , os angulos horarios oriental e occidental, calculados por ellas, e $\delta P = \delta P'$ os seus erros, tudo convertido em tempo; t, t' , a epocha media de cada uma das series, reduzida a tempo sideral; θ, θ' as mesmas epochas em tempo do relógio; e r o retardamento diurno d'este; teremos:

$$\text{na serie anterior á passagem meridiana} \quad t = \frac{AR^*}{15} - (P + \delta P),$$

$$\text{na serie posterior á passagem meridiana} \quad t' = \frac{AR^*}{15} + (P' + \delta P):$$

logo

$$\delta P = \left(\frac{\theta' - \theta}{2} \right) \left(1 + \frac{r}{86400 - r} \right) - \frac{P' + P}{2}, \quad t = t' - \delta P, \quad t' = t + \delta P;$$

sendo t, t' os tempos taes quaes se deduzem das series sem a correcção de que tractamos.

Teremos assim os tempos correctos do effeito do erro da distancia zenithal; e este erro (n.º 234) será

$$\delta z = \frac{\text{sen } P \text{ sen } \Delta \text{ sen } D \delta P}{\text{sen } z}.$$

Mas pôde achar-se z directamente pela observação das distancias zenithaes meridianas de estrellas bem conhecidas, uma das quaes fique ao sul, e outra ao norte do zenith, e ambas a distancias d'elle pouco differentes. Teremos então:

$$\text{Para a estrella ao norte} \quad D = \Delta + (z + \delta z),$$

Para a estrella ao sul $D = \Delta' - (z' + \delta z)$,

que dão a colatitude, e o erro de z , pelas formulas

$$D = \frac{\Delta + \Delta'}{2} - \frac{z' - z}{2}, \quad \delta z = \frac{\Delta' - \Delta}{2} - \frac{z' + z}{2}.$$

244. No circular repetidor, tal como o havemos descripto, ha ainda os inconvenientes: de ser a columna sujeita a abalar-se pelos movimentos violentos da atmosphaera; de se inflectir, e dilatar desigualmente o tubo do oculo; e de ser o nivel fixo ligado sómente á columna, não accusando assim os desarranjos do circulo provenientes do eixo de rotação.

Para diminuir o primeiro inconveniente rodea-se a columna de arcos fortes, que partindo dos pés vão formar na parte superior uma especie de anel por onde ella passa. Para diminuir o segundo, liga-se o oculo a um circulo massiço que gyra por dentro do limbo, substituindo o seu movimento o da alidade dos antigos circulos. E finalmente para diminuir o terceiro usa-se, em logar do parafuso tangencial do tambor, de uma pinça que prende fortemente o limbo á columna na passagem das observações impares para as pares; e nas observações impares dão-se os pequenos movimentos ao limbo por um parafuso convenientemente collocado.

O último inconveniente não existe nos circulares de nivel movel com o circulo; mas o nivel é então de uso incommodo, por ser necessario movel-o no principio de cada par de observações, e torna estas mais morosas.

NOTA 1.^a*Sobre a fórmula da refração.*

245. *A trajectory descripta pelos raios luminosos na passagem pela atmosphera é tão pouco curva, que as rectas tiradas dos seus diversos pontos para o mesmo astro se podem suppor parallelas, pelo menos nos casos ordinarios de refração.*

Para demonstrar esta proposição, avaliaremos a amplitude total da curva descripta pelo raio luminoso, no caso da refração horizontal em que ella é maxima; e mostraremos depois que esta amplitude, vista do centro d'um astro, subtenderia um angulo extremamente pequeno, e como insensivel, ainda quando o astro fôsse a Lua, que é o mais proximo de nós.

Seja SL (Fig. 64) a distancia rectilinea primitiva do raio luminoso, que, entrando na atmosphera pela direcção SLA, começa a curvar-se em L, onde a densidade do ar é nulla ou insensivel. Designemos por M o ponto mais baixo da trajectory, onde é ella horizontal; e supponhamos que a densidade do ar seja 'neste ponto a que convém a temperatura do gelo fundente e a pressão $0^m,76$. Finalmente supponhamos que, chamando C o centro da terra e $CM = a$ o seu raio, é $CL = r = a + \frac{1}{100} a$; isto é, que a altura de L acima da superficie terestre é $\frac{1}{100}$ do raio da terra,

número provavelmente muito superior á altura real da atmosphera (n.º 27).

Com estes dados a theoria das refrações faz conhecer o angulo $HLA = I$ que a direcção primitiva do raio luminoso faz com a horizontal LH, perpendicular ao raio CL, isto é, a depressão apparente do horizonte M para um observador collocado em L.

Tiremos por M a horizontal MH' , perpendicular a CM, e MS' parallelá á direcção primitiva do raio luminoso; o angulo $H'MS'$ será a refração horizontal em M, que chamaremos R. Como a trajectory é sym-

metrica em torno de M, se L'' é o ponto da sahida, correspondente ao da entrada L, os arcos LM, ML'' serão eguaes; e a corda LL'' será perpendicular a CM, ou parallela a MH' ; por conseguinte os angulos $H'MS'$, ALQ , oppostos no parallelogrammo LM, serão eguaes; ou $ALQ = R$, e $HLQ = I + R = LCM$.

Posto isto, abaixando $L''P$ perpendicular a LP, temos

$$LL'' = 2LQ = 2r \operatorname{sen}(I + R), \quad PL'' = 2r \operatorname{sen}(I + R) \operatorname{sen} R.$$

Como o astro S está na direcção do raio luminoso LS, toda a trajectoria LMM' , vista do centro de S, se projectará sôbre a linha PL'' . Chamando pois D a distancia SP, a tangente trigonometrica do angulo visual subtendido pela mesma trajectoria é

$$\frac{PL''}{D} = \frac{2r \operatorname{sen}(I + R) \operatorname{sen} R}{D};$$

fórmula na qual se pôde empregar por D, sem erro sensivel, a distancia do astro ao centro da terra, por ser muito pequeno o numerador e differir pouco esta distancia de D.

246. Resta avaliar numericamente as diversas partes d'esta expressão, para ver se a quantidade, que ella representa, se pôde tornar sensivel.

Fazendo $z' = 90^\circ$, e $z^{(i)} = 90^\circ + I$ na equação (n.º 182)

$$\operatorname{sen} z^{(i)} = \operatorname{sen} z' \cdot \frac{a\sqrt{1 + P(\rho)}}{r\sqrt{1 + P\rho}},$$

ou

$$\cot^2 z^{(i)} = \cot^2 z' + (1 + \cot^2 z') \left[\frac{r^2 - a^2}{a^2} - \frac{r^2}{a^2} \cdot \frac{P[(\rho) - \rho]}{1 + P(\rho)} \right].$$

resulta

$$\operatorname{tang}^2 I = \frac{(r+a)(r-a)}{a^2} - \frac{r^2 \cdot P[(\rho) - e]}{a^2 \cdot 1 + P(\rho)}$$

Na parte da atmosphera, onde começa a ser sensivel a densidade, pôde suppor-se $P\rho = 0$; e ao nivel do mar, nas circumstancias meteorologicas que admittimos, o valor de α tirado das experiencias de Biot e Arago

(pag. 188) dá $P(\rho) = 0,000588768$. Com estes valores, e com $\frac{r}{a} = 1,01$,

a expressão de $\operatorname{tang} I$ dá $I = 7^{\circ}.57'$. Tal seria a depressão apparente HLA do horizonte M para um observador que estivesse em L, na altura

$\frac{1}{100}$ do raio terrestre acima da superficie da terra.

Prescindindo de circumstancias extraordinarias e passageiras, e attendendo só ao estado ordinario da atmosphera, em equilibrio estavel, é $35'$ um dos maiores valores que pôde ter a refração horizontal. Suppondo pois $R = 35'$, será $R + I = 8^{\circ}.32'$.

Com estes dados teremos para a Lua, isto é, para $D = 60 a$,

$$\frac{PL''}{D} = 2,02 \cdot \frac{\operatorname{sen} 8^{\circ}.32' \operatorname{sen} 35'}{60},$$

tangente, á qual corresponde o angulo $10'',5$.

Vê-se assim que, nestas supposições exaggeradas, dois raios visuaes tirados do centro da Lua para as duas extremidades L, L', da trajectoria fariam entre si o angulo $10'',5$; por conseguinte, todas as rectas tiradas dos outros pontos da trajectoria para a Lua fariam entre si angulos ainda menores. Por exemplo, relativamente ao ponto Q, o angulo subtendido seria apenas $5''$; e seria ainda menor para o observador, que está em M e não em Q. Finalmente estes pequenos erros, já pouco sensiveis na refração horizontal, que está sujeita a muitas outras causas de incerteza, tornar-se-iam inapreciaveis a menores distancias da Lua ao zenith, e mais ainda a respeito dos outros astros, que todos distam muito mais de nós.

Portanto podemos, sem receio de erro sensivel, desprezar absoluta-

mente os angulos que os diversos raios visuaes fazem entre si no centro do astro, e suppol-os parallellos; e isto ainda com mais razão, por termos escolhido de proposito para o calculo precedente todas as circumstancias que contribuiam para augmentar aquelle angulo. (*Extr. da Astron. de Biot*).

247. Para examinar os limites de aproximação da fórmula de refração (6) do n.º 86, teremos (n.º 184) de integrar o termo

$$-\frac{3}{2} \alpha \operatorname{tang}^2 z' \cdot \frac{s' dp}{(\rho)}$$

o que exige a determinação da lei do decrescimento da densidade das camadas atmosphericas, ou ao menos dos limites que a comprehendem.

A densidade das camadas atmosphericas decresce á medida que ellas são mais elevadas; mas como a temperatura tambem diminue, o decrescimento das densidades é menos rapido, do que seria se a temperatura não variasse. D'onde resulta que a verdadeira lei da densidade está comprehendida entre a d'uma densidade constante, e a correspondente a uma temperatura constante.

Na hypothese d'uma temperatura constante tem logar a lei de Mariote, $\frac{p}{(p)} = \frac{\rho}{(\rho)}$; e eliminando ρ entre ella e a equação do equilibrio (n.º 186), resulta

$$\frac{dp}{p} = -\frac{(g)(\rho)ads}{(p)} = -\frac{ads}{l}, \quad p = Ce^{-\frac{as}{l}}$$

Este integral, tomado desde $p = (p)$, ou $s = 0$, dá

$$\frac{p}{(p)} = e^{-\frac{as}{l}}, \quad \text{ou } p = (p) e^{-\frac{as}{l}}$$

Por onde se vê que nesta hypothese o crescimento das alturas em progressão arithmetica corresponde ao decrescimento das densidades em progressão geometrica.

248. O integral $\int s^2 d\rho = s^2 \rho - 2 \int \rho s ds$,

tomado entre os limites $s=0$ e $\rho=0$, reduz-se ao segundo termo tomado entre os mesmos limites: e $\int \rho s ds$ é proporcional á somma dos elementos ρds multiplicados pelas respectivas distancias s á camada cuja densidade é (ρ) . Mas esta somma é maior na hypothese d'uma temperatura constante, do que na lei da natureza em que a temperatura decresce; porque aquella hypothese, dando menor densidade ás camadas, assigna á atmosphera uma altura maior que a verdadeira: logo, se calcularmos o integral na mesma hypothese, resultará um limite de erro ainda maior que o proveniente da verdadeira lei.

Para effectuar este calculo temos, integrando por partes, e attendendo á expressão de ρ do número precedente,

$$\int \frac{s^2 d\rho}{(\rho)} = \frac{s^2 \rho}{(\rho)} + \frac{2l^2}{a} e^{-\frac{as}{l}} + \frac{2l^2}{a^2} e^{-\frac{as}{l}} + C,$$

que, entre os limites $\rho=(\rho)$ ou $s=0$, e $\rho=0$, se reduz a $-2 \frac{l^2}{a^2}$. Portanto o termo, de que se tracta, é

$$-\frac{3}{2} \frac{\alpha}{\text{sen } 1''} \text{tang}^2 z' \int \frac{s^2 d\rho}{(\rho)} = \frac{3\alpha}{\text{sen } 1''} \cdot \frac{l^2}{a^2} \text{tang}^2 z'.$$

Substituindo 'nesta expressão os valores de α e l (n.º 187), acha-se $0'',15$ para $z'=74^\circ$, e $0'',004$ para $z'=60^\circ$. Por onde se vê que até estes limites a fórmula de refração (6) dá sufficiente approximação, quando se quer só exactidão até segundos, ou até centesimas de segundo.

NOTA 2.*Equação das alturas correspondentes*

249. Seja ZPA o triangulo comprehendido entre o zenith, o polo, e a projecção do astro na esphera celeste. Temos

$$\cos P = \frac{\cos z - \cos \Delta \cos D}{\sin \Delta \sin D} \dots \dots (1).$$

Se o astro tem movimento proprio em declinação, ou se a refração varia no intervallo das duas observações correspondentes, o angulo horario tambem variará. Mas como no intervallo das observações são pequenas as variações $\delta\Delta$ e δz , podemos achar a relação entre ellas e δP pela differenciação de (1), desprezando assim as quantidades de segunda ordem relativamente ás mesmas variações.

Differenciando pois a equação (1), e attendendo á mesma equação, que dá $\cos \Delta \cos z - \cos D = -\sin^2 \Delta \cos D + \sin \Delta \cos \Delta \cos P \sin D$, ou mudando A em P, z em Δ , e reciprocamente, nas equações da nota da pagina 46, teremos a equação das alturas correspondentes

$$\delta P = \frac{\sin z}{\sin P \sin \Delta \sin D} \delta z + \left[\frac{1}{\tan P \tan \Delta} - \frac{1}{\sin P \tan D} \right] \delta \Delta \dots (2);$$

ou $\sin S = \frac{\sin P \sin D}{\sin z}$, $\delta P = \frac{\delta z}{\sin S \sin \Delta} - \frac{\cot S \delta \Delta}{\sin \Delta}$.

250. Nesta equação entra a incognita P no segundo membro; mas como, chamando τ , em tempo do relógio, a epocha da observação anterior á passagem meridiana, e τ' a posterior, o intervallo $\frac{\tau' - \tau}{2}$ redu-

zido a arco differe do verdadeiro valor de P apenas uma quantidade da ordem de δP , vê-se que da sua substituição em lugar de P no segundo membro só podem resultar erros da ordem d'aquelles que se desprezam.

251. Cumpre advertir que o desprezo das quantidades de segunda ordem relativamente a δP , δz , $\delta \Delta$, na equação (2) supõem que não avultam muito os coefficients d'estas variações, e que ellas são muito pequenas. Á primeira condição satisfaz-se não observando muito perto do meridiano, nem estrellas muito proximas do polo; e á segunda satisfaz-se tanto melhor quanto mais longe se observa do horizonte, e em tempo mais sereno, e quanto menor é o movimento do astro em declinação (a).

(a) Na equação das alturas correspondentes o effeito mais sensivel é ordinariamente o que resulta da mudança de declinação; e por isso attendamos ao

termo $\frac{1}{2} \frac{d^2 P}{d\Delta^2}$, isto é, tomemos

$$\delta P \approx \frac{dP}{dz} \delta z + \frac{dP}{d\Delta} \delta \Delta + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{d\Delta^2} \delta \Delta^2.$$

A differenciação dá

$$\frac{dP}{d\Delta} = \cot P \cot \Delta - \operatorname{cosec} P \cot D,$$

$$\frac{d^2 P}{d\Delta^2} = -\cot P \operatorname{cosec}^2 \Delta - \frac{dP}{d\Delta} (\cot \Delta \operatorname{cosec}^2 P - \cot D \cot P \operatorname{cosec} P)$$

$$= -\cot P \operatorname{cosec}^2 \Delta - \frac{dP}{d\Delta} \cot \Delta - \left(\frac{dP}{d\Delta} \right)^2 \cot P.$$

Seja ω a variação de Δ em um minuto de tempo; e supponhamos que Δ varia uniformemente durante algumas horas, ou que é $\delta \Delta = \frac{P}{15} \omega$.

$$\frac{dP}{d\Delta} \delta \Delta = \left(\frac{P \cot \Delta}{15 \operatorname{tang} P} - \frac{P \cot D}{15 \operatorname{sen} P} \right) \cdot \omega = \frac{c}{15} \cdot \omega;$$

A primeira parte da equação é nulla quando as indicações meteorológicas do estado da atmosphera são as mesmas nos instantes da observação das alturas correspondentes. A segunda parte é nulla para o sol nos solstícios; e tambem desaparece quando é

$$\cos P = \frac{\text{tang } \Delta}{\text{tang } D}$$

Mas para que esta segunda condição possa verificar-se é necessario que seja $\text{tang } \Delta < \text{tang } D$, o que relativamente ao sol não pôde acontecer fóra dos tropicos.

252. Achado δP , e reduzido a tempo do relógio t : se chamarmos M a epocha da passagem meridiana em tempo do relógio, e θ, θ' , os ângulos horarios P, P' , reduzidos á mesma especie de tempo, serão

$$M = \tau + \theta, \quad M = \tau' - \theta' = \tau' - \theta - t;$$

$$\text{logo} \quad M = \frac{\tau + \tau'}{2} - \frac{t}{2} \dots \dots (3).$$

253. Para o calculo do valor approximado de P , que se deve sub-

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 P}{d\Delta^2} \delta\Delta^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{15}\right)^2 \left[\frac{P^2 \text{cosec}^2 \Delta}{\text{tang } P} + c P \cot \Delta + \frac{c^2}{\text{tang } P} \right] \text{sen } 1''.$$

onde se suppoem P expresso em minutos, e ω em segundos.

No caso de P extremamente pequeno, estas expressões reduzem-se a

$$\frac{dP}{d\Delta} \delta\Delta = \frac{\cot \Delta - \cot D}{15 \text{ sen } 1'} \cdot \omega.$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 P}{d\Delta^2} \delta\Delta^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{15}\right)^2 \left[\frac{P \text{cosec}^2 \Delta}{\text{sen } 1'} + c P \cot \Delta + \frac{c^2}{P \text{sen } 1'} \right] \text{sen } 1''.$$

Assim a pequenez de P , ainda que não fosse practicamente limitada, não faria por isso muito grande o termo $\frac{d^2 P}{d\Delta^2}$; como já notára o sr. D. Francisco Marquez. Mas

poderia fazer attendivel o termo $\frac{1}{2} \frac{d^2 P}{d\Delta^2} \delta\Delta^2$.

stituir no segundo membro da fórmula (2), é necessario converter o tempo $\frac{\tau' - \tau}{2}$ do relógio em tempo do astro, e multiplicar este por 15; e para o calculo de t , que entra na fórmula (3), é necessario inversamente dividir δP por 15, e depois converter o tempo $\frac{\delta P}{15}$ do astro em tempo do relógio. Fazemos estas conversões.

Sejam: a^{π} o adiantamento diurno do relógio, em tempo d'elle, sobre o tempo sideral, ou seja $R + a^{\pi}$ o tempo do relógio correspondente á revolução sideral R ; a^{ζ} o adiantamento em um dia medio do tempo sideral sobre o medio, ou $R + a^{\zeta}$ o tempo sideral corresponde á revolução do sol medio R ; e a^{μ} o adiantamento em um dia verdadeiro do tempo medio sobre o solar apparente, ou $R + a^{\mu}$ o tempo medio correspondente á revolução R do sol verdadeiro. Chamando em geral F^m o factor de conversão do tempo da especie m no da especie n , ou o factor pelo qual se deve multiplicar o primeiro para o transformar no segundo, teremos:

$$R = (R + a^{\pi}) \cdot F_{\zeta}^{\pi}, \quad R = (R + a^{\zeta}) \cdot F_{\mu}^{\zeta}, \quad R = (R + a^{\mu}) \cdot F_{\alpha}^{\mu}.$$

E no caso de se conhecer directamente o adiantamento em um dia medio do relógio sobre o tempo medio, teremos do mesmo modo

$$R = (R + a^{\pi}) \cdot F_{\mu}^{\pi}.$$

Sendo pois P, S, M, A, um intervalo de tempo expresso respectivamente em unidades de tempo do relógio, de tempo sideral, de tempo medio, e de tempo solar apparente, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = P \cdot \pi F_{\zeta}, e^{\pi} F_{\zeta} = \frac{R}{R + a^{\pi}}; \\ M = S \cdot \zeta F_{\mu}, e^{\zeta} F_{\mu} = \frac{R}{R + a^{\zeta}}; \\ A = M \cdot \mu F_{\alpha}, e^{\mu} F_{\alpha} = \frac{R}{R + a^{\mu}}; \\ M = P \cdot \pi F_{\mu}, e^{\pi} F_{\mu} = \frac{R}{R + a^{\pi}} \end{array} \right.$$

254. Posto isto: 1.º seja conhecido o andamento do relógio relativamente ao tempo sideral.

Se o astro observado for uma estrella, exprimiremos S em P pela primeira equação; e teremos o tempo P do relógio em tempo S do astro, ou inversamente.

Se o astro observado for o sol, exprimiremos primeiramente S em P pela primeira equação, depois M em S pela segunda, e finalmente A em M pela terceira; o que dará

$$A = P \cdot \pi F_{\mu} \cdot \zeta F_{\alpha} \cdot \mu F_{\alpha};$$

e por esta converteremos o tempo P do relógio em tempo A do astro, ou inversamente.

2.º Seja conhecido o andamento do relógio relativamente ao tempo medio.

Se o astro observado for uma estrella, exprimiremos M em P pela quarta equação, e depois S em M pela segunda, o que dará

$$S = P \cdot \frac{F^{\pi} F^{\mu}}{F^{\zeta}}$$

por meio da qual se converte o tempo P do relógio em tempo sideral S , ou inversamente.

Se o astro observado for o sol, exprimiremos M em P pela quarta equação, e depois A em M pela terceira, o que dará

$$A = P \cdot \frac{F^{\pi} F^{\mu}}{F^{\zeta} F^{\alpha}}$$

por meio da qual se converte o tempo do relógio em tempo do astro, ou inversamente.

Teremos assim, desprezando os quadrados e productos de

$$a^{\pi}, a^{\zeta}, a^{\mu}, a^{\alpha}$$

Quando se observa uma estrella:

$$S = P \left(1 - \frac{a^{\pi}}{R} \right), \text{ ou } S = P \cdot \left(1 + \frac{a^{\zeta} - a^{\mu}}{R} \right)$$

Quando se observa o sol:

$$A = P \left(1 - \frac{a^{\pi} + a^{\zeta} + a^{\mu}}{R} \right), \text{ ou } A = P \cdot \left(1 - \frac{a^{\pi} + a^{\mu}}{R} \right)$$

255. *Adiantamentos.* 1.º O adiantamento a^{π} do tempo do relógio

sobre o sidereal em um dia sidereal conhece-se pela observação das passagens meridianas consecutivas d'uma estrella.

2.º O adiantamento a^{ζ} do tempo sidereal sobre o medio em um dia

medio conhece-se do seguinte modo:

Seja T o anno tropico, $T = 365,242264$ dias medios. Este tempo equivale a $T + 1 = 366,242264$ dias sideraes, determinados pelas passagens meridianas do ponto γ .

