ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
POR
M. BEZOUT.

TRADUZIDOS DO FRANCEZ.

Nova Edição, mais correcta e accurada.

COIMBRA,

NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

1827.

Com Privilegio Real.

PREFAÇÃO.

DIvidí a Geometria em tres Secções: a primeira trata das linhas, dos angulos, e da sua medida, das relações das linhas, etc. A segunda tem por objecto as superficies, sua medida e relações. Destina-se a terceira aos sólidos, ou corpos, e comprehende os principios necessarios para medir e comparar as suas capacidades. Não me demorarei aqui em mais miuda noticia; esta deve-se buscar na mesma Obra. Os que se contentão com ler sómente a Prefação, não lucrarião muito no tempo, que esta analyse me faria perder; e os que lerem a Obra, poderáõ por ella fazer melhor conceito, do que pelo que eu lhe dissesse aqui.

Devo eu acaso justificar-me de ter deixado de usar dos termos *Axioma*, *Theorema*, *Lemma*, *Corollario*, *Escholio*? Duas razões me resolvêrão a isso: a primeira, porque o uso destes termos nada concorre para serem mais cláras as demonstrações: a segunda, porque todo este apparato póde servir muitas vezes de illudir os Principiantes, capacitando-os de que uma proposição, revestida com o nome de Theorema, deve ser uma proposição tão remota do seu conhecimento, quanto o he a palavra a respeito daquellas, com que elles andão familiarizados. Todavia para que os meus leitores, que hajão de folhear outros Livros de Geometria, se não persuadão, que entrão em um paiz desconhecido, devo advertil-os de que:

Axioma significa uma proposição por si mesma evidente.

Theorema uma Proposição, que he parte da sciencia, de que se trata, e cuja verdade, para se comprehender, requer um discurso, ou raciocinio, a que se chama *Demonstração.*

Lemma (a) he uma proposição, que

(a) *Lemma* muitas vezes he uma proposição tirada de outra Sciencia.

essencialmente não faz parte da Theorica, de que se trata, mas serve sómente de facilitar a passagem de uma proposição para outra.

Corollario he uma consequencia, que se tira de uma proposição, que se acaba de estabelecer.

Escholio he uma reflexão, que se faz sobre alguma cousa, que precede, ou uma recapitulação do que fica dito.

Problema he uma questão, em que se trata de executar alguma operação, ou de demonstrar alguma proposição.

ADVERTENCIA.

Os numeros, que se encontrarem sós entre parenthesis, indicão o *numero* destes Elementos, onde se deve ir buscar a proposição, que naquelle lugar se chama para alli.

Os numeros, que vem precedidos da palavra *Arith.*, citão esse mesmo *numero* na Arithmetica.

INDICE

DAS COUSAS, QUE SE CONTÉM NESTES ELEMENTOS.

SECÇÃO PRIMEIRA.

SECÇÃO SEGUNDA.

SECÇÃO TERCEIRA.

ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

1. O Espaço, que occupão os corpos, sempre tem tres dimensões: comprimento, largura, e altura, ou grossura.

Ainda que em todos os corpos se achem sempre estas tres dimensões juntas, com tudo nós muitas vezes as separamos na imaginação. Por este modo, quando examinamos a altura de um rio, ou bahia, etc., não nos occupamos nem com o seu comprimento, nem com a sua largura; similhantemente se queremos avaliar a quantidade de vento, que póde receber uma véla, só nos embaraçamos com o seu comprimento, e largura, e nada com a sua grossura.

Pelo que distinguiremos tres castas de extensão, a saber: A extensão sómente pelo comprimento, a que chamaremos *linha:*

A extensão pelo comprimento e largura sómente, a que chamaremos *superficie:*

Ultimamente a extensão pelo comprimento, largura, e altura, a que indefferentemente daremos o nome de *volume*, *solido*, *corpo.*

Examinaremos successivamente as propriedades destas tres especies de extensão: este he o objecto da sciencia, que se chama *Geometria.*

PRIMEIRA SECÇÃO.

Das Linhas.

2. CHamão-se *pontos* os extremos de uma linha. Dá-se tambem este nome aos sitios, em que as linhas se cortão, ou tambem aos em que se encontrão linhas.

O ponto póde considerar-se como uma porção de extensão, com um comprimento, largura, e grossura, infinitamente pequenos.

O vestigio, que um ponto deixa, movendo-se sempre para um ponto determinado, faz o a que se chama *linha recta*, que he o caminho mais curto de um ponto a outro. AB (Fig. 1.) he uma linha recta.

Pelo contrario chama-se *linha curva* ao vestigio de um ponto, que no seu movimento se desvia infinitamente pouco a pouco a cada passo.

Daqui se mostra, que não ha mais do que uma especie de linha recta; mas que de linhas curvas são infinitas as especies differentes.

3. Para traçar uma linha recta de mediana grandeza, por exemplo, para tirar, pelos pontos A e B (Fig. 1.) uma linha recta sobre papel, he sabido, que se usa de uma régoa applicada sobre os dous pontos A e B, ou mui proximamente a igual distancia destes dous pontos; e correndo com um lapis, ou penna pelo comprimento da régoa, se traça a linha AB.

Querendo-se porém traçar uma linha maior, préga-se no ponto A o extremo de um cordel, que se unta com um giz, ou almagre; e estendendo-o bem até ao ponto B, se levanta o meio do cordel; e deixando-o caír, fica por elle assinalado um risco, que he a linha recta, que se busca.

Se se pretende uma linha muito grande, cujos extremos alcança a vista de um a outro, basta-nos marcar um certo numero de pontos dessa linha entre os seus extremos. Queremos, por exemplo, fazer um alinhamento no campo: poremos em um dos extremos B (Fig. 2.) um pique, ou bandeirola BD, que com um prumo se põe o mais perpendicular, que he possivel: firma-se outra bandeirola do mesmo modo no ponto A, e successivamente outras muitas em differentes pontos C, C, etc., entre A e B, por modo que applicando o olho, o mais perto que póde ser, ao pique AD, e olhando para BD, fique cada pique CD confundido com BD: os pontos C, C, C, etc., determinados por este modo, estão todos na linha recta AB.

Quando não se descobrem os dous pontos A e B um ao outro, recorreremos aos meios, que adiante ensinaremos.

4. As linhas medem-se com outras linhas; mas a geral medida das linhas he a linha recta. Medir uma linha recta, ou curva, ou qualquer distancia, he procurar quantas vezes nesta linha, ou distancia póde caber uma linha recta conhecida e determinada, que então se considera como unidade. Esta unidade he absolutamente arbitraria; pelo que entre as linhas ha muitas especies de medidas differentes. Independentemente da toeza, e partes de toeza, cujas subdivisões démos a conhecer na Arithmetica, temos tambem o passo commum, o passo geometrico, a braça, etc., nas extensões pequenas; e para as grandes extensões ha a legua, a milha, a werst, etc.

O passo commum tem dous pés e meio.

O passo geometrico, chamado tambem passo duplicado, tem cinco pés.

A braça he de cinco pés: contão-se por braças na marinha o comprimento dos cabos, e as alturas, que se medem com a sonda. *

A legua compõe-se de certo numero de toezas, ou de passos geometricos. A legua da marinha tem 2853 toezas. A milha, a werst, etc., são igualmente medidas itinerarias, cujo valor, como o da legua, não he constante em todos os paizes, tanto porque cada uma destas medidas não tem geralmente o mesmo

* *Nota.* A braça Portugueza tem dez palmos, e cada palmo oito pollegadas: a braça da marinha he de oito palmos: a sonda faz-se com braças medidas do comprimento dos braços abertos de um homem, que vem a dar pouco mais ou menos em cinco pés.

numero de unidades, isto he, o mesmo numero de passos, de toezas, ou de pés, etc., como tambem porque o pé, que serve de unidade a estas toezas, ou passos, não he geralmente do mesmo tamanho.

5. A fim de facilitar a intelligencia do que havemos de dizer ácerca das linhas, supporemos que as figuras, aonde as considerarmos, são traçadas sobre uma superficie *plana*. Dá-se este nome a uma superficie, sobre a qual se póde exactamente applicar uma linha recta por toda a parte.

6. De todas as linhas curvas trataremos unicamente nestes elementos da *Circumferencia do circulo*. Tem este nome uma linha curva BCEFDG (Fig. 3.), a qual tem todos os seus pontos igualmente distantes de um mesmo ponto A, tomado no plano, em que ella está descripta. Este ponto A chama-se *centro*; ás linhas rectas AB, AC, AE, etc., que sáem deste centro até á circumferencia, chama-se-lhes *raios*: todos estes raios são iguaes, pois medem a distancia do centro a cada um dos pontos da circumferencia.

As linhas v. g. BD, que passando pelo centro, se terminão de uma e outra parte na circumferencia, são chamadas *diametros*: ora como cada um dos diametros se compõe de dous raios, segue-se que todos os diametros são iguaes. Por outra parte he evidente, que todo o diametro reparte a circumferencia em duas partes iguaes; por quanto se imaginarmos a figura dobrada, por modo que a dobra siga o diametro BD, todos os pontos da porção BGD devem ajustar sobre BCEFD; porque não sendo assim, haveria na circumferencia pontos, que tivessem desigual distancia do centro.

As porções da circumferencia BC, CE, EF, etc., chamão-se *arcos*: chama-se *circulo* á superficie comprehendida dentro da circumferencia BCEFDGB.

Chama-se *corda*, ou *substensa*, aquella recta, que se tira do extremo D de um arco para o outro extremo F, como DF.

7. Facilmente se entende, que *as cordas do mesmo circulo, ou de circulos iguaes, que subtendem arcos iguaes, são iguaes, e reciprocamente.* Porque se a corda DG for igual á corda DF; se imaginarmos que

a corda DG, e o seu arco se muda para se applicar sobre DF, visivel fica, que sendo o ponto D commum, e caíndo o ponto G sobre o ponto F, todos os pontos do arco DG se devem ajustar pelo arco DF; pois que se algum desses pontos não caísse sobre o arco DF, não distarião igualmente do centro A todos os pontos do arco DG.

8. Assentou-se em repartir todas as circumferencias de circulo, seja elle grande, ou pequeno, em 360 partes iguaes, a que chamão *gráos*: cada gráo se divide em 60 partes iguaes, chamadas *minutos*: cada minuto em 60 partes iguaes, a que se dá o nome de *segundos*, subdividindo cada uma parte sempre de 60 em 60, e denominando-a consecutivamente *minutos*, *segundos*, *terceiros*, *quartos*, *quintos*, etc.

Marca-se o gráo deste modo .... $^\circ$
O minuto deste modo .... $'$
O segundo .... $''$
O terceiro .... $'''$
O quarto .... $''''$

Para assentar 3 gráos, 24 minutos, e 55 segundos, escreve-se $3^\circ\ 24'\ 55''$.

Esta divisão da circumferencia he geralmente recebida; mas para commodidade na prática se tem introduzido em algumas partes das Mathematicas práticas alguns usos particulares no modo de contar os gráos e partes de gráo. Por exemplo: os Astronomos contão os gráos de trinta em trinta, chamando a cada trinta um *signo*: querendo, por exemplo, contar $66^\circ\ 42'$; como este numero comprehende duas vezes 30°, e mais 6°, e mais $42'$; dizem 2 signos, 6 gráos, 42 minutos; e escrevem $2^s\ 6^\circ\ 42'$.

Os Maritimos, para uso da Bussola, dividem a circumferencia em 32 partes iguaes, a que chamão *ares*, ou *rumos* de vento: logo cada uma destas partes he a 32^a de 360°, isto he, compõe-se de $11^\circ\ 15'$: por esta razão em lugar de 45° dizem 4 rumos de vento, porque em 45° ha quatro vezes $11^\circ\ 15'$: similhantemente em lugar de $18^\circ\ 27'$ dirão 1 rumo de vento, e $7^\circ\ 12'$.

Dos Angulos, e sua medida.

9. DUas linhas AB, AC, quando se encontrão, podem formar entre si uma abertura maior, ou menor, como mostrão as Figuras 4. 5. 6.

A esta abertura BAC chama-se *angulo*. Chama-se angulo *rectilineo*, ou *curvilineo*, ou *mixtilineo*, conforme são as linhas, que o compõem, ou ambas rectas, ou ambas curvas, ou uma recta, e outra curva.

Por ora vamos tratar tão sómente dos angulos rectilineos.

10. Para fazer idéa distincta do que he um angulo, deve imaginar-se, que assentando a linha AB sobre AC, a fizerão gyrar sobre o ponto A (do modo que gyra uma perna de compasso sobre o seu gonzo), até chegar á posição AB, que tem agora. A quantidade, que esta linha gyrou, he ao que rigorosamente se chama *angulo*.

Por esta idéa se comprehende, que a grandeza de um angulo nada depende da dos seus lados, de sorte que o angulo, que formão as linhas AC, AB (Fig. 4.), he o mesmo que o que formão as linhas AF, e AE, que são prolongações daquellas primeiras; com effeito tanta quantidade tiverão que gyrar a linha AB, como a linha AE, para chegar á sua actual posição.

Chama-se *vertice do angulo* aquelle ponto A, em que se encontrão as duas linhas AB, AC; a estas duas linhas AB, AC chama-se-lhes lados do angulo.

Usamos de tres letras para denotar um angulo, uma das quaes mostra o vertice, e as outras duas se põem ao longo dos lados: quando fallarmos destas letras, poremos sempre a do vertice no meio; e por isso quando quizermos designar o angulo comprehendido pelas duas linhas AB, AC, diremos o angulo BAC, ou CAB.

He principalmente necessaria esta cautela, quando muitos angulos tem o vertice em um ponto; porque se (Fig. 4.) dissermos simplesmente o angulo A, não sabemos, se se quer entender o angulo BAC, ou o angulo BAD: quando porém há sómente um angulo como na Fig. 4. *, então podemos dizer simplesmente o angulo *a*, isto he, designal-o só com a letra do seu vertice.

11. Pois que o angulo BAC (Fig. 4.) não he outra cousa mais do que a quantidade, que se deveria mover o lado AB á roda do seu ponto A, até chegar da posição AC á posição AB; e como neste movimento cada ponto de AB, por exemplo o ponto B, ficando sempre igualmente distante do centro, descreve um arco de circulo, o qual arco de circulo augmenta, ou diminue na mesma razão que se augmenta, ou diminue o angulo, he cousa natural, que este arco se tome por medida do angulo. Mas como cada um dos pontos de AB descreve um arco de differente comprimento, não he o comprimento do arco o que se deve tomar, mas sim o numero de gráos e partes de gráo, que sempre ha de ser igual em todos os arcos, que descrever cada ponto de AB; porque começando, continuando, e acabando todos estes pontos o seu movimento no mesmo tempo, dão necessariamente igual numero de passos: tem sómente a differença, que os passos dos pontos mais distantes do ponto A são maiores. Podemos pois concluir, que:

12. *Qualquer angulo BAC* (Fig. 4.) *tem por medida o numero de gráos e partes de gráo do arco, que comprehende entre os seus lados, descrito com o seu vertice como centro.*

Pelo que quando no decurso desta obra dissermos, que certo angulo tem por medida certo arco, deve entender-se, que o angulo tem por medida o numero de gráos e partes de gráo deste arco.

13. Logo *para dividir um angulo em muitas partes iguaes*, basta dividir o arco, que lhe serve de medida, em outras tantas partes iguaes, e pelos pontos da divisão tirar linhas rectas para o vertice do angulo. Adiante trataremos da divisão dos arcos.

14. *Para fazer um angulo igual a outro*: por exemplo, para fazer no ponto *a* da linha *ac* (Fig. 4. *) um angulo igual ao angulo BAC (Fig. 4.), he necessario descrever com o ponto *a* como centro, e

com uma arbitraria abertura de compasso um arco indefinito *cb*: pondo depois a ponta do compasso no vertice A do angulo dado BAC, se descreverá com a mesma abertura o arco BC, que fica comprehendido entre os dous lados deste angulo; e tomando com o compasso a distancia de C a B, se marca a mesma de *c* para *b*, e isto dá o ponto *b*: e tirando por elle, e pelo ponto *a* a linha *ab*, teremos o angulo *bac* igual a BAC.

Com effeito a medida do angulo *bac* he o arco *bc* (12), e a medida do angulo BAC he o arco BC; mas estes dous arcos são iguaes, porque sendo arcos de circulos iguaes, tem cordas iguaes (7), pois que a distancia de *b* para *c* se fez igual á distancia de B para C.

15. O angulo BAC (Fig. 5.) he chamado angulo recto, quando um dos seus lados AB não se inclina mais nem para o outro lado AC, nem para a sua continução AD.

Quando um dos lados AB (Fig. 4.) se inclina mais para o lado AC, do que para a sua continuação AD, o angulo BAC se chama angulo *agudo*.

Ultimamente se chama ao angulo *obtuso*, quando (Fig. 6.) um dos lados AB se inclina mais para a continuação do outro lado AC, do que para o mesmo lado.

16. Do que deixamos dito ácerca da medida dos angulos (12), podemos concluir: 1.° que *o angulo recto tem por medida* 90°, *e o angulo agudo menos de* 90°, *e o angulo obtuso mais de* 90°.

Porque se a linha AE (Fig. 3.) não pende nem para AB, nem para a sua continuação AD, serão iguaes os dous angulos BAE, DAE: logo os arcos BE, e DE, que são a medida delles, serão tambem iguaes; mas estes dous arcos juntos fazem a semi-circumferencia: logo o valor de ambos juntos he de 180°: logo cada um delles he de 90°: logo tambem cada um dos dous angulos BAE, DAE val 90°.

Pelo que fica dito he evidente, que BAC he de menos, e que BAF he de mais de 90°.

17. 2.° *Que os dous angulos BAC, BAD* (Fig. 4. 5. 6.) *formados por uma linha recta AB, caindo sobre*

sobre outra recta CD, valem ambos juntos 180°. Por quanto o ponto A póde sempre considerar-se como centro de um circulo, de que CD fica sendo diametro: ora os dous angulos BAC, BAD tem por medida os dous arcos BC, e BD, de que se compõe a semi-circumferencia: logo ambos juntos valem 180°, ou dous angulos rectos.

18. 3.° *Que tirando do mesmo ponto A* (Fig. 3.) *quantas rectas se quizerem, AB, AC, AE, AF, AD, AG, todos os angulos, que com ellas se fórmão BAC, CAE, EAF, FAD, DAG, GAB, juntos valem* 360°, porque todos elles juntos occupão a circumferencia inteira.

19. Dous angulos como BAC, e BAD (Fig. 4.), que juntos fazem 180°, se chamão *supplementos* um do outro; assim BAC he o supplemento de BAD, e BAD he o supplemento de BAC, porque um destes angulos he o que se deve accrescentar ao outro para fazer 180°.

Logo angulos iguaes terão iguaes supplementos, e os angulos que tiverem supplementos iguaes, serão iguaes.

20. Concluamos daqui, que *os angulos BAC, EAD* (Fig. 7.) *oppostos verticalmente, e formados pelas duas rectas BD, e EC, são iguaes.*

Porque sendo CAD supplemento de BAC, tambem he supplemento de EAD.

21. Chama-se *complemento* de um angulo, ou de um arco, aquella porção, em que este arco excede 90°, ou o que lhe falta para 90°. Assim (Fig. 3.) CAE he complemento do angulo BAC; FAE he o complemento do angulo BAF; pelo que complemento he o que ou se deve accrescentar, ou diminuir a um angulo, para que elle fique valendo 90°.

Logo os angulos agudos, que tiverem complementos iguaes, serão iguaes, e reciprocamente: o mesmo se deve dizer dos angulos obtusos.

Tanto na theorica, como na prática, se está sempre a tratar de angulos: ao diante teremos bastantes occasiões de nos convencermos de que a cada passo se encontrão na theorica. Quanto á prática diremos, que se faça reflexão, em que a derrota de um navio se conhece por meio dos angulos; que por elles se conhece, se vamos a barlavento, ou a sotavento de outro navio, que encontramos no mar; pelos angulos se determinão as situações dos objectos a respeito uns dos outros; variando os angulos, que formão com a quilha as vélas, e o leme, he que se fazem as evoluções dos navios, se muda de derrota, se accelera, ou retarda o seu movimento. Até pela medida dos angulos he que no mar se determina o lugar, em que está o navio.

Ha grande numero de instrumentos, que servem para medir angulos, ou para formar, os que são convenientes: vamos dar noticia dos principaes.

22. A Figura 8. representa o instrumento chamado *Transferidor*, o qual tem uso para medir angulos sobre o papel, e para ahi mesmo fazer os angulos, que são precisos. He commodo e frequente o seu uso. He um meio circulo de metal, ou de vista de lanterna dividido em 180°. Um pequeno chanfro nota o centro C. Querendo medir, por exemplo, um angulo BAC (Figg. 4. 5. e 6.), applica-se o centro C no vertice A do angulo, que se pretende medir, e o raio CB do mesmo instrumento sobre um dos lados AC deste angulo; então o lado AB continuado, sendo necessario, mostra naquella das divisões do instrumento, por onde passa, de quantos gráos he o arco do instrumento, que fica comprehendido entre os lados do angulo BAC, e consequentemente (12) de quantos gráos he o angulo BAC.

Para com este mesmo instrumento fazer um angulo de determinado numero de gráos, applique-se o raio CB do instrumento sobre a linha, que deve servir de lado ao angulo, que se quer fazer, de modo que o centro C fique no ponto, que ha de servir de vertice a esse angulo: busque-se depois nas divisões do instrumento o numero de gráos, de que se trata; e o lugar, onde se acha este numero, se marque sobre o papel com um ponto: tire-se por este ponto, e pelo vertice uma linha recta, que faz então com a primeira o angulo, que se pede.

23. Para medir os angulos sobre o terreno, usamos do instrumento, que representa a Fig. 9., a que chamão *Graphometro*. He um semicirculo dividido

em 180°, no qual se marcão tambem meios gráos, conforme a grandeza do seu diametro. O diametro DB faz corpo com o instrumento; mas o diametro EC, a que chamão *Alidada*, está pegado ao instrumento só no centro A, á roda do qual se volve, e corre com a extremidade C todas as divisões do instrumento. Ambos estes diametros tem nos seus dous extremos pinnulas, pelas quaes se podem enfiar os objectos. O instrumento anda sobre um pé, e sem mudar a posição do pé, se póde inclinar para toda a parte, conforme for necessario.

Se quizermos medir o angulo formado por duas linhas rectas tiradas do ponto A, onde estamos, a dous objectos F e G, põe-se o centro do Graphometro em A, e o intrumento se dispõe de modo, que olhando pelas pinnulas do diametro fixo DAB, se veja F, um destes objectos, e ao mesmo tempo o outro objecto G fique na continuação do plano do instrumento, o que se faz inclinando mais, ou menos o Graphometro: move-se então alidada EC, até que pelas pinnulas E, e C se enfie, o objecto G. O arco BC comprehendido entre os dous diametros he então a medida do angulo GAF.

Do que acabamos de dizer se mostra o modo, com que sobre o terreno se póde formar um angulo de determinado numero de gráos. Ordinariamente se fazem no extremo do diametro movel divisões pela largura delle, as quaes pelo modo, com que correspondem ás divisões do instrumento, dão a conhecer as partes do gráo de 5 em 5 minutos, ou de 3 em 3.

Muitas vezes tem este instrumento uma *Bussola* ordinaria, ou simples, como mostra a Fig. 9.

A agulha magnetizada, que he a peça principal, está sustentada no meio della sobre um peão, sobre que se move livremente. Como tem a propriedade de de se conservar constantemente na mesma direcção, ou de a buscar, quando se tem arredado della (pelo menos em o mesmo lugar, e por dilatado intervallo de tempo), he util, no uso destes instrumentos, a fim de determinar a posição dos objectos a respeito dos pontos cardeaes, ou da linha *norte-sul*, com a qual faz sempre o mesmo angulo no mesmo lugar. O bordo

2.

circular da cavidade, onde anda a agulha, tem ordinariamente a gradução de 360°. Quando o instrumento se faz gyrar, a agulha, pela propriedade, que tem, de se restituir á mesma situação, marca na nova divisão, a que corresponde, quantos gráos gyrou o instrumento.

Tambem se faz uso da Bussola sem Graphometro, mas he unicamente para determinar grosseiramente um a um muitos pontos de um plano, ou carta, cujos pontos principaes se determinárão com exactidão, tudo pelo modo que adiante diremos.

24. A *Bussola maritima*, ou *Compasso de mar*, ou tambem *Compasso de variação* (Fig. 10.), não se distingue da Bussola ordinaria, senão pelo modo de suspensão, que lhe he particular, e que tem por objecto fazer com que as partes todas desta machina, que servem para medir os angulos, não participem de outros movimentos do navio, alem daquelles, que póde ter gyrando horizontalmente. Quando se não usa della, senão a fim de conhecer a direcção da quilha do navio, chama-se-lhe *Compasso de derrota*. Anda fechada em uma expecie de caixa chamada *Bitácola*, que vai posta pela direcção da largura do navio. A agulha não anda solta sobre a espiga, ou peão, como na Bussola ordinaria, porque andaria muito arriscada a caír fóra. Carrega-se com um pedaço de talco redondo, e collado entre dous pedaços de papel, em cima se pinta a rosa dos ventos, isto he, divide-se a sua circumferencia nos rumos de vento. Facilmente se comprehende, que gyrando o navio uma certa quantidade, como a agulha sempre fica firme, ou torna constantemente para a mesma situação, não corresponderá ao mesmo ponto da Bitácola: observando pois qual era o rumo, que correspondia ao que a agulha antes occupava, se conhecerá quanto variou de rumo o navio; póde-se pois usar della para tornar a pôr, e reter constantemente o navio na mesma direcção.

Quando se usa da Bussola para marcar os objectos, isto he, para reconhecer a que rumo de vento correspondem, chama-se-lhe *Compasso de variação*. Tem este nome de outro uso, de que não he este lugar proprio para se tratar. Então he guarnecida da duas pinnulas A e B (Fig. 10.), pelas quaes se ajustão os objectos, cuja situação se quer conhecer. No mar são necessarios dous observadores, um que gyre com o compasso de variação, de modo que possa ajustar o objecto; e ao mesmo tempo outro observa qual he a posição da agulha a respeito da linha DE, que he um fio atravessado perpendicularmente sobre a linha, que se concebe passar por A e B.

Das perpendiculares e obliquas.

25. DIssemos (15), que a linha AB (Fig. 5.), que não se inclina mais nem para AC, nem para AD, formava com estas duas linhas dous angulos, que se chamão rectos.

Esta mesma linha AB he tambem a que se chama uma *perpendicular* á linha AC, ou DC, ou AD.

Por esta definição se podem ter as proposições seguintes, como verdades evidentes.

26. 1.° *Quando uma linha AB* (Fig. 11.) *he perpendicular sobre outra linha CD, tambem estoutra CD he perpendicular sobre a linha AB.*

Porque quando AB he perpendicular sobre CD, os angulos AEC, AED são iguaes; mas AED he igual a BEC (20); logo AEC he igual a BEC: logo a linha CE, ou CD não se inclina mais nem para AE, nem para BE: logo CD he perpendicular sobre AB.

