ELEMENTOS
DE
ANALYSE.

ELEMENTOS
DE
ANALYSE.

ELEMENTOS
DE
ANALYSE
POR
Mr. BEZOUT
TRADUZIDOS DO FRANCEZ.

SEGUNDA EDIÇAÕ

Correcta e accõmodada para o uſo das Eſcolas de Mathematica da Univerſidade.

TOMO II.

COIMBRA:
NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

M. DCC. LXXXXIIII.

Com licença da Real Meſa da Commiſſaõ Geral ſobre o Exame e Cenſura dos Livros, e Privilegio Real.

TABOA

DAS

MATERIAS QUE SE CONTÈM NESTES ELEMENTOS.

Dos

Das

ERRA-

ERRATAS.

Pag.	Lin.	Errat.	Emend.
8	8	confequente	de hum modo confequente
20	9	augmentaõ	crefcem
32	7 e 8	*Logarathmica*	*Logarithmica*
36	23	apparecer	apparecerem
40	7	S do circulo CNS	do circulo CN
42	16	PL^n e	$PL^n \times$
43	3	(*Fig.* 14)	(*Fig.* 15)
45	3	tereremos	teremos
55	24	$-x$	$-b$
61	17	D	D (*Fig.* 23)
67	*pen.*	depois a	depois de a
68	11	entra	entraõ
72	*pen.*	$=0$,	$=0$, &c.
75	16	$=$	e $y=$
79	5	$dxds^2$	$\frac{dxds^2}{y}$
87	11	feja	he
ibid.	*pen.*	CBD	CDB
88	2	CBM	CKM
114	12	. . . 3	. . . 1
116	17	40	41
119	5	41	42
120	6	42	43
123	1	equaçaõ	expreffaõ
125	13	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
128	11	CMT	CTM

Pag.	*Lin.*	*Errat.*	*Emend.*
135	3 *bis*	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
137	7 e 8	MN e DE	DE e MN
ibid.	9	Seja	Seja PM $= y$,
138	*ult.*	$- \frac{1}{4} e^3$	$- \frac{1}{3} e^3$
151	6	$\frac{x^4}{a^4}$	$\frac{x^5}{a^5}$
166	1	teremos APM ou	teremos . . . .
169	6 e 7	exememplo	exemplo
177	5	$= (a^4 x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$	$= (a^4 x^{-4} - 1)^{\frac{1}{2}}$
197	4 e 5	deixando	e deixando
199	13	$a^{ax} dx$	$e^{ax} dx$
218	12	$g + b$	$g + k$
219	13	bt	bz
243	10	$(b - k)$	$(b - k')$
ibid.	*ult.*	para k	para k'
244	1	$dxdy$	dx , dy

SEGUN-

SEGUNDA PARTE,

OU

ELEMENTOS DE CALCULO DIFFERENCIAL, E INTEGRAL.

NOÇÕES PRELIMINARES.

1 HAVEMOS dado na primeira Parte as regras neceſſarias para calcular as quantidades em todo e qualquer eſtado de grandeza em que pódem ſuppor-ſe; falta ainda conſiderar as variações, pelas quais as meſmas quantidades pódem chegar a tal ou tal eſtado de grandeza. Eſte novo objecto fórma outro ramo da Analyſe, que he o da maior utilidade nas Sciencias Phyſico-Mathematicas, e principalmente na Mechanica, onde muitas vezes naõ ſe conſegue determinar as relações das quantidades que entraõ nos problemas pertencentes á dita Sciencia, ſem ſe ter primeiramente conſiderado a relaçaõ das ſuas variações, iſto he, dos augmentos e das diminuições, que as meſmas quantidades recebem a cada inſtante.

He pois conveniente que nos demoremos hum pouco neſta parte do Calculo, cujo objecto he reſolver as quantidades até os ſeus Elementos, e voltar dos Elementos para as meſmas quantidades;

parte que naõ he, propriamente fallando, hum novo methodo de calculo; he huma applicaçaõ dos methodos enſinados na primeira Parte, ou antes huma ſimplificaçaõ das regras que lá ſe deraõ.

2 Dous ſaõ os objectos que preſentemente nos propomos: o primeiro he enſinar o methodo de deſcer das quantidades para os ſeus Elementos, o qual ſe chama *Calculo Differencial*. O ſegundo moſtra o caminho para tornar dos Elementos das quantidades para as meſmas quantidades; eſte methodo chama-ſe *Calculo Integral*.

3 Como vamos conſiderar as quantidades relativamente aos ſeus Elementos, iſto he, relativamente aos ſeus augmentos infinitamente pequenos, he neceſſario expor primeiramente o que entendemos por quantidades infinitamente pequenas, infinitas &c., e moſtrar a ſubordinaçaõ, que no calculo deve haver entre eſtas quantidades.

4 Dizemos que huma quantidade he infinita, ou infinitamente pequena em comparaçaõ de outra, quando he impoſſivel aſſignar quantidade alguma ou taõ grande ou taõ pequena, que exprima a razaõ que ha entre aquellas duas quantidades, iſto he, o numero de vezes que huma contém a outra.

Como huma quantidade deixaria de ſer quantidade, ſe pudeſſe deixar de ſer capaz de augmento ou de diminuiçaõ, ſegue-ſe que naõ ha huma quantidade taõ grande ou taõ pequena a reſpeito de outra, de maneira que naõ poſſamos conceber outra quantidade terceira, infinitamente maior ou infinitamente menor que ella.

Por exemplo, ſe x for infinito em comparaçaõ de a, ainda que neſta hypotheſe he impoſſivel aſſig-

nar

nar a ſua razaõ, com tudo naõ ha embaraço para concebermos huma terceira quantidade, a qual ſeja em comparaçaõ de x o meſmo que x he em comparaçaõ de a; iſto he, que ſeja o quarto termo de huma proporçaõ, cujos tres primeiros foſſem $a : x :: x :$; o quarto termo pois $\frac{x^2}{a}$ ſerá infinitamente maior que x, porque contém x tantas vezes, quantas ſe ſuppõe que x contém a. Da meſma ſorte podemos conceber muito bem o quarto termo da proporçaõ $x : a :: a :$; e eſte quarto termo $\frac{a^2}{x}$ ſerá infinitamente menor que a; porque deve ſer contido em a tantas vezes, quantas ſe ſuppoem que a he contido em x. A noſſa imaginaçaõ naõ reconhece limite algum a eſte reſpeito: ainda ſe póde conceber da meſma ſorte huma nova quantidade, que a reſpeito de $\frac{a^2}{x}$ ſeja taõ infinitamente pequena, como he $\frac{a^3}{x}$ em comparaçaõ de a. Eis-aqui a que chamamos *infinitos*, e *infinitamente pequenos* de differentes ordens.

Em geral, o producto de duas quantidades infinitas, ou infinitamente pequenas da primeira ordem he infinitamente maior, ou infinitamente menor que cada hum dos ſeus dous factores. Com effeito, $xy : y :: x : 1$; mas x ſendo infinito contém a unidade infinitas vezes; logo xy conterá y huma infinidade de vezes. Hum raciocinio ſemelhante moſtra, que o producto ou a potencia de qualquer numero de dimensões, cujos factores ſejaõ todos infinitos da primeira ordem, he de huma ordem de infinito deſignada pelo numero dos ſeus factores. Aſſim quando x he infinito, x^4 he infinito da quarta ordem, iſto he, infinitamente maior que x^3, o qual he infinitamente maior que x^2, e eſte tambem infinitamente maior que x. Com effeito $x^4 : x^3 :: x^3 : x^2 :: x^2 : x :: x : 1$. Aconteceria o contrario, ſe x foſſe infinitamente pequeno; entaõ x^4 ſeria infinitamente pequeno da quarta ordem, iſto he, infinitamente mais pequeno que x^3, o qual ſeria infinitamente mais pequeno que x^2, e eſte ultimo infinitamente mais pequeno que x.

Pelo contrario huma fracçaõ cujo numerador for huma quantidade finita, e cujo denominador for huma potencia qualquer de huma quantidade infinita, ſerá infinitamente pequena de huma ordem deſignada pelo expoente da meſma potencia. Aſſim, ſendo x infinito, $\frac{b}{x^2}$ he infinitamente pequeno da ſegunda ordem; $\frac{b}{x^3}$ he infinitamente pequeno da terceira ordem. Com effeito $\frac{b}{x^2} : \frac{b}{x} :: \frac{1}{x} : 1 :: 1 : x$.

Quando porém hum producto naõ tiver todos os factores infinitos, a ſua ordem de infinito naõ ſe deve determinar ſenaõ pelo numero dos factores infinitos: aſſim axy he da meſma ordem que xy. Com effeito $axy : xy :: a : 1$, e o valor deſta ultima razaõ póde-ſe determinar, ſe a for huma quantidade finita.

No-

Note-ſe bem a differença que ha quando ſe comparaõ os infinitos ou infinitamente pequenos entre ſi, ou quando ſe comparaõ com as quantidades, a cujo reſpeito ſaõ infinitos ou infinitamente pequenos. Se x he infinito em comparaçaõ de a, naõ ha quantidade que poſſa medir a ſua razaõ; mas na meſma hypotheſe a razaõ de x para x, multiplicado ou dividido por qualquer numero finito, he huma razaõ finita: aſſim x infinito ou infinitamente pequeno naõ he comparavel a a, ſuppondo-ſe a finito; mas he comparavel a x, porque $x : ax :: 1 : a$.

5 Para ſe exprimir no calculo que huma quantidade x he infinita em comparaçaõ de outra quantidade a; ou, que vem a ſer o meſmo, para exprimir que a he infinitamente pequeno em comparaçaõ de x, he neceſſario deſprezar na expreſſaõ algebrica, em que ſe acharem ambas as quantidades, todas as potencias de x inferiores á mais elevada, e conſeguintemente todos os termos em que naõ houver x. Por exemplo, ſe em $\frac{3x+a}{5x+b}$ ſuppuzermos x infinito relativamente a a e b, ſuppriniremos a e b, o que dará $\frac{3x}{5x}$ ou $\frac{3}{5}$ por valor de $\frac{3x+a}{5x+b}$ na hypotheſe de x ſer infinito. Com effeito $\frac{3x+a}{5x+b} = \frac{3+\frac{a}{x}}{5+\frac{b}{x}}$; mas ſuppondo-ſe x

in-

infinito a reſpeito de a e de b, as fracçóes $\frac{a}{x}$ e $\frac{b}{x}$, que repreſentaõ as razões de a e de b para x, devem neceſſariamente ſupprimir-ſe; porque eſtas razões, pela meſma hypotheſe, ſaõ inferiores a qualquer quantidade por mais pequena que ſe ſupponha: logo neſte caſo a quantidade propoſta deve reduzir-ſe a $\frac{3}{5}$.

Da meſma ſorte a quantidade $x^2 + ax + b$ ſe reduz a x^2, quando x he infinito. Porque neſta hypotheſe, como acabamos de ver, deve-ſe ſupprimir b em comparaçaõ de ax; mas x^2 he tambem infinito em comparaçaõ de ax, pois que $x^2 : ax :: x : a$, e por tanto deve-ſe ſupprimir ax; logo neſte caſo a quantidade ſe torna em x^2.

Pelo contrario ſe x for infinitamente pequeno, devemos conſervar ſómente os termos em que x tiver menor expoente. Aſſim $x^2 + ax$ reduz-ſe a ax na hypotheſe de x infinitamente pequeno; $\frac{ax + b}{cx + d}$ reduz-ſe a $\frac{b}{d}$ na meſma hypotheſe.

Nem receemos que eſtas omiſsóes alterem as conſequencias que ſe deduzirem dos calculos a que ellas ſe applicarem; antes pelo contrario ſó por eſtas omiſsóes he que exprimimos o que intentamos exprimir, iſto he, que x he infinito ou infinitamente pequeno; ſó por eſtes deſprezos he que podemos chegar a huma concluſaõ conforme á hypotheſe. Porque, ſuppondo x infinito, ſenaõ deſprezarmos os termos em que acabamos de fallar; ſe por exemplo

em

em $\frac{3x+a}{5x+b}$ ou $\frac{3+\frac{a}{x}}{5+\frac{b}{x}}$ naõ deſprezarmos $\frac{a}{x}$ e $\frac{b}{x}$, como o calculo entaõ naõ exprime que $\frac{a}{x}$ e $\frac{b}{x}$ ſaõ razões inferiores a qualquer quantidade aſſignavel, naõ reſponderá ao que ſe procura, que he ſaber qual he o valor deſta quantidade na hypotheſe de x ſer infinito. Em huma palavra, ſe ainda attribuiſſemos a $\frac{a}{x}$ e $\frac{b}{x}$ alguma influencia no valor buſcado, contradiriamos a ſuppoſiçaõ que haviamos feito.

Naõ faltaráõ occaſiões em que poſſamos verificar a exactidaõ do principio relativo ao deſprezo das quantidades infinitas das ordens inferiores; mas entretanto contentarnos-hemos com dar hum exemplo, o qual póde ſervir de confirmaçaõ do que acabamos de dizer. Vê-ſe que os termos da ſerie $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ &c. cada vez ſe approximaõ mais da unidade, mas nunca podem paſſar deſte limite por mais que ſe continuem. Cada termo póde ſer repreſentado por $\frac{x}{x+1}$, ſubſtituindo em lugar de x o numero do meſmo termo. Como pois os termos continuamente ſe vaõ avezinhando da unidade, e tanto mais ſe approximaõ quanto mais ſe apartaõ da origem; eſtá claro que ſó a huma diſtancia infinita da origem he que poderáõ tocar

car o dito limite da unidade; logo para acharmos o ultimo termo da ſerie, devemos ſuppor x infinito no ſeu termo geral $\frac{x}{x+1}$. Porém eſta quantidade, conforme o principio eſtabelecido, reduz-ſe a $\frac{x}{x}$, iſto he a 1; logo o deſprezar o termo $+1$ em $\frac{x}{x+1}$ tanto naõ altera a concluſaõ, que antes a dá tal como deve ſer. Ultimamente em fazer o deſprezo obra-ſe conſequente com a hypotheſe.

Tal he a ſubordinaçaõ que deve haver no calculo entre as quantidades infinitas ou infinitamente pequenas. Na applicaçaõ porém deſte principio podem occorrer alguns caſos, ſobre que vamos prevenir o Leitor.

Cada huma das duas quantidades x^2+ax+b, e x^2+ax+c ſe reduz a x^2 na hypotheſe de x infinito, de maneira que entaõ a ſua differença parece ſer nada; mas realmente a differença he $b-c$, ou $c-b$, para qualquer valor de x. Eis-aqui a ſoluçaõ deſta difficuldade apparente.

A differença das duas quantidades he $b-c$ ou $c-b$; mas quando a buſcamos depois de haver ſuppoſto x infinito em cada huma das meſmas quantidades, o que fazemos he averigoar que vem a ſer a differença a reſpeito das ditas quantidades; e como cada huma dellas he entaõ infinita, devemos achar que eſta differença he nada em comparaçaõ dellas, como com effeito ſe acha. Quando pois procurarmos em que ſe torna o reſultado de certas operações ſobre muitas quantidades na hy-

hypotheſe de x infinito, devemos executar no meſmo reſultado a regra acima dada, e naõ em cada quantidade tomada ſeparadamente.

