Méthode de déterminer la situation apparente des Taches de la Lune, pour tous les temps de l'année.

Après avoir expliqué le mouvement de la Lune autour de son axe, qui, combiné avec le mouvement propre de cette Planete autour de la Terre dans un sens contraire, produit sa libration apparente ; nous avons cru devoir donner la méthode de déterminer la situation des Taches de la Lune, & leurs configurations entr'elles pour tous les jours donnés.

On considérera d'abord les temps où la Lune étant Pleine, elle se trouve près de ses Nœuds ; car alors, comme on l'a remarqué ci-dessus, le Colûre de la Lune, sur lequel sont placés les Poles de l'Orbite de l'Ecliptique & du globe Lunaire, se conforme au bord apparent du disque de la Lune, & le plan de son Equateur qui passe toûjours par les mêmes Taches, est représenté en ligne droite qui passe par le centre de la Lune, & est inclinée au plan de l'Orbite, de 7 deg. $\frac{1}{2}$, & au plan de l'Ecliptique, de 2 deg. $\frac{1}{2}$.

Ayant donc décrit un cercle *APBp (Fig. 40.)* qui représente le disque de la Lune, on tirera le diametre *DE*, qui représentera le plan de l'Equateur du globe Lunaire. On prendra de côté ou d'autre des points *D* & *E*, les arcs *DA*, *EB*, de 7 degrés $\frac{1}{2}$. On menera le diametre *AB*, qui représentera le plan de l'Orbite, & du centre *C*, l'on tirera à *AB*, le diametre perpendiculaire *Pp*, dont les points *P* & *p*, déterminent les Poles de l'Orbite qui sont toûjours sur la circonférence du disque apparent de la Lune.

On prendra de côté & d'autre du point *P*, les arcs *PF*, *PG*, chacun de 5 degrés, & les arcs *PH*, *PI*, de 7 degrés $\frac{1}{2}$. Le point *G*, représentera le lieu du Pole de l'Ecliptique sur le disque de la Lune lorsqu'elle est dans son Nœud ascendant, & qu'elle va de la partie méridionale de son Orbite à la partie septentrionale ; & le point *F*, le même Pole de l'Ecliptique lorsque la Lune est dans son Nœud descendant. Le point *I*, marquera aussi le Pole du globe de la Lune lorsqu'elle est dans son Nœud ascendant, & le point *H*, ce même Pole lorsqu'elle est dans son Nœud descendant.

Pour trouver la situation des Taches de la Lune, lorsqu'elle se rencontre dans un de ses Nœuds, comme, par exemple, dans son Nœud ascendant, on prendra de côté & d'autre du Pole *G* de l'Ecliptique, les arcs GK, GL, chacun de $23^d\ 29'$, & on menera KL, qui coupera le rayon GC au point M. Du point M à l'intervalle MK ou ML, on décrira le cercle KNL, qu'on divisera en signes & degrés, marquant au point N, le lieu de la Lune dans l'Ecliptique, qui est supposée être dans ses Nœuds. On cherchera ensuite, sur ce cercle ainsi divisé, le point de l'Ecrevisse, que l'on trouvera, par exemple, en O. Du point O, on menera OQ, parallele à NC, & du point Q, on tirera par le centre C, la ligne QC, qui représentera le plan du cercle de déclinaison de la Lune au temps de l'observation. Le diametre RS, qui lui est perpendiculaire, représentera sur le disque de la Lune une portion du parallele que la Lune décrit par son mouvement journalier.

On observera ensuite le temps que le diametre de la Lune employe à passer par le cercle horaire, & l'on fera, comme le temps que la Lune employe à retourner d'un jour à l'autre au Méridien, est au temps du passage de la Lune par le cercle horaire; ainsi 360 degrés, sont aux minutes de degré que le diametre de la Lune comprend sur un parallele, que l'on réduira en minutes de degré d'un grand cercle.

On observera aussi la variation de la Lune en déclinaison d'un jour à l'autre, qui est égale à la différence de la hauteur méridienne de la Lune corrigée par la réfraction & la parallaxe, & l'on fera, comme le temps du retour de la Lune au Méridien, est au temps du passage de la Lune par le cercle horaire; ainsi la variation de la Lune en déclinaison d'un jour à l'autre, est à la variation de la Lune en déclinaison pendant le temps de son passage par le cercle horaire. On fera enfin, comme le diametre de la Lune, déterminé en minutes de degré d'un grand cercle, est à la variation de la Lune en déclinaison pendant le temps de son passage par le cercle horaire; ainsi le diametre de la Lune RS, est à une quantité qu'on portera de S vers P, comme en Y, lorsque la déclinaison va en augmentant vers le Nord, & de S vers p, comme en X, lorsqu'elle va en diminuant vers le Midi. On menera par l'un de ces points, comme Y, ainsi déterminé, le diametre ZCY, qui représentera le plan du cercle que le centre de la Lune parcourt par son mouvement journalier.

Pour déterminer dans cette figure, la situation des Taches de la Lune par rapport aux cercles qui y ſont décrits, on obſervera cette Planete par le moyen d'une Lunette qui a au foyer de ſes verres, quatre fils qui ſe croiſent, en faiſant entr'eux des angles de 45 deg. & ayant fait en ſorte que le bord de la Lune raſe exactement un de ces fils par ſon mouvement apparent, on obſervera le temps du paſſage des bords & des Taches par le fil horaire & les obliques, pour déterminer leur ſituation dans le diſque apparent de la Lune par rapport au diametre *ZY*. Toutes les Taches qui ſeront diſpoſées ſur le diametre *DE*, lequel repréſente, comme il a été dit ci-deſſus, le plan de l'Equateur du Pole Lunaire, ſeront placées ſur la circonférence de l'Equateur, & celles qui ſeront diſpoſées ſur les paralleles à ce diametre, ſeront auſſi ſur la circonférence des paralleles à l'Equateur. On conſervera cette figure avec la diſpoſition des Taches qui y ſont placées, & on déterminera leur aſcenſion droite & leur déclinaiſon, en tirant du point *a*, qui repréſente la ſituation d'une Tache, la ligne *bac*, parallele à l'Equateur *DE*, & la ligne *TaV*, parallele au cercle de déclinaiſon *dIC*, qui rencontre aux points *T* & *V*, le cercle *bTcV*, décrit ſur le diametre *bc*. L'arc *dbeV*, meſurera l'aſcenſion droite de la Tache depuis le vrai lieu du Nœud de la Lune, & l'arc *Ec*, ſa déclinaiſon, qui eſt ſeptentrionale, lorſque la Tache eſt placée dans l'hémiſphere ſeptentrional *DGE*, & méridionale, lorſqu'elle eſt placée dans l'hémiſphere méridional *DpE*. On trouvera de la même maniére, la longitude & la latitude des Taches de la Lune par rapport à l'Ecliptique.

Pour déterminer la configuration des Taches de la Lune dans une autre ſituation, lorſqu'elle eſt, par exemple, éloignée de ſon Nœud aſcendant, de 60 degrés, on décrira des points *x* & *L*, (*Fig.* 41.) où les lignes *FG*, *HI*, rencontrent le diametre *Pp*, les cercles *FMG*, *HNI*; & ayant pris les arcs *GM*, *IN*, chacun de 60 degrés, on menera à *Pp*, les paralleles *MO*, *NQ*, qui rencontreront *FG* & *HI*, aux points *O* & *Q*, leſquels repréſentent, ſçavoir, le point *O* le Pole de l'Ecliptique, & le point *Q* le Pole du globe Lunaire. On tirera par le point *Q*, le rayon *TV*, & on menera à ce rayon, la perpendiculaire *RS*, qui repréſentera le diametre de l'Equateur de la Lune. On prendra ſur le diametre *TV*, qui paſſe par le Pole *Q* du globe Lunaire, *CK* & *CX* égaux à *NQ*, & on menera par les points *RKSX*, l'Ellipſe *RKSX*, qui repréſentera l'E'quateur de la Lune, dont la partie *RXS* eſt ſur l'hémiſphere apparent lorſque la Lune eſt dans la partie ſeptentrionale de ſon Orbite, & la partie *RKS* eſt ſur l'hémiſphere apparent lorſque cette Planete eſt dans la partie méridionale.

On tirera enfin par les points *POQp*, la demi-Ellipſe *POQp*, qui repréſentera le Colûre de la Lune, & coupera l'E'quateur aux points *Y* & *Z*. La Tache qui étoit en *S* à l'extrémité de l'E'quateur, ſera tranſportée, par le mouvement de la Lune autour de la Terre, en Z, lorſque cette Planete eſt dans la partie ſeptentrionale de ſon Orbite, & en *Y*, lorſqu'elle eſt dans la partie méridionale, & toutes les Taches qui étoient diſpoſées ſuivant la ligne *DE*, ſe rencontreront ſur l'Ellipſe *RKSX*.

Il faut préſentement conſidérer que pendant que le Colûre de la Lune eſt emporté de l'Occident vers l'Orient par le mouvement de la Lune autour de la Terre, qui eſt irrégulier, les Taches ſont tranſportées autour du Pole de la Lune par un mouvement régulier qui eſt contraire en apparence, lequel s'acheve en $27^{j}\ 5^{h}$.

Pour connoître la différence entre ces deux mouvements, on prendra l'intervalle qui s'eſt écoulé entre le temps où la Lune étoit dans ſes Nœuds, & le temps où elle en étoit éloignée d'une certaine quantité, & on cherchera les degrés & minutes du mouvement moyen de la Lune autour de ſon axe, qui répondent à cet intervalle. S'ils ſont égaux à ceux du mouvement apparent de la Lune, la Tache qui, par ce mouvement apparent, avoit été tranſportée du point *S* au point *Y*, ſera reportée par ſon mouvement autour de ſon axe, du point *Y* au point *S*, à l'extrémité de l'Ellipſe *RKSX*. Si les degrés du mouvement moyen de la Lune autour de ſon axe ſont en plus petite quantité que ceux du mouvement apparent, par exemple, de 5 degrés, on prendra de côté & d'autre du point *S*, les arcs *Sa*, *Sb*, chacun de 5 deg. & joignant *ab*. ſon interſection *d*, avec la partie *RKS* de l'Ellipſe qui eſt dans l'hémiſphere apparent, marquera la ſituation de la Tache. Si le mouvement de la Lune autour de ſon axe eſt plus grand de la même quantité, la Tache ſera dans l'hémiſphere de la Lune qui nous eſt caché, placée dans l'interſection *f* de la ligne *ab*, avec l'autre partie *RXS* de l'Ellipſe.

Pour trouver la ſituation d'une autre Tache qui étoit, par exemple, au point *a* (*Fig. 42.*) dans le temps que la Lune étoit dans ses Nœuds, on menera par le point *a*, la ligne *bac*, parallele à *DE*, qui représente l'Equateur de la Lune lorsqu'elle est dans ses Nœuds, & par le point *K* de l'Ellipse *RKS*, qui représente l'Equateur de la Lune dans une autre situation, lorsque son Pole est en *Q*, la ligne *gh*, parallele au diametre *RS*. On décrira sur *bc*, comme diametre, le demi-cercle *bdc*, & du point *a*, on tirera *ad*, parallele à *CI*. On prendra les arcs *Sl*, *Ri*, égaux aux arcs *Ec*, *Db*, & les arcs *lp*, *ln*, *io*, *im*, égaux aux arcs *Sh*, *Rg*. On joindra *mn*, *op*, qui couperont le diametre *TV*, qui passe par le Pole *Q* de l'Equateur, aux points *k* & *q*. On divisera *kq*, en deux parties égales au point *o*, par lequel on menera la ligne *eof*, parallele à *RS*, qui sera terminée en *e* & en *f*, par les perpendiculaires *ie*, *lf*, tirées des points *i* & *l* sur cette ligne. L'Ellipse *ekfq*, décrite sur le grand axe *ef*, & sur le petit axe *kq*, représentera le parallele de la Tache *a*, lorsque le Pole de la Lune est en *Q*.

On décrira sur le diametre *ef*, le demi-cercle *erf*, sur lequel on prendra l'arc *fr*, semblable à l'arc *cd*; & du point *r*, on menera *rs*, parallele à *QC*, qui rencontrera la demi-Ellipse *esf*, qui est sur l'hémisphere apparent de la Lune, au point *S*, lequel marquera la situation de la Tache *a*, lorsque le mouvement apparent de la Lune depuis ses Nœuds, a été égal au mouvement moyen de cette Planete autour de son axe.

Lorsque ces mouvements ne sont pas d'une égale quantité, on prendra leur différence que l'on portera de *r* vers *K*, comme en *t*, lorsque le mouvement moyen est plus petit que l'apparent, & de *r* vers *f*, comme en *u*, lorsque le mouvement moyen est plus grand. Menant *tx* & *uy*, paralleles à *rs*, le point *x*, marquera le lieu de la Tache lorsque le mouvement de la Lune autour de son axe est plus petit que son mouvement apparent autour de la Terre, & le point *y*, ce même lieu lorsque le mouvement autour de son axe est plus grand.

On trouvera de la même maniére, la situation des autres Taches de la Lune, qu'on comparera à leur situation lorsque cette Planete étoit dans ses Nœuds, pour discerner l'effet de la libration apparente de la Lune, qui résulte de la composition des deux mouvements expliqués ci-dessus.

Démonstration.

Il eſt aiſé d'expliquer la théorie de ces différentes opérations, car dans la Figure 41.^{me}, la Lune étant éloignée de ſes Nœuds, de 60 degrés, le Pole *Q* de ſa révolution autour de ſon axe, qui étoit en *I*, a dû auſſi s'éloigner de 60 degrés du point *I* ſur le cercle *HNI*, parallele au plan de l'Orbite *ACB*, & arriver au point *N*, qui, vû de la Terre placée ſur le plan de l'Orbite, doit paroître répondre au point *Q*. Le Pole de l'Écliptique a dû avancer en même temps ſur le petit cercle *GMF*, à la diſtance de 60 degrés du point *G*, & arriver au point *M*, qui, vû de la Terre, répond au point *O* du diametre *FG*. Le cercle *PApB*, lequel, lorſque la Lune eſt dans ſes Nœuds, paſſe par le Pole du globe Lunaire, & par celui de l'Écliptique, a donc dû être transformé en l'Ellipſe *POQp*, qui paſſe par les mêmes Poles. L'Equateur qui étoit alors repréſenté par le diametre *DCE*, perpendiculaire à *CI*, doit donc auſſi paroître en forme d'une Ellipſe dont le petit demi-diametre *CK* eſt égal à *QN*, ſinus de l'arc *IN*. L'interſection *Y* ou Z de cette Ellipſe avec le Colûre *POQp*, marque donc le lieu où la Tache qui étoit en *E*, auroit été tranſportée par le mouvement apparent de la Lune. Mais comme le globe de la Lune tourne dans un ſens contraire autour de ſon axe, il ſuit que ſi ce mouvement contraire eſt égal au mouvement apparent, la Tache paroîtra en *S*, à l'extrémité de l'Ellipſe qui repréſente l'Équateur, & que ſi ces mouvements ſont inégaux, la Tache ſe trouvera au point *d* ou *f* de l'interſection de l'Équateur avec la ligne *ab*, dont les points *a* & *b*, ſont éloignés du point *S*, de la quantité des arcs *Sa*, *Sb*, égaux à la différence entre ces deux mouvements.

A l'égard d'une Tache qui étoit placée ſur le diſque de la Lune, comme en *a* (*Fig. 42.*) dans le temps que la Lune étoit dans ſes Nœuds, les arcs *Db*, *Ec*, meſurent ſa déclinaiſon de l'Équateur *DE*, & l'arc *cd*, meſure ſa diſtance au bord de la Lune, priſe ſur un parallele à l'Équateur. Suppoſant que le Pole de la Lune ſoit arrivé en *Q*, par ſon mouvement apparent, l'Équateur de cette Planete ſera repréſenté comme dans la figure précédente, par l'Ellipſe *RKS*, qui a pour petit demi-axe, la ligne *KC*. Maintenant, par la conſtruction, l'arc *lp* a été pris égal à l'arc *Sh*. Adjoûtant de part &

d'autre, l'arc *Sp*, on aura l'arc *ph*, égal à l'arc *Sl*, qui a été pris égal à l'arc *Ec*, qui meſure la déclinaiſon de la Tache *a*; l'Ellipſe *eqf*, parallele à l'Equateur *RKS*, qui en eſt éloignée de l'arc *ph*, égal à la déclinaiſon de la Tache, repréſentera donc ſon parallele lorſque le Pole de la Lune eſt en *Q*. L'arc *fr* ayant été pris auſſi par la conſtruction, ſemblable à l'arc *cd*, diſtance de la Lune à ſon bord, la ligne *rs*, parallele à *QC*, rencontrera l'Ellipſe *eqf* au point *s*, qui déterminera la ſituation de la Tache lorſque le mouvement propre de la Lune autour de ſon axe, eſt égal à ſon mouvement autour de la Terre. Enfin, lorſque ces deux mouvements ſont inégaux, leur différence étant portée de côté ou d'autre du point *r*, comme en *t* ou en *u*, les lignes *tx* ou *uy*, paralleles à *QC* ou *rs*, doivent marquer aux points *x* ou *y*, la ſituation de la Tache. *Ce qu'il falloit démontrer.*

CHAPITRE IV.

De l'Inclinaiſon de l'Orbite de la Lune à l'égard de l'Ecliptique.

AYANT comparé la ſituation de la Lune à l'égard des Etoiles fixes diſpoſées de côté & d'autre de l'Ecliptique, on a remarqué que cette Planete, par ſon mouvement propre de l'Occident vers l'Orient, paſſoit entre ces Etoiles à diverſes diſtances de l'Ecliptique.

Que dans le cours de ſa révolution, elle ſe rencontroit deux fois ſur l'Ecliptique en deux points à peu-près diamétralement oppoſés, & qu'elle s'en écartoit enſuite de part & d'autre, d'environ 5 degrés.

Ces apparences qui ſe renouvellent tous les mois, ont fait connoître que le mouvement propre de la Lune ne ſe fait pas de même que celui du Soleil ſur le plan de l'Ecliptique, mais ſur un autre plan qui le coupe en deux points oppoſés, & qui lui eſt incliné d'environ 5 degrés, qu'on nomme *Orbite de la Lune.*

Le point de l'interſection de l'Ecliptique avec l'Orbite de la

Lune, où cette Planete passe du Midi vers le Septentrion à l'égard de l'Ecliptique, s'appelle le *Nœud ascendant*, ou la *Tête du Dragon*, & le point opposé où la Lune passe du Septentrion vers le Midi, s'appelle le *Nœud descendant*, ou la *Queuë du Dragon.*

De la variation de l'Inclinaison de l'Orbite de la Lune.

L'inclinaison de l'Orbite de la Lune à l'égard de l'Ecliptique, n'est pas toûjours précisément de la même quantité, elle n'est jamais moindre de $5^{d}\ 1'$, & peut monter jusqu'à $5^{d}\ 17'$, de sorte qu'on y apperçoit une variation de 16 minutes.

Cette variation de l'inclinaison de l'Orbite de la Lune, dépend de la diverse distance du Soleil au Nœud de la Lune.

Lorsque cette distance est de 90 degrés, la Lune décrit un cercle incliné à l'Ecliptique de $5^{d}\ 1'$, que nous appellons *Orbite simple de la Lune*, parce que cette Planete s'y rencontre toûjours dans ses Conjonctions ou Oppositions avec le Soleil. Mais lorsque le Soleil est dans les Nœuds de la Lune, cette Planete décrit un cercle incliné à l'Ecliptique, de $5^{d}\ 17'$, en sorte que la distance de la Lune au Soleil étant de 90 degrés, sa latitude qui mesure l'inclinaison de son Orbite par rapport à l'Ecliptique, est de $5^{d}\ 17'$, qui est la plus grande qu'on y apperçoive.

Dans les autres situations du Soleil, la Lune décrit un cercle plus ou moins incliné à l'Ecliptique, suivant que le Soleil est plus ou moins éloigné de ses Nœuds.

Pour expliquer la maniére dont on conçoit cette variation, soit *ADBE (Fig. 43.)* un grand cercle de la Sphere, qui représente l'Ecliptique, *ACBF*, un autre grand cercle incliné à l'Ecliptique, de $5^{d}\ 1'$, que nous appellons *Orbite simple de la Lune*, & sur lequel nous supposons que la Lune est placée dans le temps que le Soleil est à la distance de 90 degrés de ses Nœuds. Soit *AGBM*, un autre grand cercle incliné à l'Orbite simple de la Lune, de $16'$, & à l'Ecliptique, de $5^{d}\ 17'$.

Le Soleil étant en *A* ou en *B*, dans l'un des Nœuds de la Lune, cette Planete décrira le grand cercle *AGBM*, qui représentera dans ce cas, l'Orbite véritable de la Lune, & cette Planete étant en *G* ou en *M*, sa latitude septentrionale *GD*, ou méridionale *EM*, sera

sera mesurée par l'angle DAG ou EAM, qui est de $5^d\ 17'$. Dans une autre situation de la Lune sur l'Orbite $AGBM$, comme en P ou en T, sa latitude sera représentée par les arcs PY & TZ, dont le premier est septentrional à l'égard de l'Ecliptique, & le second lui est méridional.

Si l'on suppose présentement le Soleil en D ou en E, à la distance de 90 degrés des Nœuds de la Lune, cette Planete décrira l'Orbite simple $ACBF$, qui est inclinée à l'Ecliptique, de $5^d\ 1'$, sans s'en écarter de part & d'autre ; c'est pourquoi si l'on place la Lune en C ou en F, sa latitude septentrionale CD, ou méridionale EF, sera mesurée par l'angle CAD ou FAE, qui est de $5^d\ 1'$. Dans une autre situation de la Lune sur l'Orbite simple $ACBF$, comme en L & en Q, sa latitude sera mesurée par les arcs LY & QZ, dont le premier est septentrional, & le second méridional par rapport à l'Ecliptique.

Dans les autres situations du Soleil à l'égard des Nœuds de la Lune, comme en S ou en N, la Lune, au temps de sa Conjonction ou de son Opposition avec le Soleil, se trouvera sur l'Orbite simple de la Lune $ACBF$, aux points correspondants K ou R. Mais en s'éloignant du Soleil, elle décrira un autre grand cercle $KPRT$, qui sera incliné à l'Orbite simple $AGBF$, d'une quantité dont le sinus sera au sinus de l'angle CAG, de 16 minutes, qui mesure la plus grande variation de l'Orbite de la Lune ; comme le sinus du complément de la distance AS ou AN du Soleil au Nœud de la Lune, est au sinus total.

Il est aisé de concevoir que le Soleil changeant tous les jours de situation à l'égard des Nœuds de la Lune, l'Orbite que cette Planete décrit, doit changer continuellement de direction, & être représentée par des cercles plus ou moins inclinés à l'Ecliptique & à l'Orbite simple de la Lune.

Ces cercles, quoique diversement inclinés les uns aux autres, coupent tous l'Orbite simple de la Lune $ACBF$, & le cercle $AGBM$ de la plus grande latitude en quatre points éloignés les uns des autres de 90 degrés, dont deux opposés sont sur l'Orbite simple, & les deux autres sur le cercle de la plus grande inclinaison de l'Orbite, ce que l'on démontrera en cette maniére.

Soit S, le Soleil à une distance du Nœud ascendant A, qui ſoit moindre de 90 degrés, & le point *L*, à la diſtance de 90 degrés du point *S* ou *K*, qui lui répond dans l'Orbite ſimple de la Lune. Si l'on retranche du demi-cercle *ACB*, le quart de cercle *KCL*, il eſt clair que les deux arcs *AK*, *BL*, qui reſtent, ſont égaux à 90 degrés, & que par conſéquent l'arc *BL* eſt le complément de l'arc *AK*.

On aura donc, ſuivant notre hypotheſe, le ſinus total eſt au ſinus du complément de l'arc *AS* ou *AK*, c'eſt-à-dire, au ſinus de l'arc *BL*, comme le ſinus de l'angle *CAG* ou *GBC* de la plus grande variation, qui eſt de 16 minutes, eſt au ſinus de l'angle *PKL* de l'inclinaiſon de la ſeconde Orbite, qui eſt meſurée par l'arc *PL*. Mais dans le Triangle rectangle ſphérique *PBL*, le ſinus total eſt au ſinus de l'arc *BL* ou *BP*, qui n'en différe pas ſenſiblement, comme le ſinus de l'angle *GBC* eſt au ſinus de l'arc *PL*. Le point *P* de l'arc *KPR*, concourt donc avec le point *P* de l'arc *APB* de la plus grande inclinaiſon de l'Orbite; d'où il ſuit par la propriété de la Sphere, que les deux grands cercles *AGBM* & *KPRT*, ſe coupent aux deux points *P* & *T*, diamétralement oppoſés.

Si l'on ſuppoſe le Soleil dans le ſecond quart de cercle, comme en *Y*, éloigné du Nœud aſcendant de la Lune *A*, depuis 90 juſqu'à 180 degrés, & le point *R* à la diſtance de 90 degrés du point *Y* ou *L*, qui lui répond dans l'Orbite ſimple de la Lune; il eſt évident que l'arc *LBR* étant de 90 degrés, l'arc *BR* eſt le complément de l'arc *BL* ou *BY*, diſtance du Soleil au Nœud de la Lune qui eſt le plus proche.

Maintenant, ſuivant notre hypotheſe, le ſinus total eſt au ſinus du complément de l'arc *BL*, c'eſt-à-dire, au ſinus de l'arc *BR*, comme le ſinus de l'angle *CBG* ou *RBX*, de 16 minutes, eſt au ſinus de l'angle *RPX* de l'inclinaiſon de la ſeconde Orbite qui eſt meſurée par l'arc *RX*. Mais dans le Triangle rectangle ſphérique *RBX*, le ſinus total eſt au ſinus de l'arc *BR*, comme le ſinus de l'angle *RBX*, eſt au ſinus de l'arc *RX*; le point *X* de l'arc *LX*, concourt donc avec le point *X* de l'arc *PBX* du grand cercle *AGBM*.