27. 2.° *Do mesmo ponto E, tomado na linha CD, não se póde levantar mais do que uma só perpendicular a esta linha.*

28. 3.° *E do mesmo ponto A, tomado fóra de uma linha CD, não se póde abaixar mais do que uma só perpendicular a esta linha.*

Porque não se póde imaginar mais do que um unico caso, em que uma linha passando pelo ponto E, ou pelo ponto A, possa não se inclinar mais nem para ED, nem para EC.

29. *As linhas, que saindo do ponto A, se desvião igualmente da perpendicular, são iguaes: estas linhas*

quanto mais se arredão da perpendicular, maiores são; consequentemente a perpendicular he a mais curta de todas.

Supponhamos EG igual a EF; se dobrarmos a figura AEG sobre a figura AEF, ficando a linha AE commum a ambas, he claro que sendo o angulo AEG igual ao angulo AEF, a linha EG se applicará sobre EF; e porque EG se suppoz igual a EF, cairá o ponto G sobre o ponto F: logo AG se ajustará exactamente sobre AF: logo estas duas linhas são iguaes. Quanto á segunda parte da proposição, he evidente, que supponde-se o ponto C da linha CE mais arredado de AB, do que o ponto F da mesma linha CE, necessariamente fica mais longe de qualquer outro ponto de AB, que se quizer, do que ha de distar desse mesmo ponto o ponto F: logo tambem a perpendicular he de todas a mais curta.

30. As linhas AF, AC, AG são chamadas *obliquas*, a respeito da perpendicular AE, e da linha CD; e geralmente se chama uma linha obliqua a outra, quando o angulo, que ella faz com estoutra, he agudo, ou obtuso.

31. De que as obliquas AF, AG (29) são iguaes entre si, quando se afastão igualmente da perpendicular, se conclue, que *quando uma linha he perpendicular ao meio E de outra linha FG* (Fig. 11.), *todos os pontos desta linha distão tanto do extremo F, como do extremo G.* Pois he evidente, que o que temos dito do ponto A, se applica igualmente a qualquer outro ponto da linha AE, ou AB.

32. Não he menos evidente, que *sómente os pontos de AE, perpendicular ao meio de FG, he que podem ter igual distancia dos pontos F e G.* Porque outro qualquer ponto, que ficar para a direita ou esquerda da perpendicular, he evidentemente mais proximo de um destes pontos, do que do outro.

Logo para que uma linha seja perpendicular sobre outra, he bastante que passe por dous pontos, cada um dos quaes diste igualmente de dous pontos, que se tomarem na outra.

33. Donde concluimos: 1.° que *para levantar uma perpendicular ao meio de uma linha* AB (Fig. 12.),

he necessario pôr em B uma ponta do compasso, e fazer o arco IK com uma abertura maior do que metade da linha AB; passando depois ao ponto A, se descreve com a mesma abertura de compasso o arco LM, cortando o primeiro no ponto C, o qual ponto distará igualmente de A, e de B. Pelo mesmo modo se determinará depois outro ponto D, ou fique da banda de cima, ou para baixo da linha AB, com a mesma, ou com diversa abertura do compasso: tirase ultimamente pelos dous pontos C, D a linha CD, que será perpendicular ao meio de AB (32).

34. 2.° *Se de um ponto E, posto fóra da linha AB* (Fig. 13.), *se quizer tirar uma perpendicular a esta linha*, ponha-se em E a ponta do compasso, e com uma abertura maior do que a mais curta distancia, que ha dahi á linha AB, se farão dous arcos, que cortem a linha AB nos pontos C e D: depois destes pontos como centros, com uma abertura de compasso maior do que metade de CD, se descreveráõ dous arcos, que se cortem em F; tirar-se-há a linha EF pelos pontos E e F, e esta ha de ser perpendicular a AB (32), pois que tem os dous pontos E e F igualmente distantes cada um delles dos dous pontos C e D da linha AB.

35. Se o ponto E, pelo qual se quer tirar a perpendicular, estivesse na mesma linha AB, far-se-ía sempre a operação pelo mesmo modo. Veja-se a Fig. 14.

Ultimamente se o ponto E tivesse tal posição, que commodamente se não podesse marcar mais do que um dos dous pontos C, ou D; continuar-se-ía a linha AB, e far-se-ía a operação pelo mesmo modo. Veja-se a Fig. 15. e 16. A Figura 16. he para o caso, em que se quer levantar uma perpendicular no extremo da linha AB.

Das Parallelas.

36. CHamão-se *parallelas* duas linhas rectas, descriptas no mesmo plano, quando estas nunca se podem encontrar, a qualquer distancia que se imaginem continuadas.

Logo duas linhas parallelas não fazem entre si angulo.

Logo duas parallelas sempre vão igualmente distantes uma da outra; pois he evidente, que se ellas em algum sitio estivessem mais juntas do que em outro, inclinar-se-ía uma sobre outra, e consequentemente por fim virião a encontrar-se.

37. 1.° *Quando duas linhas parallelas AB, e CD* (Fig. 17.) *são cortadas por uma terceira EF*, (que então se chama *secante*) *os angulos BGE, DHE, ou AGH, CHF, que fazem com esta linha para a mesma parte, são iguaes.* Porque não tendo as linhas AB e CD inclinação alguma entre si (36), devem necessariamente inclinar-se igualmente para a mesma parte, cada uma dellas a respeito daquella linha, com que se comparar.

38. 2.° *Os angulos AGH, GHD são iguaes:* porque acabámos de mostrar, que AGH he igual a CHF; mas CHF (20) he igual a GHD: logo AGH he igual a GHD.

39. 3.° *Os angulos BGE, CHF são iguaes:* porque BGE he igual a AGH (20), mas já mostrámos, que AGH era igual a CHF (37); logo BGE he igual a CHF.

40. 4.° *Os angulos BGH, DHG, ou AGH, CHG são supplementos um do outro;* porque BGH he supplemento de BGE, o qual (37) he igual a DHG.

41. 5.° *Os angulos BGE, DHF, ou AGE, CHF são supplementos um do outro:* pois que o angulo DHF tem por supplemento DHG, o qual (37) he igual a BGE.

42. Cada uma destas cinco propriedades se verifica, todas as vezes que duas linhas parallelas são cortadas por uma terceira; e reciprocamente, *todas as vezes que no encontro de duas linhas rectas com uma terceira se verificar qualquer destas cinco propriedades, podemos concluir, que as duas linhas são parallelas;* o que se demonstra por modo inteiramente similhante.

Tendo achado as propriedades dos angulos, que acabamos de examinar, os seus nomes podem servir

de

de firmar estas propriedades na memoria. Aos angulos BGE, FHC chama-se-lhes *alternos externos*, porque ficão de differentes partes da linha EF, e ambos estão fóra das parallelas. Os angulos AGH, GHD são chamados *alternos internos*, por estarem de differentes lados da linha EF, e ambos entre as parallelas. Os angulos BGH, DHG tem o nome de *internos para a mesma parte*, porque ficão entre as parallelas, e da mesma parte da secante EF. Ultimamente chamão-se *externos para a mesma parte* os angulos BGE, DHF, porque estão fóra das parallelas, e da mesma parte da secante.

43. Póde-se concluir das propriedades, que acabamos de demonstrar: 1.° *Que se dous angulos ABC, DEF* (Fig. 18.), *voltados para a mesma parte, tem os lados parallelos, são iguaes.* Por quanto se imaginarmos que o lado DE se continúa até encontrar BC em G, os angulos ABC, DGC serão iguaes (37); pela mesma razão o angulo DGC será igual a DEF: logo ABC he igual a DEF.

44. 2.° *Que para tirar por um ponto dado C uma linha CD* (Fig. 19.), *parallela a outra AB*, he necessario pelo ponto C tirar arbitrariamente a linha indefinita CEF, a qual córte AB em qualquer ponto E; e tirar pelo ponto C, do modo que fica ensinado (14), a linha CD, tal que faça com a linha CE o angulo ECD igual ao angulo FEB, que ella faz com a linha AB; e tirando-se por esta maneira a linha CD, ficará parallela a AB (37).

Alem disso cada uma das cinco propriedades, que ficão estabelecidas, póde dar um methodo de tirar uma parallela.

45. As perpendiculares, e as parallelas, de que acabamos de fallar successivamente, tem uso mui frequente em toda a mathematica prática. As perpendiculares são necessarias para se medirem as superficies, e a solidez, ou capacidade dos corpos: a cada passo se offerecem em todas as operações da Arquitectura naval. Como o angulo recto he de facil construcção, por isso se faz depender a construcção das figuras antes da perpendicular, do que de outra qualquer linha.

As parallelas, alem do seu frequente uso para demonstrar facilmente na theorica um grande numero de proposições, são a base de muitas operações uteis. Faz-se muito uso dellas na Pilotagem, principalmente para marcar nas Cartas maritimas a derrota, que seguio um navio na sua navegação, a que se chama *apontar*, ou *fazer o ponto.*

Ao diante trataremos disso.

Das linhas rectas consideradas a respeito da circumferencia do circulo: e das circumferencias de circulo comparadas umas com outras.

46. A Curvatura uniforme do circulo dá occasião a concluir della, sem ser necessaria rigorosa demonstração:

1.° *Que uma linha recta não póde encontrar a circumferencia em mais de dous pontos.*

2.° *Que em um semi-circulo a maior corda sempre subtende o maior arco, e reciprocamente.*

Chama-se geralmente *secante* (Fig. 20.) a toda a linha, como DE, que encontra a circumferencia em dous pontos, ficando parte desta linha fóra do circulo: chama-se *tangente* aquella, que não faz mais do que encostar-se á circumferencia: tal he a linha AB.

47. *Uma tangente não póde encontrar a circumferencia senão em um unico ponto.* Porque se o encontrasse em dous pontos, entraria para dentro do circulo, pois que destes dous pontos sería possivel tirar dous raios ao centro, ou duas linhas iguaes, entre as quaes se póde sempre imaginar uma perpendicular sobre a linha, que une estes dous pontos: ora como esta perpendicular (29) he mais curta que qualquer dos dous raios, claro estava, que a tangente teria pontos mais visinhos ao centro, do que os em que encontra o circulo: logo entraria para dentro do circulo, o que he contra a definição, que acabamos de dar.

Não tendo a tangente mais do que um ponto commum com o circulo, segue-se que o raio CA (Fig. 21.), tirado para o ponto do contacto, he a linha mais curta, que se póde tirar do centro á tangente, e consequentemente he perpendicular á tangente (29): logo reciprocamente *a tangente a qualquer ponto A do circulo he perpendicular ao extremo do raio CA, tirado por esse ponto.*

48. Donde se vê, que *para se tirar uma tangente a um ponto A dado na circumferencia de um circulo*, se deve tirar para essse ponto o raio CA, e tirar ao extremo delle uma perpendicular, conforme fica ensinado (35).

49. Logo *havendo muitos circulos* (Fig. 22.), *que tenhão os centros na mesma linha recta CA, e todos passem pelo mesmo ponto A, todos terão por tangente commum a linha TG, perpendicular a CA, e todos consequentemente se tocarão.*

50. Daqui se tira, que *para descrever um circulo de determinada grandeza, e que toque outro circulo dado BAD* (Fig. 23.) *no ponto dado A*, he necessario tirar pelo centro C, e pelo ponto A o raio CA, que se continuará indefinitamente: depois se tomará a grandeza do raio do segundo circulo, ou de A para T, ou para V, (conforme se quer que o segundo circulo contenha, ou não contenha o primeiro) e do centro T, ou V se descreverá uma das circumferencias EF com o raio AT, ou AV.

51. *A perpendicular levantada ao meio de uma corda passa sempre pelo centro do circulo, e pelo meio do arco, que esta corda subtende* (Fig. 24.).

A perpendicular deve passar por todos os pontos igualmente distantes dos extremos A e B (32); mas he evidente, que o centro he igualmente distante dos dous extremos A e B, pois são dous pontos da circumferencia: logo a perpendicular passa pelo centro.

Não he menos evidente, que deve cortar o arco pelo meio; pois sendo E o meio do arco, e tendo os arcos iguaes AE, EB cordas iguaes (7), o ponto E dista igualmente de A, e de B: logo a perpendicular deve passar pelo ponto E.

52. Ficando em uma linha recta o meio do arco, o meio da corda, e o centro, todas as vezes que uma

recta passar por dous destes pontos, póde-se dahi concluir, que passa pelo terceiro.

E como ao meio da corda não se póde tirar mais de uma perpendicular, póde-se concluir, que se uma linha perpendicular a uma corda passar por um destes tres pontos, tambem passará pelos outros dous.

Das quaes propriedades se póde concluir:

53. 1.° *O modo de dividir um angulo em duas partes iguaes.*

Para dividir em duas partes iguaes o angulo BAC (Fig. 25.), descreva-se do seu vertice A como centro, e com um raio arbitrario o arco DE: depois dos pontos D e E, como centros, se descrevão successivamente com um mesmo raio qualquer dous arcos, que se cortem em um ponto G; por este ponto, e pelo ponto A se tire a linha AG, a qual sendo perpendicular (33) ao meio da corda DE, dividirá em duas partes iguaes o arco DIE (51), e consequentemente tambem o angulo BAC, pois que os dous angulos parciaes BAG, CAG tem por medida os dous arcos iguaes DI, EI (12).

54. 2.° *O modo de fazer com que passe uma circumferencia de circulo por tres pontos dados, que não fiquem em linha recta.*

Sejão os tres pontos A, B, C (Fig. 26.); tirando as linhas AB, BC, serão estas cordas do circulo, que se pretende descrever.

Levante-se uma perpendicular ao meio da linha AB (33), e faça-se o mesmo ao meio de BC; o ponto I, em que se cortão estas duas perpendiculares, será o centro. Por quanto este centro deve estar na linha DE (52), pela mesma razão deve achar-se na linha FG: logo deve estar no ponto I, em que se encontrão, pois he o unico ponto commum, que estas linhas tem.

55. Se a questão fósse *achar o centro de um circulo, ou de um arco já descripto*, bem se vê, que bastaria marcar tres pontos arbitrariamente sobre este arco, e fazer a operação, que se acaba de ensinar.

56. E pois que não achamos mais do que um ponto I, com que se satisfaça á questão, devemos

daqui concluir, que por tres pontos dados não se póde fazer passar mais de uma circumferencia de circulo, e consequentemente, que *duas circumferencias de circulo não se podem encontrar em tres pontos, sem se confundirem.*

57. 3.° *O modo de fazer com que por um ponto dado B* (Fig. 27. e 28.) *passe uma circumferencia de circulo, que toque outra em um ponto dado A.*

Tire-se do centro C um raio CA para o ponto A, onde se quer que os circulos se toquem: prolongue-se este raio para uma, ou outra parte, quanto for necessario; tire-se uma linha do ponto A para o ponto B, pelo qual se quer que passe a circumferencia, que se busca: levante-se uma perpendicular MN ao meio de AB, a qual ha de cortar CA, ou a sua continuação em D. Este ponto D será o centro, e AD, ou BD o raio do circulo, que se procura. Porque como a circumferéncia, que se quer descrever, deve passar pelo ponto A, e pelo ponto B, deve o seu centro estar na linha MN (51): alem disso, como esta circumferencia ha de tocar em A, deve o seu centro achar-se na linha CA (49), ou na sua continuação: logo acha-se no ponto, em que se cortão as linhas CA e MN.

58. Se em vez de tocar uma circumferencia, se quizesse que tocasse uma linha recta em um ponto dado A (Fig. 29.) outra circumferencia, a qual passasse pelo ponto dado B, far-se-ía a mesma operação, com a differença de que a linha AC sería uma perpendicular levantada sobre a recta dada no ponto A.

59. 4.° *Duas cordas parallelas AB, CD* (Fig. 30.) *cortão entre si arcos iguaes AC, BD.*

Porque a perpendicular GI, abaixada do centro G sobre AB, deve dividir em duas partes iguaes cada um dos dous arcos AIB, CID (51), por ser tanto perpendicular a AB, como á sua parallela CD: logo se de arcos iguaes AI, BI se tirão arcos iguaes CI, DI, os arcos que restão, AC, BD devem ser iguaes.

Daqui concluimos, que quando uma tangente HK he parallela a uma corda AB, o ponto do contacto I fica no meio do arco AIB.

60. As proposições, que estabelecemos (50, 57 e 58), tem applicação na Arquitectura Naval, ou construcção dos navios. Muitas vezes se querem arcos, que se toquem, ou que toquem linhas rectas, e passem por pontos determinados. O que acabamos de dizer, póde facilitar a intelligencia de alguns dos methodos, que alli se prescrevem. Na Arquitectura Civil se faz tambem muito uso de arcos, que se tocão.

61. A ultima proposição, que acabamos de demonstrar, entre outros muitos usos, póde tambem servir para tirar uma parallela a uma linha dada.

Dos angulos considerados dentro do circulo.

62. DEixamos explicado, qual he a medida dos angulos geralmente (12). Agora não vamos dar differente methodo de os medir, estabeleceremos sómente algumas propriedades, que podem servir de utilidade ao diante, tanto para executar certas operações, como para facilitar algumas demonstrações.

63. *O angulo MAN* (Fig. 31. e 32.), *que tem o seu vertice na circumferencia, e he formado ou por duas cordas, ou por uma tangente e uma corda, tem por medida metade do arco BFED, comprehendido entre os seus lados.*

Tire-se pelo centro C o diametro FH parallelo ao lado AM, e o diametro GE parallelo ao lado AN: o angulo MAN (43) he igual ao angulo FCE: logo terá a mesma medida que aquelle, que tem o seu vertice no centro, isto he, terá por medida o arco FE: resta pois mostrar, que o arco FE he metade do arco BFED. Ora BF he igual a AH (59), por quanto AM, HF são parallelas; e porque AN e GE são tambem parallelas, o arco ED he igual a AG: logo ED e mais BF são iguaes a AG mais AH, isto he, GH; mas GH como medida do angulo GCH, deve ser igual a FE medida do angulo FCE, que (20) he igual a GCH: logo BF com ED são iguaes a EF: logo FE he metade de BFED: logo o angulo MAN tem por sua medida metade do arco BFED, comprehendido entre os seus lados.

Esta demonstração suppõe, que o centro do circulo está ou entre os lados do angulo, ou em um destes lados: mas quando o centro estiver fóra dos lados, como succede no angulo MAL (Fig. 32.), nem por isso seria menos verdadeiro, que a medida do angulo he metade do arco BL comprehendido entre os seus lados, porque imaginando a tangente AN, o angulo BAL he igual a LAN menos MAN: logo elle tem por medida a differença das medidas destes dous angulos, isto he (pois que o centro está entre os lados), metade da LEA menos metade de BEA, ou metade de BL.

64. Logo 1.° *Todos os angulos BAE, BCE BDE* (Fig. 33.), *que tendo o vertice na circumferencia, comprehenderem entre os seus lados o mesmo arco, ou arcos iguaes, são iguaes*; porque a medida de cada um delles será metade do mesmo arco BE (63).

65. 2.° *Todo o angulo BAC* (Fig. 34.), *que tiver o vertice na circumferencia, e cujos lados passarem pelos extremos do diametro, será recto, ou de 90°*; pois que então ha de comprehender entre os seus lados a semi-circumferencia BOC, que he de 180°; e como a sua medida he metade della (63), será de 90°.

66. A proposição, que se acaba de demonstrar (65), póde entre muitos outros usos ter os dous seguintes.

67. 1.° *Para levantar uma perpendicular no extremo B de uma linha FB* (Fig. 35.), quando esta linha não se póde continuar, quanto he bastante para executar commodamente o que fica ensinado (35): eis-aqui como se póde proceder.

De um ponto D tomado arbitrariamente fóra da linha FB, e com abertura igual á distancia DB, se descreva a circumferencia ABCH, que córte FB em qualquer ponto A; tire-se por este ponto, e pelo centro D o diametro ADC; e tire-se do ponto C, em que este diametro corta a circumferencia, ao ponto B a linha CB, que ha de ser perpendicular a FB: porque o angulo CAB, que ella fórma com FB, tem o vertice na circumferencia, passando os seus lados pelos extremos do diametro AC: logo este angulo he recto (65): logo CB he perpendicular sobre FB.

68. 2.° *Para de um ponto E, dado fóra do circulo* (Fig. 36.) *ABD, tirar uma tangente á circumferencia deste circulo.* Tire-se a recta CE, que una o centro C com o ponto E; e com CE, como diametro, se descreva a circumferencia CAED, a qual circumferencia ha de cortar a circumferencia ABD em dous pontos A e D: tirando de cada um dos dous pontos A e D para o ponto E as linhas DE e AE, serão estas as duas tangentes, que se podem tirar do ponto E á circumferencia ABD.

Para nos convencermos de que estas linhas são tangentes, basta tirar os raios CA, CD. Os dous angulos CDE, CAE tem ambos o seu vertice na circumferencia ACDE, e os lados destes angulos passão pelos extremos do diametro CE: logo (65) estes angulos são rectos: logo DE e AE são perpendiculares aos extremos dos raios CD, e CA: logo (47) estas linhas são tangentes em D e A.

69. Se o lado BA se prolongar indefinitamente para I (Fig. 31.), teremos um angulo NAI, que tem o vertice na circumferencia: este angulo, que não he formado por duas cordas, mas sómente por uma corda, e pelo prolongamento de outra, não terá por medida metade do arco AD comprehendido entre os seus lados, mas sim metade da somma dos dous arcos AD e AB subtendidos pelas cordas AD e AI prolongada. Porque sendo DAI e DAB iguaes a dous angulos rectos, tem ambos por medida metade da circumferencia; mas já mostrámos, que DAB tem por medida metade do arco BD (63): logo DAI tem por medida metade do arco AD, e mais metade de arco AB.

70. *O angulo BAC* (Fig. 37.), *que tem o vertice entre o centro e a circumferencia, tem por medida metade do arco BC comprehendido entre os seus lados, mais metade do arco DE comprehendido entre o prolongamento destes mesmos lados.*

Do ponto D, em que o lado CA prolongado encontra a circumferencia, se tire DF parallela a AB: o angulo BAC he igual a FDC (43), consequentemente ha de ter a mesma medida que este, isto he, metade do arco FBC (63), ou metade de BC, e mais metade

metade de BF, ou tambem [visto ser BF igual a DE (59)] metade de BC, e mais metade de DE.

71. *Um angulo BAC* (Fig. 38.), *que tem o vertice fóra do circulo, tem por medida metade do arco concavo BC, menos metade do arco convexo ED, que fica comprehendido entre os seus lados.*

Do ponto D, em que CA se encontra com a circumferencia, tire-se DF parallela a AB.

O angulo BAC he igual a FDC (43): logo terá a mesma medida que este, isto he, metade de CF, ou metade de CB menos metade de BF; mas BF he igual a ED (59): logo a medida do angulo será metade de CB menos metade de ED.

72. Daqui se mostra, que quando os lados de um angulo cortão um arco de circumferencia, se este angulo tem por medida metade do arco comprehendido entre estes lados, necessariamente tem o seu vertice na circumferencia, porque se o tivesse em outra parte, as proposições demonstradas (70 e 71) mostrarião que elle não tem metade deste arco por medida. Logo de qualquer modo que um angulo se collocar, se os seus lados (Fig. 33.) sempre passarem pelos mesmos pontos B e E da circumferencia, sempre o seu vertice ficará em algum ponto da circumferencia. Logo se se moverem sempre no mesmo plano duas régoas AM, AN (Fig. 39) pregadas uma na outra, tocando continuamente os lados dellas em dous pontos fixos B e C, o vertice A descreverá a circumferencia de um circulo, que ha de passar pelos dous ponto B e C.

Isto póde servir: 1.° *Para descrever um circulo, que passe por tres pontos dados B, A, C* (Fig. 39.), *quando se não póde chegar ao seu centro.* Una-se o ponto A aos dous pontos B e C com duas régoas AM, AN: segurem-se estas duas régoas de modo, que se não afastem uma da outra; movendo então o angulo BAC de modo, que as régoas AM, AN toquem sempre nos pontos B e C, o vertice A descreverá a circumferencia, que se pede.

2.° *Para descrever um arco de circulo de um determinado numero de gráos, o qual passe pelos dous pontos dados B e C,* operação que póde ser necessaria na pratica.

Para este fim se diminua de 360° o numero de gráos, que este arco deve ter: tome-se metade deste resto, e abrão-se as duas régoas de modo que fação um angulo igual a esta metade: firmem-se então as duas regoas uma na outra, e fazendo-as mover á roda dos dous pontos fixos B e C, o arco BAC, que o vertice A descrever neste movimento, será do numero de gráos proposto.

He facil de conhecer, o porque o angulo BAC se faz igual á metade daquelle resto; he por elle ter por medida metade de BC, que he a differença entre toda a circumferencia e o arco BAC.

Das linhas rectas, que fechão espaço.

73. O Menor numero de linhas rectas, que se podem empregar para fechar um espaço, he o de tres: a este espaço se chama *triangulo rectilineo*, ou simplesmente *triangulo*. ABC (Fig. 40.) he um triangulo, pois he um espaço comprehendido por tres linhas rectas; ou mais exactamente, he uma figura, que tem sómente tres angulos.

He evidente, que em todo o triangulo a somma de dous lados, quaesquer que elles sejão, sempre he maior que o terceiro. AB mais BC, por exemplo, são mais compridos do que AC; porque sendo AC uma recta, que vai de A para C, he o caminho mais curto, que ha entre estes dous pontos.

Um triangulo, cujos tres lados são iguaes, he chamado triangulo *equilatero* (Fig. 41.).

A'quelle triangulo, que tem sómente dous lados iguaes, chama-se *isosceles* (Fig. 42.).

E áquelle, que tem todos os tres lados desiguaes dá-se-lhe o nome de triangulo *scaleno* (Fig. 43.).

74. *A somma dos tres angulos de todo o triangulo rectilineo val dous angulos rectos, ou* 180°.

Continue-se indefinitamente o lado AC para E (Fig. 40.), e conceba-se a lin[illegible] CD parallela ao lado AB.

O angulo BAC he igual ao angulo DCE (37), pois que as linhas AB, DC são parallelas: e pela segunda propriedade das parallelas (38) o angulo ABC he igual ao angulo BCD: logo os dous angulos BAC e ABC juntos valem tanto como os dous BCD, DCE, isto he, tanto como o angulo BCE; mas BCE he supplemento de BCA (17 e 19): logo os dous angulos BAC e ABC formão juntos o supplemento de BCA: logo os tres angulos juntos valem 180°.

75. Esta demonstração prova ao mesmo tempo, *que o angulo externo BCE de um triangulo ABC val tanto como a somma dos dous internos BAC, e ABC, que lhe ficão oppostos.*

Concluamos do que se acaba de dizer (74): 1.° *Que um triangulo rectilineo não póde ter mais de um angulo recto*; e tendo-o, se lhe chama triangulo *rectangulo* (Fig. 43.).

2.° Que ainda ha mais palpavel razão, para *não poder ter mais de um angulo obtuso*; e o triangulo, que o tiver, tem o nome de triangulo *obtusangulo* (Fig. 44.).

3.° Que *póde ter todos os angulos agudos*; e he então denominado triangulo *acutangulo* (Fig. 45.).

