& on aura la hauteur véritable du centre du Soleil à ſon paſſage par le Méridien.

On prendra la différence entre la hauteur véritable du centre du Soleil, & celle de l'Equateur du lieu où l'on obſerve, que l'on ſçait être le complément de la hauteur du Pole, & l'on aura ſa déclinaiſon qui ſera ſeptentrionale lorſque la hauteur du Soleil eſt plus grande que celle de l'Equateur, & méridionale lorſqu'elle eſt plus petite.

On réſoudra enſuite le Triangle ſphérique *ABC (Fig. 23.)* rectangle en *B*, dans lequel *AC* repréſente la diſtance du Soleil à l'interſection du Bélier ou de la Balance, *AB* ſon aſcenſion droite, *BC* ſa déclinaiſon qui eſt connuë, & l'angle *BAC* l'obliquité de l'Ecliptique, que nous avons ſuppoſée de $23^d\ 29'\ 0''$; c'eſt pourquoi l'on trouvera l'arc *AC*, qui meſure la diſtance du Soleil au point du Bélier ou de la Balance.

Lorſque la déclinaiſon du Soleil eſt ſeptentrionale, & augmente d'un jour à l'autre, l'arc *AC* meſure la longitude du Soleil priſe depuis le point du Bélier; & lorſqu'elle va en diminuant, l'arc *AC* repréſente la diſtance du Soleil au point de la Balance, qu'il faut retrancher de 180 degrés pour avoir la longitude du Soleil.

Lorſque la déclinaiſon du Soleil eſt méridionale, & augmente d'un jour à l'autre, l'arc *AC* repréſente la diſtance du Soleil au point de la Balance, qu'il faut adjoûter à 180 degrés pour avoir la longitude du Soleil; & lorſqu'elle va en diminuant, l'arc *AC* repréſente la diſtance du Soleil au point du Bélier, qu'il faut retrancher de 360 degrés pour avoir la longitude du Soleil.

On déterminera de la même maniére, la longitude du Soleil pour le jour ſuivant, ou tel autre jour que l'on voudra, & l'on prendra la différence entre ces deux longitudes qui meſure le vrai mouvement du Soleil pendant un intervalle de temps connu. *Ce qu'il falloit trouver.*

EXEMPLE I.

Le 30 Avril 1717, la hauteur méridienne du centre du Soleil a été obſervée de $56^d\ 0'\ 7''$, retranchant la réfraction moins la parallaxe, qui, à cette hauteur, eſt de 40 ſecondes, on aura la hauteur véritable du centre du Soleil, de $55^d\ 59'\ 27''$, dont il faut retrancher la hauteur de l'Equateur, qui eſt à l'Obſervatoire de Paris, de $41^d\ 9'\ 50''$, & on aura la déclinaiſon ſeptentrionale du Soleil à midi, de $14^d\ 49'\ 37''$.

Le 31 Juillet 1717, la hauteur méridienne du centre du Soleil a été obſervée de $59^d\ 29'\ 8''$, retranchant la réfraction moins la parallaxe, qui, à cette hauteur, eſt de 35 ſecondes, on aura la hauteur véritable du centre du Soleil, de $59^d\ 28'\ 33''$, dont il faut retrancher la hauteur de l'Equateur, qui eſt de $41^d\ 9'\ 50''$, pour avoir la déclinaiſon ſeptentrionale du Soleil à midi, de $18^d\ 18'\ 43''$.

La déclinaiſon ſeptentrionale du Soleil étant connuë dans ces deux obſervations, on fera, comme le ſinus de l'angle *CAB*, de $23^d\ 29'\ 0''$ eſt au ſinus total; ainſi le ſinus de l'arc *CB*, qui meſure la déclinaiſon obſervée le 30 Avril 1717, de $14^d\ 49'\ 37''$ eſt au ſinus de l'arc *AC*, de $39^d\ 57'\ 20''$, qui meſure la longitude du Soleil, à cauſe que ſa déclinaiſon, qui étoit ſeptentrionale, alloit en augmentant.

On fera auſſi, comme le ſinus de $23^d\ 29'\ 0''$ eſt au ſinus total; ainſi le ſinus de la déclinaiſon du Soleil, qui a été trouvée le 31 Juillet 1717, de $18^d\ 18'\ 43''$, eſt au ſinus de $52^d\ 2'\ 30''$, qu'il faut retrancher de 180 degrés, à cauſe que la déclinaiſon du Soleil qui étoit ſeptentrionale, alloit alors en diminuant, & on aura la longitude du Soleil le 31 Juillet 1717, à midi, de $127^d\ 57'\ 30''$.

On a trouvé ci-deſſus, la longitude du Soleil le 30 Avril à midi, de $39^d\ 57'\ 20''$. La différence, qui eſt de $88^d\ 0'\ 10''$, meſure le vrai mouvement du Soleil pendant l'intervalle entre ces deux obſervations, qui eſt de 92 jours.

EXEMPLE II.

Le 21 Mars de l'année 1715, la hauteur méridienne du centre du Soleil corrigée par la réfraction & la parallaxe, a été obſervée de $41^d\ 15'\ 55''$.

Le 20 Mars de l'année 1716, elle a été obſervée de $41^d\ 10'\ 5''$. Retranchant de ces deux hauteurs, celle de l'Equateur, qui eſt de $41^d\ 9'\ 50''$, on aura la déclinaiſon ſeptentrionale du Soleil le 21 Mars 1715, à midi, de $6'\ 5''$, & le 20 Mars 1716, de $0'\ 15''$, par le moyen deſquelles on trouvera, en calculant le

Triangle *ABC*, la longitude du Soleil le 21 Mars 1715, de 15′ 16″, & le 20 Mars 1716, de 0^d 0′ 38″. Prenant la différence entre ces deux longitudes, on aura 359^d 45′ 22″, qui meſurent le mouvement vrai du Soleil dans l'eſpace d'une année commune de 365 jours, ce qui eſt à raiſon de 59′ 8″ 15‴ par jour.

Seconde Méthode de déterminer le mouvement vrai ou apparent du Soleil.

On obſervera dans le cours d'une année, le plus ſouvent qu'il eſt poſſible, les points de l'horiſon où le Soleil ſe leve & ſe couche, & on meſurera la diſtance horiſontale de ces points à celui du Midi ou du Septentrion.

Si l'on ſuppoſe préſentement un Méridien *AZPB (Fig. 24.)* qui paſſe par le Zénit Z, & par le Pole *P* du lieu où l'on a obſervé, *ACB* l'horiſon, *ECF* l'Equateur, *H* le point de l'horiſon où le Soleil s'eſt levé ou s'eſt couché, lorſque ſa diſtance au point du Midi étoit moindre de 90 degrés, *h* le point de l'horiſon où le Soleil s'eſt levé ou s'eſt couché, lorſque ſa diſtance au point du Midi excedoit 90 degrés.

Soit mené du point Z, par les points *H* & *h*, les verticaux *ZHN*, *ZhN*, & du Pole *P*, par les mêmes points *H* & *h*, les Cercles de déclinaiſon *PHG*, *PhG*.

Dans les Triangles ſphériques *ZPH*, *ZPh*, les angles *PZH* ou *PZh*, qui meſurent la diſtance horiſontale du Soleil au point du Nord, ſont connus, de même que l'arc *ZP*, diſtance du Zénit au Pole, & l'arc *ZH* ou *Zh*, diſtance du Soleil au Zénit, qui eſt de 90 degrés plus la réfraction corrigée par la parallaxe; c'eſt pourquoi l'on trouvera par la Trigonométrie ſphérique, les arcs *PH* ou *Ph*. Retranchant de l'arc *PH*, l'arc *PI* de 90 degrés, reſte l'arc *HI*, qui meſure dans ce cas la déclinaiſon méridionale du Soleil. Prenant le complément de l'arc *Ph*, on aura l'arc *hi*, qui meſure la déclinaiſon ſeptentrionale du Soleil.

Connoiſſant la déclinaiſon du Soleil pour le temps des diverſes obſervations qu'on en a faites à l'horiſon, on trouvera de la maniére qui a été enſeignée ci-devant, la longitude du Soleil, & par conſéquent ſon mouvement vrai pendant l'intervalle de temps écoulé entre ces obſervations.

EXEMPLE I.

Le 1.er Mai de l'année 1717, le centre du Soleil a paru à l'horiſon artificiel de l'Obſervatoire de Paris entre l'Orient & le Nord, éloigné du point du Midi, de $113^d\ 50'$.

La diſtance du centre apparent du Soleil au Zénit, étoit de 90 degrés, à laquelle il faut adjoûter la réfraction horiſontale moins la parallaxe, qui eſt de $32'\ 10''$, dont le Soleil paroiſſoit plus élevé qu'il n'étoit effectivement, & on aura la diſtance véritable du Soleil au Zénit, qui eſt meſurée par l'arc Zh, de $90^d\ 32'\ 10''$. L'arc ZP, diſtance du Pole au Zénit de l'Obſervatoire eſt de $41^d\ 9'\ 50''$, & l'angle PZh, compris entre ces arcs, ſupplément de la diſtance du centre du Soleil au point du Midi, eſt de $66^d\ 10'$; c'eſt pourquoi l'on trouvera par la Trigonométrie ſphérique, l'arc Ph, de $74^d\ 58'\ 24''$, dont le complément hi meſure la déclinaiſon du Soleil, qui eſt de $15^d\ 1'\ 36''$, & qui eſt ſeptentrionale, à cauſe que le centre du Soleil étoit vers le Nord. Cette déclinaiſon étant connuë, on aura la longitude du Soleil, de $40^d\ 35'\ 20''$.

EXEMPLE II.

Le 1.er Août 1717, le centre du Soleil a paru ſe lever à l'Obſervatoire de Paris entre l'Orient & le Nord, éloigné du point du Nord, de $61^d\ 20'$, la hauteur de l'horiſon ſenſible étant de 30 minutes.

La diſtance du centre apparent du Soleil au Zénit, étoit donc de $89^d\ 30'$, à laquelle il faut adjoûter la réfraction moins la parallaxe, qui, à cette hauteur, eſt de $30'\ 8''$, & on aura l'arc Zh, de $90^d\ 0'\ 8''$. L'arc ZP eſt de $41^d\ 9'\ 50''$, & l'angle PZh, de $61^d\ 20'$; c'eſt pourquoi l'on trouvera l'arc Ph, de $71^d\ 52'\ 20''$, dont le complément hi meſure la déclinaiſon du Soleil, qui eſt de $18^d\ 7'\ 40''$ vers le Septentrion, avec laquelle on déterminera la diſtance du Soleil au point de la Balance, de $51^d\ 20'$, dont le ſupplément meſure la longitude du Soleil, qui eſt de $128^d\ 40'$.

On l'avoit trouvée le 1.er Mai, à $4^h\ 45'$ du matin, de $40^d\ 35'\ 20''$, la différence eſt de $88^d\ 4'\ 40''$, qui meſurent le vrai mouvement du Soleil dans l'eſpace de 92 jours.

Troisiéme Méthode de déterminer le Mouvement vrai ou apparent du Soleil.

La méthode que nous proposons ici, ne demande point d'Instruments pour observer les distances horisontales, mais seulement une Pendule ou Horloge à secondes, bien reglée à une Méridienne.

On observera pour cet effet, l'heure du lever ou du coucher du Soleil. La différence entre cette heure & midi, réduite en degrés, à raison de 360 degrés pour le temps que le Soleil a employé à retourner au Méridien d'un jour à l'autre, mesure l'angle *ZPH* ou *ZPh* (*Fig. 24.*) entre le Méridien *PZAN*, & le cercle vertical *PHG* ou *PhG*, qui passe par le Pole & le centre du Soleil placé sur l'horison en *H* ou en *h*, & par conséquent dans le Triangle *ZPH* ou *ZPh*, les angles *ZPH* ou *ZPh* étant connus, aussi-bien que l'arc *ZP* entre le Pole & le Zénit, & l'arc *ZH* ou *Zh*, distance du Zénit au Soleil, qui est de 90 degrés plus la réfraction moins la parallaxe, on trouvera les arcs *PH* ou *Ph*. Retranchant de l'arc *PH*, l'arc *PI*, de 90 degrés, on aura l'arc *HI*, qui mesure la déclinaison méridionale du Soleil. Prenant le complément de l'arc *Ph*, on aura l'arc *hi*, qui mesure la déclinaison septentrionale du Soleil.

EXEMPLE.

Le 1.er Mai de l'année 1717, le centre du Soleil a paru à l'horison artificiel de l'Observatoire de Paris, à $4^h\ 45'\ 6''$ du matin. La distance du lever du Soleil à midi, est de $7^h\ 14'\ 54''$, qui, réduites en degrés, mesurent l'angle *ZPh*, de $108^d\ 43'\ 30''$. L'arc *ZP* est de $41^d\ 9'\ 50''$, & le côté *Zh* est de $90^d\ 32'\ 10''$; c'est pourquoi dans le Triangle sphérique *ZPh*, dont l'angle *ZPh* est connu, & les côtés *ZP* & *Zh*, on trouvera l'arc *Ph*, de $74^d\ 58'\ 24''$, dont le complément $15^d\ 1'\ 36''$, mesure la déclinaison septentrionale du Soleil, avec laquelle on trouvera sa longitude le 1.er Mai 1717, à $4^h\ 45'\ 6''$ du matin, de $40^d\ 35'\ 20''$.

Quatriéme Méthode de déterminer le Mouvement vrai ou apparent du Soleil.

Nous avons supposé dans les méthodes précédentes, la connoissance de la parallaxe du Soleil, & principalement de sa réfraction horisontale, que l'on sçait être sujette à quelques variations, à cause des vapeurs qui environnent l'horison; c'est pourquoi nous donnerons ici une méthode qui n'est point sujette à ces éléments, & dont l'on peut même se servir pour en déterminer la quantité.

On observera la distance horisontale du centre du Soleil au point du Midi ou du Septentrion, soit que le Soleil se rencontre alors à l'horison artificiel, soit qu'il se trouve plus ou moins élevé, & on marquera l'heure véritable de cette observation. La différence de cette heure à midi, réduite en degrés, mesure l'angle *ZPH* ou *ZPh*, & la distance horisontale du centre du Soleil au point du Nord, mesure l'angle *PZH* ou *PZh*; & par conséquent dans le Triangle *ZPH* ou *ZPh*, dont l'arc *ZP* est connu de $41^d\ 9'\ 50''$, & les angles *ZPH* ou *ZPh*, *PZH* ou *PZh*, on aura le côté *PH* ou *Ph*, & par conséquent la déclinaison du Soleil *HI* ou *hi*, & sa vraye longitude.

On fera aussi, comme le sinus de l'angle *PZH*, est au sinus de l'angle *ZPH*; ainsi le sinus de l'arc *PH*, est au sinus de l'arc *ZH*, distance véritable du Soleil au Zénit, qui, étant comparée avec la distance apparente, donne la quantité de la réfraction moins la parallaxe, qui convient à la hauteur apparente du centre du Soleil.

EXEMPLE.

Le 1.er Mai de l'année 1717, à $4^h\ 45'\ 6''$ du matin, heure vraye, la distance entre le centre du Soleil, qui étoit à l'horison, & le point du Midi, étoit de $113^d\ 50'$. La différence entre $4^h\ 45'\ 6''$ & midi, est de $7^h\ 14'\ 54''$, qui, réduites en degrés, mesurent l'angle *ZPh*, de $108^d\ 43'\ 30''$; & dans le Triangle sphérique *ZPh*, dont l'arc *ZP* est connu de $41^d\ 9'\ 50''$, l'angle *ZPh*, de $108^d\ 43'\ 30''$, & l'angle *PZh*, supplément de la distance horisontale du Soleil au point du Midi, est de $66^d\ 10'$, on trouvera l'arc *Ph*, de $74^d\ 58'\ 24''$, dont le complément $15^d\ 1'\ 36''$, mesure la déclinaison septentrionale du Soleil *hi*, par le moyen de laquelle on trouvera sa longitude de $40^d\ 35'\ 20''$.

On trouvera aussi dans le même Triangle, l'arc *Zh*, distance véritable du centre du Soleil au Zénit, de $90^d\ 32'\ 10''$, dont retranchant sa distance apparente, qui étoit de $90^d\ 0'\ 0''$, reste la réfraction moins la parallaxe horisontale du Soleil, de $32'\ 10''$.

Cinquième

Cinquiéme Méthode de déterminer le Mouvement vrai ou apparent du Soleil.

Ayant connu par les Tables des Etoiles fixes, l'ascension droite d'une Etoile fixe, prise à volonté, on observera plusieurs jours de suite, la différence entre le passage du Soleil & de cette Etoile par le Méridien. On réduira cette différence en degrés, minutes & secondes, à raison de 15 degrés par heure, pour avoir la différence entre l'ascension droite du Soleil & celle de l'Etoile, au temps de son passage par le Méridien, qu'il faut adjoûter à l'ascension droite de l'Etoile, lorsqu'elle passe par le Méridien avant le Soleil, & qu'il faut retrancher de l'ascension droite de l'Etoile lorsque son passage suit celui du Soleil, & l'on aura l'ascension droite du Soleil au temps du passage de l'Etoile par le Méridien. Connoissant l'ascension droite du Soleil, on trouvera sa longitude véritable : car dans le Triangle sphérique *ABC (Fig. 23.)* rectangle en *B*, l'arc *AB*, distance en ascension droite du Soleil au point du Bélier ou de la Balance, étant connu, aussi-bien que l'obliquité de l'Ecliptique *BAC*, de $23^d\ 29'\ 0''$; on fera, comme le sinus total est à la tangente du complément de l'arc *AB* ; ainsi le sinus du complément de l'angle *BAC*, de $23^d\ 29'\ 0''$ est à la tangente du complément de l'arc *AC*, distance du Soleil au point du Bélier ou de la Balance, prise sur l'Ecliptique qui mesure sa longitude véritable.

On calculera de la même maniére, la longitude du Soleil pour le jour suivant, ou tel autre que l'on voudra, & on prendra la différence qui mesurera le vrai mouvement du Soleil, pendant un intervalle de temps donné.

E X E M P L E.

Le 23 Décembre de l'année 1717, le passage de Sirius par le Méridien, a été observé 11 heur. 32 minutes 20 second. $\frac{1}{2}$ avant celui du Soleil. Réduisant ces heures en degrés, on aura la différence d'ascension droite entre le Soleil & cette Etoile, de $173^d\ 5'\ 7''$, qui, étant adjoûtée à l'ascension droite de l'Etoile, qui étoit alors de $98^d\ 11'\ 58''$, à cause que son passage a précédé celui du Soleil, donne l'ascension droite du Soleil le 23 Décembre à 11^h 32′ 20″ $\frac{1}{2}$ avant midi, de 271^d 17′ 5″. On fera présentement, comme le sinus total est à la tangente du complément de l'arc *AB*, de 88^d 42′ 55″, distance en ascension droite du Soleil au point du Bélier; ainsi le sinus du complément de l'angle *BAC*, de 23^d 29′ de l'obliquité de l'Ecliptique, est à la tangente du complément de l'arc *AC*, distance en longitude au point du Bélier, qu'on trouvera de 88^d 49′ 19″, dont le supplément à 360 degrés, mesure la longitude véritable du Soleil, qui sera par conséquent de 271^d 10′ 41″.

Le 6 Janvier de l'année 1718, le passage de Sirius par le Méridien, a été observé 11 heur. 21 minut. 29 second. $\frac{1}{2}$ après celui du Soleil. Réduisant ces heures en degrés, on aura 170^d 22′ 22″ $\frac{1}{2}$, qui, étant retranchés de 98^d 12′ 0″, à cause que le passage de l'Etoile a suivi celui du Soleil, donne l'ascension droite du Soleil le 6 Janvier 1718, à 11^h 21′ 29″ $\frac{1}{2}$, de 287^d 49′ 37″, dont le supplément à 360 degrés, est 72^d 10′ 22″, avec lequel on trouvera la distance du Soleil au point du Bélier, de 73^d 33′ 59″, dont le supplément à 360 degrés, mesure sa longitude, qui étoit de 286^d 26′ 1″, à 11^h 21′ 29″ $\frac{1}{2}$ du soir.

La différence entre la longitude du Soleil observée le 23 Décembre 1717, à 11^h 32′ 20″ $\frac{1}{2}$ avant midi, & le 6 Janvier 1718, à 11^h 21′ 29″ $\frac{1}{2}$ du soir, est de 15^d 15′ 20″, qui mesurent le mouvement vrai du Soleil pendant l'intervalle de 15 jours moins une heure 6 min. 10 sec. ce qui est à raison de 61′ 12″ $\frac{1}{2}$ par jour.

CHAPITRE V.

De la grandeur apparente du Diametre du Soleil;

Et du rapport de sa plus grande à sa plus petite distance de la Terre.

AYANT observé la grandeur apparente du Soleil pendant le cours d'une année, on a remarqué que son diametre paroissoit de différente grandeur, suivant les différentes situations du Soleil sur l'Ecliptique; & comme, suivant les regles d'Optique, le même objet paroît plus grand plus il s'approche de nous, & diminuë en apparence à mesure qu'il s'en éloigne, on a reconnu que la distance réelle du Soleil à la Terre étoit sujette à diverses variations.

Pour les déterminer de même que celles du diametre apparent du Soleil, on peut employer diverses méthodes.

La premiére est d'observer avec un Quart-de-cercle garni d'une Lunette, la hauteur apparente du bord supérieur du Soleil, & celle de son bord inférieur, au temps de son passage par le Méridien, ce que l'on peut faire alors plus commodément que dans toute autre situation de cet Astre sur l'horison, parce que le Soleil ne change pas sensiblement de hauteur dans l'espace d'une ou de deux minutes. On corrigera chacune de ces hauteurs par la réfraction & la parallaxe, pour avoir la hauteur véritable du bord supérieur du Soleil & de son bord inférieur, dont la différence mesurera le vrai diametre vertical du Soleil.

Cette méthode est fort simple, & donne la grandeur apparente du diametre du Soleil, & par conséquent le rapport des diverses distances du Soleil à la Terre, avec autant de précision que l'on en peut espérer de la division de l'Instrument dont on s'est servi.

La seconde méthode de déterminer le diametre apparent du Soleil, est d'observer à une Pendule bien reglée, le temps que ce diametre employe à passer par le Méridien, ou par un Cercle horaire.

Lorsque le Soleil parcourt par son mouvement journalier, l'Equateur ou un Cercle parallele qui lui est fort proche, on réduira les minutes & secondes d'heures de son passage en minutes & secondes de degrés, à raison de 360 degrés pour le temps que le Soleil a employé à retourner au Méridien, ou au même Cercle horaire d'un jour à l'autre, & on aura la grandeur apparente de son diametre horisontal.

Mais lorsque le Soleil décrit un Parallele éloigné de l'Equateur, on fera, comme le sinus total est au sinus du complément de la déclinaison du Soleil; ainsi le temps que le diametre du Soleil a employé à passer par le Méridien, réduit en minutes & secondes de degrés, est au sinus de l'arc d'un grand Cercle qui mesure le diametre horisontal du Soleil.

Cette méthode se peut pratiquer très-commodément, & seroit fort exacte, si l'on pouvoit distinguer les parties de secondes que le Soleil employe à passer par le Méridien.

La troisiéme méthode de déterminer le diametre apparent du Soleil, est de placer dans une Lunette au foyer commun du verre objectif & de l'oculaire, deux réticules ou fils déliés, paralleles entr'eux, posés sur un Micrometre, qui est un instrument destiné à mesurer les petits intervalles, que l'on peut construire en différentes maniéres.

Dans les Micrometres qui se font par le moyen d'une vis qui sert à approcher ou reculer les réticules l'un de l'autre, on a soin d'y placer deux index avec des divisions, dont l'un marque chaque tour de vis par une de ces divisions, & l'autre les centiémes parties de chaque tour de vis. On disposera les réticules de maniére qu'ils comprennent un certain nombre exact de tours de vis ou de divisions, & on déterminera l'arc du Ciel qui répond à ces divisions, ce qui peut s'exécuter en deux maniéres différentes.

La premiére est de placer fixement la Lunette garnie de son Micrometre, de sorte que les fils soient dans une situation verticale, & de mesurer avec soin suivant la direction de cette Lunette sur un terrein uni, une base, à l'extrémité de laquelle on placera sur un plan perpendiculaire à la direction de la Lunette, deux mires ou marques visibles, que l'on ajustera de maniére qu'elles comprennent exactement l'intervalle entre ces fils, & l'on fera, comme la distance mesurée sur le terrein, depuis le tiers de l'épaisseur de l'objectif, du côté de l'objet, jusqu'au plan sur lequel sont posées les mires, est à la moitié de l'intervalle entre ces mires; ainsi le sinus total est à la tangente la de moitié de l'arc qu'occupe dans le Ciel le nombre des divisions marquées par l'index.

On aura par ce moyen, l'arc qui répond à chaque tour de vis & à chaque centiéme partie d'un de ces tours, dont on dressera une Table qui servira à déterminer la grandeur apparente du diametre du Soleil ou de tel autre objet que l'on voudra, en disposant ces fils de maniére qu'ils comprennent exactement l'image du Soleil, & remarquant le nombre de tours de vis & de centiémes parties comprises dans cet intervalle, qu'on réduira par le moyen de cette Table, en minutes & secondes d'un grand Cercle.

On peut aussi, pour une plus grande facilité, placer à une distance connuë, deux mires à tel intervalle que l'on voudra l'une de l'autre, & remarquer le nombre de tours de vis & de centiémes parties compriſes entre cet intervalle, par le moyen deſquelles on dreſſera une Table qui donnera les arcs qui répondent à chaque diviſion du Micrometre.

La ſeconde maniére de déterminer, par le moyen du Micrometre, la grandeur apparente du diametre du Soleil, eſt de meſurer avec un compas, la diſtance entre les fils qui comprennent l'image du Soleil, & de comparer cette meſure avec la diſtance de ces fils juſqu'au tiers de l'épaiſſeur du verre objectif en dedans de la Lunette. On fera enſuite, comme cette diſtance eſt à la moitié de l'intervalle entre ces fils; ainſi le ſinus total eſt à la tangente du demi-diametre du Soleil.