On démontrera de même que lorſque le Soleil eſt dans les deux autres quarts de cercle, l'Orbite véritable de la Lune coupe le cercle de la plus grande inclinaiſon à la diſtance de 90 degrés du vrai lieu du Soleil, & qu'ainſi quelque inclinaiſon qu'ait l'Orbite apparente de la Lune, elle coupe l'Orbite ſimple & le cercle de la plus grande inclinaiſon en quatre points éloignés l'un de l'autre de 90 degrés, dont deux oppoſés ſont ſur l'Orbite ſimple, à l'endroit où eſt placé le Soleil ou à ſon oppoſite, & les deux autres ſont ſur le cercle de la plus grande inclinaiſon de l'Orbite, à la diſtance de 90 degrés du vrai lieu du Soleil.

Il réſulte du mouvement de la Lune que l'on vient d'expliquer, que lorſque le Soleil eſt en *S*, ou tel autre endroit que l'on voudra, du quart de cercle, c'eſt-à-dire, lorſque la diſtance du Soleil au Nœud aſcendant de la Lune eſt depuis 0 juſqu'à 90 degrés, l'inclinaiſon *LKP* de l'Orbite véritable *KP* avec l'Orbite ſimple *KL*, eſt ſeptentrionale à l'égard de cette Orbite dans les ſix premiers Signes de la diſtance de la Lune au Soleil, depuis *K* vers *L*, juſqu'en *R*; & qu'elle eſt au contraire méridionale dans les ſix derniers Signes de la diſtance de la Lune au Soleil, depuis *K* vers *A*, juſqu'en *R*.

Que lorſque le Soleil ſe trouve dans le quart de cercle oppoſé, comme en *d*, c'eſt-à-dire, lorſque ſa diſtance au Nœud aſcendant de la Lune eſt depuis 180 juſqu'à 270 degrés, l'inclinaiſon *TRQ* de l'Orbite véritable *RT* avec l'Orbite ſimple *RQ*, eſt méridionale à l'égard de cette Orbite dans les ſix premiers Signes de la diſtance de la Lune au Soleil, depuis *R* vers *T*, juſqu'en *K*; & ſeptentrionale dans les ſix derniers Signes de la diſtance de la Lune au Soleil, depuis *R* vers *B*, juſqu'en *K*.

Que lorſque le Soleil ſe trouve en *Y*, dans le ſecond quart de cercle, c'eſt-à-dire, lorſque ſa diſtance au Nœud aſcendant de la Lune, eſt depuis 90 juſqu'à 180 degrés, l'inclinaiſon *RLX* de l'Orbite véritable *LX* avec l'Orbite ſimple *LB*, eſt méridionale à l'égard de cette Orbite dans les ſix premiers Signes de la diſtance de la Lune au Soleil, & ſeptentrionale dans les ſix derniers Signes.

Enfin, que lorſque le Soleil ſe trouve en Z, dans le dernier quart de cercle, c'eſt-à-dire, lorſque ſa diſtance au Nœud aſcendant de la Lune eſt depuis 270 juſqu'à 360 degrés, l'inclinaiſon *KQe* de l'Orbite véritable *QeL* avec l'Orbite ſimple *QAL*, eſt ſeptentrionale dans les ſix premiers Signes de la diſtance de la Lune au Soleil, & méridionale dans les ſix derniers.

Pour déterminer la latitude de la Lune dans toutes ces différentes circonſtances, on calculera d'abord cette latitude pour tous les degrés de la diſtance de cette Planete à ſon Nœud lorſque l'inclinaiſon de l'Orbite eſt de $5^d\ 1'$, ce qui arrive lorſque le Soleil eſt éloigné de 90 degrés de ſes Nœuds; en faiſant, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle *HAN*, de $5^d\ 1'$; ainſi le ſinus de l'arc *AH* ou *BL*, diſtance de la Lune en *H* ou *L* au Nœud *A* ou *B*, qui eſt le plus proche, eſt au ſinus de l'arc *HN* ou *LY*, qui meſure la latitude ſimple de la Lune, qui eſt ſeptentrionale depuis le Nœud aſcendant juſqu'au Nœud deſcendant, & méridionale depuis le Nœud deſcendant juſqu'au Nœud aſcendant.

Dans les autres ſituations du Soleil, comme en *S*, la Lune étant en *O*, ou tel autre point que l'on voudra, de ſon Orbite véritable *KPRT*: on fera, comme le ſinus total eſt au ſinus du complément de l'arc *AS*; ainſi le ſinus de l'angle *CAG*, de $16'$ eſt au ſinus de l'angle *LKP*, qui meſure l'inclinaiſon de l'Orbite véritable *KP* à l'égard de l'Orbite ſimple *KL*. On fera enſuite, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'arc *LKP*, que l'on vient de trouver; ainſi le ſinus de l'arc *KO*, diſtance de la Lune au Soleil, eſt au ſinus de l'arc *OH*, qui meſure la ſeconde latitude. On déterminera de la même maniére qu'on l'a marqué ci-deſſus, l'arc *HN*, qui meſure la latitude ſimple de la Lune, lorſque ſa diſtance au Nœud eſt meſurée par l'arc *AH*. S'il arrive que ces deux latitudes ſoient de même dénomination, c'eſt-à-dire, ſeptentrionales ou méridionales, on les adjoûtera enſemble pour avoir l'arc *ON* de la vraye latitude de la Lune lorſqu'elle eſt au point *O*. Mais ſi elles ſe trouvent de différente dénomination, c'eſt-à-dire, l'une ſeptentrionale, & l'autre méridionale, il faut retrancher la plus petite de la plus grande, & la différence ſera la vraye latitude de la Lune, qui ſera de la même dénomination que la plus grande des deux.

Exemple I.

Le Soleil étant à la diſtance de 90 degrés des Nœuds de la Lune, on veut trouver la latitude de cette Planete lorſqu'elle eſt en *H*, éloignée de 60 degrés de ſon Nœud aſcendant.

L'arc *AH* étant de 60 degrés, & l'angle *HAN*, de $5^d\ 1'$:

on fera, comme le ſinus total eſt au ſinus de $5^d\ 1'$; ainſi le ſinus de 60 degrés eſt au ſinus de $4^d\ 20'\ 36''$, qui meſure l'arc *HN*, lequel repréſente la latitude ſeptentrionale de la Lune.

EXEMPLE II.

On cherche la latitude de la Lune lorſque la diſtance *AS* du Soleil au Nœud de la Lune eſt de 30 degrés, & la diſtance *KO* de la Lune au Soleil eſt auſſi de 30 degrés.

Faites, comme le ſinus total eſt au ſinus du complément de l'arc *AK*, de 30 degrés; ainſi le ſinus de l'angle *DAC*, de $16'$ eſt au ſinus de l'angle *LKP* de l'inclinaiſon de l'Orbite véritable par rapport à l'Orbite ſimple, qui eſt de $13'\ 51''$. Faites enſuite, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle *LKP*, de $13'\ 51''$; ainſi le ſinus de l'arc *KO*, de 30 degrés, eſt au ſinus de l'arc *HO* de la ſeconde latitude, qui eſt de $6'\ 55''$ vers le Septentrion, à cauſe que la diſtance du Soleil au Nœud aſcendant de la Lune eſt depuis o juſqu'à 90 degrés, & que la diſtance de la Lune au Soleil, eſt depuis o juſqu'à 180 degrés. Adjoûtant l'arc *KH*, de 30 degrés, à l'arc *AK*, qui eſt auſſi de 30 degrés, on aura l'arc *AH*, de 60 degrés, avec lequel on trouvera la latitude ſimple *HN*, de $4^d\ 20'\ 36''$, qui eſt auſſi ſeptentrionale, à cauſe que la diſtance de la Lune à ſon Nœud aſcendant eſt depuis o juſqu'à 180 degrés; il faut donc l'adjoûter à l'arc *HC*, de $6'\ 55''$, & on aura la vraye latitude de la Lune *ON*, de $4^d\ 27'\ 31''$.

EXEMPLE III.

On cherche la latitude de la Lune lorſque la diſtance *AH* du Soleil au Nœud de la Lune eſt de 60 degrés, & la diſtance de la Lune au Soleil eſt de 11 Signes ou 330 degrés.

Faites, comme le ſinus total eſt au ſinus du complément de l'arc *AH*, de 60 degrés; ainſi le ſinus de l'angle *DAC*, de $16'$ eſt au ſinus de l'angle *VHI* de l'inclinaiſon de l'Orbite véritable, qui eſt de 8 minutes. La diſtance de la Lune au Soleil étant de 330 degrés, on aura la Lune en *b*, éloignée du point *H*, de 30 deg. de l'Orient vers l'Occident contre la ſuite des Signes.

On fera donc, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle *KHb*, de 8 minutes; ainsi le sinus de l'arc HK, de 30 degrés, est au sinus de l'arc Kb, que l'on trouvera de 4 minut. & qui est vers le Midi, à cause que la distance du Soleil au Nœud ascendant de la Lune est depuis 0 jusqu'à 90 degrés, & que la distance de la Lune au Soleil est depuis 180 degrés jusqu'à 360. Adjoûtant la distance du Soleil au Nœud de la Lune, qui est de 60 degrés, à la distance de la Lune au Soleil, qui est de 330 degrés, & retranchant 360 degrés de leur somme, on aura la distance AK ou Ab de la Lune à son Nœud, de 30 degrés, avec laquelle on trouvera la latitude simple de la Lune KS, de $2^d\ 30'\ 30''$, qui est septentrionale, à cause que la Lune se trouve dans la partie septentrionale de son Orbite, depuis son Nœud ascendant jusqu'à son Nœud descendant. Retranchant de cette latitude, l'arc Kb, qui a été trouvé de 4 minutes vers le Midi, on aura la latitude véritable de la Lune, de $2^d\ 26'\ 30''$.

CHAPITRE V.

De la situation des Nœuds de la Lune sur l'Ecliptique.

APRÉS avoir expliqué de quelle maniére l'on conçoit que l'Orbite de la Lune est inclinée à l'Ecliptique, suivant les différentes situations des Nœuds de cette Planete à l'égard du Soleil; il faut déterminer la situation de ses Nœuds sur l'Ecliptique, ce qui se peut pratiquer en différentes maniéres.

Première Méthode de déterminer les Nœuds de la Lune.

On observera la hauteur méridienne des Etoiles fixes qui sont près du Zodiaque, & leur passage par le Méridien à l'égard du Soleil, pour connoître leur situation par rapport à l'Ecliptique, de la maniére qui a été enseignée dans le premier Livre.

On examinera ensuite la trace de la Lune au travers de ces Etoiles, & dans les temps qu'elle s'approche de l'Ecliptique, on observera le passage de la Lune & celui de quelques-unes de ces Etoiles par les fils placés à angles de 45 degrés au foyer d'une Lunette appuyée sur une Machine parallactique, & on déterminera la ſituation apparente de la Lune par rapport à ces Etoiles, & par conſequent à l'égard de l'Ecliptique.

On fera de pareilles obſervations après le paſſage de la Lune par l'Ecliptique, & on décrira ſa route apparente, qui marquera le lieu où l'Orbite coupe l'Ecliptique. On prendra enſuite l'intervalle de temps entre les deux obſervations, & on cherchera la partie proportionnelle qui convient à la trace de la Lune, décrite depuis la premiére obſervation juſqu'à ſon interſection avec l'Ecliptique. L'adjoûtant au temps de la premiére obſervation, on aura le temps que la Lune eſt arrivée à l'un de ſes Nœuds.

Cette méthode n'eſt pas ſujette aux erreurs cauſées par la réfraction qui éleve également les Etoiles fixes & la Lune lorſqu'elles ſont à une même hauteur ſur l'horiſon; mais il eſt néceſſaire d'y employer la parallaxe, qui eſt inſenſible dans les Etoiles fixes, mais qui fait paroître la Lune au deſſous du lieu où elle répond dans le Ciel lorſqu'elle eſt conſidérée du centre de la Terre; ainſi faute d'y avoir égard, on pourroit tomber dans des erreurs conſidérables ſur la détermination du vrai lieu du Nœud de la Lune.

Seconde Méthode de déterminer les Nœuds de la Lune, par les Eclipſes.

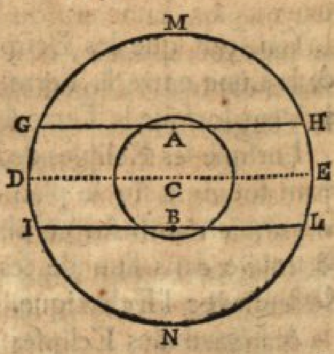
On ſçait que les Eclipſes du Soleil ſe font par l'interpoſition de la Lune entre la Terre & le Soleil, & que les Eclipſes de Lune arrivent lorſque la Terre ſe rencontre entre le Soleil & la Lune.

Lorſque les Eclipſes de Lune ſont centrales, la Terre & le Soleil étant toûjours ſur le plan de l'Ecliptique, il ſuit que le centre de la Lune eſt auſſi ſur ce plan, & que par conſéquent cette Planete ſe trouve dans l'un de ſes Nœuds, qui eſt l'interſection de ſon Orbite avec l'Ecliptique.

A l'égard des Eclipſes du Soleil, elles peuvent nous paroître centrales, ſans que le centre de la Lune ſoit ſur le plan de l'Ecliptique, parce que cette Planete étant beaucoup plus près de nous que le Soleil, un Obſervateur placé ſur la circonférence de la Terre, la voit par l'effet de la parallaxe, au deſſous du lieu où elle ſeroit vûe du centre de la Terre, pendant que le Soleil ne paroît pas changer ſenſiblement de ſituation, à cauſe de ſa parallaxe qui n'eſt que de peu de ſecondes. Ainſi ſans la connoiſſance de la diſtance de la Lune à la Terre & du parallele où nous ſommes ſitués, on ne peut trouver, par ce moyen, exactement la ſituation du Nœud de la Lune.

Il faut donc, pour une plus grande préciſion, employer dans la recherche des Nœuds, les Eclipſes de Lune centrales, qui ne ſont point ſujettes aux erreurs cauſées par la parallaxe & par la réfraction, parce que la grandeur de ces Eclipſes qui ſont cauſées par l'ombre de la Terre, ne dépend point du lieu où nous ſommes placés, ni de la hauteur de cet Aſtre ſur l'horiſon; les Eclipſes de Lune paroiſſant centrales à tous les habitans de la Terre lorſque le centre du Soleil, de la Terre & de la Lune, ſont réellement dans une même ligne, & par conſéquent ſur un même plan qui eſt celui de l'Ecliptique.

Comme la grandeur de l'ombre de la Terre excede de beaucoup celle du diſque de la Lune, en ſorte qu'on ne peut point en diſcerner les termes, on obſervera le temps de la demeure des Taches dans l'ombre, & on reconnoîtra que l'Eclipſe eſt centrale lorſque deux de ces Taches, comme *A* & *B*, également éloignées de part & d'autre du centre de la Lune, demeurent un temps égal dans l'ombre de la Terre. Car alors les cordes *GH, IL*, que décrivent ces Taches dans l'ombre de la Terre *DMEN*, étant égales, les ſegments *GMH, IML*, ſont auſſi égaux. Adjoûtant de part & d'autre, les eſpaces *GDEH* & *DEIL*, qui ſont égaux entr'eux, puiſqu'on ſuppoſe les Taches *A* & *B*, également éloignées du centre *C*, on aura la ſurface *DMEC*, égale à la ſurface *DNEC*; & par conſéquent le centre *C* de la Lune, ſera auſſi le centre du cercle *DMEN*, qui repréſente l'ombre de la Terre. Calculant pour le temps obſervé de l'Eclipſe centrale, le vrai lieu du Soleil, on aura à ſon oppoſite, le vrai lieu de la Lune, qui eſt dans ſon Nœud aſcendant lorſque cette Planete paſſe de la latitude méridionale à la latitude ſeptentrionale, & dans ſon Nœud deſcendant lorſqu'elle paſſe d'une latitude ſeptentrionale à une latitude méridionale.



EXEMPLE I.

EXEMPLE I.

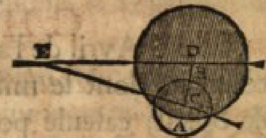
Le 16 Avril de l'année 1707, on a obſervé à Paris une Eclipſe centrale, dont le milieu a été déterminé à $13^h\ 48'$. Le vrai lieu du Soleil, calculé pour ce temps, étoit de $0^f\ 26^d\ 19'\ 17''$, ce qui donne le vrai lieu de la Lune qui étoit à ſon oppoſite, de $6^f\ 26^d\ 19'\ 17''$ pour le 16 Avril 1707, à $13^h\ 48'$, temps vrai, qui, dans cet Exemple, ne différe que de quelques ſecondes du temps moyen. La Lune paſſoit alors de la latitude ſeptentrionale à ſa latitude méridionale, & ſe trouvoit par conſéquent dans ſon Nœud deſcendant. Le Nœud aſcendant de la Lune étoit donc alors à $26^d\ 19'\ 17''$ du Bélier, qu'on peut établir pour époque de ſon Nœud.

EXEMPLE II.

Le 9 Septembre 1718, on a obſervé à Paris une Eclipſe preſque centrale, dont le milieu a été déterminé à $8^h\ 4'\ 5''$. Le vrai lieu du Soleil étoit alors à $16^d\ 40'$ de la Vierge, & par conſéquent le vrai lieu de la Lune étoit à $16^d\ 40'$ des Poiſſons, le 9 Septembre 1718, à $8^h\ 4'\ 5''$, temps vrai, & à $8^h\ 1'\ 5''$, temps moyen. La Lune paſſoit alors de la latitude ſeptentrionale à ſa latitude méridionale, & ſe trouvoit par conſéquent dans ſon Nœud deſcendant. Le Nœud aſcendant étoit donc alors à $16^d\ 40'$ de la Vierge.

On peut auſſi déterminer le vrai lieu de la Lune par des Eclipſes partiales de la Lune, pourvû que l'on connoiſſe en minutes de degré, le demi-diametre de la Lune au temps de l'obſervation, & celui de l'ombre, qui eſt égal à la parallaxe de la Lune moins le demi-diametre du Soleil. Car ayant déterminé par l'obſervation, la grandeur de l'Eclipſe, qui eſt meſurée par AB, on la retranchera du demi-diametre de l'ombre AD, & l'on aura DB, diſtance du centre de l'ombre au bord de la Lune, qu'il faut adjoûter au demi-diametre CB de la Lune, pour avoir CD, qui meſure ſa latitude, laquelle eſt ſeptentrionale lorſque la partie éclipſée de la Lune eſt vers le Midi, & méridionale lorſqu'elle eſt vers le Nord.

Préſentement dans le Triangle DCE, rectangle en C, la latitude CD de la Lune eſt connuë, auſſi-bien que l'inclinaiſon de l'Orbite à l'égard de l'Ecliptique, qui eſt de $5^d\ 17'$, à cauſe que le Soleil eſt près des Nœuds de la Lune;



c'eſt pourquoi on trouvera la diſtance DE du centre de l'ombre à l'un de ſes Nœuds, qui eſt aſcendant lorſque l'ombre de la Terre eſt vers le Nord, & que la latitude de la Lune va en diminuant, ou bien lorſque cette ombre eſt vers le Midi, & que la latitude de la Lune va en augmentant; & qui eſt deſcendant lorſque l'ombre de la Terre eſt vers le Nord, & que la latitude de la Lune va en augmentant, ou bien lorſque l'ombre de la Terre eſt vers le Midi, & que la latitude de la Lune va en diminuant.

EXEMPLE III.

Le 26 Mars 1717, on a obſervé à Paris une Eclipſe de Lune, dont le milieu a été déterminé à $15^h\ 16'$, & la grandeur, de 7 doigts 17 minutes vers le Nord.

Le demi-diametre de la Lune étoit alors de $15'\ 46''$, & celui de l'ombre, de $42'\ 43''$.

On ſuppoſe le diametre de la Lune diviſé en 12 parties égales, qu'on appelle *doigts*, & chaque doigt en 60 minutes: c'eſt pourquoi l'on fera, comme 12 ſont à 7 & $\frac{17}{60}$; ainſi $31'\ 32''$ ſont à $19'\ 8''$, qui meſurent la partie éclipſée de la Lune AB. La retranchant du demi-diametre de l'ombre AD, qui eſt de $42'\ 43''$, on aura BD, de $23'\ 35''$, auquel il faut adjoûter BC, de $15'\ 46''$, pour avoir la latitude de la Lune CD, de $39'\ 21''$, qui eſt méridionale, à cauſe que l'ombre de la Terre étoit vers le Nord.

Maintenant dans le Triangle DCE, rectangle en C, dont CD eſt connu de $39'\ 21''$, & l'angle CED, de $5^d\ 17'$, on aura la diſtance DE du centre de l'ombre au Nœud le plus proche, de $7^d\ 8'\ 26''$, qui eſt aſcendant, à cauſe que l'ombre de la Terre étoit vers le Nord, & que ſa latitude alloit en diminuant. Le vrai lieu du Soleil étoit alors de $0^f\ 6^d\ 20'\ 43''$, & par conſéquent le vrai lieu du centre de l'ombre, de $6^f\ 6^d\ 20'\ 43''$. Y adjoûtant l'arc ED, qu'on vient de trouver de $7^d\ 8'\ 26''$, on aura le vrai lieu du Nœud aſcendant de la Lune, de $6^f\ 13^d\ 29'\ 9''$. *Ce qu'il falloit trouver.*

CHAPITRE VI.

Du Mouvement des Nœuds de la Lune.

ON sçait que les Eclipses du Soleil & de la Lune arrivent lorsque la Lune étant en Conjonction ou en Opposition avec le Soleil, se trouve en même temps près de ses Nœuds, c'est-à-dire, près de l'intersection de son Orbite avec l'Ecliptique; & comme les Eclipses paroissent lorsque le Soleil est en divers endroits de l'Ecliptique, il suit que les Nœuds de la Lune ont un mouvement sur l'Ecliptique, avec lequel ils entraînent l'Orbe de la Lune.

Pour déterminer la quantité de ce mouvement, on examinera les observations des Eclipses, faites en diverses saisons & en différentes années, & on cherchera pour ces temps, le vrai lieu du Nœud de la Lune, de la maniére que nous l'avons enseignée ci-dessus. Prenant la différence entre le vrai lieu du Nœud dans ces différentes observations, on aura la quantité de son mouvement pendant l'intervalle entre ces observations; d'où l'on déduira celui qui répond à un certain nombre de jours & d'années.

EXEMPLE.

Le 16 Avril de l'année 1707, à $13^h\ 48'$, le lieu du Nœud ascendant a été déterminé à Paris par l'observation d'une Eclipse centrale de Lune, de $0^s\ 26^d\ 19'$.

Le 26 Mars 1717, à $15^h\ 16'$, le lieu du Nœud ascendant a été déterminé à Paris par l'observation d'une Eclipse partiale, de $6^s\ 13^d\ 29'$.

Le 9 Septembre 1718, à $8^h\ 4'$, le lieu du Nœud ascendant a été déterminé à Paris par l'observation d'une Eclipse presque centrale, de $5^s\ 16^d\ 40'$.

On voit d'abord par ces deux derniéres observations, que le mouvement des Nœuds de la Lune ne se fait pas suivant la suite des Signes, puisque le Nœud ascendant étoit plus avancé le 26 Mars 1717 que le 9 Septembre 1718. L'intervalle entre ces deux observations, est de $531^j\ 0^h\ 16'\ 48''$, pendant lesquels le mouvement des Nœuds contre la ſuite des Signes, de l'Orient vers l'Occident, a été de $26^d\ 49'\ 0''$; c'eſt pourquoi ſi l'on diviſe $26^d\ 49'\ 0''$ par $531^j\ 16^h\ 48'\ 0''$, on aura le mouvement journalier du Nœud, de $3'\ 2''$.

Si l'on compare auſſi les obſervations du 16 Avril 1707 & du 9 Septembre 1718, on trouvera que dans cet intervalle, qui eſt de 11 années, dont trois ſont biſſextiles, $145^j\ 18^h\ 16'$, le mouvement des Nœuds contre la ſuite des Signes, a été de $219^d\ 39'$, qui, étant partagés par le nombre des jours écoulés entre ces obſervations, qui eſt de $4163^j\ 18^h\ 16'$, donnent le mouvement journalier du Nœud, de $3'\ 10''$. On aura auſſi le mouvement annuel, en faiſant, comme $4163^j\ 18^h\ 16'$, ſont à $219^d\ 39'$; ainſi 365 jours ſont à $19^d\ 15'\ 0''$. Enfin, ſi l'on fait, comme $219^d\ 39'$, ſont à 360 degrés; ainſi $4163^j\ 18^h\ 16'$, ſont à un quatriéme nombre, on trouvera la révolution entiére des Nœuds de la Lune autour de l'Ecliptique, de $6824^j\ 7^h\ 33'$, ou 18 années communes & $254^j\ 7^h$.

Depuis l'Eclipſe de Lune du 9 Septembre 1718, on en a obſervé une preſque centrale le 26 Mars 1736, dont le milieu eſt arrivé à Paris à $12^h\ 9'\ 0''$.

Le vrai lieu du Soleil étoit alors de $0^ſ\ 6^d\ 36'$, & celui de la Lune, qui eſt à l'oppoſite, de $6^ſ\ 6^d\ 36'$.

Entre cette obſervation & celle du 16 Avril 1707, dont le milieu a été obſervé à $13^h\ 48'$, il y a 29 années, dont 8 biſſextiles moins $21^j\ 1^h\ 39'$, ce qui, ſuppoſé la révolution du Nœud, de 18 années 254 jours & 7 heur. telle qu'on l'a trouvée par l'obſervation de l'Eclipſe de Lune de 1718, comparée avec celle de 1707, fait voir que le Nœud de la Lune avoit parcouru une révolution entiére, ſix Signes & quelques degrés; & qu'ainſi le lieu du Nœud aſcendant étant au temps de l'Eclipſe de 1707, à $26^d\ 19'$ du Bélier, il devoit être dans celle de 1736 à l'oppoſite, & que la Lune, dont le vrai lieu étoit alors de $6^ſ\ 6^d\ 36'$, ſe trouvoit dans ſon Nœud aſcendant.