4.° Que *conhecidos dous angulos, ou a somma de dous angulos de um triangulo, se conhece o terceiro*, diminuindo de 180° a somma dos dous angulos conhecidos.

5.° Que *quando dous angulos de um triangulo são iguaes a outros dous angulos de outro triangulo, o terceiro angulo tambem he igual ao outro terceiro.* Por quanto todos os tres angulos de cada um dos triangulos valem 180°.

6.° Que *os dous angulos agudos de um triangulo rectangulo sempre são complemento um do outro* (21). Por quanto sendo um dos angulos de 90°, para os outros dous juntos restão sómente outros 90°.

76. Já acima mostrámos (54), que por tres pontos, que não estejão em linha recta, se pode fazer sempre passar uma circumferencia de circulo; concluamos daqui, que:

Pelo vertice dos tres angulos de um triangulo se póde sempre fazer passar uma circumferencia de circulo: chama-se a isto circumscrever um circulo a um triangulo.

77. Daqui se conclue facilmente: 1.° Que *se dous angulos de um triangulo são iguaes, tambem são iguaes os lados, que lhe ficão oppostos*; e reciprocamente *se dous lados de um triangulo são iguaes, serão iguaes os angulos oppostos a estes lados.*

Porque descrevendo uma circumferencia pelos vertices dos tres angulos A, B, C (Fig. 46.), se os angulos ABC, ACD são iguaes, os arcos ADC, AEB, cuja metade lhe serve de medida (63), serão iguaes; logo (7) as cordas AC, AB são iguaes: e reciprocamente, se os lados AC, AB são iguaes, os arcos ADC, AEB serão iguaes; logo os angulos ABC, ACB, que tem por medida metade destes arcos, serão iguaes.

Logo os tres angulos de um triangulo equilatero são iguaes, e consequentemente cada um val o terço de 180°, ou 60°.

78. 2.° *No mesmo triangulo ABC* (Fig. 47.) *o maior lado fica opposto ao maior angulo, e o menor lado ao menor angulo; e reciprocamente.*

Porque se o angulo ABC he maior que o angulo ACB, o arco AC será maior do que o arco AB, e consequentemente a corda AC he maior do que a corda AB. Do mesmo modo se demonstra o reciproco disto.

Da igualdade dos triangulos.

79. HA muitas proposições, cuja demonstração se funda na igualdade de certos triangulos, que nellas se considerão, pelo que será conveniente estabelecer aqui os caracteres, pelos quaes se póde reconhecer esta igualdade: elles são tres.

80. *Dous triangulos são iguaes, quando tem um angulo igual, e comprehendido entre dous lados iguaes cada um a cada um.*

Seja o angulo B do triangulo BAC (Fig. 48) igual ao angulo E do triangulo EDF (Fig. 49.); seja o lado AB igual ao lado DE, e o lado BC igual ao lado EF: eis-aqui como se póde provar, que estes dous triangulos são iguaes.

Imagine-se a figura ABC sobreposta á figura DEF, de modo que o lado AB fique exactamente applicado sobre o seu igual DE; porque o angulo B he igual ao angulo E, cairá o lado BC sobre EF, e o ponto C cairá sobre o ponto F, visto que BC se suppoz igual a EF. Caíndo o ponto A sobre D, e C sobre F, fica evidente, que AC se applica exactamente sobre DF, e consequentemente os dous triangulos se ajustão perfeitamente.

Logo para construir um triangulo, no qual fossem conhecidos dous lados, e o angulo, que elles comprehendem, se tirará (Fig. 49.) uma linha DE igual a um dos lados conhecidos: sobre esta linha se fará um angulo DEF igual ao angulo conhecido (14); e fazendo EF igual ao segundo lado conhecido, tirar-se-ha DF, o que acabará de fazer o triangulo, que se pede.

81. *Dous triangulos são iguaes, quando tem um lado igual adjacente a dous angulos iguaes, cada um a cada um.*

Seja o lado AB (Fig. 48.) igual ao lado DE (Fig. 49.), o angulo B igual ao angulo E, e o angulo A igual ao angulo D.

Imagine-se o lado AB exactamente ajustado sobre o lado DE, porque o angulo B he igual ao angulo E, cairá o lado BC sobre EF: similhantemente porque o angulo A he igual ao angulo D, cairá o lado AC sobre DF; logo AC e BC se encontrarão no ponto F; logo os dous triangulos são iguaes.

Por tanto para construir um triangulo, em que se conhecesse um lado, e os dous angulos adjacentes, tire-se (Fig. 49.) uma linha DE igual ao lado conhecido; nos extremos E e D destas linhas se fação (14) os angulos E e D iguaes aos dous angulos conhecidos, que se dão; e os lados EF, DF, encontrando-se, terminarão o triangulo, que se pede.

82. A proposição (81) póde servir para demonstrar, que *ás partes AC, BD* (Fig. 50.), *de duas parallelas postas entre outras duas parallelas AB, CD, são iguaes.*

Abaixem-se as duas perpendiculares AE, BF: os angulos AEC, BFD são iguaes, pois são rectos;

e porque AC e BD, AE e BF são parallelas, será o angulo EAC igual a FBD (43). Alem disso AE he igual a BF (36): logo os dous triangulos AEC, BFD são iguaes, pois tem um lado igual adjacente a dous angulos iguaes cada um a cada um: logo AC he igual a BD.

Do mesmo modo se demonstra, que se AC he igual e parallela a BD, será AB igual e parallela a CD; porque além de que o lado AC he igual a BD, e o angulo em E he recto como em F, o angulo ACE será igual a BDF, porque AC he parallela a BD (37): logo (75) o terceiro angulo EAC será igual ao terceiro angulo DBF, logo os dous triangulos terão um lado igual adjacente a dous angulos iguaes cada um a cada um: logo serão iguaes: logo AE he igual a BF, e consequentemente as duas linhas são parallelas. Ora disto, e do que acabamos de demonstrar (82), segue-se, que AB he igual a CD.

83. *Dous triangulos são iguaes, quando tem os tres lados entre si iguaes cada um a cada um.*

Seja o lado AB (Fig. 48.) igual ao lado DE (Fig. 49.), o lado BC igual ao lado EF, e o lado AC igual ao lado DF.

Imagine-se o lado AB exactamente applicado sobre DE, e o plano BAC sobreposto ao plano da figura DEF: digo que o ponto C cáe sobre o ponto F.

Dos pontos D, e E, como centros, com os raios DF, EF, se descrevão os dous arcos IK, e HG, os quaes se cortão em F; he evidente, que o ponto C deve caír em algum ponto de IK, porque AC he igual a DF: pela mesma razão o ponto C deve caír em algum ponto de GH, pois que BC he igual a EF: logo deve caír sobre o ponto F, que he o unico ponto commum, que estes dous arcos podem ter para uma mesma parte do lado DE; logo os dous triangulos ajustão-se perfeitamente, e por consequencia são iguaes.

Logo para construir um triangulo, cujos tres lados são conhecidos, he necessario (Fig. 49.) tirar uma linha recta DE igual a um dos lados conhecidos: do ponto D como centro, e com um raio igual ao segundo lado conhecido se descreva o arco IK: similhantemente do ponto E como centro, e com um raio igual ao terceiro lado conhecido se descreva o arco GH: ultimamente do ponto da intersecção F se tirem para os pontos D e E as rectas FD e FE.

Dos polygonos.

84. CHamão geralmente *Polygono* a uma figura de qualquer numero de lados.

Quando tem tres lados, chama-se-lhe

Triangulo ou *Trilatero.*

Se tem 4.	. . .	*Quadrilatero.*
5.	. . .	*Pentagono.*
6.	. . .	*Hexagono.*
7.	. . .	*Heptagono.*
8.	. . .	*Octogono.*
9.	. . .	*Enneagono.*
10.	. . .	*Decagono.*

Não augmentamos mais a lista destes nomes, porque tão bem designada he uma figura, annunciando o numero dos seus lados, como usando-se daquelles nomes proprios, cujo grande numero carregaria inutilmente a memoria; apontamos sómente estes, porque se encontrão com mais frequencia do que os outros.

Chama-se angulo *saliente* aquelle, cujo vertice sáe para fóra da figura: todos os angulos da Fig. 51. são salientes.

Pelo contrario angulo *reintrante* he aquelle, cujo vertice está para a parte de dentro da figura. O angulo CDE (Fig. 52.) he um angulo reintrante.

Chama-se *Diagonal* uma linha tirada de um angulo a outro em qualquer figura. AD, AC (Fig. 51.) são diagonaes.

85. *Todo o polygono se póde dividir por diagonaes tiradas de um dos angulos em tantos triangulos, quantos lados tem menos dous.*

Basta olhar para as Figuras 51. e 52. para comprehender, que isto geralmente he verdade.

86. *Logo para ter a somma de todos os angulos internos de qualquer polygono, tomem-se tantas vezes 180°, quantos são os lados do polygono menos dous.*

Por quanto he evidente, que a somma dos angulos internos do polygono ABCDE (Fig. 51.), e ABCDEF (Fig. 52.) he a mesma, que a dos triangulos ABC, ACD, etc.; mas a somma dos tres angulos de cada um destes triangulos he de 180°: logo a somma dos angulos do polygono he de tantas vezes 180°, quantos são os triangulos, isto he (85), tantas vezes, menos duas, quantos são os lados.

Nota. Na Figura 52 o angulo CDE, para que seja comprehendido na proposição precedente, não se deve contar pela parte CDE exterior ao polygono, mas pela parte CDE composta dos angulos ADE, ADC: he um angulo de mais de 180°, que se deve considerar como angulo do mesmo modo, que outro qualquer de menos de 180°. Porque geralmente um angulo (10) não he mais do que a quantidade, que uma linha gyrou á roda de um ponto fixo, e ou gyre mais, ou menos de 180°, a quantidade, que gyrou, sempre he um angulo.

87. *Se se continuarem para a mesma parte todos os lados de um polygono, que não tem angulos reintrantes, a somma de todos os angulos externos será igual a 360°, qualquer que seja o numero dos lados do polygono.* Veja-se a Fig. 51.

Cada angulo externo he o supplemento do angulo interno, que lhe fica contiguo; pelo que os angulos internos, juntos com os externos, valem tantas vezes dous rectos, ou 180°, quantos são os lados do polygono; mas (86) os angulos internos differem desta somma duas vezes 180°, ou 360°; logo para os angulos externos restão 360°.

88. Chama-se polygono *regular* aquelle, que tem todos os angulos iguaes, e todos os lados iguaes. Veja-se a Fig. 53.

He facil de conhecer o valor de cada angulo interno de um polygono regular; porque sabendo pela proposição 86, quanto val a somma de todos os angulos

angulos internos, basta dividir este valor total pelo numero dos lados. Pergunta-se, por exemplo, quanto val o angulo interno de um Pentagono regular? Como tem cinco lados, tomarei 180° cinco vezes menos duas, isto he, 3 vezes, que me dá 540° por valor dos cinco angulos internos: logo sendo todos iguaes, val cada um a quinta parte de 540°, ou 108°.

89. Segue-se da definição do polygono regular, que *por todos os vertices dos angulos de um polygono regular se póde descrever sempre uma circumferencia de circulo.*

Porque deixamos provado (54), que pelos tres pontos A, B, C (Fig. 53.) se póde fazer com que passe uma circumferencia de circulo: ora digo eu, que ella tambem passa pelo extremo do lado CD. He facil de provar, que o ponto D, em que esta circumferencia deve encontrar o lado CD, dista de C uma quantidade igual a BC; porque sendo o angulo ABC igual a BCD, os arcos AEC, BFD, cujas metades servem de medida a estes angulos (63), devem ser iguaes: tirando de cada um delles o arco commum AFED, os arcos, que restão, CD e AB devem ser iguaes: logo tambem (7) as cordas CD e AB são iguaes: logo o ponto D, em que o lado CD he encontrado pela circumferencia, que passa por A, B, C, he o mesmo vertice do angulo do polygono. O mesmo se póde demonstrar dos angulos E e F.

90. Daqui se vê, que para *circumscrever um circulo a um polygono regular*, se *reduz a questão a fazer com que passe um circulo pelos vertices de tres dos seus angulos:* o que se faz pelo modo, que fica ensinado (54).

91. *Todas as perpendiculares abaixadas do centro do polygono regular sobre os lados são iguaes.* Porque estas perpendiculares OH, OL devendo caír no meio de cada lado (52), serão iguaes as linhas AH, AL: mas AO he commum aos dous triangulos OHA, OLA; alem disso, porque os dous triangulos ABO, AOF tem os tres lados de um iguaes aos tres lados do outro, serão iguaes os angulos OAH, OAL: logo os dous triangulos OAH, OAL, que tem um angulo

igual comprehendido por lados iguaes, são entre si iguaes (80): logo OH he igual a OL.

Logo se com um raio igual a uma das perpendiculares se descreve uma circumferencia, tocará todos os lados. Esta circumferencia chama-se *inscrita* no polygono.

As perpendiculares OH, OL se chama cada uma dellas o *apothema* do polygono.

92. He claro que se do centro do polygono regular se tirão linhas para todos os angulos, estas linhas comprehenderáõ entre si angulos iguaes, por quanto estes angulos terão por medida arcos subtendidos por cordas iguaes: logo *para saber qual he o angulo do centro de um polygono regular, he necessario dividir* 360° *pelo numero dos lados.* Porque estes angulos iguaes todos juntos tem por medida a circumferencia inteira. No hexagono, por exemplo, cada angulo do centro será a sexta parte de 360°, isto he, 60°.

93. Logo *o lado do hexagono he igual ao raio do circulo circumscrito*, porque tirando os raios AO e BO, será isosceles o triangulo AOB, e consequentemente (77) serão iguaes os dous angulos BAO e ABO; mas o angulo AOB he de 60°: logo os outros dous devem valer juntos 120° (74): logo cada um delles he de 60°: logo os tres angulos são iguaes, e consequentemente he equilatero o triangulo (77): logo AB he igual ao raio AO.

94. Não diremos mais ácerca dos polygonos regulares, por quanto as mais propriedades facilmente se deduzem das que acabamos de expôr: sómente accrescentaremos o uso da ultima proposição para se dividir a circumferencia de 15 em 15 gráos.

Tirem-se dous diametros AB, DE (Fig. 54.) perpendiculares um a outro; e tomando uma abertura de compasso igual ao raio CE, se applicará successivamente de E para F, e de A para G. Por este módo ficará o quarto da circumferencia AE dividido em tres partes iguaes, AF, FG, GE; porque, como tomámos o raio na abertura do compasso, segue-se do que acabamos de dizer (93), que o arco EF he de 60°; mas EA he de 90°: logo AF he de 30°: pela mesma razão AG he de 60°; e sendo AE de 90°, fica sendo

GE de 30°: ultimamente do arco total AE de 90° abatendo os arcos AF e GE, que valem ambos 60°, o resto FG será de 30°. Dividido assim o quarto de circumferencia em arcos de 30°, facilmente se póde ter o arco de 15°, dividindo pelo meio cada um dos arcos AF, FG, GE, segundo o methodo ensinado (53). Far-se-ha a mesma operação em cada um dos outros quartos AD, DB, e BE.

Se esta divisão se quizesse levar até o arco de 1°, seria necessario fazel-o por tentativas, pois para isso não ha methodo Geometrico. Ha todavia methodo Geometrico para chegar directamente até ao arco de 3°; mas como as proposições, que servem para isso, não tem outra utilidade, não trataremos dellas.

Advertiremos sómente, que por operações Geometricas entendemos aqui aquellas operações, em que o que se pede, póde pôr-se em execução por meio de um *determinado* numero de operações, feitas unicamente com régoa e compasso.

Das Linhas proporcionaes.

95. ANtes de entrar no assumpto do que respeita ás linhas proporcionaes, poremos aqui algumas proposições ácerca das proporções, que são necessaria consequencia do que deixámos ensinado na Arithmetica. Mas para abbreviar discursos, assentaremos daqui em diante, que, quando duas quantidades se devem ajuntar uma á outra, indicaremos esta operação pelo sinal $+$, que equivalerá á palavra *mais*; pelo que $4+3$ significará 4 mais 3, ou 4 sommados com 3, ou 3 sommados com 4. Similhantemente para denotar a diminuição, nos valeremos deste sinal $-$, que que equivalerá á palavra *menos*; de modo, que $5-2$ significará 5 menos 2, ou que se devem diminuir 2 de 5. Como nem sempre se trata de fazer realmente as operações, mas muitas vezes se discorre sobre as circumstancias destas operações, muitas vezes he mais util represental-as, do que mostrar o que resulta dellas.

Servir-nos-hemos deste sinal $\times$ para indicar a multiplicação, o qual he equivalente destes termos *multiplicado por*; assim 5×4 significa 5 multiplicado por 4.

Para denotarmos a divisão, faremos o mesmo que na Arithmetica: escreveremos o dividendo, e o divisor em fórma de fracção, sendo o dividendo o numerador, e o divisor o denominador; assim $\frac{12}{7}$ denotará 12 dividido por 7.

Supposto isto, já vimos (Arith. 185), que em toda a proporção a somma dos antecedentes he para a somma dos consequentes, como cada um dos antecedentes para o seu consequente; e que o mesmo succede com a differença dos antecedentes comparada com a dos consequentes.

96. Daqui pois podemos concluir, que *em toda a proporção a somma dos antecedentes he para a somma dos consequentes, como a differença dos antecedentes he para a differença dos consequentes*; pois como na proporção $48 : 16 :: 12 : 4$, por exemplo, temos (Arith. 185).

$$48 + 12 : 16 + 4 :: 12 : 4$$

$$48 - 12 : 16 - 4 :: 12 : 4$$

Fica evidente (por causa da razão de $12 : 4$, que he commum), que tambem daqui se póde concluir $48 + 12 : 16 + 4 :: 48 - 12 : 16 - 4$. O mesmo discurso se póde applicar a outra qualquer proporção.

97. Alternando pois esta ultima proporção, ou pondo o terceiro termo no lugar do segundo, e o segundo no lugar do terceiro, o que se póde fazer (Arith. 182), teremos: *A somma dos antecedentes para a sua differença, como a somma dos consequentes para a differença dos mesmos consequentes.*

98. Se na proporção $48 : 16 :: 12 : 4$ se trocarem os dous termos medios, ficando $48 : 12 :: 16 : 4$; e a esta proporção se applicar o que acabamos de demonstrar (96), teremos $48 + 16 : 12 + 4 :: 48 - 16 : 12 - 4$, que a respeito da proporção $48 : 16 :: 12 :$

4, dá esta proporção: *A somma dos dous primeiros termos de uma proporção he para a somma dos seus ultimos termos, como a differença dos dous primeiros he para a differença dos dous ultimos* (ou pondo o terceiro termo em lugar do segundo, e o segundo em lugar do terceiro), *a somma dos dous primeiros termos he para a sua differença, como a somma dos dous ultimos he para a sua differença.*

99. *Se uma razão se compõe do producto de muitas razões, a cada uma das razões componentes se póde substituir uma razão representada por outros termos, com tanto que estes dous termos tenhão a mesma razão, que aquelles, a que se substituem.*

Por exemplo, na razão de $6 \times 10 : 2 \times 5$, em lugar dos factores 6 e 2 se póde substituir 3 e 1, o que dará uma nova razão composta $3 \times 10 : 1 \times 5$, que he a mesma razão de $6 \times 10 : 1 \times 5$. Com effeito pois que $6 : 2 :: 3 : 1$, sem que esta proporção se mude, se podem multiplicar os antecedentes por 10, e os consequentes por 5 (Arith. 183.), e teremos então $6 \times 10 : 2 \times 5 :: 3 \times 10 : 1 \times 5$.

Facilmente se concebe, que este mesmo discurso se póde applicar a qualquer outra razão.

100. Se duas proporções, ou maior numero dellas, são taes, que o antecedente da primeira razão he igual ao consequente da outra, querendo multiplicar ordenadamente estas proporções, poder-se-hão omittir os termos, que se acharem communs ao antecedente e ao consequente: se tivermos, por exemplo, estas duas proporções:

$$6 : 4 :: 12 : 8$$

$$4 : 3 :: 20 : 15$$

Podemos concluir $6 : 3 :: 12 \times 20 : 8 \times 15$.

Porque usando do multiplicador commum 4, a razão de $6 \times 4 : 4 \times 3$, que então sairia, não differiria da razão de $6 : 3$ (Arith. 170), que fica, omittindo este factor.

Do mesmo modo tendo-se

$$6 : 4 :: 12 : 8$$
$$4 : 3 :: 20 : 5$$
$$3 : 7 :: 21 : 49$$

Podemos daqui concluir

$$6 : 7 :: 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 5 \times 49.$$

O mesmo terá lugar nas segundas razões, e pelo mesmo discurso.

Esta observação he util para achar a razão de duas quantidades, quando esta razão deve ser composta; porque se compara então cada uma destas quantidades com outras quantidades, que se empregão como auxiliares, e que não subsistem depois da demonstração.

Agora vamos applicar ás linhas as noções, que temos deduzido dos numeros ácerca das proporções. A fim porém de fazer mais concisas, e mais geraes as demonstrações, não daremos ás linhas valor particular, senão em algumas applicações: e de resto cada um se póde sempre ajudar, fazendo comparações em numeros.

As razões, que aqui vamos considerar, são razões Geometricas. Assim quando dissermos, que uma determinada linha he para outra, como 5 he para 4, por exemplo, deve-se entender, que a primeira contém a segunda tantas vezes, como 5 contém 4.

101. *Se sobre um dos lados AZ de qualquer angulo ZAX* (Fig. 55.) *se marcão as partes iguaes AB, BC, CD, DE, etc., de qualquer grandeza e numero, que se quizer, tendo-se tirado arbitrariamente por um ponto F da divisão a linha FL, que encontre o lado AX em L, tirando pelos outros pontos da divisão as linhas BG, CH, DI, EK, etc., parallelas a FL, digo que as partes AG, GH, HI, etc., do lado AX são tambem iguaes entre si.*

Tiremos pelos pontos G, H, I, etc., as linhas GM, HN, IO, etc., parallelas a AZ, os triangulos ABG, GMH, HNI, IOK, etc., serão todos iguaes entre si, porque: 1.° as linhas GM, HN, IO, etc., cada uma dellas he igual a AB, pois (82) são iguaes a BC, CD, DE, etc.: 2.° os angulos GMH, HNI, IOK, etc., todos são iguaes entre si, pois são todos iguaes ao angulo ABG (43): 3.° os angulos MGH, NHI, OIK, etc., são todos iguaes entre si, pois são todos iguaes ao angulo BAG (43).

Logo todos os triangulos BAG, MGH, NHI, etc., tem um lado igual adjacente a dous angulos iguaes cada um a cada um: logo todos são iguaes: logo os lados AG, GH, HI, etc., destes triangulos todos são iguaes entre si: logo a linha AX está effectivamente dividida em partes iguaes pelas parallelas.

Logo he evidente, que se AB he parte, qualquer que seja, de AG, BC será uma similhante parte de GH, CD outra parte similhante de HI: se AB por exemplo val $\frac{2}{3}$ de AG, BC valerá $\frac{2}{3}$ de GH, e assim successivamente.

O mesmo succederá a respeito de 2, 3, 4, etc., partes de AF, comparadas com 2, 3, 4, etc., partes de AL: logo qualquer porção AD, ou DF da linha AF he a mesma parte da porção correspondente AI, ou IL da linha AL, que AB he de AG, isto he,

$$AD : AI :: AB : AG,$$
$$DF : IL :: AB : AG.$$

Do mesmo modo se póde dizer, que

$$AF : AL :: AB : AG.$$

Logo (supposta a razão de AB : AG, que he commum a estas tres proporções) poderemos dizer

$$AD : AI :: DF : IL,$$
$$AD : AI :: AF : AL.$$

102. *Logo se pelo ponto D* (Fig. 56.), *tomado arbitrariamente em um dos lados AF de um triangulo AFL, se tira DI parallela ao lado FL, os dous lados AF, AL ficarão cortados proporcionalmente*, isto he, teremos sempre

$$AD : AI :: DF : IL,$$
$$AD : AI :: AF : AL.$$

E alternando, ou mudando de lugar os dous meios (Arith. 182.),

AD : DF :: AI : IL,

AD : AF :: AI : AL,

qualquer que seja alias o angulo FAL.

103. Logo 1.° *Se de um ponto A, tomado arbitrariamente fóra da linha GL* (Fig. 57.), *se tirão para differentes pontos desta linha muitas linhas AG, AH, AI, AK, AL; qualquer linha, como BF parallela a GL, cortará todas estas linhas em partes proporcionaes*, isto he, teremos

AB:BG :: AC:CH :: AD:DI :: AE:EK :: AF:FL,

AB:AG :: AC:AH :: AD:AI :: AE:AK :: AF:AL.

Porque considerando successivamente os angulos GAH, GAI, GAK, GAL, como o angulo FAL na Figura 56, demonstrar-se-ha do mesmo modo, que todas estas razões são iguaes.

104. 2.° *A linha AD* (Fig. 56. *), *que divide em duas partes iguaes o angulo BAC de um triangulo, córta o lado opposto BC em duas partes BD, DC proporcionaes aos lados correspondentes AB, AC, isto he, de modo que temos BD : DC :: AB : AC.*

Porque se pelo ponto B se tira BE parallella a AD, e que encontre CA continuada para E, as linhas CE, CB ficão cortadas proporcionalmente (102), e teremos BD : DC :: EA : AC.

Mas he facil de conhecer, que AE he igual a AB; porque em razão das parallelas AD e BE, o angulo E he igual ao angulo DAC (37), e o angulo EBA he igual ao seu alterno BAD (38): logo porque DAC e BAD são iguaes, pois são metades de BAC, os angulos E e EBA serão iguaes: logo os lados EE e AB são tambem iguaes: logo a proporção BD : CD :: EA : AC se muda nesta BD : DC :: AB : AC.

105. *Se as linhas AF e AL* (Fig. 56.) *são cortadas proporcionalmente nos pontos D e I, isto he, de modo que AF : AD :: AL : AI, a linha DI será parallela a FL.*

Porque a parte de AL, que for cortada pela parallela tirada do ponto D, deve (102) ser contida em AL tantas vezes, quantas AD he contida em AF; mas pela supposição AI he contida em AL este mesmo numero de vezes: logo esta parte não póde ser outra senão AI.

106. Logo *se as linhas AG, AH, AI, AK, AL,* (Fig. 57.) *tiradas do ponto A para differentes pontos da linha GL, se acharem cortadas proporcionalmente nos pontos B, C, D, E, F, a linha BCDEF, que passar por todos estes pontos, será uma linha recta parallela a GL.*

107. As proposições ensinadas (102 e segg.) são igualmente verdadeiras, quando a linha BF, em vez de estar entre o ponto A e a linha GL, como na Fig. 57, caír alem do ponto A, como na Fig. 58. Porque quanto fica dito da Fig. 55, e que serve de fundamento ás proposições estabelecidas (102 e segg.), teria igualmente lugar nas parallelas, que cortassem ZA e XA continuadas na Fig. 55.

Da similhança dos triangulos.