Deſte modo acharemos, que a ſoma de $-x^2 + ax + b$ e $x^2 + bx + c$, quando x he infinito, ſe reduz a $ax + bx$; porque em geral he $ax + bx + b + c$, que ſuppondo x infinito ſe reduz a $ax + bx$. Da meſma ſorte a quantidade $x - \surd(xx - bb)$, que parece ſer nada na hypotheſe de x infinito, he verdadeiramente $\frac{bb}{2x}$. Porque $\surd(xx - bb)$ he a indicaçaõ da raiz quadrada de $xx - bb$; logo para acharmos a differença entre ella e x, devemos reduzir $\surd(xx - bb)$ em ſerie (Alg. 149), e teremos

$$x - \surd(xx - bb) = x - x + \frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3} + \&c.$$

ou $\frac{bb}{2x} + \frac{b^4}{8x^3} + \&c.$, que ſuppondo x infinito em comparaçaõ de b, ſe reduz a $\frac{bb}{2x}$.

ELE-

ELEMENTOS
DE
CALCULO DIFFERENCIAL.

6 QUANDO consideramos huma quantidade variavel como crescendo por augmentos infitamente pequenos, se quizermos conhecer o valor dos mesmos augmentos, o meio mais natural que se offerece he determinar separadamente o valor da quantidade proposta em dous instantes consecutivos, do que resultaráõ dous valores; entaõ a differença entre elles he o augmento ou diminuiçaõ instantanea que a quantidade recebe, e a que se dá o nome de *differença*, ou de *differencial*, ou tambem de *fluxaõ* da quantidade.

7 Para exprimirmos a differencial de huma quantidade variavel simples como x ou y, escreveremos dx ou dy, isto he, assentamos antes da variavel a letra d, que he a inicial da palavra differença. Para indicar porém a differencial de huma quantidade composta, como x^2, ou $5x^3 + 3x^2$, ou $\sqrt{(x^2 - a^2)}$, encerramos a dita quantidade entre parentheses, pondo antes delle a letra d; assim escrevemos $d(x^2)$, $d(5x^3 + 3x^2)$, $d(\sqrt{[x^2 - a^2]})$, &c.

Daqui em diante representaremos as quantidades variaveis pelas ultimas letras t, u, x, y, z do Al-

Alfabeto, e as conſtantes, ou as que conſervaõ ſempre o meſmo valor, pelas primeiras letras a, b, c, &c. Se algumas vezes for neceſſario uſar de outra ſorte, naõ deixaremos de o advertir. Quanto á letra d, naõ nos ſerviremos della, ſenaõ para indicar a differencial da quantidade junto de que ſe achar.

8 Conforme a idêa que acabamos de dar ſobre a differencial de huma variavel, eſtá claro que para acharmos a differencial de huma quantidade que naõ contém variaveis ſenaõ do primeiro grão, ſem eſtarem multiplicadas ou divididas entre ſi, eſcreveremos antes de cada variavel a letra d, conſervando o ſinal que cada huma tiver.

Por exemplo, a differencial de $x + y - z$ ſerá $dx + dy - dz$. Com effeito, para acharmos eſta differencial, devemos conſiderar x como tornando-ſe em $x + dx$, y em $y + dy$, z em $z + dz$, e por tanto a quantidade propoſta, que em hum eſtado he $x + y - z$, no immediato virá a ſer $x + dx + y + dy - z - dz$; logo a differença entre eſtes dous valores inſtantaneos, ou $x + dx + y + dy - z - dz - x - y + z$, ou $dx + dy - dz$ he a differencial da quantidade propoſta.

O meſmo ſe praticará, quando as variaveis que entraõ na quantidade tiverem coefficientes.

Aſſim . . . $d(5x + 3y) = 5dx + 3dy$ . . . $d(ax + by) = adx + bdy$. Porque quando x e y ſe tornaõ em $x + dx$ e $y + dy$, a quantidade $ax + by$ ſe torna em $a(x + dx) + b(y + dy) = ax + adx + by + bdy$; logo a differença dos dous eſtados, ou a differencial da quantidade he $adx + bdy$; iſto he, he, em geral cada huma das variaveis deve ter antes de ſi a letra d.

Se na quantidade propoſta entrar hum termo conſtante, a differencial ſerá a meſma que ſe tal termo naõ houveſſe; porque *a differencial de huma conſtante he nada.* Com effeito, ſe huma conſtante tiveſſe differencial ou augmento, deixaria de ſer conſtante. Aſſim $d(ax + b) = adx$.

9 Se as quantidades variaveis ſimples eſtiverem multiplicadas entre ſi . . . *Differenciaremos ſucceſſivamente em ordem a cada huma das variaveis, como ſe todas as outras foſſem conſtantes, e ajuntaremos todas as differenciais.*

Por exemplo, para differenciar xy praticaremos primeiramente como ſe x foſſe conſtante, e virá xdy, eſcrevendo em ultimo lugar a variavel que tem d, para evitar equivocaçaõ; depois differenciaremos xy como ſe y foſſe conſtante, o que dará ydx, de maneira que a differencial total de xy ſerá $xdy + ydx$.

Com effeito ſuppondo conforme o noſſo principio que x ſe torna em $x + dx$, e y em $y + dy$, xy ſe tornará em $(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$; e a differença ſerá $xy + xdy + ydx + dxdy - xy = xdy + ydx + dxdy$. Mas para exprimir que dx e dy ſaõ infinitamente pequenos, devemos (5) deſprezar o infinitamente pequeno da ſegunda ordem $dxdy$ em comparaçaõ de xdy e ydx, que ſaõ infinitamente pequenos da primeira; logo a differencial de xy he $xdy + ydx$.

Do

Do meſmo modo $d(xyz) = zd(xy) + xydz = xydz + xzdy + yzdx$, o que ſe demonſtrará como acima; e $d(uxyz) = yzd(ux) + uxd(yz) = uxydz + uxzdy + uyzdx + xyzdu$.

10 *Para differenciar huma potencia qualquer de huma variavel, diminua-ſe o ſeu expoente de huma unidade, e multiplique-ſe pelo meſmo expoente que tinha, e pela differencial da variavel.*

Aſſim $d(x^2) = 2xdx$, multiplicando pelo expoente 2, tirando 1 do meſmo expoente 2, e multiplicando em fim pela differencial dx da variavel x. Do meſmo modo $d(x^3) = 3x^2dx \ldots d(x^4) = 4x^3dx \ldots d(x^{-3}) = -3x^{-4}dx \ldots d(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx \ldots d(x^{\frac{4}{3}}) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}dx$, e em geral $d(x^m) = mx^{m-1}dx$, ſeja qual for o expoente m, poſitivo ou negativo, inteiro ou fraccionario.

Com effeito ſuppondo que x ſe torna em $x + dx$, x^m virá a ſer $(x+dx)^m = x^m + mx^{m-1}dx + m \cdot \frac{m-1}{2}x^{m-2}dx^2 +$ &c. (Alg. 149). Mas $m \cdot \frac{m-1}{2}x^{m-2}dx^2$ deſvanece em comparaçaõ de $mx^{m-1}dx$, e o meſmo acontece aos termos ſeguintes, que ſeriaõ infinitamente pequenos de ordens inferiores; logo $d(x^m) = x^m + mx^{m-1}dx - x^m = mx^{m-1}dx$.

Se houver hum coefficiente ou multiplicador conſtante, nem poriſſo haverá mudança na operaçaõ; o meſmo coefficiente ſe conſervará na differenferencial aſſim como eſtiver na quantidade. Por exemplo $d\,(ax^m) = max^{m-1}dx$.

11 Para poder differenciar todo o genero de quantidades Algebricas, baſta ſaber o que temos dito até aqui: tudo o que ſe ſegue para diante naõ he mais que huma applicaçaõ das regras que acabamos de dar.

12 Se tivermos ax^3y^2, conſideraremos x^3 e y^2 como duas variaveis ſimples, e (9) teremos $d\,(ax^3y^2) = ax^3d\,(y^2) + ay^2\,d\,(x^3) = 2ax^3ydy + 3ay^2x^2dx$. Do meſmo modo $d\,(ax^2y^3z^4) = 3ax^2z^4y^2dy + 4ax^2y^3z^3dz + 2axy^3z^4dx$. Em geral $d\,(ax^my^n) = nax^my^{n-1}dy + may^nx^{m-1}dx$.

13 Se for dada a fracçaõ $\frac{x}{y}$, eſcrevendo-a (Alg. 141) aſſim ... xy^{-1}, e applicando a regra dada (9 e 10), teremos $d\,(xy^{-1}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Logo: *A differencial de huma fracçaõ he igual á differencial do numerador multiplicada pelo denominador, menos a differencial do denominador multiplicada pelo numerador, ſendo tudo dividido pelo quadrado do denominador.*

Aſſim $d\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{-adx}{x^2}$ ... $d\left(\frac{axz}{y}\right) = \frac{axydz + ayzdx - axzdy}{y^2}$ ... $d\left(\frac{x}{a+x}\right) = \frac{adx}{(a+x)^2}$.

14 Passando agora ás quantidades complexas, se nellas naõ entrarem potencias de quantidades complexas, differenciaremos separaradamente cada hum dos termos, de que ellas constarem.

Assim ... $d(ax^3 + bx^2 + cxy) = 3ax^2dx + 2bxdx + cxdy + cydx$ ... $d\left(ax^2 + bx + \frac{cy}{x^2}\right) = 2axdx + bdx + \frac{cx^2dy - 2cxydx}{x^4}$ ... $d(x^3y + ay^2 + b^3) = 3x^2ydx + x^3dy + 2aydy$, lembrando-nos de que a differencial de huma constante he nada.

15 Se a quantidade complexa tiver hum expoente total, como em $(a + bx + cx^2)^5$, consideraremos toda a quantidade affecta do expoente como huma só variavel, a qual se differenciará conforme a regra das potencias. Assim $d(a + bx + cx^2)^5 = 5(a + bx + cx^2)^4 d(a + bx + cx^2) = 5(a + bx + cx^2)^4 (bdx + 2cxdx)$. Da mesma sorte $d(a + bx^2)^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}(a + bx^2)^{\frac{2}{3}} 2bxdx = \frac{10}{3} bxdx (a + bx^2)^{\frac{2}{3}}$.

16 Se a quantidade complexa se compuzer de differentes factores, consideraremos cada hum delles como huma variavel simples, e observaremos a regra dos productos. Assim $x^3(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$, que se póde considerar como composta de dous factores x^3 e $(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}$, dará $d[x^3(a + bx^2)^{\frac{5}{3}}]$ =

$$=(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}d(x^3)+x^3d(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}=$$
$$3x^2(a+bx^2)^{\frac{5}{3}}dx+\frac{10}{3}bx^4(a+bx^2)^{\frac{2}{3}}dx.$$

Da mesma sorte $d\left(\frac{(x+a)^3}{(x+b)^2}\right)=$

$$\frac{3(x+b)^2(x+a)^2dx-2(x+a)^3(x+b)dx}{(x+b)^4}$$
$$=\frac{(x+3b-2a)(x+a)^2dx}{(x+b)^3}.$$

17 Se a quantidade proposta for radical, substituiremos expoentes fraccionarios em lugar dos radicais (Alg. 128), e differenciaremos. Assim

$$d(\sqrt{x})=d(x^{\frac{1}{2}})=\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{dx}{2\sqrt{x}}\ldots d(\sqrt[5]{x^3})$$
$$=d(x^{\frac{3}{5}})=\tfrac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}dx\ldots d[\sqrt{(aa-yy)}]=$$
$$d(aa-yy)^{\frac{1}{2}}=-ydy(aa-yy)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-ydy}{\sqrt{(aa-yy)}}\ldots$$
$$.\ d(x^m\sqrt[q]{[(a+bx^n)^p]})=d\left[x^m(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\right]$$
$$=\frac{pnb}{q}x^{m+n-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}-1}+mx^{m-1}dx$$
$$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}\ldots d\left(\frac{z}{-z+\sqrt{(aa+zz)}}\right)=$$
$$d\left(\frac{z}{aa}[z+\sqrt{(zz+aa)}]\right)=\frac{2zdz}{aa}+$$
$$\frac{aadz+2zzdz}{aa\sqrt{(aa+zz)}}.$$

Das Differenças segundas, terceiras, &c.

18 ALém das *Differenças* primeiras, de que acabamos de tratar, consideraõ-se tambem as differenças segundas, terceiras, &c. Para as designar, he costume pôr antes da variavel tantas letras d, quanto for o numero da differença que se quer exprimir. Assim a differença segunda de x indica-se por ddx, e tambem por d^2x, a differença terceira por $dddx$, e tambem por d^3x, &c.; expressões que naõ se devem confundir com o quadrado ou cubo &c. de dx, que representaremos simplesmente por dx^2, dx^3, em vez de $(dx)^2$, $(dx)^3$, &c.; nem com a differencial de x^2, ou de x^3, &c. que já assentámos em exprimir sempre por $d(x^2)$, $d(x^3)$, &c.

Por differença ou *differencial* segunda de huma quantidade entendemos a differença da differença primeira, isto he, consideramos a variavel como recebendo augmentos desiguais, mas tais que a differença entre elles he infinitamente pequena em comparaçaõ dos mesmos augmentos. Assim, ddx he infinitamente pequeno em comparaçaõ de dx, e nas differenças terceiras $dddx$ he infinitamente pequeno em comparaçaõ de ddx, &c.

Saõ pois ddx e dx^2 infinitamente pequenos da segunda ordem, mas com tudo naõ saõ iguais entre si; ddx he a differença segunda de x, ou a differença de duas differenças consecutivas, e dx^2 he o quadrado de huma differença.

O meio mais natural que se offerece para determinar as differenças segundas, he considerar a quantidade em tres eſtados conſecutivos infinitamente vizinhos, tomar a differença entre o ſegundo eſtado e o primeiro, entre o terceiro e o ſegundo, e tomar depois a differença deſtas duas differenças. Por exemplo, o primeiro eſtado de x he x, o ſegundo he $x + dx$, o terceiro he $x + dx + d(x + dx)$; a differença entre o ſegundo e o primeiro he dx, e entre o terceiro e o ſegundo he $dx + d(dx)$; em fim a differença entre eſtas duas differenças, ou a differença ſegunda de x he $d(dx)$; logo $ddx = d(dx)$. Donde ſe ſegue que *para termos as differenças ſegundas differenciaremos as differenças primeiras pelas regras dadas para eſtas ſe acharem.*

Por exemplo $dd(xy) = d(xdy + ydx) = xddy + dydx + dydx + yddx = xddy + 2dydx + yddx$. Do meſmo modo $dd(x^2) = d(2xdx) = 2xddx + 2dx^2$ . . . $dd(ax^m) = d(max^{m-1}dx) = m(m-1)ax^{m-2}dx^2 + max^{m-1}ddx$ . . . $dd\left(\frac{x}{y}\right)$ $= d\left(\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}\right) = \frac{ddx}{y} - \frac{dxdy}{y^2} - \frac{xddy}{y^2} - \frac{dxdy}{y^2} + \frac{2xdy^2}{y^3} = \frac{2xdy^2 + y^2ddx - xyddy - 2ydxdy}{y^3}$.