Chamando 1^{ζ} o dia medio e 1^{μ} o dia sidereal, temos

$$T \cdot 1^{\mu} = (T + 1) \cdot 1^{\zeta},$$

que dá

$$1^{\zeta} = 1^{\mu} - \frac{1^{\mu}}{T + 1}, \quad 1^{\mu} = 1^{\zeta} + \frac{1^{\zeta}}{T},$$

isto é,

$$86400^{\zeta} = 86400^{\mu} - \frac{86400^{\mu}}{366,242264},$$

$$86400^{\mu} = 86400^{\zeta} + \frac{86400^{\zeta}}{365,242264};$$

portanto são:

$$a^{\zeta} = \frac{86400^{\zeta}}{365,242264} = 236^{\zeta},5553,$$

$$a^{\mu} = \frac{86400^{\mu}}{366,242264} = 235^{\mu},9094;$$

a primeira das quaes dá o *adiantamento*, em um dia medio, do tempo sideral sobre o medio expresso em segundos sideraes; e a segunda dá o *retardamento*, em um dia sideral, do tempo medio sobre o sideral expresso em segundos medios.

3.º Para achar o *adiantamento* a_{α}^{μ} do tempo medio sobre o solar em

um dia verdadeiro, se chamarmos θ e θ' os tempos medios de duas passagens consecutivas do sol verdadeiro pelo meridiano, contados desde o primeiro meio dia medio, e E, E' , as equações do tempo que lhes correspondem, teremos:

$$\theta = 0^{hm} - E, \theta' = 24^{hm} - E', \theta' - \theta = 24^{hm} + E - E';$$

e como o intervallo $\theta' - \theta$ das duas passagens equivale a 24^{hv} , será

$$24^{hv} = 24^{hm} + E - E',$$

ou $86400^{verd.} = 86400^{med.} + E - E'.$

Portanto

$$a_{\alpha}^{\mu} = E - E'.$$

4.º Finalmente, se $R + \frac{\pi}{\alpha}$ for, em tempo do relógio, o intervallo de duas passagens meridianas consecutivas do sol, equivalente ao mesmo intervallo em tempo medio $R + E - E'$, será 'nelle $\frac{\pi}{\alpha} + E' - E$ o *adiantamento* do relógio sobre o tempo medio. Por conseguinte o *adianta-*

mento πa_{μ} do tempo do relógio sobre o meio, em um dia medio, será (a)

$$\pi a_{\mu} = (\pi a_{\alpha} + E' - E) \cdot \frac{R}{R + E - E'}$$

ou proxicamente $\pi a_{\mu} = \pi a_{\alpha} + E' - E$.

(a) Também se pôde achar esta fórmula do modo seguinte. Sejam θ, θ' , os tempos do relógio das passagens meridianas consecutivas do sol verdadeiro; E, E' , as equações do tempo correspondentes; e E_p, E_p' , estas equações convertidas em tempo do relógio. Os tempos do relógio em que teriam lugar as passagens meridianas do sol medio, são $\theta + E_p, \theta' + E_p'$; por conseguinte é

$$\pi a_{\mu} = \pi a_{\alpha} + E_p' - E_p.$$

E porque é

$$E_p' - E_p = (E' - E) \cdot \frac{R + \pi a_{\mu}}{R}$$

a eliminação de $E_p' - E_p$ conduz á mesma equação

$$\pi a_{\mu} = \frac{R (\pi a_{\alpha} + E' - E)}{R + E - E'}$$

ALFABETIZADO

Seg.	20"	15"	10"	5"	0"	5"	10"	15"	20"
110.4	110.0	109.6	109.2	108.8	108.4	108.0	107.6	107.2	106.8
110.9	110.5	110.1	109.7	109.3	108.9	108.5	108.1	107.7	107.3
111.4	111.0	110.6	110.2	109.8	109.4	109.0	108.6	108.2	107.8
111.9	111.5	111.1	110.7	110.3	109.9	109.5	109.1	108.7	108.3
112.4	112.0	111.6	111.2	110.8	110.4	110.0	109.6	109.2	108.8
112.9	112.5	112.1	111.7	111.3	110.9	110.5	110.1	109.7	109.3
113.4	113.0	112.6	112.2	111.8	111.4	111.0	110.6	110.2	109.8
113.9	113.5	113.1	112.7	112.3	111.9	111.5	111.1	110.7	110.3
114.4	114.0	113.6	113.2	112.8	112.4	112.0	111.6	111.2	110.8
114.9	114.5	114.1	113.7	113.3	112.9	112.5	112.1	111.7	111.3
115.4	115.0	114.6	114.2	113.8	113.4	113.0	112.6	112.2	111.8
115.9	115.5	115.1	114.7	114.3	113.9	113.5	113.1	112.7	112.3
116.4	116.0	115.6	115.2	114.8	114.4	114.0	113.6	113.2	112.8
116.9	116.5	116.1	115.7	115.3	114.9	114.5	114.1	113.7	113.3
117.4	117.0	116.6	116.2	115.8	115.4	115.0	114.6	114.2	113.8
117.9	117.5	117.1	116.7	116.3	115.9	115.5	115.1	114.7	114.3
118.4	118.0	117.6	117.2	116.8	116.4	116.0	115.6	115.2	114.8
118.9	118.5	118.1	117.7	117.3	116.9	116.5	116.1	115.7	115.3
119.4	119.0	118.6	118.2	117.8	117.4	117.0	116.6	116.2	115.8
119.9	119.5	119.1	118.7	118.3	117.9	117.5	117.1	116.7	116.3
120.4	120.0	119.6	119.2	118.8	118.4	118.0	117.6	117.2	116.8
120.9	120.5	120.1	119.7	119.3	118.9	118.5	118.1	117.7	117.3
121.4	121.0	120.6	120.2	119.8	119.4	119.0	118.6	118.2	117.8
121.9	121.5	121.1	120.7	120.3	119.9	119.5	119.1	118.7	118.3
122.4	122.0	121.6	121.2	120.8	120.4	120.0	119.6	119.2	118.8
122.9	122.5	122.1	121.7	121.3	120.9	120.5	120.1	119.7	119.3
123.4	123.0	122.6	122.2	121.8	121.4	121.0	120.6	120.2	119.8
123.9	123.5	123.1	122.7	122.3	121.9	121.5	121.1	120.7	120.3
124.4	124.0	123.6	123.2	122.8	122.4	122.0	121.6	121.2	120.8
124.9	124.5	124.1	123.7	123.3	122.9	122.5	122.1	121.7	121.3
125.4	125.0	124.6	124.2	123.8	123.4	123.0	122.6	122.2	121.8
125.9	125.5	125.1	124.7	124.3	123.9	123.5	123.1	122.7	122.3
126.4	126.0	125.6	125.2	124.8	124.4	124.0	123.6	123.2	122.8
126.9	126.5	126.1	125.7	125.3	124.9	124.5	124.1	123.7	123.3
127.4	127.0	126.6	126.2	125.8	125.4	125.0	124.6	124.2	123.8
127.9	127.5	127.1	126.7	126.3	125.9	125.5	125.1	124.7	124.3
128.4	128.0	127.6	127.2	126.8	126.4	126.0	125.6	125.2	124.8
128.9	128.5	128.1	127.7	127.3	126.9	126.5	126.1	125.7	125.3
129.4	129.0	128.6	128.2	127.8	127.4	127.0	126.6	126.2	125.8
129.9	129.5	129.1	128.7	128.3	127.9	127.5	127.1	126.7	126.3
130.4	130.0	129.6	129.2	128.8	128.4	128.0	127.6	127.2	126.8
130.9	130.5	130.1	129.7	129.3	128.9	128.5	128.1	127.7	127.3
131.4	131.0	130.6	130.2	129.8	129.4	129.0	128.6	128.2	127.8
131.9	131.5	131.1	130.7	130.3	129.9	129.5	129.1	128.7	128.3
132.4	132.0	131.6	131.2	130.8	130.4	130.0	129.6	129.2	128.8
132.9	132.5	132.1	131.7	131.3	130.9	130.5	130.1	129.7	129.3
133.4	133.0	132.6	132.2	131.8	131.4	131.0	130.6	130.2	129.8
133.9	133.5	133.1	132.7	132.3	131.9	131.5	131.1	130.7	130.3
134.4	134.0	133.6	133.2	132.8	132.4	132.0	131.6	131.2	130.8
134.9	134.5	134.1	133.7	133.3	132.9	132.5	132.1	131.7	131.3
135.4	135.0	134.6	134.2	133.8	133.4	133.0	132.6	132.2	131.8
135.9	135.5	135.1	134.7	134.3	133.9	133.5	133.1	132.7	132.3
136.4	136.0	135.6	135.2	134.8	134.4	134.0	133.6	133.2	132.8
136.9	136.5	136.1	135.7	135.3	134.9	134.5	134.1	133.7	133.3
137.4	137.0	136.6	136.2	135.8	135.4	135.0	134.6	134.2	133.8
137.9	137.5	137.1	136.7	136.3	135.9	135.5	135.1	134.7	134.3
138.4	138.0	137.6	137.2	136.8	136.4	136.0	135.6	135.2	134.8
138.9	138.5	138.1	137.7	137.3	136.9	136.5	136.1	135.7	135.3
139.4	139.0	138.6	138.2	137.8	137.4	137.0	136.6	136.2	135.8
139.9	139.5	139.1	138.7	138.3	137.9	137.5	137.1	136.7	136.3
140.4	140.0	139.6	139.2	138.8	138.4	138.0	137.6	137.2	136.8
140.9	140.5	140.1	139.7	139.3	138.9	138.5	138.1	137.7	137.3
141.4	141.0	140.6	140.2	139.8	139.4	139.0	138.6	138.2	137.8
141.9	141.5	141.1	140.7	140.3	139.9	139.5	139.1	138.7	138.3
142.4	142.0	141.6	141.2	140.8	140.4	140.0	139.6	139.2	138.8
142.9	142.5	142.1	141.7	141.3	140.9	140.5	140.1	139.7	139.3
143.4	143.0	142.6	142.2	141.8	141.4	141.0	140.6	140.2	139.8
143.9	143.5	143.1	142.7	142.3	141.9	141.5	141.1	140.7	140.3
144.4	144.0	143.6	143.2	142.8	142.4	142.0	141.6	141.2	140.8
144.9	144.5	144.1	143.7	143.3	142.9	142.5	142.1	141.7	141.3
145.4	145.0	144.6	144.2	143.8	143.4	143.0	142.6	142.2	141.8
145.9	145.5	145.1	144.7	144.3	143.9	143.5	143.1	142.7	142.3
146.4	146.0	145.6	145.2	144.8	144.4	144.0	143.6	143.2	142.8
146.9	146.5	146.1	145.7	145.3	144.9	144.5	144.1	143.7	143.3
147.4	147.0	146.6	146.2	145.8	145.4	145.0	144.6	144.2	143.8
147.9	147.5	147.1	146.7	146.3	145.9	145.5	145.1	144.7	144.3
148.4	148.0	147.6	147.2	146.8	146.4	146.0	145.6	145.2	144.8
148.9	148.5	148.1	147.7	147.3	146.9	146.5	146.1	145.7	145.3
149.4	149.0	148.6	148.2	147.8	147.4	147.0	146.6	146.2	145.8
149.9	149.5	149.1	148.7	148.3	147.9	147.5	147.1	146.7	146.3
150.4	150.0	149.6	149.2	148.8	148.4	148.0	147.6	147.2	146.8

TABOA
DOS VALORES DE $\frac{2\text{sen}^2 \frac{1}{2} p'}{\text{sen } 1''}$, EM SEGUNDOS.

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

SEG.	0 ^m	1 ^m	2	3 ^m	4 ^m	5 ^m	6 ^m	7 ^m
0	0,0	2,0	7,8	17,7	31,4	49,1	70,7	96,2
1	0,0	2,0	8,0	17,9	31,7	49,4	71,1	96,9
2	0,0	2,1	8,1	18,1	31,9	49,7	71,5	97,1
3	0,0	2,2	8,2	18,3	32,2	50,1	71,9	97,6
4	0,0	2,2	8,4	18,5	32,5	50,4	72,3	98,1
5	0,0	2,3	8,5	18,7	32,7	50,7	72,7	98,5
6	0,0	2,4	8,7	18,9	33,0	51,1	73,1	99,0
7	0,0	2,4	8,8	19,1	33,3	51,4	73,5	99,4
8	0,0	2,5	8,9	19,3	33,5	51,7	73,9	99,9
9	0,0	2,6	9,1	19,5	33,8	52,1	74,3	100,4
10	0,1	2,7	9,2	19,7	34,1	52,4	74,7	100,8
11	0,1	2,7	9,4	19,9	34,4	52,7	75,1	101,3
12	0,1	2,8	9,5	20,1	34,6	53,1	75,5	101,8
13	0,1	2,9	9,6	20,3	34,9	53,4	75,9	102,3
14	0,1	3,0	9,8	20,5	35,2	53,8	76,3	102,7
15	0,1	3,1	9,9	20,7	35,5	54,1	76,7	103,2
16	0,1	3,1	10,1	20,9	35,7	54,5	77,1	103,7
17	0,2	3,2	10,2	21,2	36,0	54,8	77,5	104,2
18	0,2	3,3	10,4	21,4	36,3	55,1	77,9	104,6
19	0,2	3,4	10,5	21,6	36,6	55,5	78,3	105,1
20	0,2	3,5	10,7	21,8	36,9	55,8	78,8	105,6
21	0,3	3,6	10,8	22,0	37,2	56,2	79,2	106,1
22	0,3	3,7	11,0	22,3	37,4	56,5	79,6	106,6
23	0,3	3,8	11,1	22,5	37,7	56,9	80,0	107,0
24	0,3	3,8	11,3	22,7	38,0	57,3	80,4	107,5
25	0,3	3,9	11,5	22,9	38,3	57,6	80,8	108,0
26	0,4	4,0	11,6	23,1	38,6	58,0	81,3	108,5
27	0,4	4,1	11,8	23,4	38,9	58,3	81,7	109,0
28	0,4	4,2	11,9	23,6	39,2	58,7	82,1	109,5
29	0,5	4,3	12,1	23,8	39,5	59,0	82,5	110,0
30	0,5	4,4	12,3	24,0	39,8	59,4	83,0	110,4

ARGUMENTO : *Angulo horario em tempo*

Seg.	0 ^m	1 ^m	2 ^m	3 ^m	4 ^m	5 ^m	6 ^m	7 ^m
30	0,5	4,4	12,3	24,0	39,8	59,4	83,0	110,4
31	0,5	4,5	12,4	24,3	40,1	59,8	83,4	110,9
32	0,6	4,6	12,6	24,5	40,3	60,1	83,8	111,4
33	0,6	4,7	12,8	24,7	40,6	60,5	84,2	111,9
34	0,6	4,8	12,9	25,0	40,9	60,8	84,7	112,4
35	0,7	4,9	13,1	25,2	41,2	61,2	85,1	112,9
36	0,7	5,0	13,3	25,4	41,5	61,6	85,5	113,4
37	0,7	5,1	13,4	25,7	41,8	61,9	86,0	113,9
38	0,8	5,2	13,6	25,9	42,1	62,3	86,4	114,4
39	0,8	5,3	13,8	26,2	42,5	62,7	86,8	114,9
40	0,9	5,4	14,0	26,4	42,8	63,0	87,3	115,4
41	0,9	5,6	14,1	26,6	43,1	63,4	87,7	115,9
42	1,0	5,7	14,3	26,9	43,4	63,8	88,1	116,4
43	1,0	5,8	14,5	27,1	43,7	64,2	88,6	116,9
44	1,1	5,9	14,7	27,4	44,0	64,5	89,0	117,4
45	1,1	6,0	14,8	27,6	44,3	64,9	89,5	117,9
46	1,2	6,1	15,0	27,9	44,6	65,3	89,9	118,4
47	1,2	6,2	15,2	28,1	44,9	65,7	90,3	118,9
48	1,3	6,4	15,4	28,3	45,2	66,0	90,8	119,5
49	1,3	6,5	15,6	28,6	45,5	66,4	91,2	120,0
50	1,4	6,6	15,8	28,8	45,9	66,8	91,7	120,5
51	1,4	6,7	15,9	29,1	46,2	67,2	92,1	121,0
52	1,5	6,8	16,1	29,4	46,5	67,6	92,6	121,5
53	1,5	7,0	16,3	29,6	46,8	68,0	93,0	122,0
54	1,6	7,1	16,5	29,9	47,1	68,3	93,5	122,5
55	1,6	7,2	16,7	30,1	47,5	68,7	93,9	123,1
56	1,7	7,3	16,9	30,4	47,8	69,1	94,4	123,6
57	1,8	7,5	17,1	30,6	48,1	69,5	94,8	124,1
58	1,8	7,6	17,3	30,9	48,4	69,9	95,3	124,6
59	1,9	7,7	17,5	31,1	48,8	70,3	95,7	125,1
60	2,0	7,8	17,7	31,4	49,1	70,7	96,2	125,7

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

SEG.	8 ^m	9 ^m	10 ^m	11 ^m	12 ^m	13 ^m	14 ^m	15 ^m
0	125,7	159,0	196,3	237,5	282,7	331,8	384,7	441,6
1	126,2	159,6	197,0	238,3	283,5	332,6	385,6	442,6
2	126,7	160,2	197,6	239,0	284,2	333,4	386,5	443,6
3	127,2	160,8	198,3	239,7	285,0	334,3	387,5	444,6
4	127,8	161,4	198,9	240,4	285,8	335,2	388,4	445,6
5	128,3	162,0	199,6	241,2	286,6	336,0	389,3	446,5
6	128,8	162,6	200,3	241,9	287,4	336,9	390,2	447,5
7	129,4	163,2	200,9	242,6	288,2	337,7	391,1	448,5
8	129,9	163,8	201,6	243,3	289,0	338,6	392,1	449,5
9	130,4	164,4	202,2	244,1	289,8	339,4	393,0	450,5
10	131,0	165,0	202,9	244,8	290,6	340,3	393,9	451,5
11	131,5	165,6	203,6	245,5	291,4	341,2	394,8	452,5
12	132,0	166,2	204,2	246,2	292,2	342,0	395,8	453,5
13	132,6	166,8	204,9	247,0	293,0	342,9	396,7	454,5
14	133,1	167,4	205,6	247,7	293,8	343,7	397,6	455,5
15	133,6	168,0	206,3	248,5	294,6	344,6	398,6	456,5
16	134,2	168,6	206,9	249,2	295,4	345,5	399,5	457,5
17	134,7	169,2	207,6	249,9	296,2	346,3	400,5	458,5
18	135,3	169,8	208,3	250,7	297,0	347,2	401,4	459,5
19	135,8	170,4	208,9	251,4	297,8	348,1	402,3	460,5
20	136,4	171,0	209,6	252,2	298,6	349,0	403,3	461,5
21	136,9	171,6	210,3	252,9	299,4	349,8	404,2	462,5
22	137,4	171,2	211,0	253,6	300,2	350,7	405,1	463,5
23	138,0	172,9	211,6	254,4	301,0	351,6	406,0	464,5
24	138,5	173,5	212,3	255,1	301,8	352,5	407,0	465,5
25	139,1	174,1	213,0	255,9	302,6	353,3	408,0	466,5
26	139,6	174,7	213,7	256,6	303,5	354,2	408,9	467,5
27	140,2	175,3	214,4	257,4	304,3	355,1	409,9	468,5
28	140,7	175,9	215,1	258,1	305,1	356,0	410,8	469,5
29	141,3	176,6	215,8	258,9	305,9	356,9	411,7	470,5
30	141,8	177,2	216,4	259,6	306,7	357,7	412,7	471,5

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

SEG.	8 ^m	9 ^m	10 ^m	11 ^m	12 ^m	13 ^m	14 ^m	15 ^m
30	141,8	177,2	216,4	259,6	306,7	357,7	412,7	471,5
31	142,4	177,8	217,1	260,4	307,5	358,6	413,7	472,6
32	143,0	178,4	217,8	261,1	308,4	359,5	414,6	473,6
33	143,5	179,0	218,5	261,9	309,2	360,3	415,6	474,6
34	144,1	179,7	219,2	262,6	310,0	361,2	416,5	475,6
35	144,6	180,3	219,9	263,4	310,8	362,1	417,5	476,6
36	145,2	180,9	220,6	264,1	311,6	363,0	418,4	477,6
37	145,8	181,6	221,3	264,9	312,5	363,9	419,4	478,7
38	146,3	182,2	222,0	265,7	313,3	364,8	420,3	479,7
39	146,9	182,8	222,7	266,4	314,2	365,7	421,3	480,7
40	147,5	183,4	223,4	267,2	315,0	366,6	422,2	481,7
41	148,0	184,1	224,1	267,9	315,8	367,5	423,2	482,8
42	148,6	184,7	224,8	268,7	316,6	368,4	424,2	483,8
43	149,2	185,4	225,5	269,5	317,4	369,3	425,1	484,8
44	149,7	186,0	226,2	270,2	318,3	370,2	426,1	485,8
45	150,3	186,6	226,9	271,0	319,1	371,1	427,0	486,9
46	150,9	187,3	227,6	271,8	319,9	372,0	428,0	487,9
47	151,5	187,9	228,3	272,6	320,8	372,9	429,0	488,9
48	152,0	188,5	229,0	273,3	321,6	373,8	430,0	490,0
49	152,6	189,2	229,7	274,1	322,4	374,7	430,9	491,0
50	153,2	189,8	230,4	274,9	323,3	375,6	431,9	492,0
51	153,8	190,5	231,1	275,6	324,1	376,5	432,8	493,1
52	154,4	191,1	231,8	276,4	325,0	377,4	433,8	494,1
53	154,9	191,8	232,5	277,2	325,8	378,3	434,8	495,2
54	155,5	192,4	233,3	278,0	326,7	379,2	435,7	496,2
55	156,1	193,1	234,0	278,8	327,5	380,2	436,7	497,2
56	156,7	193,7	234,7	279,5	328,4	381,1	437,7	498,2
57	157,3	194,4	235,4	280,3	329,2	382,0	438,7	499,2
58	157,8	195,1	236,1	281,1	330,0	382,9	439,6	500,3
59	158,4	195,7	236,8	281,9	330,9	383,8	440,6	501,4
60	159,0	196,3	237,5	282,7	331,8	384,7	441,6	502,5