Pour rendre raiſon de cette derniére opération, ſoit *(Fig. 25.)* *AC* le diametre du Soleil, *LMTQ* le verre objectif de la Lunette, dont les ſurfaces *LM, QT* ſont également convexes. Soit mené des extrémités *A* & *C* du diametre *AC*, les rayons *AO, CN*, qui ſe rompant en *O* & en *N*, s'approchent de la perpendiculaire, & décrivent les lignes *OH, NE*, qui ſe croiſent au centre *D* du verre objectif; ces rayons étant arrivés en *E* & en *H*, ſe rompront en entrant dans l'air, & s'écartant de la perpendiculaire, ils parviendront en *P* & en *R* au foyer commun du verre objectif & de l'oculaire, de ſorte que le point *C* du Soleil ſera repréſenté par le point *P*, & le point *A* par le point *R*. Prolongés les rayons *AO, CN*, juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en *S*, & les rayons *PE, RH*, juſqu'en *I*. Les angles *DNS, DEI*, qui meſurent l'inclinaiſon du rayon rompu *NE* à l'égard des rayons *CN* & *PE*, ſont égaux, à cauſe que les points *N* & *E* des ſurfaces également convexes, ſont à égale diſtance du centre. Y adjoûtant les angles *KDN, EDG*, qui ſont auſſi égaux entr'eux, on aura l'angle *KSN* égal à l'angle *GIE*; & par conſéquent l'angle *ASC*, double de l'angle *KSN* égal à l'angle *PIR*, double de *GIE*. Mais l'angle *ASC* meſure le diametre du Soleil vû du point *S*: donc l'angle *PIR* meſure ce diametre, lequel eſt repréſenté par *PR* qui eſt au foyer commun des deux verres.

Soit mené du point *B*, centre de l'arc *QT*, les rayons *BE, BG*, l'angle *BEI* ou *PEV*, repréſentera l'angle de réfraction du rayon *PE* en ſortant du verre, & l'angle *BED* l'angle d'incidence, dont les ſinus ſont comme 3 à 2, ſuivant les expériences que l'on en a faites. Maintenant à cauſe de la diſtance *EG* entre les rayons *BE* & *BG,* qui eſt fort petite par rapport à la grandeur du rayon *BG,* les lignes *BE* & *BG,* peuvent paſſer pour paralleles. On aura donc l'angle *EIG* égal à l'angle *BEI,* & l'angle *EDG* égal à l'angle *BED,* & par conſéquent le ſinus de l'angle *EIG* ſera au ſinus de l'angle *EDG* comme 3 à 2. Mais le ſinus de l'angle *EIG* eſt au ſinus de l'angle *EDG,* comme *ED* eſt à *EI,* ou bien, comme *DG* eſt à *IG,* qui n'en différe pas ſenſiblement: donc *DG* eſt à *IG,* comme 3 à 2. Si donc l'on adjoûte à *GF,* diſtance du point *F* à la ſurface intérieure de l'arc *QT* du verre objectif, les deux tiers de la moitié de ſon épaiſſeur, on aura la valeur de *IF,* avec laquelle on trouvera la grandeur du diametre apparent du Soleil, en faiſant, comme *IF* eſt à *PF,* moitié de l'image du Soleil, compriſe entre les fils du réticule du Micrometre; ainſi le ſinus total eſt à la tangente de l'angle *FIP* ou *XSC,* dont le double meſure le diametre *AC* du Soleil.

Cette même démonſtration ſert à rendre raiſon de la premiére maniére qu'on a enſeignée pour déterminer la grandeur apparente du diametre du Soleil, ou de tel autre arc du Ciel compris entre les fils du Micrometre. Car ſuppoſant les mires en *A* & en *C,* qui comprennent un intervalle ſemblable au diametre apparent du Soleil, ou à tel autre arc du Ciel que l'on voudra; les angles *ASC, PIR* étant égaux, on aura *IF* à *FP,* comme *SX* eſt à *XC.* Mais l'on a démontré que *IF* eſt à *FP,* comme le ſinus total eſt à la tangente de l'angle *FIP,* dont le double meſure le diametre du Soleil, ou tel autre arc du Ciel, meſuré par l'angle *ASC:* Donc la diſtance *SX* meſurée ſur le terrein, depuis le tiers de l'épaiſſeur de l'objectif vers l'objet *AC,* juſqu'au plan ſur lequel ſont placées les mires *A* & *C,* eſt à *XC,* moitié de l'intervalle *AC* entre ces mires, comme le ſinus total eſt à la tangente de la moitié de l'image du Soleil, ou tel autre arc dans le Ciel, meſuré par l'angle *FIR* ou *ASX.*

Exemple.

Dans la conſtruction d'un Quart-de-cercle de 6 pieds de rayon qu'on a placé fixement en 1732 dans le cabinet de la Tour orientale de l'Obſervatoire, on y a mis un Micrometre garni de fils paralleles qui répondent au foyer de la Lunette, que l'on peut approcher ou reculer l'un de l'autre par le moyen d'une vis avec deux index, dont le premier qui eſt à côté, marque le nombre des tours de vis, & le ſecond qui eſt au deſſus, marque ſur un cercle diviſé en 100 parties, les centiémes de chaque tour de vis.

Avant que de placer cette Lunette ſur le Quart-de-cercle, nous avions eu ſoin de vérifier l'eſpace que comprennent les diviſions du Micrometre, par les deux maniéres rapportées ci-deſſus.

Suivant la premiére, qui conſiſte à meſurer un intervalle ſur le terrein, j'ai trouvé que 30 tours de vis répondoient à un arc de $37' \, 31'' \, 20'''$, & ſuivant la ſeconde de $37' \, 31'' \, 7'''$, avec une différence de l'une à l'autre de 13 tierces.

Employant la premiére, qui mérite la préférence, parce que les meſures étant plus grandes, les petites erreurs y ſont moins ſenſibles, on trouve que chaque tour de vis meſure un arc de $1' \, 15'' \, 2''' \frac{1}{2}$, & chaque centiéme $0' \, 0'' \, 45'''$.

Le 23 Décembre de l'année 1732, au paſſage du Soleil par le Méridien, ayant diſpoſé les fils du réticule, de maniére qu'ils compriſſent exactement l'image du Soleil, je remarquai que ſon diametre occupoit 26 parties & un centiéme, ce que je trouvai de même le 24 & le 30 Décembre, temps auquel le diametre du Soleil doit être le plus grand. Suivant la meſure que nous venons de marquer, 26 diviſions & un centiéme, répondent à $32' \, 31'' \, 54'''$, qui meſurent le diametre apparent vertical du Soleil. Y adjoûtant 5 ſecondes & demie, dont la réfraction qui convient à la hauteur méridienne du Soleil, devoit diminuer ſon diametre vertical, on aura la grandeur véritable du diametre du Soleil, lorſqu'il paroît le plus grand, de $32' \, 37'' \, 24'''$, ou $32' \, 37'' \frac{1}{2}$.

Le 30 Juin de l'année 1735, temps auquel le diametre apparent du Soleil eſt le plus petit, j'ai obſervé à ſon paſſage par le Méridien, qu'il occupoit 25 diviſions & $\frac{21}{100}$.^{es}, qui répondent à $31' \, 31'' \, 52'''$. Y adjoûtant 32 tierces, dont la réfraction diminuoit alors ſon diametre vertical, on aura la grandeur véritable du diametre du Soleil, lorſqu'il paroît le plus petit, de $31' \, 32'' \, 24'''$, ou $31' \, 32'' \frac{1}{2}$.

Suivant les obſervations de M. le Chevalier de Louville, rapportées dans les Mémoires de l'Académie de 1724, il a trouvé le plus grand diametre du Soleil, de 32′ 37″ 24‴, & le plus petit de 31′ 32″ 49‴, ce qui ne différe que de quelques tierces de celui que nous venons de déterminer.

Connoiſſant la valeur du plus grand & du plus petit diametre du Soleil, on aura le rapport de ſa plus grande à ſa plus petite diſtance de la Terre qui eſt en raiſon inverſe de ſon diametre apparent, en faiſant, comme la demi-ſomme de ces diametres, qui eſt de 32′ 5″, eſt au plus grand diametre obſervé de 32′ 37″ $\frac{1}{2}$; ainſi 100000 ſont à 101688, qui meſure ſa plus grande diſtance à la Terre. La retranchant de 200000, on aura ſa plus petite diſtance de 98312; la différence à la plus grande eſt 3376, dont la moitié 1688, meſure la plus grande excentricité de l'Orbe du Soleil qui eſt un des principaux éléments de ſa théorie.

CHAPITRE VI.

Des Hypotheſes qui ſervent à repréſenter le Mouvement apparent du Soleil, & ſa Diſtance à la Terre.

AYANT déterminé de la maniére qui a été expliquée ci-devant, le mouvement vrai ou apparent du Soleil à l'égard de la Terre, il a été aiſé de reconnoître que ce mouvement n'eſt pas toûjours uniforme, mais plus prompt ou plus lent dans les différentes ſituations où le Soleil ſe trouve ſur l'Ecliptique.

On a remarqué cette inégalité de mouvement, en comparant les obſervations de la hauteur méridienne du Soleil, faites près des Equinoxes, par leſquelles on a trouvé que dans l'intervalle de 186 jours, depuis le 21 Mars 1715 juſqu'au 23 Septembre de la même année, le mouvement du Soleil en longitude a été de 179^d 28′ 33″, plus petit de 48′ 16″ que dans un intervalle de 179 jours, depuis le 23 Septembre de l'année 1715 juſqu'au 20 Mars 1716.

On peut auſſi obſerver immédiatement cette inégalité de mouvement dans le Soleil, ſans le ſecours d'aucun Inſtrument, en remarquant le point de l'horiſon où le Soleil ſe leve le jour d'un Equinoxe, & comptant l'intervalle de jours qui s'écoule juſqu'à ce qu'il ce qu'il paroiſſe ſe lever à peu-près au même lieu dans l'Equinoxe qui ſuit immédiatement. Car quoique le Soleil s'éloigne également des points des Equinoxes, du côté du Midi ou du Nord, en allant vers les Tropiques du Capricorne ou de l'Ecreviſſe, on s'apperçoit que du point de l'Equinoxe du Printemps au point de l'Equinoxe d'Automne, il employe huit jours de plus que du point de cet Equinoxe à celui du Printemps.

Pour rendre raiſon de ces apparences, on a imaginé diverſes hypotheſes que nous expliquerons ici, en examinant celles qui ſont les plus conformes aux obſervations.

I.

De l'Hypotheſe du Mouvement circulaire du Soleil autour de la Terre.

Ayant conſidéré que les inégalités apparentes du mouvement du Soleil, étoient à peu-près ſemblables dans les mêmes endroits de l'Ecliptique après un intervalle de pluſieurs années, on a d'abord ſuppoſé que l'Orbe du Soleil étoit d'une figure circulaire, & que l'inégalité de ſon mouvement étoit cauſée par les diverſes diſtances de la Terre au Soleil, lequel décrivoit ſon mouvement autour d'un Cercle dont le centre étoit éloigné de celui de la Terre; en ſorte que le Soleil parcourant en temps égaux des arcs égaux de ce cercle, il paroiſſoit, à cauſe de ſes diverſes diſtances à la Terre, ſe mouvoir avec différents degrés de vîteſſe.

Soit, par exemple, *ABPE (Fig. 26.)* le Cercle que décrit le Soleil par ſon mouvement propre, *T* la Terre en quelqu'endroit au dedans de la circonférence de ce Cercle, éloignée de ſon centre *C* d'une diſtance quelconque *CT.* Soit mené de la Terre *T* par le centre *C* du Cercle *ABPE,* le diametre *ACP,* & ayant pris les arcs *AS, PH,* égaux entr'eux, ſoit tiré du point *S* par le centre *C,* le diametre *SCH,* & par la Terre *T,* la ligne *STI,* & ſoient jointes les lignes *TS, TH.*

Si l'on ſuppoſe préſentement que le Soleil décrive par un mouvement égal & uniforme, la circonférence du Cercle *ABPE,* il eſt évident qu'il employera autant de temps à décrire l'arc *PH* que l'arc *AS,* qui lui eſt égal; & que par conſéquent il arrivera du point P au point I, en moins de temps que du point A au point S.

Cependant, à cauſe des angles ATS & PTI, ſuppoſés égaux, le Soleil a paru décrire depuis le point P juſqu'au point I, une quantité de mouvement ſemblable & égale à celle qu'il avoit décrite depuis le point A juſqu'au point S, quoiqu'en effet il n'ait parcouru que l'arc PI, qui eſt plus petit que l'arc AS ou PH, de toute la quantité IH. Le Soleil a donc paru décrire des chemins égaux en temps inégaux, & ſe mouvoir avec différents degrés de vîteſſe. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Le Cercle $ABPE$ que le Soleil parcourt par ſon mouvement propre, a été appellé *Excentrique*, à cauſe que la Terre eſt placée hors de ſon centre à la diſtance CT, qui meſure l'excentricité. On a auſſi nommé *Apogée*, le point A qui eſt à l'extrémité du diametre AP, la plus éloignée de la Terre; *Périgée*, le point P qui eſt à l'extrémité la plus proche; *Anomalie moyenne*, la diſtance du Soleil à ſon Apogée, ſuivant l'ordre des Signes, conſidérée du centre C du moyen mouvement, & meſurée par l'arc AS ou l'angle ACS; *Anomalie vraye*, la diſtance du Soleil à ſon Apogée par rapport au centre T de la Terre, meſurée par l'angle ATS; & *E'quation du Soleil*, l'angle CST, différence entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraye, ou, ce qui revient au même, la différence entre le lieu du Soleil vû du centre T de la Terre, & ce lieu conſidéré du centre C du moyen mouvement.

Si l'on ſuppoſe, conformément au Syſteme de Copernic, que le Soleil ſoit immobile au point T, & que la Terre décrive autour de cet Aſtre, le Cercle $ABPE$, ou telle autre Courbe que l'on voudra, le point A, le plus éloigné du Soleil, ſera nommé *Aphélie*, & le point P, qui en eſt plus proche, *Périhélie*.

Le rapport de l'excentricité CT de l'Orbe du Soleil $ABPE$, à la moyenne diſtance AC du Soleil à la Terre, étant connu, on déterminera l'Equation du Soleil & ſon vrai lieu, pour telle anomalie moyenne que l'on voudra, comme, par exemple, lorſqu'elle eſt meſurée par l'angle ACS. Car dans le Triangle SCT, les côtés SC, ou AC, & CT, étant connus, de même que l'angle SCT, compris entre ces côtés, qui, dans ce cas, eſt le ſupplément à deux droits de l'angle ACS, qui meſure ſon anomalie moyenne; on trouvera la valeur de l'angle CST, qui meſure l'Equation du Soleil &

de l'angle *ATS* de ſon anomalie vraye. L'adjoûtant à l'angle *ATE*, qui meſure le vrai lieu de l'Apogée depuis le point d'*Ariès*, on aura l'angle *ETS*, qui meſure la *Longitude* du Soleil, ou ſon vrai lieu.

EXEMPLE.

La diſtance *CT* de la Terre au centre du moyen mouvement du Soleil, ayant été déterminée par Ptolemée, de cinq parties, dont le rayon *AC* ou *SC*, eſt de 120, on cherche l'Equation du Soleil qui répond à 30 degrés d'anomalie moyenne, de même que ſon anomalie vraye & ſon vrai lieu.

Faites comme *SC* plus *CT* 125 eſt à *SC* moins *CT* 115; ainſi la tangente de $15^d\ 0'\ 0''$, demi-ſomme des angles *CTS* & *CST*, eſt à la tangente de leur demi-différence que l'on trouvera de $13^d\ 50'\ 53''$, qui, étant adjoûtés à 15 degrés, donnent l'angle *ATS* de l'anomalie vraye du Soleil, de $28^d\ 50'\ 53''$. Le retranchant de l'angle *ATS* de l'anomalie moyenne, on aura l'angle *CST*, qui meſure l'Equation du Soleil, de $1^d\ 9'\ 7''$.

Adjoûtant l'angle *ATS*, de $28^d\ 50'\ 53''$ au lieu de l'Apogée du Soleil, que Ptolemée avoit déterminé à $5^d\ 30'$ des Gemeaux, on aura le vrai lieu du Soleil à $4^d\ 20'\ 53''$ de l'Ecreviſſe.

Pour déterminer la plus grande Equation du Soleil qui arrive lorſqu'il eſt au point *B*, à 90 degrés de ſon Apogée, on fera, comme *CB* 120 eſt à *CT* 5; ainſi le ſinus total eſt à la tangente de l'angle *CBT*, qui meſure la plus grande Equation du Soleil, que l'on trouvera de $2^d\ 23'\ 15''$, conforme à celle de Ptolemée qui l'avoit déterminée de $2^d\ 23'$. *(Voy. Almag. liv. 2. chap. 4.)*

Dans cette hypotheſe, le mouvement apparent du Soleil près de ſon Apogée, eſt à ſon mouvement apparent près de ſon Périgée dans la raiſon de la grandeur apparente de ſon diametre; car ſi l'on ſuppoſe que l'arc *GS* ou *KH*, qui lui eſt égal, meſure le mouvement du Soleil de part & d'autre de ſon Apogée ou de ſon Périgée, & que *SO* & *IH* repréſentent ſon diametre, l'angle *GTS*, qui meſure le mouvement apparent du Soleil depuis *G* juſqu'en *S*, eſt à l'angle *STO*, qui meſure ſon diametre apparent, comme l'arc *GS* eſt à l'arc *SO*.

L'angle *KTH*, qui meſure le mouvement apparent du Soleil dans un eſpace égal de temps depuis *K* juſqu'en *H*, eſt à l'angle

ITH, qui meſure ſon diametre apparent, comme l'arc *KH* eſt à l'arc *IH*. Mais l'arc *GS* eſt égal à l'arc *KH*, & l'arc *SO* eſt égal à l'arc *IH*: donc le mouvement apparent du Soleil depuis *G* juſqu'en *S*, eſt à ſon mouvement apparent dans un eſpace de temps égal depuis *K* juſqu'en *H*, comme ſon diametre apparent, lorſqu'il eſt en *S*, eſt à ſon diametre apparent lorſqu'il eſt en *H*.

Cette hypotheſe du mouvement égal du Soleil ſur un Cercle excentrique à la Terre, eſt celle que Ptolemée *(Almag. liv. 3. ch. 4.)* a employée pour repréſenter l'inégalité apparente du Soleil & de la Lune. Dans la Théorie des autres Planetes *(liv. 10, 11 & 12.)* il a ſuppoſé trois cercles égaux *BQY, DNO, ARX (Fig. 27.)* dont le premier eſt concentrique à la Terre, le ſecond lui eſt excentrique, & le troiſiéme tient le milieu entre les deux précédents.

Le premier cercle *BQY*, concentrique à la Terre, a ſon rayon *BT*, égal à la diſtance du Soleil à la Terre, dans le temps qu'elle eſt moyenne entre la plus grande & la plus petite. On conçoit ce cercle diviſé en douze parties égales qui comprennent chacune un Signe, & il eſt appellé par Ptolemée, *Zodiaque*.

Le ſecond *DNO*, qui lui eſt égal, eſt celui du moyen mouvement de la Planete, qui paroît décrire à l'égard du centre *F* de ce cercle, des arcs égaux en temps égaux, & que Ptolemée appelle *Excentrique*; la diſtance *FT* de ce centre à celui du Zodiaque, doit être telle qu'elle puiſſe repréſenter la plus grande & la plus petite quantité du vrai mouvement de la Planete.

Le troiſiéme cercle *ARX*, qui eſt placé entre les deux précédents, eſt celui que la Planete décrit par ſon mouvement périodique, & ſur lequel Ptolemée ſuppoſe que ſe meut le centre de ſon Epicycle. Car les diſtances obſervées, ſont voir évidemment que les Planetes ſe meuvent entre la circonférence de l'excentrique & du concentrique ; c'eſt pourquoi Ptolemée ayant partagé la diſtance *FT* entre ces deux cercles en deux également au point *C*, a décrit de ce point, comme centre, un cercle dont le rayon eſt égal à celui des deux précédents, & qu'il a regardé comme la route du vrai mouvement.

Le mouvement de la Planete ſur ce cercle eſt telle qu'elle ne décrit pas des arcs égaux en temps égaux, mais qu'elle eſt, pour ainſi dire, retenuë par des lignes droites *EFR, GFX*, qui paſſent par le centre de l'excentrique *DNO,* de ſorte que paroiſſant décrire du centre *F* de cet excentrique, des arcs égaux *EG, NO* en temps égaux, elle parcourt ſur le cercle *ARX,* des arcs inégaux *HS, RX;* d'où il réſulte que plus la Planete eſt éloignée du Soleil, plus elle ſe meut lentement, & que ſon mouvement eſt plus prompt plus elle en eſt proche.

Il faut remarquer ici que Ptolemée a fait en ſorte de placer autant qu'il étoit poſſible, la Planete de maniére que dans ſa route elle ſe trouvât au milieu entre les deux premiers cercles, ce qui eſt exact dans l'Apogée & le Périgée, mais qui ne l'eſt pas de même dans les autres ſituations, à cauſe que par la propriété du cercle, celui qui eſt placé entre les deux, s'approche davantage de l'excentrique dans ſa partie ſupérieure, & ſe trouve plus près du concentrique dans la partie inférieure, avec une différence que nous donnerons la maniére de corriger dans la ſuite.

Les Aſtronomes qui, après Ptolemée, ont conſervé le mouvement circulaire, ou compoſé de mouvements circulaires, ont tous abandonné ſa méthode, jugeant qu'il étoit abſurde de meſurer l'égalité des mouvements périodiques des Planetes dans un cercle ſur la circonférence duquel elles ne ſe meuvent pas réellement; c'eſt pourquoi ils ont employé des méthodes différentes pour placer les Planetes ſur des cercles autour deſquels elles euſſent un mouvement égal.

Copernic repréſenta donc le mouvement périodique par un Excentrique & un Epicycle; Tycho par un Cercle concentrique & deux Epicycles, ce qui a été ſuivi par Longomontanus; Lanſberge aima mieux expliquer l'inégalité apparente du Soleil par un petit cercle ſur la circonférence duquel il faiſoit mouvoir le centre de l'excentrique.

Pour nous, ſans entrer dans le détail de ces différentes méthodes que l'on peut conſulter dans les Auteurs, & qu'il ſeroit inutile d'expliquer ici plus au long, parce qu'on les a entiérement abandonnées, nous examinerons ce qui réſulte des hypotheſes elliptiques, qui, depuis Képler, ont été ſuivies de tous les Aſtronomes, comme les plus propres à repréſenter les mouvements apparents, non-ſeulement du Soleil, mais auſſi de toutes les autres Planetes.

II.

Du Mouvement du Soleil autour d'une Ellipse.

Les hypotheses des mouvements du Soleil ou des Planetes autour d'un ou de plusieurs Cercles, se trouvant trop compliquées, ou n'étant pas suffisantes pour représenter leurs mouvements apparents, qui sont tels que l'accélération apparente de ce mouvement est à peu-près le double de l'augmentation apparente de leur diametre; les Astronomes ont distingué l'inégalité que l'on observe dans le mouvement des Planetes en deux parties à peu-près égales, qui ont deux causes différentes, l'une Optique ou apparente, qui dépend de leurs diverses distances à la Terre ou au Soleil, & l'autre Physique, qui leur imprime un mouvement plus prompt lorsqu'elles sont plus près de la Terre ou du Soleil, que lorsqu'elles en sont plus éloignées, & cela à peu-près suivant la proportion de l'augmentation & de la diminution apparente de leur diametre.

Pour représenter cette inégalité, on a imaginé deux hypotheses, dont l'une a été inventée par Képler, & a conservé le nom de son Auteur, l'autre se nomme *hypothese elliptique simple*, à cause de la plus grande facilité qu'il y a de calculer par son moyen, les Equations des Planetes, joint à ce qu'on peut les déterminer avec une précision géométrique, à laquelle on ne peut pas arriver par l'hypothese de Képler.

De l'Hypothese Elliptique simple.

Soit sur le diametre *ACP (Fig. 28.)* du cercle *ADPE*, le point *T* qui représente la Terre dans les Systemes de Ptolemée & de Tycho, ou le Soleil dans le Systeme de Copernic, qui soit placé de sorte que *AT* soit à *TP*, comme la grandeur apparente du Soleil lorsqu'il est dans son Périgée, est à sa grandeur apparente lorsqu'il est dans son Apogée, c'est-à-dire, comme 30 à 29, ou plus exactement, comme 1017 à 983. Ayant pris *CF* égal à *CT*, qui est de 17 parties, dont le rayon *AC* est de 1000, soit fait l'angle *ATH* égal à l'anomalie vraye du Soleil, ou à sa distance véritable de l'Apogée. Prolongés *TH* en *V*, de sorte que *TV* soit égal au diametre *AP*. Joignés *FV*, & faites l'angle *VFI* égal à l'angle *TVF*. Suppoſant que le mouvement du Soleil à l'égard du point *F*, ſoit égal & uniforme, l'angle *AFI* meſurera ſon anomalie moyenne, ou la quantité de ſon moyen mouvement depuis l'Apogée. Le point *I* repréſentera le vrai lieu du Soleil qui ſera ſur une Ellipſe dont les foyers ſont en *T* & en *F*, & l'angle *FIT*, l'Equation du Soleil, c'eſt-à-dire, ſon inégalité qui ſera le double de celle qui réſulte de l'hypotheſe circulaire.

DÉMONSTRATION.

Soit mené *CG (Fig. 28.)* parallele à *FI*, & ſoit joint *TG*. Dans le Triangle *FIV*, les angles *IVF*, *IFV* étant égaux par la conſtruction, *FI* eſt égal à *IV*. Y adjoûtant *TI*, on aura *FI* plus *TI* égal à *TV*. Mais *TV* a été pris égal au diametre *AP*: donc *FI* plus *TI* eſt égal à *AP*, ce qui eſt la propriété d'une Ellipſe dont le grand diametre eſt *AP*, & les foyers ſont en *F* & en *T*. Le point *I* qui détermine le vrai lieu du Soleil, ſera donc ſur une Ellipſe.