Naõ receemos neſte calculo, que os infinitamente pequenos da ſegunda ordem que ſe deſprezaõ nas differenças primeiras, produzaõ defeito algum nas differenças ſegundas; porque a differencial de huma quantidade infinitamente pequena da ſegunda ordem he infinitamente pe-

pequena da terceira, e por tanto deve-ſe deſprezar em comparaçaõ das differenças ſegundas, que ſaõ infinitamente pequenas da ſegunda ordem.

A regra ſerá a meſma, ſe na quantidade entrarem differenças primeiras, quer eſtas ſejaõ reſultado de huma differenciaçaõ exacta, quer naõ. Aſſim . . . $d\,(xdy) = xddy + dxdy$ . . . $d\left(\frac{dy}{x}\right) = \frac{xddy - dxdy}{x^2}$ . . . $d\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{dyddx - dxddy}{dy^2}$.

19 Quanto ás differenças terceiras, quartas &c. diſcorrendo como acima, devemos differenciar do modo ordinario as differenças ſegundas, terceiras, &c. conſiderando-as como outras tantas variaveis differentes.

20 Nos calculos em que entraõ muitas variaveis, ordinariamente para ſimplificar ſuppõe-ſe conſtante huma das differenças primeiras. Eſta ſuppoſiçaõ he licita, porque podemos tomar huma das differenças primeiras por termo fixo de comparaçaõ das outras differenças primeiras; e ſimplifica o trabalho, porque faz deſaparecer todos os termos affectos da differencial da quantidade que ſe toma por conſtante. Suppondo por exemplo dx conſtante, he $ddx = 0$, e todos os termos affectos de ddx ſe deſvaneceráõ. A unica attençaõ pois que devemos ter neſte caſo he naõ differenciar a differencial conſtante naquelles termos em que ella ſe achar. Aſſim a differencial de $\frac{dx}{dy}$, ſuppondo dx conſtante, he $\frac{-dxddy}{dy^2}$. Se pelo

contrario ſuppuzermos dy conſtante, a differencial de $\frac{dx}{dy}$ ſerá $\frac{ddx}{dy}$.

Iſto meſmo que ſe obſerva na paſſagem das differenças primeiras para as ſegundas, ſe deve obſervar em todas as mais differenciaçóes: conſideraremos ſempre como conſtante aquella differença primeira que aſſim houvermos tratado.

21 ADVERTENCIA. Havemos até aqui ſuppoſto, que as variaveis x, y, &c. augmentaó todas ao meſmo tempo, iſto he, que tornando-ſe x em $x+dx$, y vem a ſer $y+dy$, e aſſim das outras. Acontecendo porém que diminuaó humas em quanto as outras creſcem, devemos depois de fazer a differenciaçaó mudar no reſultado o ſinal da differencial da variavel que vai diminuindo, ou tambem podemos conſervar a differencial do meſmo modo que a daó as regras precedentes, mas na applicaçaó que della ſe fizer a qualquer problema tomaremos negativamente a quantidade repreſentada pela differencial da variavel que diminue. Com effeito ſe y tem q de diminuiçaó, e ſe na differenciaçaó ſuppomos tacitamente que y ſe faz $y+dy$, he preciſo que $y-q=y+dy$, ou $-q=dy$, ou $q=-dy$; logo neſtes caſos, fóra da differenciaçaó, devemos ſempre chamar $-dy$ ao que chamavamos dy. Diſto encontraremos muitos exemplos no decurſo deſta Obra.

O meſmo ſe entende das differenças ſegundas a reſpeito das differenças primeiras. Se a differencial primeira diminuir, differenciaremos pelo modo ordinario; mas na applicaçaó a qualquer proble-

ma,

ma, o que ſe houver chamado ddy ſe chamará $-ddy$, ſendo dy a differença de que ſe trata.

Tais ſaõ as regras para differenciar as quantidades, quando ellas ſe propoem immediatamente. Succede porém muitas vezes, que em lugar das meſmas quantidades entraõ no calculo outras que as exprimem; como por exemplo, em lugar dos angulos nos ſervimos ordinariamente dos ſeus ſenos, tangentes, &c. e em lugar das quantidades uſamos muitas vezes dos ſeus logarithmos. Vejamos pois de que modo ſe deve differenciar eſte genero de expreſsões.

Das Differenciais das quantidades affectas de Senos, Coſenos, &c.

22 Supponhamos que temos para differenciar o ſeno do angulo ou do arco z, que he coſtume exprimir por $ſen\, z$. Concebendo que o angulo z ſe faz $z + dz$, ſerá $d\,(ſen\, z) = ſen\,(z + dz) - ſen\, z = ſen\, z\; coſ\, dz + ſen\, dz\; coſ\, z - ſen\, z$, ſuppondo o raio $= 1$ (Trig. 34). Mas o ſeno de hum arco infinitamente pequeno dz he eſte meſmo arco, e o ſeu coſeno naõ differe do raio; logo $ſen\, dz = dz$, e $coſ\, dz = 1$; e conſeguintemente $d\,(ſen\, z) = dz\; coſ\, z$. logo *a differencial do ſeno de qualquer arco he igual á differencial do meſmo arco multiplicada pelo ſeu coſeno.*

23 Do meſmo modo $d\,(coſ\, z) = coſ\,(z + dz) - coſ\, z = coſ\, z\; coſ\, dz - ſen\, z\; ſen\, dz - coſ\, z =$

$-dz$

$- dz \, sen \, z$. Logo *a differencial do coseno de qualquer arco he igual á differencial negativa do mesmo arco, multiplicada pelo seu seno.*

Com os dous principios $d\,(sen\,z) = dz\,cos\,z$, e $d\,(cos\,z) = -\,dz\,sen\,z$ podemos differenciar qualquer quantidade composta de senos e cosenos, applicando as regras acima dadas.

Assim $d\,(cos\,3z) = -\,3dz\,sen\,3z \ldots d\,(cos\,mz) = -\,mdz\,sen\,mz$, sendo m constante $\ldots d\,(sen\,mz) = mdz\,cos\,mz \ldots d\,(sen\,z\,cos\,t) = dz\,cos\,t\,cos\,z - dt\,sen\,z\,sen\,t \ldots d\,(z\,sen\,z) = dz\,sen\,z + zdz\,cos\,z \ldots d\,(sen^m z) = mdz\,cos\,z\,sen^{m-1}z \ldots d\,(cos^m z) = -\,mdz\,sen\,z\,cos^{m-1}z \ldots dd\,(cos\,z) = d\,(-\,dz\,sen\,z) = -\,ddz\,sen\,z - dz^2\,cos\,z \ldots dd\,(sen\,z) = ddz\,cos\,z - dz^2\,sen\,z$.

24 Se tivermos para differenciar $tang\,z$ ou $\frac{sen\,z}{cos\,z}$ (Trig. 29), applicando as regras acharemos $d\,\frac{sen\,z}{cos\,z} = \frac{dz\,cos^2 z + dz\,sen^2 z}{cos^2 z} = \frac{dz}{cos^2 z}$, na hypothese de ser o raio $= 1$. Logo *a differencial da tangente de hum arco he igual á differencial do mesmo arco, dividida pelo quadrado do seu coseno.*

25 Se nos derem para differenciar $cot\,z$ ou $\frac{cos\,z}{sen\,z}$, teremos $d\,\frac{cos\,z}{sen\,z} = \frac{-\,dz\,sen^2 z - dz\,cos^2 z}{sen^2 z} = \frac{-\,dz}{sen^2 z}$. Logo *a differencial da cotangente de hum ar-*

arco he igual á differencial negativa do meſmo arco, dividida pelo quadrado do ſeu ſeno.

Do meſmo modo ſe acharáõ as differenciais ſegundas, terceiras &c. das quantidades affectas de ſenos, coſenos, tangentes &c.

Das quatro regras dadas ſe ſegue, que a differencial de hum arco he igual á differencial do ſeu ſeno, dividida pelo ſeu coſeno, ou á differencial negativa do ſeu coſeno, dividida pelo ſeu ſeno, ou á differencial da ſua tangente, multiplicada pelo quadrado do ſeu coſeno, ou tambem á differencial negativa da cotangente, multiplicada pelo quadrado do ſeu ſeno.

Aſſim ſe for z hum arco cujo ſeno ſeja y, o coſeno x, e t a tangente, teremos d (A. *ſen* y) ou $dz =$

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}},\ dz = \frac{-dx}{\sqrt{(1-x^2)}},\ dz = \frac{dt}{1+t^2}\ \&c.$$

Se o raio foſſe igual a a, ſeria $dz = \dfrac{ady}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$,

$$dz = \frac{-adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}},\ dz = \frac{a^2dt}{a^2+t^2}.$$

Das Differenciais logarithmicas.

26 SEjaõ y e y' dous termos conſecutivos de huma progreſſaõ geometrica, cujo expoente ſeja r, e a, a' os dous primeiros termos. Sejaõ do meſmo modo x e x' dous termos conſecutivos de huma progreſſaõ arithmetica, correſpondentes aos

dous

dous y e y' da geometrica, e cujos primeiros dous termos ſejaõ b e b'; iſto he, ſupponhamos

$$\div\!\div\ a : a' \ . \ . \ . \ y : y' \ . \ . \ .$$
$$\div\ b . b' \ . \ . \ . \ x . x' \ . \ . \ .$$

Seraõ x e x' os logarithmos reſpectivamente de y e y' (Arithm. 216).

Como (Arithm. 211) temos $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$; ſe for z a differença entre y' e y, iſto he, ſe for $y' = y + z$, virá $\frac{y + z}{y} = \frac{a'}{a}$, ou $\frac{az}{y} = a' - a$. Mas a natureza da progreſſaõ arithmetica (Arith. 204) dá $x' - x = b' - b$; logo ſe ſuppuzermos $a' - a : b' - b :: 1 : m$, ſendo m hum numero qualquer, teremos $\frac{maz}{y} = x' - x$; equaçaõ que exprime em geral a razaõ de huma progreſſaõ geometrica qualquer para outra qualquer progreſſaõ arithmetica correſpondente.

Se em ambas as progreſsões os termos conſecutivos forem infinitamente vizinhos, ſerá $z = dy$, e $x' - x = dx$; aſſim a equaçaõ ſe torna em $\frac{mady}{y} = dx$, e m naõ deixará poriſſo de ſer hum numero finito; porque duas quantidades infinitamente pequenas pódem conter huma a outra tantas vezes, quantas huma quantidade finita contém a outra tambem finita.

Vê-ſe pois que a differencial dx do logarithmo de hum numero repreſentado por y he igual á differencial dy deſte numero, dividida pelo meſmo nu-

numero y, e multiplicada pelo primeiro termo a da progreſſaõ geometrica fundamental e pelo numero m, que denota a razaõ da differença dos dous primeiros termos da progreſſaõ arithmetica para a differença dos dous primeiros termos da progreſſaõ geometrica. Como eſte numero m fixa de algum modo a relaçaõ das duas progreſsões, dá-ſe-lhe o nome de *módulo*.

Logo hum meſmo numero y póde ter differentes logarithmos, conforme os valores que ſe derem a m e a a. Mas entre todos os differentes ſyſtemas, o mais commodo nos calculos algebricos he aquelle em que $a = 1$, e $m = 1$. Neſta hypotheſe a equaçaõ $\frac{mady}{y} = dx$, que comprehende todos os ſyſtemas, ſe torna em $\frac{dy}{y} = dx$.

27 Segue-ſe pois, que no ſyſtema de logarithmos de que ſe uſa nos calculos *a differencial do logarithmo de huma quantidade he igual á differencial da quantidade, dividida pela meſma quantidade.*

Antes de começarmos a fazer uſo deſte principio na differenciaçaõ de qualquer quantidade, devemos notar: 1° que os logarithmos de que tratamos, naõ ſaõ os tabulares, mas ſaõ os que ſe chamaõ *hyperbolicos* pela razaõ que adiante veremos, quando enſinarmos o modo facil de paſſar de huns para outros.

2° Como o primeiro termo b da progreſſaõ arithmetica naõ apparece na equaçaõ $\frac{mady}{y} = dx$, tanto eſta como a outra particular $\frac{dy}{y} = dx$, que he deduzida daquella, tem ſempre lugar, ſeja qual for o logarithmo do primeiro termo da progreſſaõ geometrica. Aſſim podemos ſuppollo, para maior facilidade, igual a nada, e conſeguintemente ſerá cifra o logarithmo da unidade; mas naõ nos eſqueçamos de que iſto he inteiramente arbitrario.

Tomando pois a unidade por primeiro termo da progreſſaõ geometrica, e cifra por primeiro termo da arithmetica, podemos aqui applicar as regras dadas (Arithm. 227, e ſeg.), iſto he, em lugar de $l(ab)$ podemos tomar $la + lb$, denotando l o logarithmo. Da meſma ſorte $l\frac{a}{b} = la - lb$; como tambem $la^m = mla$; e em fim $l\sqrt[n]{a^m} = la^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}la$.

Iſto poſto, $dlx = \frac{dx}{x}$ . . . $dl(a+x) = \frac{d(a+x)}{a+x} = \frac{dx}{a+x}$ . . . $dl\frac{a}{a+x} = d[la - l(a+x)] = -\frac{dx}{a+x}$, advertindo que a differencial da conſtante la he nada.

Do meſmo modo $dl\frac{1}{x} = -\frac{dx}{x}$ . . . $dl(x^2) = \frac{2dx}{x}$ . . . $dl(xy) = d(lx + ly) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$ . . . $dl\frac{x}{y} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$ . . . $dl\frac{a+x}{a-x} = \frac{dx}{a+x} +$

dx

$\frac{dx}{a-x} \ldots dl\,(aa+xx) = \frac{2xdx}{aa+xx} \ldots$ $\cdot\, dl\,\sqrt{(aa+xx)} = \frac{xdx}{aa+xx} \ldots dl\,[x^m\,(a+bx^n)^p]$ $= \frac{mdx}{x} + \frac{npbx^{n-1}dx}{a+bx^n} \ldots d\,l^m x$ ou $d\,(\,lx\,)^m =$ $m\,l^{m-1}x\,\frac{dx}{x} \ldots d(x^m\,l^n x) = mx^{m-1}\,l^n x\,dx$ $+ nx^m\,l^{n-1}x\,\frac{dx}{x} \ldots d\,(llx) = \frac{dy}{y}$ (fazendo $lx = y) = \frac{dx}{xlx} \ldots d\,(cos\,lx) = -dlx\,.\,sen\,lx =$ $-\frac{dx}{x}\,sen\,lx \ldots dl\,(cos\,x) = \frac{d\,(cos\,x)}{cos\,x} =$ $-dxtangx.$

Das Differenciais das quantidades exponenciais.

28 PAra acharmos o modo de differenciar as quantidades *exponenciais*, iſto he, as quantidades cujo expoente he variavel, como c^x, x^y, &c., podemos ſervir-nos do principio dado (27), do qual ſe deduz, que *a differencial de huma quantidade he igual ao producto da meſma quantidade multiplicada pela differencial do ſeu logarithmo.*

Aſſim $\ldots d\,(\,x^y\,) = x^y d\,(\,lx^y\,) = x^y d\,(\,ylx\,) =$ $x^y\left(\,dy\,lx + \frac{ydx}{x}\right) \ldots d\,(\,a^x + y^z\,) = d\,(\,a^x\,)$ $+ d\,(y^z) = a^x d\,(\,la^x\,) + y^z d\,(\,ly^z\,) = a^x dxla +$ y^z

$y^z\left(dzly+\frac{zdy}{y}\right)\ldots d(a^2+x^2)^x=(a^2+x^2)^x$
$\left(dxl(a^2+x^2)+\frac{2x^2dx}{a^2+x^2}\right)$. Se for e o numero, cujo logarithmo he 1, ſerá $d(e^x)=e^xdxle=e^xdx$; logo eſta exponencial particular tem por differencial a meſma quantidade multiplicada pela differencial do ſeu expoente.