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

SEC.	16 ^m	17 ^m	18 ^m	19 ^m	20 ^m	21 ^m	22 ^m	23 ^m	24 ^m	25 ^m
0	502,5	567,1	635,8	708,3	784,9	865,3	949,5	1037,8	1129,9	1225,9
1	503,5	568,2	636,9	709,5	786,2	866,6	951,0	1039,3	1131,4	1227,5
2	504,6	569,3	638,1	710,8	787,5	868,0	952,4	1040,8	1133,0	1229,2
3	505,6	570,4	639,3	712,1	788,8	869,4	953,8	1042,3	1134,6	1230,8
4	506,7	571,6	640,5	713,3	790,1	870,8	955,3	1043,8	1136,2	1232,5
5	507,7	572,7	641,7	714,6	791,4	872,1	956,7	1045,3	1137,7	1234,1
6	508,8	573,8	642,9	715,9	792,7	873,5	958,2	1046,8	1139,3	1235,7
7	509,8	574,9	644,1	717,1	794,0	874,9	959,6	1048,3	1140,9	1237,3
8	510,9	576,1	645,3	718,4	795,4	876,3	961,1	1049,8	1142,5	1239,0
9	511,9	577,2	646,4	719,6	796,7	877,6	962,5	1051,3	1144,0	1240,6
10	513,0	578,3	647,6	720,9	798,0	879,0	963,9	1052,8	1145,6	1242,3
11	514,0	579,4	648,8	722,1	799,3	880,4	965,4	1054,3	1147,2	1243,9
12	515,1	580,6	650,0	723,4	800,7	881,8	966,9	1055,9	1148,8	1245,6
13	516,1	581,7	651,2	724,6	802,0	883,2	968,3	1057,4	1150,4	1247,2
14	517,2	582,8	652,4	725,9	803,3	884,6	969,8	1058,9	1152,0	1248,8
15	518,3	583,9	653,6	727,1	804,6	886,0	971,2	1060,4	1153,6	1250,5
16	519,3	585,1	654,8	728,4	806,0	887,4	972,7	1062,0	1155,2	1252,2
17	520,4	586,2	656,0	729,6	807,3	888,8	974,1	1063,5	1156,8	1253,8
18	521,4	587,3	657,2	730,9	808,6	890,2	975,5	1065,0	1158,3	1255,5
19	522,5	588,5	658,4	732,2	809,9	891,6	977,0	1066,5	1159,9	1257,1
20	523,6	589,6	659,6	733,5	811,3	893,0	978,5	1068,1	1161,5	1258,8
21	524,6	590,7	660,8	734,7	812,6	894,4	979,9	1069,6	1163,1	1260,4
22	525,7	591,9	662,0	736,0	813,9	895,8	981,4	1071,1	1164,7	1262,1
23	526,8	593,0	663,2	737,2	815,2	897,2	982,9	1072,6	1166,3	1263,7
24	527,9	594,1	664,4	738,5	816,6	898,6	984,4	1074,2	1167,9	1265,4
25	528,9	595,2	665,6	739,7	817,9	900,0	985,8	1075,7	1169,5	1267,0
26	530,0	596,4	666,8	741,0	819,2	901,4	987,3	1077,2	1171,1	1268,7
27	531,1	597,5	668,0	742,3	820,5	902,8	988,8	1078,7	1172,7	1270,3
28	532,2	598,7	669,2	743,6	821,9	904,2	990,3	1080,3	1174,3	1272,0
29	533,2	599,8	670,4	744,8	823,2	905,6	991,8	1081,8	1175,9	1273,7
30	534,3	601,0	671,6	746,1	824,6	907,0	993,2	1083,3	1177,5	1275,4

ARGUMENTO : *Angulo horario em tempo*

SEC.	16 ^m	17 ^m	18 ^m	19 ^m	20 ^m	21 ^m	22 ^m	23 ^m	24 ^m	25 ^m
31	535,4	602,1	672,8	747,4	825,9	908,4	994,7	1084,8	1179,1	1277,1
32	536,5	603,3	674,1	748,7	827,3	909,8	996,2	1086,4	1180,7	1278,8
33	537,5	604,4	675,3	749,9	828,6	911,2	997,6	1087,9	1182,3	1280,4
34	538,6	605,6	676,5	751,2	829,9	912,6	999,1	1089,5	1183,9	1282,1
35	539,7	606,7	677,7	752,5	831,2	914,0	1000,6	1091,0	1185,5	1283,8
36	540,8	607,9	678,9	753,8	832,6	915,5	1002,1	1092,6	1187,1	1285,5
37	541,9	609,0	680,1	755,0	833,9	916,9	1003,5	1094,1	1188,7	1287,1
38	543,0	610,2	681,3	756,3	835,3	918,3	1005,0	1095,7	1190,3	1288,8
39	544,1	611,3	682,5	757,6	836,6	919,7	1006,5	1097,2	1191,9	1290,5
40	545,2	612,5	683,8	758,9	838,0	921,1	1008,0	1098,8	1193,5	1292,2
41	546,2	613,6	685,0	760,2	839,3	922,5	1009,4	1100,3	1195,1	1293,8
42	547,3	614,8	686,2	761,5	840,7	923,9	1010,9	1101,9	1196,7	1295,5
43	548,4	615,9	687,4	762,8	842,0	925,3	1012,4	1103,4	1198,3	1297,2
44	549,5	617,1	688,7	764,1	843,4	926,8	1013,9	1105,0	1199,9	1298,9
45	550,6	618,2	689,9	765,3	844,7	928,2	1015,4	1106,5	1201,5	1300,5
46	551,7	619,4	691,1	766,6	846,1	929,6	1016,9	1108,1	1203,1	1302,2
47	552,8	620,5	692,3	767,9	847,5	931,0	1018,4	1109,6	1204,7	1303,9
48	553,9	621,7	693,6	769,2	848,9	932,4	1019,9	1111,2	1206,7	1305,6
49	555,0	622,8	694,8	770,5	850,2	933,8	1021,4	1112,7	1208,0	1307,3
50	556,1	624,0	696,0	771,8	851,6	935,2	1022,8	1114,3	1209,6	1309,0
51	557,2	625,2	697,2	773,1	852,9	936,6	1024,3	1115,8	1211,2	1310,7
52	558,3	626,4	698,4	774,5	854,3	938,1	1025,8	1117,4	1213,9	1312,4
53	559,4	627,5	699,6	775,8	855,6	939,5	1027,3	1118,9	1214,5	1314,1
54	560,5	628,7	700,9	777,1	857,0	940,9	1028,8	1120,5	1216,1	1315,7
55	561,6	629,9	702,2	778,4	858,4	942,3	1030,3	1122,0	1217,7	1317,4
56	562,7	631,1	703,5	779,7	859,8	943,8	1031,8	1123,6	1219,4	1319,1
57	563,8	632,2	704,7	781,0	861,1	945,2	1033,3	1125,1	1221,0	1320,8
58	564,9	633,4	705,9	782,3	862,5	946,6	1034,8	1126,7	1222,6	1322,5
59	566,0	634,6	707,1	783,6	863,9	948,1	1036,3	1128,3	1224,2	1324,2
60	567,1	635,8	708,3	784,9	865,3	949,6	1037,8	1129,9	1225,9	1325,9

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

Sig.	26 ^m	27 ^m	28 ^m	29 ^m	30 ^m	31 ^m	32 ^m	33 ^m	34 ^m	35 ^m
0	1325,9	1429,7	1537,5	1649,0	1764,6	1884,0	2007,4	2134,6	2265,6	2400,6
1	1327,6	1431,4	1539,3	1650,9	1766,6	1886,0	2009,4	2136,8	2267,8	2402,9
2	1329,3	1433,2	1541,1	1652,8	1768,5	1888,0	2011,5	2138,9	2270,0	2405,2
3	1331,0	1434,9	1542,9	1654,7	1770,5	1890,0	2013,6	2141,1	2272,2	2407,5
4	1332,7	1436,7	1544,8	1656,6	1772,4	1892,1	2015,7	2143,2	2274,5	2409,8
5	1334,4	1438,5	1546,6	1658,5	1774,3	1894,1	2017,8	2145,3	2276,7	2412,0
6	1336,1	1440,3	1548,4	1660,4	1776,3	1896,1	2019,9	2147,5	2278,9	2414,3
7	1337,8	1442,1	1550,2	1662,3	1778,3	1898,1	2022,0	2149,7	2281,2	2416,6
8	1339,5	1443,9	1552,1	1664,2	1780,3	1900,2	2024,1	2151,8	2283,4	2418,9
9	1341,2	1445,6	1553,9	1666,1	1782,3	1902,2	2026,2	2153,9	2285,6	2421,2
10	1342,9	1447,4	1555,8	1668,0	1784,2	1904,3	2028,3	2156,1	2287,8	2423,5
11	1344,6	1449,2	1557,6	1669,9	1786,2	1906,3	2030,4	2158,3	2290,0	2425,8
12	1346,3	1451,0	1559,5	1671,9	1788,2	1908,4	2032,5	2160,5	2292,3	2428,1
13	1348,0	1452,8	1561,3	1673,8	1790,1	1910,4	2034,6	2162,6	2294,5	2430,4
14	1349,7	1454,5	1563,2	1675,7	1792,1	1912,4	2036,7	2164,8	2296,8	2432,7
15	1351,4	1456,3	1565,0	1677,6	1794,1	1914,4	2038,8	2166,9	2299,0	2435,0
16	1353,2	1458,1	1566,9	1679,5	1796,1	1916,5	2040,9	2169,1	2301,3	2437,3
17	1354,9	1459,9	1568,7	1681,4	1798,1	1918,5	2043,0	2171,2	2303,6	2439,6
18	1356,6	1461,6	1570,5	1683,3	1800,0	1920,6	2045,1	2173,4	2305,8	2441,9
19	1358,3	1463,4	1572,4	1685,2	1802,0	1922,6	2047,2	2175,6	2308,0	2444,2
20	1360,1	1465,2	1574,3	1687,2	1804,0	1924,7	2049,3	2177,8	2310,2	2446,5
21	1361,8	1466,9	1576,1	1689,1	1805,9	1926,7	2051,4	2179,9	2312,4	2448,8
22	1363,5	1468,7	1578,0	1691,0	1807,9	1928,8	2053,5	2182,1	2314,7	2451,1
23	1365,2	1470,5	1579,8	1692,9	1809,9	1930,8	2055,7	2184,3	2316,9	2453,4
24	1367,0	1472,3	1581,7	1694,8	1811,9	1932,9	2057,8	2186,5	2319,2	2455,7
25	1368,7	1474,1	1583,5	1696,7	1813,8	1935,0	2059,9	2188,6	2321,5	2458,0
26	1370,4	1475,9	1585,3	1698,6	1815,8	1937,0	2062,0	2190,8	2323,7	2460,3
27	1372,1	1477,7	1587,2	1700,5	1817,8	1939,0	2064,1	2193,0	2325,9	2462,6
28	1373,9	1479,5	1589,1	1702,5	1819,8	1941,1	2066,2	2195,2	2328,2	2464,9
29	1375,6	1481,3	1590,9	1704,4	1821,8	1943,1	2068,3	2197,3	2330,4	2467,2
30	1377,4	1483,1	1592,7	1706,3	1823,8	1945,2	2070,4	2199,5	2332,7	2469,5

ARGUMENTO: *Angulo horario em tempo*

Seg.	26 ^m	27 ^m	28 ^m	29 ^m	30 ^m	31 ^m	32 ^m	33 ^m	34 ^m	35 ^m
31	1379,0	1484,9	1594,6	1708,2	1825,8	1947,2	2072,6	2201,7	2334,9	2471,8
32	1380,8	1486,7	1596,5	1710,2	1827,8	1949,3	2074,7	2203,9	2337,2	2474,2
33	1382,5	1488,5	1598,3	1712,1	1829,8	1951,3	2076,8	2206,1	2339,4	2476,5
34	1384,2	1490,3	1600,2	1714,0	1831,8	1953,4	2078,9	2208,3	2341,7	2478,8
35	1385,9	1492,1	1602,1	1715,9	1833,8	1955,5	2081,0	2210,5	2343,9	2481,1
36	1387,7	1493,9	1604,0	1717,9	1835,8	1957,6	2083,2	2212,7	2346,2	2483,5
37	1389,4	1495,7	1605,9	1719,8	1837,8	1959,6	2085,3	2214,9	2348,5	2485,8
38	1391,2	1497,5	1607,7	1721,7	1839,8	1961,7	2087,4	2217,1	2350,7	2488,1
39	1392,9	1499,3	1609,6	1723,6	1841,8	1963,7	2089,6	2219,3	2353,0	2490,4
40	1394,7	1501,1	1611,5	1725,6	1843,8	1965,8	2091,7	2221,5	2355,2	2492,8
41	1396,4	1502,9	1613,3	1727,5	1845,8	1967,8	2093,8	2223,7	2357,5	2495,1
42	1398,2	1504,7	1615,2	1729,5	1847,8	1969,9	2095,9	2225,9	2359,7	2497,4
43	1399,9	1506,5	1617,1	1731,5	1849,8	1972,0	2098,0	2228,1	2361,9	2499,7
44	1401,7	1508,4	1619,0	1733,4	1851,8	1974,1	2100,2	2230,3	2364,2	2502,1
45	1403,4	1510,2	1620,8	1735,3	1853,8	1976,1	2102,3	2232,5	2366,4	2504,4
46	1405,2	1512,0	1622,7	1737,3	1855,8	1978,2	2104,5	2234,7	2368,7	2506,7
47	1406,9	1513,8	1624,6	1739,2	1857,8	1980,3	2106,6	2236,9	2371,0	2509,0
48	1408,7	1515,6	1626,5	1741,2	1859,8	1982,4	2108,8	2239,1	2373,3	2511,4
49	1410,4	1517,4	1628,3	1743,1	1861,8	1984,4	2110,9	2241,3	2375,5	2513,7
50	1412,2	1519,2	1630,2	1745,1	1863,8	1986,5	2113,1	2243,5	2377,8	2516,1
51	1413,9	1521,0	1632,1	1747,0	1865,8	1988,6	2115,2	2245,7	2380,1	2518,4
52	1415,7	1522,9	1634,0	1749,0	1867,8	1990,7	2117,4	2247,9	2382,4	2520,8
53	1417,4	1524,7	1635,9	1750,9	1869,8	1992,7	2119,6	2250,1	2384,6	2523,1
54	1419,2	1526,5	1637,7	1752,9	1871,8	1994,8	2121,7	2252,3	2386,9	2525,4
55	1420,9	1528,3	1639,6	1754,8	1873,8	1996,9	2123,8	2254,5	2389,2	2527,7
56	1422,7	1530,2	1641,5	1756,8	1875,9	1999,0	2126,0	2256,7	2391,5	2530,1
57	1424,4	1532,0	1643,3	1758,7	1877,9	2001,0	2128,1	2258,9	2393,7	2532,4
58	1426,2	1533,8	1645,2	1760,7	1879,9	2003,1	2130,3	2261,1	2396,0	2534,8
59	1427,9	1535,6	1647,1	1762,6	1882,0	2005,3	2132,4	2263,4	2398,3	2537,1
60	1429,7	1537,5	1649,0	1764,6	1884,0	2007,4	2134,6	2265,6	2400,6	2539,5

TABOA II

$$\text{DE } \left[\frac{2\text{sen}^2 \frac{1}{2} p'}{\text{sen } 1''} = R' \right]$$

ARGUMENTO: Declinação

Ang. hor.	R'	Diferença	Ang. hor.	R'	Diferença
1 ^m . 0 ^s	0',0000	1	10 ^m . 20 ^s	0',1066	70
2 . 0	0,0001	7	10 . 30	0,1136	74
3 . 0	0,0008	16	10 . 40	0,1210	77
4 . 0	0,0024	35	10 . 50	0,1287	81
5 . 0	0,0059	8	11 . 0	0,1368	85
5 . 10	0,0067	9	11 . 10	0,1453	89
5 . 20	0,0076	10	11 . 20	0,1542	93
5 . 30	0,0086	10	11 . 30	0,1635	97
5 . 40	0,0096	12	11 . 40	0,1732	101
5 . 50	0,0108	13	11 . 50	0,1833	105
6 . 0	0,0121	14	12 . 0	0,1938	109
6 . 10	0,0135	15	12 . 10	0,2047	114
6 . 20	0,0150	17	12 . 20	0,2161	120
6 . 30	0,0167	18	12 . 30	0,2281	124
6 . 40	0,0185	19	12 . 40	0,2405	129
6 . 50	0,0204	20	12 . 50	0,2534	134
7 . 0	0,0224	22	13 . 0	0,2668	139
7 . 10	0,0246	24	13 . 10	0,2807	145
7 . 20	0,0270	26	13 . 20	0,2952	150
7 . 30	0,0296	27	13 . 30	0,3102	156
7 . 40	0,0323	29	13 . 40	0,3258	162
7 . 50	0,0352	31	13 . 50	0,3420	168
8 . 0	0,0383	33	14 . 0	0,3588	174
8 . 10	0,0416	35	14 . 10	0,3762	180
8 . 20	0,0451	37	14 . 20	0,3942	186
8 . 30	0,0488	39	14 . 30	0,4128	193
8 . 40	0,0527	42	14 . 40	0,4321	200
8 . 50	0,0569	44	14 . 50	0,4521	207
9 . 0	0,0613	47	15 . 0	0,4728	214
9 . 10	0,0660	49	15 . 10	0,4942	221
9 . 20	0,0709	52	15 . 20	0,5163	228
9 . 30	0,0761	55	15 . 30	0,5391	235
9 . 40	0,0816	58	15 . 40	0,5626	243
9 . 50	0,0874	61	15 . 50	0,5869	251
10 . 0	0,0935	64	16 . 0	0,6120	
10 . 10	0,0999	67			
10 . 20	0,1066				
10 . 30					

TABOA III DE [log. f. = Cl. (tang. lat. — tang. decl.)]

ARGUMENTO: Declinação.

Declin. Austr.	Log. de f.	Declin. Austr.	Log. de f.	Declin. Austr.	Log. de f.	Declin. Austr.	Log. de f.
30°. 0'	9.84690	24°. 0'	9.88923	18°. 0'	9.93173	12°. 0	9.97557
29 . 50	9.84808	23 . 50	9.88040	17 . 50	9.93292	11 . 50	9.97682
29 . 40	9.84926	23 . 40	9.89157	17 . 40	9.93412	11 . 40	9.97807
29 . 30	9.85045	23 . 30	9.89275	17 . 30	9.93531	11 . 30	9.97932
29 . 20	9.85163	23 . 20	6.89392	17 . 20	9.93651	11 . 20	9.98058
29 . 10	9.85281	23 . 10	9.89509	17 . 10	9.93771	11 . 10	9.98183
29 . 0	9.85399	23 . 0	9.89627	17 . 0	9.93891	11 . 0	9.98309
28 . 50	9.85517	22 . 50	9.89744	16 . 50	9.94011	10 . 50	9.98436
28 . 40	9.85635	22 . 40	9.89862	16 . 40	9.94131	10 . 40	9.98562
28 . 30	9.85753	22 . 30	9.89979	16 . 30	9.94251	10 . 30	9.98689
28 . 20	9.85870	22 . 20	9.90097	16 . 20	9.94372	10 . 20	9.98816
28 . 10	9.85988	22 . 10	9.90214	16 . 10	9.94492	10 . 10	9.98943
28 . 0	9.86106	22 . 0	9.90332	16 . 0	9.94613	10 . 0	9.99070
27 . 50	9.86224	21 . 50	9.90450	15 . 50	9.94734	9 . 50	9.99198
27 . 40	9.86341	21 . 40	9.90567	15 . 40	9.94855	9 . 40	9.99326
27 . 30	9.86459	21 . 30	9.90685	15 . 30	9.94976	9 . 30	9.99454
27 . 20	9.86576	21 . 20	9.90803	15 . 20	9.95097	9 . 20	9.99582
27 . 10	9.86694	21 . 10	9.90921	15 . 10	9.95219	9 . 10	9.99711
27 . 0	9.86811	21 . 0	9.91038	15 . 0	9.95340	9 . 0	9.99840
26 . 50	9.86929	20 . 50	9.91156	14 . 50	9.95462	8 . 50	9.99969
26 . 40	9.87046	20 . 40	9.91274	14 . 40	9.95584	8 . 40	0,00098
26 . 30	9.87163	20 . 30	9.91393	14 . 30	9.95706	8 . 30	0,00228
26 . 20	9.87281	20 . 20	9.91511	14 . 20	9.95828	8 . 20	0,00358
26 . 10	9.87398	20 . 10	9.91629	14 . 10	9.95951	8 . 10	0,00488
26 . 0	9.87515	20 . 0	9.91747	14 . 0	9.96073	8 . 0	0,00619
25 . 50	9.87633	19 . 50	9.91865	13 . 50	9.96195	7 . 50	0,00750
25 . 40	9.87750	19 . 40	9.91984	13 . 40	9.96318	7 . 40	0,00881
25 . 30	9.87867	19 . 30	9.92102	13 . 30	9.96441	7 . 30	0,01012
25 . 20	9.87985	19 . 20	9.92221	13 . 20	9.96564	7 . 20	0,01144
25 . 10	9.88102	19 . 10	9.92340	13 . 10	9.96688	7 . 10	0,01276
25 . 0	9.88219	19 . 0	9.92458	13 . 0	9.96811	7 . 0	0,01408
24 . 50	9.88336	18 . 50	9.92577	12 . 50	9.96935	6 . 50	0,01541
24 . 40	9.88454	18 . 40	9.92696	12 . 40	9.97059	6 . 40	0,01674
24 . 30	9.88571	18 . 30	9.92815	12 . 30	9.97183	6 . 30	0,01807
24 . 20	9.88688	18 . 20	9.92934	12 . 20	9.97308	6 . 20	0,01940
24 . 10	9.88805	18 . 10	9.93053	12 . 10	9.97432	6 . 10	0,02074
24 . 0	9.88923	18 . 0	9.93173	12 . 0	9.97557	6 . 0	0,02209

TABOA III DE log. tang. tang. sec. **Continuação** TABOA III

ARGUMENTO: Declinação

Declin. Austr.	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.
6°. 0'	0,02209	0°. 0'	0,07298	6°. 0'	0,13065	12°. 0'	0,19876
5. 50	0,02343	0. 10	0,07448	6. 10	0,13237	12. 10	0,20086
5. 40	0,02478	0. 20	0,07598	6. 20	0,13411	12. 20	0,20296
5. 30	0,02613	0. 30	0,07749	6. 30	0,13586	12. 30	0,20508
5. 20	0,02749	0. 40	0,07900	6. 40	0,13761	12. 40	0,20721
5. 10	0,02885	0. 50	0,08052	6. 50	0,13937	12. 50	0,20936
5. 0	0,03021	1. 0	0,08204	7. 0	0,14114	13. 0	0,21152
4. 50	0,03158	1. 10	0,08357	7. 10	0,14292	13. 10	0,21369
4. 40	0,03295	1. 20	0,08511	7. 20	0,14471	13. 20	0,21588
4. 30	0,03432	1. 30	0,08665	7. 30	0,14651	13. 30	0,21808
4. 20	0,03570	1. 40	0,08819	7. 40	0,14831	13. 40	0,22029
4. 10	0,03708	1. 50	0,08975	7. 50	0,15013	13. 50	0,22252
4. 0	0,03846	2. 0	0,09130	8. 0	0,15195	14. 0	0,22476
3. 50	0,03985	2. 10	0,09287	8. 10	0,15378	14. 10	0,22702
3. 40	0,04125	2. 20	0,09444	8. 20	0,15563	14. 20	0,22930
3. 30	0,04264	2. 30	0,09601	8. 30	0,15748	14. 30	0,23159
3. 20	0,04404	2. 40	0,09760	8. 40	0,15934	14. 40	0,23389
3. 10	0,04545	2. 50	0,09918	8. 50	0,16121	14. 50	0,23621
3. 0	0,04686	3. 0	0,10078	9. 0	0,16309	15. 0	0,23855
2. 50	0,04827	3. 10	0,10238	9. 10	0,16498	15. 10	0,24090
2. 40	0,04969	3. 20	0,10399	9. 20	0,16688	15. 20	0,24327
2. 30	0,05111	3. 30	0,10560	9. 30	0,16879	15. 30	0,24566
2. 20	0,05254	3. 40	0,10722	9. 40	0,17071	15. 40	0,24806
2. 10	0,05397	3. 50	0,10885	9. 50	0,17264	15. 50	0,25048
2. 0	0,05540	4. 0	0,11048	10. 0	0,17458	16. 0	0,25292
1. 50	0,05684	4. 10	0,11212	10. 10	0,17654	16. 10	0,25538
1. 40	0,05828	4. 20	0,11377	10. 20	0,17850	16. 20	0,25786
1. 30	0,05973	4. 30	0,11542	10. 30	0,18047	16. 30	0,26035
1. 20	0,06119	4. 40	0,11709	10. 40	0,18246	16. 40	0,26286
1. 10	0,06264	4. 50	0,11876	10. 50	0,18446	16. 50	0,26539
1. 0	0,06411	5. 0	0,12043	11. 0	0,18646	17. 0	0,26794
0. 50	0,06557	5. 10	0,12211	11. 10	0,18848	17. 10	0,27051
0. 40	0,06704	5. 20	0,12381	11. 20	0,19052	17. 20	0,27310
0. 30	0,06852	5. 30	0,12550	11. 30	0,19256	17. 30	0,27571
0. 20	0,07000	5. 40	0,12721	11. 40	0,19461	17. 40	0,27834
0. 10	0,07149	5. 50	0,12892	11. 50	0,19668	17. 50	0,28099
0. 0	0,07298	6. 0	0,13065	12. 0	0,19876	18. 0	0,28367