108. CHamão-se lados *homologos* de dous triangulos, ou geralmente de duas figuras similhantes, aquelles, que tem posições similhantes, cada um na figura, a que pertence.

109. *Dous triangulos, que tem angulos iguaes cada um a cada um, tem os lados homologos proporcionaes, e consequentemente são similhantes.*

Se nos dous triangulos ADI, AFL (Fig. 59. e 60) o angulo A do primeiro for igual ao angulo A do segundo, o angulo D igual ao angulo F, e angulo I igual ao angulo L, digo que teremos AD : AF : : AI : AL : : DI : FL.

Pois que sendo o angulo A do primeiro igual ao angulo A do segundo, podem applicar-se estes dous triangulos um sobre outro, do modo que representa a Fig. 56.; e porque o angulo D he igual ao angulo F, as linhas DI, FL serão parallelas (42): logo, conforme o que dissemos (102), teremos AD : AF : : AI : AL.

Tiremos agora pelo ponto I a recta IH parallela a AF : do que fica dito (102) se vê, que AI : AL : : FH : FL, ou [porque FH he igual a DI (82)] : : DI : FL : logo AD : AF : : DI : FL.

Como se podem alternar os meios, podemos tambem dizer AD : AI : : AF : AL, e AI : DI : : AL : FL.

110. Pois que (75. 5.°) quando dous angulos de um triangulo são iguaes a dous angulos de outro triangulo, o terceiro angulo he necessariamente igual ao terceiro angulo; concluamos, que *dous triangulos são similhantes, quando tem dous angulos iguaes cada um a cada um.*

111. Temos visto (43) que dous angulos, que tem os lados parallelos, e estão voltados para a mesma parte, são iguaes; logo *dous triangulos, que tem os lados parallelos, tem os angulos iguaes cada um a cada um, e consequentemente* (109) *tem os lados proporcionaes.*

Logo tambem *dous triangulos, que tem os lados perpendiculares cada um a cada um, tem tambem estes mesmos lados proporcionaes.* Porque imaginando que um destes triangulos faz um quarto de conversão, ficaráõ os seus lados parallelos aos do outro.

112. *Se do angulo recto A de um triangulo rectangulo BAC* (Fig. 43.) *se abaixa uma perpendicular AD sobre o lado opposto BC* (a que se chama *hypotenusa*) : 1.° *Os dous triangulos ADB, ADC serão similhantes entre si, e ao triangulo BAC :* 2.° *A perpendicular AD será meia proporcional entre as duas partes BD e DC da hypotenusa :* 3.° *Cada lado AB ou AC do angulo recto será meia proporcional entre a hypotenusa, e o segmento correspondente BD, ou DC.*

Porque cada um dos dous triangulos ADB, ADC tem um angulo recto em D, assim como o triangulo BAC em A; além disso cada um delles tem outro angulo commum com o triangulo BAC: pois o angulo B he commum ao triangulo ADB, e ao triangulo ABC; similhantemente o angulo C he commum ao triangulo ADC, e ao triangulo BAC : logo (110) estes tres triangulos são similhantes. Logo (109) comparando entre si os lados homologos dos dous triangulos ADB, e ADC, teremos

BD : AD :: AD : DC.

E comparando os lados homologos dos dous triangulos ADB, BAC, teremos

BD : AB :: AB : BC.

Comparando ultimamente os lados homologos dos triangulos ADC, e BAC, teremos

CD : CA :: CA : BC.

E assim (Arith. 174) AD he meia proporcional entre BD e DC; AB meia proporcional entre BD e BC; ultimamente AC meia proporcional entre DC e BC.

113. *Dous triangulos, que tem um angulo igual comprehendido entre dous lados proporcionaes, tem tambem iguaes os outros dous angulos, e por consequencia são similhantes.*

Se nos dous triangulos ADI, AFL (Fig. 59. e 60.) o angulo A do primeiro he igual ao angulo A do segundo, e ao mesmo tempo os lados, que comprehendem o primeiro angulo, são para os que comprehendem o segundo de sorte que tenhamos AD : AF :: AI : AL; digo que os triangulos são similhantes, isto he, que tem os outros angulos iguaes cada um a cada um, e os terceiros lados DI e FL na mesma razão de AD : AF, ou de AI : AL.

Porque o angulo A do triangulo ADI póde applicar-se sobre o angulo A do triangulo AFL, do modo que representa a Figura 56; mas pela supposição AD : AF :: AI : AL; logo as duas rectas AF e AL estão cortadas proporcionalmente nos pontos D e I: logo DI he parallela a FL (105): logo (37) o angulo AFL he igual ao angulo ADI, e o angulo ALF igual ao angulo AID.

Do que fica dito se segue (109), que DI : FL :: AD : AF :: AI : AL.

114. *Dous triangulos, que tem os tres lados homologos proporcionaes, tem os angulos oppostos iguaes*

cada um a cada um, e consequentemente são similhantes.

Suppõe-se (Fig. 61. e 62.) que DE : AB :: EF : BC :: DF : AC: digo que o angulo D he igual ao angulo A, o angulo E igual ao angulo B, e o angulo F ao angulo C.

Imaginemos, que sobre o lado DE se constroe um triangulo DGE, no qual seja o angulo DEG igual ao angulo B; e o angulo GDE igual ao angulo A; o triangulo DEG será similhante ao triangulo ABC (110), logo (109) DE : AB :: GE : BC :: DG : AC; mas pela supposição temos DE : AB :: EF : BC :: DF : AC: logo por ser commum a razão de DE : AB, teremos GE : BC :: DG : AC :: EF : BC :: DF : AC; de que se podem tirar as seguintes proporções

GE : BC :: EF : BC,

DG : AC :: DF : AC.

Logo como em ambas as proporções os consequentes são iguaes, sel-o-hão tambem os antecedentes: logo GE he igual a EF, e DG igual a DF. O triangulo DEG tem pois os tres lados iguaes aos do triangulo DEF; logo (83) he igual ao triangulo DEF; mas acabamos de vêr, que o triangulo DEG, he similhante a ABC: logo DEF tambem he similhante a ABC.

115. Deixamos acima provado (111), que quando a linha DI (Fig. 56.) he parallela ao lado FL, os dous triangulos ADI e AFL são similhantes. Como esta verdade subsiste, qualquer que seja a grandeza do angulo A, devemos daqui concluir, que (Fig. 57.) os triangulos AGH, AHI, AIK, AKL, são similhantes aos triangulos ABC, ACD, ADE, AEF cada um a cada um, e consequentemente (109), que KL : EF :: AK : AE :: KI : DE :: AI : AD :: IH : CD :: AH : AC :: GH : BC; logo tirando desta serie de razões sómente aquellas, onde estão as partes das linhas GL e BF, teremos KL : EF :: KI : DE :: IH : CD :: GH : BC; que vem a ser, *que se de um ponto A se tirão muitas linhas rectas para differentes pontos de uma linha recta*

GL, estas linhas cortaráõ outra qualquer, que for parallela a GL, na mesma proporção que cortão a linha GL, isto he, em partes, que hão de ter entre si a mesma razão, que tiverem as partes correspondentes de GL.

116. Os principios, que acabamos de estabelecer, são o fundamento de todas as partes das Mathematicas theoricas e práticas. Como he importante ganhar familiaridade com estes principios, insistiremos algum tanto no seu uso, tanto com este fim, como por isto nos offerecer occasião para explicar varios methodos práticos uteis.

117. A proposição, que ensinámos (101), nos offerece um meio bem natural para dividir uma linha dada em partes iguaes, ou em partes que tenhão entre si uma determinada razão. Supponhamos, que he AR (Fig. 55.) uma linha, que se quer dividir em duas partes, as quaes tenhão entre si uma razão dada, por exemplo, a de 7 : 3; tire-se pelo ponto A uma linha indefinita AZ fazendo com AR um angulo qualquer; e tomado qualquer intervallo do compasso AB, se applicará dez vezes pelo comprimento da linha AZ: supponhamos, que o ponto Q he o extremo da ultima parte, tire-se uma linha de Q para R, extremo da linha dada AR; se pelo ponto D, extremo da terceira divisão, se tirar DI parallela a QR; ficará a linha AR dividida em duas partes RI e AI, as quaes seráõ entre si :: 7 : 3; por quanto (101, e 102) ellas são entre si :: DQ : AD, das quaes a primeira tem 7 partes, e a segunda 3 partes.

Daqui se vê, que querendo-se dividir a linha AR em maior numero de partes, em cinco partes, por exemplo, que fossem entre si, como os numeros 7, 5, 4, 3, 2; sommar-se-hião todos estes numeros entre si, o que daria 21; marcar-se-hião na linha AZ 21 intervallos do compasso, e tirar-se-hião parallelas á linha QR pelos extremos da 7ª, 5ª, 4ª, 3ª, e 2ª divisão.

118. Se nos dessem as razões em linhas, juntar-se-hião todas estas linhas umas a outras sobre a linha AZ.

Daqui se conhece o que se deveria fazer, se quizessemos dividir a linha AR em partes iguaes.

Porém, quando as partes da linha, que se quer dividir, hão de ser pequenas, ou quando esta linha he em si pequena, o mais leve defeito nas parallelas influe muito sobre a igualdade, ou desigualdade das partes, pelo que não será inutil expôr o methodo seguinte.

119. Tendo que dividir a linha *fg* (Fig. 63.) em partes iguaes, em 6, por exemplo: tire-se uma linha indefinita BC, na qual se marcaráõ seis aberturas iguaes de compasso arbitrariamente: sobre BC, que comprehende estas seis partes, se descreva um triangulo equilatero BAC, descrevendo dos dous pontos B e C como centros, e servindo de raio o intervallo BC, dous arcos, que se córtem em A. Sobre os lados AB, AC se tomem as partes AF, AG igual cada uma a *fg*; tirada a linha FG, será igual a *fg*; do ponto A a todos os pontos das divisões de BC se tirem linhas rectas, que hão de cortar FG, do mesmo modo que está cortada BC.

Porque sendo AF, AG entre si iguaes, e tambem iguaes AB, e AC, teremos AB : AF :: AC : AG: logo AB, e AC estão cortadas proporcionalmente em F e G: logo FG he parallela a BC (105), e consequentemente (109) o triangulo FAG similhante a ABC: logo FAG he tambem equilatero: logo FG he igual a AF, e por consequencia a *fg*: além disso sendo FG parallela a BC, devem estas linhas estar cortadas proporcionalmente (115) pelas linhas tiradas do ponto A para a recta BC.

O que acabamos de expôr, póde servir para fazer e dividir a escala, que deve servir para reduzir uma figura de grande a pequeno; mas a escala mais commoda para um grande numero de operações, he a que se chama escala de *dizima*: eis-aqui o modo de a construir. Nos extremos A e B da linha AB (Fig. 64.), que se quer dividir em 100 partes, se levantem as perpendiculares AC, BD, em cada uma das quaes se marcão dez aberturas de compasso iguaes entre si, mas de grandeza arbitraria: tirando CD, divide-se AB em dez partes iguaes, e estas partes se marcão em CD; depois se tirão as transversaes, como mostra a figura, e pelos pontos da divisão correspondentes de CA, e de BD se tirão linhas rectas, que são outras tantas parallelas a AB; estamos então no mesmo caso, que se tivessemos dividido AB em 100 partes. Querendo, por exemplo, tomar 47 partes das 100, que contém AB, tómo na linha, que passa em n.° 7, a parte 7H desde CA até á transversal, que passa pelo n.° 40; e por este modo para qualquer outro numero de partes.

Com effeito sendo C7v, CAx triangulos similhantes, he evidente, que 7v contém 7 partes das 10, em que Ax estivesse dividida; logo pois que vH contém quatro intervallos iguaes cada um a Ax, a linha inteira 7H val 47 das ditas partes, isto he, 47 partes, das 100, que AB contém.

120. A proposição demonstrada (102) póde servir *para achar uma quarta proporcional a tres linhas dadas ab, cd, ef*, (Fig. 56.) isto he, uma linha, que seja o quarto termo de uma proporção, de que os tres primeiros sejão *ab*, *cd*, *ef*. Para este effeito tendo tirado duas rectas indefinitas AF, AL, que fação entre si qualquer angulo que seja, se applicará *ab* de A para D, e *cd* de A para F: similhantemente se applicará *ef* de A para I, e tirada entre os dous pontos D e I a recta DI, se tirará pelo ponto F a linha FC parallela a DI, que determinará AL quarta proporcional, que se busca.

Pela mesma proposição, que deixamos ensinada (109), se póde fazer isto por estoutro modo. Sobre uma linha indefinita AF (Fig. 56.) se tomem as duas partes AF, AD respectivamente iguaes a *ab*, *cd*; depois tendo tirado DI, igual a *ef*, e debaixo de qualquer angulo arbitrariamente, se tirará então pelo ponto A, e ponto I a recta AIL, a qual se cortará por uma linha FL parallela a DI: esta parallela será o quarto termo, que se busca.

Quando os dous termos medios de uma proporção são iguaes, o quarto termo então se chama terceiro proporcional, porque há só tres quantidades differentes na proporção. Assim quando se pede uma terceira proporcional a duas linhas dadas, convém entender, que se pede um quarto termo de uma proporção, na qual a segunda das duas linhas dadas serve de segundo e terceiro termo, e tem lugar a mesma operação, que acabamos de ensinar.

121. As proposições ensinadas (109, 113, e 114) podem servir para resolver este problema geral: *Das seis cousas, de que se compõe um triangulo*, (angulos e lados) *dadas tres dellas, achar as outras tres, com tanto que nestas tres cousas conhecidas entre um lado.*

Vamos apontar alguns exemplos.

Supponhamos que achando-nos no campo no ponto B (Fig. 65.), se quer saber que distancia ha deste ponto B ao objecto A, a que não se póde chegar.

A uma certa distancia BC se porá uma bandeirola, a qual distancia se fará pouco mais, ou menos igual a BA: meça-se esta distancia. Depois se medem com o grafometro, que havemos descrito (23), os angulos ABC, ACB, que com a linha BC fazem as duas linhas, que se imaginão ir dos seus extremos ao ponto A. Supposto isto, tirar-se-ha sobre o papel uma linha *bc* (Fig. 66.); e fazendo uma escala arbitrariamente, se dará a esta linha *bc* tantas partes da escala, quantos pés tem BC, se a medição se fez em pés: com o transferidor descrito (22) se fará no ponto *b*, um angulo de tantos gráos, de quantos se achou ser o angulo B, e no ponto *c* outro angulo, que seja do mesmo numero de gráos, que se acharão em C; então as duas linhas *ab*, *ac* se encontrarão no ponto *a*, o qual representará o ponto A; de sorte, que medindo-se na escala a linha *ab*, o numero de partes que se achar nella, será o numero de pés, que contém AB; porque tendo feito os angulos *b* e *c* iguaes aos dous angulos B e C, o triangulo *bac* he similhante ao triangulo BAC (110), e consequentemente os seus lados são proporcionaes.

Por este modo se póde medir a distancia de uma ilha a uma costa, quando esta ilha se póde observar de dous pontos da costa, cuja distancia seja conhecida.

122. Pela proposição demonstrada (114) se póde dispensar a medição dos angulos, no caso de que acabamos de fallar. Com effeito tendo plantado uma bandeirola em E (Fig. 65.), a qual fique no alinhamento

dos

dos pontos A e B, e outra no ponto F, que fique no alinhamento dos dous pontos A e C, basta medir as linhas BC, BE, CE, BF, CF: far-se-ha então um triangulo *bec* (Fig. 66.), cujos lados *bc*, *be*, *ce* tenhão tantas partes da escala, quantos pés tem BC, BE, CE: similhantemente se fará sobre *bc* outro triangulo *bcf*, cujos lados *bf*, *cf* tenhão tantas partes da escala, quantos pés tem BF, e CF: continuando então os lados *be* e *cf*, elles se encontrarão em um ponto *a*, que representará o ponto A; de sorte, que medindo na escala a linha *ba*, o numero de partes, que se achar, será o de pés, que deve ter a linha AB.

Com effeito tendo o triangulo *bec* os lados proporcionaes aos do triangulo BEC, devem estes dous triangulos ter os angulos iguaes: logo o angulo EBC, ou ABC he igual ao angulo *ebc*, ou *abc*; pela mesma razão se prova, que o angulo FCB, ou ACB he igual ao angulo *fcb*, ou *acb*: logo os dous triangulos ACB, *acb* são similhantes.

Ao mesmo tempo se vê, que com esta construcção se podem determinar os angulos ABC, e ACB, medindo com o transferidor os angulos *abc*, *acb* sobre o papel.

Ultimamente ainda que estes expedientes, e muitos outros, que facilmente se podem imaginar por estes, possão ser muitas vezes uteis, não nos demoraremos mais, porque a Trigonometria, de que adiante havemos de tratar, nos franqueará meios mais expeditos, e mais susceptiveis de exactidão; porque bem que as operações, que acabamos de descrever, rigorosamente sejão exactas na theorica, todavia na prática não dão mais do que uma mediócre exactidão; porque os erros, que se podem commetter na figura *abc*, ainda que sejão pequenos, podem influir sensivelmente nas conclusões, que se tirão para a figura ABC, que sempre he incomparavelmente maior.

Das linhas proporcionaes consideradas no circulo.

123. DUas linhas se dizem cortadas em razão *inversa*, ou *reciproca*, quando para se formar uma proporção com as partes destas linhas, as duas partes de uma devem ficar sendo os extremos, e as duas partes da outra os meios da proporção.

Duas linhas se chamão reciprocamente proporcionaes ás partes dellas, quando uma destas linhas, e a sua parte formão as extremas, ao mesmo tempo que a outra linha, e a sua parte formão as medias.

124. *Duas cordas AC e BD* (Fig. 67.), *que se cortão no circulo, em qualquer ponto E que seja, e debaixo de qualquer angulo que seja, sempre se cortão em razão reciproca;* isto he, sempre AE : BE :: DE : CE.

Tirem-se as cordas AB, CD, e ficaráõ formados dous triangulos BEA, CED, que facilmente se demonstra, que são similhantes: pois alem do angulo BEA igual a CED (20), o angulo ABE, ou ABD he igual ao angulo DCE, ou DCA; porque estes dous angulos, tendo o seu vertice na circumferencia, assentão sobre o mesmo arco AD (64). Logo os triangulos BEA e CED são similhantes (110): logo tem os seus lados homologos proporcionaes, isto he, AE : BE :: DE : CE; onde se vê, que as partes da corda AC são extremas, e as partes da corda BD medias.

125. Pois que a proposição, que acabamos de demonstrar, tem lugar em qualquer parte que esteja o ponto E, e qualquer que seja o angulo, debaixo de que se cortem as duas cordas AC, BD, terá tambem lugar, quando as duas cordas (Fig. 68.) são perpendiculares uma á outra, e uma dellas AC, por exemplo, passa pelo centro: ora nesse caso ficando a corda BD cortada em duas partes iguaes (52), vem a ser iguaes os dous termos medios da proporção AE : BE :: DE : CE, e a proporção se muda na outra AE : BE :: BE : CE; logo *toda a perpendicular BE tirada de um ponto B da circumferencia sobre o diametro, he meia proporcional entre as duas partes AE, CE do mesmo diametro.*

126. Esta proposição tem muitas applicações proveitosas. Por ora exporemos uma só, que he *achar uma media proporcional entre duas linhas dadas ae, ec.* (Fig. 70.)

Tire-se a recta indefinita AC, sobre a qual se applicaráõ unidas pelos extremos as duas linhas AE, EC iguaes ás duas linhas *ae*, *ec*: sobre a linha total CA como diametro se descreva um semi-circulo ABC, e do ponto E, onde se unem as duas linhas, se levante sobre AC a perpendicular EB: esta perpendicular será a media proporcional, que se busca.

127. *Duas secantes AB, AC,* (Fig. 69.) *que partindo do mesmo ponto A fóra do circulo, se terminão na parte concava da circumferencia, sempre ficão reciprocamente proporcionaes ás partes exteriores AD, AE, em qualquer parte que esteja o ponto A fóra do circulo, e qualquer que seja o angulo, que fação as duas secantes.*

Imaginem-se tiradas as cordas DC, BE, teremos dous triangulos ADC, AEB, nos quaes 1.° he commum o angulo A; 2.° o angulo B he igual ao angulo C, pois tendo ambos o vertice na circumferencia, estão sobre o mesmo arco DE (64): logo (110) estes dous triangulos são similhantes, e tem os lados proporcionaes: logo AB : AC :: AE : AD; onde se vê que a secante AB, e sua parte exterior AD formão os extremos de uma proporção, de que a secante AC, e a sua parte exterior AE formão os meios.

128. E porque esta proposição he verdadeira, qualquer que seja o angulo BAC; se imaginando fixo o lado AB, o lado AC gyrar sobre o ponto A, arredando-se de AB, os dous pontos da secção E e C irão continuadamente approximando-se um ao outro, até que caíndo a recta AC sobre a tangente AF, se confundem estes dous pontos, e vem a ser AC, AE cada uma dellas igual a AF; de sorte que a proporção AB : AC :: AE : AD se torna nesta AB : AF :: AF : AD: logo:

129. *Se de um ponto A tomado fóra do circulo, se tira uma tangente AF, e uma secante qualquer AB, a tangente será meia proporcional entre a secante AB, e a parte exterior desta mesma secante.*

130. Entre outros mais usos póde servir esta proposição para cortar uma linha *em media e extrema razão*. Uma linha AB (Fig. 71.) se diz cortada em media e extrema razão, quando está dividida em duas partes taes AC, BC, que uma destas partes BC he media proporcional entre a linha inteira AB, e a outra parte AC, isto he, taes que tenhamos

$$AC : BC :: BC : AB.$$

Consegue-se isto deste modo. Em um dos extremos A da linha se levanta a perpendicular AD, igual a metade de AB: do ponto D como centro, e com o raio AD se descreve uma circumferencia, a qual ha de cortar em E a linha BD, tirada entre os pontos B e D; tome-se BC igual a BE, e ficará a linha AB cortada no ponto C em media e extrema razão.

Com effeito sendo a linha AB perpendicular sobre AD, he tangente (48); e porque BF he secante, teremos (129) BF : AB :: AB : BC; logo (Arith. (185) BF — AB : AB — BC :: AB : BC; mas AB he igual a FE, por ser AB dupla de AD: logo BF — AB he igual a BE, ou BC; e como AB — BC he AC, teremos BC : AC :: AB : BC, ou (Arith. 181.) AC : BC :: BC : AB.

Das figuras similhantes.

131. CHamão-se *similhantes* duas figuras de igual numero de lados, quando estas tem os angulos homologos iguaes, e os lados homologos proporcionaes.

As duas figuras ABCDE, *abcde* (Fig. 72. e 73.) são similhantes, quando tem o angulo A igual ao angulo *a*, o angulo B igual ao angulo *b*, o angulo C igual ao angulo *c*, e assim os demais; e se ao mesmo tempo o lado AB contém o lado *ab* tantas vezes, como o lado BC contém *bc*, como CD contém *cd*; e assim dos mais.

Estas duas condições são essenciaes ambas juntas nas figuras de mais de tres lados; o triangulo he a unica figura, em que basta uma destas condições, porque a ella anda necessariamente annexa a outra (109 e 114).

132. *Se dos dous angulos homologos A, e a de dous polygonos similhantes se tirão as diagonaes AC, AD, ac, ad, para os outros angulos, os dous polygonos ficaráõ divididos em igual numero de triangulos similhantes respectivamente cada um ao seu correspondente.*

Temos pela supposição o angulo B igual ao angulo *b*, e os lados AB : *ab* :: BC : *bc* : logo os dous triangulos ABC, *abc*, que tem um angulo igual comprehendido por lados proporcionaes, são similhantes (113): logo o angulo BCA he igual ao angulo *bca*, e AC : *ac* :: BC : *bc*.

Se dos angulos iguaes BCD, *bcd* se tirão os angulos iguaes BCA, *bca*, os angulos, que restão, ACD, *acd* serão iguaes; mas BC : *bc* :: CD : *cd* : logo visto termos provado, que BC : *bc* :: AC ; *ac*, será tambem CD : *cd* :: AC : *ac* : logo os dous triangulos ACD, *acd*, são tambem similhantes, pois tem um angulo igual comprehendido entre dous lados proporcinaes. O mesmo se provará, e do mesmo modo a respeito dos triangulos ADE, *ade*; e de todos os outros triangulos, que se forem seguindo, no caso que estes polygonos tenhão maior numero de lados.

133. *Se dous polygonos ABCDE, abcde* (Fig. 72. e 73.) *se compoem do mesmo numero de triangulos similhantes cada um a cada um, e similhantemente dispostos, serão similhantes.*

Por que os angulos B e E são iguaes aos angulos *b* e *e*, se os triangulos são similhantes; pela mesma razão os angulos parciaes BCA, ACD, CDA, ADE serão iguaes aos angulos parciaes *bca*, *acd*, *cda*, *ade* : logo os angulos totaes BCD, CDE são iguaes aos angulos totaes *bcd*, *cde* cada um a cada um. Além disso a similhança dos triangulos dá esta serie de razões iguaes AB : *ab* :: BC : *bc* :: AC : *ac* :: CD : *cd* :: AD : *ad* :: DE : *de* :: AE : *ae* ; e tiradas desta serie as razões, que se referem aos lados dos polygonos, teremos AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: AE : *ae*. Logo estes polygonos tem tambem os lados homologos proporcionaes : logo são similhantes.

Logo para construir uma figura similhante a uma figura proposta ABCDE (Fig. 72.), a qual tenha por lado homologo a AB uma linha dada, se applicará esta linha dada sobre AB de A para *f*: pelo ponto F se tire *fg* parallela a BC, que encontre em *g* a linha AC; do ponto *g* se tire *gh* parallela a CD, a qual encontre AD em *h*; ultimamente pelo ponto *h* se tire *hi* parallela a ED, e teremos o polygono A*fghi* similhante a ABCDE.

134. *Os contornos de duas figuras similhantes são entre si como os seus lados homologos*, isto he, a somma dos lados da figura ABCDE contém a somma dos lados da figura *abcde* do mesmo modo, que o lado AB contém o lado *ab*.

Porque na progressão de razões iguaes AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: AE : *ae*, a somma dos antecedentes he (Arith. 186) para a somma dos consequentes, como um antecedente para o seu consequente, isto he, :: AB : *ab*; ora he evidente, que estas sommas são os contornos das duas figuras.

135. Se a circumferencia ABCDEFGH (Fig. 74) se imagina dividida em qualquer numero de partes iguaes, que se quizerem; e tendo tirado do centro I para os pontos das divisões os raios IA, IB, etc., se descreve com outro raio *Ia* a circumferencia *abcdefgh*, que aquelles raios encontrão nos pontos *a*, *b*, *c*, *d*, etc.; he evidente, que se se unem em cada uma das circumferencias os pontos da divisão com cordas, formar-se-hão dous polygonos similhantes; por quanto os triangulos ABI, e *abI*, etc., são similhantes, pois tem um angulo commum em I comprehendido entre lados proporcionaes; por que sendo IA igual a IB, e *Ia* igual a *Ib*, he evidente que AI : BI :: *aI* : *bI*; e do mesmo modo se demonstra a mesma propriedade nos de mais triangulos. Disto, e do que fica dito (134), se concluirá, que o contorno ABCDEFGH he para o contorno *abcdefgh* :: AB : *ab*, ou (por causa da similhança dos triangulos ABI, e *abI*) :: AI : *aI*. Como esta similhança não depende do numero dos lados destes dous polygonos terá tambem lugar, quando o numero dos lados de cada um delles se multiplicar infinitamente; mas neste caso fica visivel que a circumferencia não differirá do polygono inscri-

to: logo as mesmas circumferencias ABCDEFGH, *abcdefgh* serão entre si : : AI : *aI*, isto he, como os seus raios, e por consequencia como os seus diametros.