Semelhantemente $d(x^{y^z})=x^{y^z}d(y^zlx)=x^{y^z}\left[y^z\frac{dx}{x}+y^zlx\left(dzly+\frac{zdy}{y}\right)\right]=x^{y^z}y^z\left(\frac{dx}{x}+\frac{zdy}{y}lx+dzlxly\right)$; logo ſerá $d\left(e^{e^z}\right)=e^{e^z}e^zdz$. Do meſmo modo ſe acharáõ as differenciais ſegundas, terceiras, &c. das quantidades exponenciais, tanto da primeira ordem da fórma x^y, como da ſegunda ordem da fórma x^{y^z}.

Applicações das regras precedentes.

29 PAra moſtrarmos em alguns exemplos o uſo das regras dadas, e a ſua grande vantagem na Algebra ordinaria, vamos applicallas aos objectos de que temos idêas, iſto he, a problemas de Geometria e de Calculo.

Ap-

Applicaçaõ ás Subtangentes, Tangentes, Subnormais, &c. das Curvas.

30 PAra tirarmos huma tangente a qualquer curva AM (*Fig.* 1.), repreſentamos eſta linha como hum polygono de infinitos lados infinitamente pequenos; o prolongamento MT de hum delles M*m* he a tangente, a qual ſe determina para cada ponto M, calculando da maneira ſeguinte o valor da ſubtangente PT.

Pelas extremidades do lado infinitamente pequeno M*m* imaginemos as duas ordenadas MP, *mp*, e pelo ponto M a linha M*r* parallela ao eixo das abſciſſas AP. Seja AP $= x$, PM $= y$; ſerá P*p* ou M*r* $= dx$, e *mr* $= dy$. Iſto poſto o triangulo infinitamente pequeno M*rm* he ſemelhante ao triangulo finito TPM, e aſſim teremos *rm* (dy) : *r*M (dx) :: PM (y) : PT; logo PT $= \frac{ydx}{dy}$.

Eſta he a formula geral para determinar a ſubtangente de qualquer curva, ſeja qual for o angulo das coordenadas, com tanto que os y ſejaõ parallelos entre ſi. Para iſſo naõ ha mais do que differenciar a equaçaõ dada da curva, a fim de tirar o valor de $\frac{dx}{dy}$; entaõ ſe multiplicarmos eſta expreſſaõ por y, e puzermos nella em lugar de y o ſeu valor deduzido da meſma equaçaõ da curva, teremos PT expreſſa ſimplesmente em x e conſtantes; e querendo determinar a ſubtangente para qualquer ponto M, ſubſtituiremos em lugar de x o valor da abſciſſa correſpondente a M.

Do

Do mesmo modo o triangulo rectangulo TPM dá a tangente $MT = \sqrt{\left(y^2 + \frac{y^2 dx^2}{dy^2}\right)}$ $= y\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$. Se as coordenadas naó forem orthogonais, será (Trig. 180) $MT = y\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2} - \frac{2dx}{dy} \cos \alpha\right)}$, sendo α o angulo das coordenadas.

Quanto á subnormal, imaginando MQ perpendicular á tangente MT, teremos (Cor. 8. 6. Eucl.) $PQ = \frac{y^2}{PT} = \frac{ydy}{dx}$. Semelhantemente a normal $MQ = y\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$.

Exemplos.

I. Na ellipse, cuja equaçaó (Alg. 294) he $yy = \frac{bb}{aa}(ax - xx)$, temos $2ydy = \frac{bb}{aa}(adx - 2xdx)$; logo PT ou $\frac{ydx}{dy} = \frac{2a^2y^2}{ab^2 - 2b^2x}$ $= \frac{ax - xx}{\frac{1}{2}a - x}$, que he o mesmo resultado que achámos (Alg. 301), mas de hum modo menos expedito que o presente.

A subnormal ou $\frac{ydy}{dx} = \frac{bb}{aa}\left(\frac{a - 2x}{2}\right) = \frac{bb}{aa}\left(\frac{1}{2}a - x\right)$, como achámos (Alg. 300).

Se

Se fizermos applicaçaõ da formula das tangentes, e normais, tambem acharemos os mesmos valores, que se deduzîraõ (Alg.301, e 303).

Aqui se vê huma confirmaçaõ do que dissemos (5). Fazendo uso neste lugar das regras do Calculo Differencial, que suppõem a omissaõ das quantidades infinitamente pequenas da segunda ordem em comparaçaõ das da primeira, chegámos aos mesmos resultados, que tinhamos achado na Secçaõ segunda da primeira Parte por hum modo o mais direŒto, e o mais rigoroso. Logo quando desprezamos assim semelhantes quantidades, naõ fazemos mais, que imprimir no calculo o caracter que elle deve ter para exprimir o estado da questaõ.

II. Na parabola (Alg. 356) temos $y^2 = px$; logo $2ydy = pdx$, e $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{p}$. A subtangente pois $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p} = 2x$; e a subnormal $\frac{ydy}{dx} = \frac{py}{2y} = \frac{p}{2}$, o que concorda com o que já achámos (Alg.367, e 364).

III. A equaçaõ geral $y^m = x^n a^{m-n}$, que exprime as *parabolas* de todos os generos, sendo m e n numeros positivos dá $my^{m-1}\,dy = na^{m-n}\,x^{n-1}\,dx$; logo $\frac{ydx}{dy} = \frac{my^m}{na^{m-n}x^{n-1}} = \frac{m}{n}x$. Donde se vê, que nestas curvas a subtangente he igual á abscissa x tomada tantas vezes, quantas saõ as unidades do expoente de y, dividido pelo expoente de x. Se $m = 2$, e $n = 1$, que he o caso da parabola ordidinaria, temos a ſubtangente igual a $2x$, como já vimos.

Se $m = 3$, e $n = 1$, temos $y^3 = a^2x$, equaçaõ que pertence á *primeira parabola cubica;* ſe $m = 3$, e $n = 2$, a curva he a *ſegunda parabola cubica*, cuja equaçaõ he $y^3 = ax^2$.

IV. Se a curva BM (*Fig.* 2) for a *Logarathmica*, iſto he, huma curva tal, que ás abſciſſas AP, Ap, &c. tomadas em progreſſaõ arithmetica, correſpondaõ ordenadas PM, pm, &c. em progreſſaõ geometrica; eſtá claro que a ſua equaçaõ ſerá $\frac{amdy}{y} = dx$ (26). Teremos pois $\frac{ydx}{dy} = am$; iſto he, para todos os pontos de huma meſma logarithmica a ſubtangente PT he a meſma, e igual á primeira ordenada AB ou a tomada tantas vezes, quantas ſaõ as unidades do modulo.

31 Quando a equaçaõ da curva he tal, que y diminue creſcendo x, como na *Figura* 3, entaõ rM deve exprimir-ſe por $-dy$ (21), o que dá PT $= -\frac{ydx}{dy}$. O calculo pois he aqui o meſmo em tudo, á excepçaõ de que a tangente em vez de cahir para além da origem A das abſciſſas em ordem a PM, cahe para a parte oppoſta. Deſte modo a formula $\frac{ydx}{dy}$ póde ſervir em todos os caſos; porque ſe as ordenadas forem diminuindo, o valor da ſubtangente virá em fórma negativa, e aſſim nos advertirá que o tomemos no meſmo ſentido da abſciſſa.

V.

V. No circulo, cuja equaçaõ (Alg. 285) he $y^2 = a^2 - x^2$, temos $2ydy = -2xdx$; logo $\frac{ydx}{dy} = \frac{-y^2}{x} = -\frac{a^2 - x^2}{x}$; quer dizer, que devemos tomar a ſubtangente PT (*Fig.* 4) no ſentido CP dos x, porque na deducçaõ da formula $\frac{ydx}{dy}$ ſuppuzemos, que ella ſe tomava em ſentido contrario. Do meſmo modo acharemos a ſubnormal $= -x$, e a normal $= a$, como deve ſer.

VI. A equaçaõ geral das *Hyperbolas* referidas ás aſymptotas $y^m x^n = a^{m+n}$ dá $mly + nlx = (m+n)la$; logo $\frac{mdy}{y} = -\frac{ndx}{x}$, e conſeguintemente a ſubtangente $\frac{ydx}{dy} = -\frac{m}{n}x$. Se $m = n = 1$, ou na hyperbola ordinaria (Alg. 347), temos a ſubtangente $= -x$; logo devemos tomar na aſymptota proxima ao ponto M de que ſe trata (*Fig.* 5), e no ſentido dos x, a linha PT $=$ AP $= x$.

Aſſim ſe determinaõ em geral por hum ſó calculo as tangentes, ſubtangentes, &c. de todas as curvas de huma meſma familia, iſto he, das curvas cuja equaçaõ tem a meſma fórma, e ſómente differe na grandeza dos expoentes, como por exemplo a reſpeito dos *Circulos* a equaçaõ he $y^m = x^n (a - x)^{m-n}$, a qual comprehende o circulo propriamente tal, quando $m = 2$, e $n = 1$; a reſpeito das *Ellipſes* . . . $y^m = \frac{c}{b} x^n (a - x)^{m-n}$; e a respeito das *Hyperbolas* . . . $y^m = \frac{c}{b} x^n (\pm a + x)^{m-n}$. A construcçaõ destas equações, e conseguintemente a determinaçaõ da figura das curvas respectivas naõ tem difficuldade (Alg. 283). Bem se vê, que y naõ tem mais que hum valor real quando o seu expoente he impar, e dous quando he par (Alg. 172); pelo que a huma mesma abscissa naõ corresponde mais que hum ramo de curva no primeiro caso, e dous no segundo, os quais cahem de differentes partes do eixo das abscissas.

32 Agora podemos resolver os dous problemas seguintes: 1° *Tirar huma tangente a qualquer curva de hum ponto dado fóra della.* 2° *Tirar huma perpendicular a qualquer curva por hum ponto dado no seu plano.*

Porque supponDo que DM (*Fig.* 6) he a tangente procurada, tire-se pelo ponto dado D a recta DB parallela a PM, e seja $AB = g$, $BD = h$, $AP = x$, $PM = y$; será $BP = g + x$, e conseguintemente $BT = PT - BP = \frac{ydx}{dy} - g - x$. Os triangulos semelhantes TBD, TPM daõ TB : BD :: TP : PM; logo substituindo os valores, teremos a equaçaõ $\frac{ydx}{dy} - x - g = \frac{hdx}{dy}$, isto he $(y - h) \frac{dx}{dy} = g + x$, a qual juntamente com a equaçaõ da curva dará o valor de x correspondente ao ponto M, aonde a tangente deve terminar. Se for possivel tirar de D mais que huma tangen-

gen-

gente, a equaçaõ dará os valores de x, que correſpondem aos differentes pontos, em que tem lugar a ſoluçaõ.

Quanto á perpendicular DQ (*Fig.* 7), como temos $PQ = \frac{ydy}{dx}$ (30), e os triangulos ſemelhantes QPM, QBD daõ DB : BQ :: PM : PQ; conſervando as meſmas denominações de cima, virá $(b - y)\frac{dy}{dx} = g + x$.

Ambas as ſoluções dadas ſe podem ſimplificar, fazendo paſſar o eixo das abſciſſas pelo ponto dado D, e conſervando-o parallelo á ſua primeira poſiçaõ. Aſſim, tomando DK (*Fig.* 6) por eixo das abſciſſas, e ſuppondo $KM = z$, em lugar de y ſubſtituiremos $z + b$ na equaçaõ da curva, e na do problema. Podemos tambem tomar o ponto D para origem das abſciſſas.

Se a curva tiver hum centro, como o circulo, a ellipſe &c., ſempre podemos ſuppor que o ponto D eſtá em hum diametro, e aſſim a ſoluçaõ ficará mais ſimples.

33 No triangulo rectangulo Mmr (*Fig.* 1) temos (Trig. 164) $tang\ Mmr = \frac{dx}{dy}$, $tang\ mMr = \frac{dy}{dx}$, $ſen\ Mmr = \frac{dx}{Mm} = \frac{dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$, $ſen\ mMr = \frac{dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$. Se quizermos pois ſaber em que lugar huma curva ou a ſua tangente faz com a ordenada ou com a abſciſſa hum angulo dado, igualaremos a expreſſaõ reſpectiva, que agora

achámos, á tangente ou ao feno conhecido, e pela equaçaõ tanto finita, como differencial da curva, acharemos o valor ou valores de x correfpondentes aos pontos, em que exifte o dito angulo. Se a queftaõ for impoffivel, o valor ou valores de x viráõ imaginarios, ou tambem a equaçaõ moftrará hum abfurdo manifefto.

Na hyperbola, por exemplo, que tiver por equaçaõ $yy = 2(ax + xx)$, fe quizermos faber onde a curva faz com a ordenada hum angulo cuja tangente $= m$, teremos $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{a + 2x} = \frac{\sqrt{2(ax + xx)}}{a + 2x} = m$; logo $x = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a \sqrt{\frac{1}{1 - 2m^2}}$.

Se o angulo for de $45°$, ferá $m = 1$; logo $x = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a\sqrt{-1}$, valores imaginarios, os quais moftraõ, que a hyperbola propofta nunca faz com a ordenada hum angulo de $45°$.

Pouca reflexaõ bafta para ver, que fe nos problemas antecedentes tivermos fómente a equaçaõ differencial, o calculo naõ poderá fatisfazer do mefmo modo que fe a tivermos em termos finitos. Porque 1° fe na equaçaõ que refolve o problema apparecer ainda x e y depois da fubftituiçaõ do valor de $\frac{dx}{dy}$, a equaçaõ da curva naõ póde fervir para eliminar y, pois que pela hypothefe contém dx e dy. 2° E ainda quando naõ haja neceffidade de eliminar y, como acontece em muitos cafos, naõ poderemos fegurar-nos fe o valor de x

faſatisfará á queſtaõ, porque para iſſo ſeria neceſſario ſubſtituir eſte valor na equaçaõ da curva, e deduzir hum valor real para y; mas da equaçaõ differencial naõ ſe póde tirar o valor de y.

O unico modo de reſolver em ſemelhantes caſos os problemas, de que tratamos, conſiſte em conſtruir a equaçaõ ultima em x e y, que ſe deduzio das condições do problema; entaõ eſta conſtrucçaõ (ſuppondo que a curva eſtá deſcrita) dará huma ſegunda linha, cuja interſecçaõ ou interſecções com a primeira daõ a ſoluçaõ ou ſoluções procuradas.