Maintenant, à cauſe des paralleles *GC*, *IF*; *FT* eſt à *FC*, comme *FI* eſt à *OC*, comme *IT* eſt à *OT*. Mais *FT* eſt double de *FC*: donc *FI* eſt double de *OC*, & *IT* eſt double de *OT*: donc *FI* plus *IT* eſt double de *OC* plus *OT*. Mais *FI* plus *IT* a été démontré égal à *AP*: donc *AP* eſt double de *OC* plus *OT*, & par conſéquent le rayon *GC* eſt égal à *OC* plus *OT*.

Retranchant de part & d'autre *CO*, on aura *GO* égal à *OT*, les angles *OGT*, *OTG* ſeront donc égaux, & l'angle *COT* externe, ſera le double de l'angle *OGT*. Mais à cauſe des paralleles *GC*, *IF*, l'angle *FIT* eſt égal à l'angle *COT*: donc l'angle *FIT* ſera le double de l'angle *CGT*. L'angle *AFI* meſurant donc le moyen mouvement du Soleil dans l'hypotheſe elliptique, l'angle *ACG*, qui lui eſt égal, meſurera auſſi le moyen mouvement dans l'hypotheſe circulaire, & l'angle *CGT*, différence entre le vrai & le moyen mouvement dans l'hypotheſe circulaire, ſera la moitié de l'angle *FIT*, différence entre le vrai & le moyen mouvement dans l'hypotheſe elliptique. Mais nous avons démontré dans l'hypotheſe circulaire, que le mouvement apparent du Soleil près de ſon Aphélie, eſt à ſon mouvement apparent près de ſon Périhélie, en même raiſon que la grandeur apparente de ſon diametre : donc dans l'hypothese elliptique où l'inégalité apparente de ce mouvement est double de celle qui résulte de l'hypothese circulaire, le rapport du mouvement apparent du Soleil dans son Apogée & son Périgée, sera le double de celui que l'on observe dans la grandeur apparente de son diametre. On démontrera de même que dans toute autre situation du Soleil sur l'Ellipse *AIP*, supposant le mouvement moyen du Soleil égal & uniforme autour du foyer *F*, la différence entre le vrai & le moyen mouvement du Soleil, sera le double de celle qui résulte de l'hypothese circulaire, ce qui est conforme aux observations.

La nature de la courbe que le Soleil décrit par son mouvement propre, étant connuë, on trouvera l'Equation du Soleil qui convient à tous les degrés de son anomalie moyenne. Car la distance *AT* du Soleil à la Terre dans son Apogée, étant à sa distance *TP* dans son Périgée, comme 1017 à 983, on aura l'excentricité *CT* de 17 parties, dont le rayon *AC* est de 1000 ; c'est pourquoi dans le Triangle *GCT*, dont les côtés *GC* & *CT* sont connus, & l'angle *AFI* ou *ACG*, où son supplément *GCT*, qui mesure le moyen mouvement, est pris à volonté, on trouvera l'angle *CGT*, dont le double *COT* ou *FIT*, mesure l'Equation du Soleil.

Suivant cette hypothese, la plus grande Equation d'une Planete doit arriver lorsqu'elle se trouve en *B* ou en *E (Fig. 28.)* à l'extrémité du petit diametre de l'Ellipse *BE*, qui est perpendiculaire à *AP*. Car si l'on décrit un cercle par les trois points *B, F, T* ; il est évident que le centre de ce cercle se trouvera en quelque point du petit diametre *BC*, comme en *R* ; que par conséquent ce cercle touchera au point *B*, l'Ellipse *ABPE*, qui lui est circonscrite, sans la couper. L'arc *FBT*, qui est soûtendu par l'arc *FT*, & représente l'Equation de la Planete lorsqu'elle est au point *B*, sera donc par la propriété du cercle, égal à l'angle *FRT* ou *FNT*, & par conséquent plus grand que tous les autres angles, tels que *FIT* & *FKT*, qui mesurent cette Equation à différents degrés d'anomalie, & se terminent à la circonférence de cette Ellipse.

EXEMPLE.

L'excentricité de l'Orbe du Soleil *CT* ou *CF*, étant à son

demi-axe

demi-axe *AC*, comme 1685 à 100000, on cherche l'Equation du Soleil qui convient à 30 degrés d'anomalie moyenne, qui est ici représentée par l'angle *AFI* ou *ACG*. Faites comme *GC* plus *CT* ou *AT* (*Fig. 28.*) 101685, est à *GC* moins *CT* ou *TP* 98315; ainsi la tangente de 15 degrés, demi-somme des angles *CTG*, *CGT*, est à la tangente de leur demi-différence, qu'on trouvera de $14^d\ 31'\ 27''$, laquelle étant retranchée de $15^d\ 0'\ 0''$, donne l'angle *CGT* de $0^d\ 28'\ 33''$, dont le double $0^d\ 57'\ 6''$, mesure l'angle *FIT* de l'Equation du Soleil qui convient à 30 degrés.

Pour trouver la plus grande Equation du Soleil, on fera, comme *FB* ou *AC* 100000, est à *FC* 1685; ainsi le sinus total est au sinus de l'angle *FBC*, que l'on trouvera de $0^d\ 57'\ 56''$, dont le double $1^d\ 55'\ 52''$, mesure la plus grande Equation du Soleil. Adjoûtant l'angle *FBC* de $0^d\ 57'\ 56''$, à l'angle droit *ACB*, on aura l'angle *AFB* de l'anomalie moyenne, à laquelle répond sa plus grande Equation, de $90^d\ 57'\ 56''$.

Dans l'hypothese du mouvement circulaire du Soleil autour d'un Excentrique, son excentricité étant supposée de 3370 parties, dont le rayon est 100000, c'est-à-dire, le double de celle que nous avons employée dans l'hypothese elliptique simple, la plus grande Equation du Soleil est de $1^d\ 55'\ 50''\frac{1}{2}$, qui ne différe pas sensiblement de celle que nous venons de trouver; mais comme les diametres apparents sont en raison réciproque des distances, on aura la grandeur apparente du diametre du Soleil dans son Apogée à sa grandeur apparente dans son Périgée, comme 966 à 1034, c'est-à-dire, à peu-près comme 28 à 30, ce qui excede le double de la proportion que l'on observe dans ces diametres, & montre l'insuffisance de cette hypothese.

Nous avons remarqué ci-devant que pour représenter le mouvement apparent des Planetes, Ptolemée avoit imaginé un Cercle placé à distance égale de l'Excentrique & du Concentrique, sur lequel il supposoit que les Planetes avoient un mouvement périodique inégal, qui répondoit à un mouvement égal par rapport à l'Excentrique.

Cette hypothese, quelque absurde qu'elle ait paru à des Astronomes modernes, représente exactement les apparences près de l'Apogée & du Périgée. Dans les autres ſituations, elle différe peu de l'hypotheſe elliptique ſimple, à laquelle on peut la faire accorder parfaitement, en ſuppoſant que la Planete ne décrit pas un cercle exact, mais une ligne courbe telle que paroiſſant parcourir ſur la circonférence de l'excentrique, des arcs égaux en temps égaux, elle ſe conſerve toûjours à diſtance égale de ce cercle & du concentrique.

Soit *BQZ (Fig. 27.)* le Cercle concentrique, dont le centre *T* eſt celui de la Terre, *DNO* l'excentrique dont le centre *F*, qui eſt celui du moyen mouvement, ſoit placé à la diſtance *FT* du point *T*, qui ſoit telle que le mouvement apparent de la Planete dans ſon Apogée en *A*, ſoit à ſon mouvement apparent dans ſon Périgée en *P*, comme *TM* à *TD*, dont la différence eſt le double de *TF*. Cette Planete étant ſuppoſée en *A* dans ſon Apogée, à diſtance égale des points *D* & *B*, il eſt clair que ſon diametre apparent dans ſon Apogée en *A*, ſera à ſon diametre apparent dans ſon Périgée en *P*, comme *TP* eſt à *TA*, dont la différence eſt meſurée par *TF* qui eſt la moitié de la précédente.

Si l'on ſuppoſe préſentement que le moyen mouvement de la Planete depuis l'Apogée, ſoit meſuré par l'arc *DG*; prenant ſur la ligne *FG*, un point *S*, tel que ſa plus petite diſtance *SI* au Cercle concentrique *BQZ*, ſoit égale à ſa plus petite diſtance *SG* au Cercle excentrique *DNO*; je dis que la ligne *SI*, prolongée juſqu'à ce qu'elle rencontre le diametre *AP* du Cercle *ARX*, paſſera par le centre *T* de la Terre; que le point *S* ſera le vrai lieu de la Planete qui ſe rencontrera ſur une Ellipſe dont le grand axe eſt *AP*, & que l'angle *FST* meſurera ſon Equation, ou la différence entre ſon anomalie vraye & ſon anomalie moyenne, qui ſera le double de celle qui réſulte de l'excentricité ſimple.

DÉMONSTRATION.

La ligne *SI* meſure par la conſtruction, la plus proche diſtance du point *I* à la circonférence du Cercle *BQZ*; c'eſt pourquoi elle paſſe par le centre *T* de ce Cercle, qui eſt celui de la Terre.

Maintenant, puiſque *FG* & *TI*, ſont rayons de deux Cercles égaux, ſi l'on adjoûte à *TI*, la ligne *SI*, & que l'on retranche de *FG*, la ligne *GS*, égale à *SI*, on aura *TS* plus *SF*, égale à

FG plus *TI*, c'est-à-dire, au diametre du Cercle *ARX*. Le point *S* sera donc sur une Ellipse dont le grand axe est mesuré par *AP*, & dont les foyers sont en *F* & en *T*. Soit prolongé *FG* en *V*, en sorte que *SV* soit égale à *ST*, on aura *FV* égale à *FS* plus *ST*, c'est-à-dire, à l'axe *AP*. Joignés *TV*, & du point *C*, menés *CK*, parallele à *FV*, qui rencontrera *TV* au point *K*. A cause des paralleles *FV*, *CK*, on aura dans les Triangles *TFV*, *TCK*; *FV* à *CK*, comme *FT* est à *CT*. Mais *FT* est double de *CT*: donc *FV* ou *AP*, qui lui est égale, est double de *CK*, qui sera par conséquent égale au rayon *AC* du Cercle *ARX*, & le point *K* sera sur la circonférence de ce Cercle. On aura aussi, à cause des paralleles *FV*, *CK*, l'angle *ACK*, égal à l'angle *DFG*. Mais l'angle *DFG* ou l'arc *DG*, a été pris égal au moyen mouvement de la Planete depuis son Apogée: donc l'angle *ACK*, mesure sur le Cercle *ARX*, la distance moyenne de la Planete depuis son Apogée. Maintenant dans le Triangle *TSV*, les deux angles internes *SVT* & *STV*, sont égaux à l'angle externe *FST*. Mais à cause de *SV*, qui a été pris égal à *ST*, les angles *SVT*, *STV*, sont égaux entr'eux: donc l'angle *FST* est le double de l'angle *SVT* ou *CKT*, qui lui est égal, à cause des paralleles *FV*, *CK*. Mais l'angle *FST* mesure l'Equation de la Planete, ou la différence entre l'angle *DFG* de son anomalie moyenne, & l'angle *ATS* de son anomalie vraye; & l'angle *CKT* mesure l'Equation qui convient à l'angle *ACK* ou *DFG* de la même anomalie moyenne dans l'hypothese circulaire lorsque l'excentricité est simple: donc le point *S*, qui est à égale distance des Cercles *DNO*, *BQZ*, représentera sur une Ellipse, le lieu de la Planete, qui sera tel que son Equation sera le double de celle qui résulte de l'excentricité simple. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Pour déterminer géométriquement le point *S* de l'Ellipse où se trouve le Soleil sur la ligne *FG*, lorsque l'anomalie moyenne est mesurée par l'angle *DFG*, on menera *CK*, parallele à *FG*, & ayant joint *TK*, on élevera du point *K* sur cette ligne, la perpendiculaire *KS*, qui déterminera au point *S* le vrai lieu du Soleil. Car ayant prolongé *TK* & *FG*, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en *V*, on aura à cause des paralleles *FG* & *CK*; *FV* à *CK*, comme *FT* est à *FC*. Mais *FT* est double de *CT*: donc *FV* eſt double du rayon *CK*, & eſt par conſéquent égal au diametre *AP*. On aura auſſi *VK* à *KT*, comme *FC* eſt à *CT*. Mais *FC* eſt égale à *CT*: donc *VK* eſt égale à *KT*. Maintenant dans les Triangles *VKS*, *TKS*, rectangles en *K*, les côtés *VK*, *KT*, étant égaux entr'eux, & le côté *KS*, commun, on aura le côté *SV*, égal au côté *ST*; & par conſéquent *ST* plus *SF*, ſera égal à *SV* plus *SF* ou *FV*, qui a été démontré égal à *AP*. Le point *S* ſera donc ſur une Ellipſe, & repréſentera le vrai lieu du Soleil lorſque ſon anomalie moyenne eſt meſurée par l'angle *DFG*.

De l'Hypotheſe de Képler.

L'hypotheſe du mouvement des Planetes autour d'une Ellipſe, qui a été inventée par Képler, eſt fondée ſur d'autres principes, qui, quoiqu'on ne puiſſe pas par leur moyen, déterminer les Equations des Planetes avec la même préciſion géométrique que dans l'hypotheſe elliptique ſimple, ont l'avantage de s'accorder plus parfaitement aux mouvements des Planetes dont l'excentricité eſt la plus grande, en repréſentant avec à peu-près la même exactitude, les mouvements de celles dont l'excentricité eſt moindre.

Ce célébre Aſtronome, dans ſon Traité de la Phyſique Céleſte, après avoir fait voir l'inſuffiſance des hypotheſes circulaires pour repréſenter les mouvements des Planetes, ſuppoſe que le Soleil eſt placé au foyer d'une Ellipſe, ſur la circonférence de laquelle la Planete ſe meut, de maniére que les aires compriſes entre les arcs qu'elle décrit, & les rayons tirés du Soleil à la Planete, ſoient proportionnelles aux temps que la Planete employe à parcourir ces arcs; c'eſt-à-dire, que ſuppoſant le Soleil en *S* (*Fig.* 29.) à l'un des foyers de l'Ellipſe *AGPE*, & la Terre ſur la circonférence de cette Ellipſe, d'abord en *A*, & enſuite en *L*, le temps que cette Planete employe à faire ſa révolution entiére, eſt au temps qu'elle employe à parcourir l'eſpace *AL*, comme toute l'aire ou la ſurface de l'Ellipſe eſt à l'aire *LSA*; & ſuppoſant la Planete parvenuë de *L* en *G*, le temps qu'elle a employé à décrire l'arc *LG*, eſt au temps qu'elle a employé à décrire l'arc *AL*, comme l'aire *LSG*, eſt à l'aire *ASL*.

Comme la méthode que Képler a donnée pour déterminer, ſuivant cette hypotheſe, les Equations des Planetes, eſt longue

& embarrassante, divers Astronomes en ont proposé d'autres plus faciles à pratiquer; ce qui ne se peut faire cependant que par approximation: car comme il s'agit de calculer l'aire d'un Secteur formé par deux lignes droites, & terminé par un arc d'Ellipse, la résolution géométrique de ce Probleme, suppose la quadrature de l'Ellipse, qui est inconnuë, de même que celle du Cercle. Aussi tous ceux qui ont donné jusqu'à présent, la maniére de calculer les Equations des Planetes suivant cette hypothese, n'ont prétendu autre chose que de les déterminer par approximation, & avec autant de précision qu'il est nécessaire pour les calculs astronomiques.

Nous avons une de ces méthodes dans l'Astronomie de M. Gregori. Il y en a aussi une de M. de la Hire dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1710; qui paroît plus facile à pratiquer, & qui ne laisse autre chose à desirer, si ce n'est qu'on pût, par ce moyen, trouver immédiatement l'Equation d'une Planete pour chaque degré d'anomalie moyenne donné. M. Keill Professeur d'Astronomie à Oxford, en a publié une dans les Transactions Philosophiques de l'année 1713, tirée des principes de M. Newton. Enfin nous en avons proposé une dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1719, qui est aisée à pratiquer, & par laquelle on détermine pour chaque degré d'anomalie moyenne, le vrai lieu des Planetes, suivant l'hypothese de Képler.

Pour l'intelligence de cette méthode, soit *ALPE (Fig. 29.)* une Ellipse qui représente l'Orbe d'une Planete dont *C* soit le centre, & *S* un des foyers où soit placé le Soleil; en sorte que *AS* soit à *SP,* comme la plus grande distance de la Planete au Soleil à sa plus petite, c'est-à-dire, en raison réciproque du sinus des angles qui mesurent les diametres apparents de cette Planete.

Soit circonscrit à cette Ellipse, un Cercle *AHPM,* & ayant placé la Planete au point *L,* soit tirée sur le diametre *AP,* la perpendiculaire *LF,* qui, étant prolongée de l'autre sens, rencontre le Cercle en *I.*

Suivant l'hypothese de Képler, l'aire *ASL* est à l'aire entiére de l'Ellipse, comme le temps que la Planete employe à décrire l'arc *AL,* est au temps qu'elle employe à parcourir toute la circonférence de l'Ellipse. Mais le temps que la Planete employe à décrire l'arc *AL*, eſt au temps qu'elle employe à décrire l'Ellipſe, comme le moyen mouvement qui répond à l'arc *AL* du vrai mouvement, eſt au moyen mouvement qui convient à la révolution entiére, puiſque la quantité du moyen mouvement des Planetes eſt en raiſon du temps qu'elles employent à le décrire, & qu'en temps égaux, elles ont une égale quantité de moyen mouvement: donc l'aire *ASL* eſt à l'aire entiére de l'Ellipſe, comme la quantité du moyen mouvement qui répond à l'arc *AL*, eſt à celle qui convient à la révolution entiére.

Soit le moyen mouvement qui répond à l'arc *AL*, meſuré par l'arc *AD*, & le moyen mouvement qui convient à la révolution entiére, meſuré par la circonférence du cercle *AHPM*. L'arc *AD* ſera à toute la circonférence du cercle *AHPM*, comme l'aire *ASL*, eſt à l'aire entiére de l'Ellipſe *AGPE*. Mais l'arc *AD* eſt à la circonférence du cercle *AHPM*, comme l'aire du Secteur *ACD* eſt à toute l'aire du cercle: donc l'aire *ASL*, eſt à l'aire entiére de l'Ellipſe, comme l'aire *ACD*, eſt à toute l'aire du cercle. Mais par la propriété de l'Ellipſe, l'aire *ASL* eſt à l'aire entiére de l'Ellipſe, comme l'aire *ASI*, eſt à l'aire entiére du cercle: donc l'aire *ACD* eſt à toute l'aire du cercle, comme l'aire *ASI* eſt à la même aire du cercle; & par conſéquent le Secteur *ACD* eſt égal au Secteur *ASI*.

L'angle *ACD* du moyen mouvement de la Planete depuis ſon Aphélie, étant donc pris à volonté, il s'agit de trouver ſur l'Ellipſe *AGPE*, l'angle *ASL* du vrai mouvement, qui ſoit tel que tirant du point *L* ſur le grand axe *AP*, la perpendiculaire *LF*, prolongée de l'autre côté juſqu'à ce qu'elle rencontre en *I*, le cercle *AHPM*, l'aire *ASI* ſoit égale au Secteur *ACD*.

Pour déterminer la grandeur de cet angle *ASL*, il faut conſidérer que l'aire *ASI* eſt compoſée du Secteur *ACI*, & de l'eſpace triangulaire *ICS*. Le Secteur *ACD*, qui lui doit être égal, eſt auſſi compoſé du Secteur *ACI* plus le Secteur *DCI*. Retranchant de part & d'autre le Secteur *ACI*, qui eſt commun, on aura le Secteur *DCI*, égal à la ſurface du Triangle *ICS*.

Le Secteur *DCI* eſt égal à l'arc *DI*, multiplié par la moitié de *CI*. L'eſpace triangulaire *ICS*, eſt égal à la ligne *SB*, perpendiculaire ſur *ICK*, multipliée par la moitié de *CI*. Diviſant les deux termes de l'égalité par un demi *CI*, on aura l'arc *DI*, égal à la ligne *SB*.

Du point *D*, ſoit menée au diametre *IK*, la ligne *DO*, qui lui ſoit parallele, & la ligne *DT*, qui lui ſoit perpendiculaire, & qui meſure le ſinus de l'arc *DI*. La ligne *SB* étant égale à l'arc *DI*, & la ligne *OB* au ſinus *DT* de l'arc *DI*, on aura *SB* moins *OB* ou *SO*, égal à la différence entre l'arc *DI* & ſon ſinus *DT*.

Cette différence n'eſt que d'une demi-ſeconde, lorſque l'angle *DCI*, n'excede pas un degré & demi; c'eſt pourquoi on peut alors la négliger entiérement, & conſidérer les lignes *DT*, *SB*, comme égales entr'elles, & les lignes *DS*, *IB*, comme paralleles; on aura donc l'angle *CDS*, ſenſiblement égal à l'angle *DCI*. Maintenant dans le Triangle *DCS*, dont le côté *DC* eſt égal au demi-axe de l'Ellipſe, le côté *CS* meſure l'excentricité connuë, & l'angle *DCS*, compris entre ces côtés, eſt le ſupplément à deux droits de l'angle *ACD* de l'anomalie moyenne donnée, on trouvera la valeur du côté *DS*, & de l'angle *CDS* ou *DCI*, qui étant retranché de l'angle *ACD*, reſte l'angle *ACI*; & dans le Triangle *ICS*, dont les côtés *IC*, *CS* ſont connus, & l'angle *ICS*, compris entre ces côtés, qui eſt le ſupplément de l'angle *ACI*, on trouvera l'angle *ASI*. Maintenant dans le Triangle rectangle *GCS*, dont le côté *GS* eſt, par la propriété de l'Ellipſe, égal au côté *AC*, & l'excentricité *CS* eſt connuë, on aura la valeur du côté *GC*. Mais par la propriété de l'Ellipſe, *HC* eſt à *GC*, comme *IF* eſt à *FL*; & *IF* eſt à *FL*, comme la tangente de l'angle *ISF*, eſt à la tangente de l'angle *FSL*: donc *HC*, moitié du grand axe de l'Ellipſe, eſt à *GC*, moitié du petit axe, comme la tangente de l'angle *ISF*, que l'on vient de déterminer, eſt à la tangente de l'angle *FSL* ou *ASL*, qui, dans l'hypotheſe de Képler, meſure le vrai mouvement de la Planete depuis ſon Apogée ou ſon Aphélie, qui répond à l'angle *ACD* de l'anomalie moyenne donnée.

Lorſque l'angle *CDS* excede deux degrés, auquel cas la différence entre l'arc *DI* & le ſinus *DT*, correſpondant, commence à devenir plus ſenſible; il faut avoir égard à cette différence dans le calcul du vrai lieu de cette Planete. On conſidérera pour cet effet, que le rayon du cercle étant ſuppoſé de 10000000 parties, ſa circonférence eſt de 6283 1860, qui diviſés par 360, donnent la grandeur d'un degré de 174533. On aura donc l'arc de 2 degrés, de 349066, celui de 3 degrés, de 523600, & ainſi des autres.

La différence entre ces arcs & les ſinus qui leur répondent, qu'on trouvera dans les Tables des ſinus, meſure *SO*, qu'on déterminera en parties dont le rayon *AC* eſt de 10000000.

On fera donc, comme *DS*, déterminé ci-deſſus en parties ſemblables, eſt à *SO*; ainſi le ſinus total eſt au ſinus de l'angle *ODS*, qui étant retranché de l'angle *CDS*, reſte l'angle *CDO*, qui, à cauſe des paralleles *IB*, *DO*, eſt égal à l'angle *DCI*. On retranchera cet angle *DCI*, de l'angle *ACD* de l'anomalie moyenne donnée, & on aura l'angle *ACI*, par le moyen duquel on déterminera, ainſi qu'il a été expliqué ci-deſſus, l'angle *ASL* de l'anomalie vraye de la Planete. *Ce qu'il falloit trouver.*

Pour abbréger ce calcul, on a dreſſé une Table où l'on a marqué de 10 en 10 minutes, depuis 1 degré juſqu'à 13, la différence entre l'arc *DI*, & le ſinus *DT*, en parties dont le rayon eſt de 10000000, & l'on a réduit cette différence en ſecondes de degrés, qui ſont chacune de 48 $\frac{1}{2}$ de ces parties. Pour trouver la valeur de l'angle *ODS*, on ſe ſervira de la différence en parties, ainſi qu'on vient de l'enſeigner; ou bien l'on employera la différence en minutes & ſecondes, qui, lorſque l'excentricité de la Planete eſt petite, eſt ſenſiblement égale à l'angle *ODS*; mais qui, lorſque l'excentricité eſt grande, excede cet angle, que l'on trouvera, en faiſant, comme *DS* eſt au rayon *DC*; ainſi cette différence eſt à la grandeur de l'angle *ODS*.

TABLE

TABLE de la Différence entre les Arcs d'un Cercle, & les Sinus correspondants.

ARCS d'un CERCLE.		DIFFERENCE en parties, dont le rayon est 10000000.	DIFFER.[e] en minutes & secondes de degré.		ARCS d'un CERCLE.		DIFFERENCE en parties, dont le rayon est 10000000.	DIFFER.[e] en minutes & secondes de degré.	
1	0	9	0′	0″	7	0	3037	1′	3″
	10	15	0	0		10	3259	1	7
	20	23	0	0		20	3492	1	12
	30	31	0	1		30	3734	1	17
	40	42	0	1		40	3989	1	22
	50	56	0	1		50	4255	1	27
2	0	71	0	1	8	0	4532	1	33½
	10	90	0	2		10	4822	1	40
	20	113	0	2		20	5122	1	46
	30	139	0	3		30	5435	1	53
	40	169	0	3		40	5761	1	59
	50	203	0	4		50	6100	2	6
3	0	239	0	5	9	0	6450	2	13
	10	281	0	6		10	6815	2	20
	20	328	0	7		20	7194	2	28
	30	380	0	8		30	7585	2	37
	40	437	0	9		40	7985	2	45
	50	499	0	10		50	8404	2	54
4	0	567	0	12	10	0	8848	3	3
	10	641	0	13		10	9299	3	12
	20	720	0	15		20	9755	3	22
	30	807	0	17		30	10235	3	31
	40	900	0	19		40	10730	3	41
	50	1000	0	21		50	11241	3	52
5	0	1108	0	23	11	0	11767	4	3
	10	1222	0	25		10	12312	4	14
	20	1344	0	28		20	12873	4	26
	30	1474	0	30		30	13450	4	38
	40	1613	0	33		40	14042	4	51
	50	1759	0	36		50	14654	5	3
6	0	1913	0	39	12	0	15278	5	16
	10	2077	0	43		10	15921	5	29
	20	2255	0	47		20	16585	5	42
	30	2432	0	50		30	17266	5	56
	40	2625	0	54		40	17964	6	11
	50	2827	0	58		50	18680	6	26
7	0	3037	1	3	13	0	19415	6	41

On voit par cette Table, que la différence entre l'arc d'un degré & son sinus, n'est que de 9 parties, qui ne montent pas à un quart de seconde de degré ; & qu'ainsi il est inutile d'en tenir compte dans la théorie du Soleil, où dans les moyennes distances, l'arc *DI* n'excede pas un degré.