Retranchant $6^ſ\ 6^d\ 36'$ de $0^ſ\ 26^d\ 19'$, on aura $6^ſ\ 19^d\ 43'$, ou $199^d\ 43'$, qui, étant adjoûtés à une révolution entiére de 360 degrés, donnent le mouvement du Nœud de la Lune, de $559^d\ 43'$, ou 33583 minutes dans l'intervalle de 29 années communes moins $13^{j}\ 1^{h}\ 39'$, ou $10571^{j}\ 22^{h}\ 21'$. Partageant $33583'$ par $10571^{j}\ 22^{h}\ 21'$, on aura le mouvement journalier des Nœuds, de . . . . $3'\ 10''\ 36'''$.

On trouvera auſſi le mouvement annuel des Nœuds, en faiſant, comme $10571^{j}\ 22^{h}\ 21'$ ſont à $559^{d}\ 43'$; ainſi 365 jours ſont à $19^{d}\ 19'\frac{1}{2}$.

Enfin l'on fera, comme $559^{d}\ 43'$ ſont à 360 degrés; ainſi $10571^{j}\ 22^{h}\ 21'$ ſont au temps que les Nœuds employent à faire leurs révolutions, que l'on trouvera de 6800 jours.

Nous avons d'abord comparé enſemble le lieu des Nœuds de la Lune, obſervé dans des temps peu éloignés les uns des autres, pour reconnoître de quel ſens ils font leurs mouvements, & déterminer à peu-près le temps de leurs révolutions, afin que dans la comparaiſon des obſervations éloignées les unes des autres, on ne pût ſe méprendre d'une ou de pluſieurs révolutions entiéres; examinons préſentement quel eſt le mouvement des Nœuds, qui réſulte des obſervations les plus anciennes, comparées aux nôtres.

Ptolemée, dans ſon Almageſte, rapporte trois obſervations d'Eclipſes de Lune, faites à Babylone par les Chaldéens, qui ſont les plus anciennes dont on nous ait conſervé la mémoire.

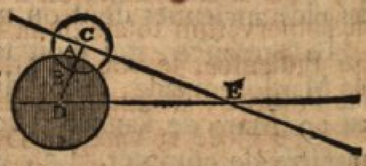
La premiére, qui étoit totale, eſt arrivée la premiére année de Mardocempade, le 29 du mois de *Thoth*, ce qui ſe rapporte au 19 Mars de l'année 720 avant Jeſus-Chriſt, ſuivant notre maniére de compter. Le commencement fut obſervé à $7^{h}\ 30'$, du ſoir, & le milieu ou la plus grande Eclipſe à $9^{h}\ 30'$.

La ſeconde Eclipſe fut obſervée le 19 du mois de *Thoth* de la ſeconde année de Mardocempade, ce qui ſe rapporte au 8 Mars de l'année 719 avant Jeſus-Chriſt. Le milieu arriva à minuit, & ſa grandeur fut déterminée de 3 doigts vers le Midi.

La troiſiéme fut obſervée le 15 du mois de *Phamenoth* de la même année, qui ſe rapporte au 1.er Septembre de l'année 719 avant Jeſus-Chriſt. Le milieu arriva à $8^{h}\frac{1}{2}$ du ſoir, & ſa grandeur parut plus de la moitié vers le Nord.

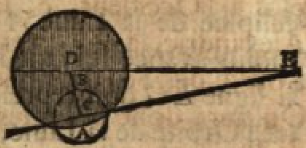
Comme on ne peut pas ſçavoir ſi la premiére de ces Eclipſes étoit centrale, & de combien la Lune étoit alors éloignée de ſes Nœuds, nous ne l'employerons point pour cette recherche, & nous examinerons ce qui réſulte des deux autres, en cette maniére.

La différence des Méridiens entre Babylone & Alexandrie est, suivant Ptolemée, de 50 minutes d'heure dont Alexandrie est plus à l'Occident, & la différence des Méridiens entre Paris & Alexandrie, a été déterminée par les observations de l'Académie Royale des Sciences, de $1^h\ 52'$, dont Paris est plus à l'Occident. On aura donc la différence entre les Méridiens de Babylone & de Paris, de $2^h\ 42'$, qu'il faut retrancher du milieu de l'Eclipse du 8 Mars de l'année 719 avant Jesus-Christ, observé à minuit, pour avoir le milieu de cette Eclipse, réduit au Méridien de Paris, le 8 Mars de l'année 719 avant Jesus-Christ, à $9^h\ 18'$ du soir. Le demi-diametre du Soleil étoit alors, suivant nos Tables, de $16'\ 2''$, & sa parallaxe horisontale, de $10''$. Le demi-diametre de la Lune, de $14'\ 46''$, & sa parallaxe horisontale, de $54'\ 38''$. Retranchant de cette parallaxe, celle du Soleil, qui est de $10''$, & son demi-diametre, de $16'\ 2''$, on aura $38'\ 26''$, auxquelles il faut adjoûter $30''$, pour avoir le demi-diametre de l'ombre de la Lune *DA*, de $38'\ 56''$. La grandeur de l'Eclipse ayant été observée de 3 doigts, c'est-à-dire, de $7'\ 23''$, on la retranchera du demi-diametre de l'ombre, de $38'\ 56''$, & l'on aura la distance *BD* du centre de l'ombre au bord le plus près de la Lune, de $31'\ 33''$, à laquelle il faut adjoûter le demi-diametre *BC* de la Lune, qui est de $14'\ 46''$, pour avoir la distance *CD* du centre de la Lune à celui de l'ombre de la Terre, de $46'\ 19''$, qui est septentrionale, à cause que la partie éclipsée étoit vers le Midi; & dans le Triangle sphérique *ECD*, rectangle en *C*, dont le côté *CD* est connu de $46'\ 19''$, & l'angle *CED*, de $5^d\ 17'$, qui mesure l'inclinaison de l'Orbite de la Lune *CE* à l'égard de l'Ecliptique *DE*, on trouvera la distance *DE* du centre de l'ombre au Nœud de la Lune dans l'observation du 8 Mars de l'année 719 avant J. C. de $8^d\ 24'\ 50''$.



Dans l'Eclipse de Lune du 1.er Septembre de la même année, le demi-diametre du Soleil étoit, suivant nos Tables, de $16'\ 7''$, celui de la Lune, de $16'\ 46''$, & sa parallaxe horisontale, de $61'\ 57''$, d'où l'on tire le demi-diametre de l'ombre *DA*, de $46'\ 10''$.

Si l'on suppose présentement que la grandeur de l'Eclipse, qui a été obſervée de plus de la moitié, ait été de 6 doigts $\frac{1}{4}$, on aura la quantité de la Lune éclipſée *AB,* de 17′ 28″, qui étant retranchée de *DA* 46′ 10″, reſte la diſtance *DB* du centre de l'ombre au bord le plus près de la Lune, de 28′ 42″, à laquelle adjoûtant le demi-diametre de la Lune, de 16′ 46″,

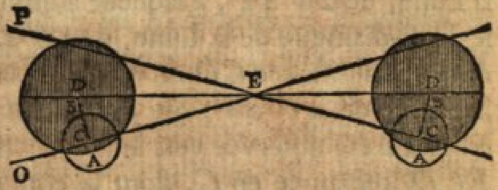


on aura la diſtance *CD* du centre de la Lune à celui de l'ombre de la Terre, de 45′ 28″, qui eſt méridionale, à cauſe que la partie éclipſée a été obſervée vers le Nord; & dans le Triangle ſphérique *ECD,* rectangle en *C,* dont le côté *CD* eſt connu de 45′ 28″, & l'angle *CED,* de 5′ 17″, on aura la diſtance *DE* du centre de l'ombre de la Terre au Nœud de ſa Lune dans l'obſervation du $1.^{er}$ Septembre de l'année 719 avant J. C. de 8^{d} 15′ 28″.

Comme on n'a pas marqué dans cette obſervation, ni dans la précédente, ſi la latitude de la Lune alloit en augmentant ou en diminuant, ce qui ſert à reconnoître le Nœud où elle ſe trouve, on le déterminera en cette maniére.

On calculera pour le 19 Mars de l'année 720 avant Jeſus-Chriſt, à 9^{h} 30′ à Babylone, ou à 6^{h} 48′ au Méridien de Paris, temps de l'obſervation totale de la premiére Eclipſe de Lune, rapportée par Ptolemée, le vrai lieu du Soleil, qu'on trouvera à 21^{d} 27′ des Poiſſons, & on aura celui de la Lune, qui eſt à l'oppoſite, à 21^{d} 27′ de la Vierge. Depuis cette obſervation juſqu'à celle du $1.^{er}$ Septembre 719, il y a près de 18 mois, pendant leſquels le mouvement des Nœuds a été d'environ 29 degrés contre la ſuite des Signes, qu'il faut par conſéquent retrancher du lieu de la Lune dans l'obſervation de l'année 720, que l'on ſuppoſe être peu différent de celui de ſon Nœud, à cauſe que l'Eclipſe étoit totale, & on aura le lieu d'un des Nœuds de la Lune dans l'obſervation du $1.^{er}$ Septembre 719, au $23.^{me}$ degré du Lion, & ſon oppoſite au $23.^{me}$ degré du Verſeau. Le milieu de cette Eclipſe a été obſervé à 8^{h} 30′ du ſoir à Babylone, c'eſt-à-dire, à 5^{h} 48′ au Méridien de Paris. Calculant pour ce temps le vrai lieu du Soleil, on le trouve à 1^{d} 7′ de la Vierge, & celui du centre de l'ombre qui lui étoit oppoſée, à 1^{d} 7′ des Poiſſons. Le lieu du Nœud que nous venons de trouver au $23.^{me}$ degré du Verſeau, étoit donc moins avancé d'environ 8 degrés que le centre de l'ombre;

d'où il résulte que la Lune étoit près de son Nœud descendant, comme on peut le voir dans la Figure ci-jointe, où la partie éclipsée de la Lune AB étant vers le Nord, & le lieu du Nœud moins avancé suivant la suite des Signes que le lieu de la Lune, la ligne EO doit représenter l'Orbite de la Lune, & le point E son Nœud descendant où elle passe de la partie septentrionale à la partie méridionale; au lieu que si l'ombre étant vers le Nord, le lieu du Nœud eût été plus avancé que celui de la Lune, la ligne EP auroit représenté son Orbite, & le point E son Nœud ascendant.



Pour déterminer présentement le mouvement des Nœuds de la Lune, par la comparaison des observations anciennes avec les modernes, on retranchera du vrai lieu du centre de l'ombre, qui étoit le 1.er Septembre de l'année 719 avant Jesus-Christ, à $1^d\ 7'$ des Poissons, sa distance au Nœud descendant de la Lune, qui a été trouvée de $8^d\ 15'$, & l'on aura le vrai lieu du Nœud descendant de la Lune, le 1.er Septembre de l'année 719 avant Jesus-Christ, à $22^d\ 52'$ du Verseau, & par conséquent le vrai lieu de son Nœud ascendant, à $22^d\ 52'$ du Lion.

Le Nœud ascendant de la Lune étoit le 9 Septembre 1718 à $8^h\ 4'$ du soir, à $16^d\ 40'$ de la Vierge, plus avancé de $23^d\ 48'$, suivant la suite des Signes, que dans l'observation du 1.er Septembre de l'année 719 avant Jesus-Christ; d'où il suit qu'il manque cette quantité que les Nœuds de la Lune qui vont en sens contraire, n'ayent achevé un certain nombre de révolutions entiéres, qu'on trouve être de 131 révolutions, en divisant l'intervalle entre ces observations, qui est de 2437 années, dont 608 bissextiles, $19^j\ 2^h\ 16'$, par la révolution des Nœuds, trouvée ci-dessus de 6800 jours; c'est pourquoi si on partage cet intervalle par 130 révolutions $336^d\ 12'$, on aura la révolution moyenne des Nœuds de la Lune, de $6798^j\ 7^h\ 0'$.

On fera ensuite, comme $6798^j\ 7^h\ 0'$ sont à 365 jours; ainsi 360 degrés sont au mouvement annuel des Nœuds, qu'on trouvera de . . . . $19^d\ 19'\ 45''$.

Enfin,

Enfin, si l'on divise ce mouvement annuel par 365, on aura le mouvement journalier du Nœud, de . . . . 3′ 10″ 38‴, peu différent de celui que nous avions déterminé par des observations qui n'étoient éloignées les unes des autres que d'un intervalle de 12 années.

Si l'on examine de même le mouvement des Nœuds, qui résulte de l'Eclipse de Lune du 8 Mars de l'année 719 avant Jesus-Christ, dont le milieu est arrivé à 9^h 18′ du matin au Méridien de Paris, on trouvera d'abord que le vrai lieu du Soleil étoit à 10^d 36′ des Poissons, & que par conséquent le centre de l'ombre de la Terre, qui est à l'opposite, étoit à 10^d 36′ de la Vierge. Dans l'observation suivante du 1.er Septembre 719, le vrai lieu du Nœud ascendant a été déterminé à 22^d 52′ du Lion, ainsi il devoit être le 8 Mars au commencement de la Vierge; d'où il suit que la Lune, qui étoit à 10^d 36′ du même Signe, avoit passé son Nœud ascendant. Retranchant donc du lieu du centre de l'ombre, qui a été déterminé à 10^d 36′ de la Vierge, la distance de ce centre au Nœud de la Lune, qui a été trouvée le 8 Mars 719, de 8^d 24′ 50″, *(Voy. page 286.)* on aura le vrai lieu du Nœud ascendant de la Lune à 2^d 11′ de la Vierge, plus avancé que le 1.er Septembre de la même année à 5^h 48′, de 9^d 21′, qui mesurent le mouvement des Nœuds contre la suite des Signes dans l'espace de 177^j moins 3^h 30′ entre ces observations, ce qui est à raison de 3′ 10″ 20‴ par jour, & fait voir que le mouvement des Nœuds qui résulte de cette observation comparée aux modernes, doit être le même que celui que nous venons de déterminer.

CHAPITRE VII.

Du Mouvement vrai de la Lune à l'égard de la Terre.

NOUS avons enseigné dans le Livre précédent, diverses méthodes pour déterminer par des observations immédiates, le vrai lieu du Soleil; ces mêmes méthodes peuvent être employées pour trouver le vrai lieu de la Lune, pourvû que l'on ait égard à l'effet de la parallaxe qui la fait paroître souvent fort éloignée du lieu où elle seroit vûe du centre de la Terre, auquel il est néceſſaire de rapporter les mouvements des Corps céleſtes ; ainſi nous nous contenterons d'expoſer ici ſeulement les méthodes avec leſquelles on peut déterminer ſon vrai lieu avec plus de facilité & d'évidence.

Première Méthode de déterminer le vrai lieu de la Lune.

On obſervera lorſque la Lune eſt Pleine, le paſſage de ſes deux bords par le Méridien, & lorſqu'elle eſt en Croiſſant ou en Décours, le paſſage de ſes deux cornes par le Méridien, dont le milieu donnera l'heure que ſon centre a paſſé par le Méridien. On prendra la différence entre ce paſſage & celui du centre du Soleil par le Méridien qui a précédé ou ſuivi immédiatement, & on la convertira en degrés, à raiſon de 15 degrés par heure, pour avoir la différence d'aſcenſion droite entre le Soleil & la Lune, qui, étant adjoûtée à l'aſcenſion droite du Soleil pour le temps de l'obſervation lorſque le paſſage de la Lune a ſuivi celui du Soleil, ou qui en étant retranchée lorſqu'il l'a précédé, donnera l'aſcenſion droite véritable de la Lune pour le temps de ſon paſſage par le Méridien.

On obſervera auſſi la hauteur méridienne des deux bords de la Lune lorſqu'elle eſt Pleine, & de ſes deux cornes lorſqu'elle eſt en Croiſſant ou en Décours ; on retranchera de la hauteur de chaque bord ou de chaque corne, la réfraction qui lui convient, & on y adjoûtera la parallaxe pour avoir la hauteur véritable des deux bords ou des deux cornes, dont le milieu ſera la hauteur véritable du centre de la Lune. La différence entre cette hauteur & celle de l'Equateur du lieu où l'on obſerve, donnera la déclinaiſon de la Lune, qui ſera méridionale lorſque cette hauteur eſt plus petite que celle de l'Equateur, & ſeptentrionale lorſqu'elle eſt plus grande.

L'aſcenſion droite & la déclinaiſon de la Lune étant ainſi connuës pour le temps de ſon paſſage par le Méridien, on déterminera par les regles de la Trigonométrie ſphérique, ſa longitude & ſa latitude.

EXEMPLE.

Le 30 Janvier de l'année 1708, le paſſage du bord occidental de la Lune par le Méridien, a été obſervé 5^h 44′ 23″ après celui du centre du Soleil, le paſſage de la premiére corne à 5^h 45′ 14″, & le paſſage de la ſeconde corne à 5^h 45′ 58″. La différence entre le paſſage de ces deux cornes, eſt de 44″, dont la moitié 22 étant adjoûtée à 5^h 45′ 14″, donne le paſſage du centre de la Lune à 5^h 45′ 36″, temps vrai. Réduiſant ces heures en degrés, on aura la différence entre l'aſcenſion droite du Soleil & celle de la Lune, de 86^d 24′ 0″, qui, étant adjoûtée à l'aſcenſion droite du Soleil, qu'on a calculée de 312^d 29′ 10″ pour 5^h 45′ 36″ du ſoir, donne l'aſcenſion droite de la Lune le 30 Janvier 1708, à 5^h 45′ 36″ du ſoir, de 398^d 53′ 10″, ou de 38^d 53′ 10″.

La hauteur méridienne apparente de la corne ſupérieure de la Lune, a été obſervée de 59^d 2′ 30″, & celle de la corne inférieure, de 58^d 32′ 20″, ce qui donne la hauteur apparente de ſon centre, de 58^d 47′ 25″, dont retranchant 35″ pour la réfraction, reſte 58^d 46′ 50″, auxquels il faut adjoûter 32′ 0″ pour la parallaxe qui convient à cette hauteur, & l'on aura la hauteur véritable du centre de la Lune, de 59^d 18′ 50″. Retranchant de cette hauteur, celle de l'Equateur, qui eſt à l'Obſervatoire de Paris, de 41^d 9′ 50″, reſte la declinaiſon ſeptentrionale de la Lune au temps de l'obſervation, de 18^d 9′ 0″, par le moyen de laquelle & de ſon aſcenſion droite que l'on vient de trouver de 38^d 53′ 10″, on déterminera ſa longitude, de 1^f 12^d 13′ 27″, & ſa latitude ſeptentrionale, de 2^d 45′ 34″ pour le temps de l'obſervation.

Seconde Méthode de déterminer le vrai lieu de la Lune.

On obſervera le temps du commencement & de la fin d'une Eclipſe de Lune pour avoir l'heure à laquelle l'Eclipſe a été la plus grande, ce que l'on peut auſſi déterminer en prenant le milieu entre le temps où la Lune a paru éclipſée d'une égale quantité après le commencement & avant la fin de l'Eclipſe. On calculera pour ce temps, le vrai lieu du Soleil, dont l'oppoſite donnera le vrai lieu du centre de l'ombre de la Terre, qui ſera le même que celui de la Lune lorſque l'Eclipſe eſt centrale, mais qui, dans les Eclipſes partiales, en différe d'une certaine quantité que l'on trouvera en cette maniére.

On prendra la différence entre le vrai lieu du centre de l'ombre de la Terre, & le lieu du Nœud de la Lune, qui eſt meſuré par l'arc de l'Ecliptique DE *(Fig. 41.)* & dans le Triangle ſphérique DCE, rectangle en C, dont l'hypothénuſe DE eſt connuë, & l'angle DEC, meſure l'inclinaiſon de l'Orbite à l'égard de l'Ecliptique, qui eſt de $5^d\ 17'$, on trouvera l'arc CE, diſtance du centre de la Lune ſur ſon Orbite au vrai-lieu de ſon Nœud. Maintenant dans le Triangle ſphérique CLE, rectangle en L, dont l'hypothénuſe CE eſt connuë, & l'angle CEL, on trouvera l'arc CL, qui meſure la latitude de la Lune, & l'arc EL, diſtance de la Lune à ſon Nœud, reduite à l'Ecliptique, qu'il faut retrancher du vrai lieu du Nœud de la Lune lorſqu'il eſt plus avancé ſuivant la ſuite des Signes, que le centre de l'ombre ; & qu'il faut y adjoûter au contraire lorſqu'il eſt moins avancé, & on aura le vrai lieu de la Lune, réduit à l'Ecliptique. *Ce qu'il falloit trouver.*

CHAPITRE VIII.

Des moyens Mouvements de la Lune.

AYANT déterminé par l'une des méthodes précédentes, le vrai lieu de la Lune en deux temps différents, on aura le mouvement apparent de la Lune, qui répond à l'intervalle compris entre ces obſervations.

Ce mouvement apparent eſt égal au moyen lorſque dans la ſeconde obſervation, la Lune ſe trouve dans la même ſituation que dans la premiére à l'égard de ſon Apogée ou de ſon Périgée, & que ſes inégalités ſont les mêmes.

Ainſi la détermination exacte du moyen mouvement de la Lune, demanderoit celle de la théorie de cette Planete, qui demande auſſi réciproquement la connoiſſance du moyen mouvement, auquel il faut appliquer toutes les inégalités pour avoir ſa ſituation véritable.

Pour parvenir avec le plus d'exactitude qu'il eſt poſſible, à la connoiſſance des moyens mouvements, nous comparerons nos obſervations avec les plus anciennes dont on nous a conſervé la mémoire, afin que la différence qui provient des différentes inégalités de la Lune, venant à être partagée par un grand nombre de révolutions, en produiſe d'autant moins d'erreur dans la détermination de ſon moyen mouvement.

La plus ancienne de ces obſervations eſt celle qui, au rapport de Ptolemée *(Almageſte, liv. 2. chap. 6.)* a été obſervée à Babylone par les Chaldéens, le 19 Mars de l'année 720 avant Jeſus-Chriſt, ſuivant notre maniére de compter.

Le commencement de cette Eclipſe, qui étoit totale, a été obſervé à 7^h $20'$, & le milieu à 9^h $20'$.

La différence des Méridiens entre Paris & Babylone, ayant été déterminée ci-deſſus, de 2^h $32'$, dont Paris eſt plus à l'Occident, on aura le milieu de cette Eclipſe, réduit au Méridien de Paris, à 6^h $48'$.

Le vrai lieu du Soleil, ſuivant nos Tables calculées ſur la théorie du Soleil, étoit alors de 11^f 21^d $27'$; ainſi le vrai lieu de la Lune, qui étoit à ſon oppoſite, étoit de 5^f 21^d $27'$.

Le 20 Septembre de l'année 1717, on a obſervé à Paris une Eclipſe partiale, dont la grandeur étoit de 6 doigts 55 minutes, & dont le milieu fut déterminé à 6^h $2'$.

Le vrai lieu du Soleil étoit alors, ſuivant nos Tables, de 5^f 27^d $34'$; ainſi le vrai lieu de la Lune ſur ſon Orbite, étoit de 11^f 27^d $34'$.

Pour comparer enſemble ces obſervations, on réduira le temps de la derniére à la forme Julienne, afin d'avoir un intervalle d'années, dont trois communes & une biſſextile; ce que l'on fera en retranchant 11 jours du 20 Septembre 1717, & on aura le vrai lieu de la Lune, le 9 Septembre de l'année 1717, à 6^h $2'$, de 11^f 27^d $34'$.

Il y a donc entre cette obſervation & celle de l'année 720 avant Jeſus-Chriſt, 2437 années, dont 609 biſſextiles plus 174 jours moins 46 minutes, ce qui fait en tout 890288 jours moins 46 minutes, pendant leſquels il y a eu un certain nombre de révolutions plus 6 Signes 6 degrés & 7 minutes.

Il ſeroit aiſé, dans un ſi grand intervalle de temps, de ſe méprendre d'une ou même de pluſieurs révolutions, puiſque ce nombre de jours étant partagé par une révolution Lunaire, il s'y en trouve plus de 30 mille, & que chaque révolution s'acheve en moins de 40 mille minutes; ainſi une révolution de plus ou de moins, ne feroit qu'une erreur d'une minute & de quelques secondes dans l'intervalle du retour de la Lune au même point de l'Ecliptique.

Pour éviter les erreurs qui pourroient arriver de cette part, nous examinerons d'abord les observations des Eclipses éloignées l'une de l'autre d'un petit intervalle, pendant lequel le nombre des révolutions est connu, afin de déterminer à peu-près le temps du retour de la Lune au même point de l'Ecliptique, que l'on employera ensuite pour déterminer le nombre des révolutions écoulées entre des intervalles plus éloignés.

Entre les observations modernes, nous avons celles du 9 Septembre 1718 & du 29 Août 1719, qui sont arrivées à peu-près à la même heure du jour, dans l'intervalle desquelles il s'est écoulé 13 révolutions. Le milieu de la première Eclipse, qui étoit totale, a été observé le 9 Septembre 1718, à $8^h\ 4'$ du soir, le vrai lieu du Soleil étant de $5^s\ 16^d\ 40'$. Le milieu de la seconde Eclipse est arrivé le 29 Août 1719, à $8^h\ 32'$ du soir, le vrai lieu du Soleil étant de $5^s\ 5^d\ 47'$. Il y a dans cet intervalle, 354 jours & 18 minutes, auxquels il répond 13 révolutions moins $10^d\ 53'$, ce qui est à raison de $27^j\ 7^h\ 6'$ pour chaque retour de la Lune au même point de l'Ecliptique dont nous nous servirons pour comparer des observations plus éloignées les unes des autres.