TABOIA III

Continuação

III AOBAT

ARGUMENTO: Declinação

Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.
18° . 0'	0,28367	24° . 0'	0,39785	30° . 0'	0,57192	36° . 0'	0,92529
18 . 10	0,28636	24 . 10	0,40165	30 . 10	0,57827	36 . 10	0,94189
18 . 20	0,28908	24 . 20	0,40550	30 . 20	0,58473	36 . 20	0,95922
18 . 30	0,29182	24 . 30	0,40939	30 . 30	0,59130	36 . 30	0,97735
18 . 40	0,29458	24 . 40	0,41333	30 . 40	0,59801	36 . 40	0,99636
18 . 50	0,29737	24 . 50	0,41732	30 . 50	0,60484	36 . 50	0,01632
19 . 0	0,30017	25 . 0	0,42135	31 . 0	0,61180	37 . 0	0,03735
19 . 10	0,30301	25 . 10	0,42544	31 . 10	0,61891
19 . 20	0,30586	25 . 20	0,42957	31 . 20	0,62616
19 . 30	0,30875	25 . 30	0,43375	31 . 30	0,63355
19 . 40	0,31165	25 . 40	0,43799	31 . 40	0,64110
19 . 50	0,31459	25 . 50	0,44228	31 . 50	0,64882
20 . 0	0,31754	26 . 0	0,44663	32 . 0	0,65670	43 . 0	1,05943
20 . 10	0,32053	26 . 10	0,45103	32 . 10	0,66476	43 . 10	1,03314
20 . 20	0,32354	26 . 20	0,45549	32 . 20	0,67300	43 . 20	1,00817
20 . 30	0,32658	26 . 30	0,46001	32 . 30	0,68143	43 . 30	0,98443
20 . 40	0,32965	26 . 40	0,46459	32 . 40	0,69006	43 . 40	0,96180
20 . 50	0,33275	26 . 50	0,46923	32 . 50	0,69890	43 . 50	0,94018
21 . 0	0,33588	27 . 0	0,47393	33 . 0	0,70795	44 . 0	0,91946
21 . 10	0,33903	27 . 10	0,47871	33 . 10	0,71724	44 . 10	0,89959
21 . 20	0,34222	27 . 20	0,48355	33 . 20	0,72676	44 . 20	0,88047
21 . 30	0,34543	27 . 30	0,48845	33 . 30	0,73653	44 . 30	0,86207
21 . 40	0,34868	27 . 40	0,49343	33 . 40	0,74657	44 . 40	0,84431
21 . 50	0,35196	27 . 50	0,49849	33 . 50	0,75689	44 . 50	0,82715
22 . 0	0,35528	28 . 0	0,50362	34 . 0	0,76750	45 . 0	0,81055
22 . 10	0,35863	28 . 10	0,50882	34 . 10	0,77842	45 . 10	0,79447
22 . 20	0,36201	28 . 20	0,51411	34 . 20	0,78966	45 . 20	0,77887
22 . 30	0,36542	28 . 30	0,51948	34 . 30	0,80125	45 . 30	0,76373
22 . 40	0,36887	28 . 40	0,52493	34 . 40	0,81321	45 . 40	0,74901
22 . 50	0,37236	28 . 50	0,53047	34 . 50	0,82555	45 . 50	0,73470
23 . 0	0,37588	29 . 0	0,53610	35 . 0	0,83831	46 . 0	0,72075
23 . 10	0,37945	29 . 10	0,54182	35 . 10	0,85151	46 . 10	0,70716
23 . 20	0,38305	29 . 20	0,54764	35 . 20	0,86518	46 . 20	0,69391
23 . 30	0,38668	29 . 30	0,55355	35 . 30	0,87936	46 . 30	0,68096
23 . 40	0,39036	29 . 40	0,55957	35 . 40	0,89407	46 . 40	0,66832
23 . 50	0,39409	29 . 50	0,56569	35 . 50	0,90936	46 . 50	0,65596
24 . 0	0,39785	30 . 0	0,57192	36 . 0	0,92529	47 . 0	0,64387

TABOA III

Continuação

III 406/3

ARGUMENTO : Declinação

Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.
47°. 0'	0,64387	53°. 0'	0,31720	59°. 0'	0,08673	65°. 0'	9,88633
47. 10	0,63203	53. 10	0,30999	59. 10	0,08093	65. 10	9,88088
47. 20	0,62044	53. 20	0,30284	59. 20	0,07515	65. 20	9,87544
47. 30	0,60908	53. 30	0,29576	59. 30	0,06938	65. 30	9,86999
47. 40	0,59793	53. 40	0,28873	59. 40	0,06364	65. 40	9,86455
47. 50	0,58700	53. 50	0,28176	59. 50	0,05791	65. 50	9,85910
48. 0	0,57627	54. 0	0,27485	60. 0	0,05221	66. 0	9,85365
48. 10	0,56572	54. 10	0,26799	60. 10	0,04652	66. 10	9,84819
48. 20	0,55537	54. 20	0,26119	60. 20	0,04084	66. 20	9,84274
48. 30	0,54519	54. 30	0,25443	60. 30	0,03518	66. 30	9,83728
48. 40	0,53517	54. 40	0,24772	60. 40	0,02954	66. 40	9,83181
48. 50	0,52532	54. 50	0,24107	60. 50	0,02392	66. 50	9,82634
49. 0	0,51562	55. 0	0,23446	61. 0	0,01830	67. 0	9,82087
49. 10	0,50608	55. 10	0,22789	61. 10	0,01270	67. 10	9,81539
49. 20	0,49667	55. 20	0,22137	61. 20	0,00712	67. 20	9,80990
49. 30	0,48740	55. 30	0,21489	61. 30	0,00154	67. 30	9,80440
49. 40	0,47827	55. 40	0,20845	61. 40	9,99598	67. 40	9,79890
49. 50	0,46926	55. 50	0,20205	61. 50	9,99043	67. 50	9,79339
50. 0	0,46037	56. 0	0,19569	62. 0	9,98489	68. 0	9,78787
50. 10	0,45161	56. 10	0,18937	62. 10	9,97936	68. 10	9,78234
50. 20	0,44295	56. 20	0,18307	62. 20	9,97383	68. 20	9,77681
50. 30	0,43441	56. 30	0,17684	62. 30	9,96832	68. 30	9,77126
50. 40	0,42597	56. 40	0,17062	62. 40	9,96282	68. 40	9,76570
50. 50	0,41764	56. 50	0,16444	62. 50	9,95732	68. 50	9,76013
51. 0	0,40940	57. 0	0,15830	63. 0	9,95183	69. 0	9,75454
51. 10	0,40126	57. 10	0,15218	63. 10	9,94635	69. 10	9,74895
51. 20	0,39321	57. 20	0,14609	63. 20	9,94087	69. 20	9,74334
51. 30	0,38525	57. 30	0,14004	63. 30	9,93540	69. 30	9,73771
51. 40	0,37738	57. 40	0,13401	63. 40	9,92994	69. 40	9,73208
51. 50	0,36959	57. 50	0,12801	63. 50	9,92447	69. 50	9,72642
52. 0	0,36188	58. 0	0,12204	64. 0	9,91902	70. 0	9,72075
52. 10	0,35425	58. 10	0,11610	64. 10	9,91356	70. 10	9,71507
52. 20	0,34670	58. 20	0,11018	64. 20	9,90811	70. 20	9,70936
52. 30	0,33922	58. 30	0,10428	64. 30	9,90266	70. 30	9,70364
52. 40	0,33181	58. 40	0,09841	64. 40	9,89722	70. 40	9,69790
52. 50	0,32447	58. 50	0,09256	64. 50	9,89177	70. 50	9,69214
53. 0	0,31720	59. 0	0,08673	65. 0	9,88633	71. 0	9,68637

TABOA III

Continuação

ARGUMENTO : Declinação

Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.
71°. 0'	9.68637	77°. 0'	9.45765	83°. 0'	9.13673	89°. 0'	8.24838
71. 10	9.68057	77. 10	9.45046	83. 10	9.12496	89. 10	8.16810
71. 20	9.67475	77. 20	9.44320	83. 20	9.11293	Pass. inf.	
71. 30	9.66890	77. 30	9.43588	83. 30	9.10064		
71. 40	9.66304	77. 40	9.42849	83. 40	9.08807	89. 10	8.15742
71. 50	9.65715	77. 50	9.42102	83. 50	9.07520		
72. 0	9.65123	78. 0	9.41349	84. 0	9.06203	89. 0	8.23556
72. 10	9.64529	78. 10	9.40588	84. 10	9.04852	88. 50	8.30147
72. 20	9.63933	78. 20	9.39819	84. 20	9.03467	88. 40	8.35843
72. 30	9.63334	78. 30	9.39042	84. 30	9.02045	88. 30	8.40856
72. 40	9.62732	78. 40	9.38257	84. 40	9.00583	88. 20	8.45330
72. 50	9.62127	78. 50	9.37463	84. 50	8.99080	88. 10	8.49367
73. 0	9.61519	79. 0	9.36661	85. 0	8.97532	88. 0	8.53045
73. 10	9.60908	79. 10	9.35849	85. 10	8.95936	87. 50	8.56420
73. 20	9.60294	79. 20	9.35028	85. 20	8.94290	87. 40	8.59539
73. 30	9.59677	79. 30	9.34197	85. 30	8.92588	87. 30	8.62435
73. 40	9.59057	79. 40	9.33356	85. 40	8.90828	87. 20	8.65139
73. 50	9.58433	79. 50	9.32504	85. 50	8.89004	87. 10	8.67673
74. 0	9.57805	80. 0	9.31642	86. 0	8.87111	87. 0	8.70057
74. 10	9.57174	80. 10	9.30768	86. 10	8.85143	86. 50	8.72307
74. 20	9.56539	80. 20	9.29882	86. 20	8.83093	86. 40	8.74437
74. 30	9.55900	80. 30	9.28984	86. 30	8.80954	86. 30	8.76459
74. 40	9.55257	80. 40	9.28074	86. 40	8.78717	86. 20	8.78383
74. 50	9.54610	80. 50	9.27151	86. 50	8.76372	86. 10	8.80218
75. 0	9.53959	81. 0	9.26214	87. 0	8.73907	86. 0	8.81970
75. 10	9.53304	81. 10	9.25262	87. 10	8.71309	85. 50	8.83648
75. 20	9.52644	81. 20	9.24296	87. 20	8.68560	85. 40	8.85256
75. 30	9.51979	81. 30	9.23315	87. 30	8.65643	85. 30	8.86801
75. 40	9.51310	81. 40	9.22318	87. 40	8.62532	85. 20	8.88287
75. 50	9.50636	81. 50	9.21314	87. 50	8.59199	85. 10	8.89717
76. 0	9.49956	82. 0	9.20273	88. 0	8.55610	85. 0	8.91097
76. 10	9.49272	82. 10	9.19223	88. 10	8.51718	84. 50	8.92428
76. 20	9.48582	82. 20	9.18155	88. 20	8.47466	84. 40	8.93715
76. 30	9.47886	82. 30	9.17067	88. 30	8.42779	84. 30	8.94959
76. 40	9.47185	82. 40	9.15958	88. 40	8.37552	84. 20	8.96164
76. 50	9.46478	82. 50	9.14827	88. 50	8.31643	84. 10	8.97332
77. 0	9.45765	83. 0	9.13673	89. 0	8.24838	84. 0	8.98465

TABELA III

Continuação

ARGUMENTO: Declinação

Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.	Declin. Boreal	Log. de f.
84°. 0'	8.98465	78°. 0'	9.25571	72°. 0'	9.40638	66°. 0'	9.50985
83. 50	8.99565	77. 50	9.26094	71. 50	9.40974	65. 50	9.51231
83. 40	9.00634	77. 40	9.26609	71. 40	9.41306	65. 40	9.51476
83. 30	9.01673	77. 30	9.27116	71. 30	9.41635	65. 30	9.51718
83. 20	9.02683	77. 20	9.27616	71. 20	9.41960	65. 20	9.51959
83. 10	9.03667	77. 10	9.28108	71. 10	9.42283	65. 10	9.52198
83. 0	9.04626	77. 0	9.28594	71. 0	9.42602	65. 0	9.52435
82. 50	9.05560	76. 50	9.29073	70. 50	9.42919	64. 50	9.52671
82. 40	9.06471	76. 40	9.29545	70. 40	9.43232	64. 40	9.52905
82. 30	9.07360	76. 30	9.30011	70. 30	9.43543	64. 30	9.53138
82. 20	9.08228	76. 20	9.30470	70. 20	9.43850	64. 20	9.53369
82. 10	9.09076	76. 10	9.30924	70. 10	9.44155	64. 10	9.53598
82. 0	9.09905	76. 0	9.31371	70. 0	9.44457	64. 0	9.53826
81. 50	9.10715	75. 50	9.31813	69. 50	9.44756	63. 50	9.54052
81. 40	9.11508	75. 40	9.32249	69. 40	9.45053	63. 40	9.54277
81. 30	9.12283	75. 30	9.32679	69. 30	9.45347	63. 30	9.54500
81. 20	9.13042	75. 20	9.33104	69. 20	9.45638	63. 20	9.54722
81. 10	9.13786	75. 10	9.33524	69. 10	9.45927	63. 10	9.54942
81. 0	9.14514	75. 0	9.33938	69. 0	9.46213	63. 0	9.55161
80. 50	9.15228	74. 50	9.34348	68. 50	9.46497	62. 50	9.55379
80. 40	9.15928	74. 40	9.34753	68. 40	9.46778	62. 40	9.55595
80. 30	9.16615	74. 30	9.35152	68. 30	9.47057	62. 30	9.55810
80. 20	9.17288	74. 20	9.35547	68. 20	9.47334	62. 20	9.56024
80. 10	9.17949	74. 10	9.35938	68. 10	9.47609	62. 10	9.56236
80. 0	9.18598	74. 0	9.36324	68. 0	9.47881	62. 0	9.56447
79. 50	9.19235	73. 50	9.36705	67. 50	9.48151	61. 50	9.56656
79. 40	9.19861	73. 40	9.37083	67. 40	9.48419	61. 40	9.56865
79. 30	9.20476	73. 30	9.37456	67. 30	9.48685	61. 30	9.57072
79. 20	9.21080	73. 20	9.37825	67. 20	9.48948	61. 20	9.57278
79. 10	9.21674	73. 10	9.38190	67. 10	9.49210	61. 10	9.57482
79. 0	9.22358	73. 0	9.38551	67. 0	9.49469	61. 0	9.57686
78. 50	9.22833	72. 50	9.38908	66. 50	9.49727	60. 50	9.57888
78. 40	9.23398	72. 40	9.39261	66. 40	9.49982	60. 40	9.58089
78. 30	9.23954	72. 30	9.39611	66. 30	9.50236	60. 30	9.58289
78. 20	9.24502	72. 20	9.39957	66. 20	9.50487	60. 20	9.58488
78. 10	9.25040	72. 10	9.40299	66. 10	9.50737	60. 10	9.58686
78. 0	9.25571	72. 0	9.40638	66. 0	9.50985	60. 0	9.58882

TABOIA IV

REFRACÇÕES

Para 0^m,760 do Barometro, e +10° do Thermometro centigradoARGUMENTO: *Altura apparente*

Altura apparente	Refracção		Diff. p. 10'	Altura apparente	Refracção		Diff. p. 10'
0° 0'	33'	47",9	112",7	5° 0'	9' 54",8	15",8	
10	31	55,2	104,8	10	9 39,0	15,1	
20	30	10,4	97,2	20	9 23,9	14,3	
30	28	33,2	90,1	30	9 9,6	13,7	
40	27	3,1	83,5	40	8 55,9	13,1	
50	25	39,6	77,3	50	8 42,8	12,5	
1 0	24	22,3	71,6	6 0	8 30,3	12,0	
10	23	10,7	66,4	10	8 18,3	11,4	
20	22	4,3	61,6	20	8 6,9	11,0	
30	21	2,7	57,1	30	7 55,9	10,5	
40	20	5,6	53,1	40	7 45,4	10,1	
50	19	12,5	49,4	50	7 35,3	9,7	
2 0	18	23,1	46,0	7 0	7 25,6	9,3	
10	17	37,1	42,9	10	7 16,3	9,0	
20	16	54,2	40,1	20	7 7,3	8,6	
30	16	14,1	37,4	30	6 58,7	8,3	
40	15	36,7	35,1	40	6 50,4	8,0	
50	15	1,6	32,9	50	6 42,4	7,7	
3 0	14	28,7	30,8	8 0	6 34,7	7,5	
10	13	57,9	29,0	10	6 27,2	7,1	
20	13	28,9	27,3	20	6 20,1	7,0	
30	13	1,6	25,7	30	6 13,1	6,7	
40	12	35,9	24,2	40	6 6,4	6,5	
50	12	11,7	22,9	50	5 59,9	6,2	
4 0	11	48,8	21,6	9 0	5 53,7	6,1	
10	11	27,2	20,5	10	5 47,6	5,9	
20	11	6,7	19,4	20	5 41,7	5,6	
30	10	47,3	18,4	30	5 36,1	5,6	
40	10	28,9	17,5	40	5 30,5	5,3	
50	10	11,4	16,6	50	5 25,2	5,2	
5 0	9	54,8	15,8	10 0	5 20,0	5,0	

TABOA IV

Continuação

ARGUMENTO : *Altura aparente*

Altura apparente	Refracção	Diff. p. 10'	Altura apparente	Refracção	Diff. p. 10'
10° 0'	5' 20'',0	5'',0	14°	3' 50'',0	2'',58
10	5 15,0	4,9	15	3 34,5	2,28
20	5 10,1	4,7	16	3 20,8	2,03
30	5 5,4	4,6	17	3 8,6	1,82
40	5 0,8	4,5	18	2 57,7	1,64
50	4 56,3	4,4	19	2 47,8	1,49
11 0	4 51,9	4,2	20	2 38,9	1,35
10	4 47,7	4,2	21	2 30,8	1,24
20	4 43,5	4,0	22	2 23,4	1,14
30	4 39,5	3,9	23	2 16,6	1,05
40	4 35,6	3,8	24	2 10,3	0,97
50	4 31,8	3,7	25	2 4,4	0,90
12 0	4 28,1	3,6	26	1 59,0	0,84
10	4 24,5	3,6	27	1 54,0	0,79
20	4 20,9	3,4	28	1 49,3	0,74
30	4 17,5	3,4	29	1 44,8	0,69
40	4 14,1	3,2	30	1 40,7	0,65
50	4 10,9	3,2	31	1 36,8	0,62
13 0	4 7,7	3,2	32	1 33,1	0,58
10	4 4,5	3,0	33	1 29,6	0,55
20	4 1,5	3,0	34	1 26,3	0,53
30	3 58,5	2,9	35	1 23,1	0,50
40	3 55,6	2,9	36	1 20,1	0,48
50	3 52,7	2,7	37	1 17,2	0,46
14 0	3 50,0	2,6	38	1 14,5	0,44
			39	1 11,9	0,42
			40	1 9,4	0,40
			41	1 7,0	0,38
			42	1 4,7	0,37
			43	1 2,5	0,36
			44	1 0,3	0,34

TABOA IV

Continuação

ARGUMENTO: *Altura aparente*

Altura aparente	Refracção	Diff. p. 10'	Altura aparente	Refracção	Diff. p. 10'
44°	1' 0',3	0',34	68°	0' 23',6	0',20
45	0 58,3	0,33	69	0 22,4	0,19
46	0 56,3	0,32	70	0 21,2	0,19
47	0 54,3	0,31	71	0 20,1	0,19
48	0 52,5	0,30	72	0 18,9	0,19
49	0 50,7	0,29	73	0 17,8	0,19
50	0 48,9	0,28	74	0 16,7	0,18
51	0 47,2	0,28	75	0 15,6	0,18
52	0 45,5	0,27	76	0 14,5	0,18
53	0 43,9	0,26	77	0 13,5	0,18
54	0 42,3	0,26	78	0 12,4	0,18
55	0 40,8	0,25	79	0 11,3	0,18
56	0 39,3	0,24	80	0 10,3	0,18
57	0 37,9	0,24	81	0 9,2	0,17
58	0 36,4	0,23	82	0 8,2	0,17
59	0 35,0	0,23	83	0 7,2	0,17
60	0 33,7	0,22	84	0 6,1	0,17
61	0 32,3	0,22	85	0 5,1	0,17
62	0 31,0	0,22	86	0 4,1	0,17
63	0 29,7	0,21	87	0 3,1	0,17
64	0 28,4	0,21	88	0 2,0	0,17
65	0 27,2	0,20	89	0 1,0	0,17
66	0 26,0	0,20	90	0 0,0	
67	0 24,8	0,20			
68	0 23,6	0,20			