Dans la théorie des autres Planetes, cette différence est plus grande plus elles ont d'excentricité, & il est nécessaire d'y avoir égard dans la détermination du vrai lieu de ces Planetes.

EXEMPLE I.

On veut déterminer, suivant l'hypothese de Képler, l'Equation du Soleil qui convient à 30 degrés d'anomalie moyenne, supposant l'excentricité de son Orbe, de 1685 parties dont la moitié du grand axe est de 100000.

On trouvera d'abord dans le Triangle *GCS*, rectangle en *C*, dont le côté *GS*, égal à *AC*, & l'excentricité *CS*, sont connus, le côté *GC*, de 99986, qui mesure le petit demi-diametre de l'Ellipse que le Soleil décrit, ce qui servira pour le calcul de toutes les Equations du Soleil.

Dans le Triangle *DCS*, les côtés *DC* & *CS*, étant connus, de même que l'angle *DCS*, compris entre ces côtés, qui est le supplément de l'angle *ACD* de l'anomalie moyenne donnée de 30 degrés, on aura l'angle *CDS*, de $0^d\ 28'\ 33''$, qui ne différe pas d'une seconde de l'angle *CDO* ou *DCI*, à cause qu'il n'excede pas un degré. Retranchant l'angle *DCI*, de $0^d\ 28'\ 33''$, de l'angle *ACD*, de 30 degrés, on aura l'angle *ACI*, de $29^d\ 31'\ 27''$, & dans le Triangle *ICS*, dont les côtés *IC*, *CS*, sont connus, de même que l'angle *ICS*, compris entre ces côtés, qui est le supplément de l'angle *ACI*, on aura l'angle *ASI*, de $29^d\ 3'\ 19''$.

On fera ensuite, comme *HC* 100000, est à *GC* 99986 ; ainsi la tangente de l'angle *ASI*, de $29^d\ 3'\ 19''$, est à la tangente de l'angle *ASL* de l'anomalie vraye, qui répond à 30 degrés d'anomalie moyenne, qu'on trouvera de $29^d\ 3'\ 3''$. Le retranchant de 30 degrés, on aura l'Equation du Soleil qui répond à 30 degrés d'anomalie moyenne, de $0^d\ 56'\ 57''$, plus petite seulement de 9 second. que celle qui répond à la même anomalie moyenne dans l'hypothese elliptique simple.

Comme dans le calcul de cette Equation, il faut réſoudre les deux Triangles *DCS, ICS*, dans leſquels les côtés connus, ſçavoir, le rayon & l'excentricité, ſont toûjours les mêmes, il ſuffira de retrancher du logarithme de la tangente de la demi-ſomme des angles cherchés, la différence entre les logarithmes de la ſomme de ces côtés & de leur différence. On prendra auſſi la différence entre les logarithmes du grand & du petit demi-diametre de l'Ellipſe, qu'on retranchera du logarithme de la tangente de l'angle *ASI*, pour avoir le logarithme de la tangente de l'angle *ASL* du vrai mouvement cherché, ce qui rend ce calcul très-aiſé à pratiquer.

Si l'on calcule ſuivant les deux hypotheſes, l'Equation du Soleil qui répond à divers degrés de ſon Orbe, on trouve que la plus grande différence entre ces Equations, eſt à la diſtance d'environ 45 degrés de l'Apogée & du Périgée, où elle monte à 16 ou 17 ſecondes; & que dans la partie de l'Ellipſe depuis 0 juſqu'à 90 degrés ou environ, & depuis 180 juſqu'à 270 degrés, le vrai lieu du Soleil dans l'hypotheſe de Képler, précéde ſon vrai lieu dans l'hypotheſe elliptique ſimple; au lieu que dans la partie de l'Ellipſe depuis 90 juſqu'à 180 degrés, & depuis 270 juſqu'à 360, le vrai lieu du Soleil eſt plus avancé dans l'hypotheſe elliptique ſimple que dans celle de Képler, ce qui s'obſerve auſſi dans les autres Planetes.

EXEMPLE II.

On veut déterminer ſuivant l'hypotheſe de Képler, l'Equation qui répond à 60 degrés d'anomalie moyenne, ſuppoſant l'excentricité de 4344 parties, dont le rayon eſt 100000, telle qu'on l'obſerve dans l'Orbe de la Lune.

On calculera d'abord dans le Triangle *GCS*, rectangle en *C*, dont le côté *GS* eſt égal au rayon *AC*, & le côté *CS* meſure l'excentricité connuë, la valeur du côté *GC*, de 99905, qui meſure le petit demi-diametre de l'Ellipſe *AGPE*, ce qui ſervira pour le calcul de toutes les Equations.

Dans le Triangle *DCS*, les côtés *DC, CS*, étant connus, & l'angle compris *DCS*, de 120 degrés, ſupplément de l'angle *ADC* de l'anomalie moyenne, on aura l'angle *CDS*, de $2^d\ 6'\ 31''$. On cherchera dans la Table ci-devant, la différence en ſecondes entre un arc de $2^d\ 6'\ 31''$, & le ſinus correſpondant, qu'on trouvera d'un peu moins de 2 ſecondes de degré, qui meſure ſans aucune erreur ſenſible, l'angle *ODS*, à cauſe que l'excentricité *CS* eſt petite par rapport au rayon *AC*. Le retranchant de l'angle *CDS*, on aura l'angle *CDO* ou *DCI*, qui lui eſt égal, de $2^d\ 6'\ 29''$, qu'il faut retrancher de l'angle *ACD*, de 60 degrés, pour avoir l'angle *ACI* de $57^d\ 53'\ 31''$; & dans le Triangle *ICS*, dont les côtés *IC*, *CS*, ſont connus, & l'angle compris *ICS*, de $122^d\ 6'\ 29''$, ſupplément de l'angle *ACI*, on aura l'angle *CSI* ou *ASI*, de $55^d\ 49'\ 55''$. On fera enfin, comme *HC* 100000, eſt à *GC* 99905; ainſi la tangente de l'angle *ASI*, de $55^d\ 49'\ 55''$, eſt à la tangente de l'angle *ATL* du vrai mouvement, qui répond à l'anomalie moyenne donnée, qu'on trouvera de $55^d\ 48'\ 20''$. Le retranchant de 60 degrés, on aura l'Equation qui répond à 60 degrés d'anomalie moyenne, de $4^d\ 11'\ 40''$.

On calculera de la même maniére, l'Equation qui convient à divers degrés de l'Orbe de la Planete, & l'on trouvera qu'elle eſt, à 45 degrés d'anomalie moyenne, de $3^d\ 23'\ 15''$, plus petite de $1'\ 35''$ que celle qui réſulte de la même excentricité dans l'hypotheſe elliptique ſimple.

EXEMPLE III.

On veut déterminer ſuivant l'hypotheſe de Képler, l'Equation qui répond à 60 degrés d'anomalie moyenne, ſuppoſant l'excentricité de 20878 parties, dont le demi-axe eſt de 100000, telle qu'on l'obſerve dans l'Orbe de Mercure.

On trouvera d'abord dans le Triangle *GCS*, rectangle en *C*, dont les côtés *GC* & *CS*, ſont connus, le côté *GC*, de 97796. Maintenant dans le Triangle *DCS*, les côtés *DC*, *CS*, étant connus, & l'angle compris *DCS*, de 120 degrés, on aura l'angle *CDS*, de $9^d\ 17'\ 52''$, & le côté *DS*, de 111905 parties, dont *DC* eſt de 100000. On cherchera dans la Table, la différence en parties, qui convient à $9^d\ 17'\ 52''$, que l'on trouvera de 7120, qui meſurent *SO*; & l'on fera, comme *DS* 111905, eſt à *SO* 7120; ainſi le ſinus total eſt au ſinus de l'angle *ODS*, que l'on trouvera de $2'\ 11''$: ou bien on prendra dans cette Table, la différence en minutes & ſecondes, qui répond à $9^d\ 17'\ 52''$, que l'on trouvera de 2′ 27″; & l'on fera, comme *DS* 111905, eſt à *DC* 100000; ainſi 2′ 27″, ſont à l'angle *ODS*, que l'on trouvera comme ci-deſſus de 2′ 11″, que l'on retranchera de l'angle *CDS*, de 9^d 17′ 52″, & on aura l'angle *CDO* ou *DCI*, qui lui eſt égal, de 9^d 15′ 41″, qu'il faut retrancher de l'angle *ACD*, de 60^d 0′ 0″, pour avoir l'angle *ACI*, de 50^d 44′ 19″; & dans le Triangle *ICS*, dont les côtés *IC*, *CS*, ſont connus, & l'angle compris *ICS*, eſt de 129^d 15′ 41″, ſupplément de l'angle *ACI*, on aura l'angle *CSI*, de 42^d 36′ 45″$\frac{1}{2}$; & l'on fera, comme *HC* 100000, eſt à *GC* 97796; ainſi la tangente de l'angle *CSI* ou *ASI*, de 42^d 36′ 45″$\frac{1}{2}$, eſt à la tangente de l'angle *ATL* du vrai mouvement, qui convient à 60 degrés d'anomalie moyenne, qu'on trouvera de 41^d 58′ 38″. Le retranchant de 60 degrés, on aura l'Equation qui y répond, de 18^d 1′ 22″, qui eſt plus petite de 34′ 22″ que dans l'hypotheſe elliptique ſimple.

III.

Autre Hypotheſe du Mouvement apparent du Soleil autour de la Terre.

Depuis l'obſervation exacte de la grandeur apparente des diametres du Soleil, mon Pere a trouvé une autre Courbe différente de l'Ellipſe, qui ſert à repréſenter fort exactement les mouvements vrais du Soleil, & ſes diverſes diſtances à la Terre.

Il ſuppoſe que la Terre étant placée à l'un des foyers de cette Courbe, le Soleil la parcourt par ſon mouvement propre, de maniére que tirant de ſon centre aux deux foyers de la Courbe, deux lignes droites, le rectangle fait ſur ces deux lignes, ſoit toûjours égal au rectangle fait ſur la plus grande & la plus petite diſtance du Soleil à la Terre.

Soit, par exemple, *AP (Fig. 30.)* une ligne qui repréſente le grand axe de cette Courbe, dont *C* ſoit le centre, *F* un des foyers où eſt placée la Terre, *E* l'autre foyer à égale diſtance du point *C*, *H* & *L* le Soleil en deux ſituations différentes. Si l'on mene des points *H* & *L* aux foyers *E* & *F*, les lignes *HE*, *HF* & *LE*, *LF*; le rectangle ſous les lignes *HE*, *HF*, de même que ſous les lignes LE, LF, doit être égal au rectangle ſous les lignes AF, FP, qui meſurent la plus grande & la plus petite diſtance du Soleil à la Terre.

Pour déterminer les points H & L, qui répondent aux diſtances données du Soleil à la Terre, on décrira du point C, comme centre, & de l'intervalle CA ou CP, le cercle $ADPG$, & ayant pris FD à diſcrétion d'une quantité qui ſoit plus grande que FP, & plus petite que AF, on décrira du foyer F, comme centre à l'intervalle FD, l'arc de cercle DH, qui coupera le cercle $ADPG$ en D. On prolongera DF en G, & du point E, comme centre à l'intervalle ET, égal à FG, on décrira un arc de cercle TH, qui coupera le précédent DH au point H. Je dis que le point H repréſentera un des points de la Courbe cherchée où ſe rencontre le Soleil lorſque ſa diſtance à la Terre eſt meſurée par FD, car le rectangle fait ſous les lignes FH, HE, eſt égal au rectangle fait ſous les lignes FD, FG, qui par la conſtruction, leur ſont égales. Mais le rectangle fait ſous les lignes FD, FG, eſt par la propriété du cercle, égal au rectangle ſous les lignes AF, FP, qui meſurent la plus grande & la plus petite diſtance du Soleil à la Terre : donc le rectangle ſous les lignes FH, HE, eſt égal au rectangle fait ſous la plus grande & la plus petite diſtance à la Terre, & par conſéquent le Soleil eſt au point H.

On déterminera de la même maniére le point L où ſe trouve le Soleil ſur la Courbe cherchée, lorſque ſa diſtance à la Terre eſt meſurée par FI, qui eſt plus petite que ſa moyenne diſtance PC, en menant du point F à l'intervalle FI, l'arc de cercle IL, & du point E à l'intervalle EK, égal à FM, l'arc KL, qui coupera le précédent au point L cherché.

Pour déterminer préſentement l'Equation du Soleil, ou la différence entre ſon anomalie moyenne & ſon anomalie vraye, qui répond aux différents points de ſon Orbe, comme, par exemple, lorſqu'il eſt en H, on fera, comme FD ou FH, diſtance donnée du Soleil à la Terre, eſt à ſa plus grande diſtance AF; ainſi ſa plus petite diſtance FP, eſt à la grandeur de FG ou HE; & dans le Triangle EHF, dont les côtés FH, HE, ſont connus, de même que FE, qui meſure le double de l'excentricité de l'Orbe du Soleil, on trouvera l'angle EFH de ſon anomalie vraye, &

l'angle *FEH* ou *AEH* de son anomalie moyenne. La différence *EHF*, mesure l'Equation du Soleil lorsqu'il est au point *H*, à la distance donnée *FH* du Soleil à la Terre.

EXEMPLE.

La plus grande distance du Soleil à la Terre, ayant été mesurée de 1016850 parties, dont la moyenne est 1000000, & la plus petite 983150, on cherche l'anomalie vraye du Soleil, son anomalie moyenne, & son Equation lorsque sa distance est de 1010000.

On fera d'abord, comme *FH* 1010000, est à *AF* 1016850; ainsi *FP* 983150, est à *EH*, qu'on trouvera de 989818; & dans le Triangle *EHF*, dont le côté *FH* est connu de 1010000, de même que le côté *EH*, de 989818, & le côté *EF*, différence entre *AF* & *FP*, de 33700, on trouvera l'angle *EFH* de l'anomalie vraye du Soleil, de $52^d\ 26'\ 28''$, & l'angle *FEH*, de $126^d\ 0'\ 45''$, dont le supplément $53^d\ 59'\ 15''$, mesure son anomalie vraye; sa différence à $52^d\ 26'\ 28''$, est de $1^d\ 32'\ 47''$, qui représente l'Equation du Soleil qui répond à $53^d\ 59'\ 15''$ d'anomalie moyenne.

L'Equation du Soleil qui répond à la même anomalie suivant l'hypothese elliptique de Képler, est de $1^d\ 32'\ 33''$, plus petite seulement de 14 secondes que celle que nous venons de déterminer, ce qui est peu sensible dans les observations.

CHAPITRE VII.

De l'Equation des Jours, ou de la différence entre le temps véritable & le temps moyen.

IL y a diverses maniéres de compter les jours. Les uns ont pris pour le commencement du jour civil, le lever du Soleil, comme ont fait autrefois les Astronomes Chaldéens. D'autres ont choisi le coucher du Soleil, comme font encore les Italiens dans l'usage civil. D'autres enfin, ont mesuré la durée des jours, par le temps que le Soleil employe à retourner au même Méridien; & cet usage eſt reçû par le plus grand nombre des Peuples de l'Europe, avec la différence que dans l'uſage civil, le jour commence à minuit, au lieu que les Aſtronomes le font commencer à midi par le moment du paſſage du Soleil par le Méridien, & comptent 24 heures juſqu'au midi ſuivant qui termine le jour.

Quoique ces différentes maniéres de compter les jours, s'accordent enſemble en ce qu'on a choiſi pour la meſure des jours, le retour du Soleil à un grand Cercle de la Sphere, tel que l'horiſon ou le Méridien du lieu où l'on ſe trouve; cependant elles différent entr'elles dans la durée de ces jours, qui eſt beaucoup plus inégale lorſqu'on les compte depuis le lever ou le coucher du Soleil, que lorſqu'on les meſure par le retour du Soleil au Méridien.

Il eſt vrai que ſous l'Equateur, les jours qui ſe terminent à l'horiſon, ſont les plus ſimples & les plus égaux entr'eux qu'il ſoit poſſible, parce que ceux qui y habitent, ont les deux Poles de la Terre à leur horiſon, lequel concourt avec un Cercle de déclinaiſon, & coupe perpendiculairement l'Equinoctial & les paralleles que le Soleil décrit par ſa révolution journaliére. Mais hors de l'Equateur, l'horiſon coupe obliquement ces paralleles, d'où il ſuit que les jours ſont inégaux entr'eux d'autant plus qu'on eſt éloigné de l'Equateur & des Cercles Polaires, au de-là deſquels le Soleil paroît des jours entiers ſans ſe coucher, & dans d'autres jours il reſte ſous l'horiſon ſans ſe lever; ce qui rend alors les deux premiéres maniéres de compter les jours par le lever & le coucher du Soleil, abſolument impraticables.

Ainſi c'eſt avec raiſon que les Aſtronomes ont eu ſoin de rapporter leurs obſervations aux jours qui ſe meſurent par la révolution du Soleil à l'égard du Méridien, lequel coupe perpendiculairement l'Equateur, de même que les Paralleles que le Soleil décrit par ſa révolution journaliére, & qui ſont par conſéquent égaux à ceux qui ſe terminent à l'horiſon ſous l'Equateur.

Quoique ces jours ſoient, comme nous l'avons remarqué, les plus ſimples & les plus égaux entr'eux que l'on puiſſe choiſir, & que chaque jour de l'année ſoit de la même grandeur ou durée dans tous les lieux de la Terre, on ne laiſſe pas d'y obſerver deux inégalités, dont l'une dépend du mouvement annuel du Soleil ſur l'Ecliptique l'Ecliptique qui a divers degrés de vîtesse à mesure qu'il s'approche ou s'éloigne de son Apogée ou de son Périgée; l'autre est causée par l'obliquité de l'Ecliptique à l'égard de l'Equinoctial, d'où il suit que des parties égales de l'Ecliptique, parcouruës par le mouvement propre du Soleil, répondent à des parties inégales de l'Equinoctial.

Pour concevoir la différence qu'il y a entre le jour véritable & le jour moyen, on considérera que le jour véritable est mesuré par le retour du Soleil au même Méridien, qui est composé de toute la révolution de l'Equinoctial, qui est de 360 degrés plus l'arc de l'Equateur qui répond au mouvement journalier du Soleil sur l'Ecliptique.

A l'égard du jour moyen qui doit être d'une égale durée dans tout le cours de l'année, il est mesuré par la révolution de l'Equinoctial qui est de 360 degrés, joint au moyen mouvement journalier du Soleil qui est de $59' \, 8''$.

Comme la révolution de l'Equinoctial est une partie commune du jour véritable & du jour moyen, la différence entre la durée de ces deux jours, consiste toute dans celle qui est entre le moyen mouvement journalier du Soleil, qui est de $59' \, 8''$, & son mouvement journalier véritable en ascension droite.

On peut déterminer immédiatement, sans le secours d'aucune hypothese, la différence entre le jour moyen & le jour véritable dans tous les temps de l'année, en cette maniére.

Ayant observé en quelque jour de l'année, principalement vers les Equinoxes, le vrai lieu du Soleil, par le moyen de sa hauteur méridienne, ou par quelqu'autre méthode exposée ci-devant, on déterminera à pareil jour de l'année suivante, son vrai lieu, & l'on aura son moyen mouvement qui répond à l'intervalle entre ces observations, qui, étant partagé par 365, lorsque c'est une année commune, donnera le moyen mouvement journalier du Soleil, que l'on trouvera de $0^d \, 59' \, 8'' \, 15'''$, comme on peut le voir dans le second exemple de la premiére méthode du Chapitre IV.

Comme dans chaque jour moyen, le Soleil parcourt tout l'Equinoctial, ou l'un de ses paralleles, qui est de 360 degrés plus son moyen mouvement journalier, que l'on vient de trouver de $0^d \, 59' \, 8'' \, 15'''$; on fera, comme 360 degrés plus $0^d \, 59' \, 8'' \, 15'''$, ſont à 360 degrés; ainſi 24 heures ſont au temps que tout l'Equinoctial employe à paſſer par le Méridien, que l'on trouvera de $23^h\ 56'\ 4''\ 4'''$, qui meſurent à très-peu près le temps que les Etoiles fixes employent à retourner au Méridien.

La révolution journaliére des Etoiles fixes étant ainſi connuë, on obſervera dans le cours de l'année, l'heure du paſſage du Soleil & d'une ou de pluſieurs Etoiles fixes par le Méridien. Si la Pendule eſt reglée ſur le moyen mouvement, c'eſt-à-dire, ſi elle avance exactement de $3'\ 56''$ par jour, la différence entre la durée de la révolution journaliére du Soleil & de celle de l'Etoile, meſurera pour ce jour, l'Equation du temps.

Si la Pendule n'avance pas précisément de cette quantité, on prendra la différence à $3'\ 56''$, que l'on adjoûtera à la premiére différence ſi la Pendule avance de plus de $3'\ 56''$, & que l'on retranchera au contraire ſi elle avance d'une moindre quantité, & on aura l'Equation du temps qui convient au jour donné.

EXEMPLE I.

Le paſſage de *Sirius* par le Méridien a été obſervé le 19 de Décembre 1738, à $1^h\ 0'\ 31''\frac{1}{2}$ du matin, & le 20 à $0^h\ 56'\ 39''$ du matin. La différence eſt de $3'\ 52''\frac{1}{2}$, plus petite de $3''\frac{1}{2}$ que la révolution journaliére des Etoiles fixes.

Le paſſage du centre du Soleil par le Méridien a été obſervé le 19 Décembre 1738, à $0^h\ 14'\ 6''$, & le 20 à $0^h\ 14'\ 40''$. La différence eſt de $34''$, dont retranchant 3 ſecond. $\frac{1}{2}$, à cauſe que la Pendule avançoit d'une moindre quantité que la révolution des Etoiles fixes, reſte 30 ſecond. $\frac{1}{2}$, qui meſurent l'Equation du temps, qui convient à l'intervalle entre le 19 & le 20 de Décembre de l'année 1738.

EXEMPLE II.

Le paſſage d'*Aldebaran* par le Méridien a été obſervé le 16 Janvier 1733, à $9^h\ 5'\ 40''$ du ſoir, & le 20 à $8^h\ 49'\ 48''$. La différence eſt de $15'\ 52''$, qui meſurent le retardement apparent des Etoiles fixes pendant quatre jours, au lieu qu'à raiſon de $3'\ 56''$ par jour, il auroit dû être de $15'\ 44''$; la différence eſt de 8 ſecondes, dont la révolution apparente des Etoiles fixes a excedé leur révolution véritable dans l'eſpace de quatre jours.

Le paſſage du centre du Soleil par le Méridien a été obſervé le 16 Janvier 1732, à 11^h 59′ 35″$\frac{1}{2}$, & le 20 à 0^h 0′ 42″, de ſorte que la Pendule a avancé dans cet intervalle, de 1′ 6″$\frac{1}{2}$. Y adjoûtant 8 ſecondes, à cauſe que la révolution apparente de cette Etoile a ſurpaſſé la véritable, on aura 1′ 14″$\frac{1}{2}$ pour la différence entre le temps vrai & le temps moyen, qui répond à l'intervalle de 4 jours entre le 16 & le 20 Janvier.

On peut, par cette méthode, conſtruire une Table de l'Equation qui convient à tous les jours de l'année, ce qui ſervira pour pluſieurs années ſuivantes, à cauſe que le mouvement de l'Apogée du Soleil, qui eſt fort lent, n'y peut cauſer aucune différence ſenſible dans le cours de quelques années.

Mais comme le temps ne permet pas toûjours de faire les obſervations néceſſaires pour cette recherche, qui demande d'ailleurs un Quart-de-cercle exactement placé ſur le Méridien, & d'excellentes Pendules, on peut déterminer le temps moyen qui répond au véritable, par le moyen de la théorie du Soleil, en cette maniére.

On prendra pour Epoque primitive du temps moyen, celui où l'Apogée du Soleil s'eſt rencontré au commencement du Bélier, parce que le Soleil étant dans ſon Apogée, ſa longitude moyenne eſt la même que ſa longitude véritable, & que ſe trouvant en même temps dans l'interſection de l'Equinoctial avec l'Ecliptique, il n'y a aucune différence entre ſon aſcenſion droite & ſa longitude véritable; d'où il ſuit que le temps moyen a dû alors concourir avec le temps vrai : cette Epoque eſt d'ailleurs celle qu'on prend ordinairement pour principe de tous les mouvements des Aſtres.

Calculant pour tous les temps depuis cette Epoque, la longitude moyenne du Soleil, ſa longitude véritable, & ſon aſcenſion droite; la différence entre la longitude moyenne du Soleil & ſon aſcenſion droite véritable convertie en temps, donnera la différence entre le temps vrai & le temps moyen, qu'on appelle *Equation du temps*, qu'il faut adjoûter au temps vrai pour avoir le moyen lorſque la longitude moyenne eſt plus petite que l'aſcenſion droite véritable, parce que dans ce cas le lieu moyen du Soleil ſur l'Ecliptique eſt plus avancé vers l'Occident que ſon vrai lieu par rapport à l'Equateur, & qu'il faut retrancher dans le cas contraire.

Exemple III.

On veut trouver l'E'quation du temps pour le 16 & le 20 Janvier de l'année 1733.