136. Temos pois 1.° *que a circumferencia de um circulo se póde tomar pela de um polygono regular de infinitos lados.*

2.° *Que os circulos são figuras similhantes.*

3.° *Que as circumferencias dos circulos tem entre si a razão dos seus raios, ou dos seus diametros.*

137. Geralmente fallando, se em dous polygonos similhantes se tirão duas linhas com igual inclinação aos seus lados homologos, e terminadas em pontos similhantemente postos a respeito destes lados, estas linhas, que tambem se denominão *linhas homologas*, estarão entre si na mesma razão, que tiverem quaesquer dous lados homologos. Porque fazendo ellas dous angulos iguaes com dous lados homologos, farão tambem angulos iguaes com quaesquer outros dous lados homologos, visto que os angulos de dous polygonos similhantes são entre si iguaes cada um a cada um: ora se neste caso não tivessem entre si a mesma razão de dous lados homologos, facilmente se conheceria, que os pontos, onde se terminão, não podião ser similhantemente postos, como diz a supposição.

138. Nos principios, que acabamos de estabelecer a respeito das figuras similhantes, se funda grande parte da arte de tirar plantas. Dizemos *grande parte*, porque quando se quer tirar a planta de um largo terreno, como da Europa, de França, etc., a arte de determinar os seus pontos principaes depende de outros conhecimentos, de que não he ainda lugar de fallar. Mas para a configuração de um paiz pequeno, de uma costa, de uma bahia, etc., se podem determinar os seus pontos, e represental-os depois em uma planta pelo modo, que acabamos de descrever. He porém de observar, que nós suppomos aqui que todos os angulos, que se hão de medir, estão no mesmo plano horizontal, ou quasi horisontal; se o não estivessem, antes de formar o plano, seria necessario reduzil-os a elle, para o que daremos methodo na Trigonometria.

Supponhamos pois que AEHIFKGBDC (Fig. 75.) sejão muitos objectos notaveis, cujas respectivas posições se pretendem marcar em uma planta.

Desenhar-se-hão grosseiramente sobre um papel estes objectos com as posições, que mostra a vista, para o que se passará a differentes sitios, que forem necessarios, para tomar algum conhecimento de todos os taes objectos. Este primeiro desenho, a que se chama *borrador*, servirá para marcar as medidas, que pelas operações se forem achando.

Medir-se-ha uma base AB, cujo comprimento não será menor do que a decima, ou nona parte da distancia dos dous objectos mais remotos, que dos seus extremos se poderem descobrir, e que ao mesmo tempo tenha tal posição, que dos seus extremos se veja o maior numero de objectos, que for possivel. Depois disto do ponto A se mediráõ com instrumento proprio para medir angulos, com o grafometro, por exemplo, os angulos EAB, FAB, GAB, CAB, DAB, que no ponto A fazem com a linha AB as linhas, que se imaginão tiradas deste ponto aos objectos E, F, G, C, D, que supponho descubrirem-se dos extremos A, e B da base. Similhantemente se mediráõ do ponto B os angulos EBA, FBA, GBA, CBA, DBA, que fazem no ponto B com a linha AB as linhas, que se imaginão tiradas deste ponto B para os objectos sobreditos. Se ha alguns objectos como H, I, que não se possão ver dos dous extremos A e B, transportar-se-há o instrumento a dous sitios E e F, que ficão observados, dos quaes se possão descobrir os dous pontos H e I; e tomando EF como base, se mediráõ os angulos HEF, IEF, HFE, IFE, que com esta nova base fazem as linhas, que dos extremos E, F se dirigissem aos dous objectos H e I. Ultimamente se ha mais algum objecto como K, que não se póde ver nem dos extremos de AB, nem de EF, tomar-se-ha por base qualquer outra linha, como FG tirada entre dous pontos já observados, e nos seus extremos se mediráõ os angulos KFG, KGF.

Acabadas todas estas operações, e determinado e construido e construido o petipé da planta, que se intenta fazer, se tirará (Fig. 76.) uma linha *ab*, a que se darão tantas partes do petipé, quantas toezas, ou pés tem a linha AB, conforme a medida se fizer em toezas, ou em pés (*a*). No ponto *a* se fará com o transferidor um angulo *bae* de tantos gráos e minutos, quantos se achárão em BAE; e no ponto *b* um angulo *eba* de tantos gráos e minutos, de quantos se achou ser o angulo EAB; as duas linhas *ae*, *be*, que fazem estes angulos com *ab*, se cortaráõ em um ponto *e*, que na planta representa a posição do objecto E no terreno; porque por esta construcção o triangulo *abe* será similhante a ABE, pois se fizerão dous angulos daquelle iguaes a dous angulos deste (110). Pelo mesmo modo iremos determinando os pontos *f*, *g*, *d*, *c*, que hão de representar os pontos, ou objectos F, G, D, C. Para representar depois os pontos *h*, *i* e *k*, tirar-se-hão as linhas *ef*, e *fg*, que se consideraráõ como bases, e determinar-se-ha a posição dos pontos *h* e *i* a respeito de *ef*, e do ponto *k* a respeito de *fg*, do mesmo modo que se determinou a dos outros pontos a respeito de *ab*. Bem entendido, que todas as linhas, que se tirarem nestas differentes operações, serão marcadas unicamente com lapis, pois não servem mais do que para determinar os pontos *c*, *d*, *e*, etc., e uma vez determinados, se apaga tudo o mais.

Não me demoro em demonstrar com miudeza, que os pontos *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k* tem entre si a mesma posição, que os objectos C, D, E, F, G, etc. tem entre si: basta observar que os pontos *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, pela construção, estão postos a respeito de *ab*, como os pontos C, D, E, F, G o estão a respeito de AB, visto que os triangulos *cab*, *dab*, *eab*, etc., se fizerão similhantes aos triangulos CAB, DAB, EAB, etc., e similhantemente postos; pelo que, se ha difficuldade, sómente recáe sobre os pontos *h*, *i*, *k*. Ora os pontos *h* e *i* pela construcção estão a respeito de *ef*, como os pontos H e I estão a respeito

(*a*) As plantas no Reino de Portugal costumão ter por medida a braça, e o seu petipé se divide em braças de 10 palmos, e em palmos de 8 pollegadas.

de EF: logo, porque estas duas ultimas linhas tem a respeito das linhas *ab*, e AB a mesma posição, os pontos *h*, *i* terão a respeito de *ab* a mesma posição, que tem H, I a respeito de AB. Por este modo medidas na escala da planta as respectivas distancias dos pontos *a*, *e*, *f*, *g*, etc., mostrarão as distancias dos objectos A, E, F, G, etc.

Bem claro fica, sem ser necessario insistir mais, que este mesmo methodo póde servir para verificar os pontos, que se suspeitassem duvidosos na Carta, como tambem para accrescentar os pontos, que lhe faltão.

Tambem se póde fazer uso da bussola para determinar a posição dos objectos E, F, G, etc., e muitas vezes se faz este uso della; neste caso não se observão no ponto A os angulos EAB, FAB, etc., mas sim os angulos, que as linhas AE, AF, etc., e até a mesma base AB fazem com a direcção da agulha cevada: repete-se a mesma operação no ponto B. Para marcar os objectos, na planta se tira pelo ponto *a* uma linha, que representa a direcção da agulha, e tirão-se as linhas *ab*, *ac*, *af*, etc., de modo que fação com ella os angulos, que se observárão no ponto A. Determinando depois a grandeza, que se quer dar a *ab*, no ponto *b* se faz o mesmo, que se fez no ponto *a*. Quanto aos pontos H e I, que se não descobrião dos pontos A e B, se determinão a respeito de EF do mesmo modo, que se determinárão os outros a respeito de AB: ultimamente se marcão os pontos *h* e *i*, determinando-os a respeito de *ef* do mesmo modo, que se determinárão os pontos *e*, *f*, etc., a respeito de *ab*. Finalmente, quanto for possivel, se deve fugir de delinear com a bussola outra cousa mais, do que miudezas, como a direcção de uma estrada, ou os cotovêlos de um rio, etc. Determinados com exactidão os pontos principaes, podem determinar-se as mais miudezas com menos escrupulosa attenção; porque tendo os objectos, que se marcão, entre si pequena distancia, não póde ser de grande consequencia o erro, que se póde commetter nos angulos.

Quando ha circumstancias, que obriguem a apontar em planta já feita algum novo ponto, não he indispensavel observar este ponto de outros dous pontos conhecidos; pelo contrario muitas vezes se determina, observando deste ponto outros dous pontos conhecidos. Supponhamos, por exemplo, que o ponto H seja um ponto de uma bahia, cuja altura se medisse á sonda, e que na Carta se quer notar esta sonda. Do ponto H se observaráõ os angulos EHM, FHM, que fazem com a direcção LM da agulha cevada as duas linhas EH, FH, que se dirigem a dous objectos conhecidos E, F. Para marcar depois na Carta o ponto H, se tirará á parte (Fig. 77.) uma linha *lm*, que mostre a direcção da agulha cevada: em um ponto *n* desta linha se farão os angulos *onm*, *pnm* iguaes aos angulos EHM, FHM: ultimamente pelo ponto *f* se tirará *fh* parallela a *pn*, e pelo ponto *e* a linha *eh* parallela a *on*, estas duas linhas se encontraráõ no ponto *h*.

Este mesmo methodo serve para marcar a posição no mar á vista de duas terras. Quanto ao mais *a rosa dos ventos*, que anda marcada nas Cartas maritimas, offerece muitos expedientes para resumir algumas operações destas; mas não podemos entrar nestas miudezas, que pertencem immediatamente á pilotagem, he-nos bastante expôr os principios, em que tem fundamento esta prática.

Devemos com tudo observar, que as sondas se não devem marcar por este methodo, senão quando as circumstancias não permittem fazel-o por outro modo; porque, por muita prática que haja em usar do *compasso de variação*, nunca se consegue marcar no mar do ponto H os objectos E, F com tal exactidão, que possamos confiar tanto, como quando se marca o objecto H sendo, por exemplo, um barco, ou uma boia, etc., fazendo isto de terra dos pontos E e F. As sondas são de assás importancia, para se dever usar do methodo mais susceptivel de exactidão.

Ha outro modo de levantar plantas tanto mais commodo, quanto menos aprestos requer, pelo qual ao mesmo tempo que se observão os differentes pontos, cujas posições pretendemos achar, se vão delineando na planta, sem os perder de vista. A Fig. 78. representa o instrumento, de que se usa para isso. ABCD he uma mesa de 15, ou 16 pollegadas, de comprido, e quasi outro tanto de largo, que assenta em um pé similhante ao do grafometro. Sobre esta mesa se prega uma folha de papel, ou se segura com um caixilho, que encaixa em roda della. LM he uma régoa, ou alidada com pinnulas nas suas extremidades.

Quando com este instrumento, chamado *Prancheta*, se quer tirar a planta de um campo, toma-se uma base *am*, como nas operações, que deixamos ditas; e pondo o pé do instrumento em *a*, se põe uma bandeirola em *m*: sobre o papel se applica a alidada LM, e se põe em direcção, que o pique *m* se veja pelas duas pinnulas: então se tira ao longo della uma linha EF, a que se dão tantas partes do petipé da planta, quantos pés se medem entre o ponto E, em que se observa a principio, e o ponto *f*, donde se ha de fazer a segunda observação. Move-se depois a regoa em roda do ponto E, até que pelas pinnulas se enfiem os objectos I, H, G; e á medida, que se vão enfiando, se tira uma linha indefinita. Tendo por este modo corrido todos os objectos, que se podem ver estando no ponto *a*, se transporta o instrumento para *m*, deixando uma bandeirola em *a*. Fazem-se então no ponto *f* as mesmas operações a respeito dos objectos I, H, G, que se fizerão na outra estação. As linhas *fi*, *fh*, *fg*, que neste caso vão, ou se imaginão ir a estes objectos, encontrão as primeiras nos pontos *g*, *h*, *i*, que marcão a posição dos objectos G, H, I.

Funda-se tambem na theoria das figuras similhantes o methodo de *fazer o ponto*, isto he, de representar em uma Carta a derrota, que o Navio seguio em quanto navegou, ou em parte da sua navegação.

Supponhamos que um Navio, tendo partido de um sitio conhecido, corre primeiramente 28 leguas ao Su-Est, depois 20 leguas ao Sul, e ultimamente 26 leguas ao Sud-Ouest; quer-se na Carta determinar a derrota do Navio, e o lugar, aonde chegou.

Primeiramente se busca na Carta o ponto da partida: supponhamos que he o ponto *d* (Fig. 79.). Igualmente se busca entre as divisões da rosa dos ventos marcada na Carta a linha, que vai ao Su-Est:

supponhamos, que he a linha CF: pelo ponto *d* se tira a linha *dc* parallela a CF, e se faz *dc* de tantas partes da escala da Carta, quantas leguas se corrêrão para Su-Est. Pelo ponto *c* se tira similhantemente uma linha *cb*, parallela a CE, que se dirige ao Sul, e faz-se *cb* de tantas partes da escala, quantas leguas se corrêrão para o Sul: ultimamente pelo ponto *b* se tira *ab* parallela a CD, que vai ao Sud-Ouest; e tendo dado a *ba* tantas partes da escala, quantas leguas se corrêrão para Sud-Ouest, o ponto *a* he o ponto, onde tem chegado o Navio, e a linha *dcba* representa a derrota, que seguio. Com effeito as linhas *dc*, *cb*, *ba* fazem entre si os mesmos angulos, que entre si fizerão successivamente as differentes derrotas do Navio. Alem disso as partes *dc*, *cb*, *ba* tem entre si a mesma razão, que tem realmente os espaços, que descreveo o Navio: logo a figura *dcba* he (131) absolutamente similhante á derrota, que o Navio seguio. Ultimamente o ponto *d* na Carta tem a mesma situação, que o ponto, donde partio, tem sobre a Terra (*a*): logo *dcba* não sómente he similhante á derrota do Navio, mas situada a respeito dos differentes pontos da Carta, como a derrota do Navio o esteve a respeito de diversos pontos da Terra.

SECÇÃO SEGUNDA.

Das Superficies.

139. ENtramos a tratar da segunda das tres especies de extensão, que distinguimos, isto he, da extensão com comprimento e largura.

Nesta Secção só consideraremos as *Superficies planas*, e limitar-nos-hemos unicamente ás das figuras rectilineas, e do circulo.

(*a*) Esta expressão não he rigorosamente exacta, mas aqui não he lugar proprio de fixar o seu sentido rigoroso. Os pontos de uma Carta, maiormente de uma Carta reduzida, não tem entre si a mesma situação que os pontos da Terra, que representão; mas para aqui he bastante que tenhão o mesmo uso. Em outro lugar tornaremos a tratar deste objecto.

A medição das superficies se reduz á dos triangulos e quadrilateros.

Os quadrilateros se dividem em *quadrilateros*, simplesmente assim chamados, *Trapesios*, e *Parallelogramos*.

A figura de quatro lados, chamada simplesmente *Quadrilatero*, he aquella, que entre os seus lados não tem algum, que seja parallelo a outro (Fig. 80.).

Trapesio he um quadrilatero, que tem parallelos sómente dous lados (Fig. 81.).

Parallelogramo he um quadrilatero, cujos lados oppostos são parallelos (Figg. 82. 83. 84. 85. 86. 86.*). Ha quatro castas de parallelogramos, o *rhomboide*, o *rhombo*, o *rectangulo*, e o *quadrado*.

Rhomboide he um parallelogramo, cujos lados e angulos contiguos são desiguaes (Fig. 82.).

Rhombo, tambem chamado *Lozango*, he aquelle, que tem os quatro lados iguaes, e os angulos desiguaes (Fig. 83.).

Rectangulo he aquelle, que tem os angulos todos iguaes, mas os lados contiguos desiguaes (Fig. 84.).

Quadrado he aquelle, que tem todos os lados e angulos iguaes (Fig. 85.).

Quando os angulos de um quadrilatero são iguaes, são necessariamente rectos, porque os quatro angulos de todo o quadrilatero juntos valem quatro angulos rectos (86).

A perpendicular EF (Fig. 82.), tirada entre os lados oppostos de um parallelogramo, se chama *altura* deste parallelogramo: e o lado BC, sobre o qual cáe esta perpendicular, se chama a sua *base*.

A altura de um triangulo ABC (Figg. 87. 88. e 89.) he a perpendicular AD abaixada de um angulo A deste triangulo sobre o lado BC opposto e prolongado, se he necessario: a este lado BC se lhe chama então *base*.

140. *Qualquer triangulo rectilineo ABC* (Fig. 89.) *sempre he metade de um parallelogramo da mesma base, e da mesma altura do triangulo.*

Porque pelo vertice do angulo C se póde imaginar tirada uma linha CE parallela ao lado AB; e pelo vertice do angulo A uma linha AE parallela ao lado BC, as quaes duas linhas com os lados AB e BC formão um parallelogramo ABCE da mesma base e altura do triangulo ABC: isto supposto, facilmente se vê, que os dous triangulos ABC, CEA são iguaes, porque o lado AC he commum a ambos: alem disso os angulos BAC, ECA são iguaes por causa das parallelas (38): e pela mesma razão os angulos BCA e CAE tambem são iguaes: logo estes dous triangulos, tendo um lado igual, adjacente a dous angulos iguaes cada um ao seu correspondente, são iguaes: logo o triangulo ABC he metade do parallelogramo ABCE.

141. *Os parallelogramos ABCD, EBCF* (Fig. 86. e 86.*) *da mesma base, e da mesma altura, tem as superficies iguaes.*

Os dous parallelogramos ABCD, ABCF (Fig. 86.) tem a parte EBCD commum a ambos; pelo que a sua igualdade depende da igualdade dos triangulos ABE, DCF, cujos triangulos facilmente se prova serem iguaes, porque AB he igual a CD, por serem estas linhas parallelas comprehendidas entre parallelas (82): pela mesma razão BE he igual a FC; alem disso (43) o angulo ABE he igual ao angulo DCF: logo os dous triangulos tem um angulo igual, comprehendido entre dous lados iguaes cada um a cada um; logo são iguaes: logo tambem são iguaes o parallelogramo ABCD, e o parallelogramo EBCF.

Na Fig. 86.* se demonstrará pelo mesmo modo, que os dous triangulos ABE, DCF são iguaes: logo tirando de cada um o triangulo DIE, os dous trapesios, que restão, ABID, EIFC, serão iguaes; e accrescentando a cada um destes trapesios o triangulo BIC, os parallelagramos ABCD, e EBCF, que resultão, serão iguaes.

142. Pelo que he tambem verdade dizer, que *os triangulos da mesma base e da mesma altura, ou de bases e alturas iguaes, são iguaes*; porque são metades de parallelogramos da mesma base e da mesma altura dos triangulos (140).

143. Desta ultima proposição se póde concluir, que *todo o polygono póde reduzir-se a um triangulo da mesma superficie.* Seja, por exemplo, ABCDE (Fig. 91.) um pentagono; se se tira a diagonal EC,

que prende os extremos dos dous lados contiguos ED, DC; e tendo tirado FD parallela a EC, que encontre em F o lado AE continuado, se tira tambem a linha CF, teremos um quadrilatero ABCF, cuja superficie he igual á do pentagono ABCDE, porque os dous triangulos ECD, ECF tem a base EC commum: alem disso sendo comprehendidos entre as mesmas parallelas EC, DF, tem igual altura: logo são iguaes: logo se a cada um delles se ajunta o quadrilatero EABC, teremos o pentagono ABCDE igual ao quadrilatero ABCF.

Ora assim como o pentagono se reduz a um quadrilatero, se reduzirá tambem o quadrilatero a um triangulo: logo etc.

Da medição das superficies.

144. MEdir *uma superficie* he determinar quantas vezes esta superficie contém outra superficie conhecida.

As medidas, de que ordinariamente se usa, são quadrados, e algumas vezes parallelogramos rectangulos; pelo que medir a superficie ABCD (Fig. 90.), he determinar quantas vezes contém um quadrado como v. g. *abcd*, ou um rectangulo, como *abcd:* se o lado *ab* do quadrado *abcd* he de um pé, he determinar quantos pés quadrados contém a superficie ABCD: mas sendo o lado *ab* do rectangulo *abcd* de um pé, o lado *bc* he de tres pés, he determinar quantos rectangulos de tres pés de comprido, e um pé de largo contém a superficie ABCD.

Para medir em partes quadradas a superficie do rectangulo ABCD, convem buscar quantas vezes o lado AB contem o lado *ab* do quadrado *abcd*, que deve servir de unidade, ou de medida; buscar tambem quantas vezes o lado BC contém *ab*, e multiplicando estes dous numeros um pelo outro, teremos o numero dos quadrados iguaes a *abcd*, que póde accommodar

accommodar a superficie ABCD. Por exemplo, se AB contém quatro vezes *ab*, e se BC contem sete vezes *ab*, multiplico 7 por 4, e o producto 28 denota, que o rectangulo ABCD contém 28 quadrados como *abcd*.

Pois se pelos pontos da divisão E, F, G se tirão parallelas a BC, teremos quatro rectangulos iguaes, cada um dos quaes poderá conter tantos quadrados como *abcd*, quantas partes iguaes a *ab* se contém no lado BC: logo convem repetir os quadrados contidos em um destes rectangulos tantas vezes, quantos são os rectangulos, isto he, tantas vezes, quantas o lado AB contém a *ab*; e como o numero dos quadrados, que em cada rectangulo se contém, he o mesmo numero das partes contidas em BC, fica evidente, que multiplicando o numero destas partes de BC pelo numero das outras de AB, teremos o numero dos quadrados iguaes a *abcd*, que póde conter o rectangulo ABCD.

Bem que no discurso, que acabamos de fazer, supponhamos que os lados AB e BC contem um numero exacto de medidas *ab*, este discurso não se estende menos ao caso, em que a medida *ab* não se contivesse assim exactamente. Se BC, por exemplo, contivesse 6 medidas e $\frac{1}{2}$, cada rectangulo conteria 6 quadrados e $\frac{1}{2}$; e se o lado AB contivesse 3 medidas e $\frac{1}{3}$, haveria 3 rectangulos e $\frac{1}{3}$, cada um de 6 quadrados e $\frac{1}{2}$: logo seria necessario multiplicar 6 $\frac{1}{2}$ por 3 $\frac{1}{3}$, isto he, o numero das medidas de BC pelo numero das medidas de AB.

145. Pois que (141) o parallelogramo rectangulo ABCD (Fig. 86. e 86.*) he igual ao parallelogramo EBCF da mesma base, e da mesma altura; segue-se, que para ter a superficie deste bastará multiplicar o numero das partes da base BC pelo numero das partes da sua altura BA: do que se póde tirar como regra geral que:

Para ter o numero de medidas quadradas, que se contém na superficie de qualquer parallelogramo ABCD (Fig. 82.), *he necessario medir a base BC, e a altura EF com a mesma medida, e multiplicar o numero de medidas da base pelo numero das da altura.*

Pelo que deixamos dito, se vê, que (144) para saber-se o valor da superficie ABCD (Fig. 90.), basta repetir a superficie GBCH, ou o numero dos quadrados, que ella contém, tantas vezes, quantas o lado GB he contido no lado AB; pelo que o multiplicando realmente he uma superficie, e o multiplicador um numero abstracto, que denota quantas vezes se deve repetir o multiplicando.

He com tudo usual o dizer-se, que *para achar a superficie de qualquer parallelogramo, he necessario multiplicar a sua base pela sua altura*; mas isto deve-se considerar como uma expressão resumida, em que se subentende o *numero* dos quadrados correspondentes ás partes da base, e o *numero* das partes da altura. N'uma palavra, não se póde dizer, que se multiplica uma linha por uma linha. Multiplicar he *tomar certo numero de vezes*, de sorte que quando se multiplica uma linha, não póde resultar senão uma linha; e multiplicando-se uma superficie, não póde resultar senão uma superficie. Uma superficie não póde ter outros elementos senão superficies; e bem que repetidas vezes se diga, que o parallelogramo ABCD (Fig. 82.) póde considerar-se como composto de tantas linhas iguaes, e parallelas a BC, quantos pontos tem a altura EF, subentende-se que estas linhas tem uma largura infinitamente pequena (porque muitas linhas sem largura não podem compor uma superficie), e então cada uma destas linhas he uma superficie, que sendo repetida tantas vezes, quantas entra a sua altura na altura AE, dá a superficie ABCD.

Com tudo adoptaremos esta expressão: *Multiplicar uma linha por uma linha*: mas não se deve perder de vista, que isto não he mais do que um resumido modo de fallar. Assim diremos, que o producto de duas linhas exprime uma superficie, bem que verdadeiramente se deve dizer, que o *numero* de partes de uma linha, multiplicado pelo *numero* de partes de outra linha, exprime o numero de partes quadradas contidas no parallelogramo, que teria por altura uma destas linhas, e a outra linha por base.

Para denotar a superficie do parallelogramo ABCD

(Fig. 82.), escreveremos $CB \times EF$; na Fig. 84. escreveremos $BA \times BC$; e na Fig. 85, em que são iguaes os dous lados AB, e BC, em vez de $AB \times BC$, ou $AB \times AB$, escreveremos $\overline{AB}^2$; de sorte, que $\overline{AB}^2$ significa a linha AB multiplicada por si mesma, ou a superficie do quadrado feito sobre a linha AB. Similhantemente para denotar que a linha AB está elevada ao cubo, escreveremos $\overline{AB}^3$, que equival a $AB \times AB \times AB$, ou $\overline{AB}^2 \times AB$.

146. Do que acabamos de dizer, se segue, que para dous parallelogramos terem igual superficie, basta que o producto da base de um, multiplicada pela sua altura, seja igual ao producto da base do segundo multiplicada pela sua altura. Logo *quando dous parallelogramos tem superficie igual, tem as suas bases reciprocamente proporcionaes ás suas alturas*, isto he, a base e altura de um podem considerar-se como extremos de uma proporção, da qual são termos medios a base e altura do outro, porque assim consideradas, o producto dos extremos he igual ao producto dos meios; e neste caso necessariamente se dá proporção (Arith. 180).

Além disto esta verdade se póde ver immediatamente, fazendo reflexão, que se, por exemplo, a base de um he mais pequena, que a do outro, de necessidade ha de ser á proporção maior a sua altura para formar o mesmo producto.

147. Pois que um triangulo he metade de um parallelogramo da mesma base e altura (140), segue-se do que se acaba de dizer (145), que *para termos a superficie de um triangulo, se deve multiplicar a base pela altura, e tomar metade deste producto.*

Assim se a altura AD (Fig. 87.) he de 34 pés, e a base BC de 52, terá a superficie 884 pés quadrados, que he metade do producto de 52 por 34.