TABOA V

Primeiro factor para corrigir as refrações medias da taboa IV

ARGUMENTO: *Barometro*

Barometro	Factor	Barom.	Factor	Barom.	Factor	Barom.	Factor
m.		m.		m.		m.	
0, 710	0, 934	0, 730	0, 961	0, 750	0, 987	0, 770	1, 013
711	936	734	962	751	988	771	014
712	937	732	963	752	989	772	016
713	938	733	964	753	991	773	017
714	939	734	966	754	992	774	018
715	0, 941	735	0, 967	755	0, 993	775	1, 020
716	942	736	968	756	995	776	021
717	943	737	970	757	996	777	022
718	945	738	971	758	997	778	024
719	946	739	972	759	999	779	025
720	0, 947	740	0, 974	760	1, 000	780	1, 026
721	949	741	975	761	001	781	028
722	950	742	976	762	003	782	029
723	951	743	978	763	004	783	030
724	953	744	979	764	005	784	032
725	0, 954	745	0, 980	765	1, 007	785	1, 033
726	955	746	982	766	008	786	034
727	957	747	983	767	009	787	036
728	958	748	984	768	011	788	037
0, 729	0, 959	0, 749	0, 986	0, 769	1, 012	0, 789	1, 038

TÁBOA V

Segundo factor para corrigir as refrações medias da Taboa IV

ARGUMENTO: *Thermometro centigrado*

Therm.	Factor	Therm.	Factor	Therm.	Factor	Therm.	Factor
- 29°	1,168	- 9°	1,076	+ 11°	0,996	31°	0,927
28	1,163	8	1,071	12	0,993	32	0,924
27	1,158	7	1,067	13	0,989	33	0,921
26	1,153	6	1,063	14	0,985	34	0,918
25	1,148	5	1,059	15	0,982	35	0,915
24	1,144	4	1,055	16	0,978	36	0,912
23	1,139	3	1,051	17	0,975	37	0,908
22	1,134	2	1,047	18	0,971	38	0,905
21	1,129	1	1,043	19	0,968	39	0,902
20	1,125	- 0	1,039	20	0,964	40	0,899
19	1,120	+ 1	1,035	21	0,961	41	0,896
18	1,115	2	1,031	22	0,957	42	0,893
17	1,111	3	1,027	23	0,954	43	0,890
16	1,106	4	1,023	24	0,950	44	0,887
15	1,102	5	1,019	25	0,947	45	0,884
14	1,097	6	1,015	26	0,944	46	0,881
13	1,093	7	1,011	27	0,940	47	0,878
12	1,089	8	1,007	28	0,937	48	0,876
11	1,084	9	1,004	29	0,934	49	0,873
10	1,080	10	1,000	30	0,931	50	0,870

TABOA VII

Angulo ω do raio com a vertical e logarithmos do raio r ,

Segundo factor para $\frac{1}{299}$ para o achatamento

ARGUMENTO: Latitude

Lat.	ω	Log. r	Lat.	ω	Log. r	Lat.	ω	Log. r	Lat.	ω	Log. r
0	0' 0"	0,0000000	23	8' 15"	79,9997799	46	11' 30"	39,9992542	69	7' 43"	9,9887312
1	0 24,0	9,9999996	24	8 32,1	7641	47	11 29,1	2258	70	7 25,1	7174
2	0 48,0	9982	25	8 47,9	7424	48	11 27,1	2005	71	7 6,3	7013
3	1 11,9	9961	26	9 3,1	7228	49	11 24,2	1752	72	6 47,1	6859
4	1 35,8	9930	27	9 17,6	7027	50	11 20,5	1502	73	6 27,3	6713
5	1 59,5	9891	28	9 31,5	6820	51	11 16,0	1252	74	6 7,0	6573
6	2 23,1	9843	29	9 44,7	6608	52	11 10,7	1005	75	5 46,3	6441
7	2 46,5	9786	30	9 57,1	6392	53	11 4,5	0759	76	5 25,2	6317
8	3 9,8	9721	31	10 8,8	6171	54	10 57,5	0515	77	5 3,7	6201
9	3 32,7	9648	32	10 19,8	5946	55	10 49,7	0275	78	4 41,8	6093
10	3 55,5	9566	33	10 30,1	5717	56	10 41,2	9,9990037	79	4 19,5	5993
11	4 17,9	9476	34	10 39,5	5484	57	10 31,8	9,9989802	80	3 57,0	5901
12	4 40,1	9377	35	10 48,2	5248	58	10 21,7	9571	81	3 34,1	5818
13	5 1,8	9271	36	10 56,2	5009	59	10 10,8	9344	82	3 11,0	5743
14	5 23,3	9157	37	11 3,3	4767	60	9 59,1	9121	83	2 47,6	5676
15	5 44,3	9035	38	11 9,6	4522	61	9 46,7	8902	84	2 24,1	5619
16	6 4,9	8905	39	11 15,1	4267	62	9 33,6	8688	85	2 0,3	5570
17	6 25,1	8768	40	11 19,8	4027	63	9 19,8	8479	86	1 36,4	5530
18	6 44,9	8624	41	11 23,6	3777	64	9 5,4	8275	87	1 12,4	5498
19	7 4,1	8472	42	11 26,6	3525	65	8 50,2	8077	88	0 48,3	5476
20	7 22,8	8314	43	11 28,8	3273	66	8 34,4	7884	89	0 24,2	5463
21	7 41,0	8149	44	11 30,1	3019	67	8 18,0	7697	90	0 0,0	5458
22	7 58,6	7977	45	11 30,6	2766	68	8 0,9	7517			

000,0	00	000,0	00	000,1	00	111,1	11
000,0	01	000,0	01	000,1	01	111,1	11
000,0	02	000,0	02	000,1	02	111,1	11
000,0	03	000,0	03	000,1	03	111,1	11
000,0	04	000,0	04	000,1	04	111,1	11
000,0	05	000,0	05	000,1	05	111,1	11
000,0	06	000,0	06	000,1	06	111,1	11
000,0	07	000,0	07	000,1	07	111,1	11
000,0	08	000,0	08	000,1	08	111,1	11
000,0	09	000,0	09	000,1	09	111,1	11
000,0	10	000,0	10	000,1	10	111,1	11

TABOA DAS MATERIAS

DA

ASTRONOMIA

Pag.

Primeiras noções 1

DA TERRA

Redondeza da terra 5

Definições 8

COORDENADAS DOS ASTROS

Differentes systemas de coordenadas 9

Transformação de coordenadas 10

DA ATMOSPHERA

Altura da atmosphera 16

Refracção atmospherica. Formula de Bradley 17,18

DO GNOMON

Traçado da meridiana 19

Passagens meridianas do sol, e alturas 20,22

INSTRUMENTOS ASTRONOMICOS

Oculos astronomicos 23

Telescopios de reflexão 24

	Pag.
Reticulos.....	25
Nonios	26
Parafuso micrometrico.....	28
Niveis.....	29
Verticalidade, e horizontalidade dos eixos de rotação.....	31,34
Fios a prumo	34
Relogios	36
Modo de experimentar os relógios	40
Quarto de circulo	42
Alturas correspondentes.....	44
Circularidade e uniformidade do movimento diurno.....	46
Equatorial	49
Reticulos rhomboidal, e annular	50,51
Correcções	53
Oculo meridiano. Verificações.....	58,59
Passagens meridianas.....	61
Uso do oculo para conhecer o andamento dos relógios.....	63
Correcções instrumentaes.....	67
Correcção da passagem	70
Quadrante de Troughton.....	72
Circular mural.....	76
Correcções	81
Circular meridiano.....	85
Sector zenithal	87
Instrumento de passagens no primeiro vertical	89
Correcções	93

ASCENSÕES RECTAS E DECLINAÇÕES

Determinação d'estas coordenadas. Reduções ao fio do meio	96
Catalogos d'estrellas; tempo sideral.....	101

ASPECTOS CELESTES, COORDENADAS GEOGRAPHICAS, ROTAÇÃO DA TERRA

Definições dos circulos celestes e terrestres.....	104
Posições dos logares	106
Instrumentos de reflexão.....	108
Rotação da terra.....	110

ERRATAS DA PRIMEIRA PARTE DA ASTRONOMIA

REFRACÇÕES ATMOSPHERICAS

	Pag.
Noções fundamentaes.....	113
Investigação da formula differencial da refração atmospherica	115
Integração approximada, e determinação das constantes.....	118,121
Formulas de Bradley, e de Simpson	127,130
Determinação do coeſiciente da formula da refração pelas observações das estrellas, e do sol	131
Influencia da refração nos diametros apparentes	133

PARALLAXES

Parallaxes d'altura.....	138
Parallaxes d'ascensão recta e declinação.....	144
Formulas d'Olbers.....	149
Determinação da parallaxe horizontal.....	152

CIRCULAR REPETIDOR

Descripção e verificações do instrumento.....	159
Determinação da hora.....	162
Determinação da distancia zenithal meridiana.....	167
Inconvenientes d'este intrumento.....	172

NOTA 1.^a

SOBRE A FORMULA DE REFRAÇÃO

Insignificancia do erro que se commette em tomar o angulo das tangentes extremas como correcção da distancia zenithal	175
Limites dentro dos quaes se pode empregar sem receio a formula ordinaria da refração	178

NOTA 2.^a

EQUAÇÃO DAS ALTURAS CORRESPONDENTES

Equação	180
Conversão do tempo do relógio em tempo do astro, e inversamente.	183

REFRAÇÕES ATMOSFERICAS

TABOAS

	Pag.
TABOAS I Valores de $\frac{2 \operatorname{sen} \frac{21}{2} p'}{\operatorname{sen} 1''}$ em segundos, (extrahida da <i>Astronomia de Biot</i>)	189
TABOAS II Valores de $\frac{2 \operatorname{sen} \frac{41}{2} p'}{\operatorname{sen} 1''} = R'$ (extrahida da <i>Astronomia de Delambre</i>)	198
TABOAS III Valores de $\log. f = \text{el. (tang. lat. — tang. decl.)}$, (extrahida d'um additamento inedito á <i>Ephemeride de 1804</i>)	199
TABOAS IV Refracções para $0^m, 760$ do barometro e $+ 10^\circ$ do thermometro centigrado, (extrahida do <i>Conn. des Temps</i>)	205
TABOAS V Factor para a correccão dependente do barometro, (extrahida do mesmo livro)	208
TABOAS VI Factor para a correccão dependente do thermometro, (extrahida do mesmo livro)	209
TABOAS VII Angulo do raio terrestre com a vertical, e logarithmo do mesmo raio, (extrahida da <i>Astronomia de Loomis</i>)	210

NOTA I.ª

SOBRE A FORMULA DE REFRAÇÃO

Insignificancia do erro que se commette em tomar o angulo das tangentes extremas como correccão da distancia zenithal 178

Limites dentro dos quaes se pode empregar sem receio a formula ordinaria da refração 178

NOTA 2.ª

CONVERÇÃO DO TEMPO DO TELEIO EM TEMPO DO ASTRO, E INVERSA. 183

REFRAÇÃO DAS ALFEBRAS CORRESPONDENTES 180

ERRATAS DA PRIMEIRA PARTE DA ASTRONOMIA

Paginas	Linhas	Erros	Emendas
12	ultima	ISQ' e ISQ	SIQ' e SIQ
15	4	tanga	tang' α
16	penultima	1462	10462
17 e 19	Em lugar da	numeração 26 e 27, leia-se: 26 _a e 27 _a	
22	17	em B	em a
35	18	CN	CE
»	antepenult.	Cb	Ob'
39	6	Em dia	Em um dia
44	29	do astro	do horizonte
48	15	envolta	em volta
52	4	determinação	esta determinação
53	penultima	: supprima-se o factor τ'	
57	14	determinar-se	determinar-se aquelles erros
60	8	oculo	ocular
68	antepenult.	e δA^2	e A^2
70	5	sen Δ_3 sen Δ_1	sen Δ_2 sen Δ_1
71	4 subindo	pag. XII	pag. XXII
109	penultima	10°42'30''	10°43'47''
»	ultima	1277,8	1278,9
111	4 subindo	n e g	n e $\frac{1}{2} g$
128	2	$\sqrt{A^2}$	\sqrt{A}
»	3	Maclaurim	Maclaurin
129	2	61,274	60,634
»	4 sub.	29'46'',9	29'38'',8
132	3 e 10 sub.	θ	θ_1
142	8	cot z''	cos z''
153	4 sub.	O ₁ N'E	O ₁ N ₁ E
156	6 sub.	no norte	ao norte
161	2 sub.	A ₀ =	A =
162	11	Supponhamos	Determinação da hora. Supponhamos
164	3	$\frac{1}{2} b \delta P''$	$\frac{1}{2} b \delta P'^2$
177	7	pag. 188	n.º 188
178	8	n.º 86	n.º 186
186	ultima	s π	s μ

Na pag. 7, nota, está trocado o signal do 2.º termo de δr ; mas é melhor o seguinte:

(a) É o que mostram as diferenças respectivas :

$$\delta r = \frac{h \operatorname{sen}(i - \frac{1}{2} \delta \theta) \operatorname{sen} \frac{1}{2} \delta \theta}{2 \operatorname{sen}^2(\frac{1}{2} i - \frac{1}{2} \delta \theta) \operatorname{sen} \frac{1}{2} i}, \quad \delta r = \frac{(2d + \delta d) \delta d}{2h}$$

Assim, no 1.º exemplo, $\delta \theta = 1'12'',5$ explicaria o erro de r .

As parallaxes que na pag. 148 n.º 212, segundo o costume, se chamaram de ascensão recta e declinação, são as δP e $\delta \Delta$ de angulo horario e distancia polar.

186	ultima	2 x
178	8	n.º 88
177	7	pag. 188
164	3	1/2 p.º
162	11	Suppohamos
161	2 sup.	A =
156	6 sup.	no norte
153	4 sup.	O.N.E.
142	8	col x
132	3 e 10 sup.	0
128	4 sup.	20.48.9
129	2	61.27.4
128	3	Maclearum
128	2	v A
111	4 supindo	n e 9
109	ultima	1277.8
109	penultima	10.42.30
71	4 supindo	pag. XII
70	3	sen A
68	antepenult.	6.37.1
60	8	oculo

CIRCULAR MERIDIANO

I

Estudo do Instrumento

SUPPLEMENTO

256. Dentre os diferentes processos empregados, exporemos os dois seguintes; consultando para outros a *Astronomia de Lalande* n.º 2435, e

A PRIMEIRA PARTE DOS ELEMENTOS DE ASTRONOMIA

1.º Tomemos um prisma de cristal bircromático, torçado e dividido por entro refrangente; e seja nelle α o angulo que separa as duas imagens devidas à refração ordinaria e à extraordinaria. Para que, vendo um circulo com o prisma, as duas imagens se toquem, é necessario que seja α o diametro apparente do circulo.

Posto isto, supponhamos que, descrevendo em uma taboa muitos circulos concetricos, e uma distancia dada, e sendo consequentemente conhecidos os diametros apparentes d'elles vistos a essa distancia, se duas imagens do circulo, cujo diametro apparente é d , se tocam sendo vistas pelo oculo com um ocular, diante do qual se colloca o prisma. Então α é o diametro apparente da imagem focal amplificada pelo ocular; e como o diametro apparente do circulo visto sem ocular é d , será a amplificação $\frac{\alpha}{d}$. (Veja a *Astron. d'Arago*, tomo 1.º, pag. 126).

Este meio é muito simples, e o melhor de todos.

2.º Supponhamos que, exposto ao sol os vidros ocular e objectivo, em por outro modo, se meçam as suas distancias focaes: teremos (a.º 35)

$$\text{amplif.} = F \frac{f + g - D}{f}$$

Na pag. 7.ª nota, está trocado o sinal do 2.º termo de $3r$: mas é melhor o seguinte:

(a) É o que mostra as diferenças respectivas:

$$3r = \frac{A \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \delta \right) \operatorname{sen} \frac{1}{2} \delta}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \delta \right) \operatorname{sen} \frac{1}{2} \delta} \quad 3r = \frac{(2d + \delta d) \delta d}{2A}$$

Assim, no 1.º exemplo, $3r = 1'48''$ A explica o erro de r .

As parallaxes que na pag. 148 n.º 212, segundo o costume, se chamaram de ascensão recta e declinação, são as $3P$ e 3δ do angulo herario e distancia polar.

SUPPLEMENTO

A PRIMEIRA PARTE DOS ELEMENTOS DE ASTRONOMIA

CIRCULAR MERIDIANO

I

Estudo do instrumento

Amplificação

256. D'entre os diferentes processos empregados, exporemos os dois seguintes; remettendo para outros á Astronomia de Lalande n.º 2435, e á Physica de Pouillet, 6.ª edição, tomo 2.º, n.º 126.

1.º Tomemos um prisma de crystal birefrangente, tornado achromatico por outro refrangente; e seja nelle a o angulo que separa as duas imagens devidas á refração ordinaria e á extraordinaria. Para que, vendo um circulo com o prisma, as duas imagens se toquem, é necessario que seja a o diametro apparente do circulo.

Posto isto, supponhamos que, descrevendo em uma taboa muitos circulos concentricos, a uma distancia dada, e sendo conseguintemente conhecidos os diametros apparentes d'elles vistos a essa distancia, as duas imagens do circulo, cujo diametro apparente é d , se tocam sendo vistas pelo oculo com um ocular, diante do qual se colloca o prisma. Então é a o diametro apparente da imagem focal amplificada pelo ocular; e como o diametro apparente do circulo visto sem oculo é d , será a amplificação $\frac{a}{d}$ (Vej. a Astronom. d'Arago, tomo 1.º, pag. 126).

Este meio é muito simples, e o melhor de todos.

2.º Supponhamos que, expondo ao sol os vidros ocular e objectivo, ou por outro meio, se medem as suas distancias focaes: teremos (n.º 35)

$$\text{amplif.} = F \frac{f + \varphi - D}{\varphi f}$$

No circular meridiano de Coimbra achamos $F = 1^m, 244$; e:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{lente n.}^\circ 63 \quad f = 0^m, 0238 \quad \varphi = 0^m, 0260 \quad D = 0^m, 0195 \\ \text{lente n.}^\circ 102 \quad f = 0^m, 0150 \quad \varphi = 0^m, 0200 \quad D = 0^m, 0107 \end{array} \right\}$$

Por conseguinte as ampliações são:

$$\text{lente n.}^\circ 63 \dots \frac{1,244 \times 0,0303}{0,0238 \times 0,0260} = 61; \text{lente n.}^\circ 102 \dots \frac{1,244 \times 0,0243}{0,0150 \times 0,0200} = 101.$$

Este meio, em oculares de grande força, exige muito cuidado, por causa da influencia dos erros que se commettem na medição das pequenas distancias focaes das lentes oculares; mas no presente exemplo as ampliações, que achamos, coincidem quasi com os numeros marcados nos dois oculares.

Munhões

257. Se os munhões não têm egual grossura: chamando a e b as inclinações que dá a formula do n.º 135 nas duas posições do braço de rotação, as verdadeiras inclinações do eixo de rotação nellas (n.º 96, (a)) serão:

$$1.^{\text{a}} \text{ posição } I = a - \frac{1}{2}(a - b); \quad 2.^{\text{a}} \text{ posição } I' = b + \frac{1}{2}(a - b).$$

E, chamando α o angulo, que, em ambas as posições, faz com o horizonte a recta que une os pontos de contacto dos munhões com as golas, e i a abertura do cone formado pelas arestas extremas, é

$$i = \frac{1}{2}(a - b), \quad \alpha = a - i = b + i = \frac{1}{2}(a + b).$$

No circular de Coimbra pareceu-nos achar, por muitas leituras $b = -1'' , 75$, quando $a = 0$; o que, sendo assim, daria $\alpha = -i = -0'' , 88$.

Collocando o oculo em differentes inclinações, e procedendo nellas d'este modo, ver-se-ha se as curvas de contacto dos munhões com as golas são semelhantes e semelhantemente postas.

Leituras

258. Se as secções dos munhões não são circulares, ou se o centro do circulo não está na recta que une os centros d'ellas, ficará este centro differentemente elevado nas differentes inclinações do oculo; mas as leituras A e B differirão, em sentido contrario uma da outra, do que seriam se o centro se conservasse na mesma altura. O mesmo acontece quando o braço muda de inclinação, ou quando sobe ou desce em virtude das mudanças de dilatação das peças que o sustentam.

Sejam $A' + a'$, $B' - a'$, as leituras da observação d'um astro, que têm a quantidade a' , uma de mais, outra de menos, devida a esta causa; e sejam $A + a$, $B - a$, as leituras do Nadir, affectas similhantemente da quantidade a . Será :

$$\pm z = A' - A - 180^\circ = B' - B - 180^\circ = \frac{A' - A + B' - B}{2} - 180^\circ;$$

$$\text{ou } \pm z = \frac{(A' + a') - (A + a)}{2} + \frac{(B' - a') - (B - a)}{2} - 180^\circ;$$

e portanto a media é independente da differença $2(a' - a)$ dos resultados parciaes $A' + a' - (A + a) - 180^\circ$, $B' - a' - (B - a) - 180^\circ$.

Assim, no circular de Coimbra, no qual é 2,244 a razão do comprimento $0^m,727$ do braço para o $0^m,324$ do raio do circulo, $1''$ de elevação da extremidade occidental faz diminuir $2'',24$ as leituras do microscopio A , e augmentar $2'',24$ as do microscopio B , isto é, faz variar de $4'',5$ as differenças das leituras dos dois microscopios: o que não influe na media, como acabamos de ver.

E vê-se tambem que a equação pessoal, fazendo ajustar para cima ou para baixo o encruzamento dos fios em ambos os microscopios, e por conseguinte ler tanto de mais em um quanto de menos em outro, não influe na media das duas leituras.

Divisões do micrometro

259. Para avaliar as divisões do micrometro do reticulo collocado na extremidade ocular, basta, ajustada a collimação, fazer andar um espaço a este micrometro, por exemplo, uma volta inteira; depois mover o

oculo até repetir o ajuste da collimação; e finalmente lêr com os microscopios fixos o arco percorrido neste movimento. Esse arco, repartido pelo numero de divisões da circumferencia do micrometro, dará o valor de cada divisão.

No circular de Coimbra achamos assim, para cada divisão, o valor $0'',415$.

Tambem se pode conseguir o mesmo, medindo o espaço que percorre o fio sobre a marca em virtude do movimento do micrometro.

Diametro do fio

260. Para medir o diametro do fio horizontal, basta pôr em contacto as suas duas imagens, reflectida e directa, ficando uma vez a primeira ao norte da segunda, e outra vez a segunda ao norte da primeira. Como a distancia dos eixos das duas imagens reflectidas é dupla do movimento que se deu ao micrometro, e tambem dupla do diametro do fio, será este diametro egual áquelle movimento.

Tambem se pode mover o micrometro do ocular, de sorte que o fio toque successivamente com os seus dois bordos um dos bordos da marca; este movimento será o diametro do fio.

Foi assim que, applicando os dois processos ao fio horizontal que serviu no circular meridiano de Coimbra desde maio de 1856, achamos o meio $1'',60$.

Em quanto aos fios verticaes, se for necessario medir o seu diametro separadamente, podem tomar-se os contactos d'uma estrella circumpolar com os dois bordos do fio, e converter em arco de circulo maximo o tempo decorrido entre as duas observações.