Entre ces observations, nous avons celle du 15 Mars 1699, dont le milieu est arrivé à Paris à $7^h\ 23'$ du soir, le vrai lieu du Soleil étant de $11^s\ 25^d\ 30'$. La comparant à celle du 27 Mars de l'année 1717, dont le milieu est arrivé à $3^h\ 16'$ du matin, le vrai lieu du Soleil étant de $0^s\ 6^d\ 21'$, on aura 18 années, dont quatre sont bissextiles, $11^j\ 7^h\ 53'$, qui répondent à un certain nombre de révolutions plus $10^d\ 51'$. Partageant ce temps, qui est de $6585^j\ 7^h\ 53'$, par $27^j\ 7^h\ 6'$, on aura 241 pour quotient, & environ un quart pour fraction, ce qui fait voir qu'il y a dans cet intervalle, 241 révolutions; c'est pourquoi l'on divisera $6585^j\ 7^h\ 53'$ par 241 révolutions plus $10^d\ 51'$, en réduisant les jours en heures & minutes, & les révolutions en degrés & minutes, & on aura le temps du retour de la Lune au même point de l'Ecliptique, de $27^j\ 7^h\ 43'\ 6''$, ce qui donne beaucoup plus exactement la révolution moyenne de la Lune, dont on se ſervira pour comparer de plus grands intervalles, & arriver, pour ainſi dire, par degrés à une plus grande exactitude.

Nous avons dit ci-deſſus, qu'entre les obſervations des Eclipſes de Lune du mois de Mars de l'année 720 avant Jeſus-Chriſt, & du mois de Septembre de l'année 1717 après Jeſus-Chriſt, il y avoit 890288 jours moins 46 minutes, les partageant par $27^j\ 7^h\ 43'\ 6''$, on aura 32585 révolutions, & un peu plus d'une demi-révolution, ce qui s'accorde à la différence entre le vrai lieu du Soleil, déterminé dans ces deux obſervations, qui eſt de $6^ſ\ 6^d\ 12'$; c'eſt pourquoi ſi l'on diviſe 890288 jours moins 46 minutes par 32585 révolutions plus $6^ſ\ 6^d\ 12'$, on aura la révolution moyenne de la Lune à l'égard du même point de l'Ecliptique, de $27^j\ 7^h\ 43'\ 5''$, qui eſt la plus exacte que l'on puiſſe trouver par des obſervations éloignées, & à laquelle il n'y a d'autre correction à faire que celle qui provient des différentes inégalités de la Lune dans ces deux obſervations où la Lune s'eſt trouvée à peu-près à la même diſtance de ſon Apogée.

Pour s'aſſûrer plus particuliérement ſi la révoluion de la Lune eſt de la quantité que nous venons de déterminer, nous examinerons ſi elle ſe trouve exactement un certain nombre de fois dans l'intervalle qui s'eſt écoulé entre d'autres obſervations.

Nous choiſirons pour cet effet, l'Eclipſe de Lune du 19 Mars de l'année 199 avant Jeſus-Chriſt, qui eſt arrivée le même jour de l'année que celle de l'an 720 avant Jeſus-Chriſt, dont le milieu a été obſervé à Alexandrie à $13^h\ 20'$, le vrai lieu du Soleil étant de $11^ſ\ 25^d\ 25'$. Retranchant $1^h\ 52'$ pour la différence des Méridiens, dont Alexandrie eſt plus oriental que Paris, on aura le milieu de cette Eclipſe à Alexandrie, le 19 Mars, à $11^h\ 28'$ du ſoir, le même jour de l'année que celle de l'année 720 avant Jeſus-Chriſt. L'intervalle entre ces deux Eclipſes, eſt de 521 années, dont 130 biſſextiles plus $4^h\ 30'$, qui, étant partagées par $27^j\ 7^h\ 43'\ 6''$, donnent 6965 révolutions & une très-petite fraction. Diviſant préſentement ce même intervalle par 6965 révolutions plus $3^d\ 58'$, différence entre le lieu du Soleil dans ces deux obſervations, on aura la révolution moyenne de la Lune, de $27^j\ 7^h\ 43'\ 5''$, préciſément de même que nous l'avons déterminée par la comparaiſon précédente. On trouvera de même que depuis l'obſervation de l'Eclipſe de l'année 199 avant Jeſus-Chriſt, juſqu'à celle du 20 Septembre de l'année 1717, il y a 26520 révolutions de la même quantité de $27^{j}\ 7^{h}\ 43'\ 5''$.

Pour déterminer préſentement les moyens mouvements de la Lune, qui conviennent aux jours, aux heures, aux minutes & aux ſecondes, on diviſera 360 degrés par $27^{j}\ 7^{h}\ 43'\ 5''$, & on aura le mouvement journalier de la Lune, de $13^{d}\ 10'\ 35''$. Diviſant $13^{d}\ 10'\ 35''$ par 24 heures, on aura le mouvement horaire de la Lune, de $32'\ 56''\ 27'''\frac{1}{2}$; & partageant $32'\ 56''\ 27'''\frac{1}{2}$ par $60'$, on aura le moyen mouvement qui convient à une minute, de $32''\ 57'''$, & le moyen mouvement pour une ſeconde, de $33'''$. Multipliant le mouvement moyen journalier par 365, on aura le mouvement moyen de la Lune pour une année commune, & on trouvera de même les moyens mouvements qui conviennent aux centaines & milliémes d'années, dont on ſe ſervira pour conſtruire les Tables des moyens mouvements de la Lune.

CHAPITRE IX.

Des Epoques des moyens Mouvements de la Lune, de la ſituation de ſon Apogée, & de ſa premiére Inégalité.

ON appelle *Epoques des moyens mouvements de la Lune*, ou *d'une Planete*, le temps auquel cette Planete, conſidérée du centre de ſon moyen mouvement, répond à un certain point de l'Ecliptique.

Pour déterminer ces Epoques, on cherchera le temps où le vrai lieu de la Lune concourt avec le moyen, ou n'en différe que d'une petite quantité, ce qui doit arriver lorſque cette Planete eſt dans ſon Apogée ou ſon Périgée, parce qu'alors le rayon tiré de la Terre à la Lune, qui détermine dans l'Orbe de cette Planete, ſon vrai lieu, paſſe auſſi par le centre du moyen mouvement, & détermine ſon lieu moyen au même point de cet Orbe ; ainſi la connoiſſance du lieu de l'Apogée & du Périgée de la Lune, a une liaiſon néceſſaire avec les Epoques de ſes moyens mouvements.

Par

Par les obſervations de la Lune, faites en divers temps, on a remarqué que cette Planete étoit ſujette à beaucoup moins d'irrégularités lorſqu'elle eſt dans ſes Conjonctions & Oppoſitions avec le Soleil, que dans toutes ſes autres Phaſes.

Entre ces Conjonctions & Oppoſitions, que l'on nomme autrement *Sizygies*, les Eclipſes du Soleil & de la Lune ſont les plus remarquables & les moins ſujettes à erreur, parce qu'alors la Lune ſe trouve dans la direction du Soleil à la Terre, avec peu ou point de latitude à l'égard de l'Ecliptique.

A l'égard des Eclipſes du Soleil, on ne les apperçoit pas de la même grandeur, de tous les endroits de la Terre, à cauſe de la parallaxe de la Lune, dont il faut tenir compte pour comparer enſemble les obſervations qui en ont été faites, & déterminer la ſituation de la Lune par rapport au centre de la Terre.

Il n'en eſt pas de même des Eclipſes de Lune, elles paroiſſent, comme on l'a remarqué ci-deſſus, à tous ceux qui la voyent ſur leur horiſon, de la même maniére que s'ils la conſidéroient du centre de la Terre; & on peut obſerver avant & après l'Eclipſe, le diametre apparent de la Lune, dont on ſe ſert pour déterminer ſa diſtance à la Terre. Ainſi nous employerons principalement pour cette recherche, ces ſortes d'obſervations dont il ſe trouve un grand nombre qui ont été faites à Paris, & pluſieurs autres en différents Pays, qu'il eſt aiſé de réduire à notre Méridien, par la connoiſſance que l'on a des longitudes ſur Terre.

Première Méthode de déterminer l'Epoque des moyens Mouvements de la Lune, le lieu de ſon Apogée, & ſa première Inégalité.

Ayant obſervé une Eclipſe de Lune, & déterminé le temps auquel elle eſt arrivée au milieu, on calculera pour ce temps, le vrai lieu du Soleil, dont l'oppoſite déterminera le vrai lieu de la Lune ſur ſon Orbite.

On examinera enſuite le plus grand nombre d'obſervations d'Eclipſes que l'on pourra recueillir, & on calculera pour le temps du milieu de ces Eclipſes, le vrai lieu de la Lune qui eſt à l'oppoſite du Soleil.

On prendra l'intervalle de temps moyen entre la premiére Eclipſe & l'une de celles que l'on veut examiner, & ayant cherché dans la Table des moyens mouvements de la Lune, le nombre de Signes, degrés, minutes & ſecondes qui conviennent à cet intervalle, on les adjoûtera au vrai lieu de la Lune dans le temps de la premiére Eclipſe ſi elle précéde celle que l'on veut examiner, & on la retranchera ſi elle la ſuit. On comparera cette ſomme ou différence ainſi déterminée, avec le vrai lieu de la Lune au temps de la ſeconde Eclipſe, & on fera la même opération ſur diverſes autres Eclipſes, en mettant à part celles où la différence entre le lieu vrai de la Lune & ce lieu ainſi déterminé, eſt la plus grande de part & d'autre, ſoit que le lieu vrai l'excede, ou qu'il ſoit moindre. Si ces différences ſont égales de part & d'autre, c'eſt une preuve que la Lune, au temps de la premiére Eclipſe, étoit alors dans ſon Apogée ou ſon Périgée, & que ſon lieu moyen étoit le même que ſon vrai lieu, auquel cas chacune de ces différences meſure la plus grande Equation de la Lune.

Si l'une eſt plus grande que l'autre, on prendra leur ſomme dont la moitié meſurera la plus grande Equation de la Lune.

Retranchant de cette Equation, la plus petite de ces différences, on aura l'angle *FRT (Fig. 31.)* qui meſure l'Equation de la Lune dans le temps de la premiére obſervation, qui, étant adjoûtée à ſon vrai lieu, ou en étant retranchée, ſuivant la ſituation de la Lune à l'égard de ſon Apogée ou de ſon Périgée, donne le lieu moyen de la Lune, qui répond à ſon vrai lieu dans le temps du milieu de la premiére Eclipſe.

Enfin, pour déterminer le lieu de l'Apogée ou du Périgée de la Lune, on cherchera par le moyen de la plus grande Equation, la valeur de l'excentricité *CT*, par rapport au demi-axe *AC* de l'Ellipſe *ABPK;* & ayant prolongé *TR* en *M*, en ſorte que *TM* ſoit égale à *AP*, on joindra *FM*, & on fera, comme *TF* eſt à *TM* ou *AP;* ainſi le ſinus de l'angle *TMF*, moitié de l'angle *FRT* de l'Equation trouvée, eſt au ſinus de l'angle *TFM* ou *AFM*, dont retranchant l'angle *FMT*, reſte l'angle *ATR*, diſtance de la Lune à ſon Apogée au temps de la premiére Eclipſe.

Cette méthode eſt à peu-près la même que la neuviéme expoſée dans la théorie du Soleil, dont elle ne différe qu'en ce que, dans celle-là, on a comparé les obſervations du Soleil faites dans une même révolution, où ſon Apogée ſe trouve dirigé à peu-près au même point du Ciel ; au lieu que dans celle-ci on a comparé les obſervations de la Lune faites dans l'intervalle de pluſieurs révolutions, lorſque l'Apogée de cette Planete étoit dirigé à certains points du Ciel fort éloignés les uns des autres, ce qui revient au même, parce que la quantité du mouvement vrai de la Lune eſt préciſément égale à celle de ſon moyen mouvement après chaque retour de la Planete à ſon Apogée ; d'où il ſuit que la différence entre le vrai & le moyen mouvement de cette Planete dans l'intervalle de temps entre deux obſervations éloignées l'une de l'autre, que l'on compare enſemble, dans quelque ſituation où ſe trouve ſon Apogée par rapport aux Etoiles fixes, eſt toûjours meſurée par la ſomme des angles *FRT* & *FBT*, qui repréſentent dans ces deux obſervations, l'Equation de la Planete ou la différence entre ſon vrai & ſon moyen mouvement depuis le point *R* juſqu'au point *B*.

EXEMPLE.

Entre les Eclipſes de Lune obſervées à Paris, nous en trouvons une totale du 10 Décembre 1685, rapportée dans l'Hiſtoire de l'Académie de M. Duhamel, qui avoit été annoncée comme étant près de ſon Apogée.

Le commencement n'en fut pas apperçû, mais on obſerva à Paris l'Immerſion de la Lune dans l'ombre à $9^h\ 52'\ 0''$, & ſon Emerſion à $11^h\ 36'\ 18''$, ce qui donne le milieu à $10^h\ 44'\ 9''$ du ſoir.

Ces deux Phaſes ſont celles qui ſe diſtinguent avec le plus d'évidence dans les Eclipſes totales, qui méritent d'ailleurs d'être préférées aux Eclipſes partiales, à cauſe que la Lune entre dans l'ombre de la Terre moins obliquement, ce qui rend le progrès de cette ombre plus ſenſible ſur le diſque de la Lune.

Le temps vrai étoit alors plus avancé que le temps moyen, de $5'\ 59''$, qui, étant retranchées du temps vrai du milieu de cette Eclipſe obſervé le 10 Décembre 1685, à $10^h\ 44'\ 9''$, donnent le temps moyen à $10^h\ 38'\ 10''$. Calculant pour ce temps, le vrai lieu du Soleil, on le trouve en ♐ $19^d\ 40'\ 0''$, dont l'oppoſite marque le vrai lieu de la Lune, qui étoit par conséquent en ♊ $19^d\ 40'\ 0''$.

On comparera cette observation avec celles des autres Eclipses qui ont été faites dans la suite, de la maniére qui a été prescrite ci-dessus; & parce que le détail en seroit ici trop long, nous nous contenterons de rapporter celles où les différences entre le vrai & le moyen mouvement de la Lune, se sont trouvées les plus grandes.

Entre ces observations faites depuis l'année 1685 jusqu'en 1720, on peut compter l'Eclipse totale du 16 Mai 1696, observée à Marseille, dont le commencement réduit au Méridien de Paris, est arrivé à $10^h\ 19'$, l'Immersion à $11^h\ 22'$, l'Emersion à $13^h\ 2'$, & la fin à $14^h\ 2'\frac{1}{2}$; d'où l'on tire le milieu à $12^h\ 12'$, temps vrai, & à $12^h\ 7'\ 56''$, temps moyen.

Entre cette observation & celle du 10 Décembre 1685, il s'est écoulé 10 années, dont trois bissextiles, $157^j\ 1^h\ 29'\ 46''$, auxquelles il répond $5^f\ 12^d\ 53'\ 10''$ de moyen mouvement, qui, étant adjoûtés à $2^f\ 19^d\ 40'\ 0''$, vrai lieu de la Lune au temps de la premiére Eclipse, donnent $8^f\ 2^d\ 33'\ 10''$. Calculant le vrai lieu du Soleil pour le 16 Mai de l'année 1696, à $12^h\ 7'\ 56''$, temps moyen de la seconde Eclipse, on le trouve de $1^f\ 26^d\ 53'\ 35''$, dont l'opposite, qui est le vrai lieu de la Lune, est de $7^f\ 26^d\ 53'\ 35''$. La différence à $8^f\ 2^d\ 33'\ 10''$, est de $5^d\ 39'\ 35''$.

Depuis l'observation de l'Eclipse de 1696, nous trouvons celle du 15 Mars 1699, dont la grandeur a été déterminée de 8 doigts $\frac{1}{2}$, & dont le milieu est arrivé à Paris à $7^h\ 23'$, temps vrai, & à $7^h\ 14'$, temps moyen.

Entre cette observation & celle du 10 Décembre 1685, il y a 13 années, dont trois bissextiles, $94^j\ 20^h\ 35'\ 50''$, auxquelles il convient $3^f\ 1^d\ 24'\ 47''$ de moyen mouvement, qui, étant adjoûtés au vrai lieu de la Lune, déterminé dans l'Eclipse de 1685, de $2^f\ 19^d\ 40'\ 0''$, donnent $5^f\ 21^d\ 4'\ 57''$. Calculant pour le temps de l'Eclipse de 1699, le vrai lieu du Soleil, on le trouve de $11^f\ 25^d\ 28'\ 41''$, & par conséquent celui de la Lune, de $5^f\ 25^d\ 28'\ 41''$. La différence à $5^f\ 21^d\ 4'\ 47''$, est de $4^d\ 23'\ 54''$, dont le vrai lieu de la Lune excede celui qui a été trouvé ci-dessus, au lieu que par la comparaiſon précédente des Eclipſes de 1685 & 1696, il étoit moindre de $5^d\ 39'\ 35''$.

Comme entre toutes les obſervations que l'on a comparées enſemble de la même maniére, depuis 1685 juſqu'en 1720, les Eclipſes de 1696 & 1699, ſont celles où les différences entre le vrai & le moyen mouvement, ſe ſont trouvées les plus grandes de part & d'autre, on les adjoûtera enſemble, & on aura $10^d\ 3'\ 29''$, dont la moitié $5^d\ 1'\ 44''\frac{1}{2}$, meſure la plus grande Equation de la Lune.

Retranchant de $5^d\ 1'\ 44''\frac{1}{2}$, la plus petite différence qui a été trouvée de $4^d\ 23'\ 54''$, on aura la premiére Equation de la Lune au temps de l'Eclipſe de 1685, de $0^d\ 37'\ 50''\frac{1}{2}$, qui, étant retranchée du vrai lieu de la Lune, qui étoit alors de $2^f\ 19^d\ 40'\ 0''$, donne le lieu moyen de la Lune le 10 Décembre de l'année 1685, à $10^h\ 38'\ 10''$, de $2^f\ 19^d\ 2'\ 10''$, que l'on peut prendre pour Epoque des moyens mouvements de cette Planete.

La plus grande Equation de la Lune ayant été déterminée de $5^d\ 1'\ 44''\frac{1}{2}$, on aura l'angle *TBC*, de $2^d\ 30'\ 52''\frac{1}{4}$, & l'on fera, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle *TBC*, de $2^d\ 38'\ 52''\frac{1}{4}$; ainſi *TB* ou *AC* 100000, eſt à *CT*, que l'on trouvera de 4387, qui meſure la plus grande excentricité.

Enfin on fera, comme *FT* 8774 eſt à *TM* ou *AP* 200000; ainſi le ſinus de l'angle *FMT*, de $0^d\ 18'\ 55''\frac{1}{4}$, moitié de l'Equation de la Lune au temps de l'Eclipſe de 1685, qui a été trouvée de $0^d\ 37'\ 50''\frac{1}{2}$, eſt au ſinus de l'angle *TFM* ou *AFM*, que l'on trouvera de $7^d\ 12'\ 24''$, dont retranchant l'angle *FMT*, de $0^d\ 18'\ 55''\frac{1}{4}$, reſte l'angle *ATR*, diſtance de la Lune à ſon Apogée au temps de l'Eclipſe de 1685, de $6^d\ 53'\ 29''$. Les adjoûtant au vrai lieu de la Lune, qui étoit alors en ♊ $19^d\ 40'\ 0''$, on aura le lieu de ſon Apogée le 10 Décembre de l'année 1685, à $10^h\ 38'\ 10''$, en ♊ $26^d\ 33'\ 29''$.

Examinons préſentement les Eclipſes qui ont été obſervées avant l'année 1685 en remontant juſqu'en 1600, ne jugeant pas néceſſaire d'aller au de-là, à cauſe que les obſervations les plus reculées, n'ont pas été toutes faites avec la même exactitude que celles du ſiécle précédent.

Entre ces obſervations, nous trouvons l'Eclipſe totale de la Lune du 7 Juillet 1675, qui eſt une de celles où la différence entre le vrai & le moyen mouvement eſt la plus conſidérable.

Le commencement de cette Eclipſe a été obſervé à Paris le 7 Juillet à $1^h\ 7'\ 56''$ du matin, & l'Immerſion à $3^h\ 7'\ 45''$; d'où l'on a conclu le milieu à $3^h\ 42'\ 15''$, temps vrai, & à $3^h\ 46'\ 18''$, temps moyen.

Le moyen mouvement qui convient à 10 années, dont trois biſſextiles, $156^j\ 18^h\ 51'\ 52''$, intervalle entre le 7 Juillet 1675, à $3^h\ 46'\ 18''$ du matin, & le 10 Décembre 1685, à $10^h\ 38'\ 10''$ du ſoir, eſt de $5^f\ 9^d\ 14'\ 46''$, qui, étant retranchés de $2^f\ 19^d\ 40'\ 0''$, vrai lieu de la Lune au temps de l'Eclipſe de 1685, donnent $9^f\ 10^d\ 25'\ 14''$.

Calculant pour le temps de l'Eclipſe de 1675, le vrai lieu du Soleil, on le trouve de $3^f\ 14^d\ 52'\ 46''$, ce qui donne le vrai lieu de la Lune, de $9^f\ 14^d\ 52'\ 46''$. La différence à $9^f\ 10^d\ 25'\ 14''$, eſt de $4^d\ 27'\ 32''$.

En remontant plus haut, l'on trouve une Eclipſe totale qui a été obſervée à Paris le 14 Avril de l'année 1642. Le commencement de cette Eclipſe eſt arrivé à $12^h\ 10'$, l'Immerſion totale à $13^h\ 11'$, l'Emerſion à $14^h\ 47'$, la fin, par Gaſſendi, à $15^h\ 48'$, & par Bouillaud, à $15^h\ 51'$; d'où l'on tire le milieu par l'Immerſion & l'Emerſion à $13^h\ 59'$.

Le vrai lieu du Soleil pour ce temps, qui ne différoit pas alors du temps moyen, étoit de $0^f\ 25^d\ 5'\ 34''$, & par conſéquent le vrai lieu de la Lune, de $6^f\ 25^d\ 5'\ 34''$.

Le moyen mouvement qui convient à l'intervalle entre cette obſervation & celle du 10 Décembre 1685, eſt de $7^f\ 18^d\ 57'\ 30''$, qui, étant retranché du vrai lieu de la Lune au temps de l'Eclipſe de 1685, qui étoit de $2^f\ 19^d\ 40'\ 0''$, donne $7^f\ 0^d\ 42'\ 30''$. La différence au vrai lieu de la Lune, déterminé pour le temps de l'Eclipſe de 1642, de $6^f\ 25^d\ 5'\ 34''$, eſt de $5^d\ 36'\ 56''$, dont le vrai lieu de la Lune eſt moins avancé que celui que l'on vient de trouver; au lieu que par la comparaiſon des Eclipſes de 1675 & 1685, il l'excedoit de $4^d\ 27'\ 32''$.

N'ayant pas trouvé dans les autres obſervations d'Eclipſes de Lune, de différences plus grandes que celles que nous venons de rapporter, on les adjoûtera enſemble, & on aura $10^d\ 4'\ 28''$, dont la moitié $5^d\ 2'\ 14''$, mesure la plus grande Equation de la Lune, qui différe seulement de 37 secondes de celle que l'on a déterminée par les observations des Eclipses qui ont suivi celle de l'année 1685.

Retranchant $4^d\ 27'\ 32''$, de $5^d\ 2'\ 14''$, on aura la premiére Equation de la Lune au temps de l'Eclipse de 1685, de $0^d\ 34'\ 42''$, qui, étant retranchée du vrai lieu de la Lune, qui étoit alors de $2^f\ 19^d\ 40'\ 0''$, donne le lieu moyen de la Lune le 10 Décembre de l'année 1685, à $10^h\ 38'\ 10''$, de $2^f\ 19^d\ 5'\ 18''$, qui différe de $3'\ 8''$ de celui que l'on a trouvé par la premiére comparaison.

La plus grande Equation de l'Orbe de la Lune étant connuë de $5^d\ 2'\ 14''$, on trouvera son excentricité de 4398; & dans le Triangle *FMT*, dont le côté *FT*, double de cette excentricité est connu de 8796, & l'angle *FMT*, de $17'\ 21''$, moitié de l'Equation de la Lune au temps de l'Eclipse de 1685, on aura l'angle *AFM*, de $6^d\ 35'\ 19''$, dont retranchant l'angle *FMT*, de $0^d\ 17'\ 21''$, reste l'angle *ATR*, distance de la Lune à son Apogée au temps de l'Eclipse de 1685, de $6^d\ 17'\ 58''$. Les adjoûtant au vrai lieu de la Lune, qui étoit alors de $2^f\ 19^d\ 40'\ 0''$, on aura le lieu de son Apogée le 10 Décembre de l'année 1685, à $10^h\ 38'\ 10''$, en ♊ $25^d\ 57'\ 58''$, moins avancé de $35'\ 31''$, que par les observations des Eclipses qui ont suivi celle de 1685.

Toutes ces opérations supposent que l'Equation de l'Orbe de la Lune, lorsqu'elle est Nouvelle ou Pleine, soit égale de part & d'autre à égale distance de son Apogée ou de son Périgée; que la Lune n'ait point alors d'autres inégalités que celles de son Orbe; & que dans le grand nombre d'observations que l'on a examinées, il s'en est trouvé quelques-unes près de ses moyennes distances où l'Equation de son Orbe est la plus grande.

Seconde Méthode de déterminer les Epoques des moyens Mouvements de la Lune, & la situation de son Apogée, par l'observation de son diametre.

On examinera les observations des diametres apparents, faites les jours des Eclipses ou des Pleines Lunes, & on choisira celles où le diametre de la Lune a paru le plus grand ou le plus petit qui ſoit poſſible.