Entendo, que he inutil insistir para dar a conhecer, que o producto será o mesmo, multiplicando a base por metade da altura, ou a altura por metade da base.

148. Logo 1.° *para ter a superficie de um trapesio*, he necessario sommar os dous lados parallelos, tomar metade da somma, e multiplical-a pela perpendicular tirada entre as duas parallelas. Porque tirando-se a diagonal BD (Fig. 81.), temos dous triangulos ABD BDC, cuja altura commum he EF. Para ter a superficie do triangulo ABD, seria necessario multiplicar metade de AD por EF; e para ter a do triangulo BDC, multiplicar metade de BC tambem por EF; logo a superficie do trapesio val metade de AD multiplicada por EF, e mais metade de BC multiplicada por EF, isto he, metade da somma AD e BC multiplicada por EF.

Se por G, meio da linha AB, se tira GH parallela a BC, esta linha GH será metade da somma das duas linhas AD e BC. Porque, seja I o ponto, em que GH córta a diagonal BD, os triangulos BAD, BGI, similhantes por causa das parallelas AD, GI, dão a conhecer (109) que GI he metade de AD, visto que BG he metade de AB. Ora sendo GH parallela a BC e AD, fica DC (102) cortada do mesmo modo que AB: logo provar-se-ha tambem, que IH he metade de BC, considerando que são similhantes os triangulos BCD e IDH.

Logo, pelo que assim deixamos estabelecido, póde dizer-se, que a superficie de um trapesio ABCD he igual ao producto da sua altura EF pela linha GH tirada a distancias iguaes das duas bases oppostas.

149. 2.° *Para ter a superficie de qualquer polygono*, deve dividir-se em triangulos por linhas tiradas de um ponto a cada um de seus angulos, e calcular-se separadamente a superficie de cada um dos triangulos, e sommando todos os productos, ter-se-ha a superficie total do polygono. Mas para que o numero de triangulos seja o menor que he possivel, será conveniente fazer com que todas estas linhas partão de um dos angulos. Veja-se a Fig. 92.

150. *Se o polygono for regular* (Fig. 53.), como todos os lados são iguaes, e iguaes todas as perpendiculares tiradas do centro sobre elles; imaginando-o composto de triangulos, que tem o vertice no centro, teremos a superficie, multiplicando um dos lados por

metade da perpendicular, e multiplicando este producto pelo numero dos lados; ou tambem, o que vem a ser o mesmo, multiplicando o contorno por metade da perpendicular.

151. Pois que o circulo se póde (136) considerar como um polygono regular de infinitos lados, devemos daqui concluir, que *para ter a superficie de um circulo, se deve multiplicar a sua circumferencia por metade do raio.*

Porque a perpendicular, tirada sobre um dos lados, não differe do raio, sendo infinito o numero de lados.

152. Por quanto as circumferencias dos circulos tem entre si a mesma razão dos raios, ou dos diametros (136), fica claro, que conhecendo-se a circumferencia de um circulo de um conhecido diametro, poder-se-ha logo determinar a circumferencia de outro qualquer circulo, cujo diametro se conhecesse, pois he bastante calcular o quarto termo desta proporção: *O diametro da circumferencia conhecida he para esta mesma circumferencia, como o diametro da circumferencia, que se busca, para esta segunda circumferencia.*

A razão do diametro para a circumferencia não se conhece exactamente; temos porém valores assás approximados, para que se julgue como inutil na prática uma razão mais exacta.

Archimedes achou, que um circulo, que tivesse 7 pés de diametro, teria 22 pés de circumferencia com pouca differença. Assim, se se pergunta qual será a circumferencia de um circulo, que tem vinte pés de diametro, buscar-se-ha (Arith. 179) o quarto termo da proporção, da qual os tres primeiros são, $7 : 22 :: 20 :$

Este quarto termo, que he $62\frac{6}{7}$, he com pouca differença o comprimento da circumferencia de um circulo de 20 pés de diametro. Digo *com pouca differença*, porque seria necessario que o diametro do circulo não tivesse menos de 800 pés, para que a circumferencia determinada pela razão de 7 para 22 tivesse de erro um pé. Ultimamente, usando da razão de 7 :

22, se póde dispensar o fazer a proporção, bastará triplicar o diametro, e accrescentar ao seu producto a setima parte do mesmo diametro, porque $3\frac{1}{7}$ he o numero de vezes, que 22 contém 7.

ADRIANO METIUS determinou uma razão muito mais exacta, que he a de 113 : 355. Esta razão he tal, que para que houvesse erro de um pé na circumferencia, seria necessario um circulo de 1000000 de pés de diametro ao menos (*a*). Ultimamente se se quizer a circumferencia ainda com mais exactidão, use-se da razão de 1 para 3,1415926535897932, que passa muito além dos limites do que he necessario ordinariamente; e da qual se podem supprimir mais, ou menos algarismos da direita, conforme quizermos mais, ou menos exactidão. Como esta proporção tem por primeiro termo a unidade, he assás commoda, por isso que para achar a circumferencia de um circulo proposto, se reduz a operação a multiplicar o numero 3,1415 etc. pelo diametro desse circulo.

Logo actualmente he cousa muito facil achar a superficie de um circulo, que se propõe, ao menos tão exactamente, como póde ser necessario para as mais apuradas operações práticas.

Se me perguntão, de quantos pés quadrados he a superficie de um circulo, que tem 20 pés de diametro: calcúlo a circumferencia pelo modo que deixo dito; e tendo achado ser de 62 pés e $\frac{6}{7}$, multiplico $62\frac{6}{7}$ por 5, que he metade do raio (151), e terei $314\frac{2}{7}$ pés quadrados, superficie deste circulo.

153. Chama-se *sector de circulo* a superficie comprehendida entre dous raios IA, IB (Fig. 74.), e o arco AVB. Chama-se *segmento de circulo* a superficie comprehendida entre o arco AVB e a corda AB.

Por quanto o circulo se póde considerar como um polygono regular de infinitos lados, póde logo um

(*a*) Para conservar na memoria facilmente esta razão, he necessario reflectir, que os numeros, que a compõe, se achão repartindo em duas partes iguaes os tres primeiros numeros impares 1, 3, 5, escritos duas vezes seguidamente, assim 1 1 3 3 5 5.

sector de circulo ser considerado como uma porção de polygono regular, e a sua superficie como composta de infinitos triangulos, que tem todos o vertice no centro, e de que o raio he a altura: logo *para ter a superficie de um sector de circulo*, he necessario multiplicar o arco, que lhe serve de base, por metade do raio.

A respeito do segmento he evidente, que para ter a sua superficie, se deve diminuir a superficie do triangulo IAB do sector IAVB.

He evidente, que em um mesmo circulo os comprimentos dos arcos são proporcionaes ao seu numero de gráos: e por conseguinte conhecido o comprimento da circumferencia, se póde achar o de um arco de qualquer numero de gráos, que se quizer, fazendo esta proporção: 360° *são para o numero de gráos do arco, cujo comprimento se busca, como o comprimento da circumferencia he para o do mesmo arco.*

Se se trata de achar a superficie de um sector, cujo numero de gráos he conhecido, como tambem o raio: buscar-se-ha, pela proporção que acabamos de dar, o comprimento do arco, que he base deste sector, e este se multiplicará por metade do raio. Pede-se, por exemplo, a superficie do sector de 32° 40′ em um circulo, que tem 20 pés de diametro, achar-se-ha, como fica ensinado (152), que a circumferencia he de 62 $\frac{6}{7}$ pés: e buscando o quarto termo de uma proporção, da qual sejão os tres primeiros 360° : 32° 40′ :: 62 $\frac{6}{7}$; este quarto termo, que se acha ser 5 $\frac{19}{27}$, será o comprimento do arco 32° 40′, que sendo multiplicado por 5, metade do raio, dá 28 $\frac{14}{27}$ superficie do sector.

Por isto que fica dito, he facil achar a superficie de um segmento, determinando (Fig. 74.) o lado AB, e a altura IZ do triangulo IAB por uma operação fundada nos mesmos principios, em que se funda a que ensinámos (121); mas a Trigonometria, que havemos de ensinar adiante, nos franqueará meios mais expeditos, e mais susceptiveis de exactidão.

154. Bem que o que deixamos dito (149) seja bastante para se medirem figuras rectilineas de toda a especie, he com tudo conveniente que exponhamos neste lugar outro methodo, que he mais simples na prática. Consiste elle (Fig. 93.) em tirar na figura uma linha AG, e abaixar sobre ella de cada um dos angulos perpendiculares BM, LC, DK, EI, FH; medir cada uma destas linhas, como tambem os intervallos AN, NO, OP, PQ, QR, RG, e ficará a figura repartida em muitas partes, das quaes ao menos as duas extremas são triangulos, e as demais trapesios: os primeiros medem-se multiplicando a altura por metade da base (147); a respeito dos trapesios, cada um delles se mede multiplicando metade da somma dos dous lados parallelos pela distancia perpendicular destes mesmos lados (148).

Quando a figura he terminada por uma linha curva, medir-se-ha com sufficiente exactidão para a prática, dividindo a linha AT (Fig. 94.), que se tirará pelo seu maior comprimento, em um tão grande numero de partes, que os arcos AB, BC, CD, etc. se possão considerar como linhas rectas, e para fazer o calculo o mais simples, que he possivel, se farão as partes AO, OP, etc. iguaes entre si: para ter então a superficie, se sommaráõ todas as linhas BN, CM, DL, EK, FI, e sómente metade da linha GH, se a curva for terminada por uma recta GH perpendicular a AT: tudo isto se multiplicará por um dos intervallos AO, e o producto será a superficie, que se busca. Isto he uma immediata consequencia do que deixámos dito (148); porque para ter a superficie ABN; he necessario multiplicar AO por metade de BN, para ter a de BCMN, he necessario multiplicar OP, ou AO por metade de BN, e de CM; para ter a de CDLM, he necessario multiplicar AO por metade de CM, e de DL; e assim todas as mais para diante: logo sommando todos estes productos, se vê, que AO ha de ser multiplicada por duas metades de BN, duas metades de CM, duas metades de DL, duas metades de EK, e duas metades de FI, e metade sómente de GH, isto he, por todas as linhas BN, CM, DL, EK, FI, e mais metade da ultima GH.

Se

Se se tratasse do espaço BNHG terminado pelas linhas BN, GH, tomar-se-ía não BN inteira, mas sómente a sua metade.

A regra, que acabamos de expôr para a medição das superficies planas terminadas por linhas curvas, póde applicar-se com muita utilidade a diversas indagações respectivas aos navios. Muitas vezes nestas indagações he necessario conhecer a superficie de alguns córtes horizontaes do navio; para diante pois teremos occasião de nos servirmos disto.

Do modo de medir as superficies em toezas.

155. A Medição das superficies em toezas he o methodo de fazer as multiplicações necessarias para se avaliarem as superficies medidas por toezas, e partes de toeza (*a*).

Ha dous modos de avaliar as superficies em toezas quadradas, e partes de toeza quadrada.

Pelo primeiro modo se conta por toezas quadradas, pés quadrados, pollegadas quadradas, linhas quadradas, etc.

A toeza quadrada contém 36 pés quadrados, porque he um rectangulo, que tem 6 pés de comprimento, e 6 pés de largo: o pé quadrado contém 144 pollegadas quadradas, porque he um rectangulo, que tem 12 pollegadas de comprimento, e 12 pollegadas de largura: pela mesma razão se vê, que a pollegada quadrada val 144 linhas quadradas, etc.

Isto supposto, para fazer a medição de uma superficie em toezas quadradas, e partes quadradas de toeza, basta reduzir as duas dimensões, que se multiplicão, cada uma dellas á menor especie (a linhas, se a mais pequena especie, que ha, forem linhas); e tendo feito a multiplicação, se reduzirá o producto a pollegadas quadradas, depois a pés quadrados, e ultimamente a toezas quadradas, dividindo successiva-

(*a*) *Nota*. Em Portugal se fazem as medições por braças, cada uma de 10 palmos de comprimento, cada palmo de 8 pollegadas, cada pollegada de 12 linhas, etc. Veja-se o Tom. I. do Engenheiro Portuguez *de Manoel de Azevedo Fortes.*

mente por 144, 144, e 36. Por exemplo, para se achar a superficie de um rectangulo, que tivesse 2^T 3^P 5^p de comprido, e de largo 0^T 4^P 6^p; reduzo estas duas dimensões a pollegadas, e tenho $185^{pol.}$ para multiplicar por $54^{pol.}$, o que me dá 9990 pollegadas quadradas, e se escreve assim 9990^{pp}. Para as reduzir a pés quadrados, divido por 144, e tenho 69 pés quadrados, e 54 pollegadas quadradas de resto, isto he, 69^{PP}, e 54^{pp}: para reduzir os 69^{PP} a toezas quadradas, divido os 69^{PP} por 36, e terei uma toeza quadrada, ou 1^{TT} por quociente, e 33^{PP} de resto: de sorte que a superficie, que se busca, he de 1^{TT} 33^{PP} 54^{pp}.

Pelo segundo modo de avaliar as superficies em toezas quadradas, e partes de toeza quadrada, se concebe a toeza quadrada composta de seis rectangulos, que tem cada um delles uma toeza de altura e um pé de base, que por esta razão se chama *toeza-pé*: cada toeza-pé se subdivide em 12 partes, ou rectangulos, que tem cada um delles uma toeza de altura e uma pollegada de base, a que chamão *toeza-pollegada*: cada uma destas se subdivide em 12 partes, que cada uma dellas tem uma toeza de altura e uma linha de base, que se chama *toeza-linha*: n'uma palavra, a toeza se representa dividida, e subdividida successivamente em rectangulos, que tem constantemente uma toeza de altura, e um pé, uma pollegada, uma linha de base, etc. As subdivisões, que são para baixo de ponto, se marcão como segundos, terceiros, quartos, etc. a respeito dos gráos, com a differença, que precede o sinal um T, sinal de toeza: assim os sinaes successivos, e os valores das subdivisões da toezaquadrada, são as que mostra a Taboa seguinte.

Taboa das subdivisões da toeza quadrada em rectangulos, que tem por altura uma toeza; e caracteres, que representão estas partes.

A toeza quadrada tem 6 toezas-pés, ou ..	6^{TP}
A toeza-pé tem 12 toezas-pollegadas, ou ..	12^{Tp}
A toeza-pollegada	12^{Tl}
A toeza-linha	12^{Tpt}
A toeza-ponto	$12^{T'}$
A T', ou toeza prima	$12^{T''}$
A T'', ou toeza segunda	$12^{T'''}$
A T''', ou toeza terceira	$12^{T''''}$

E assim succesivamente.

Querendo pois multiplicar as partes de duas linhas, para se conhecer uma superficie; he necessario conceber, que as toezas do multiplicando são toezas quadradas, os pés toezas-pés, as pollegadas toezas-pollegadas, e assim successivamente. O multiplicador sempre representará quantas vezes se deve repetir o multiplicando. Por exemplo, querendo-se medir a superficie do rectangulo ABCD (Fig. 95.), e achando o lado AD de $4^T\ 4^P\ 6_p$, e o lado AB de $2^T\ 3^P$; se AE representar uma toeza, a superficie BCDA será composta de dous rectangulos, que tem cada um delles uma toeza de alto, e $4^T\ 4^P\ 6^p$ de comprimento, e de outro rectangulo, que tem 3^P, ou meia toeza de alto, e $4^T\ 4^P\ 6^p$ de comprido, e consequentemente he metade de um dos outros dous; de sorte que vejo, que se trata de repetir 2 vezes e $\frac{1}{2}$ um rectangulo de 1^T de altura, e $4^T\ 4^P\ 6^p$ de comprimento, isto he, de repetir 2 vezes e $\frac{1}{2}$ a quantidade $4^{TT}\ 4^{TP}\ 6^{Tp}$. Isto prova o que dissemos em nota ao numero 47 da Arithmetica ácerca das unidades do producto, e de seus factores na multiplicação geometrica.

Ao mesmo tempo se vê, que não he necesario apprender nova regra para esta especie de multiplicação, pois he evidentemente a mesma, que démos na Arithmetica com o titulo de *Multiplicação dos nume-*

ros complexos. Assim para nos cingirmos a um exemplo, se nos perguntarem qual he a superficie de um rectangulo, que tem $52^T\ 4^P\ 5^p$ de comprido, e $44^T\ 4^P\ 8^p$ de largo, faremos a seguinte operação.

52^T	4^P	5^p		
44^T	4^P	8^p		
208^{TT}	0^{TP}	0^{Tp}	0^{Tl}	0^{Tpt}
208				
22				
7	2			
2	2	8		
0	3	8		
26	2	2	6	
8	4	8	10	
2	5	6	11	4
2	5	6	11	4
2361^{TT}	2^{TP}	5^{Tp}	2^{Tl}	8^{Tpt}

Isto he, multiplico primeiro 52 por 44: depois 4^P do multiplicando por 44, tomando por 3^P metade de 44; e por 1^P o terço do que achei pelos 3^P: multiplico depois 5^p por 44, tomando por 4^p o terço do que achei por 1^P; e por 1^p tomo o quarto do que achei por 4^p.

Para multiplicar depois pelos 4^P, que estão no multiplicador, tómo por 3^P metade do multiplicando total; e por 1^P o terço do que achei por 3^P. Ultimamente para multiplicar por 8^p, tómo o terço do que achei por 1^P, e escrevo-o duas vezes. E sommando todos estes productos parciaes, tenho $2361^{TT}\ 2^{TP}\ 5^{Tp}\ 2^{Tl}\ 8^{Tpt}$, que he o producto total. Pelo que se mostra o fundamento, com que dissemos na Arithmetica, que as regras, que alli davamos para os numeros complexos, comprehendião a medição em toezas, e que não era necessario mais que explicar a natureza das unidades do producto, e dos factores.

Medida assim uma superficie em toezas quadradas, toezas-pés, toezs-pollegadas, etc., he mui facil achar-lhe o seu valor em toezas quadradas, pés quadrados, e pollegadas quadradas, etc. He necessario escrever alternativamente os dous numeros 6 e $\frac{1}{2}$ debaixo das partes da toeza; e começando da toeza-pé, como se vê adiante, multiplicar cada parte pelo numero inferior, que lhe corresponde, pondo o producto dos dous numeros consecutivos 6 e $\frac{1}{2}$ em uma mesma columna. Quando na multiplicação por $\frac{1}{2}$ restar um, escreva-se 72 debaixo deste multiplicador $\frac{1}{2}$ para começar a segunda columna. Assim para reduzir a pés quadrados, pollegadas quadradas, etc., as partes do producto, que achámos, escrevo:

2361^{TT}	2^{TP}	5^{Tp}	2^{Tl}	8^{Tpt}
	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
2361^{TT}	12^{PP}	72^{pp}		
	2	12		
		4		
2361^{TT}	14^{PP}	88^{pp}		

Multiplico por 6 as toezas-pés, porque a toeza-pé val 6 pés quadrados, pois tem seis pés de altura e um de base. Multiplico as toezas-pollegadas por $\frac{1}{2}$, e os dous inteiros, que me dá esta multiplicação, ponho-os na columna dos pés quadrados; porque sendo a toeza pollegada a duodecima parte da toeza-pé, deve valer $\frac{1}{12}$, ou a duodecima parte de 6 pés quadrados, isto he, meio pé quadrado: logo 5 toezas-pollegadas valem 2 pés quadrados e meio; e como o meio pé quadrado tem 72 pollegadas quadradas, por isso em lugar de meio pé, escrevo 72. Para reduzir depois as toezas-linhas, multiplico-as por 6; porque sendo a toeza-linha a duodecima parte da toeza-pollegada, deve valer $\frac{1}{12}$ de 72 pollegadas quadradas, isto he, 6 pollegadas quadradas. Similhante discurso mostra, que depois se deve multiplicar por $\frac{1}{2}$, depois por 6, etc., como acabamos de dizer.

Logo reciprocamente se se quizerem reduzir a toezas-pés, toezas-pollegadas, etc., as partes quadradas da toeza quadrada, se reduzirá a operação: 1.° a tomar a sexta parte do numero dos pés quadrados, o que dará as toezas-pés: 2.° duplicar-se-ha o resto, havendo-o, e se accrescentará uma unidade, se o numero das pollegadas quadradas he, ou excede 72, e teremos as toezas-pollegadas: 3.° tendo abatido 72 do numero das pollegadas quadradas, se este numero for, ou exceder 72, se dividirá o resto por 6, e teremos as toezas-linhas: 4.° dobrando o resto, se lhe accrescentará uma unidade, se o numero de linhas quadradas chegar ou passar de 72, e teremos o numero das toezas-pontos. Daqui se vê como se deve continuar, para ter as partes seguintes, quando deve havel-as. Pelo que se nos propuzessem para assim reduzir 52^{TT} 25^{PP} 87^{pp} 92^{ll}, dividiriamos 25 por 6, e teriamos 4^{TP}, e 1 de resto: dóbro este 1, e accrescento 1, porque o numero de pollegadas quadradas excede 72, tenho pois 3^{Tp}: diminuo 72 de 87, e o resto 15 divido-o por 6, e tenho 2^{Tl}, e 3 de resto: dóbro este resto, e lhe accrescento uma unidade, porque o numero das linhas quadradas excede 72, e tenho 7^{Tpts}: abato 72 de 92, e o resto 20 divido-o por 6, e tenho $3^{T'}$, e 2 de resto: dóbro este resto, e tenho $4^{T''}$: de sorte que tenho o total 52^{TT} 4^{TP} 3^{Tp} 2^{Tl} 7^{Tpts} $3^{T'}$ $4^{T''}$.

156. Pois que para ter a superficie de um parallelogramo he necessario multiplicar o numero das partes da base pelo numero das partes da altura, segue-se (Arith. 74.) que conhecendo-se a superficie, e o numero das partes da altura, ou da base, para saber qual he a base, ou a altura, será necessario dividir o numero, que exprime a superficie, pelo numero, que exprime aquella das duas dimensões, que for conhecida. Reflectindo todavia, que isto não he dividir uma superficie por uma linha, pois a divisão de uma superficie por uma linha não he menos quimérica, do que a multiplicação de uma linha por outra: no caso proposto se divide realmente uma superficie por uma superficie.

Com effeito, pelo que deixámos dito (155), quando se avalia a superficie do rectangulo ABCD,

(Fig. 95) se repete a superficie do rectangulo ED da mesma base, e que tem por altura a unidade, ou medida principal AE, repete-se, como dizia, esta superficie tantas vezes, quantas he comprehendida a altura AE na altura BA. Pelo que querendo conhecer o numero das partes de AB, ou o numero das unidades AE, que ella contém, he necessario buscar quantas vezes a superficie ABCD contém a do rectangulo ED. Logo se sendo a superficie ABCD representada por $361^{\text{TT}}\ 2^{\text{TP}}\ 5^{\text{Tp}}\ 2^{\text{Tl}}\ 3^{\text{Tpt}}$, he a base AD de $4^{\text{T}}\ 3^{\text{P}}\ 6^{\text{p}}$, para se achar a altura BA; he necessario imaginar que temos $361^{\text{TT}}\ 2^{\text{Tp}}$, etc., para dividir não por $4^{\text{T}}\ 3^{\text{P}}\ 6^{\text{p}}$, mas sim por $4^{\text{TT}}\ 3^{\text{TP}}\ 6^{\text{Tp}}$; e como então a toeza he factor commum do dividendo, e divisor, he evidente que o quociente será o mesmo, que seria, se ambos expressassem toezas, e partes de toeza lineares: logo a operação se reduz a dividir $361^{\text{T}}\ 2^{\text{P}}$, etc., por $4^{\text{T}}\ 3^{\text{P}}$, etc., isto he, considera-se o dividendo, e o divisor, como exprimindo toezas lineares, e consequentemente como se fossem da mesma especie; e como o estado da questão mostra, que o quociente deve tambem ser da mesma especie, isto he, que deve exprimir toezas, e partes de toeza lineares, segue-se que a divisão se deve conformar exactamente á regra dada (Arith. 126, e 128).

Se a superficie nos fosse dada em toezas quadradas, e partes de toeza quadrada, então, para maior simplicidade, se reduzirião estas partes a toezas-pés, toezas-pollegadas, etc., conforme o que deixámos dito (155); o que feito, se farião as mesmas operações do caso antecedente. Se nos pedem, por exemplo, a altura de um parallelogramo, ou rectangulo, que tivesse $2^{\text{T}}\ 5^{\text{P}}$ de base, e $120^{\text{TT}}\ 29^{\text{PP}}\ 54^{\text{pp}}$ de superficie; reduzir-se-ía (155) esta superficie a $120^{\text{TT}}\ 4^{\text{TP}}\ 10^{\text{Tp}}\ 9^{\text{Tl}}$, e pelo que fica antecedentemente dito, se reduziria a questão a dividir $120^{\text{T}}\ 4^{\text{P}}\ 10^{\text{p}}\ 9^{\text{l}}$ por $2^{\text{T}}\ 5^{\text{P}}$, o que, conforme a dita regra (Arith. 126, e 128.), dá $42^{\text{T}}\ 3^{\text{P}}\ 10^{\text{p}}\ 1^{\text{l}}$ 13/[illegible].

Da comparação das superficies.

157. *AS superficies dos parallelogramos são entre si, em geral, como os productos das bases pelas alturas.*

Quer dizer, que a superficie de um parallelogramo contém a de outro parallelogramo tantas vezes, quantas o producto da sua base pela sua altura contém o producto da base do segundo pela sua altura.

Isto he evidente, porque todo o parallelogramo he igual ao producto da sua base pela sua altura.

Daqui se conclue facilmente, que quando dous parallelogramos, tem a mesma altura, estão entre si como as suas bases, e quando tem a mesma base, estão entre si como as suas alturas. Porque a razão dos productos se conservará sempre a mesma, se em cada um delles se tirar o factor, que lhe he commum (Arith. 170.).

158. Por quanto os triangulos são metades de parallelogramos (140) de igual base e altura; seguese por consequencia, que *os triangulos da mesma altura estão entre si como as suas bases, e os triangulos da mesma base estão entre si como as suas alturas.*

159. *As superficies dos parallelogramos, e triangulos similhantes estão entre si como os quadrados dos seus lados homologos.*

Porque as superficies de dous parallelogramos ABCD, e *abcd* (Fig. 96 e 97.) são entre si (157) como os productos das bases pelas suas alturas, isto he, $ABCD : abcd :: BC \times AE : bc \times ae$; mas se os parallelogramos, ABCD, *abcd* são similhantes, e se AB, e *ab* são dous lados homologos, os triangulos AEB, *aeb* serão similhantes, pois além do angulo E e *e* rectos, devem ter o angulo B e *b* entre si iguaes: logo teremos (108) $AE : ae :: AB : ab$ ou $:: BC : bc$, por causa de serem similhantes os parallelogramos: logo (99) nos productos $BC \times AE$, e $bc \times ae$ póde substituir-se a razão de $BC : bc$ á de $AE : ac$, e então será a razão destes dous productos

a de

a de $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; logo ABCD : *abcd* :: $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; e como indifferentemente se póde tomar por base qualquer lado, que se escolher, vê-se, que geralmente as superficies dos parallelogramos similhantes estão entre si como os quadrados dos seus lados homologos.