On déterminera d'abord pour le 16 Janvier 1733, à midi, la longitude moyenne du Soleil, de $295^d\ 53'\ 49''$, & sa longitude véritable de $296^d\ 29'\ 59''$, par le moyen de laquelle on trouvera son ascension droite véritable, de $298^d\ 31'\ 24''$; la différence à $295^d\ 53'\ 49''$, est de $2^d\ 37'\ 35''$, qui, étant convertis en temps, à raison de 15 degrés par heure, donnent l'E'quation du temps de $10'\ 30''\ 20'''$, qu'il faut adjoûter au temps vrai pour avoir le moyen, à cause que la longitude moyenne est plus petite que l'ascension droite véritable.

On déterminera ensuite pour le 20 Janvier suivant, la longitude moyenne du Soleil, de $299^d\ 50'\ 23''$, & sa longitude véritable de $300^d\ 34'\ 2''$, par le moyen de laquelle on trouvera son ascension droite véritable, de $302^d\ 46'\ 40''$; la différence à $299^d\ 50'\ 23''$, est de $2^d\ 56'\ 17''$, qui, étant convertis en heures, donnent l'E'quation du temps, de $11'\ 45''\ 8'''$, qu'il faut adjoûter au temps vrai pour avoir le moyen; la différence à $10'\ 30''\ 20'''$, est de $1'\ 14''\ 18'''$, qui ne différe que de $48'''$ de celle que l'on avoit trouvée par les observations des 16 & 20 Janvier 1733.

CHAPITRE VIII.

De l'Apogée & du Périgée du Soleil, de l'Excentricité de son Orbe, & de sa plus grande Equation.

APRÈS avoir considéré la figure de l'Orbe que le Soleil décrit par son mouvement propre, il est nécessaire de déterminer la position de cet Orbe dans le Ciel, c'est-à-dire, les points de l'E'cliptique auxquels répondent son Apogée & son Périgée, qui sont à l'extrémité du grand diametre qui passe par le centre de son Orbe & celui de la Terre, de même que l'Excentricité de cet Orbe, & la plus grande E'quation du Soleil; ce que l'on peut pratiquer en diverses maniéres.

Première Méthode de déterminer l'Apogée & le Périgée du Soleil, l'Excentricité de son Orbe, & sa plus grande Equation.

On observera par un Micrometre, ou par des réticules placés au foyer d'une Lunette, la grandeur apparente du diametre du du Soleil en divers temps de l'année, & on choisira entre ces observations, celles où le diametre du Soleil a paru le plus grand ou le plus petit; car, par les regles d'Optique, la grandeur apparente d'un objet qui s'approche de nous, étant en proportion réciproque de ses diverses distances, il est évident que le Soleil est dans son Apogée lorsque son diametre nous paroît le plus petit, & qu'il est au contraire dans son Périgée lorsqu'il nous paroît le plus grand.

Comme le Soleil, vers le temps de son passage par son Apogée & son Périgée, est plusieurs jours sans que son diametre paroisse augmenter ou diminuer sensiblement de grandeur, il faut l'observer plusieurs jours avant & après, choisissant les heures où il se trouve à la même hauteur sur l'horison, afin d'éviter les erreurs causées par la parallaxe & la réfraction; on comparera ensemble ces observations, & en ayant choisi deux où le diametre du Soleil a paru de la même grandeur, on prendra l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre ces deux observations, dont la moitié étant adjoûtée au temps de la premiére, donne le temps auquel le Soleil est arrivé à son Apogée ou son Périgée. On calculera pour le temps de ces observations, le vrai lieu du Soleil par l'une des méthodes exposées ci-dessus, & on prendra le milieu qui donnera le vrai lieu de l'Apogée & du Périgée du Soleil.

Pour déterminer son Excentricité, on observera la grandeur du diametre du Soleil dans les temps où il paroît le plus grand & le plus petit; & l'on fera, comme la somme de ces diametres est à leur différence; ainsi le grand demi-diametre de son Orbe, supposé de 100000, est à un quatriéme nombre qui mesure son Excentricité.

Connoissant le rapport de l'Excentricité au grand diametre de l'Orbe du Soleil, on trouvera dans l'hypothese elliptique simple ou de Képler, l'Equation du Soleil pour tous les degrés de l'anomalie moyenne, ainsi qu'on l'a enseigné ci-dessus.

Cette méthode, quoique fort ſimple, n'a pas été pratiquée par les Anciens, qui n'avoient pas d'Inſtrument convenable pour meſurer les diametres des Aſtres avec toute l'exactitude requiſe.

Seconde Méthode de déterminer l'Apogée & le Périgée du Soleil.

On obſervera pluſieurs jours de ſuite, la hauteur méridienne apparente du bord ſupérieur & du bord inférieur du Soleil avant ſon paſſage par ſon Apogée ou ſon Périgée. Corrigeant ces hauteurs par la réfraction & la parallaxe, on aura la hauteur véritable des deux bords du Soleil, dont la différence meſure la grandeur véritable de ſon diametre. Prenant un milieu entre ces hauteurs, on aura celle du centre du Soleil, qu'il faut retrancher de la hauteur de l'Equateur du lieu où l'on a obſervé, lorſque celle de l'Equateur eſt plus grande, & dont il faut retrancher au contraire la hauteur de l'Equateur, lorſqu'elle eſt plus petite, pour avoir la déclinaiſon du Soleil, qui, dans le premier cas, eſt méridionale, & dans le ſecond cas, eſt ſeptentrionale.

On choiſira enſuite les jours auxquels le diametre du Soleil a été obſervé de la même grandeur, avant & après ſon paſſage par l'Apogée & par le Périgée. La déclinaiſon du Soleil étant connuë, & l'obliquité de l'Ecliptique, on trouvera par la Trigonométrie ſphérique, le vrai lieu du Soleil pour le temps des deux obſervations correſpondantes. La différence étant partagée en deux, & adjoûtée au vrai lieu du Soleil pour le jour de la premiére obſervation, donne le vrai lieu de ſon Apogée ou de ſon Périgée.

Troiſiéme Méthode de déterminer l'Apogée & le Périgée du Soleil.

Ayant placé au foyer d'une Lunette, deux fils perpendiculaires, dont l'un ſoit dirigé de maniére qu'un des bords du Soleil le parcoure par ſon mouvement journalier, on meſurera le temps que le Soleil employe à paſſer par l'autre fil qui repréſente un Cercle horaire, & on convertira ce temps en degrés & minutes, à raiſon de 15 degrés par heure.

Comme le Soleil décrit par ſon mouvement journalier, un Parallele dont la déclinaiſon à l'égard de l'Equateur, varie continuellement, il suit que son diametre occupe un plus grand arc de ce Parallele, à mesure qu'il s'éloigne de l'Equateur; c'est pourquoi il faut réduire le temps de son passage, converti en degrés & minutes du Parallele où il s'est trouvé dans chaque observation, en degrés & minutes d'un grand Cercle de la Sphere, en faisant, comme le sinus total est au sinus du complément de la déclinaison du Soleil au temps de l'observation ; ainsi les minutes & secondes de degré que le diametre du Soleil occupe sur le Parallele, sont aux minutes & secondes du diametre du Soleil pris sur l'Equateur.

On choisira ensuite deux observations correspondantes avant & après le passage du Soleil par son Apogée ou son Périgée, dans lesquelles le diametre du Soleil, ainsi réduit, se trouve de la même grandeur, & on calculera son vrai lieu dans ces deux différentes situations. La différence étant partagée en deux, & adjoûtée au vrai lieu du Soleil dans le temps de la premiére observation, donne le vrai lieu de l'Apogée ou du Périgée du Soleil.

Il est aisé de voir que l'exactitude avec laquelle on peut, par cette méthode, de même que par les deux précédentes, trouver le lieu de l'Apogée ou du Périgée du Soleil, dépend de la précision avec laquelle on peut déterminer la grandeur du diametre du Soleil qui, dans le cours d'une année, ne varie que d'une minute & quelques secondes.

Quatriéme Méthode de déterminer l'Apogée & le Périgée du Soleil, l'Excentricité de son Orbe, & sa plus grande Equation.

On observera plusieurs jours de suite, en diverses saisons de l'année, la hauteur méridienne du Soleil qui, étant corrigée par la réfraction & la parallaxe, & comparée à la hauteur de l'Equateur, donnera la déclinaison du Soleil au temps de ces différentes observations. Cette déclinaison étant déterminée, & connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, on calculera par la Trigonométrie sphérique, le vrai lieu du Soleil pour le temps de chaque observation. Ayant ainsi connu la quantité du mouvement du Soleil pendant l'intervalle d'un ou de plusieurs jours, on cherchera dans une autre saison, le temps où le mouvement vrai du Soleil a été d'une quantité égale à celui qu'on lui a reconnu pendant le même nombre de jours. La différence entre le vrai lieu du Soleil, déterminé par les obſervations correſpondantes, étant partagée en deux également, & adjoûtée au vrai lieu du Soleil dans la premiére obſervation, donne le vrai lieu de l'Apogée & du Périgée du Soleil.

Lorſque le mouvement vrai du Soleil en longitude, pendant un certain nombre de jours, eſt plus grand ou plus petit que dans le même nombre de jours correſpondants, d'une certaine quantité, on comparera les obſervations des jours qui précédent ou ſuivent immédiatement, & ſont telles que dans un pareil nombre de jours, la quantité du mouvement du Soleil ſoit plus grande ou plus petite que dans les deux autres obſervations.

On déterminera l'Apogée ou le Périgée, qui réſulte de ces nouvelles obſervations, & on le comparera à celui que l'on avoit déterminé en premier lieu, pour avoir la différence, dont on prendra la partie proportionnelle qui convient à la différence que l'on a trouvée entre la quantité de ces mouvements, qu'il faut appliquer au lieu de l'Apogée ou du Périgée, trouvé par l'une de ces déterminations, pour avoir le vrai lieu de l'Apogée ou du Périgée du Soleil.

On a ſuppoſé ici que la différence entre le temps vrai & le temps moyen, dans l'intervalle entre les premiéres obſervations, étoit égale à la différence entre le temps vrai & le temps moyen dans l'intervalle entre les obſervations correſpondantes, ou qu'elle n'en différoit pas ſenſiblement.

Lorſque cette différence eſt conſidérable, il faudra réduire le temps vrai de chaque obſervation, en temps moyen; on prendra enſuite le mouvement du Soleil qui convient à la différence entre le temps moyen compris dans chacun de ces intervalles, qu'on adjoûtera au vrai mouvement que l'on a trouvé dans le plus petit intervalle, pour avoir le mouvement vrai du Soleil pendant deux intervalles de temps égaux. On comparera enſuite ces vrais mouvements, pour déterminer le vrai lieu de l'Apogée ou du Périgée du Soleil, de la maniére qu'on vient de l'expliquer.

Il eſt aiſé de reconnoître que cette méthode demande un grand nombre d'obſervations de hauteurs méridiennes du Soleil, entre leſquelles l'on doit préférer celles qui ſont éloignées les unes des autres, d'un intervalle de temps conſidérable, afin que la différence entre la quantité du mouvement obſervé, ſoit plus ſenſible.

Pour

Pour déterminer l'Excentricité de l'Orbe du Soleil, & sa plus grande Equation, il faut d'abord connoître la quantité du moyen mouvement du Soleil qui répond à un nombre de jours donné, ce que l'on déterminera en observant le vrai lieu du Soleil pour tel jour que l'on voudra, principalement vers les Equinoxes, & quelques jours après, où son vrai mouvement différe fort peu du moyen, & attendant le temps où, après une ou plusieurs révolutions, il est retourné au même degré du Zodiaque où on l'avoit trouvé dans la premiére observation : car alors la quantité de son moyen mouvement est sensiblement égale à celle de son mouvement vrai ou apparent.

On prendra ensuite la différence entre le vrai lieu du Soleil, déterminé par les observations correspondantes faites avant & après le passage du Soleil par son Apogée ou son Périgée, & on aura la quantité de son mouvement vrai pendant cet intervalle, qui est mesuré par l'angle *STR (Fig. 31.)*

On prendra aussi le moyen mouvement qui convient à ce même intervalle de temps, qui est mesuré par l'angle *SFR;* la différence entre cet angle & l'angle *STR*, est égale à la somme des angles *FST*, *FRT*, qui sont égaux entr'eux, lorsque les observations ont été faites à distance égale de part & d'autre de l'Apogée.

On retranchera le lieu de l'Apogée déterminé ci-dessus, du vrai lieu du Soleil lorsqu'il étoit en *S*, & l'on aura l'angle *ATS* de son anomalie vraye, auquel cas l'angle *FST*, mesurera l'Equation du Soleil. On prolongera la ligne *TS* en *V*, en sorte que *SV* soit égale à *SF*, & on aura *TS* plus *SV*, égale à *TS* plus *SF*, qui, par la propriété de l'Ellipse, est égale à l'axe *AP*. On aura aussi, à cause des côtés *SV*, *SF*, égaux, l'angle *FVT*, égal à la moitié de l'angle *FST* de l'Equation du Soleil ; & dans le Triangle *FVT*, dont le côté *TV*, égal à *AP*, est connu, de même que les angles *TVF* & *ATS*, on trouvera la valeur de *TF*, qui mesure dans l'hypothese elliptique simple, le double de l'Excentricité *CT*. Enfin dans le Triangle *BCT*, rectangle en *C*, dont l'hypothenuse *BT* est, par la propriété de l'Ellipse, égale au demi-axe *AC*, & le côté *CT*, mesure l'Excentricité de l'Orbe du Soleil, on aura la valeur de l'angle *CBT*, dont le double mesure la plus grande Equation de l'Orbe du Soleil dans la même hypothese.

Pour trouver l'Excentricité de l'Orbe du Soleil, & sa plus grande Equation dans l'hypothese de Képler, on calculera suivant cette hypothese, par le moyen de l'Excentricité que l'on vient de déterminer, l'Equation du Soleil qui répond à sa distance à l'Apogée, qui sera plus petite de quelques secondes que celle que l'on avoit employée d'abord, & qu'il faut par conséquent y adjoûter pour avoir une Equation, par le moyen de laquelle on calculera de nouveau dans l'hypothese elliptique, l'Excentricité de l'Orbe du Soleil, & sa plus grande Equation, qui seront plus grandes que par la premiére détermination, telles qu'elles doivent être dans l'hypothese de Képler.

La raison de cette opération est que comme dans l'hypothese de Képler, l'Equation d'une Planete est plus petite que dans l'hypothese elliptique simple, il est nécessaire d'augmenter cette Excentricité pour avoir la même Equation dans ces deux hypotheses.

EXEMPLE.

Le 29 Janvier de l'année 1738, la hauteur méridienne apparente du centre du Soleil, a été observée de $23^d\ 17'\ 56''$, dont retranchant $2'\ 7''$ pour la réfraction moins la parallaxe, on aura la hauteur véritable du centre du Soleil, de $23^d\ 15'\ 49''$, qui, étant retranchés de $41^d\ 9'\ 50''$, hauteur de l'Equateur à l'Observatoire de Paris, reste $17^d\ 54'\ 1''$ pour la déclinaison méridionale du Soleil, par le moyen de laquelle, supposant l'obliquité de l'Ecliptique de $23^d\ 28'\ 20''$, telle qu'on l'a déterminée en 1738, on trouvera la longitude du Soleil, de $309^d\ 29'\ 44''$ le 29 Janvier à midi, temps vrai, qui, réduit au temps moyen, répond à $0^h\ 13'\ 51''$ après midi.

Cette observation, de même que les suivantes, ont été faites à la Ligne Méridienne qui est dans la grande Salle de l'Observatoire.

Le 14 Mai suivant, la hauteur méridienne apparente du centre du Soleil, a été observée de $59^d\ 48'\ 27''$, dont retranchant $30''$ pour la réfraction moins la parallaxe, & $41^d\ 9'\ 50''$ pour la hauteur de l'Equateur, reste $18^d\ 38'\ 7''$ pour la déclinaison septentrionale du Soleil, au moyen de laquelle on trouvera sa longitude, de $53^d\ 20'\ 47''$, le 14 Mai à midi, temps vrai, & le 13 Mai à $23^h\ 55'\ 53''$, temps moyen.

La différence entre la longitude du Soleil, qui résulte de ces observations, est de $103^d\ 51'\ 3''$, qui mesurent son vrai mouvement dans l'intervalle de 103 jours 23 heur. 42 min. 2 second. temps moyen, depuis le 29 Janvier 1738, à $0^h\ 13'\ 51''$ du soir, jusqu'au 13 Mai, à $23^h\ 55'\ 53''$.

Le 16 Août de la même année, la hauteur méridienne du centre du Soleil, a été observée de $54^d\ 56'\ 57''$, dont retranchant 36 secondes pour la réfraction moins la parallaxe, & $41^d\ 9'\ 50''$ pour la hauteur de l'Equateur, reste $13^d\ 46'\ 31''$ pour la déclinaison septentrionale du Soleil, suivant laquelle on trouvera sa longitude, de $143^d\ 17'\ 10''$, le 16 Août à midi, temps vrai, & à $0^h\ 3'\ 43''$ du soir, temps moyen.

Le 29 Novembre suivant, la hauteur méridienne du centre du Soleil, a été observée de $19^d\ 40'\ 34''$, dont retranchant $2'\ 32''$ pour la réfraction moins la parallaxe, on aura la hauteur véritable du centre du Soleil, de $19^d\ 38'\ 2''$, qui, étant retranchés de $41^d\ 9'\ 50''$, reste $21^d\ 31'\ 48''$ pour la déclinaison méridionale du Soleil, au moyen de laquelle on trouvera sa longitude, de $247^d\ 7'\ 41''$, le 29 Novembre à midi, temps vrai, & le 28 Novembre à $23^h\ 48'\ 51''$, temps moyen.

La différence entre la longitude du Soleil, qui résulte des observations du 16 Août & du 29 Novembre, est de $103^d\ 50'\ 31''$, qui mesurent le vrai mouvement du Soleil dans ce dernier intervalle de 103 jours 23 heur. 45 min. 8 second. temps moyen, lequel est plus grand que le premier, de $3'\ 6''$, auxquelles il répond $8''$ de mouvement du Soleil, qu'il faut adjoûter à $103^d\ 51'\ 3''$, différence entre la longitude du Soleil observée le 29 Janvier & le 14 Mai, parce que l'intervalle de temps entre les premiéres observations, étoit plus petit que dans les derniéres, & l'on aura $103^d\ 51'\ 11''$ pour le vrai mouvement du Soleil pendant un intervalle de temps égal à celui qui est entre les observations des 16 Août & 29 Novembre 1738.

Prenant la différence entre la longitude du Soleil, observée le 14 Mai, de $53^d\ 20'\ 47''$, & le 16 Août, de $143^d\ 17'\ 10''$, on aura le mouvement vrai du Soleil entre ces observations, de $89^d\ 56'\ 23''$, dont la moitié $44^d\ 58'\ 11''\frac{1}{2}$, étant adjoûtée à $53^d\ 20'\ 47''$, donne $98^d\ 18'\ 58''\frac{1}{2}$, qui seroit le vrai lieu de l'Apogée du Soleil, si son mouvement vrai avoit été égal dans les deux intervalles de temps égaux que l'on a comparés ensemble.

Mais comme il y a une différence de 40″, dont le premier, qui est de 103ᵈ 51′ 11″, est plus grand que le second, qu'on a trouvé de 103ᵈ 50′ 31″, on choisira deux autres observations les plus prochaines, éloignées entr'elles d'un même nombre de jours, telles que le 14 Août & le 27 Novembre.

Suivant la première de ces observations, la hauteur méridienne véritable du centre du Soleil, corrigée par la réfraction & par la parallaxe, a été déterminée de 55ᵈ 34′ 11″, & suivant la seconde, de 19ᵈ 59′ 13″, ce qui donne la longitude du Soleil le 14 Août, de 141ᵈ 20′ 45″, & le 29 Novembre, de 245ᵈ 5′ 23″.

La différence entre ces longitudes, mesure le mouvement du Soleil dans l'intervalle entre les observations des 14 Août & 27 Novembre, qui est de 103ᵈ 44′ 38″, plus petit de 6′ 33″, qu'entre le 29 Janvier & le 14 Mai.

Comparant l'observation du 14 Mai, où la longitude du Soleil étoit de 53ᵈ 20′ 47″, avec celle du 14 Août, où on l'a trouvée de 141ᵈ 20′ 45″, on aura le mouvement vrai du Soleil dans l'intervalle entre ces observations, de 87ᵈ 59′ 58″, dont la moitié 43ᵈ 59′ 59″, étant adjoûtée à 53ᵈ 20′ 47″, donne 97ᵈ 20′ 46″ pour le lieu de l'Apogée du Soleil, qui résulte de ces observations, lequel seroit le véritable, si son mouvement dans ce dernier intervalle avoit été plus grand de 40 secondes, que celui que l'on avoit trouvé entre le 16 Août & le 29 Novembre, & égal à celui que l'on avoit déterminé entre le 29 Janvier & le 14 Mai. Mais comme on l'a trouvé plus petit de 6′ 33″, c'est une preuve que l'Apogée du Soleil étoit au de-là de la première détermination: c'est pourquoi l'on fera, comme 6′ 33″ sont à 40″; ainsi 58′ 12″, différence entre les deux déterminations de l'Apogée, sont à 5′ 55″, qui, étant adjoûtées à la première, de 98ᵈ 18′ 58″, donnent le vrai lieu de l'Apogée du Soleil, de 98ᵈ 24′ 53″, ou à 8ᵈ 24′ 53″ de l'Ecrevisse, pour le temps milieu entre ces observations, qui répond à la fin de Juin 1738.

On voit par cet exemple, le degré de précision avec lequel on peut déterminer l'Apogée du Soleil par cette méthode, puisqu'une différence de 40 secondes dans le vrai lieu du Soleil, n'en produit qu'une de $5' 55''$ dans le lieu de ſon Apogée, ce qui eſt à raiſon de 18 minutes pour 2 minutes de différence dans le vrai lieu du Soleil, qui eſt une erreur beaucoup plus grande que celle que l'on peut commettre dans des obſervations faites avec préciſion. Ainſi l'on peut s'aſſûrer de trouver par cette méthode, le vrai lieu de l'Apogée du Soleil, à un quart de degré près, & même avec beaucoup plus d'exactitude, ſi l'on n'y employe que des obſervations choiſies, faites dans les circonſtances convenables, & en aſſés grand nombre pour rectifier les unes par les autres.

On déterminera auſſi par ces mêmes obſervations, l'Excentricité de l'Orbe du Soleil & ſa plus grande Equation, pourvû que l'on connoiſſe la quantité du mouvement du Soleil, compriſe dans une ou pluſieurs de ſes révolutions, comme, par exemple, depuis le 21 Mars de l'année 1737, juſqu'au 21 Mars de l'année 1738, pendant leſquels on ſuppoſe que le mouvement vrai du Soleil, qui eſt alors égal à ſon mouvement moyen, a été de $359^d 45' 42''$, à raiſon de $59' 8'' 15'''$ par jour.

On retranchera pour cet effet, le lieu de l'Apogée du Soleil, qui a été trouvé de $98^d 24' 53''$, du vrai lieu du Soleil, déterminé le 16 Août, de $143^d 17' 10''$, & l'on aura la diſtance du Soleil à ſon Apogée, ou ſon anomalie vraye, de $44^d 52' 17''$, qui eſt repréſentée par l'angle *ATS (Fig. 31.)*

On prendra enſuite la différence entre le vrai lieu du Soleil, qui étoit le 13 Mai 1738, à $23^h 55' 53''$, temps moyen, de $53^d 20' 47''$, & le vrai lieu du Soleil déterminé le 16 Août ſuivant, à $0^h 3' 43''$, temps moyen, de $143^d 17' 10''$, qu'on trouvera de $89^d 56' 23''$, qui meſurent l'angle *STR* du vrai mouvement du Soleil dans l'intervalle de 94 jours 0 heur. 7 min. 50 ſecondes.

On prendra auſſi le moyen mouvement qui répond à 94 jours 0 heur. 7 minut. 50 ſecond. à raiſon de $59' 8'' 15'''$ par jour, qu'on trouvera de $92^d 39' 23''$, qui meſurent l'angle *SFR*. La différence à l'angle *STR*, de $89^d 56' 23''$, qui eſt de $2^d 43' 0''$, eſt égale à la ſomme des angles *FST, FRT*, qui repréſentent l'Equation du Soleil en *S* & en *R*, & qui ſont égaux entr'eux lorſque les obſervations ont été faites à égale diſtance de part & d'autre de l'Apogée du Soleil. On aura donc l'angle *FST* ou *FRT*, de $1^d\ 21'\ 30''$, & prolongeant *TS* en *V*, en sorte que *SV* soit égal à *FS*, on aura *TV*, égal à *TS* plus *SF*, qui, par la propriété de l'Ellipse, est égal au grand axe *AP*. L'angle *SFV*, ou *TVF*, qui lui est égal, sera donc de $0^d\ 40'\ 45''$, moitié de l'angle *FST*, qui a été trouvé de $1^d\ 21'\ 30''$. Adjoutant l'angle *TVF*, de $0^d\ 40'\ 45''$ à l'angle *ATS*, déterminé ci-dessus, de $44^d\ 52'\ 17''$, on aura l'angle *AFV*, de $45^d\ 33'\ 2''$; & dans le Triangle *FVT*, dont le côté *TV*, égal à *AP*, est supposé de 200000, & les angles *FVT*, *VFT*, ou son supplément *AFV*, sont connus, on trouvera la distance *FT* entre les foyers *F* & *T* de l'Orbe du Soleil *ABPQ*, de 3321, dont la moitié $1660\frac{1}{2}$, mesure son Excentricité *CT*. Enfin, dans le Triangle rectangle *BCT*, dont l'hypothenuse *TB*, égale à *AC*, est de 100000, & le côté *CT*, de $1660\frac{1}{2}$, on trouvera l'angle *CBT*, de $0^d\ 57'\ 5''$, dont le double $1^d\ 54'\ 10''$, mesure la plus grande Equation du Soleil.