Si dans le temps du milieu de l'Eclipſe, le diametre de la Lune a paru plus grand ou plus petit qu'avant ou après, c'eſt une preuve que cette Planete étoit alors dans ſon Apogée ou ſon Périgée, auquel cas ſon lieu moyen eſt le même que ſon vrai lieu qui eſt à l'oppoſite de celui du Soleil. Mais ſi le diametre de la Lune ne ſe trouve pas alors le plus grand ou le plus petit, on choiſira le temps où, après avoir augmenté ou diminué de grandeur, il occupe dans le Ciel le même intervalle qu'auparavant, & on prendra le milieu entre ces obſervations, qui marquera le temps que la Lune eſt arrivée à ſon Apogée ou ſon Périgée. Lorſque ce temps eſt après le milieu de l'Eclipſe, on prendra le moyen mouvement de la Lune qui répond à l'intervalle entre le temps du milieu de l'Eclipſe & celui auquel la Lune eſt arrivée à ſon Apogée, dont on retranchera 5 minutes par degré, parce que l'Equation de l'Orbe de la Lune étant d'environ 5 degrés, il convient environ 5 minutes d'Equation à chaque degré du moyen mouvement de la Lune près de ſon Apogée, & on aura le vrai mouvement de la Lune, qui, étant adjoûté à ſon vrai lieu dans le temps du milieu de l'Eclipſe qui étoit à l'oppoſite du Soleil, donne le vrai lieu de l'Apogée de la Lune. Cette même Equation étant retranchée du vrai lieu de la Lune, donne ſon lieu moyen au temps de l'Eclipſe, que l'on peut prendre pour Epoque des moyens mouvements de la Lune.

Lorſque le temps auquel la Lune eſt arrivée à ſon Apogée, précéde le milieu de l'Eclipſe, il faudra faire la même opération que ci-deſſus, à la réſerve qu'il faudra retrancher le vrai mouvement de la Lune, de ſon vrai lieu dans le temps du milieu de l'Eclipſe, pour avoir le lieu de l'Apogée de cette Planete, & qu'il faudra adjoûter l'Equation de 5 minutes par degré au vrai lieu de la Lune pour avoir ſon lieu moyen.

Lorſque la Lune eſt près de ſon Périgée, il faut adjoûter 5′ 30″ à chaque degré de moyen mouvement pour avoir le mouvement vrai qui excede alors le moyen, & faire les autres opérations énoncées ci-deſſus.

EXEMPLE.

Exemple.

Dans l'Eclipse de Lune du 10 Décembre de l'année 1685, que nous avons employée ci-dessus, le diametre apparent de la Lune a été observé à $13^h\ 46'$, de $0^d\ 30'\ 6''$. Il a été trouvé à $14^h\ 48'$, à la hauteur de 55 degrés, de $0^d\ 30'\ 0''$, & le 11 Decembre à $7^h\ 21'$ du soir, on l'a déterminé à la hauteur de 45 degrés, de $0^d\ 30'\ 0''$.

Comme on n'a pas marqué la hauteur de la Lune sur l'horison au temps de la premiére observation, nous l'avons déduite de la hauteur méridienne du bord supérieur de cette Planete, qui fut observée de $64^d\ 15'\ 45''$, & de celle que l'on avoit déterminée à $14^h\ 48'$, de 55 degrés; & nous avons trouvé que la Lune étoit alors à la hauteur d'environ 58 degrés.

Calculant l'augmentation du diametre de la Lune, qui convient à ces différentes hauteurs, on trouve qu'elle étoit à la hauteur de 58 degrés, de 24 second. à la hauteur de 55 degrés, de 22 second. & à celle de 45 degrés, de 19 second. qu'il faut retrancher du diametre observé, pour avoir la grandeur véritable de ce diametre réduit à l'horison, de $29'\ 42''$ dans la premiére observation, de $29'\ 38''$ dans la seconde, & de $29'\ 41''$ dans la troisiéme, plus petit d'une seconde que celui qui a été observé le 10 Décembre à $13^h\ 46'$, & plus grand de 3 secondes que celui qui avoit été observé à $14^h\ 48'$, ce qui fait voir que la Lune n'étoit point encore arrivée à son Apogée dans la premiére observation, & qu'elle l'avoit passé le 11 Décembre à $7^h\ 21'$ du soir.

Il n'est pas aisé dans des observations aussi délicates, de pouvoir s'assûrer d'une seconde dans la grandeur du diametre de la Lune; cependant si l'on suppose les observations que je viens de rapporter, exactes dans toutes leurs circonstances, on trouvera que le 10 Décembre à $14^h\ 1'$, le diametre de la Lune devoit être de $29'\ 41''$, égal à celui que l'on a observé le 11 Décembre à $7^h\ 41'$, & qu'ainsi la Lune étoit alors également éloignée de son Apogée de part & d'autre.

Prenant un milieu, on aura le passage de la Lune par son Apogée le 11 Décembre à $10^h\ 41'$ du matin, temps vrai, c'est-à-dire, $11^h\ 57'$ après le milieu de l'Eclipse qui est arrivée le 10 Décembre

1685 à $10^h\ 44'\ 9''$ du soir. Le moyen mouvement qui convient à $11^h\ 57'$, est de $6^d\ 33'\frac{1}{2}$, auxquels il convient $32'\ 40''$ d'équation, à raison de 5 minut. par degré. Les retranchant de $6^d\ 33'\frac{1}{2}$, on aura $6^d\ 1'$ pour le vrai mouvement de la Lune depuis le milieu de l'Eclipse jusqu'au temps de son passage par son Apogée. Les adjoûtant au vrai lieu de la Lune, qui a été calculé de $2^s\ 19^d\ 40'\ 30''$, on aura le lieu de son Apogée le 10 Décembre à $10^h\ 44'\ 9''$ du soir, temps vrai, & à $10^h\ 38'\ 10''$, temps moyen, de $2^s\ 25^d\ 41'\ 30''$, moins avancé de 52 minutes qu'on ne l'avoit trouvé dans la premiére méthode, par la comparaison des Eclipses qui ont suivi celle de 1685, & de 18 minut. que par celles qui l'ont précédé.

Si l'on retranche présentement du vrai lieu de la Lune, déterminé pour le temps de l'Eclipse, de $2^s\ 19^d\ 40'\ 0''$, l'Equation que l'on vient de trouver de $32'\ 40''$, qui mesure la différence entre le lieu vrai de la Lune & son lieu moyen, on aura la longitude moyenne de la Lune le 10 Décembre 1685, à $10^h\ 38'\ 10''$, temps moyen, de $2^s\ 19^d\ 7'\ 20''$, qu'on peut prendre pour Epoque des moyens mouvements de la Lune. On l'avoit trouvée dans la méthode précédente, par la premiére comparaison, de $2^s\ 19^d\ 2'\ 10''$, & par la seconde, de $2^s\ 19^d\ 5'\ 18''$; ainsi ces deux méthodes s'accordent à 4 ou 5 minutes près dans la détermination du lieu moyen de la Lune.

Il seroit trop long de rapporter ici toutes les observations que nous avons comparées ensemble pour déterminer les Epoques des moyens mouvements de la Lune, le lieu de son Apogée, & la plus grande Equation de son Orbe; il nous suffira de remarquer ici, qu'en prenant un milieu entre toutes les déterminations, nous avons trouvé qu'au temps de cette Eclipse, c'est-à-dire, le 10 Décembre de l'année 1685, à $10^h\ 38'\ 10''$ du soir, la longitude moyenne de la Lune devoit être de $2^s\ 19^d\ 8'\ 55''$, l'Apogée de cette Planete, de $2^s\ 24^d\ 32'$, & la plus grande Equation de son Orbe, de $4^d\ 58'\ 44''$.

CHAPITRE X.

Du Mouvement de l'Apogée de la Lune.

APRÈS avoir déterminé les Epoques & la quantité du moyen mouvement de la Lune, de même que la situation de son Apogée pour un temps donné, il faut examiner si cet Apogée est fixe, ou s'il répond successivement à divers points du Zodiaque, & en ce cas quel est le degré de vîtesse de son mouvement.

On voit d'abord, par les observations que l'on a rapportées ci-dessus, que l'Apogée de la Lune ne conserve pas toûjours la même situation.

Nous avons trouvé que le 10 Décembre de l'année 1685, à $10^h\ 38'$ du matin, il répondoit à $24^d\ 32'$ des Gemeaux, & qu'au temps de l'Eclipse de Lune qui est arrivée le 16 Mai de l'année 1696, à $12^h\ 12'$, le vrai lieu de la Lune étoit à $26^d\ 53'\ 35''$ du Scorpion. Retranchant de ce lieu, celui de l'Apogée de la Lune, supposé fixe, on aura son anomalie vraye, de $5^s\ 2^d\ 21'\ 35''$, par le moyen de laquelle on détermine l'Equation de l'Orbe de la Lune, de $2^d\ 14'\ 39''$, au lieu qu'on l'auroit dû trouver d'environ 5 degrés, ainsi qu'elle résulte de cette observation.

Ainsi, supposant l'Apogée de la Lune fixe, l'Equation qui répondoit à son anomalie moyenne, n'étoit pas suffisante pour représenter son vrai lieu; ce qui prouve évidemment que cet Apogée avoit changé de position.

Pour déterminer la quantité de son mouvement, nous examinerons d'abord ce qui résulte des observations faites à des intervalles de temps peu éloignés les uns des autres, de crainte de se tromper d'une révolution entiére, ou du moins de plusieurs Signes & degrés dans la recherche du lieu de l'Apogée, si l'on comparoit des observations faites dans un plus grand intervalle. Car il faut remarquer que dans l'Orbe de la Lune, de même que dans celui de toutes les Planetes, les Equations se trouvent les mêmes dans quatre endroits différents; que depuis l'Apogée jusqu'au Périgée où les Equations sont soustractives, il y en a deux de la même quantité, ce qui laisse une incertitude sur la situation de l'Apogée d'où commencent ces Equations; & qu'il en est de même depuis l'Apogée jusqu'au Périgée où cette Equation est additive.

L'Eclipse de Lune du 10 Décembre 1685, au temps de laquelle l'Apogée de la Lune a été déterminé en ♊ $24^d\ 32'$, a été précédée immédiatement par celle du 21 Décembre 1684, dont le commencement est arrivé à $9^h\ 28'\ 46''$, & la fin à $12^h\ 24'\ 12''$, ce qui donne le milieu à $10^h\ 56'\ 29''$, temps vrai, & à $10^h\ 55'\ 58''$, temps moyen. L'intervalle entre cette Eclipse & celle du 10 Décembre 1685, dont le milieu est arrivé à $10^h\ 38'\ 14''$, temps moyen, est de 354 jours moins $17'\ 44''$, pendant lesquels le moyen mouvement de la Lune a été de $11^s\ 14^d\ 16'\ 54''$, qui, étant retranchés de sa longitude moyenne déterminée le 10 Décembre 1685, à $10^h\ 38'\ 14''$, de $2^s\ 19^d\ 8'\ 55''$, donnent le lieu moyen de la Lune le 21 Décembre 1684, à $10^h\ 55'\ 58''$ du soir, de $3^s\ 4^d\ 52'\ 1''$. Le vrai lieu du Soleil étoit alors de $9^s\ 1^d\ 8'\ 0''$, & celui de la Lune qui étoit à l'opposite, de $3^s\ 1^d\ 8'\ 0''$. La différence à $3^s\ 4^d\ 52'\ 1''$, est $3^d\ 44'\ 1''$, qui mesurent l'Equation de son Orbe. Comme dans cette observation, le lieu moyen de la Lune étoit plus avancé que son lieu vrai, il suit que cette Planete étoit alors dans la partie de son Orbe, depuis son Apogée jusqu'à son Périgée.

Cette Equation de $3^d\ 44'\ 1''$, répond à deux degrés différents d'anomalie moyenne, sçavoir, à $1^s\ 20^d\ 54'$, & à $4^s\ 13^d\ 44'$. Retranchant la premiére du lieu moyen de la Lune, déterminé le 21 Décembre 1684, à $10^h\ 55'\ 58''$ du soir, de $3^s\ 4^d\ 52'\ 1''$, on aura le lieu de son Apogée, de $1^s\ 13^d\ 58'$; on l'avoit trouvé le 10 Décembre 1685, en ♊ $24^d\ 32'$. La différence est de $1^s\ 10^d\ 34'$, qui mesure le mouvement de l'Apogée de la Lune dans l'espace de 354 jours moins $17'\ 44''$, ce qui donne son mouvement journalier, de $6'\ 52''$, & sa révolution, de 8 années & près de 9 mois.

Si l'on retranche de même, du lieu moyen de la Lune, déterminé au temps de l'Eclipse de 1684, de $3^s\ 4^d\ 52'\ 1''$, son anomalie moyenne, que l'on a trouvée par la seconde détermination, de $4^s\ 13^d\ 44'$, on aura le lieu de l'Apogée de la Lune, de $10^s\ 21^d\ 8'$. La différence à $2^s\ 24^d\ 32'$, donne le mouvement de cet Apogée dans le même intervalle de temps, de 4^s

3^d 24', d'où l'on trouve ſa révolution d'environ 3 années, fort différente de la précédente.

Comme on ne peut pas ſçavoir par ces deux ſeules obſervations, à laquelle des deux révolutions l'on doit donner la préférence; il eſt néceſſaire d'en examiner quelques autres faites à peu-près dans le même intervalle de temps.

Entre ces obſervations, il s'en trouve une du 29 Novembre 1686, dont le milieu eſt arrivé à Marſeille à 11^h 30' 25", temps auquel la Lune parut éclipſée de 6 doigts. Retranchant de cette heure, la différence des Méridiens entre Paris & Marſeille, qui eſt de 12' 25", on aura le milieu de cette Eclipſe à Paris le 29 Novembre 1686 à 11^h 18' 0", temps vrai, & à 11^h 7' 18", temps moyen. Calculant pour ce temps, le vrai lieu du Soleil, on le trouvera de 8^f 5^d 15' 20", & par conſéquent le vrai lieu de la Lune, de 2^f 8^d 15' 20".

Prenant la différence entre le temps de cette Eclipſe & celle du 10 Décembre 1685, on aura 354 jours 29 minut. auxquels il répond 11^f 14^d 42' 33" de moyen mouvement, qui, étant adjoûtés au lieu moyen de la Lune, déterminé dans l'Eclipſe de 1685, de 2^f 19^d 8' 55", donnent le lieu moyen de la Lune le 29 Novembre 1686 à 11^h 7' 14" du ſoir, de 2^f 3^d 51' 28". La différence à ſon lieu vrai, déterminé ci-deſſus de 2^f 8^d 15' 20", eſt de 4^d 23' 52", qui meſurent la premiére Equation de la Lune, laquelle étoit dans les ſix derniers Signes de ſon Orbe, à cauſe que ſon lieu vrai étoit plus avancé que le moyen. Cette Equation répond à deux degrés différents d'anomalie, ſçavoir à 7^f 29^d 18, & à 9^f 25^d 12'.

Retranchant la premiére du lieu moyen de la Lune, déterminé au temps de l'Eclipſe de 1686, de 2^f 3^d 51' 28", on aura le lieu de ſon Apogée, de 6^f 4^d 33'; on l'avoit trouvé dans l'Eclipſe de 1685, de 2^f 24^d 32'. La différence eſt de 3^f 10^d 1', qui meſurent le mouvement de l'Apogée dans l'intervalle de 354 jours 29 minutes, ce qui ne peut s'accorder à aucune des deux déterminations qui réſultent de la comparaiſon précédente.

Si l'on retranche pareillement la ſeconde anomalie, qu'on a trouvée de 9^f 25^d 12', de 2^f 3^d 51', on aura le lieu de l'Apogée de la Lune, de 4^f 8^d 39'. La différence à 2^f 24^d 32', donne ſon mouvement, de $1^f\ 14^d\ 7'$, plus approchant de celui que l'on avoit trouvé par la premiére détermination ; ce qui fait voir que la révolution de l'Apogée de la Lune, que l'on avoit déterminée d'abord de 8 années & près de 9 mois, eſt plus conforme aux obſervations.

Il faut préſentement déterminer la quantité de ce mouvement, qui réſulte des obſervations plus éloignées.

Nous avons choiſi pour cet effet, l'Eclipſe totale du 21 Janvier 1693, dont le milieu tiré de l'obſervation de Marſeille, eſt arrivé à Paris à $15^h\ 54'\ 55''$, temps vrai, & à $16^h\ 7'\ 30''$, temps moyen.

L'intervalle de temps entre cette Eclipſe & celle du 10 Décembre 1685, qui a été déterminée à $10^h\ 38'\ 14''$, eſt de 7 années, dont deux biſſextiles, $42^j\ 5^h\ 29'\ 16''$, auxquels il répond dans la Table des moyens mouvements, $1^f\ 18^d\ 27'\ 49''$, qui, étant adjoûtés à la longitude moyenne de la Lune, déterminée pour le temps de l'Eclipſe de 1685, de $2^f\ 19^d\ 8'\ 55''$, donnent ſa longitude moyenne le 21 Janvier 1693 à $16^h\ 7'\ 30''$, de $4^f\ 7^d\ 36'\ 44''$.

Le vrai lieu du Soleil étoit alors de $10^f\ 2^d\ 59'\ 26''$, & celui de la Lune, de $4^f\ 2^d\ 59'\ 26''$. La différence à $4^f\ 7^d\ 36'\ 44''$, eſt de $4^d\ 37'\ 18''$, dont le lieu moyen de la Lune étoit plus avancé que ſon vrai lieu ; ce qui fait voir que la Lune étoit alors dans la premiére partie de ſon Orbe.

Cette Equation répond à $2^f\ 10^d\ 56'$, & à $3^f\ 24^d\ 43'$ d'anomalie moyenne. Retranchant la premiére du lieu moyen de la Lune, déterminé de $4^f\ 7^d\ 36'\ 44''$, on aura le lieu de ſon Apogée le 21 Janvier 1693, de $1^f\ 26^d\ 41'$, plus avancé de $11^f\ 2^d\ 9'$, qu'au temps de l'Eclipſe du 10 Décembre 1685 ; ce qui donneroit la révolution de l'Apogée de la Lune, moindre de 7 années, & plus petite qu'on ne l'a trouvée par la comparaiſon précédente.

Il faut donc employer la ſeconde anomalie, de $3^f\ 24^d\ 43'$, qui, étant retranchée du lieu moyen de la Lune, déterminé le 21 Janvier 1693, de $4^f\ 7^d\ 36'\ 44''$, donne le lieu de l'Apogée, de $0^f\ 12^d\ 54'$; il avoit été déterminé le 10 Decembre 1685, de $2^f\ 24^d\ 32'$. La différence eſt de $9^f\ 18^d\ 22'$, qui meſurent le mouvement de l'Apogée de la Lune, qui répond à 7 années communes, $44^j\ 5^h\ 29'\ 16''$, intervalle entre ces observations. On fera donc, comme $9^s\ 18^d\ 22'$, sont à 7 années communes, $44^j\ 5^h\ 29'\ 16''$; ainsi 360 degrés sont à 3246 jours & 6 heures, ou 8 années communes, 326 jours & 6 heur. qui mesurent la révolution de l'Apogée; d'où l'on tire son mouvement annuel, de $1^s\ 10^d\ 29'\ 40''$, & son mouvement journalier, de $6'\ 39''$.

On comparera de même l'observation de l'Eclipse de Lune du 10 Décembre 1685, avec celle du 20 Janvier 1647, dont le milieu a été observé à Paris par Gassendi, à $9^h\ 12'$, temps vrai, & à $9^h\ 23'\ 55''$, temps moyen.

Le vrai lieu du Soleil étoit alors de $10^s\ 0^d\ 50'\ 40''$, & le vrai lieu de la Lune, de $4^s\ 0^d\ 50'\ 40''$. L'intervalle de temps entre cette Eclipse & celle du 10 Décembre 1685, qui est arrivée à $10^h\ 38'\ 10''$, temps moyen, est de 38 années, dont 10 bissextiles, $324^j\ 1^h\ 14'\ 19''$, auxquels il répond $10^s\ 18^d\ 11'\ 45''$ de moyen mouvement, qui, étant retranchées de $2^s\ 19^d\ 8'\ 55''$, lieu moyen de la Lune au temps de l'Eclipse de 1685, donnent le lieu moyen de la Lune le 20 Janvier 1647, de $4^s\ 0^d\ 57'\ 10''$. La différence à son vrai lieu déterminé ci-dessus de $4^s\ 0^d\ 50'\ 40''$, est de $6'\ 30''$, qui représentent l'Equation de la Lune, laquelle est dans la premiére partie de son Orbe, à cause que le lieu moyen de la Lune est plus avancé que son vrai lieu.

Cette Equation répond à $0^s\ 1^d\ 18'$, & à $5^s\ 28^d\ 49'$ d'anomalie moyenne. Retranchant la premiére, de $4^s\ 0^d\ 57'$, lieu moyen de la Lune en 1647, on aura le lieu de l'Apogée, de $3^s\ 29^d\ 39'$; on l'avoit trouvé en 1685, de $2^s\ 24^d\ 32'$. La différence est de $1^s\ 5^d\ 7'$, qui, suivant le mouvement de l'Apogée déterminé ci-dessus, répondent à 317 jours, qui, étant retranchés de 38 années & 324 jours, intervalle de temps entre les observations de 1647 & 1686, donnent 38 années & 7 jours, pendant lesquelles l'Apogée de la Lune auroit fait quatre révolutions, à raison de 9 années & 6 mois pour chacune, ce qui ne s'accorde pas aux déterminations précédentes. Il faut donc employer la seconde anomalie, qui a été trouvée ci-dessus de $5^s\ 28^d\ 49'$, & qui, étant retranchée du lieu moyen de la Lune, déterminé en 1647, de $4^s\ 0^d\ 57'$, donne le vrai lieu de son Apogée, de 10^s

2^d 8'. La différence à 2^f 24^d 32', lieu de l'Apogée en 1685, est de 4^f 22^d 24', ce qui fait voir que dans l'intervalle de 38 années communes, 334^j 1^h 14', ou 14204^j 1^h 14', il y a eu quatre révolutions entiéres plus 4^f 22^d 24'. On fera donc, comme 94944, nombre de minutes que l'Apogée a parcouruës dans cet intervalle, sont à 14204^j 1^h 14'; ainsi 360 degrés ou 21600 minutes, sont à la révolution de l'Apogée, qu'on trouvera de 3231 jours & près de 11 heur. ou 8 années communes, 311^j 11^h, ce qui donne son mouvement annuel, de 1^f 10^d 39' 40", & son mouvement journalier, de 6' 41" 1"'.

Ayant comparé de la même maniére un grand nombre d'observations exactes d'Eclipses de Lune, nous avons déterminé la révolution de son Apogée, de 8 années communes, 311 jours & 8 heures, son mouvement annuel, de . . . 1^f 10^d 39' 52", & son mouvement journalier, de . . . . 6' 41" 1"', ce qui s'approche autant qu'on peut l'espérer, de la précédente détermination.

CHAPITRE XI.

De la premiére Equation Solaire.

Après avoir déterminé la situation de l'Apogée & du Périgée de la Lune, où son vrai lieu doit concourir avec le moyen, on a remarqué qu'à distance égale de ces points, les Equations que l'on observe dans les Conjonctions & Oppositions de la Lune avec le Soleil, où la plûpart de ses inégalités cessent, n'étoient pas toûjours égales entr'elles, ce qui auroit dû arriver s'il n'y avoit point eu d'autre cause d'inégalité que celle qui provient de la différente distance de la Lune à la Terre.

On a donc recherché d'où pouvoient provenir ces variations, & l'on a remarqué qu'elles dépendoient de la diverse situation du Soleil dans son Orbe; que lorsque cet Astre étoit dans son Apogée ou dans son Périgée, il n'y avoit aucune variation sensible; qu'on en appercevoit quelqu'une lorsqu'il s'en écartoit, qui augmentoit jusqu'à ce que le Soleil fût dans ses moyennes longitudes, où elle montoit jusqu'à près de 10 minutes, ensuite de quoi elle diminuoit

à peu-près

à peu-près dans la même proportion; enfin que cette Equation devoit s'adjoûter au lieu moyen de la Lune pour avoir le vrai, lorsque le Soleil étoit placé dans les premiers Signes de son Orbe, depuis son Apogée jusqu'à son Périgée; & qu'il falloit au contraire la retrancher depuis le Périgée du Soleil jusqu'à son Apogée.

Comme ces inégalités dépendent uniquement de la diverse position du Soleil dans son Orbe, nous avons donné le nom de *Solaire* à l'Equation qui les représente.

Pour expliquer la maniére dont on conçoit cette Equation, soit dans le Systeme de Copernic, *S* (*Fig.* 45.) le Soleil à l'un des foyers de l'Orbe annuel *ABPD*, qui représente une Ellipse, *A* la Terre dans son Aphélie, *EHFG* l'Orbe de la Lune, dont le point *G* représente son Apogée, & le point *H* son Périgée. Si l'on suppose la Lune en *G* dans son Opposition avec le Soleil, ou en *H* dans sa Conjonction, on verra que le Soleil ne produit aucune inégalité dans le mouvement de la Lune.

Si l'on suppose présentement que la Terre étant parvenuë en *B*, à la distance de 90 degrés de son Aphélie ou de son Périhélie, les points *L* & *I*, où la Lune est en Conjonction ou en Opposition avec le Soleil, soient aussi dans l'Apogée & le Périgée de la Lune; alors le lieu moyen de la Lune différera du lieu véritable, de 9′ 44″, qu'il faut adjoûter au lieu moyen pour avoir le véritable.

Cette Equation, qui avoit augmenté depuis *A* jusqu'en *B*, dans la raison du sinus de la distance de la Terre à son Aphélie, diminuë ensuite dans la même proportion, à mesure que la Terre s'approche du Périhélie en *P*, où la Lune étant en *M* ou *N*, en Conjonction ou en Opposition avec le Soleil, elle cesse entiérement.