160. A respeito dos triangulos similhantes he evidente, que tem a mesma propriedade, pois que são metade de parallelogramos da mesma base e da mesma altura.

161. Geralmente fallando, as superficies de duas figuras similhantes, quaesquer que ellas sejão, estão entre si como os quadrados dos lados, ou das linhas homologas destas figuras.

Porque as superficies de duas figuras similhantes sempre se podem considerar como compostas de igual numero de triangulos similhantes cada um ao seu correspondente; e assim a superficie de cada triangulo da primeira figura será para a do triangulo correspondente da segunda, como o quadrado do lado do primeiro he para o quadrado do lado homologo do segundo (160): como pois todos os lados homologos tem a mesma razão, tambem devem ter a mesma razão os seus quadrados (Arith. 191): logo cada triangulo do primeiro polygono estará para o seu triangulo correspondente do segundo, como o quadrado de qualquer lado do primeiro polygono para o quadrado do lado homologo do segundo: logo (Arith. 186) a somma de todos os triangulos do primeiro terá para a somma de todos os triangulos do segundo, ou a superficie do primeiro terá para a superficie do segundo esta mesma razão.

162. Logo *as superficies dos circulos estão entre si, como os quadrados dos seus raios, ou dos seus diametros.*

Porque os circulos são figuras similhantes (136): logo os raios e diametros são linhas homologas.

O mesmo se deve dizer dos sectores e segmentos de igual numero de gráos.

Fica claro, que nas figuras similhantes não succede com as superficies o mesmo, que com os contornos: os contornos seguem a razão simples dos lados

11

(134), isto he, que em duas figuras similhantes, se o lado de uma he duplo do lado homologo da outra, ou triplo, ou quadruplo, etc., o contorno da primeira será tambem duplo do contorno da segunda, triplo, ou quadruplo, etc.; mas nas superficies não succede assim; a da primeira he quatro vezes, nove vezes, dezeseis vezes, etc., maior do que a da segunda.

Esta verdade se póde fazer sentir nas Figg. 98. e 99. Alli se vê, que o parallelogramo ABCD (Fig. 98.), cujo lado AB he duplo do lado AG do parallelogramo similhante AGIE, contém quatro parallelogramos iguaes a este; e na Figura 99. o triangulo ADF, cujo lado AD he duplo do lado AB do triangulo similhante ABC, contém quatro triangulos iguaes a este: do mesmo modo o triangulo AGK, cujo lado AG he triplo de AB, contém nove triangulos iguaes a ABC. O mesmo succederia com os circulos: um circulo, cujo raio fosse duplo, triplo, ou quadruplo, etc., do de outro circulo, teria a superficie quatro vezes, nove vezes, dezeseis vezes, etc., maior que a destoutro.

Daqui se vê, que sendo dous navios inteiramente similhantes, terião velames, cujas superficies serião entre si como os quadrados das alturas dos mastros, isto he, como os quadrados dos comprimentos, ou das larguras dos navios: consequentemente póde dizer-se, que as quantidades de vento, que recebem dous navios similhantes, e que offerecem as vélas do mesmo modo ao vento, estão entre si como os quadrados dos comprimentos destes navios. Daqui não podemos tirar por conclusão, que as velocidades sigão a mesma razão; qual ella deva ser, mostraremos na Mechanica.

Nem tão pouco examinamos aqui, se os navios similhantes devem ter vélas similhantes; he exame que tambem tem o seu lugar na Mechanica.

163. Pelo que, querendo construir uma figura similhante a outra, cuja superficie tivesse com a primeira uma certa razão dada, por exemplo a de tres para dous, não se devião fazer os lados homologos na relação de tres para dous, pois que então ficarião as superficies na razão de nove para quatro; mas dever-se-ião fazer estes lados de tal grandeza, que os seus

quadrados tivessem a razão de tres para dous: isto he, suppondo que o lado AB da Figura X (Fig. 100.) era de 50^p por exemplo, para achar o lado homologo *ab* da Figura *x*, que se busca (Fig. 101.), seria necessario buscar o quarto termo de uma proporção, cujos tres termos primeiros fossem $3 : 2 :: \overline{50}^2$, ou 50×50: este quarto termo, que he $1666\frac{2}{3}$, sería o quadrado de *ab*; e tirando a raiz (Arith. 145.) de $1666\frac{2}{3}$, se acharia $40^p\,824$, isto he, $40^p\ 9^p\ 10^l$ pouco mais ou menos para o lado *ab*. Achado o lado da Figura *x*, facilmente se faz esta figura pelo que deixámos dito (133).

164. *Se sobre os tres lados AB, BC, AC do triangulo rectangulo ABC* (Fig. 102.) *se fizerem tres quadrados BEFA, BGHC, AILC, o que estiver sobre a hypothenusa, he igual á somma dos outros dous* (*a*).

Do angulo recto B se abaixe sobre a hypothenusa AC a perpendicular BD: os dous triangulos BDA, BDC cada um he similhante ao triangulo ABC (112.): logo as superficies dos tres triangulos estão entre si como os quadrados dos lados homologos: logo temos esta serie de razões iguaes

$ABD : \overline{AB}^2 :: BDC : \overline{BC}^2 :: ABC : \overline{AC}^2$, ou $ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABC : AILC$; logo (Arith. 186.) $ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC : AILC$; mas he evidente, que ABC he igual aos dous $ABD + BDB$; logo tambem AILC he igual a $ABEF + BGHC$; o que tambem se póde exprimir assim, $\overline{AC}^2$ igual a $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

165. E pois que o quadrado da hypothenusa he igual á somma dos quadrados dos dous lados do angulo recto, concluamos tambem, que *o quadrado de um dos lados do angulo recto he igual ao quadrado da hypothenusa, menos o quadrado do outro lado*; isto he, que $\overline{BC}^2$ he igual a $\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$, e $\overline{AB}^2$ he igual a $\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$.

(*a*) Chama-se hypothenusa o lado opposto ao angulo recto.

166. Logo *conhecidos os dous lados de um triangulo rectangulo, facilmente se acha o terceiro.* Supponhamos, por exemplo, que o lado AB he de 12 pés, o lado BC de 25; pede-se a hypothenusa AC: sommo 144 quadrado de AB com 625 quadrado de BC, a somma 769 he igual ao quadrado da hypothenusa AC (164), e tirando a raiz quadrada de 769, teremos a hypothenusa AC: esta raiz he 27,73 com erro de menos de uma centesima: logo o lado AC he de 27,73 pés, ou $27^p\ 8^p\ 9^l$.

Pelo contrario se nos dessem a hypothenusa, e um dos lados, pelo que fica dito (165), se acharia o outro lado. Por exemplo, se a hypothenusa AB fosse de 54 pés, e o lado BC de 42, e me perguntassem qual era o comprimento do lado AB; de 2916, quadrado da hypothenusa 54, diminuiria 1764, que he o quadrado de BC, e o resto 1152 seria o quadrado do lado AB: tirando a raiz quadrada de 1152, esta raiz, que he 33, 94, seria o valor de AB; isto he, AB seria de 33^p, 94, ou de $33^p\ 11^p\ 3^l$ pouco mais ou menos.

He de geral utilidade esta proposição; mais de uma vez teremos adiante occasião de nos convencermos disso.

167. Pois que o quadrado da hypothenusa he igual aos quadrados dos dous lados do angulo recto, segue-se daqui, que se o triangulo rectangulo for isosceles, como succede em um quadrado tirando-se-lhe a diagonal AC (Fig. 103), então o quadrado da hypothenusa será duplo do quadrado de um dos seus lados. Logo a superficie de um quadrado he para a superficie do quadrado feito sobre a sua diagonal, como 1 : 2; logo (Arith. 192) o lado de um quadrado he para a sua diagonal, como 1 para a raiz quadrada de 2; e como esta raiz não se póde exprimir exactamente em numeros, segue-se que tambem não se póde expressar exactamente em numeros a razão do lado de um quadrado para a sua diagonal, isto he, que a diagonal he *incommensuravel*, ou não tem medida commum com o seu lado.

168. Vio-se na demonstração do numero 164 (Fig. 102), que a similhança dos triangulos ABC, ADB,

CDB, dá ABC : $\overline{AC}^2$ :: ADB : $\overline{AB}^2$ :: BDC : $\overline{CB}^2$, ou ABC : ADB : BDC :: $\overline{AC}^2$: $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$; mas os triangulos ABC, ABD, BDC, que tem todos a mesma altura, estão entre si como as suas bases (158): logo ABC : ADB : BDC :: AC : AD : DC: logo tambem $\overline{AC}^2$: $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$ :: AC : AD : DC; logo *o quadrado sobre a hypothenusa he para cada um dos quadrados feitos sobre os outros dous lados, como a hypothenusa he para cada um dos segmentos correspondentes a este lado.*

169. Daqui se póde concluir o modo de fazer com linhas o que ensinámos a fazer com numeros (163), isto he, construir uma figura x similhante a outra figura proposta X (Figg. 100 e 101), cuja superficie tenha para a outra uma razão dada.

Tire-se (Fig. 104) uma linha indefinita DE, sobre a qual se tomem duas partes DP, PE taes, que seja DP para PE, como a superficie da figura dada X (Fig. 100.) he para a que se busca x (Fig. 101.), isto he, como 3 : 2, querendo-se que x seja $\frac{2}{3}$ de X. Sobre DE (Fig. 104.), como diametro, se descreva o semicirculo DBE; e levantando no ponto P a perpendicular PB, do ponto B, onde ella encontra a circumferencia, se tirem para os dous extremos D e E as cordas BD, BE: tome-se sobre BD uma parte BA igual ao lado AB da figura X, e tirando AC parallela a DE, BC será o lado homologo da figura x que se busca, a qual se construirá pelo modo que fica dito (133). A razão he esta. A superficie da figura X deve ser para a superficie da figura x, como o quadrado de AB he para o quadrado de ab que se busca, isto he, :: $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$; e tambem se quer que estas superficies sejão entre si como 3 : 2; logo deve ser $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$ :: 3 : 2. Mas (Fig. 104.) AB : BC :: BD : BE, e consequentemente (Arith. 191) $\overline{AB}^2$: $\overline{BC}^2$ :: $\overline{BD}^2$: $\overline{BE}^2$; mas o triangulo DBE he rectangulo, e por isso

(168) $\overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 :: DP : PE$, isto he, como $3 : 2$; logo $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: 3 : 2$; mas tambem $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; logo *ab* deve ser igual a BC.

170. Segue-se tambem do que acabamos de dizer (168): *Que os quadrados das cordas AC, AD, etc., tiradas dos extremos de um diametro AB* (Fig. 105.), *são entre si como as partes AP, AO, que sobre o diametro cortão as perpendiculares abaixadas dos extremos das mesmas cordas.*

Por quanto tirando-se as cordas BC e BD, teremos (168) no triangulo rectangulo ACB

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AB : AP;$$

e no triangulo rectangulo ADB

$$\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 :: AO : AB;$$

logo (100) $\overline{AD}^2 : \overline{AC}^2 :: AO : AP$.

Dos Planos.

171. MOstrada a medição, e as razões das superficies planas, sómente nos resta, para podermos passar aos sólidos, considerar as propriedades das linhas rectas nas differentes posições, que tem a respeito dos planos; e as dos planos nas differentes posições, que tem uns comparados com os outros: he o de que vamos actualmente occupar-nos.

Não suppomos nos planos, de que vamos tratar, nem grandeza, nem figura determinada; suppomol-os indefinitamente extensos para toda a parte, e só para ajudar a imaginação he que lhes damos as figuras, com que os representamos aqui.

172. *Uma linha recta não póde estar parte em um plano, e parte mais elevada, ou mais baixa a respei-do mesmo plano:*

Porque plano (5) he uma superficie, a que uma linha recta se applica exactamente por toda a parte.

173. *O mesmo succede com um plano a respeito de outro plano.*

Porque tirando-se uma linha recta na parte plana commum a ambos os planos, podendo esta recta continuar-se indefinitamente em um, ou outro, ficaria parte em um destes planos, e parte elevada, ou abaixada a respeito delle, o que he impossivel (172).

174. *Duas linhas AB, CD* (Fig. 106.), *que se cortão, estão no mesmo plano.*

Porque he evidente, que por uma destas linhas AB se póde fazer passar um plano, que passe tambem por um ponto tomado arbitrariamente na segunda; mas o ponto E da intersecção pertencendo a AB, fica nesse mesmo plano: logo a linha CD tem dous pontos neste plano: logo está toda no mesmo plano.

175. *O encontro, ou intersecção de dous planos não póde deixar de ser uma linha recta.*

He evidente, que ha de ser uma linha, pois nenhum desses planos tem grossura; demais deve ser uma linha recta, porque a linha recta, que se tirasse por dous pontos dessa intersecção, ficaria toda inteira em cada um dos planos: logo he a mesma intersecção.

176. *Logo pela mesma linha recta póde-se fazer com que passem infinitos planos differentes.*

177. Chamamos *linha perpendicular a um plano* aquella, que não se inclina nem para um, nem para outro lado deste plano.

178. Logo *uma perpendicular AB a um plano GE* (Fig. 107.) *he perpendicular a todas as linhas BC, BC, BC, etc., que pelo ponto B se podem tirar neste plano.* Pois havendo sómente uma, a que ella não fosse perpendicular, inclinar-se-ía para esta linha, e consequentemente para o plano.

179. *Sendo a linha AB* (Fig. 108.) *perpendicular ao plano GE, se pelo ponto B se tira uma linha BC no plano GE, e se imagina, que o plano ABC gyra em roda de AB, digo que neste movimento a linha BC não sairá do plano GE.*

Imaginemos o plano ABC tendo chegado a qualquer posição ABD: se a linha BC, que então está em

BD, não estivesse no plano GE, o plano ABD encontraria o plano GE em uma linha recta BF, á qual AB seria perpendicular (178): logo BF seria perpendicular sobre AB; e como se suppoz, que BD he perpendicular sobre AB no mesmo ponto B, seguir-se-ía, que do mesmo ponto B, e no mesmo plano ABD se poderião levantar duas perpendiculares a AB, o que he impossivel (27): logo BF não póde ser differente de BD: logo BC no seu movimento á roda de AB não póde saír do plano GE.

180. Logo *para que uma linha recta AB* (Fig. 108.) *seja perpendicular a um plano GE, basta que ella seja perpendicular a duas linhas BC, BD, que se encontrem neste plano.*

Porque se se imagina, que o plano do angulo recto ABC gyra em roda de AB, a linha BC traçará um plano, ao qual AB ha de ser perpendicular (179); mas digo eu, que este plano não póde ser differente do plano GE das duas linhas BC, e BD; porque sendo recto o angulo ABD, e tambem o angulo ABC, gyrando a linha BC, necessariamente em uma das suas posições ha de estar na linha BD: logo BD está no plano traçado por BC: logo AB he perpendicular ao plano CBD, ou GE.

181. *Se de um ponto A de uma recta AI, obliqua a um plano GE* (Fig. 109.), *se abaixa uma perpendicular AB sobre este plano; e unindo com uma recta BI os pontos B, e I da perpendicular e da obliqua, se tira a esta linha BI uma perpendicular CD no plano GE, digo que tambem AI será perpendicular a CD.*

Começando do ponto I, tomemos as partes iguaes IC, ID, e tiremos as linhas BC e CD: estas duas linhas serão iguaes entre si (29): logo os dous triangulos ABC, ABD serão iguaes; porque alem do angulo ABC igual a ABD, por serem ambos rectos, o lado AB he commum, e AC he igual a BD, pelo que acabamos de provar: logo elles tem um angulo igual comprehendido entre dous lados iguaes cada um a cada um: logo são iguaes: logo AD he igual a AC: logo a linha AI tem dous pontos A, I igualmente distantes do ponto C, e do ponto D: logo he perpendicular a CD (32).

182.

182. *Um plano se diz perpendicular a outro plano*, quando não se inclina nem para um lado, nem para outro deste ultimo.

183. Logo *pela mesma linha CD* (Fig. 110.), *tomada em um plano GE, não se póde conduzir mais de um plano perpendicular a este plano GE.*

184. *Um plano CK he perpendicular a outro plano GE, quando passa por uma recta AB perpendicular a elle;* pois he evidente, que não se póde inclinar para algum lado do plano GE.

185. *Se por um ponto A tomado no plano CK perpendicular ao plano GE, se tira uma perpendicular AB á commum secção CD, esta linha será tambem perpendicular ao plano GE.*

Porque se o não fosse, pelo ponto B, em que ella cáe, se poderia levantar uma perpendicular ao plano GE, e conduzir por esta perpendicular, e pela commum secção CD um plano, o qual (184) seria perpendicular ao plano GE: logo pela mesma linha CD tomada no plano GE, se podião lançar dous planos perpendiculares a elle, o que he impossivel (183): logo AB he perpendicular ao plano GE.

186. Logo *sendo o plano CK perpendicular ao plano GE, a perpendicular AB, que sobre o plano GE se levantar por um ponto qualquer B da commum secção, necessariamente ha de ficar no plano CK.*

Segue-se desta proposição, que *duas perpendiculares BA, LM ao mesmo plano GE, são entre si pararellas.*

Porque se se unem os pontos B e L por uma linha BL, e por esta linha, e por AB se conduz um plano CK, este plano será perpendicular ao plano GE (184); e como então LM he uma perpendicular ao plano GE, tirada por um ponto L do plano CK, tambem estará no plano CK (186); mas estas duas linhas AB, LM estão ambas em um mesmo plano, e são perpendiculares á mesma linha BL: logo são parallelas (36 e 37).

187. Logo *se duas rectas AB, AC* (Fig. 112.) *são parallelas cada uma a uma terceira HF, tambem serão parallelas entre si;* porque as linhas AB, HF sendo parallelas, podem ser ambas perpendiculares ao

mesmo plano GE: pela mesma razão CD, HF podem ser ambas perpendiculares ao mesmo plano GE: logo AB e CD, sendo perpendiculares ao mesmo plano, serão entre si parallelas.

188. *Se dous planos CK, LN* (Fig. 111.) *são perpendiculares a um terceiro plano GE, a sua commum secção AB será tambem perpendicular ao plano GE.*

Porque a perpendicular, que se levantasse pelo ponto B sobre o plano GE, deve estar em ambos estes planos (186): logo não póde ser outra linha senão a sua secção commum.

189. Chama-se *angulo plano* a abertura de dous planos FG, GE (Fig. 113.), que se encontrão: este angulo se chama tambem a *inclinação* de um destes planos a respeito do outro.

O angulo plano formado pelos dous planos GF, GE, não he outra cousa mais do que a quantidade, que o plano GF devia gyrar á roda de AC, para chegar á situação actual, tendo estado antes deitado sobre o plano GE.

190. Daqui se vê facilmente, que se por um ponto B, tomado na commum secção AG, se tira no plano GE a recta BD perpendicular a AG, e no plano GF a recta BC perpendicular á mesma linha AG, o angulo, que formarem estas duas linhas BD e BC, será o mesmo, que formão os dous planos. Porque he facil de ver, que ao tempo do movimento do plano GF, a linha BC se afasta da linha BD, sobre que estava assentada no principio do movimento, e se vai desviando della tanto e da mesma maneira, que o plano GF se afasta do plano GE.

191. Logo *um angulo plano tem a mesma medida, que tem um angulo rectilineo comprehendido entre duas linhas tiradas em cada um dos planos, que o formão, perpendicularmente á commum secção, e do mesmo ponto desta linha.*

Daqui se tirão tão facilmente as proposições seguintes, que nos contentamos só com enuncial-as.

192. *Um plano, que cáe sobre outro plano, fórma dous angulos, que juntos valem* 180°.

193. *Todos os angulos formados por qualquer*

numero que seja de planos, com tanto que passem todos por uma linha recta, valem 360°.

194. *Dous planos, que se cortão, fazem os angulos verticalmente oppostos iguaes.*

195. Chamão-se *planos parallelos* aquelles, que nunca se podem encontrar, a qualquer distancia que se imaginem prolongados.

196. Logo *os planos parallelos são igualmente distantes entre si em toda a parte.*

197. Se *dous planos parallelos são cortados por um terceiro plano* (Fig. 114.), *as intersecções AB, CD serão duas rectas entre si parallelas.* Porque como estão em um mesmo plano ABCD, não poderião deixar de se encontrar, se não fossem parallelas; mas então fica evidente, que os planos tambem se encontrarião.

198. *Dous planos parallelos, cortados por um terceiro, tem as mesmas propriedades a respeito dos angulos, que formão com o terceiro, que tem duas linhas rectas parallelas a respeito de uma terceira, que as córta.* He uma consequencia do que fica dito (191).

Propriedades das linhas rectas cortadas por planos parallelos.

199. *SE de um ponto I fóra do plano GE* (Fig. 115.) *se tirarem a differentes pontos K, L, M deste plano as rectas IK, IL, IM; e estas rectas se cortarem por um plano ge parallelo ao plano GE; digo 1.° que estas rectas ficaráõ cortadas proporcionalmente: 2.° que a figura klm será similhante á figura KLM.*

Supponhamos por ora sómente os tres pontos K, L, M. Pois que as rectas *kl*, *lm*, *mk* são intersecções dos planos IKL, ILM, IKM com o plano *ge*, são parallelas ás rectas KL, LM, KM, intersecções dos mesmos planos com o plano GE (197): logo os triangulos IKL, ILM, IKM são similhantes aos triangulos *Ikl*, *Ilm*, *Ikm*, cada um a cada um: logo IK : *Ik* :: KL : *kl* :: IL : *Il* :: LM : *lm* :: IM : *Im* :: MK : *mk*; mas 1.° se desta serie de razões iguaes se tirão aquellas, em que estão as rectas, que se tirã o do ponto I, teremos $IK : Ik :: IL : Il :: IM : Im$; logo as rectas IK, IL, IM estão cortadas proporcionalmente.

2.° Se da mesma serie primeira de razões iguaes se tirão aquellas, onde se achão as linhas comprehendidas nos dous planos parallelos, teremos $KL : kl :: LM : lm :: KM : km$; logo os dous triangulos KLM e *klm* são similhantes, pois tem os lados proporcionaes.

Supponhamos agora qualquer numero de pontos, que quizermos, A, B, C, D, F, etc.; demonstrar-se-ha precisamente do mesmo modo que as rectas IA, IB, IC, etc., estão proporcionalmente cortadas: e se se imaginão as diagonaes AC, AD, e *ac*, *ad*, etc., tiradas dos dous angulos correspondentes A, *a*, demonstrar-se-ha tambem da mesma maneira, que os triangulos ABC, ACD, etc., são similhantes aos triangulos *abc*, *acd*, etc., cada um a cada um: logo os dous polygonos ABCDF, e *abcdf*, sendo compostos de igual numero de triangulos similhantes cada um a cada um, e similhantemente postos, serão similhantes (133).

200. De serem similhantes as duas figuras KLM, *klm*, concluamos, que o angulo KLM he igual ao angulo *klm*; e consequentemente que *se duas rectas KL, LM, que comprehendem um angulo KLM, forem parallelas a outras duas kl, lm, que comprehendem o angulo klm, o angulo KLM será igual ao angulo klm, ainda quando estes dous angulos não estiverem no mesmo plano.* Já deixámos estabelecida esta proposição (43), mas alli suppozemos os dous angulos no mesmo plano.

201. De serem as duas figuras ABCDF e *abcdf* similhantes, e de serem similhantes as duas figuras KLM e *klm*, se segue que *as superficies das duas secções abcdf, klm são entre si, como as das duas figuras ABCDF, KLM.*

Porque $ABCDF : abcdf :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (161); mas os triangulos similhantes IAB, *iab*, dão $AB : ab :: IA : Ia$; logo (Arith. 191) $\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{IA}^2 : \overline{Ia}^2$: ou

(199) :: $\overline{IM}^2 : \overline{Im}^2$, ou (por serem similhantes os triangulos IML, *Iml*) :: $\overline{LM}^2 : \overline{lm}^2$, e consequentemente (161) :: KLM : *klm*; logo ABCDF : *abcdf* :: KLM : *klm*.

202. Esta demonstração mostra ao mesmo tempo, que as superficies ABCDF, *abcdf* são entre si como os quadrados de duas rectas IA, *Ia*, tiradas do ponto I a dous pontos correspondentes destas duas figuras; e consequentemente (199) como os quadrados das alturas, ou perpendiculares IP, *Ip* tiradas do ponto I sobre os planos GE, *ge*.

Concluamos pois: 1.° que se as duas superficies ABCDF, KLM fossem iguaes, serião tambem iguaes as duas superficies *abcdf*, *klm*.

2.° Que quanto temos dito teria lugar, se o ponto I em vez de ser commum ás rectas IA, IB, IC, etc., e ás rectas IM, IL, etc., fosse differente em cada figura, com tanto que estivessem ambos na mesma altura sobre o plano *ge*.

SECÇÃO TERCEIRA.

Dos Sólidos.

203. Chamamos *sólido*, ou *volume*, ou *corpo* (1) tudo quanto tem tres dimensões *comprimento*, *largura*, e *altura*, ou *profundidade*, ou *grossura*.

Vamos tratar da medição e relações dos sólidos. Sómente consideraremos os sólidos terminados por superficies planas: dos sólidos, comprehendidos por superficies curvas, trataremos unicamente do *cylindro*, da *pyramide conica*, e da *esfera*.

Os sólidos terminados por superficies planas, geralmente se distinguem pelo numero, e figura dos planos, que as comprehendem: estes planos devem pelo menos ser quatro.

204. Um sólido, cujas faces oppostas são dous planos iguaes, e parallelos, e todas as mais faces são parallelogramos, he geralmente chamado *Prisma*. Vejão-se as Figg. 116, 117, 118, e 119.

Logo o prisma póde imaginar-se como formado pelo movimento de um plano BDF, que corresse, parallelo a si mesmo pelo comprimento de uma linha recta AB (Fig. 116.).

Os dous planos parallelos são chamados bases do prisma, e a perpendicular LM, tirada de um ponto de uma das bases sobre a outra base, se chama a sua *altura*.

Desta idéa, que acabamos de dar do prisma, se segue, que em qualquer lugar que se córte o prisma por um plano parallelo á base, a secção sempre será um plano igual á base.

As linhas como BA, que são os encontros de dous parallelogramos consecutivos, são chamadas *arestas* do prisma.

O prisma he *recto*, quando as *arestas* são perpendiculares á base, e então são todas iguaes á altura. Vejão-se as Figg. 117 e 119.

Pelo contrario he *obliquo* o prisma, quando as suas arestas se inclinão para sobre a base.

Os prismas differem entre si pelo numero dos lados da sua base: se a base he um triangulo, chama-se-lhe *prisma triangular* (Fig. 116.). Se a base he quadrilatera, chama-se *prisma quadrangular* (Fig. 117.). E assim dos outros.

Entre os prismas *quadrangulares* faz-se particular distincção do *parallelipipedo*, e do *cubo*.