On a supposé dans cet Exemple, que l'Equation du Soleil étoit égale à la demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement du Soleil observé entre le 14 Mai & le 16 Juillet; ce qui seroit exact, si ces observations avoient été faites à égale distance de part & d'autre de l'Apogée. Mais comme on y a trouvé une différence de $5'\ 55''$, dont l'Apogée étoit plus près du lieu du Soleil dans l'observation du 16 Juillet, on calculera par le moyen de l'Excentricité que l'on vient de déterminer, l'Equation qui convient à $44^d\ 52'\ 17''$ moins $5'\ 55''$, que l'on trouvera de $1^d\ 21'\ 32''$, plus petite que la premiére de 8 secondes. Cette Equation représente l'Equation vraye du Soleil, qui répond à $44^d\ 52'\ 17''$ d'anomalie vraye, par le moyen de laquelle on trouvera, de la maniére qui a été enseignée ci-dessus, l'Excentricité véritable du Soleil, de 1658, & sa plus grande Equation, de $1^d\ 53'\ 59''$ dans l'hypothese elliptique simple.

Pour trouver l'Excentricité du Soleil & sa plus grande Equation dans l'hypothese de Képler, on supposera d'abord l'Excentricité du Soleil, telle qu'on la vient de déterminer, & on calculera suivant cette hypothese, l'Equation du Soleil qui répond à son anomalie vraye, de $44^d\ 52'\ 17''$, que l'on trouvera de $1^d\ 21'\ 7''$, plus petite de 15 second. que celle que l'on avoit déterminée ci-dessus, de $1^d\ 21'\ 22''$, & qu'il faut par conséquent y adjoûter pour avoir $1^d\ 21'\ 37''$, par le moyen de laquelle on calculera de nouveau l'Excentricité du Soleil, que l'on trouvera de $1662\frac{3}{4}$, & sa plus grande Equation de $1^d\ 54'\ 20''$, qui sont celles qui conviennent à l'hypothese de Képler, puisque, calculant dans cette hypothese, l'Equation de l'Orbe du Soleil qui répond à $44^d\ 52'\ 17''$ d'anomalie vraye, & supposant l'Excentricité telle qu'on la vient de déterminer, on trouvera cette Equation de $1^d\ 21'\ 22''$.

On déterminera de la même maniére, l'Excentricité & la plus grande Equation de l'Orbe du Soleil par les observations correspondantes des 29 Janvier & 29 Novembre 1738, en prenant la différence entre le vrai lieu du Soleil déterminé par ces deux observations, qui est de $297^d\ 37'\ 57''$. On prendra aussi le moyen mouvement qui convient à $303^j\ 23^h\ 35'$, intervalle de temps entre ces observations, qu'on trouvera de $299^d\ 37'\ 10''$, dont la différence à $297^d\ 37'\ 57''$, qui est de $1^d\ 59'\ 13''$, est égale à la somme des angles *FHT, FDT,* supposés égaux.

On aura donc l'angle *FHT,* de $59'\ 36''\frac{1}{2}$, & l'angle *FGT,* de $29'\ 48''\frac{1}{4}$. Retranchant le lieu de l'Apogée du Soleil, déterminé de $98^d\ 24'\ 53''$, de son vrai lieu, qui étoit le 29 Novembre de $247^d\ 7'\ 41''$, reste l'angle *ATH* de son anomalie vraye, de $148^d\ 42'\ 48''$, auquel adjoûtant l'angle *HTG* ou *FGT,* de $29'\ 48''\frac{1}{4}$, on aura l'angle *FIG,* de $149^d\ 12'\ 36''$; & dans le Triangle *FGT,* dont le côté *FG* ou *AP,* est de 200000, & les angles *FTG, FGT,* sont connus, on trouvera la distance *FT* entre les foyers, de 3387, dont la moitié $1693\frac{1}{2}$, mesure l'Excentricité *CT* de l'Orbe du Soleil.

Enfin, dans le Triangle rectangle *BCT,* dont l'hypothenuse *TB,* égale à *AC,* est de 100000, & le côté *CT,* de $1693\frac{1}{2}$, on trouvera l'angle *CBT,* de $0^d\ 58'\ 13''\frac{1}{2}$, dont le double $1^d\ 56'\ 27''$ mesure la plus grande Equation.

Comme on a supposé dans ce calcul, que l'Equation du Soleil étoit égale à la demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement du Soleil depuis le 29 Janvier jusqu'au 29 Novembre, au lieu que l'Apogée étant plus près de la derniére observation, de $5'\ 55''$, cette Equation a dû être plus grande; on calculera, par le moyen de l'Excentricité que l'on vient de déterminer, l'Equation qui convient à $149^d\ 12'\ 36''$ moins $5'\ 55''$, qu'on trouvera de

$0^d\ 59'\ 47''$, plus grande que la premiére de $10''\ \frac{1}{2}$. Cette Equation représente l'Equation vraye du Soleil, qui répond à $148^d\ 42'\ 48''$ d'anomalie vraye, par le moyen de laquelle on trouvera l'Excentricité véritable du Soleil, de $1698\ \frac{1}{2}$, & sa plus grande Equation de $1^d\ 56'\ 47''\ \frac{1}{2}$ dans l'hypothese elliptique simple.

Pour trouver l'Excentricité du Soleil, & sa plus grande Equation dans l'hypothese de Képler, on calculera suivant cette hypothese, par le moyen de l'Excentricité que l'on vient de déterminer, de $1698\ \frac{1}{2}$, l'Equation du Soleil qui répond à son anomalie vraye, de $149^d\ 12'\ 36''$, que l'on trouvera de $0^d\ 59'\ 33''$, plus petite de $14''$ que celle que l'on avoit déterminée ci-dessus, de $0^d\ 59'\ 47''$, & qu'il faut par conséquent y adjoûter pour avoir cette Equation, de $1^d\ 0'\ 1''$, par le moyen de laquelle on calculera de nouveau l'Excentricité de l'Orbe du Soleil, que l'on trouvera de $1705\ \frac{1}{2}$, & sa plus grande Equation de $1^d\ 57'\ 15''$.

Prenant un milieu entre les déterminations qui résultent de ces observations & des précédentes, on aura l'Excentricité de l'Orbe du Soleil, suivant l'hypothese elliptique simple, de 1678 parties, dont la moyenne distance du Soleil à la Terre, est de 100000, & la plus grande Equation de l'Orbe du Soleil, de $1^d\ 55'\ 23''$. On trouvera aussi, suivant l'hypothese de Képler, l'Excentricité de l'Orbe du Soleil, de 1684, & sa plus grande Equation, de $1^d\ 55'\ 48''$.

Cinquiéme Méthode de déterminer l'Apogée & le Périgée du Soleil.

On observera en divers jours de l'année, le passage par le Méridien, du Soleil & d'une Etoile fixe, dont l'ascension droite est connuë. Réduisant en degrés, l'intervalle entre ces passages, à raison de 360 degrés pour le temps que l'Etoile a employé à retourner au Méridien d'un jour à l'autre, on aura la différence entre l'ascension droite du Soleil & celle de cette Etoile au temps du passage du Soleil par le Méridien, qu'il faut appliquer à l'ascension droite de l'Etoile, pour avoir l'ascension droite du Soleil au temps de son passage par le Méridien, par le moyen de laquelle on trouvera la longitude véritable du Soleil.

On déterminera de la même maniére, le vrai lieu du Soleil pour

pour le jour ſuivant, ou tel autre que l'on voudra, & l'on aura la quantité du mouvement vrai du Soleil pendant un certain nombre de jours.

Ayant trouvé par la même méthode, le vrai lieu du Soleil dans une autre ſaiſon, on cherchera le temps où le mouvement du Soleil en longitude pendant l'intervalle d'un ou de pluſieurs jours, eſt égal au mouvement qu'on avoit obſervé pendant le même nombre de jours. La différence entre le vrai lieu du Soleil, qui réſulte des obſervations correſpondantes, étant partagée en deux également, & adjoûtée au vrai lieu du Soleil dans la premiére obſervation, donne le vrai lieu de l'Apogée ou du Périgée du Soleil.

Lorſque le mouvement vrai du Soleil pendant le même intervalle de jours, n'eſt pas préciſément de la même quantité, on comparera les obſervations des jours qui précédent ou ſuivent immédiatement, & qui ſoient telles que la quantité du mouvement, compriſe dans un même intervalle de temps, ſoit plus grande ou plus petite que dans la premiére comparaiſon. On déterminera l'Apogée ou le Périgée du Soleil, qui réſulte de ces obſervations, & on aura la différence entre les deux déterminations de l'Apogée, dont on prendra la partie proportionnelle qui convient à la différente quantité du mouvement, qu'il faut appliquer au lieu de l'Apogée ou du Périgée trouvé par l'une de ces déterminations, pour avoir le vrai lieu de l'Apogée ou du Périgée du Soleil.

On peut employer pour cette recherche, différentes Etoiles fixes, & au cas que l'on ne connoiſſe point exactement leur aſcenſion droite, il faudra obſerver la hauteur méridienne du Soleil pour avoir ſa déclinaiſon qui eſt repréſentée par *BC (Fig. 23.)* au moyen de laquelle, & de l'angle *BAC,* qui meſure l'obliquité de l'Ecliptique, on déterminera dans le Triangle ſphérique *ABC,* rectangle en *B,* l'aſcenſion droite *BA* du Soleil pour le temps de ſon paſſage par le Méridien. On prendra le même jour, la différence entre le paſſage du Soleil & de l'Etoile par le Méridien, qu'on convertira en degrés, minutes & ſecondes, à raiſon de 360 degrés pour le temps que l'Etoile a employé à retourner au Méridien d'un jour à l'autre, & l'on aura la différence entre l'aſcenſion droite du Soleil & celle de l'Etoile à midi, que l'on adjoûtera à l'aſcenſion droite du Soleil, lorſque l'Etoile a paſſé après midi, & que l'on en retranchera lorſque ſon paſſage eſt avant midi, & on aura l'aſcenſion droite véritable de l'Etoile, avec laquelle on déterminera le vrai ſieu de l'Apogée ou du Périgée du Soleil, de la maniére qu'on l'a expliqué ci-deſſus, ayant ſoin de réduire le temps vrai en temps moyen, lorſqu'il s'y trouve une différence conſidérable.

Cette méthode a beaucoup de rapport à la précédente, en ce que l'on y employe le vrai lieu du Soleil déterminé par des obſervations éloignées l'une de l'autre d'un intervalle égal avant & après ſon paſſage par ſon Apogée ou ſon Périgée; mais elle a cet avantage que dans la quatriéme méthode, il étoit néceſſaire dans chaque obſervation, de déterminer le vrai lieu du Soleil par le moyen de ſa déclinaiſon, ce qui oblige de choiſir les temps où cette déclinaiſon varie conſidérablement d'un jour à l'autre, pour avoir plus exactement ſon mouvement en longitude; au lieu que dans celle-ci l'aſcenſion droite d'une Etoile étant une fois déterminée exactement par des obſervations choiſies, on peut connoître le vrai lieu du Soleil, & par conſéquent ſon vrai mouvement dans tous les temps de l'année: car comme on ne ſuppoſe par cette méthode, que l'aſcenſion droite de l'Etoile connuë, & la différence entre le paſſage du Soleil & de cette Etoile par le Méridien, toute l'erreur qui peut ſe trouver dans cette détermination, doit provenir de ces deux cauſes.

A l'égard de celle qu'il peut y avoir dans l'aſcenſion droite de l'Etoile, elle ne peut guére monter qu'à une minute, & elle n'en cauſe qu'une de la même quantité dans la détermination de l'Apogée du Soleil.

Pour ce qui eſt de l'intervalle entre les paſſages, quand même on ſuppoſeroit qu'il y eût une erreur de 2 ſecondes, plus grande que celle qui peut réſulter des obſervations faites avec préciſion; cela n'en cauſeroit qu'une de 4 ou 5 minutes dans le premier exemple qui a été rapporté par la quatriéme méthode, ce qui eſt une exactitude plus grande que celle à laquelle on a cru juſqu'à préſent pouvoir parvenir dans la détermination du vrai lieu de l'Apogée & du Périgée du Soleil.

On peut déterminer auſſi par cette méthode, l'Excentricité de l'Orbe du Soleil & ſa plus grande Equation, de la même maniére que par la précédente.

Exemple.

Le 16 Février de l'année 1738, le paſſage de *Sirius* par le Méridien, a été obſervé $8^h\ 32'\ 45''\frac{3}{4}$ après celui du Soleil à la Pendule, ſuivant laquelle le retour de *Sirius* au Méridien, a été déterminé de $23^h\ 56'\ 30''\frac{1}{2}$.

On fera donc, comme $23^h\ 56'\ 30''\frac{1}{2}$, ſont à $8^h\ 32'\ 45''\frac{3}{4}$; ainſi 360 degrés ſont à $128^d\ 30'\ 11''$, différence d'aſcenſion droite entre *Sirius* & le Soleil, qui étant retranchée de l'aſcenſion droite de *Sirius*, qui étoit alors de $98^d\ 24'\ 5''$, à laquelle il faut adjoûter 360 degrés, reſte l'aſcenſion droite du Soleil, de $329^d\ 53'\ 54''$, par le moyen de laquelle, & de l'obliquité de l'Ecliptique, ſuppoſée de $23^d\ 28'\ 20''$, on trouvera la longitude du Soleil, de $327^d\ 42'\ 13''$, le 16 Février 1738 à midi, temps vrai, & à $0^h\ 14'\ 42''$, temps moyen.

Le 20 Juin ſuivant, le paſſage de *Sirius* par le Méridien, a été obſervé $0^h\ 38'\ 48''$ après celui du Soleil; les convertiſſant en degrés, à raiſon de 360 degrés pour $23^h\ 55'\ 50''$, temps que *Sirius* a employé à retourner au Méridien d'un jour à l'autre, on aura $9^d\ 43'\ 41''$ pour la différence d'aſcenſion droite entre *Sirius* & le Soleil, qui étant retranchée de l'aſcenſion droite de *Sirius*, qui étoit alors de $98^d\ 24'\ 20''$, reſte l'aſcenſion droite du Soleil, de $88^d\ 40'\ 39''$, par le moyen de laquelle on trouvera ſa longitude, de $88^d\ 47'\ 13''$ le 20 Juin à midi, temps vrai, & à $0^h\ 0'\ 46''$, temps moyen.

Le 10 Juillet de la même année, le paſſage de *Sirius* par le Méridien eſt arrivé $43'\ 38''$ avant celui du Soleil; les convertiſſant en degrés, à raiſon de $23^d\ 55'\ 50''$ pour 360 degrés, on aura $10^d\ 56'\ 24''$ pour la différence d'aſcenſion droite entre le Soleil & *Sirius*, qui, étant adjoûtée à l'aſcenſion droite de *Sirius*, qui étoit alors de $98^d\ 24'\ 22''$, donne l'aſcenſion droite du Soleil, de $109^d\ 20'\ 46''$, par le moyen de laquelle on trouvera ſa longitude, de $107^d\ 51'\ 4''$ le 10 Juillet à midi, temps vrai, & à $0^h\ 4'\ 34''$, temps moyen.

Enfin, le 11 Novembre, le paſſage de *Sirius* par le Méridien eſt arrivé à $15^h\ 26'\ 53''$, & celui du Soleil le 12 Novembre à $0^h\ 1'\ 47''$, le retour de l'Etoile au Méridien a été de 23^h

55′ 6″, d'où l'on trouve la différence d'aſcenſion droite entre le Soleil & *Sirius* le 12 Novembre, de 129^d 4′ 29″, qui, étant adjoûtée à celle de *Sirius*, qui étoit alors de 98^d 24′ 37″, donne l'aſcenſion droite du Soleil le 12 Novembre à midi, de 227^d 29′ 6″, par le moyen de laquelle on trouve la longitude du Soleil, de 229^d 56′ 16″ le 12 Novembre, & de 228^d 55′ 48″ le 11 Novembre à midi, temps vrai, & à 11^h 44′ 37″ du matin, temps moyen.

La différence entre la longitude du Soleil, qui réſulte des deux premiéres obſervations, eſt de 121^d 5′ 0″, qui meſurent le vrai mouvement du Soleil dans l'intervalle de 104^j 23^h 46′ 4″; & celle qui réſulte des deux derniéres, eſt de 121^d 4′ 44″, qui meſurent le vrai mouvement du Soleil dans l'intervalle de 104^j 23^h 40′ 3″, lequel eſt plus petit que le précédent de 0^h 6′ 1″, pendant leſquelles le mouvement du Soleil eſt de 15″. Les adjoûtant à la différence que l'on a trouvée par les derniéres obſervations, de 121^d 4′ 44″, on aura 121^d 4′ 59″ pour le mouvement vrai du Soleil depuis le 10 Juillet 1738 juſqu'au 11 Novembre ſuivant, qui ne différe que d'une ſeconde de celui que l'on avoit trouvé dans un intervalle de temps égal entre le 16 Février & le 20 Juin 1738.

Prenant la différence entre la longitude du Soleil, obſervée le 20 Juin, de 88^d 47′ 13″, & le 10 Juillet, de 107^d 51′ 4″, on aura 19^d 3′ 51″, dont la moitié 9^d 31′ 55″ $\frac{1}{2}$, étant adjoûtée à 88^d 47′ 13″, donne 98^d 19′ 8″, pour le lieu de l'Apogée qui eſt le véritable, parce que le mouvement vrai du Soleil a été égal de part & d'autre dans un même intervalle de temps, n'y ayant qu'une différence d'une ſeconde, qui n'en peut cauſer qu'une de 10 ſecond. dans la détermination de l'Apogée, ce qui eſt abſolument inſenſible.

Sixiéme Méthode de déterminer l'Apogée & le Périgée du Soleil, l'Excentricité de ſon Orbe, & ſa plus grande Équation.

Les méthodes que nous venons de propoſer, demandent des obſervations choiſies, faites à diſtance égale de part & d'autre de l'Apogée & du Périgée, ce que l'on ne peut par conſéquent pratiquer, qu'en comparant enſemble un grand nombre d'obſervations;

C'eſt pourquoi nous en donnerons ici une qui a été inventée par mon Pere, & rapportée dans le Journal des Sçavants de l'année 1669, par le moyen de laquelle on peut déterminer immédiatement le vrai lieu de l'Aphélie & du Périhélie des Planetes dans l'hypotheſe elliptique ſimple, y employant ſeulement trois obſervations faites en des temps différents.

Ayant décrit un cercle *CBED* (*Fig. 32.*) à volonté, on prendra de l'Occident vers l'Orient, comme de *C* vers *B*, l'arc *CB*, égal à la différence entre le vrai lieu d'une Planete, déterminé par les deux premiéres obſervations, & l'arc *BA*, égal à la différence entre le vrai lieu de cette Planete, déterminé par la ſeconde & la troiſiéme obſervation.

Du point *B*, qui eſt entre les points *C* & *A*, on menera par le centre *L* du cercle *CBED*, le diametre *BLD*, qui rencontrera ſa circonférence au point *D*. Le moyen mouvement du Soleil qui répond à l'intervalle entre chaque obſervation, étant connu, on prendra du point *D* vers *C*, l'arc *DF*, égal au moyen mouvement qui répond à l'intervalle entre la premiére & la ſeconde obſervation, & du point *D* vers *A*, l'arc *DE*, égal au moyen mouvement depuis la ſeconde juſqu'à la troiſiéme obſervation. On menera du point *B*, aux points *F* & *E*, les lignes *BFG*, *BHE*, & du point *D* aux lignes *C* & *A*, les lignes *DC*, *DA*, qui, étant prolongées, s'il eſt néceſſaire, couperont *BF*, *BE*, aux points *G* & *H*, par leſquels on menera la ligne *GH*.

Du point *B*, on tirera ſur *GH*, la perpendiculaire *BI*, & du point *I*, on menera par le centre *L* du cercle *CBED*, le diametre *MILN*, ſur lequel on prendra *IO*, égal à *IL*. L'angle *BIM*, meſurera la diſtance du Soleil à ſon Apogée dans le temps de la ſeconde obſervation. Le point *I* ſera le centre de l'Ellipſe que le Soleil décrit par ſon mouvement propre, dont le grand axe ſera égal au diametre *MN*. Le point *L* ſera placé à l'un des foyers de l'Ellipſe, & repréſentera le centre du vrai mouvement où la Terre eſt placée; & le point *O*, ſera dans l'autre foyer, autour duquel la Planete parcourt ſon moyen mouvement.

On peut employer de la même maniére, un plus grand nombre d'obſervations faites avant & après celle où le Soleil étoit en *B*, en tirant des extrémités *B* & *D* du diametre *BD*, aux points de la circonférence, qui marquent les mouvements vrais & moyens du Soleil, des lignes, dont les interſections doivent toutes ſe rencontrer ſur la ligne *HG*, prolongée de part ou d'autre.

DÉMONSTRATION.

L'angle *BHA* (*Fig. 32.*) externe, eſt égal à l'angle *BDA*, moitié de l'angle au centre *BLA*, qui meſure le mouvement vrai du Soleil depuis la ſeconde juſqu'à la troiſiéme obſervation, & à l'angle *DBE*, moitié de l'angle *DLE*, qui meſure ſon moyen mouvement; c'eſt-à-dire, au milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement.

L'angle *BGK*, externe, eſt égal à l'angle *BDC*, moitié de l'angle *BLC*, qui meſure le mouvement vrai du Soleil depuis la premiére juſqu'à la ſeconde obſervation, & à l'angle *DBF*, moitié de l'angle *DLF*, qui meſure ſon moyen mouvement; c'eſt-à-dire, au milieu arithmétique entre ces mouvements.

Du point *B*, ſoit mené aux points *A* & *C*, les lignes *BA*, *BC*. L'angle *BAH* ou *BAD*, qui eſt dans le demi-cercle *BAD*, eſt droit. L'angle *BIH*, eſt auſſi droit par la conſtruction: donc les points *B*, *A*, *H*, *I*, ſont ſur un cercle dont le diametre eſt *BH*. L'angle *BIA*, qui ſoûtend l'arc *BA*, eſt donc égal à l'angle *BHA*, qui ſoûtend le même arc *BA*, & a été trouvé égal au milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement.

On trouvera de même que les angles *BCD* ou *BCG*, & *BIG*, étant droits, les points *B*, *I*, *C*, *G*, ſont ſur un cercle dont le diametre eſt *BG*, & que l'angle *BIC*, dont le ſupplément ſoûtend l'arc *BLC*, eſt égal à l'angle *BGK*, dont le ſupplément *BGC* ſoûtend le même arc, & qui a été trouvé égal au milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement.

Du point *I*, comme centre, & de l'intervalle *IV*, égal à *LM*, ſoit décrit le cercle *VPT*. Soit fait l'angle *BIR*, égal à l'angle *IBL*, & ſoit prolongé *IR*, juſqu'à ce qu'il rencontre le cercle *VPT* en *P*. Joignés *LP*, & du point *O*, menés à *IP*, la parallele *OS*, qui rencontre en *S*, le rayon *LB*.

Les angles *IBL*, *BIP*, étant égaux par la conſtruction, les côtés *BR* & *RI*, ſeront auſſi égaux. Les retranchant des rayons égaux *LB*, *IP* des cercles égaux *CBED*, *VPT*, on aura les côtés

PR, *RL* du Triangle *PRL*, égaux; les angles *RPL*, *RLP*, seront donc égaux entr'eux. Mais l'angle *IRL* externe, est égal à la somme des angles *RPL*, *RLP*, de même qu'à la somme des angles *IBL*, *BIP*; les quatre angles *RPL*, *RLP*, *IBL*, *BIP*, seront donc égaux entr'eux, & la ligne *PL* sera parallele à la ligne *BI*.

Maintenant, à cause des paralleles *OS* & *IR*; *SL* est à *RL* ou *PR*, qui lui est égal, comme *SO* est à *RI*, comme *OL* est à *IL*. Mais *OL* est double de *IL*, donc *SL* est double de *RL* ou *PR*, & *SO* est double de *RI*: donc *SL* plus *SO* est double de *PR* plus *RI*, c'est-à-dire, du rayon *PI*, qui est égal à la moitié du diametre *VT*. Le point *S* est donc sur une Ellipse dont le grand axe est *VT*, & dont les foyers sont aux points *O* & *L*.

On démontrera de même, que si l'on fait l'angle *CIZ*, égal à l'angle *ICL*, & l'on mene *OQ*, parallele à *IZ*, qui rencontre *LC*, prolongée, s'il est nécessaire, en *Q*, le point *Q* est sur une Ellipse dont le grand axe est *VT*, & les foyers *O* & *L*. Si l'on adjoûte présentement à l'angle *SLQ* ou *BLC*, qui, par la construction, mesure l'arc *BC* du vrai mouvement du Soleil, l'angle *PLB*, on aura l'angle *CLP* ou *CXB*, qui lui est égal, à cause des paralleles *PL*, *BX*. Retranchant de l'angle *CXB*, l'angle *ICL* ou *ICX*, on aura l'angle *BIC* ou *BGZ*, qui lui est égal, que l'on a démontré mesurer le milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement du Soleil. Si l'on adjoûte de même à l'angle *BIC*, l'angle *PLB* ou *PIB*, qui lui a été démontré égal, on aura l'angle *PIC*, duquel si l'on retranche l'angle *ICL* ou *CIZ*, qui lui est égal par la construction, on aura l'angle *PIZ*, qui, à cause des paralleles *OS*, *IP*, & *OQ*, *IZ*, est égal à l'angle *SOQ*. La différence entre l'angle *BLC* ou *SLQ* du vrai mouvement, & l'angle *BIC*, milieu arithmétique entre le vrai & le moyen mouvement, est donc égale à la différence entre cet angle *BIC*, & l'angle *SOQ*, lequel représentera par conséquent dans l'hypothese elliptique, le moyen mouvement qui se fait autour d'un des foyers *O* de l'Ellipse *VST*, pendant que le vrai mouvement se fait autour de l'autre foyer *L*, qui représente le centre de la Terre. La ligne *VT*, qui passe par les foyers *O* & *L*, sera donc l'axe de l'Ellipse que le Soleil décrit par sa révolution, dont l'extrémité *V* du côté du point *O*, représente son Apogée, & l'extrémité *T*, son Périgée.

L'angle *VOS*, mesurera la distance moyenne du Soleil à son Apogée, & l'angle *VLS*, sa distance véritable, qui, étant retranchée du vrai lieu du Soleil, déterminé en *S*, donne le vrai lieu de son Apogée. *Ce qu'il falloit chercher.*

On peut déterminer géométriquement par cette méthode, le vrai lieu de l'Aphélie des Planetes & leur Excentricité, en décrivant une grande figure divisée exactement, & choisissant la détermination qui résulte des observations qui paroissent avoir été faites avec le plus d'exactitude. Mais comme on ne pourroit pas s'assûrer de trouver par ce moyen, les Aphélies des Planetes, & leur Excentricité avec toute la précision qui est à désirer, on les déterminera par le calcul, en cette maniére.