34 Podemos tambem pelos meſmos principios determinar as aſymptotas rectilineas das curvas.

Porque, tendo as curvas huma aſymptota rectilinea, quando a tangente na extremidade de hum ſeu ramo infinito encontra o eixo das abſciſſas ou das ordenadas em huma diſtancia finita da origem, eſtá claro, que ſe em $AT = PT - AP$ (*Fig.*8), ou em $\frac{ydx}{dy} - x$, depois de ſer calculado, ſuppuzermos x ou y infinito, conforme eliminarmos y ou x; os valores finitos que reſultarem para AT ſeráõ as diſtancias AC, por onde devem paſſar as aſymptotas. Para acharmos a outra diſtancia neceſſaria para determinar a poſiçaõ das meſmas aſymptotas, imaginemos por A a linha AK parallela ás ordenadas, e pela ſemelhança dos triangulos TPM, TAK teremos $AK = y - \frac{xdy}{dx}$; valor que depois de ſer calculado dará, ſuppondo ſe x ou y infinito, as diſtancias AR por onde paſſa a aſymptota.

Exem-

Exemplo. Se tivermos $y^3 = x^2(a+x)$ por equaçaõ da curva, virá $3y^2dy = (2ax + 3x^2)dx$; logo AT ou $\frac{ydx}{dy} - x = \frac{3y^3}{2ax+3x^2} - x = \frac{ax}{2a+3x}$, que na hypotheſe de x infinito dá AT $= \frac{1}{3}a$. Da meſma ſorte ſe achará AK ou $y - \frac{xdy}{dx} = y - \frac{2ax^2+3x^3}{3y^2} = \frac{ax^2}{3x\sqrt[3]{[(a+x)^2x]}}$, que na hypotheſe de x infinito ſe reduz a AK $= \frac{1}{3}a$. Tem pois a curva huma aſymptota, cuja poſiçaõ ſe determina pelos dous pontos achados.

Se o valor de AK ſahir infinito, ſendo finito o de AT, a aſymptota ſerá parallela aos y. Se pelo contrario ſendo AT infinito, o valor de AK vier finito, cifra, ou infinitamente pequeno, a aſymptota ſerá parallela aos x.

35 Até aqui havemos ſuppoſto, que as ordenadas eraõ parallelas, e ſe contavaõ da meſma linha ſobre que ſe contaõ as abſciſſas. Porém humas vezes fazemos partir as ordenadas de hum ponto fixo; outras vezes tomamos por abſciſſas os arcos de huma curva, e por ordenadas linhas rectas, ou linhas curvas. De qualquer modo que ſe reportem os pontos da curva principal, ſempre temos, ou ao menos ſempre podemos ter huma equaçaõ, que exprima a relaçaõ entre as abſciſſas e as ordenadas. Querendo fazer uſo della para determinar as tangentes, ou outras linhas, devemos praticar de maneira, que as linhas de que para iſſo

nos

nos servirmos naõ contenhaõ outras differenciais, que naõ sejaõ as das variaveis da equaçaõ, como vamos mostrar em alguns exemplos.

36 I. *Seja* BS (*Fig.* 9) *huma curva que tem por abscissas os arcos* AM *de huma curva conhecida* AM, *á qual sabemos já tirar tangentes, e por ordenadas as rectas* MS *parallelas a huma linha dada; suppondo que a relaçaõ de* AM *para* MS *se exprime por huma equaçaõ qualquer, isto he, que* MS *he huma* funçaõ *qualquer de* AM, *tirar huma tangente a hum ponto dado* S *da curva proposta* BS.

Imaginemos, como acima, o elemento Ss produzido até encontrar em Q a tangente MT ao ponto correspondente M da curva AM; tire-se Sk parallela a MT ou Mm, e seja AM $= x$, MS $= y$; será $Mm = Sk = dx$, e $sk = sm - SM = dy$.

Isto posto, os triangulos semelhantes Sks, QMS daõ MQ $= \frac{ydx}{dy}$; logo tomando sobre MT a parte MQ igual ao valor de $\frac{ydx}{dy}$ que der a equaçaõ differencial da curva, teremos o ponto Q; a linha QS pois tirada por elle e por S será a tangente procurada.

Supponhamos por exemplo, que a curva BS se constroe tomando sempre MS igual a huma parte $\frac{a}{b}$ do arco AM; entaõ teremos $by = ax$, e conseguintemente $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{a}$; logo MQ $= x$. Assim em todas as curvas, cujas ordenadas parallelas forem proporcionais ás abscissas correspondentes,

tes, ou eſtas ſejas rectas ou curvas, ſerá a ſubtangente igual á abſciſſa correſpondente.

37 Neſta meſma hypotheſe ſe AM for hum circulo, a curva BS ſerá huma *Cycloide*. Quando $b = a$, ou MS = BM (*Fig.* 10), temos a *cycloide* ſimples ou ordinaria, a qual he deſcrita por hum ponto da circumferencia S do circulo CNS rodando ſobre huma linha C*c*.

Eſtá claro, que neſta cycloide a *baſe* C*c* he igual á circumferencia do circulo genitor, e que ſendo BM $= x$, e PS $= y$, a equaçaõ da curva he $y = x + sen\ x$; donde ſe vê que a cycloide he do genero das curvas tranſcendentes. Se $a < b$, a curva chama-ſe *cycloide encurtada* (*Fig.* 11), a qual he deſcrita por hum ponto da circumferencia do circulo, que além do movimento de revoluçaõ tem tambem o de translaçaõ no meſmo ſentido; neſta curva a baſe he menor que a circumferencia do circulo genitor. Se $a > b$, temos a *cycloide alongada* (*Fig.* 12), em cuja formaçaõ o movimento progreſſivo ſe faz para a parte contraria do movimento de rotaçaõ; neſta a baſe he maior que a circumferencia do circulo genitor. O diametro AB do circulo, quando he perpendicular ao meio da baſe, chama-ſe o *eixo* da *cycloide*; o ponto B he o *vertice*. Se em lugar de hum ponto da circumferencia do circulo tomarmos hum ponto dentro ou fóra delle para deſcrever a cycloide, e ſe em vez de ſe effeituar a rotaçaõ do circulo ſobre huma recta, eſte movimento ſe fizer ſobre a circumferencia de outro circulo, entaõ a curva deſcrita ſerá do genero das que ſe chamaõ *Epicycloides*.

38 II. *Suppondo no problema precedente* (36), *que as ordenadas ſe contaõ deſde huma recta determi-*

na-

nada AP (*Fig.* 9); *achar a ſubtangente* PI *ſobre a meſma linha* AP.

Tire-ſe Su parallela a AP; e ſeja PM $= y$, a tangente TM da curva conhecida AM $= t$, e a ſua ſubtangente PT $= s$. Iſto poſto, conſervando as outras denominações, os triangulos ſemelhantes TPM, Mrm daõ Mr ou Su $= \frac{sdx}{t}$; logo comparando os dous triangulos Sus, IPS, teremos PI $= \frac{sydx}{tdy}$.

39 III. *Reſultando a curva* BMs (*Fig.* 13) *de duas curvas conhecidas* AL, CN *por huma equaçaõ entre as ordenadas correſpondentes* PL (x), PM (y), PN (z); *tirar a tangente a hum ponto qualquer* M.

Imaginemos a ordenada infinitamente vizinha $pnml$, e as linhas Lu, Mr, no parallelas a AP. Seja a ſubtangente conhecida PS da curva AL $= s$, e a ſubtangente PR da curva CN $= s'$. Iſto poſto, os triangulos ſemelhantes LPS, luL daõ PL (x) : PS (s) :: ul (dx) : Lu; logo Lu ou Mr ou $on = \frac{sdx}{x}$. Mas os triangulos Non, NPR daõ $dz = -\frac{z}{s'}on = -\frac{szdx}{s'x}$, notando que PM creſce, e PN diminue; e os dous TPM, Mrm daõ PT $= \frac{y}{dy}$ Mr $= \frac{sydx}{xdy}$; logo pondo na equaçaõ differencial da curva o valor agora achado de dz, e ſubſtituindo na expreſpreſſaõ de PT o valor de $\frac{dx}{dy}$ tirado da meſma equaçaõ differencial, teremos o valor da ſubtangente.

Supponhamos por exemplo, que PM he ſempre meia proporcional entre PL e PN, iſto he, ſupponhamos que he $y^2 = xz$, teremos $2ydy = zdx + xdz = zdx - \frac{szdx}{s'}$; logo $\frac{dx}{dy} = \frac{2s'y}{z(s'-s)}$, e conſeguintemente PT $= \frac{2ss'y^2}{xz(s'-s)} = \frac{2ss'}{s'-s}$. Em geral, ſe for $y^m = x^n z^{m-n}$, acharemos PT $= \frac{mss'}{ns'-(m-n)s}$.

Eſtes exemplos podem variar-ſe com muita facilidade, tomando huma equaçaõ como quizermos entre x, y e z. Podemos, por exemplo, ſuppôr que as curvas AL, CN ſe tornaõ em linhas rectas (*Fig.* 14). Entaõ tomando ſempre PM^m igual a PL^n e PN^{m-n}, a curva BM ſerá huma ſecçaõ conica ao infinito: a ſaber, huma parabola, quando algum dos pontos C ou A eſtiver a huma diſtancia infinita, iſto he, quando huma das rectas AL, CN for parallela ao diametro AB; huma ellipſe, quando os dous angulos HAC, HCA forem agudos; e particularmente hum circulo, quando cada hum for de 45°; em fim huma hyperbola, quando hum dos meſmos angulos for obtuſo, iſto he, quando a ordenada ao ponto de encontro H naõ cahir entre as extremidades A e C.

40 IV. *Suppondo que as ordenadas partem de hum ponto fixo, isto he, suppondo que a equaçaõ da curva exprime a relaçaõ da ordenada CM (Fig. 14) para o angulo ACM comprehendido por ella e pela linha fixa AC, ou para o arco OS descrito com hum raio determinado OC; tirar huma tangente a qualquer ponto M.*

Supponhamos que a perpendicular CT sobre CM encontra a tangente procurada TM no ponto T. Entaõ imaginando o elemento Mm, e tirando mC, concebamos o arco Mr descrito com o raio CM, e seja CO $= a$., CM $= y$, OS $= x$. Isto posto, os triangulos Mrm, TCM, que saõ semelhantes por differir o angulo Mmr infinitamente pouco do angulo TMC, daõ CT $= \frac{CM \,.\, Mr}{rm} = \frac{y \,.\, Mr}{dy}$. Mas os sectores semelhantes CSs, CMr daõ M$r = \frac{CM \,.\, Ss}{CS} = \frac{ydx}{a}$; logo CT $= \frac{y^2dx}{ady}$, valor facil de calcular, porque suppomos que y he huma funçaõ de x.

Se for, por exemplo, CM (y) : OS (x) :: CO ou CS (a) : OSAO (b), a curva CMA (*Fig.* 16) será a *Spiral de Archimedes*, e teremos $y = \frac{ax}{b}$; logo $\frac{dx}{dy} = \frac{b}{a}$, e CT $= \frac{y^2b}{a^2} = \frac{xy}{a} =$ MQ, sendo MQ o arco descrito com o raio CM. Esta curva mechanica descreve-se pe-

pelo movimento uniforme de hum ponto C ſobre o raio CA de C para A, em quanto eſte meſmo raio gyra uniformemente ao redor do centro C.

Na equação das ſpirais de todas as ordens $y^m = \frac{a^m x}{b}$ temos $\frac{ydx}{dy} = mx$; logo ſerá a ſubtangente $= m \cdot$ MQ.

41 V. *Na meſma hypotheſe de partirem as ordenadas de hum ponto, ſupponhamos que a equação da curva* BM *exprime a relação de* CM *para a ordenada correſpondente* CS (*Fig.* 17) *de outra curva conhecida* OS; *pergunta-ſe de que modo ſe ha-de tirar huma tangente a qualquer ponto* M.

Imaginemos o elemento Mm, as ordenadas CM, Cm, e os arcos Mr, Sq deſcritos de C com os raios reſpectivos CM, CS. Por quanto a equação ſómente dá a razão de rm para sq, devemos achar a razão de rm para Mr, que he neceſſaria para determinar a ſubtangente.

Para iſſo ſeja a ſubtangente conhecida CQ da curva OS $= s$, CS $= x$, CM $= y$. Os triangulos CQS, Sqs dão qS $= \frac{sdx}{x}$; logo comparando os ſectores ſemelhantes CSq, CMr, teremos M$r = \frac{sydx}{xx}$. Agora com eſta expreſſão he facil de deduzir dos triangulos ſemelhantes Mrm, TCM a formula da ſubtangente CT $= \frac{sy^2dx}{x^2dy}$.

Sup-

Supponhamos por exemplo, que para qualquer linha OS he SM ſempre igual a huma linha dada a; tereremos $x + a = y$; logo $\frac{dx}{dy} = 1$, e conſeguintemente $CT = \frac{sy^2}{x^2}$, que ſe conſtruirá da maneira ſeguinte.

Conduziremos por M a linha MX parallela a SQ, e tirando SX, conduziremos parallelamente a eſta a linha MT, que ſerá a tangente procurada. Com effeito os triangulos ſemelhantes CSQ, CMX daõ $CX = \frac{sy}{x}$, e os dous CSX, CMT daõ $CT = \frac{CM \cdot CX}{CS} = \frac{sy^2}{x^2}$.

Quando OS he huma linha recta, a curva BM (*Fig.* 18) chama-ſe a *Concoide de Nicomedes*, cuja aſymptota he a recta OS, e o *pólo* o ponto C. Seja AD ou $SM = a$, $AC = b$, $AP = x$, $PM = y$; ſerá $AS = x - PS = x - \sqrt{(aa - yy)}$, e os triangulos ſemelhantes PSM, CSA daráõ $xy = (b + y)\sqrt{(aa - yy)}$, equaçaõ ás coordenadas da concoide ſuperior BM, pela qual ſe vê que eſta curva algebrica pertence ás linhas da quarta ordem.

Eſtes exemplos moſtraõ de que modo ſe ha-de proceder em outros caſos, quer as curvas ſejaõ mechanicas, quer algebricas.

Ap-

Applicação aos limites das Linhas Curvas, e em geral aos limites das quantidades, e aos problemas de Maximis & Minimis.

42 POr quanto $\frac{dx}{dy}$ exprime (33) a tangente do angulo, que a curva ou a ſua tangente faz em cada ponto com a ordenada, e $\frac{dy}{dx}$ exprime a tangente do angulo, que a curva ou a ſua tangente faz com o eixo das abſciſſas, ſegue-ſe que para ſaber em que lugar a tangente de huma curva he parallela ás ordenadas, procuraremos em que lugar a razaõ das differenciais das coordenadas, iſto he, o valor de $\frac{dx}{dy}$ ſe reduz a nada, ou (que vem a ſer o meſmo) em que lugar $dx = 0$; e para ſaber em que lugar a tangente da curva he parallela ás abſciſſas, procuraremos em que lugar $dy = 0$; porque em ambos os caſos os angulos ſaõ nullos. Differenciando pois a equaçaõ de huma curva, e igualando a nada ou ao infinito o valor de $\frac{dx}{dy}$ teremos huma equaçaõ, a qual ſendo combinada com a meſma equaçaõ da curva dará os valores das coordenadas x e y, correſpondentes aos pontos, em que a tangente da curva he parallela ás ordenadas ou ás abſciſſas.

Para illuſtrar eſta regra com hum exemplo familiar, tomemos a equaçaõ $yy + xx = 3ax - 2aa$

+

$+ 2by - bb$, a qual pertence ao circulo (Alg.392), se (*Fig.*19) os x (AP) e os y (PM, PM′) forem perpendiculares entre si.