La Terre passant ensuite de son Périhélie à son Aphélie, cette Equation augmente jusqu'à ce qu'étant en *D*, & la Lune aux mêmes points de son Orbe *O* & *T*, en Conjonction ou en Opposition avec le Soleil, le vrai lieu de la Lune s'éloigne de son lieu moyen, de 9′ 44″, qu'il faut retrancher du lieu moyen pour avoir le vrai.

Cette Equation diminuë ensuite dans la même proportion qu'elle avoit augmenté lorsque la Terre alloit de l'Aphélie aux moyennes distances, & elle cesse entiérement lorsque la Terre est parvenuë à son Aphélie ou à son Périhélie.

On a considéré ici la Lune dans son Apogée ou dans son Périgée, & dans ses Conjonctions ou Oppositions avec le Soleil, parce que dans ces deux circonstances, on n'y observe que l'Equation qui dépend de la différente situation de la Terre dans son Orbe à l'égard de son Aphélie & de son Périhélie: cependant elle subsiste de même dans toutes les situations de la Lune sur son Orbe à l'égard du Soleil; & il faut y avoir égard pour déterminer le vrai lieu de la Lune.

On peut expliquer également la maniére dont se fait cette Equation, en supposant le mouvement du Soleil autour de la Terre.

Soit, par exemple, *T (Fig. 46.)* la Terre au foyer de l'Ellipse *ABPD,* que le Soleil décrit dans l'espace d'une année, dont le point *A* représente l'Apogée, le point *P* le Périgée, & les points *B* & *D* les moyennes longitudes.

Soit aussi *EHFG,* l'Ellipse que la Lune décrit par son mouvement propre, qui ait pour foyer le point *T,* où est placée la Terre à l'égard du Soleil, que l'on suppose en *A* dans son Apogée, ou en *P* dans son Périgée.

La Lune étant en *G* ou en *H,* dans sa Conjonction ou Opposition avec le Soleil, & en même temps dans son Apogée ou Périgée, on n'observe aucune variation dans son mouvement, & son vrai lieu concourt avec le moyen. Mais à mesure que le Soleil s'approche du point *B,* on s'apperçoit de quelque inégalité qui va en augmentant jusqu'à ce que le Soleil soit arrivé en *B,* où elle est de 9′ 44″, de sorte que si l'Orbite de la Lune est alors représentée par l'Ellipse *IMLN,* qui ait la Terre à l'un de ses foyers *T,* & la Lune dans son Apogée ou Périgée en *I* ou *L*, auquel cas elle est dégagée de toutes ses autres inégalités; on appercevra entre le lieu vrai & le lieu moyen de la Lune, une différence de 9′ 44″, qu'il faut adjoûter à son lieu moyen pour avoir le véritable lorsque le Soleil est en *B*, & retrancher du lieu moyen lorsque le Soleil sera parvenu en *D.*

Dans les autres situations du Soleil sur son Orbe, hors des points *A, B, P, D,* la premiére Equation Solaire est plus ou moins grande, suivant qu'il s'éloigne plus ou moins des points *A* & *P,* dans la proportion des sinus de la distance du Soleil à son

Apogée ou à ſon Périgée. Elle eſt additive dans les ſix premiers Signes, depuis *A* juſqu'en *P*, ſouſtractive dans les ſix derniers, depuis *P* juſqu'en *A* ; & il faut en tenir compte pour déterminer le vrai lieu de la Lune dans tous les points de ſon Orbe, & à quelque diſtance qu'elle ſe trouve à l'égard du Soleil.

CHAPITRE XII.

De la ſeconde Equation Solaire.

LE lieu moyen de la Lune, corrigé par l'Equation Solaire que nous venons d'expliquer, repréſente aſſés exactement ſon vrai lieu, lorſque dans ſes Conjonctions ou Oppoſitions avec le Soleil, cet Aſtre ſe trouve en même temps dans l'Apogée ou dans le Périgée de la Lune, de même qu'à diſtance égale de part & d'autre de ces deux points.

Hors de cette ſituation, on obſerve dans le mouvement apparent de la Lune, une inégalité qui peut monter juſqu'à 4 minutes, & qu'on a appellé *Luni-Solaire* ou *ſeconde Equation Solaire*, à cauſe qu'elle dépend de la poſition de l'Orbite de la Lune à l'égard du Soleil.

Elle eſt nulle ou inſenſible lorſque le lieu du Soleil eſt le même que celui de l'Apogée ou du Périgée de la Lune, ou bien lorſqu'il en eſt éloigné de 90 degrés. Elle augmente enſuite à meſure que le Soleil s'écarte de ces quatre points, de ſorte qu'à 15 degrés elle eſt de 2 minutes, & elle devient plus grande lorſqu'il eſt à la diſtance de 45 degrés.

Pour donner une idée ſenſible de la maniére dont l'on conçoit cette Equation, ſoit dans le Syſteme de Copernic, *S* *(Fig. 45.)* le Soleil à l'un des foyers de l'Ellipſe *ABPD*, qui repréſente l'Orbe annuel, *A* la Terre dans ſon Aphélie, *EHFG*, l'Orbite de la Lune, dont le point *G* repréſente l'Apogée, & le point *H* le Périgée.

Dans cet état, en quelqu'endroit que l'on place la Lune ſur ſon Orbite *EHFG*, elle ne ſera point ſujette à la ſeconde inégalité Solaire qui dépend de la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune qui eſt nulle dans ce cas.

Si l'on ſuppoſe préſentement que la Terre étant dans le même lieu de ſon Orbe à l'égard du Soleil, l'Apogée de la Lune ſoit en *R*, en ſorte que la diſtance *SAR* du Soleil à l'Apogée de la Lune ſoit de 45 degrés; alors la Lune étant en *R*, il n'y aura d'autre différence entre le vrai & le moyen mouvement, que celle qui provient de cette inégalité qui eſt alors la plus grande qui ſoit poſſible, & monte à 4 minutes, qu'il faut ſouſtraire du lieu moyen de la Lune pour avoir le véritable, en quelqu'endroit que cette Planete ſoit placée ſur ſon Orbe.

Cette inégalité diminuë à meſure que le Soleil paroît s'éloigner de l'Apogée de la Lune, depuis 45 juſqu'à 90 degrés, où elle ceſſe entiérement.

On commence enſuite à l'appercevoir depuis ce point de 90 degrés juſqu'à la diſtance de 135 degrés avec le même progrès, avec la ſeule différence qu'au lieu de la ſouſtraire, il faut l'adjoûter au lieu moyen de la Lune pour avoir le véritable, & elle diminuë dans la même proportion, juſqu'à ce que le Soleil ſoit dans le Périgée de la Lune.

Cette Equation augmente & diminuë de même lorſque le Soleil ſe trouve dans la partie de l'Orbite de la Lune, depuis 180 juſqu'à 270 degrés; auquel cas il faut la ſouſtraire du lieu moyen de la Lune pour avoir le véritable.

Enfin, lorſque la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune, eſt depuis 270 degrés juſqu'à 360, il faut adjoûter cette Equation au lieu moyen de la Lune pour avoir le véritable.

On peut repréſenter également la ſeconde Equation Solaire, en ſuppoſant le mouvement du Soleil autour de la Terre, en cette maniére.

Soit *T (Fig. 46.)* la Terre au foyer de l'Ellipſe *ABPD*, que le Soleil paroît décrire par ſon mouvement propre, dont le point *A* repréſente l'Apogée, le point *P* le Périgée, & les points *K, B, R, O, D, Q*, le lieu du Soleil lorſqu'il eſt dans les moyennes diſtances, & à 45 degrés de ſon Apogée & Périgée.

Soit auſſi *EHFG*, l'Ellipſe que la Lune décrit par ſon mouvement propre autour de la Terre, dont l'Apogée ſoit en *G*, & le Périgée en *H*.

Le Soleil étant en *A* ou en *P*, dans l'Apogée ou le Périgée de la Lune, cette Equation est nulle en quelqu'endroit que l'on place la Lune sur son Orbite *EHFG.* Il en est de même lorsque le Soleil est en *B* ou en *D*, à la distance de 90 ou 270 degrés du lieu de l'Apogée de la Lune.

Mais lorsque le Soleil se trouve éloigné du point *A*, qui répondoit à l'Apogée de la Lune, on apperçoit une inégalité qui augmente jusqu'à ce que le Soleil soit parvenu en *K*, où étant éloigné de 45 degrés de l'Apogée de la Lune, cette inégalité est de 4 minutes, qu'il faut soustraire du lieu moyen de la Lune pour avoir le véritable; elle diminuë ensuite à mesure que le Soleil s'éloigne du point *K*, jusqu'en *B*, où elle cesse entiérement.

Cette inégalité suit la même regle lorsque le Soleil est depuis *B* jusqu'en *P*, avec la différence qu'au lieu de la soustraire, il faut l'adjoûter au lieu moyen pour avoir le véritable.

Enfin, lorsque le Soleil est depuis *P* jusqu'en *D*, il faut soustraire cette inégalité du lieu moyen, & l'adjoûter au contraire depuis *D* jusqu'en *A* pour avoir le vrai lieu de la Lune.

CHAPITRE XIII.

De la seconde Inégalité de la Lune.

APRÈS avoir représenté les Inégalités que l'on observe dans le mouvement de la Lune lorsqu'elle est en Conjonction ou en Opposition avec le Soleil, il faut considérer celles que l'on remarque aussi dans toutes ses autres situations.

La plus grande de ces Inégalités s'appelle *la seconde Equation de la Lune*, elle dépend de la distance du Soleil à l'Apogée de la Lune, & de la distance de la Lune au Soleil.

Elle est la plus grande qui soit possible, lorsque le Soleil étant dans l'Apogée de la Lune, ou dans son Périgée, cette Planete est en même temps dans l'une de ses Quadratures; & elle est nulle lorsque le Soleil est éloigné de l'Apogée de la Lune, de 3 ou de 9 Signes, à quelque distance que la Lune soit à l'égard du Soleil.

Dans les autres distances du Soleil à l'Apogée de la Lune, & de la Lune au Soleil, cette Equation est plus grande plus le Soleil est près de cet Apogée, & plus la Lune approche des Quadratures.

Pour expliquer la maniére dont on conçoit cette Equation, ſoit *T* (*Fig. 47.*) la Terre à l'un des foyers de l'Ellipſe *ALHP*, qui repréſente l'Orbite de la Lune, dont l'Apogée eſt en *A*, & le Périgée en *P*.

Soit *SMRN*, l'Orbe du Soleil dont l'Apogée eſt en *S*, & le Périgée en *R*. Si l'on ſuppoſe la Lune en *A* ou en *P*, en Conjonction ou en Oppoſition avec le Soleil qui eſt en *S* ou en *R*, alors le vrai lieu de la Lune concourt avec le moyen, & on n'y obſerve aucune Inégalité. Mais ſi le Soleil étant ſuppoſé en *S* ou en *R*, la Lune s'en éloigne ſuivant la ſuite des Signes de *A* vers *L*, alors outre la premiére Inégalité, qui, dans l'hypotheſe elliptique ſimple, eſt meſurée par l'angle *DLT*, on en apperçoit une ſeconde qui augmente juſqu'à ce que la Lune ſoit arrivée à l'une de ſes Quadratures, où cette Inégalité eſt d'environ $2^d\ 30'$.

Suppoſons préſentement que le Soleil ſoit parvenu par ſon mouvement propre de *S* en *B*, alors la Lune étant en *L*, en Conjonction avec le Soleil, l'angle *DLT* meſurera ſa premiére Inégalité, & la ſeconde ceſſera. Mais lorſque la Lune s'éloignera du Soleil, cette Inégalité ſe fera appercevoir, & augmentera juſqu'à ce que la Lune ſoit dans une de ſes Quadratures, où elle ſera d'une quantité dont le rapport à la plus grande Inégalité, qui eſt de 2^d $30'$, ſera comme le ſinus du complément de l'angle *STL* de la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune, eſt au ſinus total; en ſorte que ſi la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune eſt de 60 degrés, dont le complément eſt 30 degrés, la ſeconde Inégalité de la Lune dans les Quadratures, ſera de $1^d\ 15'$, qui eſt à $2^d\ 30'$ comme le ſinus de 30 degrés, eſt au ſinus total.

Enfin, le Soleil étant parvenu en *M* ou en *N*, à la diſtance de 90 degrés des points *S* & *R*, qui répondent à l'Apogée ou au Périgée de la Lune, la ſeconde Inégalité ceſſe en quelqu'endroit de ſon Orbite qu'elle ſoit placée, comme en *L* ou en *H*.

Il eſt aiſé de voir par ce que nous venons de rapporter, que la Lune ne ſuit pas préciſément la circonférence de l'Ellipſe ſur laquelle elle ſe trouve placée dans ſes Conjonctions & Oppoſitions avec le Soleil; c'eſt pourquoi il faut avoir recours à une nouvelle hypotheſe pour repréſenter cette Inégalité.

On prendra pour cet effet ſur l'axe *AP* du point *T* vers *P*, *TK* de 2172 parties, dont le demi-axe *AC* eſt de 100000, & on décrira ſur le diametre *TK*, le petit cercle *TQKG*. Lorſque le Soleil eſt en *S* dans l'Apogée de la Lune, ou en *R* dans ſon Périgée, la Terre ſera en *K* à l'extrémité du diametre *TK*. Lorſque le Soleil eſt en *M* ou en *N*, à la diſtance de 90 degrés des points *S* & *R*, la Terre ſera en *T* dans le foyer de l'Ellipſe *ALHP*; & lorſque le Soleil eſt en *B*, ou à quelqu'autre diſtance que ce ſoit de l'Apogée de la Lune, la Terre ſera en *G* ſur le petit cercle *TQKG*, dans l'endroit où la ligne tirée du Soleil par le foyer *T* de l'Ellipſe, rencontre ce cercle.

Suivant cette théorie, la diſtance de la Lune à la Terre doit varier ſuivant que le Soleil s'approche ou s'éloigne de l'Apogée de la Lune : car le Soleil étant en *S*, & la Lune en *A* dans ſon Apogée, la diſtance de la Lune à la Terre eſt meſurée par *AK*, en ſorte que *CT*, qui repréſente l'excentricité ſimple, étant, comme on l'a ſuppoſé, de 4344 parties, dont le demi-axe *AC* eſt de 100000, & *TK* étant de 2172 de ces parties, on aura *CK*, diſtance de la Terre au centre *C* de l'Ellipſe, de 6516, qui, étant adjoûtées à *AC* 100000, donnent la diſtance *AK* de la Lune à la Terre, lorſqu'elle eſt dans ſon Apogée, de 106516.

Retranchant *CK*, de *AC* ou *PC*, on aura *PK*, diſtance de la Lune à la Terre lorſqu'elle eſt dans ſon Périgée, de 93484. Ce rapport de diſtances dans ces deux ſituations de la Lune, eſt conforme aux obſervations de la grandeur apparente du diametre de la Lune, qui, ſuivant les regles d'Optique, doit être en raiſon réciproque de la diſtance de la Lune à la Terre, le diametre apparent de la Lune dans ſon Apogée étant à ſon diametre apparent dans ſon Périgée, comme 29′ 30″ ſont à 33′ 38″, ou comme 93484 eſt à 106516.

Si l'on ſuppoſe préſentement que le Soleil étant en *S* dans l'Apogée de la Lune, l'angle *ADL* repréſente la diſtance moyenne de la Lune à ſon Apogée; alors la premiére Inégalité qui réſulte de l'hypotheſe elliptique ſimple, eſt meſurée par l'angle *DLT*; & la Terre étant en *K*, à l'extrémité du petit diametre *TK*, la ſeconde Inégalité ſeroit meſurée par l'angle *TLK*, ſi elle étoit produite ſeulement par le mouvement de la Terre de *T* en *K*. Mais comme l'on a remarqué que cette Inégalité ne ſuffiſoit pas pour repréſenter celle que l'on obſerve alors dans le mouvement de la Lune, il a été néceſſaire d'en ſuppoſer une autre réelle & phyſique, qui eſt à peu-près de la même grandeur que celle qui réſulte de l'apparence, ce qui provient de ce que la Lune étant plus éloignée de la Terre lorſqu'elle eſt en *K* que lorſqu'elle eſt en *T*, ſon mouvement dans ſon Orbe ſe rallentit à peu-près dans la proportion de ſes diverſes diſtances à la Terre.

Pour déterminer cette Inégalité, on décrira une nouvelle Ellipſe dont le point *T* ſera le centre, *K* l'un des foyers où ſe trouve la Terre lorſque le Soleil eſt en *S*, & *TL* eſt égal à la moitié du grand axe; & on cherchera ſur cette Ellipſe le vrai lieu de la Lune ſuivant l'hypotheſe elliptique ſimple ou celle de Képler, en cette maniére.

Méthode de déterminer la ſeconde Inégalité de la Lune, dans l'hypotheſe elliptique ſimple.

Dans l'hypotheſe elliptique ſimple, le Soleil étant en *S (Fig. 47.)* & la Terre en *K*, on prendra de *T* vers *A*, *TI* égal à *TK*, & l'on joindra *KL*. Du point *I*, on menera *IO*, parallele à *TL*, & du point *L*, on élevera ſur *LK*, la perpendiculaire *LO*, qui rencontrera en *O*, la ligne *IO*. Le point *O* déterminera le vrai lieu de la Lune, qui ſera ſur une Ellipſe, dont *T* eſt le centre, *K* l'un des foyers, *I* l'autre foyer, & *TL* la moitié du grand axe. Joignant *KO*, l'angle *KOI* meſurera la ſeconde Inégalité de la Lune, qui eſt double de l'angle *TLK*, qui repréſentoit l'Inégalité optique; ce que l'on démontrera de même qu'on l'a déja fait *(p. 139)*.

Si l'on ſuppoſe le Soleil à quelque diſtance que ce ſoit de l'Apogée de la Lune, comme en *B*, & que la diſtance de la Lune à ſon Apogée, corrigée par la premiére Equation, ſoit meſurée par l'angle *ATH*; alors la Terre étant en *G*, à l'extrémité du rayon tiré du Soleil par le foyer *T* de la premiére Ellipſe *AHBK*, on prendra de *T* vers *B*, *TE* égal à *TG*. Du point *E*, on menera *EF*, parallele à *TH*, & ayant joint *GH*, on élevera du point *H*, *HF*, perpendiculaire à *GH*, qui rencontrera en *F* la ligne *EF*. Le point *F* repréſentera le vrai lieu de la Lune, & l'angle *EFG* meſurera ſa ſeconde Inégalité, qui ſera double de l'angle *THG*, qui repréſentoit ſon Inégalité optique.

Il réſulte

Il résulte de cette hypothese, que lorsque le Soleil est entre les points *S* & *M*, comme en *B*, c'est-à-dire, lorsque la distance du Soleil à l'Apogée de la Lune, est depuis 0 jusqu'à 3 Signes, la Terre se trouve en *G* dans le demi-cercle *TGH*, plus éloignée de la Lune que le centre *T* de la nouvelle Ellipse; & que par conséquent la seconde Inégalité est soustractive dans les six premiers Signes de la distance de la Lune au Soleil, & additive dans les six derniers: Que lorsque le Soleil est entre les points *M* & *R*, comme en *V*, auquel cas sa distance à l'Apogée de la Lune est depuis 3 jusqu'à 6 Signes, la Terre se trouve dans le demi-cercle *TQK* en *Q*, plus proche de la Lune que le centre *T* de la nouvelle Ellipse; d'où il suit que la seconde Equation de la Lune est additive dans les six premiers Signes, & soustractive dans les six derniers: Que lorsque le Soleil est entre les points *R* & *N*, comme en *X*, la Terre est en *G*, plus proche de la Lune que le centre *T* de la nouvelle Ellipse; & que par conséquent la seconde Equation est additive dans les six premiers Signes, & soustractive dans les six derniers: Enfin, que lorsque le Soleil est entre *N* & *S*, comme en *Y*, la Terre est en *Q*, plus éloignée de la Lune que le centre *T* de la nouvelle Ellipse; d'où il suit que la seconde Equation est soustractive dans les six premiers Signes, & additive dans les six derniers.

Pour calculer cette Equation dans toutes ces différentes circonstances, il faut d'abord connoître la distance *TG* de la Terre au foyer *T* de la premiére Ellipse, qui est à *TK* 2172, comme le sinus du complément de l'angle *ATL* de la distance de la Lune au Soleil, est au sinus total. L'angle *ATH* de la distance de la Lune à son Apogée, corrigée par la premiére Equation, étant connu, on trouvera la distance *TH* de la Lune au foyer de la même Ellipse; & dans le Triangle *HTG*, dont les côtés *HT* & *TG* sont connus, aussi-bien que l'angle *HTG*, supplément de l'angle *LTH*, distance de la Lune au Soleil, on trouvera l'angle *THG*, dont le double *EFG* mesurera la seconde Equation.

EXEMPLE.

On veut calculer la seconde Equation de la Lune lorsque la distance *ATL* du Soleil à l'Apogée de la Lune, est de 20 degrés, & la distance *LTH* de la Lune au Soleil, corrigée par la premiére

Equation, eſt de 40 degrés. Adjoûtant la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune, à la diſtance de la Lune au Soleil, on aura l'angle *ATH* de la diſtance de la Lune à ſon Apogée, de 60 degrés.

Soit prolongé *TH* en Z, en ſorte que *HZ* ſoit égal à *HD*, & joignés *ZD*. Dans le Triangle *DTZ*, dont le côté *TZ* eſt connu de 200000, *TD*, double de l'excentricité eſt de 8688, & l'angle *ATH* eſt de 60 degrés, on trouvera l'angle *DZH*, de $2^d\ 12'\ 8''$, qui, à cauſe des côtés égaux *HZ*, *HD*, eſt la moitié de l'angle externe *DHT*, qui ſera par conſéquent de $4^d\ 24'\ 16''$, on aura donc l'angle *HDT*, de $115^d\ 35'\ 44''$. Maintenant dans le Triangle *DTH*, dont les trois angles ſont connus, auſſi-bien que le côté *DT*, de 8688, on fera, comme le ſinus de l'angle *DHT*, de $4^d\ 24'\ 16''$, eſt au ſinus de l'angle *HDT*, de $115^d\ 35'\ 44''$, ou ſon ſupplément *ADH*, de $64^d\ 24'\ 16''$; ainſi *DT* 8688 eſt à *HT*, qu'on trouvera de 102028, & qui eſt la moitié du grand axe de l'Ellipſe ſur laquelle la Lune eſt placée lorſque la diſtance *ATL* du Soleil à l'Apogée de la Lune eſt de 20 degrés, & la diſtance de la Lune au Soleil, corrigée par la premiére Equation, eſt de 40 degrés.

Pour trouver l'excentricité de cette nouvelle Ellipſe, on fera, comme le ſinus total eſt au ſinus du complément de l'angle *ATL*, de 20 degrés; ainſi *TK* 2172 eſt à *TG*, qu'on trouvera de 2041. Préſentement dans le Triangle *HTG*, dont les côtés *TH*, *TG* ſont connus, & l'angle compris *HTG*, ſupplément de l'angle *LTH*, de 40 degrés, qui meſure la diſtance de la Lune au Soleil, on trouvera l'angle *THG*, de $43'\ 32''$, dont le double $1^d\ 27'\ 4''$, meſure l'angle *EFG* de la ſeconde Equation, qui, étant retranché de l'angle *LTH* ou *LEF*, de 40 degrés, donne l'angle *LGF*, diſtance de la Lune au Soleil, de $38^d\ 32'\ 56''$.

Méthode de déterminer la ſeconde Inégalité de la Lune, dans l'hypotheſe de Képler.

Soit *ALP (Fig. 48.)* une Ellipſe qui repréſente l'Orbite ſimple de la Lune, dont *C* eſt le centre, & *T* l'un des foyers. Soit *ATL* la diſtance de la Lune à ſon Apogée dans l'hypotheſe de Képler, corrigée par la premiére Equation. Par la propriété de l'Ellipſe, *TH* eſt égal à la moitié du grand axe *AP*; c'eſt pourquoi dans le Triangle rectangle *HCT*, dont les côtés *TH* & *TC* sont connus, on trouvera la valeur de *HC*, qui mesure la moitié du petit axe de cette Ellipse. Le rapport du petit demi-diametre *HC* de l'Ellipse *ALP* à son grand demi-diametre *AC*, étant connu, on aura celui de *LN* à *MN*, que l'on suppose paralleles à *HC*, & qui sont dans la même proportion; c'est pourquoi l'on fera, comme *HC* est à *RC*, ou bien, comme *LN* est à *MN*; ainsi la tangente de l'angle *ATL*, distance de la Lune à son Apogée, corrigée par la premiére Equation, est à la tangente de l'angle *ATM*.

Maintenant dans le Triangle *MCT*, dont le rayon *MC* est connu, aussi-bien que l'excentricité *CT*, & l'angle *ATM* ou *CTM*, opposé au côté *MC*, on trouvera l'angle *CMT* & le côté *TM*. Enfin, dans le Triangle *MLT*, dont le côté *TM* est connu, l'angle *TML* est le complément de l'angle *CTM*, & l'angle *MLT* est le supplément de l'angle *TLN*, dont le complément est l'angle *ATL*, distance de la Lune au Soleil, on trouvera la distance *TL* de la Lune au foyer de l'Ellipse.

Si l'on suppose présentement que la distance du Soleil à l'Apogée de la Lune, soit mesurée par l'angle *ATS*, on décrira du centre *T* à l'intervalle *TL*, le cercle *LDV*; & ayant prolongé *ST* en *V*, on prendra sur *TV*, *TG* qui sera à *TK* 2172, comme le sinus du complément de l'angle *ATS*, est au sinus total; & prenant *T* pour centre, & *G* pour foyer, on décrira par le point *B* une nouvelle Ellipse *BIV*, sur laquelle on trouvera le vrai lieu de la Lune suivant l'hypothese de Képler, en cette maniére:

Du point *T*, soit mené *TI*, perpendiculaire à *ST*, qui rencontre l'Ellipse *BIV* au point *I*, & soit joint *GI*. Du point *G*, soit menée au point *L*, la ligne *GL*, & du point *T*, soit tirée la ligne *TF*, prolongée en *E*, qui soit telle que l'arc *LF* soit égal à la ligne *GE*, tirée perpendiculairement du point *G* sur la ligne *GE*. Du point *F*, soit mené *FO*, parallele à *TI*, qui rencontre l'Ellipse *BOIV* au point *O*; le point *O* représentera le vrai lieu de la Lune.