EXEMPLE.

Le 28 Juillet de l'année 1717, la hauteur méridienne véritable du centre du Soleil, a été observée de $60^d\ 11'\ 5''$, ce qui donne sa déclinaison septentrionale, de $19^d\ 1'\ 15''$, & son vrai lieu, de $4^s\ 5^d\ 7'\ 36''$, supposant l'obliquité de l'Écliptique, de $23^d\ 29'\ 0''$.

Le 13 Novembre de la même année, la hauteur méridienne du centre du Soleil, a été observée de $23^d\ 7'\ 12''$, ce qui donne sa déclinaison méridionale, de $18^d\ 2'\ 38''$, & son vrai lieu, de $7^s\ 21^d\ 0'\ 56''$.

Le 8 Février de l'année 1718, la hauteur méridienne du centre du Soleil, a été observée de $26^d\ 9'\ 52''$, ce qui donne sa déclinaison méridionale, de $14^d\ 59'\ 58''$, & son vrai lieu, de $10^s\ 19^d\ 29'\ 50''$.

Le mouvement vrai du Soleil dans l'espace de 108 jours, depuis le 28 Juillet jusqu'au 13 Novembre 1717, a donc été de $105^d\ 53'\ 20''$, & dans l'espace de 87 jours, depuis le 13 Novembre 1717 jusqu'au 8 Février 1718, de $88^d\ 28'\ 54''$.

Soit pris sur le cercle *CBED*, l'arc *BC*, de $105^d\ 53'\ 20''$, & l'arc *BA*, de $88^d\ 28'\ 54''$, & ayant tiré le diametre *BLD*, soit pris l'arc *DF*, de $106^d\ 26'\ 29''$, égal au moyen mouvement qui répond à l'intervalle entre la premiére & la seconde observation, & l'arc *DE*, de $85^d\ 46'\ 18''$, égal au moyen mouvement qui répond à l'intervalle entre la seconde & la troisiéme observation.

L'angle

L'angle *BDC* à la circonférence, étant la moitié de l'angle *BLC* au centre, qui meſure l'arc *BC*, de $105^d\ 53'\ 20''$, ſera de $52^d\ 56'\ 40''$. L'angle *DBF* à la circonférence, étant la moitié de l'angle *DLF*, qui meſure l'arc *DF*, de $106^d\ 26'\ 29''$, ſera de $53^d\ 13'\ 14''\frac{1}{2}$; & par conſéquent dans le Triangle *BGD*, dont les angles *BDG* & *DBG*, ſont connus, & le côté *BD* eſt égal au double du rayon ſuppoſé de 100000, on trouvera le côté *BG*, de 166178.

L'arc *BA* étant de $88^d\ 28'\ 54''$, & l'arc *DE*, de $85^d\ 46'\ 18''$, on aura l'angle *BDA*, de $44^d\ 14'\ 27''$, & l'angle *DBE*, de $42^d\ 53'\ 9''$; & par conſéquent dans le Triangle *BHD*, dont les angles *BDH* & *DBH*, ſont connus, de même que le côté *BD*, on trouvera le côté *BH*, de 139711. Maintenant dans le Triangle *GBH*, dont les côtés *BG*, *BH*, ſont connus, & l'angle compris *GBH*, eſt de $96^d\ 6'\ 13''\frac{1}{2}$, égal à la ſomme des angles *DBG* & *DBH*, on trouvera l'angle *BHG*, de $46^d\ 23'\ 41''\frac{1}{4}$; & dans le Triangle rectangle *BIH*, dont le côté *BH* eſt connu de 139711, & l'angle *BHG* ou *BHI*, de $46^d\ 23'\ 41''\frac{1}{4}$, on trouvera le côté *BI*, de 101166. Retranchant l'angle *DBE* ou *DBH*, qui a été trouvé de $42^d\ 53'\ 9''$, de l'angle *IBH*, de $43^d\ 36'\ 18''\frac{3}{4}$, complément de l'angle *BHI*, on aura l'angle *IBL*, de $0^d\ 43'\ 9''\frac{3}{4}$; & dans le Triangle *BIL*, dont le côté *BI* vient d'être trouvé de 101166, & le rayon *BL* eſt connu, auſſi-bien que l'angle *IBL* compris entre ces côtés, qui eſt de $0^d\ 43'\ 9''\frac{3}{4}$, on aura l'angle *BLI* ou l'arc *BM*, de $132^d\ 21'\ 23''$, qui, étant retranché du vrai lieu du Soleil en *S*, au temps de la ſeconde obſervation, qui a été trouvée de $7^s\ 21^d\ 0'\ 56''$, donne le vrai lieu de l'Apogée du Soleil en ♋ $8^d\ 39'\ 33''$. On aura auſſi *IL*, qui meſure l'Excentricité du Soleil, de 1719 parties, dont le rayon *IV* eſt 100000, d'où l'on trouve ſa plus grande Equation, de $1^d\ 58'\ 11''$.

Si, au lieu d'employer, comme on l'a fait dans le calcul du vrai lieu du Soleil, l'obliquité de l'Ecliptique, de $23^d\ 29'\ 0''$, on la ſuppoſe de $23^d\ 28'\ 30''$, comme elle étoit à peu-près en l'année 1717, on trouvera par les mêmes obſervations, le vrai lieu de l'Apogée du Soleil en ♋ $7^d\ 53'\ 48''$, moins avancé de $46'$ que par la précédente détermination; on trouvera auſſi l'Excentricité du Soleil, de 1691 parties, dont le grand demi-axe est de 100000, & sa plus grande Equation, de $1^d\ 56'\ 18''$.

Septiéme Méthode de déterminer l'Apogée & le Périgée du Soleil, l'Excentricité de son Orbe, & sa plus grande Equation.

Etant donné par trois observations quelconques, le mouvement vrai du Soleil, & le moyen mouvement qui lui répond, déterminer dans l'hypothese elliptique, le vrai lieu de l'Apogée de cette Planete, & l'Excentricité de son Orbe.

Soit dans le cercle *ABDP (Fig. 33.)* le moyen mouvement qui convient à l'intervalle de temps entre la premiére & la seconde observation, mesuré par l'angle *ACB,* & le moyen mouvement qui répond à l'intervalle entre la seconde & la troisiéme observation, mesuré par l'angle *BCD.* Ayant prolongé le rayon *BC* au de-là du centre *C,* soit fait l'angle *CAE,* égal à la demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement qui convient au premier intervalle, & soit pris l'angle *CDG,* égal à la demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement qui convient au second intervalle. Soit décrit par les points *A, B, E,* le cercle *ABHE,* dont le centre est en *V,* & par les points *B, D, G,* le cercle *BDHG,* dont le centre est en *T,* qui coupe le cercle *ABHE* au point *H.* Soit mené du point *H,* par le centre *C* du cercle *ABDP,* la ligne droite *HCF;* je dis que le point *F,* représentera l'Apogée du Soleil, le point *P,* son Périgée, le point *H,* un des foyers de l'Ellipse autour duquel le Soleil paroît décrire son vrai mouvement, & *HC,* l'Excentricité de l'Orbe du Soleil.

Pour déterminer l'Ellipse que la Planete décrit par sa révolution, soit fait l'angle *DHI,* égal à l'angle *CDH,* & ayant pris *CK* égal à *CH,* soit mené *KI,* parallele à *CD,* qui rencontrera *HI* au point *I.* Soient faits aussi les angles *BHN* & *AHL,* égaux aux angles *CBH* & *CAH,* & soient menées les lignes *KN* & *KL,* paralleles aux lignes *CB, CA,* qui rencontrent les lignes *HN* & *HL* aux points *N* & *L;* je dis que les points *I, N, L,* seront sur une Ellipse dont les foyers sont *H* & *K,* & qu'ils représentent le vrai lieu du Soleil dans les trois observations données.

DÉMONSTRATION.

A cause des paralleles *DC* & *KI*, on aura dans les Triangles *HCM*, *HKI*; *HC* est à *HK*, comme *HM* est à *HI*, comme *CM* est à *KI*. Mais *HC* est la moitié de *HK*, donc *HM* est la moitié de *HI*, & *CM* est la moitié de *KI*: donc *HM* plus *CM* est égal à la moitié de *HI* plus *KI*. Mais à cause des angles égaux *DHI*, *CDH*; *DM* est égal à *HM*: donc *DM* plus *CM*, c'est-à-dire, le rayon *CD* est égal à la moitié de *HI* plus *KI*; & par conséquent le point *I* est sur la circonférence d'une Ellipse dont un des foyers est le point *H*, & l'autre foyer, le point *K*.

Il faut présentement considérer que l'angle *BHA* est égal à l'angle *BCA*, moins les angles *CBH* & *CAH*. Mais l'angle *BEA*, qui lui est égal, à cause qu'il se termine à la même circonférence, mesure l'angle *BCA*, moins l'angle *CAE*, demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement: donc les angles *CBH* & *CAH*, mesurent aussi cette même demi-différence. Si donc l'on retranche de l'angle *BHA*, les angles *BHN* & *AHL*, qui, par la construction, ont été faits égaux aux angles *CBH* & *CAH*, on aura l'angle *LHN*, égal à l'angle *ACB* du moyen mouvement moins deux fois la demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement; d'où il suit que l'angle *LHN*, mesure le vrai mouvement de la Planete qui répond au premier intervalle.

On trouvera de même, que l'angle *BGD* ou *BHD*, qui est à la circonférence du cercle *BDHG*, est égal à l'angle *BCD*, moins l'angle *CDG*, demi-différence entre le vrai & le moyen mouvement. Mais l'angle *CDG* est égal à l'angle *CDH*, moins l'angle *GDH* ou *GBH*, qui lui est égal, à cause qu'il se termine à la même circonférence: donc l'angle *CDH* moins l'angle *GBH* ou *CBH*, mesure cette demi-différence. Si donc l'on retranche de l'angle *BHD*, l'angle *DHI*, qui a été fait égal à l'angle *CDH*, & que l'on y adjoûte l'angle *BHN*, qui a été fait égal à l'angle *CBH*, on aura l'angle *IHN*, égal à l'angle *BCD* moins deux fois l'angle *CDG*; d'où il suit que l'angle *IHN*, représente le vrai mouvement qui convient au second intervalle. Mais à cause des lignes *KL*, *KN*, *KI*, paralleles aux lignes *CA*, *CB*, *CD*, l'angle *LKN* est égal à l'angle *ACB*, & l'angle *NKI* est égal à l'angle *BCD*: donc les angles *LKN* & *NKI*, mesurent le moyen mouvement qui se fait à l'égard du foyer *K* de l'Ellipse, pendant que le Soleil décrit son vrai mouvement autour de l'autre foyer *H* de la même Ellipse; d'où il résulte que le point *F*, représente le vrai lieu de l'Apogée, le point *P*, le Périgée, *CH*, l'Excentricité de l'Orbe de la Planete, & les points *L*, *N*, *I*, son vrai lieu dans les trois observations proposées. *Ce qu'il falloit démontrer.*

EXEMPLE.

Le vrai lieu du Soleil ayant été déterminé en 1722, le 16 Mai, de $1^f\ 25^d\ 10'\ 54''$, le 18 Juillet, de $3^f\ 25^d\ 22'\ 0''$, & le 30 Août, de $5^f\ 6^d\ 40'\ 6''$, on cherche le vrai lieu de l'Apogée du Soleil, & l'Excentricité de son Orbe.

L'angle *ACB* du moyen mouvement du Soleil, depuis le 16 Mai 1722 jusqu'au 18 Juillet suivant, est de $62^d\ 5'\ 44''$, dont retranchant le vrai mouvement du Soleil dans cet intervalle, qui a été observé de $60^d\ 11'\ 6''$, reste la différence entre le vrai & le moyen mouvement, de $1^d\ 54'\ 38''$, dont la moitié $57'\ 19''$, étant adjoûtée à $60^d\ 11'\ 6''$, ou retranchée de $62^d\ 5'\ 44''$, donne *AEB* ou *AHB*, de $61^d\ 8'\ 25''$.

L'angle *BCD* du moyen mouvement, depuis le 18 Juillet 1722 jusqu'au 30 Août suivant, est de $42^d\ 22'\ 59''$, dont retranchant le vrai mouvement du Soleil dans cet intervalle, qui est de $41^d\ 18'\ 6''$, reste la différence entre le vrai & le moyen mouvement, de $1^d\ 4'\ 53''$, dont la moitié $32'\ 26''\frac{1}{2}$, étant retranchée de l'angle *BCD*, de $42^d\ 22'\ 59''$, donne l'angle *BGD* ou *BHD*, de $41^d\ 50'\ 32''\frac{1}{2}$.

L'angle *ACB* étant de $62^d\ 5'\ 44''$, & l'angle *BCD*, de $42^d\ 22'\ 59''$, on trouvera l'angle *ABC*, de $58^d\ 57'\ 8''$, & l'angle *CBD*, de $68^d\ 48'\ 30''\frac{1}{2}$, dont la somme $127^d\ 45'\ 38''\frac{1}{2}$, mesure l'angle *ABD*. Soient menées du centre *C*, par les centres *V* & *T*, les lignes *CVR*, *CTO*, qui partagent les cordes *AB*, *BD*, en deux parties égales.

L'angle *BVR*, moitié de l'angle au centre *AVB*, est égal à l'angle *AHB*, de $61^d\ 8'\ 25''$, qui est à la circonférence. L'angle *BTO* sera par la même raison, égal à l'angle *BHD*, de $41^d\ 50'\ 32''\frac{1}{2}$; on aura donc l'angle *ABV*, de $28^d\ 51'\ 35''$, &

l'angle *TBD*, de $48^d\ 9'\ 27''\frac{1}{2}$, dont la somme $77^d\ 1'\ 2''\frac{1}{2}$, étant retranchée de l'angle *ABD*, de $127^d\ 45'\ 38''\frac{1}{2}$, reste l'angle *TBV*, de $50^d\ 44'\ 36''$.

L'angle *ACB*, étant de $62^d\ 5'\ 44''$, on aura l'angle *BCR*, de $31^d\ 2'\ 52''$, dont le sinus *BR* est de 51575 parties, dont le rayon *BC* est 100000. On aura aussi l'angle *BCO*, moitié de l'angle *BCD*, de $21^d\ 11'\ 29''\frac{1}{2}$, dont le sinus *BO* est 36149; & l'on fera, comme le sinus de l'angle *BVR* ou *AHB*, de $61^d\ 8'\ 25''$, est au sinus total; ainsi *BR* 51575, est à *BV*, qu'on trouvera de 58888. On fera aussi, comme le sinus de l'angle *BTO* ou *BHD*, de $41^d\ 50'\ 32''\frac{1}{2}$, est au sinus total; ainsi *BO* 36149, est à *BT*, qu'on trouvera de 54190.

Maintenant, dans le Triangle *BVT*, dont le côté *BV* est de 58888, le côté *BT*, de 54190, & l'angle *TBV*, compris entre ces côtés, a été déterminé de $50^d\ 44'\ 36''$, on aura l'angle *BTV*, de $69^d\ 38'\ 7''$, qui est la moitié de l'angle *BTH*, qui sera par conséquent de $139^d\ 16'\ 14''$; on aura donc l'angle *TBH*, de $20^d\ 21'\ 53''$, qui, étant adjoûté à l'angle *TBD*, de $48^d\ 9'\ 27''\frac{1}{2}$, donne l'angle *DBH*, de $68^d\ 31'\ 20''\frac{1}{2}$: mais l'angle *BHD*, est de $41^d\ 50'\ 32''\frac{1}{2}$, on aura donc l'angle *BDH*, de $69^d\ 38'\ 7''$, dont retranchant l'angle *CBD* ou *CDB*, de $68^d\ 48'\ 30''\frac{1}{2}$, reste l'angle *CDH*, de $49'\ 36''\frac{1}{2}$. On fera présentement, comme le sinus de l'angle *BHD*, de $41^d\ 50'\ 32''$, est au sinus de l'angle *DBH*, de $68^d\ 31'\ 20''\frac{1}{2}$; ainsi *BD* 72298, est à *HD*, qu'on trouvera de 100854; & dans le Triangle *CDH*, dont le côté *CD* est connu de 100000, le côté *DH*, de 100854, & l'angle compris *CDH*, de $49'\ 36''\frac{1}{2}$, on trouvera l'angle *DHC*, de $59^d\ 4'\ 37''$, dont retranchant l'angle *DHI*, égal à l'angle *CDH*, de $49'\ 36''\frac{1}{2}$, reste l'angle *FHI*, de $58^d\ 15'\ 0''$, distance de l'Apogée du Soleil à son vrai lieu dans la troisiéme observation, qui étoit en ♍ $6^d\ 40'\ 6''$. On aura donc le vrai lieu de l'Apogée du Soleil en ♋ $8^d\ 25'\ 6''$. On trouvera aussi *CH*, moitié de l'Excentricité de son Orbe, de 1682 parties, dont le rayon est 100000; d'où l'on tire sa plus grande Equation, de $1^d\ 55'\ 39''$.

Cette méthode a beaucoup de rapport à la précédente, mais le calcul en est un peu plus long; on peut l'employer très-utilement pour trouver les observations qui sont les plus favorables pour la recherche de l'Aphélie & du Périhélie des Planetes, parce que leur détermination se faisant par l'intersection de deux cercles, il est certain que l'on trouvera plus de précision par les observations faites dans les lieux où l'intersection de ces cercles est la moins oblique, & la plus approchante de la perpendiculaire.

Huitiéme Méthode de déterminer l'Apogée & le Périgée du Soleil, l'Excentricité de son Orbe, & sa plus grande Equation, dans l'hypothese de Képler.

On a donné dans les deux méthodes précédentes, la maniére de déterminer géométriquement, dans l'hypothese elliptique simple, l'Apogée & le Périgée du Soleil, par trois seules observations faites en quelqu'endroit que ce soit de leurs Orbes.

Ces méthodes peuvent s'appliquer au Soleil & aux autres Planetes dont les Orbes sont fort peu excentriques, mais l'on a remarqué que dans les Orbes des Planetes dont l'Excentricité est grande, telles que Mars & Mercure, les Equations qui résultent de l'hypothese de Képler, représentent plus parfaitement la différence entre leur vrai & leur moyen mouvement. Nous avons donc jugé qu'il seroit très-utile d'avoir une méthode pour déterminer, suivant cette hypothese, l'Aphélie & le Périhélie des Planetes, en ne supposant qu'un petit nombre d'observations : car comme elles font leurs révolutions autour du Soleil, & que l'on ne peut déterminer que rarement leur vrai lieu vû du Soleil, par des observations immédiates, comme nous l'expliquerons dans la suite ; on ne peut pas y employer avec une précision suffisante, les autres méthodes qui demandent un grand nombre d'observations.

Comme dans l'hypothese de Képler, on ne peut pas calculer géométriquement, les vrais lieux des Planetes, mais seulement par approximation, il ne faut pas non plus espérer de déterminer géométriquement, suivant cette hypothese, l'Apogée & le Périgée du Soleil, mais seulement par approximation, ce qui suffit pour cette recherche, pourvû que l'on puisse approcher à l'infini de la précision géométrique.

On considérera pour cet effet, que la distance des Planetes au Soleil, lorsqu'elles sont dans leurs Aphélie & Périhélie, devant être toûjours la même, dans quelque hypothese que ce soit, leurs Orbes doivent avoir aussi une même Excentricité, & qu'ainsi l'Ellipse qu'elles décrivent, suivant l'hypothese de Képler, doit être la même que suivant l'hypothese elliptique simple. Le vrai lieu des Planetes suivant l'une & l'autre de ces deux hypotheses, doit donc être sur la même Ellipse, mais distribué diversement, parce que, suivant Képler, les Planetes parcourent des aires égales en temps égaux, au lieu que, suivant l'hypothese elliptique simple, le moyen mouvement de ces Planetes se distribuë également à l'égard d'un des foyers de l'Ellipse, pendant que le vrai ou apparent se fait autour de l'autre foyer.

On supposera donc d'abord le lieu de l'Aphélie d'une Planete & l'Excentricité de son Orbe, tels qu'on les a trouvés dans l'hypothese elliptique simple, par trois observations données suivant l'une des deux méthodes précédentes, & l'on calculera dans l'hypothese de Képler, la distance moyenne de cette Planete à son Aphélie qui répond à sa distance vraye observée.

La distance moyenne de la Planete à son Aphélie, étant ainsi connuë dans les trois observations données, on déterminera, suivant l'hypothese elliptique simple, le vrai lieu qui y répond, qui sera différent de celui qui a été observé, & l'on se servira de ce vrai lieu pour déterminer géométriquement dans l'hypothese elliptique simple, le lieu de l'Aphélie qui en résulte, & l'Excentricité de l'Orbe, qui seront aussi différents de ceux que l'on avoit d'abord supposés, & qui représenteront à peu-près le vrai lieu de l'Aphélie de la Planete, & l'Excentricité de son Orbe, qui répondent au vrai lieu de cette Planete dans l'hypothese de Képler.

Pour une plus grande exactitude, on employera l'Aphélie & l'Excentricité que l'on vient de trouver, pour calculer de nouveau, suivant l'hypothese de Képler, le lieu moyen de la Planete qui répond à son vrai lieu dans les trois observations données, & on aura la distance moyenne de la Planete à son Aphélie, par le moyen de laquelle on déterminera, suivant l'hypothese elliptique simple, le vrai lieu de la Planete qui y répond.

On calculera ensuite, suivant la sixiéme méthode, le lieu de l'Aphélie qui convient au vrai lieu de la Planete ainsi déterminé, & l'Excentricité de son Orbe, qui different de ceux que l'on avoit trouvés par les deux opérations précédentes, & qui approcheront des véritables avec toute la précision que l'on peut souhaiter.

On peut recommencer ce calcul autant de fois que l'on voudra, & approcher ainsi à l'infini de la précision géométrique, mais cela est inutile dans cette recherche.

Exemple.

Le vrai lieu du Soleil ayant été déterminé le 28 Juillet 1717, de $4^{s}\ 5^{d}\ 7'\ 36''$, le 13 Novembre suivant, de $7^{s}\ 21^{d}\ 0'\ 56''$, & le 8 Février 1718, de $10^{s}\ 19^{d}\ 29'\ 50''$, on veut trouver, suivant l'hypothese de Képler, l'Apogée du Soleil, & l'Excentricité de son Orbe.

On employera d'abord l'Apogée qui résulte de l'hypothese elliptique simple, qu'on a trouvé par les mêmes observations dans l'exemple de la sixiéme méthode, en ♋ $8^{d}\ 39'\ 33''$, & l'Excentricité qui a été déterminée de 1719 parties, dont le rayon est 100000, & on aura la distance véritable du Soleil à son Aphélie dans la premiére observation, de $0^{s}\ 26^{d}\ 28'\ 3''$, dans la seconde, de $4^{s}\ 12^{d}\ 21'\ 23''$, & dans la troisiéme, de $7^{s}\ 10^{d}\ 50'\ 17''$.

Si l'on suppose présentement, que le point L *(Fig. 29.)* représente dans l'hypothese de Képler, le vrai lieu du Soleil sur son Orbe ALP, supposé elliptique, en sorte que l'angle ASL, mesure son anomalie vraye dans la premiére observation, qui a été trouvée de $26^{d}\ 28'\ 3''$, & CS, son Excentricité qui est de 1719 parties, dont AC est 100000. Ayant circonscrit à l'Ellipse ALP, le cercle AHP, on menera par le point L, la ligne FI, parallele à CH. On joindra LC, LS, IC, IS, on menera SB, perpendiculaire sur ICK, & ayant pris SO, égal à la différence entre le sinus de l'arc CIS, & l'arc qui lui répond, on menera OD, parallele à CI, & on joindra DC & DS. L'angle ACD, mesurera l'anomalie moyenne du Soleil, qui répond à l'angle ASL de son anomalie vraye, comme il a été démontré *(page 143.)*

Pour la déterminer, on cherchera dans le Triangle GCS, rectangle en C, dont le côté GS, égal à AC, est de 100000, & le côté CS, de 1719, la valeur de GC, que l'on trouvera de 99985; & l'on fera, comme GC 99985, est à HC 100000; ainsi la tangente de l'angle ASL, de $26^{d}\ 28'\ 3''$, qui mesure

l'anomalie

l'anomalie vraye du Soleil dans la premiére obſervation, eſt à la tangente de l'angle *ASI*, que l'on trouvera de $26^d\ 28'\ 15''$. On fera enſuite, comme *CI* 100000, eſt à *CS* 1919; ainſi le ſinus de l'angle *ASI*, de $26^d\ 28'\ 15''$, eſt au ſinus de l'angle *CIS*, de $0^d\ 26'\ 20''\frac{1}{2}$, qui, étant adjoûté à l'angle *ASI*, donne l'angle *ACI* ou *AVD*, de $26^d\ 54'\ 35''\frac{1}{2}$. On retranchera de l'angle *AVD*, l'angle *SDV*, oppoſé au côté *SO*, lequel a été pris égal à la différence entre le ſinus de l'angle *CIS*, & de l'arç qui lui répond, qui, dans cet exemple, n'eſt pas d'une ſeconde entiére, comme on peut le voir dans la Table *(p. 145.)* c'eſt pourquoi on peut la négliger, & l'on aura l'angle *ASD*, de $26^d\ 54'\ 35''\frac{1}{2}$; & dans le Triangle *CDS*, on fera, comme *CD* 100000, eſt à *CS* 1919; ainſi le ſinus de l'angle *ASD*, de $26^d\ 54'\ 35''\frac{1}{2}$, eſt au ſinus de l'angle *CDS*, de $0^d\ 26'\ 44''\frac{1}{2}$, qui, étant adjoûté à l'angle *ASD*, donne l'angle *ACD*, qui meſure dans l'hypotheſe de Képler, la diſtance moyenne du Soleil à ſon Apogée dans la 1.ere obſervation, de $27^d\ 21'\ 20''$.