Esta equação dá $\frac{dx}{dy} = \frac{2y - 2b}{3a - 2x}$. Se igualarmos o numerador a nada, teremos $2y = 2b$, ou $y = b$. Substituindo este valor na equação da curva, virá $xx - 3ax = - 2aa$, que dá $x = \frac{1}{2}(3a \pm a)$, isto he $x = 2a$, e $x = a$. He pois a curva ou a sua tangente parallela ás ordenadas em dous pontos R e R′, dos quais hum R tem por abscissa a linha AQ $= a$, e o outro R′ tem por abscissa a linha AQ′ $= 2a$, tendo ambos elles a linha b por ordenada.

Se igualarmos tambem o denominador a nada, teremos $3a - 2x = 0$, ou $x = \frac{3}{2}a$; e substituindo este valor na equação da curva, virá $(y - b)^2 = \frac{1}{4}aa$; logo $y = b \pm \frac{1}{2}a$, isto he $y = b + \frac{1}{2}a$, e $y = b - \frac{1}{2}a$. Estes resultados nos mostraõ, que a tangente he parallela ás abscissas em dous pontos T e T′, dos quais hum T′ tem por ordenada a linha ST′ $= b + \frac{1}{2}a$, e o outro T tem por ordenada a linha ST $= b - \frac{1}{2}a$, tendo ambos a mesma abscissa AS $= \frac{3}{2}a$.

Os pontos Q e Q′ chamaõ-se os *limites* das abscissas, porque entre Q e Q′ a cada abscissa correspondem os y reais PM, PM′, e naõ ha ponto algum de curva nem entre Q e A, nem para além de Q′; de maneira que se suppuzermos x menor que

que AQ ou a, ou tambem maior que AQ′ ou $2a$, iſto he, ſe em lugar de x ſubſtituirmos na equaçaõ $a - q$, ou $2a + q$, naõ virá valor algum real para y.

Da meſma ſorte ſe tirarmos pelo ponto A a linha AL parallela ás ordenadas, que ſerá o eixo dellas, e pelos pontos T, T′ tirarmos TL, T′L′ parallelamente ás abſciſſas, as linhas $AL = ST = b - \frac{1}{2}a$, e $AL' = ST' = b + \frac{1}{2}a$ ſeráõ os limites das ordenadas; porque ſendo a tangente parallela ás abſciſſas, naõ póde haver ordenada maior que AL′, nem menor que AL. Tambem ſe na equaçaõ da curva metermos em lugar de y huma quantidade $b - \frac{1}{2}a - q$ menor que $b - \frac{1}{2}a$, ou huma quantidade $b + \frac{1}{2}a + q$ maior que $b + \frac{1}{2}a$, a reſoluçaõ da equaçaõ dará valores imaginarios para x.

43 A ordenada ST′ he a maior de todas as que terminaõ na parte concava RT′R′ da circumferencia; a ordenada ST he a menor de todas as que terminaõ na parte convexa RTR′; e as ordenadas QR, Q′R′ ſaõ ſimultaneamente as menores que terminaõ na parte concava, e as maiores que terminaõ na parte convexa.

44 Aſſim o meſmo methodo determina 1° os limites das ordenadas e abſciſſas; 2° os pontos em que a tangente he parallela ás abſciſſas, ou ás ordenadas; 3° em fim as maiores e menores abſciſſas, ou ordenadas.

45 Huma funçaõ qualquer de huma variavel x póde conſiderar-ſe como a expreſſaõ da ordena-

nada y de huma curva. Por exemplo, $\frac{x^2(a-x)}{aa}$ póde tomar-ſe pela expreſſaõ de huma quantidade y; e a equaçaõ $y = \frac{x^2(a-x)}{aa}$, que entaõ temos, póde conſiderar-ſe como a de huma curva, cuja abſciſſa ſeja x, e y a ordenada. Logo para ſaber ſe huma quantidade $\frac{x^2(a-x)}{aa}$ vem a ſer maior ou menor em algum caſo do que em outro qualquer (o que ſe chama ſer ſuſceptivel de hum *Maximum*, ou de hum *Minimum*), ſeguiremos o methodo expoſto, o qual conſiſte em igualar á nada o valor de $\frac{dx}{dy}$ tirado da equaçaõ, que ſempre podemos formar entre x e y.

46 A iſto ſe reduz o methodo chamado de *Maximis & Minimis*, que he hum dos mais uteis da Analyſe, e que como acabamos de ver, enſina a achar entre muitas quantidades que creſcem ou diminuem por huma lei, qual he a maior ou a menor dellas, ou em geral qual he a que tem certas propriedades no mais alto gráo em comparaçaõ de todas as ſuas ſemelhantes. Paſſemos a dar alguns exemplos tirados da Geometria e do Calculo.

47 Probl. I. *Dividir hum numero dado em duas partes tais, que o ſeu producto ſeja hum* Maximum.

Repreſentando huma deſtas partes por x, a outra ſerá $a - x$, e o producto de ambas ſerá $ax - xx$; expreſſaõ que he ſuſceptivel de *maximum*, como veremos ſe ſubſtituirmos ſucceſſivamente o e a em

D lugar

lugar de x. SupponDo pois $y = ax - xx$, teremos $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a - 2x}$. Se igualarmos o numerador a nada, virá $1 = 0$, que he abſurdo; logo naõ poderemos achar o *maximum*, ſenaõ igualando o denominador a nada. Fazendo iſſo, vem $a - 2x = 0$, e conſeguintemente $x = \frac{1}{2}a$, que reduz o producto a $\frac{1}{4}a^2$. Logo de qualquer modo que ſe divida hum numero em duas partes, o producto dellas ſerá o maior poſſivel, quando cada huma for a ametade do meſmo numero; e conſeguintemente o rectangulo formado pelas partes de huma linha a ſerá o maior poſſivel, quando cada huma dellas for $\frac{1}{2}a$.

48 Todas as vezes que tivermos a expreſſaõ algebrica da quantidade, naõ he neceſſario igualalla a huma nova variavel y; baſta ſimplesmente differencialla, e depois de dividir pela differencial da variavel, igualar a nada o numerador ou o denominador, ſe a differencial for huma fracçaõ. Aſſim no noſſo exemplo differenciaremos logo $ax - xx$, e igualando a differencial a nada, teremos $a - 2x = 0$, que igualmente dá $x = \frac{1}{2}a$.

49 Em geral: *Dividir hum numero dado* a *em duas partes tais, que o producto de huma potencia determinada de huma dellas pela meſma ou outra potencia da outra parte ſeja o maior poſſivel.*

Seja a primeira parte $= x$, a potencia a que ella deve ſer elevada $= m$, a potencia a que deve ſer elevada a outra parte $= n$; teremos $x^m (a-x)^n = Max.$; logo $mx^{m-1} (a-x)^n = nx^m (a-x)^{n-1}$, iſto he, $m(a-x) = nx$, que dá $x = \frac{ma}{m+n}$,

e

e conſeguintemente o valor do maximo producto ſerá $m^m\, n^n \left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n}$. Se a queſtaõ por exemplo foſſe dividir o numero a em duas partes tais, que o quadrado de huma multiplicado pelo cubo da outra foſſe o maior poſſivel, teriamos $m=2$, $n=3$; logo $x = \frac{2a}{2+3} = \frac{2}{5}a$; iſto he huma das partes deve ſer $\frac{2}{5}$ do numero ou da quantidade propoſta, e por conſeguinte a outra deve ſer $\frac{3}{5}$ da meſma quantidade.

Pelo que acima diſſemos ſe moſtra, que huma quantidade póde vir a ſer a maior de todas as ſuas ſemelhantes por dous modos differentes; ou quando, como PM′ (*Fig.* 19), começa a creſcer para entrar depois a diminuir; ou quando, como P′M″, vai creſcendo para parar de repente, fazendo-ſe Q′R′; porém neſte ultimo caſo a quantidade he ao meſmo tempo a maior das ordenadas que terminaõ na parte convexa, e a menor das que terminaõ na parte concava. Da meſma ſorte huma quantidade póde vir a ſer a menor das ſuas ſemelhantes por dous modos; ou quando, como PM, diminue, e depois começa a creſcer; ou quando, como P′M‴, diminue para parar de repente, e entaõ he ao meſmo tempo hum *minimum* e hum *maximum*; hum *minimum* a reſpeito do ramo M′T′M‴, e hum *maximum* a reſpeito do ramo MTM″.

50 Aſſim para diſtinguir ſe huma quantidade

he hum *maximum*, ou hum *minimum*, ou hum e outro ao meſmo tempo; ſuppondo que a repreſenta o valor de x, que convem ao *maximum* ou ao *minimum*, devemos ſubſtituir na quantidade propoſta em lugar de x ſucceſſivamente $a+q$, a, $a-q$. Se os dous reſultados extremos forem reais e menores que o do meio, a quantidade ſerá hum *maximum*; ſe pelo contrario os dous reſultados extremos forem maiores que o do meio, a quantidade ſerá hum *minimum*; em fim ſe dos meſmos dous reſultados extremos hum for imaginario e o outro real, a quantidade ſerá ao meſmo tempo hum *maximum* e hum *minimum*.

51 Quando o valor, que ſe achar para a variavel pelo methodo de *maximis & minimis*, fizer negativa a expreſſaõ do *maximum* ou do *minimum*, concluiremos que eſſe *maximum* ou *minimum* naõ pertence á queſtaõ actual, mas a outra, que tenha algumas condições contrarias ás da primeira. Propondo-ſe por exemplo: *Dividir a linha* AB (a) *no ponto* C (*Fig.* 20), *de maneira que o quociente do quadrado da diſtancia* AC (x) *ao ponto* A, *dividido pela diſtancia* CB $(a-x)$ *ao ponto* B *ſeja o menor poſſivel*, teremos $\frac{x^2}{a-x} = Min$; logo $\frac{2x(a-x)+x^2}{(a-x)^2} = 0$; que (igualando-ſe o numerador a nada) dá $x = 0$, ou $x = 2a$. O primeiro valor indica hum *minimum*, mas que he evidente ſem o calculo. Quanto ao ſegundo, ſe o ſubſtituirmos em $\frac{x^2}{a-x}$, acharemos $-4a$; donde concluiremos, que o *minimum* naõ pertence ao problema actual. Reflectindo porém no valor $x = 2a$, vê-ſe que o ponto C naõ póde

eſtar

eſtar entre A e B, e que a ſoluçaõ pertence ao problema, em que ſe propuzeſſe achar o ponto no prolongamento de AB além de B a reſpeito de A. Com effeito neſte caſo, chamando a AC′, x, a diſtancia BC′ ſerá $x-a$, e aſſim teremos $\frac{x^2}{x-a} = Min$; logo $\frac{2x(x-a)-x^2}{(x-a)^2} = 0$, que dá $x=2a$ como acima. Se ſubſtituirmos eſte valor em $\frac{x^2}{x-a}$, teremos $4a$; logo eſte caſo tem hum *minimum*.

O denominador $(x-a)^2$ da expreſſaõ differencial, ſendo igualado a nada, dá $x=a$, que indica hum *maximum*, pois que entaõ a quantidade he infinita. Mas nem poriſſo perde o verdadeiro caracter do *maximum*; porque ou ſupponhamos x maior, ou menor que a, ſempre virá huma quantidade menor, do que ſe ſuppuzeſſemos $x=a$

52 Quando a expreſſaõ de huma quantidade ſuſceptivel de hum *maximum* ou *minimum* contiver algum multiplicador ou diviſor conſtante, podemos ſupprimillo antes de differenciar. Repreſente $\frac{ay}{b}$ geralmente a quantidade ſuſceptivel de *maximum* ou *minimum*, ſendo a e b conſtantes; deve ſer $\frac{ady}{b} = 0$; mas como a e b naõ ſaõ nada, deve ſer $dy=0$; logo ſahe a meſma concluſaõ que no caſo de ſómente y ſer *maximum* ou *minimum*, iſto he no caſo de ſe ſupprimir $\frac{a}{b}$. Por eſta reflexaõ ſe ſimplificaõ os calculos em muitos caſos.

53 Probl. II. *Achar entre todas as linhas que se podem tirar por hum mesmo ponto* D, *dentro do angulo conhecido* ABC (*Fig.* 21), *qual he a que fórma com os lados deste angulo o menor triangulo possivel.*

Havendo pelo ponto D conduzido DG parallela a AB, DK perpendicular sobre BC, e huma recta qualquer EF, tire-se pelo ponto de encontro E de EF com AB a linha EL parallela a DK. Seja BG $= a$, DK $= b$, e a base BF do triangulo BEF $= x$. Bem se vê que passado hum certo termo, quanto mais crescer BF, tanto mais crescerá o triangulo; e que pelo contrario se BF diminuir, tambem o triangulo ha de diminuir, mas só até certo limite; porque se BF viesse a ser quasi igual a BG, a recta EDF seria quasi parallela a AB, isto he, estaria proxima a confundir-se com GD, e entaõ o triangulo seria extremamente grande: ha pois hum valor de BF entre $x = a$ e $x = \infty$, que dá o menor triangulo possivel. Para o achar, busque-se a expressaõ geral do triangulo BEF.

Os triangulos semelhantes BEF, GDF daõ GF : BF :: DF : EF, e os dous DKF, ELF daõ DF : EF :: DK : EL; logo GF $(x - a)$: BF (x) :: DK (b) : EL $= \frac{bx}{x-a}$; será pois a superficie do triangulo BEF ou $\frac{\text{EL} \cdot \text{BF}}{2} = \frac{\frac{1}{2}bx^2}{(x-a)}$. Assim differenciando $\frac{x^2}{x-a}$ (52), acharemos $x = 2a$ por

hum

hum calculo ja feito (51). Logo se tomarmos BF = 2BG, a linha FDE que se tirar por D, dará o menor triangulo procurado EBF = $2ab$.

54 Probl. III. *Achar o maior parallelepipedo de todos os que tem a mesma superficie e a mesma altura.*

Seja h a altura do parallelepipedo, cc a sua superficie, x e y os dous lados do rectangulo que lhe serve de base. A superficie total compõe-se de seis rectangulos, dos quais dous tem cada hum a altura h e a base x; dous tem a altura h e a base y; e os dous ultimos tem a base x e a altura y; assim a superficie total $cc = 2hx + 2hy + 2xy$, que he constante. Como a solidez hxy deve ser a maior de todas as da mesma superficie, teremos $xdy + ydx = 0$. Tirando desta equaçaõ o valor de dx, e substituindo-o na expressaõ differencial da superficie $2hdx + 2hdy + 2xdy + 2ydx = 0$, acharemos $y = x$; logo a base deve ser hum quadrado. Para ter o lado deste quadrado, poremos em lugar de y o seu valor x na equaçaõ $2hx + 2hy + 2xy = cc$, e teremos $4hx + 2x^2 = cc$, que dá $x = -h \pm \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$; excluindo pois a raiz negativa, que he inutil no caso presente, será $-x + \sqrt{(hh + \frac{1}{2}cc)}$ o valor conveniente de x.