EXEMPLE.

On veut calculer la seconde Equation de la Lune lorsque la distance *ATL* *(Fig. 48.)* de la Lune à son Apogée, corrigée par la premiére Equation de Képler, eſt de 60 degrés, & la diſtance *ATS* du Soleil à l'Apogée de la Lune, eſt de 20 degrés.

Le rayon *AC* ou *RC* ou *HT* étant ſuppoſé de 100000, & l'excentricité *CT*, de 4344, on fera, comme *HT* eſt à *CT*; ainſi le ſinus total eſt au ſinus de l'angle *CHT*, qu'on trouvera de $2^d\ 29'\ 23''$, & dont le complément $87^d\ 30'\ 37''$, meſure l'angle *CTH*. On fera enſuite, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle *CTH*, de $87^d\ 30'\ 37''$; ainſi *HT* 100000, eſt à *HC*, qu'on trouvera de 99905. La proportion de *HC* à *RC* étant ainſi connuë, on fera, comme *HC* 99905, eſt à *RC* 100000; ainſi *LN* eſt à *MN*, ainſi la tangente de l'angle *ATL*, de 60 degrés, eſt à la tangente de l'angle *ATM*, qu'on trouvera de $60^d\ 1'\ 25''$. Maintenant dans le Triangle *CTM*, dont le rayon *CM* eſt connu, & l'excentricité *CT*, on fera, comme *CM* 100000 eſt à *CT* 4344; ainſi le ſinus de l'angle *CTM*, de $60^d\ 1'\ 25''$ eſt au ſinus de l'angle *CMT*, qu'on trouvera de $2^d\ 9'\ 23''\frac{1}{2}$, & qui, étant adjoûté à l'angle *CTM*, de $60^d\ 1'\ 25''$, donne l'angle *ACM*, de $62^d\ 10'\ 48''\frac{1}{2}$. On fera auſſi, comme le ſinus de l'angle *CTM*, de $60^d\ 1'\ 25''$, eſt au ſinus de l'angle *MCT*, ſupplément de l'angle *ACM*, de $62^d\ 10'\ 48''\frac{1}{2}$; ainſi *CM* 100000 eſt à *TM*, qu'on trouvera de 102099. Enfin l'on fera, comme le ſinus de l'angle *TLN*, complément de l'angle *ATL*, de 60 degrés, eſt au ſinus de l'angle *TMN*, complément de l'angle *ATM*, de $60^d\ 1'\ 25''$; ainſi *TM* 102099 eſt à la diſtance *LT* de la Lune au foyer *T* de l'Ellipſe *ALHP*, qu'on trouvera de 102028, de la même grandeur que dans l'hypotheſe elliptique ſimple.

La diſtance *ATS* du Soleil à l'Apogée de la Lune, étant ſuppoſée de 20 degrés, on fera, comme *ST* eſt au ſinus du complément de 20 degrés; ainſi *TR* 2172 eſt à *TG*, qui ſera de 2041, & qui meſurera l'excentricité d'une nouvelle Ellipſe *BOIV*, dont le grand demi-diametre *LT* ou *BT* a été trouvé de 102028, & ſur laquelle on déterminera le vrai lieu de la Lune, ſuivant l'hypotheſe de Képler, en cette maniére:

Par la propriété de l'Ellipſe, *GI* eſt égal à ſon grand demi-diametre *TL* ou *TD*; c'eſt pourquoi dans le Triangle rectangle *ITG*, dont l'hypothénuſe *GI* eſt de 102028, & le côté *TG*, de 2041 toises, on fera, comme *GI* est à *TG*; ainsi le sinus total est au sinus de l'angle *TIG*, qu'on trouvera de 1^{d} 8' 47", & dont le complément mesure l'angle *TGI*, qui sera de 88^{d} 51' 13". On fera ensuite, comme le sinus total est au sinus de l'angle *TGI*, de 88^{d} 51' 13"; ainsi *GI* 102028, est à *TI*, qu'on trouvera de 102017. L'angle *ATL* ayant été supposé de 60 degrés, & l'angle *ATS*, de 20 degrés, on aura l'angle *BTL*, de 40 degrés, & son supplément *LTG*, de 140 degrés; c'est pourquoi dans le Triangle *LTG*, dont les côtés *LT* 102028, & *TG* 2041, sont connus, & l'angle compris *LTG* est de 140 degrés, on aura l'angle *TLG*, de 43' 32", qui ne différe pas sensiblement de l'angle *LTF*, à cause que l'arc *LF*, qui a été pris égal à la ligne *GE*, n'est que de 43' 32", & les deux lignes *GL*, *TF*, peuvent être censées paralleles, comme on peut le voir *(p. 143)*. Retranchant l'angle *LTF*, de 43' 32", de l'angle *BTL*, de 40 degrés, on aura l'angle *BTF*, de 39^{d} 16' 28"; & dans le Triangle *FTG*, dont le côté *FT* est de 102028, le côté *TG*, de 2041, & l'angle compris *FTG*, de 140^{d} 43' 32", supplément de l'angle *BTF*, de 39^{d} 16' 28", on aura l'angle *TFG*, de 42' 52", qui, étant retranché de l'angle *BTF*, de 39^{d} 16' 28", reste l'angle *BGF*, de 38^{d} 33' 36". On fera enfin, comme *TD* est à *TI*, ou bien, comme *QF* est à *QO*; ainsi la tangente de l'angle *BGF*, de 38^{d} 33' 36" est à la tangente de l'angle *BGO*, qui mesure la distance véritable de la Lune au Soleil, qu'on trouvera de 38^{d} 33' 16". La retranchant de l'angle *BTL*, supposé de 40^{d} 0' 0", on aura la seconde Equation de la Lune, de 1^{d} 26' 44", plus petite seulement de 20 secondes que suivant l'hypothese elliptique.

CHAPITRE XIV.

De la troisiéme & derniére Inégalité de la Lune.

OUTRE l'Inégalité qui dépend de la distance du Soleil à l'Apogée de la Lune, & de la distance de la Lune au Soleil, on en remarque une autre qui dépend uniquement de la distance de la Lune au Soleil.

Cette Inégalité est la plus grande qui soit possible, lorsque la

Lune est dans ses Octans à l'égard du Soleil, c'est-à-dire, lorsque sa distance au Soleil est de 45, 135, 225, & 315 degrés, auquel cas on l'observe de 33′ 40″; elle est nulle dans les Conjonctions & Oppositions de la Lune au Soleil, & dans ses Quadratures; & elle augmente à mesure qu'elle s'éloigne de ces diverses Phases, & qu'elle s'approche des Octans.

Pour expliquer la maniére dont on conçoit cette Inégalité, soit *ALHP (Fig. 47.)* une Ellipse qui représente l'Orbite de la Lune, dont l'Apogée est en *A*, & le Périgée en *P*. Soit *SMRN*, l'Orbe du Soleil, dont les points *S* & *R*, répondent à l'Apogée & au Périgée de la Lune, & les points *M* & *N* en sont éloignés de 90 degrés. Si l'on suppose que la Lune soit en *A* dans son Apogée, & que le Soleil réponde aux points *M* & *N*, auquel cas la Terre est en *T* au foyer de l'Ellipse *ALHP*, & la seconde Inégalité est nulle; alors la Terre changera de situation suivant la direction de la ligne *ATK*, perpendiculaire à la ligne *MN*, tirée du Soleil par le foyer de l'Ellipse, & sera transportée à l'opposite de la Lune, de *T* en *a*, en sorte que *Ta* sera à *TA*, comme la solidité de la Lune à la solidité de la Terre, dont le rapport est à peu-près comme 100 à 5056, ou comme 1 à $50\frac{1}{2}$.

Le Soleil étant dans la même situation, si la Lune se trouve dans son Périgée en *P*, alors la Terre, qui étoit en *T*, sera portée du côté opposé à la Lune, de *T* en *b*, suivant la même direction de la ligne *ATK*, perpendiculaire à la ligne *MN*, en sorte que *Tb* sera à *TP*, comme la solidité de la Lune est à la solidité de la Terre, ou comme 1 à $50\frac{1}{2}$.

Si l'on suppose présentement le Soleil en *S* ou en *R* dans l'Apogée de la Lune, pendant que cette Planete est dans l'une de ses Quadratures, la Terre sera portée par sa seconde Inégalité, de *T* en *K*, & par sa troisiéme Inégalité, elle changera de situation suivant la direction de la ligne *rt*, perpendiculaire à la ligne *AP*, en sorte que la Lune étant en *m*, la Terre sera à l'opposite, comme en *c*, éloignée du point *K*, de la distance *Kc*, qui sera à *Kt*, comme 100 à 5056; & la Lune étant en *n*, la Terre sera en *d*, éloignée du point *K*, de la distance *Kd*, qui est égale à *Kc*.

Dans toutes ces différentes situations de la Lune à l'égard du Soleil, la Terre & la Lune conservant toûjours la même direction par rapport au même point du Ciel, on ne doit appercevoir aucun changement dans le mouvement de la Lune, mais ſeulement dans la grandeur apparente de ſon diametre, qui eſt en raiſon réciproque de ſa diſtance à la Terre, qui varie de la maniére qu'on le vient de repréſenter. Car la diſtance *AT* de l'Apogée de la Lune au foyer de l'Ellipſe *ALHP*, qui eſt de 104344, étant à la diſtance *Ta*, de la Terre au foyer de cette Eclipſe, comme 5056 à 100; on trouvera *Ta*, de 2064, qui, étant adjoûté à 104344, donne la diſtance *Aa* de la Lune à la Terre, de 106408, lorſque la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune, eſt de 3 Signes, & la Lune eſt dans ſon dernier Quartier; ou bien, lorſque la diſtance du Soleil à l'Apogée de la Lune, eſt de 9 Signes, & la Lune eſt dans ſon premier Quartier, ce qui s'accorde aux obſervations du diametre apparent.

Pareillement la diſtance *PT* du Périgée de la Lune au foyer *T* de l'Ellipſe *ALHP*, qui eſt de 95656, étant à la diſtance *Tb*, de la Terre au foyer de cette Ellipſe, comme 5056 à 100, on aura *Tb*, de 1892, qui, étant adjoûté à 95656, donne la diſtance *Pb* de la Lune à la Terre, de 97548, lorſque la Lune eſt dans ſon Périgée en Quadrature avec le Soleil; on aura donc *Aa* à *Pb*, comme 106408 eſt à 97548, ce qui s'accorde aux obſervations des diametres apparents de la Lune, qui ſont en raiſon réciproque de ces diſtances.

On peut donc conſidérer *AT* & *Ta*, de même que *PT* & *Tb*, ſemblables à deux bras d'une balance, dont le point *T* eſt le point d'appui, ſur laquelle la Terre & la Lune doivent reſter en parfait équilibre, leur diſtance au point d'appui *T*, étant en raiſon réciproque de leur ſolidité.

Suppoſons préſentement que le Soleil étant en *M* ou *N*, la Lune ſoit dans l'une de ſes Conjonctions ou Oppoſitions; alors la ſeconde Inégalité étant nulle, la Terre reſtera en *T* au foyer de l'Ellipſe *ALHP*, elle ne ſera point non plus déplacée par la troiſiéme Inégalité, qui ſe fait appercevoir ſuivant une perpendiculaire à la ligne *MTN*, tirée du Soleil par le foyer de l'Ellipſe, parce que la diſtance de la Lune à la ligne *MTN*, étant nulle, la diſtance de la Terre à cette même ligne, qui ſuit la proportion que nous avons indiquée, doit être auſſi nulle; on n'obſervera donc alors que la premiére Equation, & la diſtance de la Lune à la Terre ſera meſurée par la ligne *Tm* ou *Tn*, conformément aux obſervations.

Il ne doit auſſi arriver par la même raiſon, aucune variation dans la ſituation de la Terre, cauſée par la troiſiéme Inégalité, lorſque le Soleil eſt en *S*, ou en quelqu'autre endroit de ſon Orbe en Conjonction ou en Oppoſition avec la Lune. Mais à meſure que la Lune s'éloigne du Soleil, la perpendiculaire tirée de la Lune ſur la ligne qui va du Soleil au foyer de l'Ellipſe, augmente de grandeur; d'où il réſulte que la Terre s'écarte toûjours de plus en plus de ce rayon dans un ſens contraire.

Pour en diſcerner l'effet, ſuppoſons le Soleil en *S*, & la Lune en *O*, à la diſtance de 45 degrés du Soleil. Du point *O*, ſoit menée la ligne *Og*, perpendiculaire ſur la ligne *STR*, & du point *K*, ſoit élevée ſur la même ligne *STR*, une perpendiculaire *Kh*, qui ſoit à *Og*, comme 100 eſt à 5056. Le point *h* repréſentera alors la ſituation de la Terre, & la troiſiéme Inégalité ſera meſurée par l'angle *KOh*, dont on trouvera la grandeur, en cette maniére:

Du point *O*, ſoit menée *Oi*, parallele & égale à *Kg*, & ſoit joint *Ki*, qui ſera parallele & égale à *Og*, & perpendiculaire à la ligne *SR*. Dans les Triangles *KOi* & *hOi*, *Ki* ou *Og* eſt à *ih* ou *Ki* plus *Kh*, comme la tangente de l'angle *KOi* ou *OKg*, qui meſure la diſtance de la Lune au Soleil, eſt à la tangente de l'angle *hOi*, qui eſt égal à l'angle *KOi* de la diſtance de la Lune au Soleil, plus l'angle *KOh*, qui meſure la troiſiéme Inégalité. Mais *Ki* eſt à *ih*, comme 5056 eſt à 5156, c'eſt-à-dire, comme la ſolidité de la Terre eſt à la ſolidité de la Terre plus celle de la Lune: donc la tangente de l'angle de la diſtance de la Lune au Soleil, eſt à la tangente de l'angle de la diſtance de la Lune au Soleil plus l'angle de la troiſiéme Inégalité, comme 5056 à 5156. Prolongeant *hO* en *u*, & *KO* en *q*, la Terre étant parvenuë en *h*, par la troiſiéme Inégalité, verra répondre la Lune au point *u*, plus avancé ſuivant la ſuite des Signes que lorſque la Terre étant en *K*, la Lune répondoit au point *q*; & le même effet arrivant dans les trois premiers Signes de la diſtance de la Lune au Soleil, il ſuit que la troiſiéme Inégalité eſt alors additive.

Si l'on ſuppoſe préſentement la Lune en *e*, le Soleil reſtant

toûjours

toûjours au point S, on menera ef, perpendiculaire à SR, & on fera Kh à ef, comme 100 à 5156. Le point h, déterminera la ſituation de la Terre, qui verra la Lune répondre au point l, moins avancé ſuivant la ſuite des Signes que le point p, où ſe termine la ligne Kep, tirée du point K par la Lune ; & le même effet arrivant lorſque la diſtance de la Lune au Soleil eſt depuis trois juſqu'à ſix Signes, il ſuit que la troiſiéme Inégalité eſt alors ſouſtractive.

Le contraire arrive lorſque la Lune eſt en o, c'eſt-à-dire, lorſque ſa diſtance au Soleil eſt depuis 6 juſqu'à 9 Signes ; car alors la Terre ſe trouve de K vers r, comme en d, & le rayon do, tiré de la Terre à la Lune, étant prolongé au de-là de l'Orbite, ſe termine à un point plus avancé ſuivant la ſuite des Signes, que le rayon Ko, prolongé à la même diſtance ; d'où il ſuit que la troiſiéme Equation eſt alors additive.

Enfin, lorſque la Lune eſt en K, où ſa diſtance au Soleil eſt depuis 9 juſqu'à 12 Signes, la Terre eſt en d, & le rayon dk, tiré de la Terre à la Lune, & prolongé au de-là de ſon Orbe, ſe termine à un point moins avancé ſuivant la ſuite des Signes, que le rayon Kk, prolongé à la même diſtance ; d'où il ſuit que la troiſiéme Equation eſt alors additive.

EXEMPLE I.

On veut trouver la troiſiéme Inégalité de la Lune lorſque la diſtance AKO de la Lune au Soleil eſt de 30 degrés.

Faites, comme 5056 eſt à 5156 ; ainſi la tangente de l'angle AKO ou KOi, eſt à la tangente de l'angle iOh, que l'on trouvera de $30^d\ 29'\ 17''$. Retranchant de l'angle IOH, l'angle KOi ; de 30 degrés, on aura l'angle KOh, qui meſure la troiſiéme Inégalité, de $29'\ 17''$.

EXEMPLE II.

On cherche la troiſiéme Inégalité de la Lune lorſque la diſtance de la Lune au Soleil eſt de 45 degrés.

Faites, comme 5056 eſt à 5156 ; ainſi la tangente de l'angle AKO ou KOi, de 45 degrés, eſt à la tangente de l'angle iOH, que l'on trouvera de $45^d\ 33'\ 40''$. Retranchant l'angle iOK, de l'angle iOH, on aura l'angle KOh, qui meſure la troiſiéme Inégalité, de $33'\ 40''$.

Exemple III.

On cherche la troisiéme Inégalité de la Lune lorsque sa distance au Soleil est de 60 degrés.

Faites, comme 5056 est à 5156; ainsi la tangente de 60 deg. est à la tangente de $60^d\ 29'\ 0''$, dont retranchant 60 degrés, reste la troisiéme Inégalité, de $29'\ 0''$.

Méthode de déterminer le lieu de l'Orbite de la Lune, où sa troisiéme Inégalité est la plus grande qui soit possible, & la quantité de cette plus grande Inégalité.

La troisiéme Inégalité de la Lune augmente, ainsi qu'il a été expliqué ci-dessus, à mesure que cette Planete s'éloigne du Soleil, & s'approche des Octans; elle diminuë ensuite jusqu'aux Quadratures, quoique l'éloignement de la Terre, du lieu où elle étoit au temps de la Conjonction ou de l'Opposition de la Lune avec le Soleil, qui produit cette Inégalité, continuë à augmenter. Cela est conforme aux exemples que nous venons de rapporter, & on peut déterminer le point où cette Inégalité est la plus grande, en la calculant pour quelques degrés avant & après les Octans, & prenant des parties proportionnelles; cependant comme cette méthode n'est que par approximation, nous en proposerons une géométrique pour déterminer le lieu où l'on doit appercevoir la plus grande Inégalité, & de quelle quantité elle doit être.

Soit, comme on l'a supposé ci-dessus, la distance de la Terre à la ligne tirée du Soleil au foyer de l'Ellipse qui représente l'Orbite de la Lune, à la distance de la Lune à cette même ligne, en raison réciproque de la masse de ces deux corps, c'est-à-dire, comme 100 à 5056, & ayant pris une ligne OS (*Fig. 49.*) à discrétion, soit fait OR à OS, comme 100 à 5056. Soit divisé OR en deux parties égales au point F, & menés des points F & S, les lignes FC, SD, perpendiculaires & égales à la ligne FS. Joignés CD, qui sera aussi égale aux lignes FS, FC & SD, & du point C, comme centre à l'intervalle CD ou FC, soit décrit le cercle $DTFK$, qui touchera les lignes RS, SD, aux points F & D. Menés par les points O & R, les lignes OT, RK, paralleles à FC, qui coupent le cercle *DTFK* aux points *T* & *K*, & ſoient égales entr'elles; & tirés par les points *K* & *T*, la ligne *KTA*, qui ſera parallele & égale à la ligne *ROS*. Menés auſſi des points *K* & *T*, au point *D*, les lignes *KD* & *TD*; je dis que l'angle *AKD* meſure la diſtance de la Lune au Soleil où la troiſiéme Inégalité doit être la plus grande, & que l'angle *KDT* repréſente cette plus grande Inégalité.

Démonstration.

Soit pris de côté & d'autre du point *D*, les points *H* & *L* à diſcrétion, & ſoit mené des points *H, D, L*, par le point *T*, les lignes *HTG, DTB*, & *LTE*, qui rencontrent aux points *G, B, E*, la ligne *KE*, parallele à *SL*.

Par la conſtruction, *OR* ou *TK* eſt à *OS* ou *TA*, comme 100 eſt à 5056; comme la diſtance de la Terre à la ligne, tirée du Soleil par le foyer de l'Ellipſe qui repréſente l'Orbite de la Lune, eſt à la diſtance de la Lune à cette même ligne. Mais *TK* eſt à *TA*, comme *KG* eſt à *AH*, comme *KB* eſt à *AD*, comme *KE* eſt à *AL*: donc *KG* eſt à *AH*, *KB* eſt à *AD*, *KE* eſt à *AL*, comme la diſtance de la Terre à la ligne tirée du Soleil par le foyer de l'Ellipſe, eſt à la diſtance de la Lune à cette même ligne. Si donc l'on ſuppoſe que les lignes *AH, AD, AL*, meſurent la diſtance de la Lune au rayon *ATK*, tiré du Soleil par le foyer de l'Ellipſe, les lignes correſpondantes *KG, KB, KE*, meſureront la diſtance de la Terre à ce même rayon. La Terre étant donc parvenuë aux points *G, B, E*, verra la Lune ſuivant les lignes *GH, BD, EL*; au lieu que ſi elle fut reſtée en *K*, elle auroit apperçû la Lune dans ſes différentes ſituations ſuivant les lignes *KD, KD, KL*. Les angles *KHG, KDB, KLE*, formés par le concours de ces lignes, meſurent donc la troiſiéme Inégalité.

Il faut préſentement conſidérer que les angles *KHG, KDB, KLE*, ont pour baſe commune la corde *KT* du cercle *DTFK*, & que leur ſommet ſe rencontre ſur la ligne *AL*. Entre ces angles, il n'y a que l'angle *KDB*, qui ſe termine à la circonférence du cercle, pendant que les autres, & tous ceux qu'on peut s'imaginer, vont ſe terminer au dehors de cette circonférence. L'angle *KDT* eſt donc le plus grand de tous ceux dont le ſommet eſt ſur la ligne *AL*, & meſure la plus grande Inégalité qui ſoit poſſible. L'angle

AKD mesure donc aussi la distance de la Lune au Soleil où cette Inégalité est la plus grande.

Il faut remarquer que cet angle *AKD* est plus petit que l'angle *AID* ou *SFD*, qui n'en diffère pas sensiblement, lequel est de 45 degrés; & que l'angle *ATD*, qui mesure la distance de la Lune au Soleil, corrigée par la troisiéme Inégalité, est plus grand que le même angle *AID*; de sorte que les termes de ces deux distances sont l'un en de-çà, & l'autre au de-là de 45 degrés.

Pour déterminer par le calcul, la grandeur de ces angles, on résoudra le Triangle *CIK*, rectangle en *I*, dont le côté *IK* ou *FR*, moitié de *OS*, est de 50 parties, & le côté *CK* ou *CF*, rayon du cercle *DTFK*, est égal à *OS* 5056 plus *OF* 50, c'est-à-dire, à 5106. On fera donc, comme *CK* 5106 est à *IK* 50; ainsi le sinus total est au sinus de l'angle *ICK*, qu'on trouvera de 33′ 38″, & qui, étant la moitié de l'angle au centre *TCK*, est par la propriété du cercle, égal à l'angle à la circonférence *KDT*, qui mesure la troisiéme Inégalité lorsqu'elle est la plus grande qui soit possible.

On fera ensuite, comme le sinus total est au sinus du complément de l'angle *ICK*, de 33′ 38″; ainsi *CK* 5106 est à *KI* ou *AD*, qu'on trouvera de $5105 \frac{8}{10}$. Maintenant dans le Triangle *KAD*, rectangle en *A*, dont le côté *AD* est de $5105 \frac{8}{10}$, & le côté *AK* est de 5156, on fera comme *KA* est à *AD*; ainsi le sinus total est à la tangente de l'angle *AKD*, qu'on trouvera de 44^{d} 43′ 10″, & qui mesure la distance de la Lune au Soleil lorsque la troisiéme Inégalité est la plus grande.

CHAPITRE XV.

De la grandeur apparente du diametre de la Lune.

Nous avons remarqué dans la théorie du mouvement de la Lune, qu'une partie des Inégalités qu'on y observe, provient de la variation des distances de la Lune à la Terre; ainsi la connoissance exacte des distances des diametres apparents de la Lune est très-importante pour la rectification de la théorie de la Lune, suivant laquelle on doit représenter non-seulement son mouvement apparent, mais aussi la grandeur apparente de son diametre.

Pour donner une idée des variations qu'on y obſerve, ſoit le Soleil en *S (Fig. 47.)* ou en *R* dans l'Apogée ou dans le Périgée de la Lune, auquel cas la Terre eſt en *K*, ainſi que nous l'avons expliqué; alors le diametre apparent de la Lune paroîtra de 29′ 30″ dans ſon Apogée, & de 33′ 38″ dans ſon Périgée.

Suppoſons que le Soleil ſoit parvenu en *M* ou *N*, à la diſtance de 90 degrés de l'Apogée de la Lune, auquel cas la Terre eſt en *T*; alors la Lune étant en Conjonction ou en Oppoſition avec le Soleil, ſa diſtance à la Terre ſera meſurée par *Tm* ou *Tn*, qui ſont égales entr'elles, & ſon demi-diametre ſera de 15′ 39″.

Dans les autres ſituations du Soleil à l'égard de l'Apogée de la Lune, comme en *B*, la Terre ſera en *G*, & la Lune étant en Conjonction avec le Soleil, ſon demi-diametre apparent ſera à 14′ 45″, comme *AK* à *LG*.

Hors des Conjonctions & Oppoſitions, le Soleil étant dans l'Apogée de la Lune, & la Lune dans l'un de ſes Quartiers, la Terre ſera en *c* ou *d*, également éloignée du point *G*, ſa diſtance à la Lune ſera meſurée par les lignes *rc*, *dt*, & le diametre de la Lune ſera de 30′ 52″.