Cette diſtance moyenne étant connuë, on trouvera dans l'hypotheſe elliptique ſimple, le vrai lieu du Soleil qui y doit répondre ſur l'orbe *ASP (Fig. 31.)* en retranchant de l'angle *ACE*, l'angle *ECI*, que l'on fera de $0^d\ 53'\ 29''$, double de l'angle *CET*, qui a été trouvé de $0^d\ 26'\ 44''\frac{1}{2}$, & menant du point *T*, la ligne *TS*, parallele à la ligne *CI*; l'angle *ACI* ou *ATS*, qui lui eſt égal, meſurera la diſtance véritable du Soleil à ſon Apogée, qui ſera de $26^d\ 27'\ 51''$, plus petite de 12 ſecondes que ſuivant l'hypotheſe de Képler, & le point *S*, marquera le vrai lieu du Soleil, ſuivant l'hypotheſe elliptique ſimple, qui doit différer de ſon lieu moyen, du double de l'Equation qui ſe fait au centre.

On trouvera de la même maniére dans la ſeconde obſervation, la diſtance du Soleil à ſon Apogée, de $132^d\ 21'\ 38''\frac{1}{2}$, plus grande de $15''\frac{1}{2}$ que ſuivant l'hypotheſe de Képler; & dans la troiſiéme, de $220^d\ 50'\ 2''$, plus petite de $15''$ que ſuivant cette hypotheſe. Ces diſtances étant connuës, on les adjoûtera au lieu de l'Apogée du Soleil déterminé ci-deſſus de $3^f\ 8^d\ 39'\ 33''$, pour avoir le lieu du Soleil dans l'hypotheſe elliptique, qui répond à ſon vrai lieu dans l'hypotheſe de Képler, dans la premiére obſervation, de $4^f\ 5^d\ 7'\ 24''$, dans la ſeconde, de $7^f\ 21^d\ 1'\ 11''\frac{1}{2}$, & dans la troiſiéme, de $10^f\ 19^d\ 29'\ 35''$.

Le lieu du Soleil étant ainsi déterminé dans l'hypothese elliptique simple, on trouvera de la maniére qui a été enseignée par la sixiéme méthode, la distance véritable du Soleil à son Apogée dans la seconde observation, de $132^d\ 28'\ 46''$, dont il faut retrancher $15''\frac{1}{2}$, à cause que son vrai lieu est plus avancé de cette quantité, suivant l'hypothese elliptique, que suivant celle de Képler; & l'on aura la distance véritable du Soleil à son Apogée, suivant l'hypothese de Képler dans la seconde observation, de $132^d\ 28'\ 30''\frac{1}{2}$, qui, étant retranchée de son vrai lieu, qui a été observé alors de $7^f\ 21^d\ 0'\ 56''$, donne le vrai lieu de l'Apogée du Soleil, suivant l'hypothese de Képler, de $3^f\ 8^d\ 32'\ 26''$, moins avancé de $7'\ 7''$ que si le mouvement du Soleil se fût fait suivant l'hypothese elliptique simple. On trouvera aussi l'Excentricité de son Orbe, de 1713 parties, plus petite de 6 parties, que suivant cette hypothese, & sa plus grande Equation, de $1^d\ 57'\ 48''$.

Le lieu de l'Apogée du Soleil, & l'Excentricité de son Orbe, étant ainsi connus dans l'hypothese de Képler, on prendra la distance du Soleil à son Apogée, qui a été trouvée dans la seconde observation, de $132^d\ 28'\ 30''\frac{1}{2}$, & que l'on trouvera dans la première, de $26^d\ 35'\ 10''\frac{1}{2}$, & dans la troisiéme, de $220^d\ 57'\ 24''\frac{1}{2}$. On calculera ensuite, comme ci-devant, la distance moyenne du Soleil à son Apogée, suivant l'hypothese de Képler, que l'on trouvera dans la premiére observation, de $27^d\ 28'\ 30''\frac{1}{4}$, dans la seconde, de $132^d\ 34'\ 37''\frac{3}{4}$, & dans la troisiéme, de $239^d\ 40'\ 56''$. Cette distance moyenne étant connuë, on trouvera la distance vraye du Soleil à son Apogée, suivant l'hypothese elliptique dans la premiére observation, de $26^d\ 34'\ 58''\frac{1}{4}$, dans la seconde, de $132^d\ 28'\ 47''\frac{1}{4}$, & dans la troisiéme, de $220^d\ 57'\ 9''$. L'adjoûtant au lieu de l'Apogée, déterminé ci-dessus de $3^f\ 8^d\ 32'\ 26''$, on aura la longitude du Soleil dans l'hypothese elliptique, qui répond à sa vraye longitude, suivant l'hypothese de Képler, dans la premiére observation, de $4^f\ 5^d\ 7'\ 24''\frac{1}{4}$, dans la seconde, de $7^f\ 21^d\ 1'\ 13''\frac{1}{4}$, & dans la troisiéme, de $10^f\ 19^d\ 29'\ 35''$.

On calculera ensuite, suivant la sixiéme méthode, la distance du Soleil à son Apogée, que l'on trouvera dans la seconde observation, de $132^d\ 27'\ 39''$, dont retranchant $17''$, différence entre le vrai lieu du Soleil ſuivant les deux hypotheſes, on aura la diſtance véritable du Soleil à ſon Apogée dans l'hypotheſe de Képler, de $132^d\ 27'\ 22''$, qui, étant retranchée du vrai lieu du Soleil dans la ſeconde obſervation, qui étoit de $7^s\ 21^d\ 1'\ 13''\frac{1}{4}$, donne le vrai lieu de l'Apogée du Soleil, ſuivant l'hypotheſe de Képler, en ♋ $8^d\ 33'\ 34''$, plus avancé de $1'\ 8''$, que par la comparaiſon précédente, & moindre de $6'$ que ſuivant l'hypotheſe elliptique ſimple où on l'a trouvé en ♋ $8^d\ 39'\ 33''$. On aura auſſi l'Excentricité de l'Orbe du Soleil, de 1713 parties, dont le demi-axe eſt de 100000, & ſa plus grande Équation, de $1^d\ 57'\ 48''$, de même que par le calcul précédent.

L'on voit par cet Exemple, que la différence entre le lieu de l'Apogée du Soleil, qui réſultoit de l'hypotheſe elliptique ſimple & de celle de Képler, étoit par le premier calcul, de $7'\ 7''$, & par le ſecond, de $5'\ 59''$, avec une différence de l'un à l'autre ſeulement de $1'\ 8''$, de ſorte que ſi l'on recommence ce calcul, la différence entre le vrai lieu de l'Apogée & du Périgée, ſuivant l'hypotheſe de Képler, & celui que l'on vient de déterminer, ne ſeroit que de quelques ſecondes, qui eſt une préciſion inutile dans cette recherche, puiſqu'il ſeroit à ſouhaiter qu'on pût s'en aſſûrer à quelques minutes près.

L'on a employé dans le calcul du vrai lieu du Soleil, l'obliquité de l'Écliptique, de $23^d\ 29'\ 0''$; au lieu que ſi on la ſuppoſe de $23^d\ 28'\ 30''$, telle qu'elle étoit alors, ou environ, on trouvera par cet Exemple, le vrai lieu de l'Apogée du Soleil vers la fin de Juin de l'année 1717, en ♋ $7^d\ 53'\ 0''$, ſuivant l'hypotheſe de Képler.

Neuviéme Méthode de déterminer l'Apogée & le Périgée du Soleil, l'Excentricité de ſon Orbe, & ſa plus grande Équation.

Dans l'incertitude où l'on eſt ſur le choix des hypotheſes que l'on doit ſuivre pour déterminer les Orbes des Planetes, nous avons cru devoir propoſer pour déterminer l'Apogée & le Périgée du Soleil, de même que l'Aphélie & le Périhélie des Planetes, l'Excentricité de leur Orbe, & leur plus grande Équation, une méthode où l'on ne ſuppoſe aucune de ces hypotheſes, mais ſeulement que le mouvement vrai de la Planete depuis ſon Aphélie juſqu'à ſon Périhélie, ſoit ſemblable à celui que l'on obſerve en ſens contraire depuis ſon Périhélie juſqu'à ſon Aphélie.

Pour l'intelligence de cette méthode, ſoit une figure quelconque *ABPK (Fig. 31.)* circulaire ou elliptique, qui repréſente l'Orbe du Soleil ou d'une Planete; *T*, la Terre placée ſur quelque point du diametre ou de l'axe *AP*, qui paſſe par les points *A* & *P* de l'Apogée & du Périgée.

Si l'on ſuppoſe que la Planete parcourt l'Orbe *ABPK* avec tous les degrés de vîteſſe qu'elle a réellement, de maniére cependant que les arcs *ABP* & *AKP*, étant ſemblables, ſon mouvement depuis *A* vers *B* juſqu'en *P*, ſoit pareil à celui qu'elle a dans l'autre partie de l'Orbe *AKP*; il eſt conſtant que cette Planete ſe trouvant au temps de ſon Apogée en *A*, on la verra paſſer par tous les degrés de ſes inégalités, juſqu'à ce qu'elle ſoit arrivée à ſa moyenne diſtance en *B*, où ſon Equation eſt la plus grande qui ſoit poſſible; après quoi elle diminuëra juſqu'à ce que la Planete ſoit arrivée à ſon Périhélie en *P*, où cette inégalité ceſſera entiérement.

La Planete continuant enſuite ſon cours de *P* vers *K*, ſes inégalités reparoîtront de nouveau, de la même maniére qu'elles avoient diminué ou augmenté, juſqu'à ce qu'elle ſoit revenuë à ſon Aphélie en *A*, où ſon vrai lieu concourt avec le moyen.

Il ſuit de là que ſi la Planete ſe trouve d'abord dans les moyennes diſtances, comme en *K*. Après qu'elle aura achevé la moitié de ſa révolution, & qu'elle ſera parvenuë en *B*, ſon vrai mouvement ſera meſuré par l'angle *BTK*, & ſon moyen par l'angle *AFK* plus *AFB*, dont la différence eſt le double de la plus grande Equation. Il en arrivera de même dans le cours de la Planete depuis *B* juſqu'en *K*, avec la différence que le mouvement vrai du Soleil y ſera plus grand que le moyen, de la même quantité dont le moyen mouvement ſurpaſſoit le vrai dans le cours de la Planete depuis *K* juſqu'en *B*.

Dans les autres ſituations de la Planete entre ſon Aphélie, ſon Périhélie, & ſes moyennes diſtances, comme en *R*, la différence entre ſon vrai & ſon moyen mouvement va en augmentant, & le terme de cette augmentation eſt lorſque la Planete ſe trouve dans ſa moyenne diſtance, comme en *B*; car alors ſon mouvement vrai eſt meſuré par l'angle *RTB*, & le moyen par l'angle *RFB*, dont la différence eſt égale à l'angle *FRT*, qui eſt conſtant, plus l'angle *FBT*, qui eſt le plus grand de tous ceux que l'on peut concevoir.

Cette différence entre la quantité du vrai & du moyen mouvement de la Planete, diminuë enſuite, & ceſſe entiérement lorſqu'elle eſt arrivée à un point de ſon Orbe, comme en *D*, où l'angle *FDT* eſt égal à l'angle *FRT*; elle recommence enſuite, & augmente à meſure que la Planete s'éloigne du point *D*, juſqu'à ce qu'elle parvienne à ſa moyenne diſtance oppoſée en *K*, où elle eſt la plus grande qui ſoit poſſible dans cette partie de ſon Orbe; car alors le mouvement vrai de la Planete étant meſuré par l'angle *DTK*, égal à l'angle *DLK* moins l'angle *FDT*, & ſon moyen mouvement par l'angle *DFK* ou *DLK* moins *TKF*. La différence entre ces deux mouvements, eſt égale à l'angle *TKF*, qui meſure la plus grande Equation moins l'angle conſtant *FDT* ou *FRT*, & eſt par conſéquent la plus grande qui ſoit poſſible dans cette partie de l'Orbe de la Planete, elle diminuë enſuite, & ceſſe entiérement lorſque la Planete eſt retournée au point *R*.

Ces différences n'augmentent de la même quantité de part & d'autre, ni dans la même proportion, que lorſque la Planete eſt dans ſon Apogée & dans ſon Périgée; mais cependant la ſomme des plus grandes différences eſt toûjours égale au double de la plus grande Equation. Car ſi l'on adjoûte à l'angle *FRT* plus *FBT*, qui meſure la plus grande différence entre les angles *RTB* & *RFB* du vrai & du moyen mouvement, l'angle *FKT* moins l'angle *FRT*, qui meſure auſſi la plus grande différence entre le vrai & le moyen mouvement dans la partie *PDA* de cet Orbe, on aura l'angle *FBT* plus l'angle *FKT*, pour la meſure de la ſomme des deux plus grandes différences, qui eſt le double de la plus grande Equation.

L'angle *FBT*, qui meſure la plus grande Equation de la Planete, étant ainſi connu, ſi on le retranche de la plus grande différence obſervée entre le vrai & le moyen mouvement, qui eſt égale à la ſomme des angles *FRT* plus *FBT*, on aura la valeur de l'angle *FRT*, qui meſure l'Equation de l'Orbe de la Planete lorſqu'elle étoit au point *R*, dont on ſe ſervira pour trouver le vrai lieu de ſon Apogée, en cette maniére.

Le Soleil étant, par exemple, arrivé au point *O* dans une des obſervations ſuivantes, on prendra le moyen mouvement qui répond au temps moyen écoulé depuis ſon paſſage par le point *R* & ſon arrivée au point *O*. Si la différence entre le vrai mouvement obſervé, & le moyen mouvement que l'on vient de déterminer, eſt égale à l'angle *FRT*, alors l'Apogée eſt réellement au point *O*. Si elle eſt plus petite, c'eſt une preuve que le Soleil n'y étoit pas encore arrivé, auquel cas on choiſira une autre obſervation où la différence entre le vrai & le moyen mouvement, ſoit plus grande que l'angle *FRT;* car alors le vrai lieu du Soleil ſera comme en *S*, au de-là du point *A* de ſon Apogée, dont on déterminera la ſituation, en faiſant, comme la différence entre le vrai & le moyen mouvement du Soleil, qui eſt meſurée par la ſomme des angles *FOT* & *FST*, eſt à l'angle *FOT;* ainſi la quantité de ſon mouvement vrai depuis *O* juſqu'en *S*, dans l'intervalle entre ces deux obſervations, eſt à un certain nombre de degrés, minutes & ſecondes, qui, étant adjoûté au vrai lieu du Soleil lorſqu'il étoit en *O*, donne le vrai lieu de ſon Apogée.

Enfin, l'on déterminera le temps du paſſage du Soleil par ſon Apogée, en faiſant, comme la ſomme des angles *FOT* & *FST*, eſt à l'angle *FOT;* ainſi le temps qui s'eſt écoulé entre les deux obſervations que l'on vient de comparer enſemble, eſt à un certain nombre de jours, heures & minutes, qui, étant adjoûtés au temps de la premiére obſervation, donnent le temps auquel le Soleil eſt arrivé à ſon Apogée.

Comme la ſituation de cet Apogée, ſe déduit de tous les lieux du Soleil ſur ſon Orbe, que l'on vient de comparer enſemble, on aura pour époque de l'Apogée, le temps milieu entre les obſervations que l'on a employées pour le déterminer.

Il eſt à propos de remarquer que pour trouver avec plus de préciſion, le lieu de l'Apogée ou du Périgée, il faut, autant qu'il eſt poſſible, choiſir les obſervations qui en ſont les plus proches de part & d'autre, parce qu'alors la variation d'un degré à l'autre entre le vrai & le moyen mouvement, eſt la plus uniforme.

EXEMPLE.

Le 21 Mars de l'année 1717, à midi, le vrai lieu du Soleil a été déterminé par sa hauteur méridienne en ♈ $0^d\ 47'\ 28''$, le 2 Avril suivant, il a été observé en ♈ $12^d\ 37'\ 25''$.

Le mouvement vrai du Soleil dans l'intervalle entre ces observations, qui est de 12 jours, a donc été de $11^d\ 49'\ 57''$, ce qui est à raison de $59'\ 10''$ par jour, peu différent de son moyen mouvement journalier, qui est de $59'\ 8''$; ce qui fait voir que dans ces deux observations, le Soleil étoit près de ses moyennes distances où son mouvement vrai est égal à son moyen mouvement.

Six mois ou environ après, le vrai lieu du Soleil a été observé le 23 Septembre en ♎ $0^d\ 15'\ 50''$.

Depuis le 21 Mars jusqu'au 23 Septembre, il y a 186 jours, pendant lesquels le mouvement vrai du Soleil a été de $5^s\ 29^d\ 28'\ 22''$. Prenant le moyen mouvement qui répond à cet intervalle, qui est de $185^j\ 23^h\ 45'$, temps moyen, on aura $6^s\ 3^d\ 19'\ 12''$, dont retranchant $5^s\ 29^d\ 28'\ 22''$, reste $3^d\ 50'\ 50''$, dont la moitié $1^d\ 55'\ 25''$, mesure la plus grande Equation du Soleil.

Le 21 Mars de l'année suivante 1718, le vrai lieu du Soleil a été observé en ♈ $0^d\ 32'\ 0''$.

Depuis le 23 Septembre 1717 jusqu'au 21 Mars 1718, il y a 179 jours, pendant lesquels le mouvement vrai du Soleil a été de $6^s\ 0^d\ 16'\ 10''$. Prenant le moyen mouvement qui répond à cet intervalle, qui est de $179^j\ 0^h\ 15'$, temps moyen, on le trouvera de $5^s\ 27^d\ 25'\ 37''$, qui, étant retranché de $6^s\ 0^d\ 16'\ 10''$, reste $3^d\ 50'\ 33''$, dont la moitié $1^d\ 55'\ 16''\frac{1}{2}$, mesure la plus grande Equation du Soleil.

Si l'on compare de même l'observation du 28 Mars 1717, dans laquelle le vrai lieu du Soleil a été déterminé en ♈ $7^d\ 40'\ 3''$, avec celle du 27 Septembre suivant, où le vrai lieu du Soleil étoit en ♎ $4^d\ 10'\ 35''$, on trouvera que dans cet intervalle, qui est de 183 jours, le vrai mouvement du Soleil a été de $5^s\ 26^d\ 30'\ 32''$, & son moyen mouvement, de $6^s\ 0^d\ 21'\ 47''$. La différence, qui est de $3^d\ 51'\ 15''$, étant partagée en deux parties égales, donne la plus grande Equation du Soleil, de $1^d\ 55'\ 37''\frac{1}{2}$.

Le 28 Mars 1718, le vrai lieu du Soleil a été obſervé en ♈ $7^d\ 26'\ 35''$. Il a été trouvé le 27 Septembre 1717, en ♎ $4^d\ 10'\ 35''$. Le mouvement du Soleil a donc été dans cet intervalle, qui eſt de 182 jours, de $6^f\ 3^d\ 16'\ 0''$, auxquels il répond $5^f\ 29^d\ 23'\ 53''$ de moyen mouvement. La différence eſt de $3^d\ 52'\ 7''$, dont la moitié $1^d\ 56'\ 3''\frac{1}{2}$, meſure la plus grande Equation du Soleil.

On déterminera de la même maniére, la plus grande Equation du Soleil, par les obſervations du paſſage de cet Aſtre par le Méridien, comparées avec celles des Etoiles fixes, qui ont cet avantage, que la ſituation d'une Etoile étant une fois déterminée exactement, il n'eſt pas néceſſaire d'y employer, comme dans les hauteurs du Soleil, ſa réfraction & ſa parallaxe, ni la hauteur de l'Equateur, & que l'erreur qui pourroit ſe trouver dans l'obliquité de l'Ecliptique, n'en peut cauſer qu'une très-petite dans la détermination de la longitude du Soleil, où l'on n'employe que le complément de cette obliquité.

Ayant donc examiné les obſervations du paſſage du Soleil & de quelques Etoiles fixes par le Méridien, nous avons trouvé que le 27 Septembre de l'année 1717, *Sirius* avoit paſſé par le Méridien $5^h\ 41'\ 44''$ avant le Soleil, d'où l'on trouve que la longitude du Soleil étoit ce jour-là à midi, de $6^f\ 4^d\ 12'\ 9''$. Elle a été déterminée, par rapport à la même Etoile, le 25 Mars 1718, de $0^f\ 4^d\ 29'\ 29''$. La différence eſt de $6^f\ 0^d\ 17'\ 20''$, qui meſure le vrai mouvement du Soleil dans cet intervalle, qui eſt de 189 jours de temps vrai, ou de $189^j\ 0^h\ 15'$ de temps moyen. Prenant le moyen mouvement qui y répond, on aura $5^f\ 26^d\ 26'\ 28''$, qui étant retranchés de $6^f\ 0^d\ 17'\ 20''$, reſte $3^d\ 50'\ 52''$, dont la moitié $1^d\ 55'\ 26''$, meſure la plus grande Equation du Soleil.

Prenant un milieu entre ces différentes déterminations, on aura la plus grande Equation du Soleil, de $1^d\ 55'\ 34''$.

Pour trouver préſentement le vrai lieu de l'Apogée du Soleil, on comparera l'obſervation du 27 Septembre 1717, où la longitude du Soleil étoit de $6^f\ 4^d\ 12'\ 9''$, avec celle du 27 Décembre ſuivant, où on l'a trouvée par rapport à la même Etoile, de $9^f\ 5^d$

44'

44′ 17″. La différence eſt de $3^f\ 1^d\ 32'\ 8''$, qui meſurent le mouvement vrai du Soleil dans cet intervalle, qui eſt de 91 jours de temps vrai, & de $91^j\ 0^h\ 11'$ de temps moyen. Prenant le moyen mouvement qui y répond, on le trouve de $2^f\ 29^d\ 42'\ 5''$, moins avancé de $1^d\ 50'\ 3''$ que ſon mouvement vrai. Comme cette différence eſt plus petite de $5'\ 23''$ que la plus grande Equation du Soleil, qui a été déterminée par les mêmes obſervations, de $1^d\ 55'\ 26''$, on examinera l'obſervation ſuivante du 6 Janvier 1718, dans laquelle la longitude du Soleil a été trouvée de $9^f\ 15^d\ 56'\ 33''$. La différence entre cette longitude, & celle du 27 Septembre, eſt de $3^f\ 11^d\ 44'\ 24''$, qui meſurent le mouvement vrai du Soleil dans cet intervalle, qui eſt de $99^j\ 0^h\ 16'$ de temps moyen. Prenant le moyen mouvement qui y répond, on le trouve de $3^f\ 9^d\ 33'\ 41''$, qui, étant retranchés de $3^f\ 11^d\ 44'\ 24''$, donnent la différence de $2^d\ 10'\ 43''$, plus grande de $15'\ 17''$ que l'Equation du Soleil, ce qui fait voir que le Périgée du Soleil étoit entre les deux obſervations du 27 Décembre 1717, & du 6 Janvier 1718.

On fera donc, comme $20'\ 40''$, ſomme de ces deux différences, ſont à $5'\ 23''$; ainſi $10^d\ 12'\ 16''$, différence entre le vrai lieu du Soleil du 27 Décembre 1717 & du 6 Janvier 1718, ſont à $2^d\ 39'\ 0''$, qui, étant adjoûtés au lieu du Soleil le 27 Septembre 1717, qui étoit de $9^f\ 5^d\ 44'\ 0''$, donnent le lieu du Périgée du Soleil en ♒ $8^d\ 23'$ pour le 27 Décembre de l'année 1717.

CHAPITRE IX.

Du Mouvement de l'Apogée & du Périgée du Soleil.

APRÈS avoir déterminé par les méthodes qui ont été expliquées ci-deſſus, la figure de l'Orbe que le Soleil décrit par ſa révolution, & la ſituation de ſon Apogée & de ſon Périgée, il reſte à examiner ſi la poſition de cet Orbe à l'égard des points fixes de l'Ecliptique, eſt invariable, ſans qu'il y arrive par la ſuite des temps, aucun dérangement, ou ſi elle eſt ſujette à quelque variation.

Ptolemée *(Almageste, liv. 3. chap. 4.)* ayant trouvé que l'Apogée du Soleil répondoit à $5^d\ 30'$ des Gemeaux, au même lieu où il avoit été déterminé par Hipparque 280 années auparavant, jugea que la position de l'Orbe du Soleil étoit immobile.

Les autres Astronomes après lui, ayant observé que l'Apogée du Soleil ne répondoit plus aux mêmes points du Ciel où il avoit été trouvé par Hipparque & Ptolemée, ont été obligés de reconnoître que la ligne qui passe par le centre de la Terre & de l'Orbe du Soleil, changeoit de position, mais leurs sentiments ont été partagés sur la direction de ce mouvement.

Les uns ayant comparé ensemble les diverses observations qui avoient été faites en des temps éloignés les uns des autres, suivant lesquelles l'Apogée du Soleil paroissoit tantôt s'avancer suivant l'ordre des Signes, & en d'autres temps se mouvoir en sens contraire, ont jugé que ce mouvement n'étoit point progressif, mais successivement direct & retrograde, conformément à ce que nous appercevons dans les révolutions des Planetes supérieures.

D'autres Astronomes ayant remarqué que suivant le plus grand nombre des observations du Soleil, son Apogée paroissoit s'avancer continuellement suivant l'ordre des Signes, ont attribué les inégalités qu'on avoit observées dans son mouvement, à la difficulté qu'il y a de déterminer exactement sa situation, & ont conclu qu'il avoit un mouvement progressif suivant la suite des Signes.

Comme ce mouvement est fort lent, & difficile à discerner dans l'espace de quelques années, il est nécessaire, pour déterminer sa quantité, de comparer les observations éloignées l'une de l'autre d'un intervalle de temps considérable, entre lesquelles celles de Hipparque & de Ptolemée, sont les plus reculées. Mais comme suivant la détermination de Ptolemée, l'Apogée étoit au même endroit qu'au temps de Hipparque, quoiqu'après un intervalle de 280 années, ce qui augmenteroit la quantité de son mouvement d'environ la cinquiéme partie ; nous avons cru devoir examiner laquelle des deux déterminations, méritoit la préférence.

On a choisi pour cet effet, les observations du Soleil faites par Waltherus à Nuremberg en l'année 1503, entre lesquelles il s'en trouve un grand nombre qu'il a marqué avoir faites avec un