Querendo agora saber *qual deve ser a altura h, para que o parallelepipedo tenha a maior solidez entre todos os da mesma superficie*, advertiremos, que como a base deve ser hum quadrado xx, a solidez ha de exprimir-se por hxx. Differenciando pois

pois esta expressaõ na hypothese de h e x serem variaveis, e igualando a differencial a nada, teremos $dh = -\frac{2hdx}{x}$. Substituindo este valor em $4hdx + 4xdh + 4xdx = 0$, que exprime entaõ a outra condiçaõ de ser constante a superficie, acharemos $h = x$; logo o parallelepipedo procurado deve ser hum cubo, porque a altura h deve ser igual ao lado do quadrado, que serve de base. Para achar agora o lado deste cubo, substitua-se x em lugar de h na equaçaõ $4hx + 2x^2 = cc$, e virá $6x^2 = cc$, que dá $x = \sqrt{\frac{cc}{6}}$. Logo entre todos os parallelepipedos de superficie constante, o que tem maior capacidade he o cubo, cujo lado he a raiz quadrada da sexta parte da mesma superficie

55 Procederemos do mesmo modo para *achar o cylindro recto de maior capacidade entre todos os da mesma superficie*. Porque sendo x o raio da base, y a altura, e $1 : c$ a razaõ do raio para a semicircumferencia, teremos a superficie total $= 2cxy + 2cx^2$, e a solidez $= cx^2y$. Se tratarmos pos estas equações como acabamos de fazer com as do problema precedente, virá $x = \frac{1}{2}y$. Logo entre todos os cylindros rectos da mesma superficie, o que tem a altura igual ao diametro da base, he o de maior capacidade; e reciprocamente entre todos os de igual capacidade, o que tem a altura igual ao diametro da base, he o de menor superficie.

56

56 Probl. IV. *Achar entre todos os triangulos do meſmo perimetro e baſe, qual he o que tem maior ſuperficie.*

Tire-ſe a perpendicular CP (*Fig.* 22), e ſeja a baſe $AB = a$, o perimetro do triangulo ABC $= c$, $AP = x$, $CP = y$; ſerá $PB = a - x$, $AC = \sqrt{(xx + yy)}$, e $CB = \sqrt{[yy + (a - x)^2]}$. Logo teremos o perimetro ou $c = a + \sqrt{(xx + yy)} + \sqrt{[yy + (a - x)^2]}$, e a ſuperficie $= \frac{ay}{2} =$ Max. Eſta ultima condiçaõ dá $\frac{ady}{2} = 0$, logo $dy = 0$; e ſubſtituindo eſte valor na primeira equaçaõ depois de differenciada, a ſaber $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + \frac{ydy - (a - x)\,dx}{\sqrt{[yy + (a - x)^2]}} = 0$, virá $x\sqrt{[yy + (a - x)^2]} = (a - x)\sqrt{(xx + yy)}$, iſto he $xx = (a - x)^2$, que dá $x = \frac{1}{2}a$, por onde ſe moſtra, que o triangulo deve ſer iſoſceles. Levantaremos pois huma perpendicular no meio de AB, e havendo deſcrito do ponto B com o raio igual á ametade da differença entre o perimetro c e a baſe a hum arco, que corte a perpendicular em C, ſe tirarmos CB e CA, teremos o triangulo de maior ſuperficie entre todos os iſoperimetros, conſtruidos ſobre a meſma baſe.

57 Se quizermos ſaber em geral, *qual he o triangulo de maior ſuperficie entre todos os iſoperimetros*, de-

devemos notar, que pela soluçaõ antecedente consta, que x deve ser ametade da base, qualquer que ella seja. Logo a equaçaõ do perimetro se reduz a $c - a = 2\sqrt{(\frac{1}{4}aa + yy)}$, que dá $y = \sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)}$; e por conseguinte a superficie do triangulo $= \frac{a}{2}\sqrt{\left(\frac{cc - 2ac}{4}\right)}$, que deve ser hum *maximum*, seja qual for a base a. Differenciaremos pois esta quantidade ou $a\sqrt{(c - 2a)}$ na hypothese de a variavel, e igualando a differencial a nada, teremos $\sqrt{(c - 2a)} = \frac{a}{\sqrt{(c - 2a)}}$, donde se tira $a = \frac{1}{3}c$; logo a base deve ser o terço do perimetro; e como já vimos que o triangulo era isosceles, segue-se que ha de ser equilatero. Assim de todos os triangulos isoperimetros, o equilatero he o que tem maior superficie.

58 Se nestas duas soluções igualassemos o denominador a nada, na primeira viria x imaginario, e na segunda $a = \frac{1}{2}c$, que tambem naõ satisfaz ao problema; porque se a base fosse ametade do perimetro, os outros lados se confundiriaõ com a mesma base, e o triangulo degenerando entaõ em linha recta seria nullo. Daqui por diante, para naõ nos demorarmos em indagações inuteis, naõ igualaremos o numerador ou o denominador a nada, senaõ no caso de resultar huma soluçaõ admissivel.

59 No problema penultimo, para determinar o maior parallelepipedo entre todos os da mesma su-

superficie, suppuzemo-los primeiramente todos da mesma altura. No ultimo problema tambem para determinar o maior triangulo entre todos os do mesmo perimetro, começamos a soluçaõ pelos triangulos da mesma base.

Este methodo, ainda que indirecto, he ordinariamente o mais simples; resolve-se o problema fazendo variar primeiramente o menor numero de quantidades que for possivel, e fazendo depois variar successivamente cada huma das quantidades, que se tinhaõ tratado como constantes. Querendo por exemplo *dividir huma quantidade* a *em tres partes* x, y, *e* a — x — y, *tais que o producto de todas seja o maior possivel*, teremos $d[xy(a-x-y)]=0$. Porém em lugar de differenciar de huma vez em ordem ás duas variaveis x, y, differenciaremos sómente em ordem a x, e virá $a-2x-y=0$, donde se conclue $x=\frac{1}{2}(a-y)$; valor que muda o producto em $\frac{1}{4}y(a-y)^2$. Differenciando agora relativamente a y, acharemos $(a-y)^2=2y(a-y)$, que dá $y=\frac{1}{3}a$; logo as tres partes devem ser iguais cada huma a hum terço da quantidade proposta.

60 Podemos tambem fazer variar todas as variaveis ao mesmo tempo, e ajuntando depois todos os termos em que entrar a differencial de huma mesma variavel, igualallos a nada; executando tambem a mesma cousa a respeito da differencial de cada variavel. Assim no ultimo exemplo teriamos $aydx+axdy-2xydx-x^2dy-2xydy-y^2dx=0$,

e

e igualando ſeparadamente a nada os termos affectos de dx, e os de dy, acharemos $aydx - 2xydx - y^2dx = o$, e $axdy - x^2dy - 2xydy = o$, iſto he $a - 2x - y = o$, e $a - x - 2y = o$, das quais ſe conclue como acima $x = \frac{1}{3}a$, e $y = \frac{1}{3}a$.

A razaõ he facil de perceber, advertindo que naõ ha aqui outra condiçaõ a que ſe deva ſatisfazer, ſenaõ que a differencial ſeja nada; e que a iſto ſe ſatisfaz, ou ſuppondo cada differencial dx, dy igual a nada, o que he verdade, mas naõ dá nada a conhecer, ou ſuppondo que a ſoma dos termos multiplicados por dx e por dy he cada huma igual a nada.

61 Quando as condições dos problemas ſe exprimem por muitas equações, antes de applicar eſta regra á equaçaõ differencial, que determina o *maximum* ou o *minimum*, devemos tirar das outras equações differenciadas os valores das differenciais de tantas variaveis, quantas ſaõ as equações menos a do *maximum* ou *minimum*, e introduzillos neſta. Aſſim no exemplo acima do maior parallelepipedo, no qual tinhamos $2hx + 2hy + 2xy = cc$, e $hxy = \text{M}ax$, ſe quizermos tratar ao meſmo tempo h, x, y como variaveis, tiraremos da primeira equaçaõ differenciada o valor $dh = \frac{-ydx - xdy - hdx - hdy}{x + y}$, e ſubſtituindo-o na do *maximum* tambem differenciada, virá $hx^2dy + hy^2dx - xy^2dx - x^2ydy = o$. Agora podemos igualar ſeparadamente a nada a ſoma dos termos,

mos, que multiplicaõ dx e dy, e teremos $hy^2 - xy^2 = 0$, ou $x = h$, e $hx^2 - x^2y = 0$, ou $y = h$; logo $h = \sqrt{\frac{cc}{6}}$; o que tudo concorda com a soluçaõ achada.

62 Naõ ſó podemos fazer variar as quantidades ou ſucceſſivamente, ou todas ao meſmo tempo, mas tambem podemos ſuppor conſtantes quaiſquer funções das meſmas quantidades, com tanto que o numero deſtas novas condições arbitrarias, juntamente com o das condições do problema, naõ exceda o numero das variaveis x, y, z, que entrarem no meſmo problema. Eſta advertencia póde ſer utiliſſima em muitas queſtões, principalmente havendo radicais, como vamos a moſtrar.

Probl. V. *Achar entre todos os quadrilateros iſoperimetros, qual he o que tem maior ſuperficie.*

Abaixem-ſe dos angulos C e D ſobre o lado AB as perpendiculares DE, CF, e conduza-ſe por D a recta DK parallela a AB. Seja AE $= s$, DE $= t$, AF $= u$, CF $= x$, BF $= y$, o perimetro do quadrilatero $= a$; e os triangulos rectangulos daráõ DA $= \sqrt{(ss + tt)}$, DC $= \sqrt{[(s + u)^2 + (x - t)^2]}$, CB $= \sqrt{(xx + yy)}$; logo ſerá $a = u + y + \sqrt{(ss + tt)} + \sqrt{[(s + u)^2 + (x - t)^2]} + \sqrt{(xx + yy)}$. Por outra parte ABCD $=$ DEFC $+$ CFB $-$ DAE $= (t + x)\frac{s + u}{2} + \frac{xy}{2} - \frac{st}{2}$; logo devemos differenciar eſta quantitidade, e a equaçaõ antecedente. Porém como os radicais fariaõ o calculo ſubſequente muito complicado, ſupponhamollos todos tres conſtantes, o que dará ... $d\sqrt{(ss+tt)} = 0$, ou $sds + tdt = 0$. ... $(s+u)(ds+du) + (x-t)(dx-dt) = 0$. ... $xdx + ydy = 0$. A equaçaõ do perimetro ſendo differenciada neſta ſuppoſiçaõ dá $du + dy = 0$, e a condiçaõ do *maximum* dá $udt + sdx + udx + tdu + xds + xdu + xdy + ydx = 0$. Deſtas cinco equações differenciais a primeira dá $ds = -\frac{tdt}{s}$, a terceira dá $dx = -\frac{ydy}{x}$, e a quarta dá $dx = -dy$. Subſtituindo eſtes valores na ſegunda e na quinta, teremos as equações ... $-(tdt + sdy)(u+s)x - (ydy + xdt)(x-t)s = 0$ ... $suxdt - suydy - ssydy - tsxdy - xxtdt - syydy = 0$; as quais moſtraõ que $s = 0$; logo o angulo DAB deve ſer recto, e conſeguintemente a equaçaõ do perimetro ſe torna em $a = u + y + t + \sqrt{[u^2 + (x-t)^2]} + \sqrt{(x^2 + y^2)}$, e a expreſſaõ da ſuperficie em $(t+x)\frac{u}{2} + \frac{xy}{2}$.

Differenciemos pois ſuppondo ſómente conſtantes os dous radicais; teremos ... $udu + (x-t)(dx-dt) = 0$ ... $xdx + ydy = 0$ ... $dt + du + dy = 0$. ... $u(dt+dx) + (t+x)du + xdy + ydx = 0$.

A

A ſegunda deſtas equações dá $dy = -\frac{xdx}{y}$; a terceira dá $dt = -du - dy = \frac{xdx - ydu}{y}$; e ſubſtituindo na primeira e na quarta, teremos as equações . . . $yudu + (x - t)(ydx - xdx + ydu) = 0$ . . . $u(xdx - ydu + ydx) + (t + x)ydu - x^2dx + y^2dx = 0$, as quais moſtraõ que $y = 0$; logo o angulo CBA deve ſer recto, e conſeguintemente a equaçaõ do perimetro ſe reduz a $a = t + u + x + \sqrt{[u^2 + (x - t)^2]}$, e a expreſſaõ da ſuperficie $a(t + x)\frac{u}{2}$.

Differenciemos agora, naõ ſuppondo conſtante ſenaõ o radical; teremos . . . $udu + (x - t)(dx - dt) = 0$ . . . $dt + du + dx = 0$ . . . $u(dt + dx) + (t + x)du = 0$. A ſegunda dá $dt = -dx - du$; ſubſtituindo pois eſte valor nas outras duas, e combinando-as virá $x = t$; logo a equaçaõ do perimetro ſe reduz a $a = 2t + 2u$, e a expreſſaõ da ſuperficie a ut.

Eſtas duas expreſsões ſendo differenciadas daõ $dt + du = 0$ . . . $udt + tdu = 0$; logo $t = u$. Concluiremos pois, que as linhas AB, AD, DC, CB ſaõ iguais entre ſi; e como o angulo A deve ſer recto, o quadrilatero procurado neceſſariamente ha de ſer hum quadrado.

Eſta propriedade podia achar-ſe com mais facilidade; mas naõ ſatisfariamos entaõ ao que nos pro-

propuzemos, iſto he, a moſtrar de que modo a liberdade de tomar eſta ou aquella quantidade por conſtante facilita o calculo em muitos caſos. Se applicarmos iſto meſmo aos outros polygonos, acharemos que em geral de todas as figuras iſoperimetras do meſmo numero de lados, o polygono regular deſſe numero de lados he o que tem maior ſuperficie; donde ſe ſegue, que de todas as figuras iſoperimetras o circulo he a que tem maior ſuperficie.

Dos Pontos multiplos.

63 ATé aqui examinámos o que acontece, quando a razaõ entre as differenciais das coordenadas he nada; conſideremos agora o que ſuccede, quando eſta razaõ ou $\frac{dx}{dy}$ ſahe na fórma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Como a equaçaõ de huma curva, depois de ſer differenciada, ſe póde reduzir á fórma $Adx + Bdy = 0$ (ſendo A a ſoma dos termos multiplicados por dx, e B a dos termos multiplicados por dy), iſto he a $\frac{dx}{dy} = -\frac{B}{A}$, eſtá claro, que para B e A ſe fazerem nada ao meſmo tempo, he neceſſario que ambos tenhaõ hum commum diviſor, o qual ſe reduza a nada em certos valores de x e y. Por exemplo na curva, cuja equaçaõ he $y^2 = \frac{x(a-x)^2}{a}$, temos $\frac{dx}{dy} = \frac{2ay}{(a-x)^2 - 2x(a-x)}$,

iſto

isto he $\frac{dx}{dy} = \pm \frac{2a(a-x)\sqrt{\frac{x}{a}}}{(a-x)^2 - 2x(a-x)}$, que no caso de $x = a$ se torna em $\frac{0}{0}$; mas bem se vê, que $a - x$ he commum divisor do numerador e do denominador, e que o valor de $\frac{dx}{dy}$ se reduz a $\frac{dx}{dy}$ $= \pm \frac{2a\sqrt{\frac{x}{a}}}{a-3x}$, que he ± 1 no caso particular de $x = a$: logo neste exemplo $\frac{0}{0} = \pm 1$.