Intervallos dos fios

261. Para conhecer os intervallos equatoriais dos fios serve o processo indicado no n.º 157.

Se o intervallo equatorial i se determinou por n observações d'uma estrella, reduzidas suppondo a declinação d : suppondo a declinação $d + (\delta d)''$,

o intervallo equatorial, será

$$i = \frac{i \operatorname{sen} 1'' \operatorname{tang} d \pm \delta d}{n}$$

Se o intervallo actual das passagens deve ser I , suppondo d a declinação; suppondo $d + (\delta d)''$ a declinação, o intervallo actual será $I + I \operatorname{sen} 1'' \operatorname{tang} d \delta d$. Assim, para $I = 9^m 26^s, 32$ e $d = 88^{\circ} 33'$, será o intervallo $I + 0^s, 108 \delta d$.

(262.) Supponhamos conhecido assim o intervallo actual I de dois fios do reticulo.

Se ha um fio vertical movel, ligado a um parafuso micrometrico, munido d'um apparelho tal que se possam contar facilmente o numero de voltas e as fracções de volta do index, tomar-se-hão mais exactamente por meio d'elle as passagens das estrellas muito proximas do polo, que atravessam lentamente o campo do oculo, do modo seguinte:

Conhecido previamente o numero N de voltas e fracção de volta necessarias para que o fio movel toque successivamente dois fios consecutivos do reticulo, supponhamos que, depois de operar o contacto d'elle com um d'estes fios, a estrella, da qual se quer observar a passagem pelo fio seguinte, está entre ambos; e que, tocando o parafuso do micrometro, se opera no tempo t o contacto do fio movel com a estrella, dadas n voltas e fracção de volta do index: é claro que, chamando I o intervallo actual dos fios, o tempo em que a estrella ha de tocar o fio seguinte, é $t + \left(1 - \frac{n}{N}\right) I$.

A lembrança d'este processo de contactos artificiaes é devida, segundo nos parece, ao sabio astronomo do observatorio de Paris o sr. Villarceau.

Divisões do nivel

263. Estas divisões avaliam-se como se disse no n.º 47. No nivel, que serve no circular meridiano de Coimbra, o seu valor é $1'', 016$, como se disse no n.º 48.

Leituras do micrometro

264. Quando se move o micrometro do ocular no sentido das divisões, supponhamos que o fio vae realmente de norte para sul, como acontece no circular meridiano de Coimbra. Sejam N, O , as medias das leituras dos microscopios, relativas ao nadir e ao astro; n, o , as leituras dos movimentos que se deram ao micrometro; e δ a redução $\frac{2 \Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} P}{\operatorname{sen} 1''}$ ao meridiano (n.ºs 131 e 132).

Temos então :

astro ao sul. . . $z = z' + \delta = O - N - 180^\circ + \delta + o - n$;

astro ao norte. . . $\left\{ \begin{array}{l} \text{p. sup. } z = z' - \delta = N - O - 180^\circ + n - (\delta + o) \\ \text{p. inf. } z = z' + \delta = N - O - 180^\circ + n + (\delta - o) \end{array} \right.$

Nas passagens inferiores, e nas do sul, as leituras o são negativas. Por isso, nas passagens ao norte, a correcção da distancia zenithal é a somma arithmetica do movimento do micrometro relativo á observação do astro com a redução; somma que se tira nas passagens superiores, e se ajunta nas inferiores.

Equações pessoais

265. As diferenças da equação pessoal do tempo da passagem meridiana podem determinar-se com o proprio instrumento. Um observador notará as passagens d'uma estrella, pouco distante do equador, por alguns dos pares de fios correspondentes, 1.º e 7.º, 2.º e 6.º, 3.º e 5.º, 4.º; e outro observador notará a passagem pelos pares restantes. A diferença das medias dos dois observadores, reduzidas ao fio do meio, será a diferença das suas equações pessoais.

Alguns astrónomos têm procurado determinar esta diferença pela observação simultanea da passagem por cada fio. Assim em Greenwich usou-se d'um ocular composto de dois ramos, que faziam entre si o angulo de 120° , e para os quaes era distribuida a luz na bifurcação por um prisma recto de base equilatera. Em cada um dos ramos tomava um observador a mesma passagem, e a diferença dos tempos contados pelos dois observadores dava immediatamente a diferença das equações pessoais. Notou-se porem que, trocando-se os dois observadores, a diferença variava.

A equação pessoal da distancia zenithal poderia tambem determinar-se pelo proprio instrumento. Um observador tomaria as distancias zenithaes d'uma circumpolar nos momentos das passagens por alguns dos fios, e outro tomal-as-ia nos das passagens pelos fios restantes. Reduzidas estas distancias zenithaes a meridianas (n.º 263), a diferença entre as medias dos dois observadores seria a diferença das suas equações pessoais.

Nas observações em muitos fios convem que cada observador tome pares correspondentes, para evitar a influencia da inclinação do fio horizontal.

Se no instrumento ha dois fios horizontaes proximos para observar a posição do astro no meio do intervallo entre elles, convem que o observador tome previamente a distancia zenithal de objectos, que se possam considerar como fixos, collocando-os successivamente no fio inferior, no meio do intervallo e no fio superior, afim de determinar a differença entre as semi sommas das extremas e as tomadas no meio do intervallo; differença, que depois applicará a estas, como uma equação pessoal, nas observações referidas ao mesmo meio.

Tem sido muitas as tentativas para determinar as equações pessoaes, relativas e mais ainda as absolutas, e para assignar as suas causas; mas é certo que os resultados não têm correspondido ás esperanças que ellas faziam conceber. Pode consultar-se a esse respeito a nota 1.^a juncta ao tomo 2.^o da traducção franceza da Astronomia de Brunnow.

307. Nos nivelamentos divide-se em tres a serie de partes do terreno em grupos de tres partes consecutivas: e combina-se cada parte do nivel com e semisommas dos adjacentes para evitar a influencia das variações graduaes da temperatura. Assim, sendo D e E, D' e E', D'' e E'', tres partes consecutivas, toma-se

$$1 = \frac{\frac{D+D''}{2} + \frac{E+E''}{2} + D-E}{2}$$

308. Erros de nivel e collimação. Quando ha um fio cursor paralelo nos verticaes, podem evitar-se os erros de nivel e de collimação pelas diagonaes entre as imagens directas dos fios e as imagens dos fios correspondentes reflectidas em um baba de mercúrio. Este processo lunda-se em

II

Correcções instrumentaes

Nos n.ºs 108 a 113 determinamos os erros de nivel, de collimação e d'azimuth do circular meridiano, e a correcção da passagem meridiana que elles exigem.

Ajuntaremos agora algumas cousas, que ou são convenientes na practica, ou mais rigorosas na theoria.

266. *Erro de nivel.* Para verificar que é parallel ao eixo de rotação a tangente ao meio da bolha, inverteremos o nivel, e com os seus parafusos verticaes traremos a bolha ao meio do intervallo que pela inversão tiver percorrido; o que collocará aquella tangente em um plano parallel ao eixo: e depois, volvendo o eixo, veremos se a bolha fica immovel. Se não ficar immovel, procuraremos, com os parafusos horizontaes do nivel, leval-a a esse estado.

267. Nos nivellamentos divide-se em Paris a seriê de pares de leituras do nivel em grupos de tres pares consecutivos; e combina-se cada par medio com a semisomma dos adjacentes, para evitar a influencia das variações graduaes da temperatura. Assim, sendo D e E, D' e E', D'' e E'', tres pares consecutivos, toma-se

$$L = \frac{\frac{D+D''}{2} - \frac{E+E''}{2} + D' - E'}{4}$$

E se tivermos assim, por exemplo, tres grupos, será a inclinação

$$\frac{\frac{L+L''}{2} + L'}{2}$$

268. *Erros de nivel e collimação.* Quando ha um fio cursor parallel aos verticaes, podem avaliar-se os erros de nivel e de collimação pelas distancias entre as imagens directas dos fios e as imagens dos fios correspondentes reflectidas em um banho de mercurio. Este processo funda-se em

que a distancia angular das duas imagens d'um fio é dupla da distancia angular d'uma d'ellas á vertical.

Se ha sómente um dos erros, de nivel ou de collimação, basta uma observação para o determinar por este processo. Mas se existem ambos, é necessario observar em duas posições invertidas do braço, para que n'uma se combinem aquelles erros por somma, e na outra por differença, em virtude da mudança de signal do de collimação.

Assim, se o eixo de rotação não está bem nivellado, a elevação L da extremidade occidental faz caminhar a imagem reflectida do fio do meio a quantidade $2L$ relativamente á directa para occidente; e o erro de collimação C para oriente a faz correr a quantidade $2C$ para occidente: de sorte que, por estas duas causas, a imagem reflectida correrá para occidente a quantidade $2L+2C$. Invertendo o eixo, será a collimação em sentido contrario, e a imagem reflectida correrá para occidente a quantidade $2L-2C$.

Chamando pois E, E' , as quantidades de que a imagem reflectida está a occidente da directa nas duas posições do braço, serão

$$L = \frac{E+E'}{4}, \quad C = \frac{E-E'}{4} \dots \dots \dots (1)$$

Mas, se os munhões não são eguaes, teremos $E = 2I + 2C$, $E' = 2I' - 2C$, e por tanto

$$C = \frac{E-E'}{4} = \frac{I-I'}{2} \dots \dots \dots (2)$$

sendo I, I' , dados pelas formulas da nota do n.º 96.

269. Suppondo correcto o erro de nivel, e chamando: i_1, i_7 , os intervallos que separam os fios primeiro e ultimo do fio do meio; d_1, d_7 , as distancias da imagem directa do primeiro fio á reflectida do ultimo, e da imagem reflectida do primeiro á directa do ultimo, ambas para a parte d'este; e C o desvio do fio do meio a respeito do vertical, para a parte do primeiro fio: teremos

$$2(i_1 + C) = i_1 + i_7 + d_7, \quad 2(i_7 - C) = i_1 + i_7 - d_1,$$

que dão
$$2C = i_1 - i_7 + \frac{d_1 + d_7}{2}$$

Comparando do mesmo modo os outros fios correspondentes, e sommando, acharemos

$$7C = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7}{2} + i_1 - i_7 + i_2 - i_6 + i_3 - i_5.$$

270. *Erros de collimação e orientação.* Quando ha duas marcas meridianas, uma ao sul e outra ao norte, podem corrigir-se os erros de eixo optico e de azimuth sem inverter o braço de rotação, dirigindo o oculo para uma d'ellas e depois para a outra.

Pelo movimento de um dos parafusos, do reticulo ou do braço, dirige-se o eixo optico para o centro d'uma das marcas; depois, invertendo o oculo para ver a outra e notando o ponto d'ella onde se projecta o eixo optico, leva-se este á direcção do centro fazendo-lhe percorrer o intervallo dos dois pontos, pelo movimento igual dos parafusos do braço e do reticulo.

No caso de haver divisões na marca, ou um fio cursor vertical no reticulo, podem medir-se os erros de eixo optico e de azimuth. Sejam: d a distancia da projecção do eixo optico ao centro d'uma das marcas; e d' a distancia da projecção do mesmo eixo ao centro da outra marca, para a mesma parte, oriental nó occidental, que a primeira. Teremos

$$C = \frac{1}{2}(d + d'), \quad A = \frac{1}{2}(d - d').$$

Correcção da passagem

271. No n.º 113 determinamos a correcção devida aos erros de nivel, de collimação e de azimuth, applicando o principio da superposição, isto é, desprezando as potencias superiores á primeira. Ainda que esta approximação seja sufficiente na practica, indicaremos como se pode resolver o problema rigorosamente.

Sejam Z, P, S, Q, (Fig. 64) o zenith, o polo, o astro e a extremidade occidental do eixo de rotação, projectados na esphera celeste.

Segundo as notações que adoptamos, são $ZQ = 90^\circ - L$, $QZP = 90^\circ - A$, $QS = 90^\circ + C$. Chamemos δt o angulo horario do astro, m o angulo QPZ, e a o arco QP.

O triangulo QPZ dará a e m expressos em L, A, D; depois o trian-

gulo QPS dará $m + \delta t$ expresso em a, Δ, C , isto é, em L, A, D, Δ, C ; e por conseguinte δt expresso nas mesmas quantidades.

Com effeito, estes triangulos QSP, QPZ, dão as quatro equações:

$$-\text{sen } C = \cos(m + \delta t) \text{ sen } \Delta \text{ sen } a + \cos \Delta \cos a \quad (QSP)$$

$$= (\cos m \cos \delta t \text{ sen } a - \text{sen } m \text{ sen } \delta t \text{ sen } a) \text{ sen } \Delta + \cos \Delta \cos a,$$

$$\cos a = \text{sen } A \cos L \text{ sen } D + \text{sen } L \cos D, \quad (QPZ)$$

$$\cos m \text{ sen } a = \frac{\text{sen } L - \cos D \cos a}{\text{sen } D}, \text{ sen } m \text{ sen } a = \cos A \cos L; \quad (QPZ)$$

a primeira das quaes, em virtude das duas ultimas, e depois em virtude da segunda, dá

$$\text{sen } C = \left\{ \begin{array}{l} -\text{sen } L (\text{sen } D \text{ sen } \Delta \cos \delta t + \cos D \cos \Delta) \\ -\text{sen } A \cos L (\text{sen } D \cos \Delta - \cos D \text{ sen } \Delta \cos \delta t) \\ +\cos A \cos L \text{ sen } \Delta \text{ sen } \delta t \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3).$$

Esta equação determina o angulo horario $\frac{\delta t}{15}$, que no n.º 113 se chamou $\Theta - t - \tau$.

272. Se desprezarmos os quadrados de $\text{sen } A$, $\text{sen } C$, $\text{sen } L$, $\text{sen } A$, a equação (3) reduz-se a

$$C = -L \cos(D - \Delta) + \delta t \text{ sen } \Delta - A \text{ sen}(D - \Delta),$$

$$\text{ou } \frac{\delta t}{15} = \frac{C}{15 \text{ sen } \Delta} + \frac{L \cos(D - \Delta)}{15 \text{ sen } \Delta} + \frac{A \text{ sen}(D - \Delta)}{15 \text{ sen } \Delta},$$

que é identica como a formula (5) do n.º 113.

A esta fórmula de Mayer pode dar-se a forma que dá Bessel,

$$\frac{\delta t}{15} = a + b \cot \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta \dots (4);$$

$$\text{sendo } a = \frac{L}{15} \operatorname{sen} D - \frac{A}{15} \cos D, \quad b = \frac{L}{15} \cos D + \frac{A}{15} \operatorname{sen} D, \quad c = \frac{C}{15};$$

fórmula mais commoda que a de Mayer, quando se fazem muitas observações durante as quaes não variam os erros de nivel, de collimação e d'azimuth.

273. Suppondo observadas tres passagens, e conhecido o retardamento diario r do relógio: se fizermos

$$\theta - t = h, \quad \theta' - t' - \frac{r(t' - t)}{24^h - r} = h', \quad \theta'' - t'' - \frac{r(t'' - t)}{24^h - r} = h'',$$

as tres equações

$$h = \tau + a + b \cot \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta, \quad h' = \tau + a + b \cot \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta',$$

$$h'' = \tau + a + b \cot \Delta'' + c \operatorname{cosec} \Delta'',$$

darão, para determinar b e c ,

$$h' - h = \frac{b \operatorname{sen} (\Delta - \Delta')}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \Delta'} + \frac{2c \operatorname{sen} \left(\frac{\Delta - \Delta'}{2} \right) \cos \left(\frac{\Delta + \Delta'}{2} \right)}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \Delta'},$$

$$h'' - h' = \frac{b \operatorname{sen} (\Delta' - \Delta'')}{\operatorname{sen} \Delta' \operatorname{sen} \Delta''} + \frac{2c \operatorname{sen} \frac{\Delta' - \Delta''}{2} \cos \frac{\Delta' + \Delta''}{2}}{\operatorname{sen} \Delta' \operatorname{sen} \Delta''};$$

depois, tendo antes conhecido um dos erros A ou L, as equações

$$b = \frac{L}{15} \cos D + \frac{A}{15} \sin D, \quad a = \frac{L}{15} \sin D - \frac{A}{15} \cos D,$$

darão o outro e a; e finalmente qualquer tres primeiras equações fará conhecer o estado do relógio τ .

Correcção das distancias zenithaes

274. Estas distancias corrigem-se como se disse nos n.º 131 e 132, nos quaes se chamou P o que chamamos aqui δt .

Se a observação se faz em um dos fios lateraes, deve comprehender-se em C a distancia d'esse fio ao do meio, para ter δ .

INSTRUMENTO DE PASSAGENS PELO PRIMEIRO VERTICAL

275. Sejam (Fig. 65) Z, P, S, Q, pontos analogos aos da figura 64. Segundo a notação que adoptamos, são

$$QZ = 90^\circ + i, \quad QZP = v, \quad QS = 90^\circ - \xi.$$

Chamamos t o angulo horario do astro, e α o arco PQ:

Sem repetir os calculos, que se fizeram para o circular meridiano, basta mudar nos resultados L em $-i$, A em $90^\circ - v$, C em $-\xi$, e δt em t . A formula (3) tornar-se-ha em:

$$\text{sen } \xi = \begin{cases} - \text{sen } i (\text{sen } D \text{ sen } \Delta \text{ cost} + \text{cos } D \text{ cos } \Delta) \\ + \text{cos } v \text{ cos } i (\text{sen } D \text{ cos } \Delta - \text{cos } D \text{ sen } \Delta \text{ cost}) \\ - \text{sen } v \text{ cos } i \text{ sen } \Delta \text{ sent} \end{cases} \dots \dots (5),$$

que se deverá combinar com a (1) do n.º 142

$$\text{tang } D \cot \Delta = \text{cos } P \dots \dots \dots (6),$$

ou, pondo $P = t + \delta t$,

$$\text{tang } D \cot \Delta = \text{cos } t \text{ cos } \delta t - \text{sen } t \text{ sen } \delta t \dots \dots (6)'$$

Então as equações (5), (6), (6'), dariam D, P δt , expressos em Δ , t , i , ξ , v ; ou Δ , P, δt , expressos em D, t , i , ξ , v .

os cos t , desprezando
 t , virá a formula

$$\left(\frac{\cot \Delta}{D \sin t} \right);$$

a equação (6'), des-
 pressão de δt , dará

$$2 \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4} t.$$

possam desprezar os
 $\delta t = \operatorname{sen} 2\Delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{4} t$,

$$\dots (7).$$

pequena, ainda pode-
 ha de (5); o que dará

$$\left. \begin{aligned} & \dots \\ & \dots \\ & \dots \end{aligned} \right\} \dots (8).$$

$$\operatorname{tang} t = \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t \quad \operatorname{tang} (D - \delta K) = \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t = \frac{\operatorname{tang} D - \delta K}{1 + \operatorname{tang} D \cdot \delta K} = \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t + \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t \cdot \delta t$$

$$= \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t + \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t \cdot \delta t$$

$$\operatorname{tang} D - \delta K = \operatorname{tang} D + \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t \cdot \delta t + \operatorname{tang} D \cdot \delta K$$

$$\delta K (1 + \operatorname{tang}^2 D) = -\operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t \cdot \delta t$$

$$\delta K = -\frac{\operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t \cdot \delta t \cos^2 D}{\operatorname{sen}^2 D}$$

$$\delta K = \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} \Delta} + v \operatorname{sen} D \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t + i$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen} D}{\operatorname{sen} \Delta} + v \operatorname{sen} D \operatorname{tang} \Delta \operatorname{sen} t + i$$

INSTRUM

275.
 Segundo a n

Chamamos t

Sem rep
 basta mudar
 A formula (4)

$$\text{sen } \xi = \left\{ \begin{array}{l} - \\ + \\ - \end{array} \right.$$

que se dever

ou, pondo P

tang

Então as
 i, ξ, v ; ou Δ .

O VERTICAL

os da figura 64.

lar meridiano,
 ξ , e δt em t .

..... (5),

(6)'

ssos em Δ, t ,

Tal é a solução theorica rigorosa do problema.

276. Se entre as equações (5) e (6') eliminarmos $\cos t$, desprezando os quadrados e productos de $\sin i$, $\sin \xi$, $\sin v$, $\sin \delta t$, virá a formula

$$\delta t = - \left(\frac{\xi}{\cos D \sin \Delta \sin t} + \frac{v}{\cos D} + \frac{i \cot \Delta}{\cos^2 D \sin t} \right);$$

e se puzermos $\tan k = \tan \Delta \cos t$, $D = k + \delta k$, a equação (6'), desprezando os quadrados de δk , e substituindo esta expressão de δt , dará

$$\delta k = \xi \frac{\cos D}{\cos \Delta} + v \sin D \tan t + i;$$

como tinhamos achado nos n.ºs 150 e 149.

277. A equação $\tan k = \tan \Delta \cos t$ dá

$$\tan \Delta - \tan k = \tan (\Delta - k) (1 + \tan \Delta \tan k) = 2 \tan \Delta \sin^2 \frac{1}{2} t.$$

Nas observações tão proximas do zenith, que se possam desprezar os quadrados de $\tan (\Delta - k)$, esta equação dará $\Delta - k = \sin 2\Delta \sin^2 \frac{1}{2} t$, e por conseguinte

$$D = \Delta - \frac{\sin 2\Delta \sin^2 \frac{1}{2} t}{\sin 1''} + \xi + v \sin D \tan t + i \dots (7).$$

278. No caso de não ser $\tan (\Delta - D)$ muito pequena, ainda podemos substituir $\cos t$ por $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} t$ na segunda linha de (5); o que dará

$$\sin (D - \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} - 2 \cos D \sin \Delta \sin^2 \frac{1}{2} t + \frac{\sin \xi}{\cos v \cos i} \\ + \frac{\tan i}{\cos v} (\sin D \sin \Delta \cos t + \cos D \cos \Delta) \\ + \tan v \sin \Delta \sin t \end{array} \right\} \dots (8).$$

Considerando: que, em virtude do triangulo ZPS, o factor de $\frac{\text{tang } i}{\cos v}$

é $\cos z$; que o mesmo triangulo dá $\text{sen } \Delta \text{ sen } t = \text{senz} \text{ sen } A$; e que a diferença entre $\text{sen } A \text{ tang } v$ e $\text{tang } v$ é da terceira ordem, por ser da primeira o seno da diferença entre o azimuth A e 90° : a formula (8) pode ser substituida, sem erro attendivel, pelo systema:

$$\text{sen } z = \text{sen } \Delta \text{ sen } t,$$

$$\text{sen } (D - \Delta) = \left\{ \begin{array}{l} -2 \cos D \text{ sen } \Delta \text{ sen }^2 \frac{1}{2} t + \frac{\text{sen } \xi}{\cos v \cos i} \\ + \text{tang } v \text{ sen } z + \frac{\text{tang } i \cos z}{\cos v} \end{array} \right\} \dots \dots (9);$$

a segunda das quaes, no caso de serem $D - \Delta$, e por conseguinte z , muito pequenos, concorda approximadamente com (7).

Se a observação não for feita no fio do meio, deve substituir-se $\xi + x$ em logar de ξ , tendo x a significação que se lhe deu no n.º 143.

279. No uso da formula (9) ha a vantagem de que o erro de nivel i , cuja influencia não se aniquila pelas inversões como a de ξ , nem pela combinação da passagem oriental com a occidental como a de v , é attenuado pelo factor $\cos z$; vantagem de importancia, quando a estrella não está muito proxima do zenith.