Parallelipipedo he um prisma quadrangular, cujas bases, e consequentemente todas as faces são parallelogramos; e quando o parallelogramo, que serve de base, he rectangulo, e o prisma he ao mesmo tempo recto, chama-se-lhe *parallelipipedo rectangulo*. Veja-se a Fig. 117.

Ao parallelipipedo rectangulo se chama *cubo*, quando tem por base um quadrado, e a aresta AB (Fig. 119.) he igual ao lado deste quadrado.

Logo o cubo he um sólido comprehendido entre seis quadrados iguaes. Com este sólido se medem os outros todos, como brevemente veremos.

205. *Cylindro* he um sólido comprehendido entre dous circulos iguaes e parallelos, e a superficie que descrevesse uma linha AB (Fig. 120. e 121.), que

que corresse parallelamente a si mesma pelo comprimento das duas circumferencias. O cylindro he *recto*, quando a linha CF (Fig. 120.), que une os centros das duas bases oppostas, he perpendicular a estes circulos: a esta linha CF chama-se-lhe *eixo* do cylindro. E o cylindro he *obliquo*, quando esta mesma linha CF se inclina sobre a base.

O cylindro recto se póde considerar como gerado pelo movimento do parallelogramo rectangulo FCDE, gyrando á roda do seu lado EF.

206. *Pyramide* he um sólido comprehendido por muitos planos; um dos quaes, a que se chama *base*, he qualquer polygono; e os outros, que todos são triangulos, tem por base os lados deste polygono, e tem todos os vertices unidos em um mesmo ponto, a que se chama *vertice* da pyramide. Vejão-se as Figg. 122. 123. e 124.

A perpendicular AM tirada do vertice sobre o plano, que serve de base, chama-se-lhe *altura* da pyramide.

As pyramides distinguem-se pelo numero dos lados das suas bases; de sorte que a que tem por base um triangulo, se lhe chama *pyramide triangular*; a que tem por base um quadrilatero, *pyramide quadrangular*; e assim das mais.

Chama-se pyramide *regular*, quando o polygono, que lhe serve de base, he regular, e ao mesmo tempo a perpendicular AM (Fig. 124.), tirada do vertice, passa pelo centro deste polygono.

A perpendicular AG, tirada do vertice A sobre DE um dos lados da base, se chama *apothema*.

He claro, que todos os triangulos, que se terminão no ponto A, são iguaes, e isosceles, porque todos tem bases iguaes, e as arestas AB, AC, AD, etc., todas são iguaes, porque todas são obliquas igualmente distantes da perpendicular AM (29).

Não he menos evidente, que todos os apothemas são iguaes nas pyramides regulares.

207. *Pyramide conica* (Fig. 125. e 126.) he um sólido comprehendido pelo plano circular BGDH, a que se chama *base* da pyramide conica, e pela superficie, que descreveria uma linha AB, gyrando em

roda do ponto fixo A, e tocando sempre na circumferencia BGDH.

Ao ponto A chama-se-lhe *vertice* da pyramide conica.

A perpendicular, tirada do vertice sobre o plano da base, chama-se *altura* da pyramide conica; e a pyramida conica he *recta*, ou *obliqua*, conforme esta perpendicular passa (Fig. 125.), ou deixa de passar (Fig. 126.) pelo centro da base.

Póde imaginar-se a pyramide conica recta como gerada pelo movimento do triangulo rectangulo ACD (Fig. 125.), gyrando em roda do lado AC.

208. *Esfera* he um sólido terminado por toda a parte por uma superficie, que tem todos os seus pontos igualmente distantes de um mesmo ponto.

A esfera póde imaginar-se como um sólido gerado pelo meio circulo ABD (Fig. 128.), gyrando á roda do diametro AD.

He evidente, que todo o *córte*, ou *secção* da esfera por um plano, he um circulo. Se este plano passa pelo centro, chama-se esta secção *circulo maximo* da esfera; pelo contrario chama-se *pequeno circulo* toda a secção da esfera por um plano, que não passa pelo centro.

Sector esferico he o sólido, que geraria o sector circular BCA, gyrando á roda do raio AC. A superficie, que descreve o arco AB neste movimento, se chama *callote esferica*.

Segmento esferico he o sólido, que geraria o semisegmento circular AFB, gyrando á roda da parte AF do raio.

Dos sólidos similhantes.

209. *Sólidos similhantes* são aquelles, que são compostos de igual numero de faces similhantes cada uma a cada uma, e similhantemente dispostas nos dous sólidos.

210. Logo *as arestas homologas, e os vertices dos angulos sólidos homologos são linhas e pontos similhantemente postos nos dous sólidos*; porque as arestas homologas,

homologas, e os vertices dos angulos sólidos homologos são linhas e pontos similhantemente postos a respeito das faces, a quem dizem respeito, pois que estas faces se suppõem similhantes; mas estas faces são similhantemente postas nos dous solidos: logo, etc.

211. Logo *os triangulos formados pelo vertice de um angulo sólido e pelos extremos de uma aresta homologa, em cada sólido, são duas figuras similhantes, e similhantemente postas nos dous sólidos*; porque os extremos das arestas homologas são vertices de angulos sólidos homologos, que estão similhantemente postos a respeito dos sólidos.

212. Logo *as diagonaes, que prendem dous angulos sólidos homologos, são entre si como as arestas homologas destes sólidos*; porque são lados dos triangulos similhantes, de que acabamos de fallar, os quaes tem por um destes lados arestas homologas.

Logo dous sólidos similhantes podem dividir-se em igual numero de pyramides similhantes cada uma a cada uma, por planos conduzidos por dous angulos homologos, e por duas arestas homologas. Porque as faces destas pyramides serão compostas de triangulos similhantes, e similhantemente postos nos dous sólidos (211); e as bases das mesmas pyramides tambem serão similhantes, pois são faces homologas dos dous sólidos; logo (209) estas pyramides serão similhantes.

213. *Se de dous angulos homologos se abaixão perpendiculares sobre duas faces homologas, estas perpendiculares estarão entre si na mesma razão de quaesquer duas arestas homologas.*

Porque estando os dous angulos homologos similhantemente dispostos a respeito de duas faces homologas (210), devem necessariamente estar a distancias destas faces, que estejão entre si na razão das dimensões homologas dos dous sólidos.

Da medição da superficie dos Sólidos.

214. SEndo a superficie dos prismas, e das pyramides composta de parallelogramos, de triangulos, e de polygonos rectilineos, poder-nos-íamos

dispensar de dizer aqui cousa alguma ácerca do modo, por que se devem medir, pois que já dissemos (145, 147 e 149) a maneira de medir estas partes, de que ella se compõe. Porém do que deixamos dito sobre esta materia se podem tirar algumas consequencias, que serviráõ não sómente para simplificar as operações, que requerem estas medições, mas que tambem nos hão de ser uteis para avaliar as superficies dos cylindros, das pyramides conicas, e da esfera.

215. *A superficie de qualquer prisma (não entrando as duas bases) he igual ao producto de uma das arestas deste prisma pelo contorno de uma secção bdfhk* (Fig. 113.) *feita por um plano, a que esta aresta fosse perpendicular.*

Porque visto suppôr-se, que esta aresta he perpendicular ao plano *bdfhk*, as outras arestas, que todas são parallelas a esta, serão tambem perpendiculares ao plano *bdfhk*: logo reciprocamente as rectas *bd*, *df*, *fh*, *hk* serão perpendiculares cada uma della ás arestas, que córta: considerando pois as arestas como bases dos parallelogramos, que cércão o prisma; as linhas *bd*, *df*, *fh*, *hk* serão as alturas: logo para ter a superficie do prisma, bastará multiplicar a aresta AB pela perpendicular *bd*, a aresta CD pela perpendicular *df*, e assim as mais, e sommar todos estes productos; mas como todas as arestas são iguaes, he evidente que vem a ser o mesmo multiplicar uma aresta só AB pela somma de todas as alturas, isto he, pelo contorno *bdfhk*.

216. Quando o prisma he recto, a secção *bdfhk* não differe da base BDFHK, e então a aresta AB he a altura do prisma: logo *a superficie de um prisma recto, não entrando as duas bases, he igual ao producto do contorno da base multiplicado pela altura.*

217. Vimos acima (136), que o circulo se podia considerar como um polygono regular de infinitos lados: logo o cylindro póde ser considerado como um prisma, cujo numero de parallelogramos, que compõem a superficie delle, fosse infinito: logo

A superficie lateral de um cylindro recto he igual ao producto da altura deste cylindro pela circumferencia da sua base. Já vimos (152), o que se deve fazer para achar esta circumferencia.

A respeito do *cylindro obliquo* deve multiplicar-se o seu comprimento AB, pela circumferencia da secção *bgdh* (Fig. 121.), sendo a secção feita como fica dito (215). O methodo para determinar o comprimento desta secção depende de conhecimentos mais amplos, do que são os que até agora temos dado. Na pratica podemos contentar-nos com medil-o mechanicamente, rodeando o cylindro com um fio (ou outra cousa equivalente), que se terá cuidado de collocar em um plano, a que seja perpendicular o comprimento AB do cylindro.

218. *Pelo que respeita á pyramide*, se ella não he regular, comvem buscar separadamente a superficie lateral de cada um dos triangulos, que a compõem, e sommar todas estas superficies.

Mas sendo regular, póde-se achar a superficie lateral com maior brevidade, multiplicando o contorno da base por metade do apothema AG (Fig. 124.); porque tendo todos os triangulos a mesma altura, basta multiplicar metade da altura commum pela somma de todas as bases.

219. Imaginando ainda a circumferencia de um circulo como um polygono regular de infinitos lados, vemos que a pyramide conica não he mais do que uma pyramide regular, cuja superficie (não comprehendida a da base) he composta de infinidade de triangulos, e que por consequencia, a superficie convexa de uma pyramide conica recta he igual ao producto da circumferencia da sua base pela metade de AB, lado da pyramide conica (Fig. 125.).

Quanto *á superficie convexa da pyramide conica obliqua*, depende ella de geometria mais composta, e por isso não trataremos aqui della: com tudo o modo, por que acabamos de considerar a pyramide conica, dá meio de a medir approximadamente, quando ella he obliqua. He necessario repartir a circumferencia da base em grande numero de arcos, a fim de que cada um delles se possa considerar, sem erro sensivel, como uma linha recta, e depois disso se calculará a superficie lateral como para uma pyramide, que tivesse tantos triangulos, quantos são os arcos.

220. *Para ter a superficie de uma pyramide conica recta truncada, cujas bases oppostas BGDH, bgdh* (Fig. 127.) *são parallelas, he necessario multiplicar o lado Bb deste tronco por metade da somma das circumferencias das duas bases oppostas.*

Com effeito esta superficie póde-se imaginar como um aggregado de infinitos trapesios EF*fe*, cujos lados E*e*, F*f* se dirigem ao vertice A : ora a superficie de cada um destes trapesios he igual a metade da somma das duas bases oppostas EF, *ef* multiplicada pela distancia das duas bases (148) ; mas esta distancia não differe dos lados E*e*, F*f*, ou B*b* ; logo para ter a somma de todos os trapesios, he necessario multiplicar metade da somma de todas as bases oppostas como EF, *ef*, isto he, metade da somma das duas circumferencias pela linha B*b*, altura commum de todos estes trapesios.

221. Se pelo meio M do lado B*b* se conduz um plano parallelo á base, a secção (199) será um circulo, cuja circumferencia será metade da somma das circumferencias das duas bases oppostas, visto que o seu diametro MN (148) he metade da somma dos das bases, e as circumferencias (136) tem entre si a razão dos seus diametros : logo *a superficie do tronco de pyramide conica recta, que tem as bases parallelas, he igual ao producto do lado do tronco, pela circumferencia da secção feita a igual distancia das duas bases oppostas.* Esta proposição nos vai servir para a demonstração da seguinte.

222. *A superficie de uma esfera he igual ao producto da circumferencia de um dos seus circulos maximos multiplicada pelo diametro.*

Imagine-se a semi-circumferencia AKD (Fig. 129.) dividida em uma infinidade de arcos : sendo cada um destes arcos, como KL, infinitamente pequeno, confundir-se-ha com a sua corda.

Tiremos pelos extremos de KL as perpendiculares KE, LF ao diametro AD, e por I, meio de KL, ou da sua corda, tiremos IH parallela a KE, ou LF, e o raio IC ; este raio será perpendicular sobre KL (52) : e tiremos em fim KM perpendicular sobre IH, ou LF. Se se concebe, que a semi-circumferencia AKD gyra em roda de AD, gerará a superficie da esfera, e cada um dos seus arcos KL gerará a superficie de uma pyramide conica truncada, que será um elemento da da esfera: vamos mostrar que a superficie desta pyramide conica truncada he igual ao producto de KM, ou EF, multiplicado pela circumferencia, cujo raio he IC, ou AC.

O triangulo KML he similhante ao triangulo IHC, pois que estes dous triangulos tem os lados perpendiculares um ao outro, supposto o que acabámos de construir. Logo destes triangulos similhantes tiramos esta proporção; KL : KM : : IC : IH, ou, visto que (136) as circumferencias são entre si como os seus raios, KL : KM : : circ. IC : circ. IH (a): logo, (Arith. 178.) como em toda a proporção o producto dos extremos he igual ao producto dos meios, KL, × circ. IH he igual a KM × circ. IC, ou, o que vem a ser o mesmo, igual a EF × circ. AC. Mas (221) o primeiro producto exprime a superficie da pyramide conica truncada gerada por KL: logo esta pyramide conica truncada he igual a EF × circ. AC, isto he, ao producto da sua altura EF pela circumferencia do circulo maximo da esfera. E como em outro qualquer arco se demonstraria o mesmo, e pelo mesmo modo, devemos concluir, que a somma de todas as pequenas pyramides conicas truncadas, que compoem a superficie da esfera, he igual á circumferencia de um dos circulos maximos multiplicada pela somma das alturas destas pyramides conicas truncadas, a qual somma fórma evidentemente o diametro. Logo a superficie da esfera he igual á circumferencia de um dos seus circulos maximos multiplicada pelo diametro.

223. Se se imagina um cylindro (Fig. 130.), que cerque a esfera, tocando-a por toda a parte, e que tenha por altura o diametro desta esfera, isto he, concebendo-se um cylindro circumscrito á esfera, póde-se concluir, que a *superficie da esfera he igual á superficie convexa do cylindro circumscrito.* Por-

---

(a) Entendemos por estas expressões, circ. IC, circ. IH, a circumferencia cujo raio he IC, a circumferencia cujo raio he IH.

que (217) a superficie deste cylindro he igual ao producto da circumferencia da base multiplicada pela altura; mas a circumferencia da base he a mesma de um circulo maximo da esfera, e a altura he igual ao diametro: logo, etc.

224. E porque para ter a circumferencia de um circulo (151), he necessario multiplicar a circumferencia por metade do raio, ou quarto do diametro; e para ter a superficie da esfera, he necessario multiplicar a circumferencia pelo diametro, devemos dizer, que *a superficie da esfera he quadrupla da superficie de um dos seus circulos maximos.*

225. A demonstração, que acabámos de dar da medição da superficie da esfera, prova igualmente, que para ter a superficie convexa do segmento esferico, que geraria o arco AL (Fig. 131.) gyrando á roda do seu diametro AB, será necessario multiplicar a circumferencia do circulo maximo da esfera pela altura AI deste segmento: e que para ter a de uma porção da esfera comprehendida entre dous planos parallelos, quaes são LKM, NRP, he similhantemente necessario multiplicar a circumferencia de um circulo maximo da esfera pela altura IO desta porção da esfera; porque estas superficies se podem, como fizemos na esfera inteira, considerar compostas de infinitas pyramides conicas truncadas, cada uma das quaes he igual ao producto da sua altura pela circumferencia de um circulo maximo da esfera.

Da razão das superficies dos Sólidos.

226. SE dous sólidos, cujas superficies se intentão comparar, são terminados por planos dissimilhantes, e irregulares, o unico partido, que se deve abraçar para achar a razão das suas superficies, he calcular separadamente a superficie de cada um delles na mesma especie de medida, e depois comparar o numero das medidas de uma ao numero de medidas da outra, isto he, o numero de pés quadrados, por exemplo, de uma ao numero de pés quadrados da outra.

227. *As superficies dos prismas, não contando as bases oppostas, são entre si como os productos do comprimento destes prismas, pelo contorno da secção feita perpendicularmente a este comprimento.*

Porque estas superficies são iguaes a estes productos (215).

228. Logo *se os comprimentos forem iguaes, as superficies dos prismas serão entre si, como o contorno da secção feita perpendicularmente ao comprimento de cada um.*

Porque a razão dos productos do comprimento pelo contorno desta secção não mudará, tirando em cada um destes productos o comprimento, que he factor commum.

229. Logo *as superficies dos prismas rectos, ou dos cylindros rectos de igual altura, são entre si como os contornos das bases, qualquer que alias seja a figura destas bases.*

Pelo contrario *se os contornos das bases são os mesmos, e differentes as alturas, serão estas superficies entre si como as alturas.*

230. *As superficies das pyramides conicas rectas são entre si como os productos dos lados destas pyramides conicas pelas circumferencias das bases, ou pelos raios, ou pelos diametros destas bases.*

Porque sendo cada uma das superficies igual ao producto da circumferencia da base por metade do lado da pyramide conica (219), devem ser entre si como estes productos, e consequentemente como os dobros dos mesmos productos. Além disso como as circumferencias tem entre si a mesma razão dos seus raios, ou dos seus diametros, póde-se substituir nestes productos (99) a razão dos raios, ou a dos diametros á das circumferencias.

231. *As superficies dos sólidos similhantes são entre si como os quadrados das suas linhas homologas.*

Porque se compõem de planos similhantes, cujas superficies são entre si, como os quadrados dos seus lados, ou linhas homologas, as quaes linhas são tambem linhas homologas dos sólidos, e proporcionaes a quaesquer outras linhas homologas.

232. *As superficies de duas esferas são entre si, como os quadrados dos seus raios, ou diametros.* Porque sendo a superficie da esfera quadrupla da do seu circulo maximo, as superficies de duas esferas devem ser entre si como o quadruplo de seus circulos maximos, ou simplesmente como os seus circulos maximos, isto he (162), como os quadrados dos raios, ou diametros.

Da solidez dos Prismas.

233. PAra firmar a idéa do que se deve entender por *solidez* de um corpo, convem imaginar uma porção de extensão, de qualquer fórma que se quizer, da fórma de um cubo, por exemplo, mas de infinitamente pequeno comprimento, largura, e profundidade, e imaginar tambem a capacidade do corpo inteiramente cheia de taes cubos, a que chamaremos *pontos sólidos*. O total destes pontos fórma o a que chamamos *solidez* de um corpo.

234. *Dous prismas, ou dous cylindros, ou um prisma, e um cylindro da mesma base, e da mesma altura, ou de bases e alturas iguaes, tem igual solidez, quaesquer que alias sejão as figuras das bases.*

Porque se estes corpos se imaginarem cortados por planos parallelos ás suas bases em laminas infinitamente delgadas, e de grossura igual á dos pontos sólidos, de que estes corpos se podem imaginar cheios, he visivel, que sendo cada secção em cada um igual á base (204), o numero dos pontos sólidos, de que cada lamina for composta, será o mesmo por toda parte, e igual ao numero dos pontos sobre a superficie da base; e como se suppõe a mesma altura em ambos os sólidos, cada um delles terá igual numero de laminas: logo conteráõ no seu todo o mesmo numero de pontos sólidos: logo são iguaes em solidez.

Da medição da solidez dos prismas e cylindros.

235. A Consideração dos pontos sólidos, de que acabamos de fazer uso, he principalmente util, quando, para demonstrar a igualdade de dous sólidos, nos vemos obrigados a considerar estes sólidos nos seus mesmos elementos, decompondo-os em laminas infinitamente delgadas. Ainda tornaremos a ter occasião de os considerar deste modo. Porém quando se quer medir a capacidade, ou solidez dos corpos para os usos ordinarios, não se consegue isto procurando avaliar o numero de pontos sólidos, que elles contém; pois facilmente se concebe, que em qualquer corpo que seja, ha infinitos destes pontos.

Que he pois o que, propriamente fallando, se faz, quando se mede a solidez de um corpo? Procura-se determinar quantas vezes contém em si o corpo, de que se trata, outro corpo conhecido. Querendo-se, por exemplo, medir o parallelipipedo rectangulo ABCDEFGH (Fig. 132.), o objecto disto he conhecer, quantas vezes contém este parallelipipedo cubos taes, como he o cubo conhecido *x*. A solidez dos corpos ordinariamente se avalia em medidas cubicas.

Para conhecer a solidez do parallelipipedo rectangulo ABCDEFGH, he necessario indagar quantas partes quadradas, como *efgh*, contém a sua base EFGH; buscar similhantemente quantas vezes a altura AH contém a altura *ah*; e multiplicando o numero de partes quadradas de EFGH pelo numero de partes de AH, o producto representará quantos cubos, taes como *x*, contém o parallelipipedo proposto, isto he, quantos pés cubicos, ou pollegadas cubicas contém etc.; conforme se o lado *ab* do cubo *x* he de um pé, ou de uma pollegada.

Vê-se com effeito, que na superficie EFGH se podem accommodar tantos cubos iguaes a *x*, quantos quadrados, como *efgh*, cabem na base EFGH. Todos estes cubos formaráõ um parallelipipedo, cuja altura HL será igual á *ah*: ora he evidente, que no sólido ABCDEFGH se podem accommodar tantos parallelipipedos, como este, quantas vezes a altura HL he contida na altura AH; logo deve-se repetir este parallelipipedo, ou este numero de cubos arrumados sobre EFGH, tantas vezes, quantas são as partes de AH: ou, visto que o numero destes cubos he o mesmo, que o numero dos quadrados contidos na base, deve-se multiplicar o numero dos quadrados contidos na base pelo numero das partes da altura, e este producto representará o numero dos cubos, que se contém no parallelipipedo proposto.

236. Visto ficar demonstrado (234), que os prismas de iguaes bases, e iguaes alturas, são iguaes em solidez, segue-se desta proposição, e do que acabamos de dizer, que para ter o numero de medidas cubicas, que contém qualquer prisma ACEGIKBDFH (Fig. 118.), será necessario avaliar a sua base KBDFH em medidas quadradas, e a sua altura LM em partes iguaes ao lado do cubo, que se toma por medida, e multiplicar depois o numero de medidas quadradas, que se achar na base, pelo numero de medidas lineares da altura, o que se exprime geralmente, dizendo: *A solidez de qualquer prisma he igual ao producto da superficie da base pela altura deste prisma.*

Devemos com tudo fazer neste lugar a mesma reflexão que fizemos, quando tratámos das superficies (145). Assim como não se póde rigorosamente dizer então, que uma linha se multiplica por uma linha, menos se póde dizer, que se multiplica uma superficie por uma linha. Pelo que acabamos de mostrar, se vê, que um sólido (cujo numero de cubos he o mesmo do daquelles quadrados da base) se repete tantas vezes, quantas vezes a sua altura he comprehendida na do sólido total, isto he, tantas vezes, quantas elle se contém no sólido, que se pretende medir.

237. Do que fica dito, concluamos, *que para ter a solidez de um cylindro recto, ou obliquo he necessario similhantemente multiplicar a superficie da sua base pela altura deste cylindro;* pois que um cylindro he igual a um prisma da mesma base, e altura do cylindro (234).

Da solidez das pyramides.

238. REcordEmos neste lugar o que deixámos dito (201), applicando-o ás pyramides, e concluiremos, que se duas pyramides IABCDF, IKLM (Fig. 115.) da mesma altura se cortão pelo mesmo plano *ge* parallelo ao plano das suas bases (*a*), as secções *abcdf*, *klm* serão entre si na mesma razão das bases ABCDF, KLM, e consequentemente serão iguaes, se as bases forem iguaes. Se estas pyramides se concebem de novo cortadas por um plano parallelo ao plano *ge*, e infinitamente proximo a este, vemos que as duas laminas sólidas comprehendidas entre os dous planos infinitamente visinhos, devem tambem estar entre si na razão das bases, porque o numero de pontos sólidos, necessarios para encher estas duas laminas de igual grossura, só póde depender da grandeza das secções correspondentes. Isto supposto, como as duas pyramides tem a mesma altura, não se póde conceber maior numero de laminas em uma, do que na outra; e tendo sempre as laminas correspondentes entre si a mesma razão das bases, o total destas laminas, e consequentemente as solidezes das pyramides serão entre si como as bases. *Logo a solidez de duas pyramides da mesma altura he a de uma para a da outra, na mesma razão, que tem entre si as bases destas pyramides; e por consequencia, as pyramides de bases iguaes, e de iguaes alturas, tem igual solidez, qualquer que seja a differença, que alias tenha a figura das suas bases.*

Medição da solidez das pyramides.

239. POr quanto medir um corpo não he outra cousa mais, do que buscar quantas vezes elle contém outro corpo conhecido; ou geralmente fallando, he buscar qual he a sua razão para outro corpo conhecido, para medir as pyramides, não se trata mais do

(*a*) Suppomos, para maior simplicidade, que o vertice seja commum, e as bases estejão sobre um mesmo plano GE.

que de achar a razão, que ellas tem com os prismas, que he o que vamos estabelecer na seguinte proposição.

240. *Qualquer pyramide he a terça parte do prisma da mesma base e altura da pyramide.*

Reduz-se a demonstração desta proposição a mostrar, que uma pyramide triangular he o terço de um prisma triangular, que tenha a mesma base, e a mesma altura da pyramide; porque um prisma se póde sempre imaginar como composto de tantos prismas triangulares, e uma pyramide como composta de tantas pyramides triangulares, quantos triangulos se podem imaginar no polygono, que serve de base a um, e á outra. Veja-se a Fig. 118.

Convencer-nos-hemos da verdade da proposição a respeito da pyramide triangular pelo modo seguinte. Seja ABCDEF (Fig. 133.) um prisma triangular: imaginem-se tiradas pelas faces CE, AE deste prisma as duas diagonaes BD, BF, e que por estas diagonaes se conduz um plano BDF; este plano cortará do prisma uma pyramide da mesma base e altura do prisma, pois que tem o seu vertice em B na base superior, e tem por base a mesma base inferior DEF do prisma: esta pyramide se vê separada na Fig. 134., e a Fig. 135. representa o que resta do prisma.

Póde-se considerar este resto como voltado, ou deitado sobre a face ADFC, e vemos que fica uma pyramide quadrangular, que tem por base o parallelogramo ADFC, e por vertice o ponto B: logo se se concebe na base ADFC tirada a diagonal CD, poder-se-ha considerar, que a pyramide total ADFCB se compõe de duas pyramides triangulares ADCB, CFDB, que tem por bases os dous triangulos iguaes ACD, CDF, e o vertice commum em B, e que consequentemente são iguaes (238). Ora uma destas duas pyramides, a saber, a pyramide ADCB póde imaginar-se, como tendo por base o triangulo ABC, isto he, a base superior do prisma, e tendo o vertice no ponto D; que está na base inferior: logo esta pyramide he igual á pyramide DEFB (Fig. 134.), pois tem igual base, e a mesma altura que ella: logo as tres pyramides DEFB, ADCB, CFDB são iguaes entre