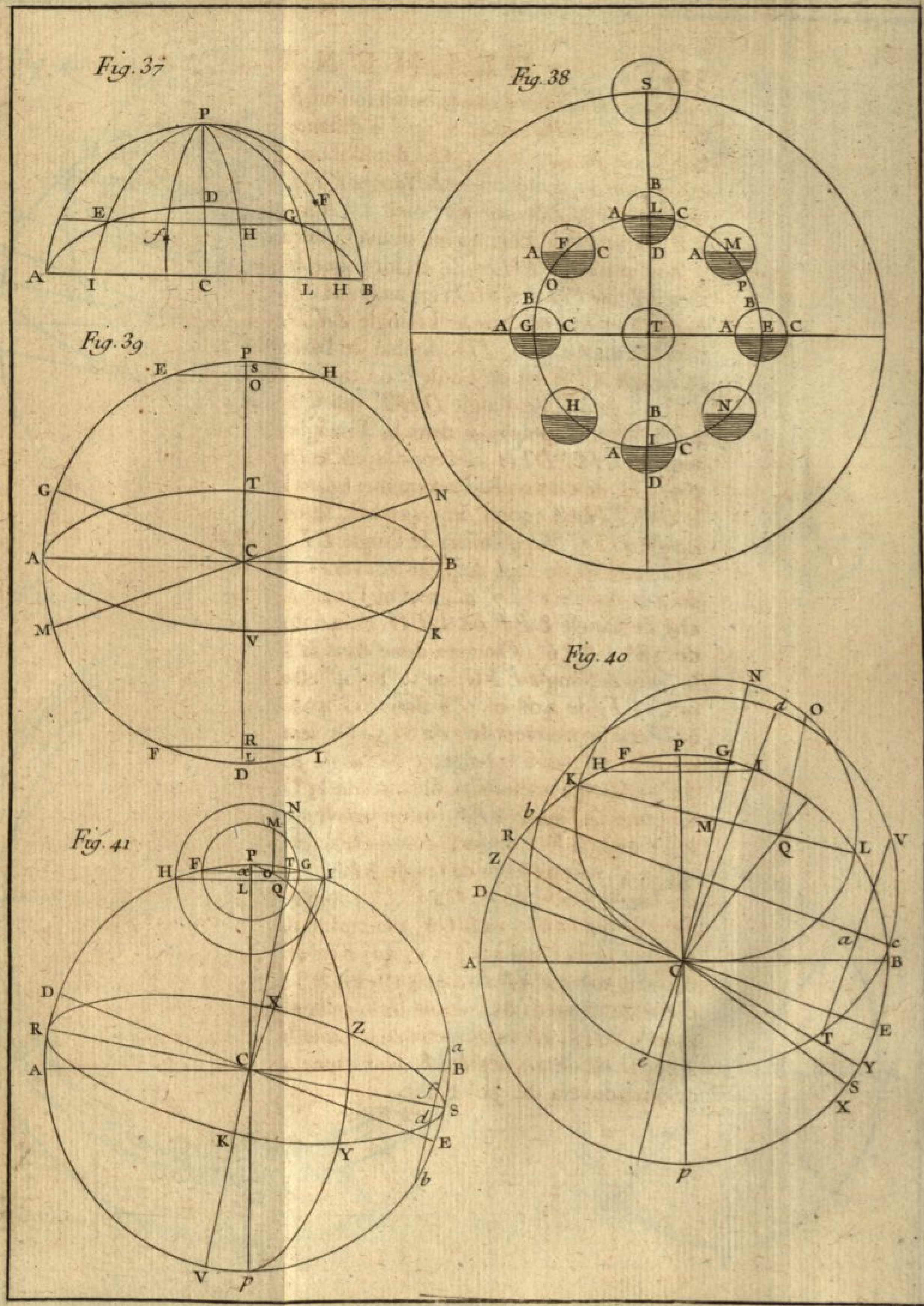
Le Soleil étant parvenu à la diſtance de 90 degrés du point *A* de l'Apogée, comme en *M*, & la Lune étant dans ſon premier Quartier en *P*, la diſtance de la Lune à la Terre ſera meſurée par la ligne *Pb*, & le diametre apparent de la Lune ſera de 32′ 14″. Dans cette même ſituation du Soleil, la Lune étant dans ſon dernier Quartier en *A*, & en même temps dans ſon Apogée, la Terre ſera en *a*, éloignée du point *T*, de la quantité *Ta*, qui eſt à *TA*, comme 100 à 5056, & le diametre apparent de la Lune ſera de 29′ 32″.

Enfin, le Soleil étant à l'oppoſite au point *N*, & la Lune dans ſon premier Quartier, la Terre ſera en *a*, & le diametre apparent de la Lune ſera de 29′ 32″. Dans cette même ſituation du Soleil, la Lune étant dans ſon dernier Quartier en *P*, le diametre apparent de la Lune ſera de 32′ 14″.

La grandeur du diametre apparent de la Lune ayant été déterminée dans l'une de ces ſituations par l'obſervation immédiate, on trouvera par le calcul la grandeur de ſon diametre apparent dans toutes ſes autres ſituations, tant à l'égard du Soleil qu'à l'égard de la Terre, en cette maniére.

Supposons d'abord que le Soleil soit en *B*, éloigné de 20 degrés de l'Apogée de la Lune, & que la distance *BTH* de la Lune au Soleil soit de 40 degrés. On fera d'abord, comme le sinus total est au sinus du complément de l'angle *KTG* ou *ATL*, de 20 deg. qui mesure la distance du Soleil à l'Apogée de la Lune ; ainsi *TK* 2172 est à *TG*, qu'on trouvera de 2041.

Soit prolongé *TH* en Z, en sorte que *HZ* soit égal à *HD*, on aura *TZ* ou *TH* plus *HD* égal au grand diametre de l'Ellipse *AP*; & par conséquent dans le Triangle *ZTD*, dont le côté *TZ* est connu de 200000, *TD*, double de l'excentricité est de 8688, & l'angle *ATH* est de 60 deg. on trouvera l'angle *DZH*, de 2^d $12' 8''$, moitié de l'angle *DHT*, qui sera par conséquent de 4^d $24' 16''$; c'est pourquoi dans le Triangle *DHT*, dont les deux angles *DHT*, *DTH* sont connus, & le côté *DT*, on trouvera le côté *TH*, de 102028. Présentement dans le Triangle *THG*, dont le côté *TH* est connu de 102028, le côté *TG*, de 2041, & l'angle *HTG*, supplément de l'angle *LTH*, distance de la Lune au Soleil, est de 140 deg. on trouvera l'angle *THG*, de $43' 32''$, dont le double $1^d 27' 4''$, mesure l'angle *EFG*, qui, étant retranché de l'angle *LEF* ou *LTH*, de 40 deg. donne l'angle *LGF*, de $38^d 32' 56''$. On aura donc dans le Triangle *EFG*, comme le sinus de l'angle *EFG*, de $1^d 27' 4''$ est au sinus de l'angle *FEG* ou *LEF*, de $40^d 0' 0''$; ainsi *EG* 4082, double de *TG*, est à *GF*, qu'on trouvera de 103615. On fera ensuite, comme 5056 est à 5156; ainsi la tangente de l'angle *βFG* ou *LGF*, de 38^d $32' 56''$, qui mesure la distance de la Lune au Soleil, est à la tangente de l'angle *βFδ*, qu'on trouvera de $39^d 5' 46''$; & dans le Triangle *βFδ*, on fera, comme le sinus de l'angle *Fδβ*, de 50^d $54' 14''$, complément de l'angle *βFδ*, de $39^d 5' 46''$, est au sinus de l'angle *βGF*, de $51^d 27' 4''$, complément de l'angle *LGF*, de $38^d 32' 56''$; ainsi *GF*, déterminé de 103615, est à *Fδ*, distance de la Lune à la Terre, qu'on trouvera de 104414. Enfin on fera, comme *Fδ* 104414 est à *AK* 106516; ainsi $29' 30''$, diametre apparent de la Lune lorsqu'elle est en *A* en Conjonction avec le Soleil, est au diametre de la Lune lorsque sa distance à son Apogée est de 20 degrés, & sa distance au Soleil, de 40 degrés, qu'on trouvera de $30' 6''$.



Simonneau Sculp.

Fig. 42

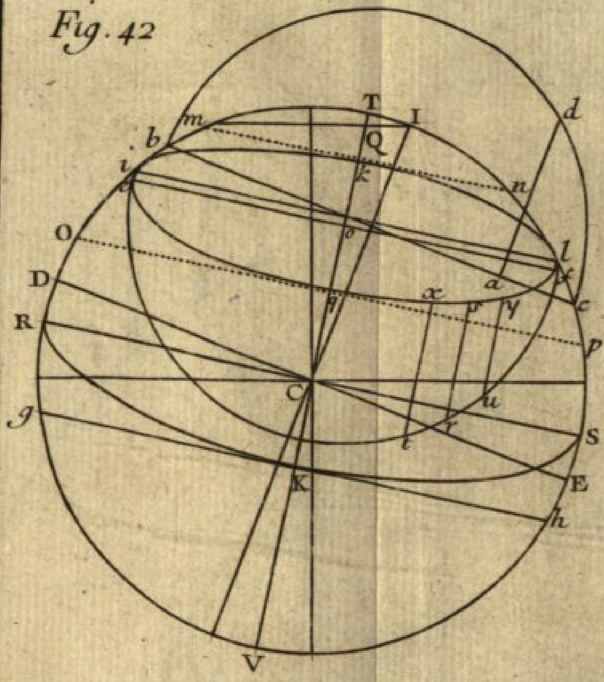


Fig. 44

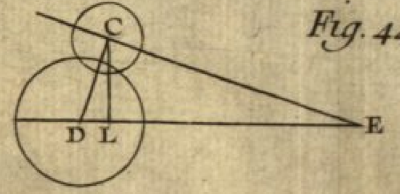


Fig. 45

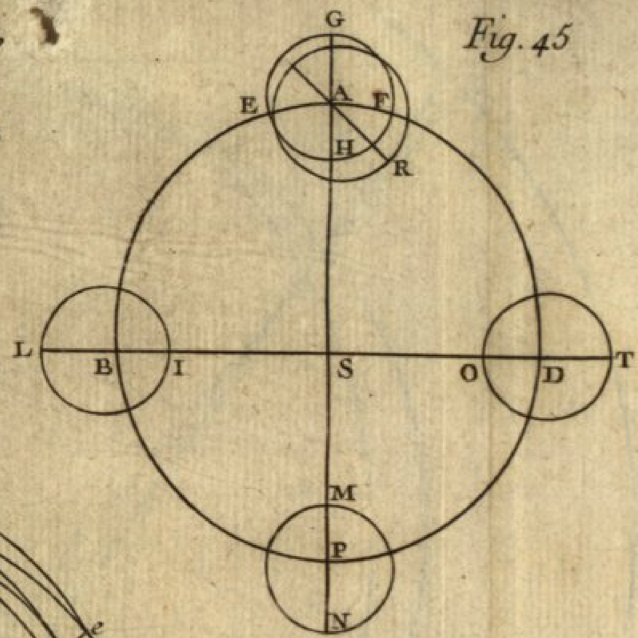


Fig. 43

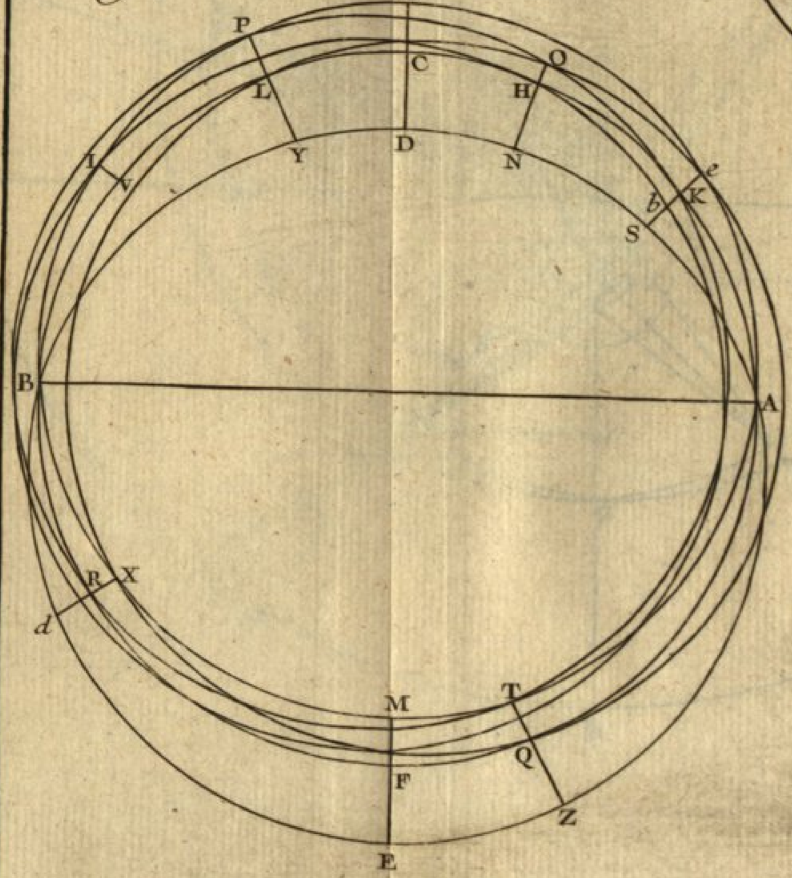
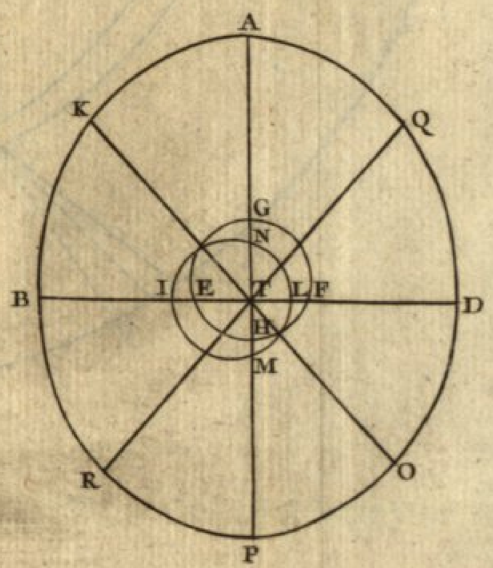
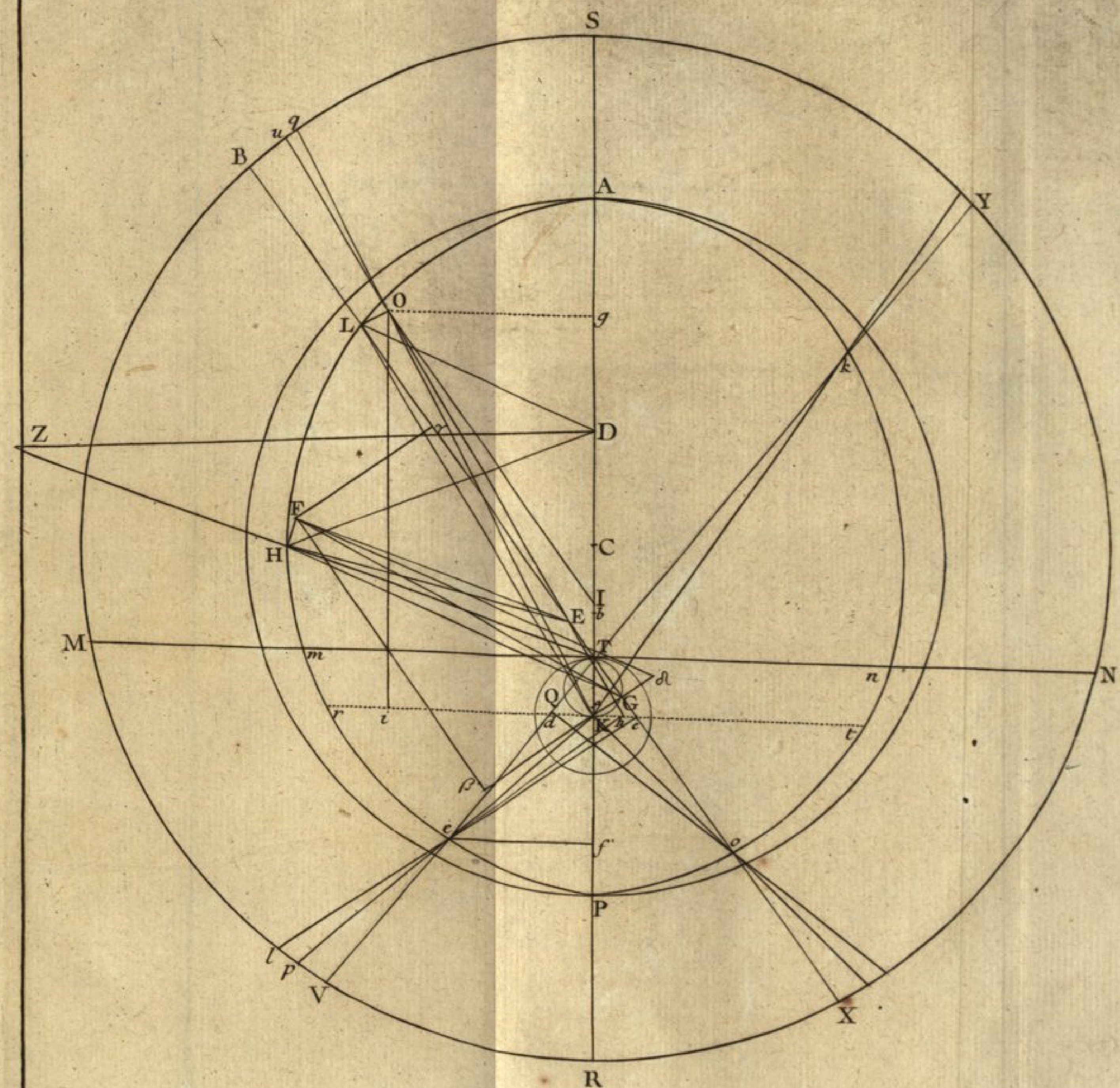


Fig. 46



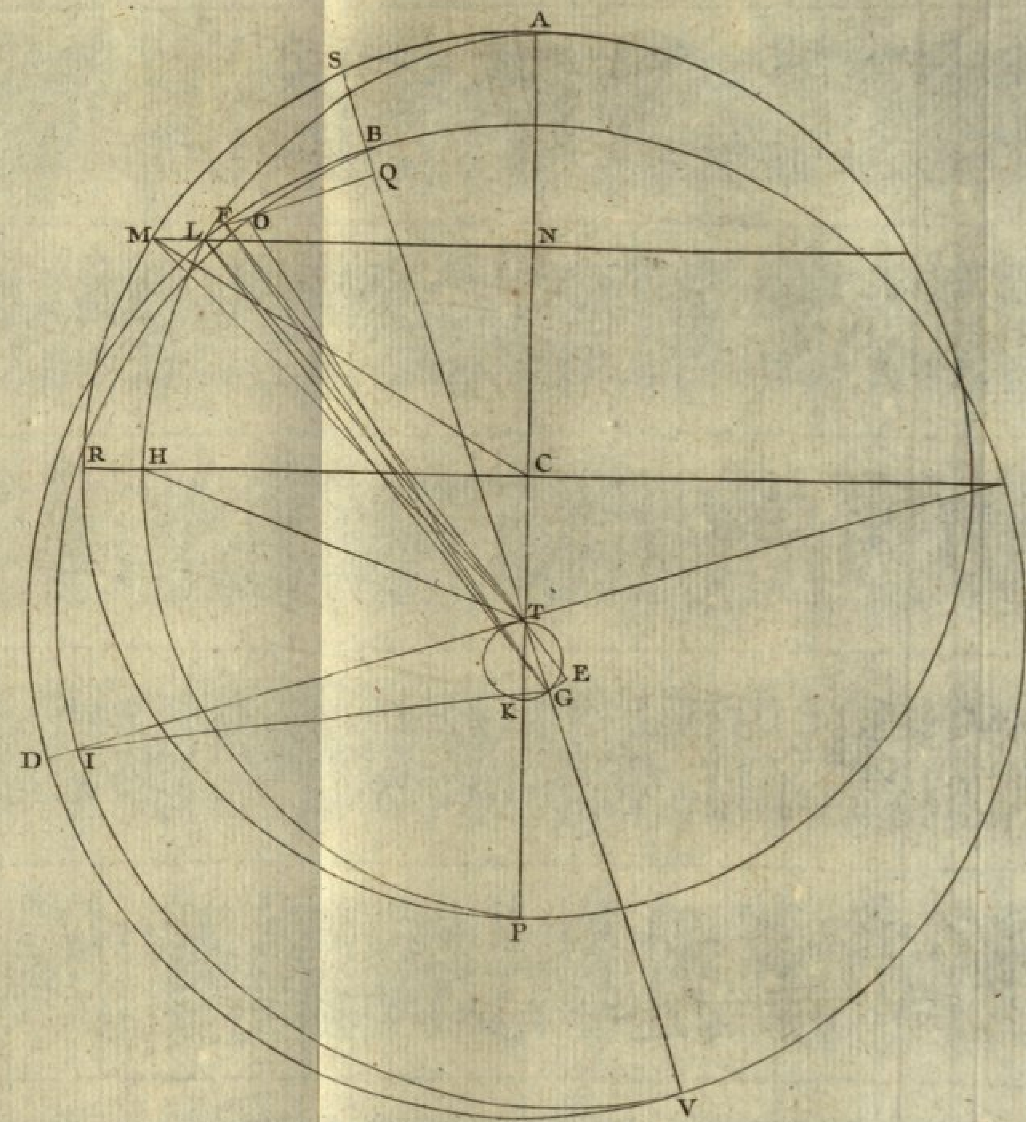
Simonneau Sculp.

Fig. 47



Simonneau Sculp.

Fig. 48



Simonneau Sculp.

LIVRE QUATRIE'ME.

DE SATURNE.

APRÈS avoir représenté les mouvements du Soleil & de la Lune, & leurs différentes Inégalités, il reste à expliquer la théorie des cinq autres Planetes, dont trois, sçavoir, Saturne, Jupiter & Mars, qui sont plus éloignées que nous du Soleil, s'appellent *Planetes supérieures*, & les deux autres, sçavoir, Venus & Mercure, qui sont placées entre le Soleil & la Terre, se nomment *Planetes inférieures*.

CHAPITRE I.

Du Globe & de l'Anneau de Saturne.

SATURNE est de toutes les Planetes, celle qui est la plus éloignée du Soleil & de la Terre, & dont le mouvement est le plus lent.

Peu de temps après la découverte des Lunettes, Galilée crut voir autour de cette Planete deux Etoiles qui la joignoient de côté & d'autre, & qui étoient immobiles, ainsi qu'il s'en explique dans sa Lettre du 13 Novembre 1610, écrite à Julien de Médicis, où il rapporte qu'*il a observé avec un grand étonnement que Saturne n'est pas une Etoile seule, mais qu'il est composé de trois Etoiles qui se touchent presque, & sont immobiles entr'elles, disposées de sorte que celle du milieu est plus grande que celles qui sont à ses deux côtés. Ces Etoiles*, adjoute-t-il, *sont placées en ligne droite, l'une à l'Orient, & l'autre à l'Occident, non pas précisément suivant la direction du Zodiaque, mais de maniére que l'occidentale s'éleve un peu vers le Nord.*

En les regardant avec une Lunette qui n'augmente pas beaucoup les objets, elles ne paroissent pas trois Etoiles distinctes & séparées, mais l'on voit Saturne sous la figure d'une Etoile longue en forme d'olive ; au lieu qu'avec une Lunette qui augmente la surface des objets de plus de mille fois, on voit trois globes qui se touchent presque, en sorte qu'il n'y a qu'un filet obscur fort délié qui les sépare.

Cet habile Astronome ne fut pas long-temps à s'appercevoir que ces Etoiles qu'il croyoit accompagner Saturne, étoient sujettes à quelques variations, ainsi qu'il s'en explique dans une Lettre du 30 Décembre 1610, où il remarque qu'elles avoient diminué de grandeur depuis le mois de Juillet jusqu'au temps qu'il écrivoit; & enfin vers la fin de Novembre de l'année 1612, il reconnut qu'elles avoient entiérement cessé de paroître, en sorte qu'il n'apperçût que le globe de Saturne seul, parfaitement rond comme Jupiter, ainsi qu'il le décrit dans une de ses Lettres du 1.er Décembre de cette même année, où il rapporte ses conjectures sur la cause d'un Phénomene qui lui paroissoit si surprenant.

Divers Astronomes après Galilée, donnérent à Saturne diverses figures qui sont représentées dans le Systeme de Saturne, imprimé en 1659, par M. Huygens, qui découvrit enfin la vraye figure de cette Planete, & prouva que ce qui formoit les apparences qu'on avoit remarquées jusqu'alors, étoit un anneau circulaire & plat, détaché du globe de Saturne de toutes parts, qui, étant regardé obliquement de la Terre, devoit, suivant les regles de l'Optique, paroître en forme d'une Ellipse plus ou moins ouverte, suivant que notre œil est plus ou moins élevé sur son plan, qui est incliné à celui de l'Ecliptique d'environ 30 degrés; d'où il résulte, conformément aux apparences, que lorsque notre œil est dans le plan de cet anneau, il doit cesser entiérement de paroître si son épaisseur n'est pas suffisante pour nous renvoyer une assés grande quantité de rayons du Soleil pour être apperçûe. Il trouva que le demi-diametre extérieur de l'anneau étoit au demi-diametre du globe de cette Planete, comme 9 à 4, & que sa largeur étoit égale à celle de l'espace contenu entre le globe & sa circonférence intérieure.

Nous n'avons jusqu'à présent apperçû aucune Tache sur le globe de Saturne, de même qu'on en remarque dans la plûpart des autres Planetes,