280. Nos instrumentos de passagens de pequenas dimensões usam os constructores allemães dos oculos angulares (*lunettes brisées*), compostos de dois ramos, um ocular, outro objectivo, que se cortam perpendicularmente, e em cuja intersecção ha um prisma ou um espelho de tal sorte collocado, que os raios luminosos vindos do objecto na direcção do ramo objectivo se reflectem e tomam a direcção do ramo ocular, pelo qual chegam ao observador.

Por este artificio, collocado o ramo ocular na direcção do eixo de rotação, o observador segue o movimento do astro, conservando-se commodamente na mesma posição.

Se o reflector é um prisma recto, que tem por base um triangulo rectangulo isoscoles, colloca-se uma das faces eguaes perpendicularmente ao eixo do ramo objectivo, formando a maior um angulo de 45° com os eixos dos dois ramos. Se é um espelho plano, colloca-se perpendicularmente ao

plano dos eixos dos dois ramos, e de modo que a sua projecção sobre este plano faça angulos de 45° com os mesmos eixos.

Illumina-se o reticulo por uma luz collocada na extremidade opposta do eixo de rotaçao, passando os raios luminosos directamente a través do prisma ou d'uma porção transparente do espelho.

Estes oculos têm os inconvenientes de se perder luz na reflexão, de ser o eixo optico exaggeradamente alterado pelas deslocações e deformações que pode soffrer o reflector, de tornar a falta de symmetria do oculo mais difficil o calculo da influencia da flexão; e tambem de offerrecer difficuldade a construcção de bons prismas, sobre tudo para instrumentos grandes: o que restringe o seu uso ás pequenas dimensões, como são as do instrumento de passagens transportavel de Repsold que possuem os observatorios astronomicos de Lisboa e de Coimbra.

Mas é grande a vantagem de se poder sempre nivelar, nas distancias zenithaes respectivas, e conservar suspenso o nivel nas inversões; porque não se elimina por estas, nem pela combinaçao das duas passagens, o erro i , como se eliminam ξ e ν .

Correcções do Equatorial

281. Sejam (fig. 66): P o polo do mundo, π o polo do instrumento; Q_1 a projecção do eixo do circulo de declinação no céu quando está no meridiano, Q_0 quando está no plano $P\pi$, e Q quando está o astro S no plano do circulo de declinação. Ponhamos $PS = \Delta$, $\pi S = \Delta'$, $PQ = 90^\circ - D$, $QPQ_0 = T$, $Q\pi Q_0 = t - t_0$, $SP\pi = \tau$, $Q_0PZ = h$; e $P\pi = a$, $Q\pi = 90^\circ - \varepsilon$, $SQ = 90^\circ + c$; isto é, sejam h , a , ε , c , os erros d'orientação e de inclinação do eixo optico, de inclinação do circulo de declinação, e de collimação.

O triangulo $QP\pi$ dá:

$$\left. \begin{aligned} \text{sen } D &= \text{sen } \varepsilon \cos a - \cos \varepsilon \text{ sen } a \cos (t - t_0), \\ \cos T &= \frac{\text{sen } \varepsilon - \text{sen } D \cos a}{\cos D \text{ sen } a} = \frac{\text{sen } \varepsilon \text{ sen } a + \cos \varepsilon \cos a \cos (t - t_0)}{\cos D} \end{aligned} \right\} \dots (a)$$

$$\cos D \text{ sen } T = \text{sen } (t - t_0) \cos \varepsilon.$$

E os triangulos SPQ , $SP\pi$, dão:

$$\left. \begin{aligned} -\text{sen } c &= \text{sen } D \cos \Delta + \cos D \text{ sen } \Delta \cos (\tau - T), \\ \cos \Delta' &= \cos \Delta \cos a + \text{sen } \Delta \text{ sen } a \cos \tau; \end{aligned} \right\} \dots (b)$$

a primeira das quaes, em virtude das (a), se reduz a:

$$-\text{sen } c = \left\{ \begin{aligned} &\cos \Delta \{ \text{sen } \varepsilon \cos a - \cos \varepsilon \text{ sen } a \cos (t - t_0) \} \\ &+ \text{sen } \Delta \left\{ \begin{aligned} &\cos \tau (\text{sen } \varepsilon \text{ sen } a + \cos \varepsilon \cos a \cos (t - t_0)) \\ &+ \text{sen } \tau \cos \varepsilon \text{ sen } (t - t_0) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}.$$

Portanto, se forem conhecidos os erros instrumentaes, e se das leituras se deduzirem Δ' e $t - t_0$, as equações (b) darão Δ e τ , ou a distancia polar Δ e o angulo horario $\tau + h$ do astro.

282. Simplifiquemos esta determinação, attendendo á pequenez de a , ϵ , c ; e deduzamos das leituras as quantidades referidas.

A ultima equação, desprezando os quadrados e productos de $\text{sen } a$, $\text{sen } \epsilon$, $\text{sen } c$, reduz-se a

$$-c = \cos \Delta (\epsilon - a \cos (t - t_0)) + \text{sen } \Delta \cos (\tau - (t - t_0));$$

o que dá

$$\tau = 90^\circ + t - t_0 + \cotang \Delta (\epsilon - a \cos (t - t_0)) + c \text{ cosec } \Delta;$$

ou

$$\theta = 90^\circ + t - t_0 + h + \cotang \Delta (\epsilon - a \cos (t - t_0)) + c \text{ cosec } \Delta \dots \dots (1),$$

chamando $\theta = \tau + h$ o angulo horario SPZ.

283. O triangulo $\pi P Q_1$ dá

$$-\cos Q_0 \pi Q_1 \cos a = \text{sen } a \text{ tang } \epsilon - \text{sen } Q_0 \pi Q_1 \cot h;$$

por conseguinte

$$Q_0 \pi Q_1 = h,$$

desprezando os quadrados e productos de $\text{sen } a$ e $\text{sen } \epsilon$.

O triangulo $S_0 \pi Q_0$ dá

$$-\text{sen } c = \cos S_0 \pi Q_0 \text{ sen } \Delta'_0 \cos \epsilon + \cos \Delta'_0 \text{ sen } \epsilon;$$

e por conseguinte $S_0 \pi Q_0 = 90^\circ + \varepsilon \cotang \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta,$

ou $S_0 \pi Q_0 = 90^\circ + \varepsilon \cotang \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta',$

desprezando os quadrados e productos de $\operatorname{sen} \varepsilon$, $\operatorname{sen} (\Delta - \Delta')$, $\operatorname{sen} (\Delta - \Delta')$.

Chamando pois $\theta' - h$ o angulo $S \pi Q_0$, será

$$\theta' - h = t - t_0 + 90^\circ + \varepsilon \cotang \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta$$

$$= \tau' + \varepsilon \cotang \Delta + c \operatorname{cosec} \Delta;$$

e a equação (1) tomará a forma do systema

$$\theta' = t - t_0 + h + 90^\circ + \varepsilon \cotang \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta'$$

$$= \tau' + \varepsilon \cot \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta',$$

$$\theta = \theta' - a \cotang \Delta' \operatorname{sen} (\theta' - h)$$

$$= \tau' - a \cot \Delta' \operatorname{sen} (\tau' - h) + \varepsilon \cot \Delta' + c \operatorname{cosec} \Delta'$$

..... (1).

Desprezando as quantidades da mesma ordem, e attendendo a (1), a segunda das equações (b) dá

$$\Delta = \Delta' - a \operatorname{sen} (t - t_0) = \Delta' + a \cos (\theta' - h) \dots \dots \dots (2).$$

284. Se na posição inicial do instrumento se supõem a extremidade Q_0 do eixo do circulo de declinação para a parte opposta, isto é, se este eixo, que temos supposto a oriente do circulo quando se observa o objecto S , está a occidente, a leitura inicial é $180^\circ + t_0$; e as distancias da extremidade do eixo, que é opposta a Q_0 , e occupa o logar d'esta, ao ponto π e ao oculó são $90^\circ + \varepsilon$ e $90^\circ - c$: portanto, nesta inversão, devemos pôr

$t - t_0 + 180^\circ$ em logar de $t - t_0$, e mudar os signaes de ε e c ; substituinto, em vez, das formulas (1'), as seguintes:

$$\left. \begin{aligned} \theta' &= t_1 - t_0 + h - 90^\circ - \varepsilon \cotang \Delta' - c \operatorname{cosec} \Delta' \\ &= \tau'_1 - \varepsilon \cot \Delta' - c \operatorname{cosec} \Delta', \\ \theta &= \theta' - a \cotang \Delta' \operatorname{sen} (\theta' - h) \\ &= \tau'_1 - a \cot \Delta' \operatorname{sen} (\tau'_1 - h) - \varepsilon \cot \Delta' - c \operatorname{cosec} \Delta' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1')_1$$

Em quanto á formula (2): como neste caso a leitura da distancia polar é o complemento para 360° da que era na primeira posição, deverá substituir-se o complemento d'ella em vez d'essa distancia; o que dará:

$$\Delta = 360^\circ - \Delta'_1 + a \cos (\theta' - h) \dots\dots\dots (2)_{1,}$$

285. Se chamarmos $\delta\theta$ e $\delta\Delta$ os erros d'index das leituras dos circulos horario e de declinação, deverão nas formulas precedentes substituir-se $\tau + \delta\theta$ em logar de τ e $(\Delta') + \delta\Delta$ em logar de (Δ') .

286. As formulas (2) e (2)₁ dão

$$\delta\Delta = 180^\circ - \frac{\Delta' + \Delta'_1}{2};$$

e, no meridiano,

$$a = \Delta - 180^\circ - \frac{\Delta' - \Delta'_1}{2}.$$

Quando o eixo do circulo de declinação se colloca na posição horizontal, o circulo passa pelo zenith; e por isso nas duas posições horizontaes do eixo a leste e oeste póde o oculo, supposto c nullo, dirigir-se para aquelle ponto.

Nestas posições são os valores de $t - t_0 + 90^\circ$ e $t_1 - t_0 - 90^\circ$

Handwritten notes:
 $t - t_0 + 180 - 2 \theta_0$
 $\frac{t - t_0 + 180 - 2 \theta_0}{2}$

pequenos angulos $\pm \delta P$, e θ nullo: portanto, dirigindo nellas o óculo para o zenith, as equações (1') e (1')₁ darão

$$0 = t - t_1 + 180^\circ + 2\varepsilon \cot D,$$

ou
$$-\varepsilon = \left(90^\circ - \frac{t_1 - t}{2}\right) \text{tang } D;$$

e

$$\delta P = -\varepsilon \cot D = 90^\circ - \frac{t_1 - t}{2}.$$

Em quanto a h , suppondo o eixo do circulo em Q_1 , ou $t - t_0 = -h$, a equação (2) daria

$$\text{sen } h = \frac{\Delta' - \Delta}{a}.$$

O que tudo é conforme com o que se disse nos n.^{os} 87, 90 e 91, onde se chamaram respectivamente — a , i , — ε , — τ , o que chamamos aqui a , $\delta\Delta$, ε , $ah \text{ sen } 1''$. Os movimentos, no sentido do meridiano e no perpendicular a elle, que se deveriam dar ao polo do instrumento para o rectificar, seriam a e $\tau = ah \text{ sen } 1''$.

287. Mas, suppondo que existem simultaneamente todos os pequenos erros ε , c , a , h , $\delta\Delta$, $\delta\theta$, e querendo determinál-os, podemos recorrer ás observações de duas estrellas conhecidas feitas com o eixo do circulo de declinação nas duas posições; o que dará as equações:

$$\begin{cases} \theta = \tau + \delta\theta - a \cot \Delta \text{ sen } (\theta - h) + \varepsilon \cot \Delta + c \text{ cosec } \Delta \\ \theta_1 = \tau_1 + \delta\theta - a \cot \Delta \text{ sen } (\theta_1 - h) - \varepsilon \cot \Delta - c \text{ cosec } \Delta \\ \theta' = \tau' + \delta\theta - a \cot \Delta' \text{ sen } (\theta' - h) + \varepsilon \cot \Delta' + c \text{ cosec } \Delta' \\ \theta'_1 = \tau'_1 + \delta\theta - a \cot \Delta' \text{ sen } (\theta'_1 - h) - \varepsilon \cot \Delta' - c \text{ cosec } \Delta' \end{cases}$$

$$\Delta = (\Delta) + \delta\Delta + a \cos (\theta - h), \quad \Delta = 360^\circ - (\Delta_1) - \delta\Delta + a \cos (\theta_1 - h),$$

$$\Delta' = (\Delta') + \delta\Delta + a \cos (\theta' - h), \quad \Delta' = 360^\circ - (\Delta'_1) - \delta\Delta + a \cos (\theta'_1 - h).$$

Se as inversões do instrumento se fizerem com tal promptidão que sejam muito pequenos da primeira ordem os senos das semidiferenças entre os angulos horarios correspondentes, $\text{sen } \frac{1}{2}(\theta - \theta_1)$, $\text{sen } \frac{1}{2}(\theta - \theta'_1)$: a differença entre as duas equações do terceiro systema, ou entre as duas do quarto, dará $\delta\Delta$; as differenças entre as duas equações do primeiro systema e entre as duas do segundo darão duas resultantes em ϵ e c , que farão conhecer estes dois erros; a differença entre as duas primeiras equações do primeiro e segundo systema ou entre as duas segundas dos mesmos systemas, e a differença entre as duas primeiras equações do terceiro e quarto systema ou entre as duas segundas dos mesmos systemas, darão duas resultantes que farão conhecer a e h , suppondo já conhecidos ϵ e c ; e finalmente, suppondo já conhecidos ϵ , c e a , qualquer das equações dos dois primeiros systemas dará $\delta\theta$.

288. Mas, por mais bem acabado que seja o equatorial, a direcção obliqua do seu eixo principal, o seu grande comprimento, e as dimensões relativamente inferiores que por isso tem o circulo de declinação, são causa da sua menor estabilidade, da influencia mais sensivel da inflexão, e da imperfeição das suas leituras absolutas.

D'ahi vem que o principal uso d'este instrumento é, como dissemos no n.º 83, a determinação das differenças de ascensão recta e declinação entre os astros desconhecidos e os conhecidos muito proximos d'elles.

Para isso o reticulo, de que fallamos naquelle numero, costuma inscrever-se em um anel que, movendo-se no seu plano em volta do centro d'uma chapa circular graduada, mostra, por um index que gyra com elle, a quantidade angular d'esse movimento.

Supponhamos (Fig. 67) que, disposto o fio E_1O_1 perpendicularmente ao circulo da declinação, e movendo o oculo de modo que a estrella S se projecte no encruzamento dos fios fixos, se faz gyra o reticulo em volta do centro S , até que o fio $S\pi$ tome a direcção SS' que passa pelo outro astro S' , e por consequente o fio E_1O_1 a direcção perpendicular; e que se faz mover o fio movel paralelo a este, até passar por S' .

Chamando d o espaço SS' percorrido pelo fio movel perpendicular a AB , que é a *distancia*, e p' o movimento angular $\pi SS'$ do reticulo, que se chama *angulo de posição*, as differenças de declinação e de ascensão recta, $S'Q_1$ e SQ_1 sen Δ , serão $\Delta - \Delta' = d \cos p'$, $\theta - \theta' = d \text{sen } p' \text{sen } \Delta$.

Porem, como o polo do instrumento π não coincide com o polo do mundo P , os dois fios na sua posição primitiva deviam ter as direcções EO e SP ; por consequente é necessario substituir nas formulas precedentes o angulo $p = p' + PS\pi$ em logar de p' . E como o angulo $PS\pi$ é dado imme-

diatamente pela formula $\text{sen PS } \pi = \text{sen } (\tau - h) \frac{\text{sen } a}{\text{sen } \Delta}$, ou $\text{PS } \pi = a \frac{\text{sen } (\tau - h)}{\text{sen } \Delta}$, que se tira do triangulo π SP, teremos mais exactamente o systema das tres equações :

$$p = p' + a \text{ sen } (\tau - h) \text{ cosec } \Delta,$$

$$\Delta - \Delta' = d \cos p, \quad \theta - \theta' = d \text{ sen } p \text{ sen } \Delta.$$

Sem este reticulo, que é bom no equatorial do Observatorio de Coimbra, aquelle instrumento seria muito imperfeito.

289. *Micrometro de dupla imagem.* Para medir os diametros dos planetas e as pequenas distancias serve tambem o micrometro de dupla imagem, devido ao illustre astronomo real de Greenwich o sr. Airy.

Consiste em um ocular de quatro lentes, a segunda das quaes, a contar do lado objectivo, é partida em duas metades, uma fixa, e outra movel perpendicularmente ao eixo por meio d'um parafuso micrometrico; sendo tambem movel todo o ocular em volta do eixo, e indicada em um circulo concentrico a quantidade d'este movimento.

É facil conceber que por este ocular se pode medir a distancia de dois astros muito proximos, visto um por uma das metades da lente e outro pela outra; e o angulo de posição.

Para ter noções claras e exactas: da sua construcção; dos seus inconvenientes e vantagens; das modificações por que tem passado para satisfazer, quanto é possivel, ás condições d'achromatismo e de nitidez e perfeição das imagens; das verificações que exige o seu uso; e do modo de observar com elle as distancias, segundo a sua grandeza: podem consultar-se: o vol. das Observações de Greenwich de 1840, pag. LXV; o vol. XV das Memorias da sociedade astronomica de Londres, pag. 199; os volumes das noticias mensaes da mesma sociedade, x, pag. 160, e XXVI, paginas 193 e 305.

XV

Instrumentos azimuthaes

290. Combinando duas a duas a distancia zenithal, o azimuth, e o angulo horario, resultam os tres systemas differentes de coordenadas, *distancia zenithal e azimuth*, *distancia zenithal meridiana e ascensão recta*, *azimuth e angulo horario*.

Dos dois primeiros, ha mais tempo usados, já tractámos. O ultimo, proposto por Bessel, para observações feitas no azimuth constante de 90°, está em uso, como dissemos no capitulo precedente. M. Babinet propoz extendel-o a todos os azimuths.

291. Os triangulos ZPE, ZPE', entre o zenith Z, o polo P, e as posições E, E', da estrella no seu parallelo, dão

$$\cot \Delta \operatorname{sen} D = \cot A \operatorname{sen} P + \cos D \cos P,$$

$$\cot \Delta \operatorname{sen} D = \cot A' \operatorname{sen} P' - \cos D \cos P',$$

logo $\cos D = \frac{\cot A \operatorname{sen} P - \cot A' \operatorname{sen} P'}{\cos P' - \cos P} \dots \dots \dots (1).$

Para obter D e Δ teremos pois os dois systemas

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tang} \varphi &= \frac{\operatorname{sen} P \operatorname{tang} A'}{\operatorname{sen} P'}, \quad \cos D = \frac{\operatorname{sen} P \operatorname{sen} (A - \varphi)}{2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \frac{1}{2}(P' + P) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(P' - P)}; \\ \operatorname{tg} \psi &= \operatorname{tang} A \cos D, \quad \operatorname{tang} \Delta = \frac{\operatorname{tang} D \operatorname{sen} \psi}{\operatorname{sen} (P + \psi)} \end{aligned} \right\} (2)$$

292. Se fôr maximo o angulo A, isto é, se a observação corresponder ao instante em que o movimento do astro é vertical, o triangulo ZPE será rectangulo em E. Teremos pois 'neste caso as equações

$$\text{sen } \Delta = \text{sen } A \text{ sen } D, \text{ cot } \Delta \text{ sen } D = \text{cot } A' \text{ sen } P' + \text{cos } D \text{ cos } P',$$

que dão

$$\text{cos } D = \frac{\text{cot } A' \text{ cos } P' \pm \frac{\sqrt{\text{sen } (A + A') \text{ sen } (A - A')}}{\text{sen } A \text{ sen } A'}}{\text{sen } P'} \dots \dots \dots (3),$$

ou os systemas

$$\left. \begin{aligned} \text{cot } \varphi &= \frac{\sqrt{\text{sen } (A + A') \text{ sen } (A - A')}}{\text{sen } A \text{ sen } A' \text{ cos } P'}, \text{ cos } D = \frac{\text{cot } P' \text{ sen } (\varphi \pm A')}{\text{sen } A' \text{ sen } \varphi} \\ \text{sen } \Delta &= \text{sen } A \text{ sen } D \end{aligned} \right\} \dots (4).$$

E se, além d'isso, A' corresponder ao instante em que o angulo horario é de seis horas sideraes, teremos $P' = 90^\circ$. Substituindo pois na fórmula (3), acharemos então

$$\left. \begin{aligned} \text{cos } D &= \frac{\sqrt{\text{sen } (A + A') \text{ sen } (A - A')}}{\text{sen } A \text{ sen } A'} \\ \text{sen } \Delta &= \text{sen } A \text{ sen } D \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

293. Se A corresponder ao primeiro vertical, teremos $A = 90^\circ$.

Substituindo em (1), serão

$$\left. \begin{aligned} \cos D &= \frac{\cot A' \operatorname{sen} P'}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(P+P') \operatorname{sen} \frac{1}{2}(P'-P)} \\ \cot \Delta &= \cot D \cos P \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6).$$

E se, além d'isso, A' corresponder ao instante em que o angulo horario é de seis horas sideraes, teremos $P'=90^\circ$. A equação (1) e o triangulo rectangulo ZPE' darão pois

$$\left. \begin{aligned} \cos D &= \frac{\cot A'}{\cos P'}, \operatorname{tang} \Delta = \operatorname{tang} A' \operatorname{sen} D, \\ \text{ou } \cos D &= \frac{\cot A'}{\cos P'}, \cos \Delta = \frac{\cos A' \cos P}{\operatorname{sen}(A'+P) \operatorname{sen}(A'-P)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (7).$$

Appreciação dos resultados

294. *Probabilidade.* Seja $\varphi(E)$ a probabilidade do que uma observação está inquinada do erro E , ou a frequência relativa d'esse erro.

Ainda que os erros fortuitos não se sujeitam a leis rigorosas, comtudo admittem-se a respeito d'elles algumas proposições que podem servir para determinar a probabilidade da sua existencia.

1.^a Os erros não passam de certos limites superiores.

2.^a Os erros eguaes para mais ou para menos são egualmente provaveis.

3.^a Os erros são mais frequentes e variam menos á medida que são menores; de sorte que o maior valor de $\varphi(E)$ corresponde a E nullo.

295. D'estas proposições, e das regras de probabilidades que na algebra se ensinaram, têm os geometras derivado as expressões seguintes:

$$\varphi(E) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 E^2}, \quad P_a = \int_0^a \frac{2he^{-h^2 E^2}}{\sqrt{\pi}} dE = \int_0^{ah} \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt;$$

chamando P_a a probabilidade de que o valor absoluto d'um erro não exceda a .

296. Se dois erros forem egualmente provaveis, será $ah = a'h'$; por conseguinte os valores de h são inversamente proporcionaes a esses erros, ou directamente proporcionaes á *precisão*; e a constante h pode tomar-se como a medida da precisão d'uma observação.

Considerando porem n observações, acha-se que a precisão da media d'ellas é $h\sqrt{n}$.

297. *Erros.* Chama-se *erro provavel* $\frac{1}{2}$ o erro de probabilidade $\frac{1}{2}$, ou o que está no meio da serie de todos os erros; isto é, o que satisfaz á equação

$$\frac{1}{2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt.$$

A taboa conhecida dos valores do integral do segundo membro (Ritter, *moindres carrés*) mostra que satisfaz a esta equação o valor

$$\varepsilon h = 0,47694.$$

Chama-se *erro medio para recear* ε_2 , ou simplesmente *erro medio*, aquelle cujo quadrado é a somma dos quadros dos erros verdadeiros dividida pelo numero das observações.

Imprimindo a condição do maximo na probabilidade composta das probabilidades de todos os erros, acha-se

$$\varepsilon_2 h \sqrt{2} = 1, \text{ ou } \varepsilon = 0,67449 \varepsilon_2.$$

Chama-se *erro apparente* ε_1 a differença entre cada uma das observações e a media de todas. D'onde resulta $\sum \varepsilon_1 = 0$.

298. *Pesos*. Se duas observações têm desigual precisão, de sorte que uma é tão precisa como seria a media de p conformes com a outra, diz-se que a primeira tem p vezes mais *peso* que a segunda, isto é, que, tomando por unidade o peso d'esta, é p o d'aquella.

Teremos por conseguinte

$$\frac{1}{E' \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{p}}{E \sqrt{2}}, \text{ ou } \frac{p}{1} = \frac{E^2}{E'^2};$$

isto é, *os pesos reciprocamente proporcionaes aos quadrados dos erros*; ou os erros reciprocamente proporcionaes ás raizes quadradas dos pesos.

299. Postos estes principios, estabeleçamos as formulas, que são usadas na apreciação dos resultados.

Sejam $\varepsilon_1, \varepsilon_1', \varepsilon_1'', \dots$ os erros apparentes de n observações e ε_1^2 a somma dos quadrados d'elles, isto é,

$$\sum \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1'^2 + \varepsilon_1''^2 + \dots$$

Se a media precisa da correcção δ , os verdadeiros erros serão

$$\varepsilon_1 + \delta, \varepsilon_1' + \delta, \varepsilon_1'' + \delta, \dots;$$

e teremos, attendendo a $\sum \varepsilon_1 = 0$,

$$\sum (\varepsilon_1 + \delta)^2 = \sum \varepsilon_1^2 + n \delta^2 = n \varepsilon_2^2.$$

Como δ é o erro da media, cujo peso é n vezes maior que o de cada uma; e, como, pelo que ficou dicto, os pesos são inversamente proporcionaes aos quadrados dos erros: será $n \delta^2 = \varepsilon_2^2$; e a equação proposta se transforma em $n \varepsilon_2^2 = \sum \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$, que dá

$$\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_1^2}{n-1}}$$

Por conseguinte (n.ºs 297 e 298):

$$\left. \begin{aligned} \text{Erro provavel d'uma observação} & \dots\dots\dots 0,67449 \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_1^2}{n-1}} \\ \text{Erro provavel da media} & \dots\dots\dots 0,67449 \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_1^2}{n(n-1)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (1).$$

300. Dizer que uma observação tem o peso p é, segundo fica definido, o mesmo que dizer que essa observação pode considerar-se como equivalente a p observações do peso 1.

Sejam pois A', A'', \dots muitas observações; e p', p'', \dots os seus pesos respectivos. Estas observações equivalem a $p' + p'' + \dots$, das quaes cada uma das p' desse o resultado A' , cada uma das p'' o resultado A'', \dots : portanto a media, que se deve tomar, é

$$A = \frac{p' A' + p'' A'' + \dots}{p' + p'' + \dots} \dots\dots\dots (2);$$

e o seu peso é $P = p' + p'' + \dots$

301. Chamando E', E'', \dots as diferenças entre A e cada uma das observações, teremos $E' = A - A', E'' = A - A'', \dots$;

por conseguinte $\sum p E = A \sum p - \sum p A' = 0$,

e $\sum p (E + \delta)^2 = \sum p E^2 + \delta^2 \sum p$.

Mas, sendo $E + \delta$ o erro d'uma observação que tem o peso p , seria $(E + \delta) \sqrt{p}$ o d'uma que tivesse o peso 1; conseguintemente, chamando (ε_2) o erro medio para reccar da unidade de peso, poderemos suppor

$$\Sigma p (E + \delta)^2 = n (\varepsilon_2)^2.$$

Em quanto ao erro δ da media: como o peso d'ella e' Σp , será $\delta^2 \Sigma p = (\varepsilon_2)^2$; o que transformará a equação proposta em

$$n (\varepsilon_2)^2 = \Sigma p E^2 + (\varepsilon_2)^2,$$

ou
$$(\varepsilon_2) = \sqrt{\frac{\Sigma p E^2}{n-1}}.$$

Portanto (n.º 297 e 298)

$$\left. \begin{aligned} \text{Erro provavel da unidade de peso} & \dots\dots 0,67449 \sqrt{\frac{\Sigma p E^2}{n-1}} \\ \text{Erro provavel da media} & \dots\dots\dots 0,67449 \sqrt{\frac{\Sigma p E^2}{p(n-1)}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3).$$

302. Se o resultado é a somma ou a differença de duas observações independentes, e chamamos e' , e'' , os erros d'estas observações, o erro medio da somma é $e = \sqrt{e'^2 + e''^2}$;

por conseguinte (n.º 298)

$$k p' = \frac{1}{e'^2}, k p'' = \frac{1}{e''^2}, k p = \frac{1}{e'^2 + e''^2},$$

que dão
$$p = \frac{p' p''}{p' + p''} \dots\dots\dots (4).$$

Se uma das observações é exacta, o seu peso p'' é infinito; o que reduz (4) a $p = p'$; como deve ser.

Se o resultado provier de sommas ou differenças d'um numero n de observações independentes, vêr-se-ha com facilidade, pela composição successiva, que, chamando π_n o producto dos n pesos p', p'', \dots das observações, e $\Sigma \pi_{n-1}$ a somma dos productos distinctos d'elles $n-1$ a $n-1$, o peso do resultado é

$$p = \frac{\pi_n}{\Sigma \pi_{n-1}}.$$

303. Por exemplo, se durante a passagem d'um astro pelos fios do reticulo do circular meridiano, o observarmos i vezes com igual confiança, e fizermos uma vez a observação do nadir, o peso da distancia zenithal deduzida das i observações do astro, combinadas por differença com a do nadir, e reduzidas ao mesmo fio, será $\frac{i}{i+1}$, tomando por unidade o peso d'uma observação do astro. E como, para $i=1$, o peso da distancia zenithal é assim $\frac{1}{2}$: vê-se que, tomando por unidade o peso da distancia zenithal deduzida d'uma só observação combinada com a do nadir, o peso da distancia deduzida das i observações combinadas com a do nadir será $\frac{2i}{i+1}$.

Mas, por ser $\frac{i}{i+1} - \frac{i-1}{i} = \frac{1}{(i+1)i}$, vê-se que se ganha successivamente menos em augmentar o numero dos pontos do fio horizontal nos quaes se observa a distancia zenithal.

304. Se a collimação tambem se observa duas vezes, por exemplo no principio e no fim, o peso é $\frac{2i}{i+2}$. E como o peso da distancia zenithal, que dá a observação do astro em um só ponto do fio horizontal combinada com as duas do nadir, é $\frac{2}{3}$: se tomarmos este peso por unidade, será $\frac{3i}{i+2}$ o da distancia deduzida das i observações.

305. Se tivermos n distancias zenithaes d'uma circumpolar na passagem superior, e n' na passagem inferior, todas de igual confiança e reduzidas á mesma epocha, será $\frac{nn'}{n+n'}$ o peso da latitude geographica

deduzida, tomando por unidade o d'uma semidistancia zenithal. Mas, se quizermos tornar por unidade o peso d'uma distancia zenithal: como os erros das distancias são duplos dos erros das semidistancias, serão os pesos d'estas quadruplos dos pesos d'aquellas; por conseguinte o peso da latitude referido ao peso d'uma distancia zenithal como unidade será $\frac{4 nn'}{n + n'}$.

306. As mesmas reflexões têm logar na determinação das diferenças de longitudes terrestres pelas diferenças de passagens meridianas das estrellas culminantes e da Lua. Mas nestas, por ser necessario dividil-as pelo movimento horário m em ascensão recta da Lua em segundos, e depois multiplicar por 3600 para reduzir o resultado a segundos, os erros das diferenças de passagens, dadas em segundos, vem a multiplicar-se por $\frac{3600}{m}$; e portanto deve multiplicar-se por $\left(\frac{m}{3600}\right)^2$ o que der a regra do n.º 302, para ter o peso do resultado.

307. Supponhamos, por exemplo, que em dois observatorios se fizeram em uma noite a e a' observações de igual confiança de passagens das mesmas estrellas culminantes, e as das passagens da Lua. Os pesos respectivos da media dos intervallos entre as passagens da Lua e das estrellas em cada observatorio serão $\frac{a}{a+1}$ e $\frac{a'}{a'+1}$, tomando por unidade o d'uma passagem; o peso da differença d'estas medias nos dois observatorios será $\frac{a a'}{a + a' + 2 a a'}$; e o peso da differença de longitudes será

$$\frac{m^2 aa'}{(3600)^2 (a + a' + 2 aa')}$$

Se no primeiro observatorio se usa d'um instrumento tal que o peso d'uma observação feita nelle é k vezes o d'uma observação feita no segundo, serão $\frac{k^2 a}{k a + k} = \frac{k a}{a + 1}$ e $\frac{a'}{a' + 1}$ os pesos da media dos intervallos das passagens em cada observatorio, tomando por unidade o peso d'uma passagem no segundo; e o peso da differença de longitudes será

$$\frac{m^2 k aa'}{(3600)^2 (k a + a' + (k + 1) aa')}$$

Mas, tomando por unidade o peso da longitude deduzida da comparação de dois intervallos entre as passagens, um em cada observatorio, isto é, o peso da longitude deduzida para $a=1$ e $a'=1$, será o peso do resultado

$$\frac{2(k+1)aa'}{ka+a'+(k+1)aa'}$$

Por onde se vê que, se o peso se tomou suppondo $k=1$, e não é assim, deverão multiplicar-se os pesos calculados naquella hypothese

por

$$\frac{k(a+a'+2aa')}{ka+a'+(k+1)aa'}$$

quando a unidade de peso é o peso d'uma passagem;

e por

$$\frac{(k+1)(a+a'+2aa')}{2(ka+a'+(k+1)aa')}$$

quando a unidade é o peso da longitude que se deduz de dois intervallos, um em cada observatorio.

308. Para as applicações numericas do que fica exposto leia-se a *Posição geographica do Observatorio astronomico da Universidade, 1867.*

309. Se uma quantidade é determinada por duas series de observações, feitas com instrumentos differentes, ou em circumstancias differentes, sejam: n' o numero das observações da primeira serie, $\varepsilon'_2 = \sqrt{\frac{\sum E'^2}{n'-1}}$ o erro medio d'ellas, e A' o resultado; n'' , ε''_2 , A'' as quantidades analogas da segunda serie. Como os pesos de A' , A'' , são respectivamente proporcionaes a $\frac{n'}{\varepsilon'^2_2}$ e $\frac{n''}{\varepsilon''^2_2}$, o resultado final, deduzido d'ambas, será:

$$A = \frac{\frac{n'}{\varepsilon'^2_2} A' + \frac{n''}{\varepsilon''^2_2} A''}{\frac{n'}{\varepsilon'^2_2} + \frac{n''}{\varepsilon''^2_2}} = \frac{n' A' + \left(\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon''_2}\right)^2 n'' A''}{n' + \left(\frac{\varepsilon'_2}{\varepsilon''_2}\right)^2 n''}$$

310. Se um resultado for a somma ou a differença de duas quanti-

dades, uma dada por n' observações cujo o erro medio é $\epsilon'_2 = \sqrt{\frac{\sum E'^2}{n'-1}}$, e outra por n'' cujo o erro medio é $\epsilon''_2 = \sqrt{\frac{\sum E''^2}{n''-1}}$, o peso d'elle será

$$\pi = \frac{\frac{n'}{\epsilon'_2{}^2} \cdot \frac{n''}{\epsilon''_2{}^2}}{\frac{n'}{\epsilon'_2{}^2} + \frac{n''}{\epsilon''_2{}^2}} = \frac{n' n''}{n' \epsilon''_2{}^2 + n'' \epsilon'_2{}^2}.$$

311. Para a explicação e demonstração dos princípios fundamentaes, de que fizemos uso na exposição d'estas doutrinas, podem lêr-se os seguintes escriptos: Liagre — *Calcul des probabilités*, 1852; Ritter — *Manuel de l'application de la methode des moindres carrés au calcul des observations*, 1858; Airy — *On the algebraical and numerical theory of errors of observations*, 1861.

Medias

312. Aproveitamos esta occasião para advertir que não deve confundir-se a media das medias de muitos grupos com a media geral.

Assim, sendo:

$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, i$ sommas de observações de igual peso;

$n_1, n_2, \dots, n_i, \dots, i$ o numero de observações de cada somma:

a media das medias é $\frac{\sum A_x}{i}$, e a media geral é $\frac{\sum A_x}{\sum n_x}$, tomando x desde 1 até i .

Portanto o erro, que resulta de tomar a media das medias como media geral, corrige-se ajunctando áquella

$$\frac{\sum A_x}{\sum n_x} - \frac{\sum A_x}{i}.$$

Por exemplo, combinando no circular meridiano duas a duas as obser-

vações feitas nos fios correspondentes, tomando as medias d'ellas, e depois a media das medias, a correcção será

$$\frac{\sum A_x}{7} - \frac{\sum \frac{A_y + A_{8-y}}{2}}{4},$$

onde se devem tomar os inteiros x desde 1 até 7, e y desde 1 até 4;

isto é,

$$\frac{\sum A_x - 7 A_4}{56}.$$

FIM.

ADVERTENCIA SOBRE O N.º 266.

Quando no n.º 266 se diz —volvendo o eixo— deve entender-se que se volve o eixo junctamente com o nivel; ou tambem sómente o nivel, pondo sempre em contacto os mesmos pontos com os munhões.

TABOA DAS MATERIAS DO SUPPLEMENTO

CIRCULAR MERIDIANO

I	Amplificação	N.º	256
	Munhões		257
	Leituras		258
	Divisões do micrometro		259
	Diametro do fio		260
	Intervallos dos fios		261
	Divisões do nivel		263
	Leituras do micrometro		264
	Equações pessoaes		265
II	Erro de nivel		266
	Erros de nivel e collimação		268
	Erros de collimação e orientação		270
	Correcções de passagem		271
	Correcção das distancias zenithaes		274

INSTRUMENTO DE PASSAGENS PELO PRIMEIRO VERTICAL

Formulas rigorosas	275
Formulas approximadas	276
Oculos angulares	280

CORRECÇÕES DO EQUATORIAL

Formulas rigorosas	281
Formulas approximadas	282
Determinação dos erros instrumentaes	286
Coordenadas differenciaes. Angulos de posição	288
Micrometro de dupla imagem	289

INSTRUMENTOS AZIMUTHAES

Formulas geraes	290
Casos especiaes	292

APRECIÇÕES DOS RESULTADOS

Probabilidades	294
Erros	296
Pesos	298
Aplicações	299
Medias	312
Advertencia sobre o n.º 266	313

ADDITAMENTOS

À

PRIMEIRA PARTE

Erastosthenes, notando que, no instante do solstício, o sol brilhava
o fundo d'un puzo em Syene, supponha então nullo a distancia real
do sol tendo logar; e como se no mesmo instante achou 7°12' para differença
remotal do sol em Alexandria, que supozta estar ao meridiano de Syene,
concluiu que era 7°12', ou $\frac{360}{50}$, a differença de latitudes das duas logaras.

Por outra parte a medida de distancia entre Syene e Alexandria era de 5000 milhas.
Suppondo pois a terra esphérica, achou que o circulo máximo tinha o
50000" = 60 = 300000"

D'onde resulta, tomando o radio da terra

$$R = \frac{300000 \times 60 \times 1000}{2 \times 7'12''}$$

Este valor, mais approximado, dá-se a saber no n.º 11 da parte

(*) Extrahimos de novo este valor, suppondo a esphera plana, que é a
mesma approximada. Calculamos e obtemos 300000.

INSTRUMENTOS ARITMÉTICOS

Formulas gerais	292
Casos especiais	292

APRECIACÕES DOS RESULTADOS

Probabilidades	292
Erros	292
ADITAMENTOS A PRIMEIRA PARTE	292
Aplicação	292
Método	292
A e erros associados	292

PRIMEIRA PARTE

Estabelece-se, notando que, no instante de saída, a velocidade é nula e um grau em graus, a velocidade entre dois pontos é dada pela equação de movimento e como no instante de saída a velocidade é nula, a equação de movimento é dada por:

$$v = at$$

onde v é a velocidade, a a aceleração e t o tempo decorrido desde a saída.

Para obter a distância percorrida durante o tempo t , basta integrar a equação anterior em relação ao tempo, obtendo-se:

$$s = \frac{1}{2} at^2$$

onde s é a distância percorrida.

$$R = \frac{270000 \times 88 \times 10^3 \times 10^3}{2 \times 3,14 \times 10^3} = 37000000$$

Este valor é mais aproximado do que os obtidos no n.º 11 (a) da página 12, devido ao fato de se ter considerado a velocidade de saída como sendo nula.

ADDITAMENTOS A' PRIMEIRA PARTE

Do numero 11

Eratosthenes, notando que, no instante do solsticio, o sol illuminava o fundo d'um poço em Syena, suppunha então nulla a distancia zenithal do sol neste lugar; e como no mesmo instante achou $7^{\circ}12'$ para distancia zenithal do sol em Alexandria, que julgava estar no meridiano de Syena,

concluiu que era $7^{\circ}12'$, ou $\frac{360^{\circ}}{50}$, a differença de latitudes dos dois logares.

Por outra parte a medição da distancia entre elles deu-lhe 5000 stadios. Suppondo pois a terra espherica, achou que o circulo maximo d'ella é $5000^{\text{st}} \times 50 = 250000^{\text{st}}$.

D'onde resulta, tomando o stadio por 85 toezas,

$$R = \frac{250000 \times 85 \times 1^{\text{m}},94904}{2 \times 3,1416} = 6591402^{\text{m}}.$$

Este valor, mais approximado do que os obtidos no n.º 11 (*) pelos

(*) Extrahimos do livro alli citado o primeiro d'aquelles numeros, que é o menos approximado. Calculando-o, achariamos 7378564.

meios a que alli era necessario restringir-nos, ainda o será mais quando fizermos nelle as correções de que precisam as hypotheses geographicas de Eratosthenes.

Com effeito Syena fica 3° ao nascente de Alexandria; e as latitudes d'estes dois logares são respectivamente 24°8'N e 31°12'N. Assim o triangulo espherico APS, comprehendido entre o polo *P* e os dois logares *A*, *S*, dará a distancia espherica d'estes 7°32'50". E portanto o raio da terra

$$\text{será } 6591402^m \times \frac{7^{\circ}12'}{7^{\circ}32'50''} = 6289154^m.$$

Ainda que a hypothese da esphericidade, e sobretudo a necessaria imperfeição das medições feitas, não permittissem que Eratosthenes obtivesse o valor de *R* com a exactidão que hoje tem, comtudo cabe-lhe a gloria de ser o primeiro que indicou o processo, que, mais aperfeiçoado, ainda hoje se pretere na determinação das dimensões e figura da terra.

Abster-nos-hemos de entrar na resolução d'este problema, que é o objecto da Geodesia. Alem dos tractados especiaes, podem consultar-se a respeito d'elle: o capitulo XVIII da Astronomia de Biot, 3.ª ed. tomo 3.º; e o n.º 1 do capitulo VI da já citada traducção franceza da Astronomia de **Brunnow**, tomo 1.º

Ao numero 18

No estudo dos systemas de coordenadas e dos instrumentos seguimos a ordem que nos pareceu mais propria para que os alumnos gradual e opportunamente fossem conhecendo: o que respeita á determinação das posições dos astros e das leis do seu movimento diurno; os instrumentos, compostos ou conjugados, que servem para essa determinação; e os aperfeiçoamentos que elles foram successivamente experimentando. Habilitados com esse estudo, apresentaremos agora uma classificação systematica das coordenadas.

As observações feitas com os instrumentos, cujo eixo é ou vertical ou polar, podem determinar as direcções dos astros por uma das intersecções dos dois cones, cujo eixo é vertical ou polar, e dos dois planos, vertical ou horario, dos quaes o segundo pode ser dado ou directamente ou pelo relógio.

Das seis combinações d'estes quatro elementos dois a dois resulta a classificação das coordenadas absolutas observaveis.

Teremos assim:

Coordenadas angulares absolutas observaveis

<i>Intersecções de</i>	<i>Systemas de coordenadas</i>
{ Cone com cone	Distancia zenithal, e declinação (*) {
{ Plano com plano	Azimuth, e asc. rect. (ou angulo hor.) }
{ Cone zenit. com {	plano vert. Distancia zenith., e azimuth }
	plano hor. Dist. zenit., e asc. rect. (ou ang. hor.) }
{ Cone polar com {	plano vert. Declin., e azimuth. (*) }
	plano hor. Declin., e asc. rect. (ou ang. hor.) . }

(*) Não serve na practica como systema de coordenadas.

Coordenadas angulares differenciaes relativamente a uma estrella de comparação

{Differenças d'ascensão recta e declinação }

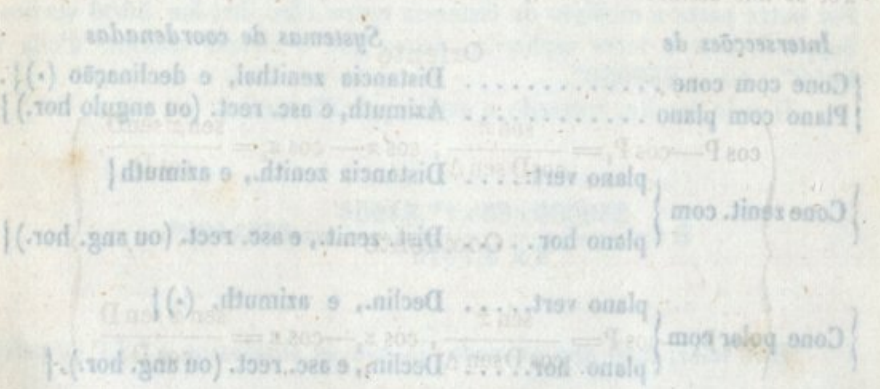
{Distancia e angulo de posição }

Coordenadas angulares não observáveis

{Longitudes e latitudes }

A *meridiana*, a *perpendicular* e a *vertical* formam um systema de eixos coordenados rectangulares, que podem servir para as tranformações. No gnomon podem medir-se directamente as duas coordenadas horizontaes da imagem.

Como systemas de transformação, rectilineos ou angulares, adoptam-se ainda outros, segundo as condições da commodidade dos calculos; do que teremos occasiões de vêr exemplos.



(-) Não serve as practicas como systema de coordenadas.