Assim para achar em semelhantes casos o valor de $\frac{dx}{dy}$, poder-se-hia procurar o commum divisor dos dous termos da fracçaõ que exprime o dito valor, e dividillos pelo mesmo divisor.

Porém como este methodo naõ satisfaz, quando o valor de $\frac{dx}{dy}$ contém mais que huma variavel, nem quando contendo sómente huma inclue quantidades radicais; por isso daremos outro mais geral e mais facil, mostrando primeiramente, que esta singularidade sómente tem lugar nos *pontos multiplos*, isto he, naquelles pontos por onde passaõ muitos ramos de huma mesma curva.

64 Seja SOMZM'ON'' (*Fig.* 24) huma curva, em que se encontraõ ao menos dous ramos no ponto O. Está claro, que a cada abscissa AP ou x corresponde (ao menos em certo intervallo) hum numero de valores PM, PM' para y, e que

os y correſpondentes aos ramos que ſe encontraõ, fazem-ſe iguais no ponto O.

Da meſma ſorte, ſendo AZ o eixo das ordenadas, neceſſariamente a cada huma dellas AQ ha de correſponder (ao menos em certo intervallo) hum numero de abſciſſas QN, QN′, QN″, e as correſpondentes aos ramos que ſe encontraõ, far-ſe-haõ iguais no ponto do encontro.

Logo, repreſentando por a e b reſpectivamente os valores de x e y, que convem ao ponto multiplo, a equaçaõ deſta curva deve ſer tal, que ſe nella puzermos a em lugar de x, venhamos a ter para y tantos valores iguais a b, quantos ſaõ os ramos que paſſaõ pelo ponto multiplo; e pondo tambem b em lugar de y, venhamos a achar outros tantos valores a para x.

Donde ſe vê, que a equaçaõ deverá reduzir-ſe á fórma . . . $(x-a)^m F + (x-a)^{m-1}(y-b) F' + (x-a)^{m-2}(y-b)^2 F'' + (x-a)^{m-3}(y-b)^3 F''' + (y-b)^m T = 0$, deſignando m o gráo de multiplicidade do ponto de que ſe trata, e ſendo F, F′, &c T funções de x e y e de conſtantes.

Com effeito ſe fizermos $x=a$, a equaçaõ reduzindo-ſe entaõ a $(y-b)^m T = 0$ ſerá diviſivel m vezes por $y-b$, e conſeguintemente dará m vezes $y=b$; e ſe fizermos $y=b$, a equaçaõ do meſmo modo dará m vezes $x=a$; o que naõ acontecerá, ſe a equaçaõ naõ ſe reduzir á fórma expoſta.

Iſto

Isto posto, se differenciarmos a nossa equaçaõ m vezes successivamente, fazendo variar tambem, se quizermos, dx e dy, he facil de ver pelo principio da differenciaçaõ, 1º que sómente a ultima equaçaõ differencial conterá termos naõ affectos de $y - b$, ou de $x - a$. Logo todas as vezes que houver hum ponto multiplo, as differenciais primeira, segunda, terceira, &c da equaçaõ, se nellas puzermos em lugar de x e y os seus valores a e b correspondentes ao ponto multiplo, deveráõ aniquilar-se todas, excepto a differencial do gráo m. 2º Que nesta ultima equaçaõ os termos affectos de ddx, ddy, d^3x, &c e de todas as mais differenciais de gráos ulteriores, teráõ todos por factores algumas potencias de $x - a$, ou de $y - b$; e que por conseguinte estas mesmas differenciais haõ de desapparecer no ponto multiplo.

Logo: 1º No ponto multiplo o valor de $\frac{dx}{dy}$ naõ póde vir em outra fórma, que naõ seja a de $\frac{0}{0}$, excepto se buscarmos o dito valor por meio da ultima equaçaõ differencial. 2º Esta ultima equaçaõ como naõ contém nem ddx, nem ddy, nem alguma das differenciais ulteriores, póde resultar immediatamente da equaçaõ proposta, differenciada m vezes successivamente, suppondo sempre dx e dy constantes. 3º Nesta mesma ultima equaçaõ dx e dy subiráõ ao gráo m; e conseguintemente se a dividirmos por dy^m, teremos, depois a resolver, m valores de $\frac{dx}{dy}$, os quais determinaráõ as taugentes, que tem no ponto multiplo os differentes ramos que por elle passaõ.

Se a curva, por exemplo, tiver a equaçaõ $a(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$, differenciaremos duas vezes, e teremos 1° $2ady(y-b) - dx(x-a)^2 - 2xdx(x-a) = 0$, 2° $2addy(y-b) + 2ady^2 - ddx(x-a)^2 - 2dx^2(x-a) - 2xddx(x-a) - 2dx^2(x-a) - 2xdx^2 = 0$. Substituindo a em lugar de x, e b em lugar de y, a primeira equaçaõ differencial se desvanece; e na segunda os termos em que entra ddx e ddy tambem se desvanecem, de maneira que ella se reduz a $2ady^2 - 2adx^2 = 0$.

Tomando porém na segunda differenciaçaõ dx e dy como constantes, virá $2ady^2 - 2dx^2(x-a) - 2dx^2(x-a) - 2xdx^2 = 0$, que na mesma supposiçaõ de $x = a$ se reduz tambem a $2ady^2 - 2adx^2 = 0$, e dá $\frac{dx}{dy} = \pm 1$, indicando assim duas tangentes no ponto em que $x = a$, e $y = b$; logo este ponto he hum ponto duplo; e como entaõ a subtangente $\frac{ydx}{dy} = \pm b$, as duas tangentes fazem com a ordenada hum angulo de 45°. A descriçaõ da curva por meio da equaçaõ confirma isso mesmo; porque dando $y = b \pm (x-a)\sqrt{\frac{x}{a}}$ mostra, que a curva tem dous ramos iguais e semelhantes, os quais se cruzaõ no ponto O onde $x = a$, e $y = b$. A sua figura he a mesma que se vê (*Fig.* 24).

65 Para determinar pois se huma curva, cuja equaçaõ representamos por α, tem pontos multiplos, quais elles saõ, e aonde estaõ, buscaremos a differencial $Adx + Bdy = 0$ da equaçaõ, e fazendo $A = 0$, $B = 0$, teremos tantos pontos multiplos, quantos forem os valores de y, que com os correspondentes de x satisfizerem á equaçaõ α, comprehendendo tambem nestes valores differentes de y aquelles que saõ iguais, mas que ou differem nos sinais, ou correspondem a differentes abscissas. Para determinar depois o gráo da multiplicidade do ponto ou dos pontos achados, passaremos a differenciar α successivamente (suppondo dx e dy constantes) até que pelos valoresde x e de y tirados das equações $A = 0$ e $B = 0$ naõ se aniquilem todos os termos da equaçaõ differencial que se for achando; entaõ o gráo da multiplicidade será da ordem da differencial, em que isso tiver lugar; isto he, o ponto será duplo, se pelos ditos valores naõ se aniquilarem todos os termos da equaçaõ, que provier da segunda differenciaçaõ; triplo, se pelos mesmos valores naõ se aniquilarem todos os termos da equaçaõ resultante da terceira differenciaçaõ; e assim por diante.

Exemplo. *Achar os pontos multiplos da curva, cuja equaçaõ he* $y^4 - axy^2 + bx^3 = 0$.

Differenciando a equaçaõ proposta, vem $4y^3dy - 2axydy - ay^2dx + 3bx^2dx = 0$; e igualando A e B a nada, temos $4y^3 - 2axy = 0$, e $3bx^2 - ay^2 = 0$, as quais daõ $x = 0$, e $y = 0$, $x = \frac{a^2}{6b}$, e $y = \sqrt{\frac{a^3}{12b}}$; mas estes dous ultimos valolores naõ ſatisfazem á equaçaõ propoſta ; logo neſta curva naõ ha ſenaõ o ponto multiplo, que he dado pelas equações $x = o$ e $y = o$, iſto he, naõ ha ponto multiplo ſenaõ na origem das coordenadas.

Para achar a multiplicidade deſte ponto, differenciaremos ſegunda vez, e virá $12y^2dy^2 - 2axdy^2 - 2aydxdy - 2aydxdy + 6bxdx^2 = o$, cujos termos ſe aniquilaõ todos, pondo $x = o$ e $y = o$: logo o ponto achado he mais que duplo, iſto he, paſſaõ por elle mais que dous ramos da curva.

Procedendo pois a terceira differenciaçaõ, teremos $24ydy^3 - 2adxdy^2 - 2adxdy^2 - 2adxdy^2 + 6bdx^3 = o$, que ſuppondo $x = o$ e $y = o$, ſe reduz a $6bdx^3 - 6adxdy^2 = o$. Como eſta terceira differencial naõ ſe aniquila, o ponto he hum ponto triplo, ou (que vem a ſer o meſmo) he commum a tres ramos da curva.

A meſma equaçaõ dá $\frac{dx^3}{dy^3} - \frac{adx}{bdy} = o$, donde ſe tira $\frac{dx}{dy} = o$, e $\frac{dx}{dy} = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}$. O primeiro valor moſtra, que huma das tangentes no ponto multiplo he parallela ás ordenadas, iſto he, que hum dos ramos toca o eixo das ordenadas, por ſer entaõ o ponto multiplo na origem. Os outros dous valores $\sqrt{\frac{a}{b}}$ e $-\sqrt{\frac{a}{b}}$ moſtraõ, que os outros dous ramos fazem cada hum com o eixo das ordenadas hum angulo, cuja tangente he

√

$\sqrt{\frac{a}{b}}$, e que se estendem de ambas as partes deste eixo. Póde-se achar a figura da curva (Alg. 283) pela sua equaçaõ $y = \pm \sqrt{\left[\frac{ax}{2} \pm \frac{x}{2} \sqrt{(aa - 4bx)}\right]}$, e ver-se-há que he a mesma representada na *Figura* 25.

Se a equaçaõ que determina as tangentes naõ tiver todas as raizes reais, como acontece algumas vezes, entaõ dos ramos que passaõ pelo ponto multiplo seráõ tantos invisiveis, quantas forem as raizes imaginarias. Quando os pontos, em que isto acontece, estaõ destacados do curso da curva, chamaõ-se *pontos conjugados*. Porém ainda que estejaõ destacados, sempre se reputa que unem o numero de ramos denotado pelo grão da sua multiplicidade: a curva a que elles pertencem he individuo de huma familia mais extensa, na qual todos estes ramos saõ visiveis; mas fazem-se invisiveis na curva individual, porque alguma das constantes, que entraõ na equaçaõ commua a toda a familia, he nada no caso particular da curva individual. Para exemplo desta aniquilaçaõ dos ramos tomemos a curva, que tem por equaçaõ $m(y-b)^2 - x(x-a)^2 = 0$. A curva da *Figura* 24 he hum caso particular desta, como se achará fazendo $m = a$. Porém se suppuzermos $a = 0$, a folha, que como vimos, havia na *Figura* 24, naõ terá lugar; porque entaõ a equaçaõ se reduz a $m(y-b)^2 - x^3 = 0$, na qual os dous ramos OMZ, OM'Z, que estavaõ por cima do ponto O, naõ teraõ lugar; ou ao menos

nos

nos naõ ſeráõ viſiveis: digo ao menos naõ ſeráõ viſiveis, porque podemos ſuppor que elles ſempre lá exiſtem, ainda que inviſiveis, ſe tomarmos *a* naõ como nada abſoluto, mas ſó como infinitamente pequeno, e aſſim naõ deixará a curva de ter duas tangentes.

66 De tudo o que acabamos de dizer por occaſiaõ dos pontos multiplos, podem-ſe tirar muitas conſequencias uteis.

1° Todas as vezes que huma expreſſaõ algebrica fraccionaria $\frac{B}{A}$ (ſendo A e B funções, por exemplo, de huma ou duas variaveis x e y) he tal que pela ſubſtituiçaõ de certos valores determinados de cada variavel ſe torna em $\frac{o}{o}$, acharemos o valor que entaõ deve ter a expreſſaõ, differenciando ſeparadamente o numerador e o denominador, na ſuppoſiçaõ de ſerem conſtantes as differenças primeiras, e tantas vezes ſucceſſivas, quantas for neceſſario para que elles naõ ſe reduzaõ ao meſmo tempo a nada. Porque podemos ſuppor $\frac{B}{A} = \frac{dx}{dy}$, ou $Adx - Bdy = o$, e aſſim eſtamos no caſo de que temos tratado. Mas as differenciações conſecutivas, que requer o methodo expoſto, daõ . . $dAdx - dBdy = o$ . . $ddAdx - ddBdy = o$ . . $d^3Adx - d^3Bdy = o$, iſto he $\frac{dx}{dy} = \frac{dB}{dA}$ . . $\frac{dx}{dy} = \frac{ddB}{ddA}$ . . $\frac{dx}{dy} = \frac{d^3B}{d^3A}$; logo devemos differenciar ſeparadamente o numerador e o denominador, e a ultima equaçaõ dará o valor ou valores de $\frac{dx}{dy}$.

Exemplos. I. Qual he o valor de $\frac{x^2 - a^2}{x - a}$, quando $x = a$? Temos $B = x^2 - a^2$, $A = x - a$; logo $\frac{dB}{dA} = \frac{2xdx}{dx} = 2x = 2a$.

II. Qual he o valor de $\frac{2a(a-x)\sqrt{\frac{x}{a}}}{(a-x)^2 - 2x(a-x)}$ quando $a = x$? Temos $\frac{dB}{dA} =$

$$\frac{adx(a-x)\frac{1}{\sqrt{ax}} - 2adx\sqrt{\frac{x}{a}}}{-2dx(a-x) - 2dx(a-x) + 2xdx} = \pm 1.$$

Do meſmo modo ſe acharáõ nos caſos particulares os valores indeterminados de $0 \times \infty$, e de $\infty - \infty$; porque $\infty = \frac{a}{0}$, ſendo a huma quantidade finita.

67 2° Todas as vezes que huma equaçaõ de muitas variaveis x, y, z, &c for tal, que a certos valores de huma dellas menos hum correſponda certo numero de valores iguais da ultima, e que o meſmo aconteça a todas ellas, acharemos eſtes valores differenciando ſucceſſivamente a equaçaõ propoſta, outras tantas vezes menos huma, na ſuppoſiçaõ de dx, dy, dz, &c ſerem conſtantes, e igualando a nada os multiplicadores de dx, dy, dz, &c, os de dx^2, $dxdy$, $dzdy$, &c; e aſſim por diante. Se

Se todas eſtas equações concordarem entre ſi, e com a propoſta, os valores de x, y, z, &c que ellas derem, ſeráõ os valores procurados.

68 ADVERTENCIA. Por quanto nos pontos multiplos os valores de x e y, achados depois de ſe igualar o coefficiente de dx e de dy a o, devem ſatisfazer á equaçaõ da curva; ſe ella naõ for dada em termos finitos, ou naõ ſe puder obter neſta fórma pelos methodos do Calculo Integral, nunca poderemos ſegurar-nos da exiſtencia dos ditos pontos pelo calculo ſómente.

Dos Pontos de inflexaõ viſiveis e inviſiveis.

69 SE huma curva BMb (*Fig.* 26) paſſar de convexa a ſer concava, o ponto O, onde acontece eſta mudança, chama-ſe *ponto de inflexaõ*.

Para determinar eſta eſpecie de pontos, obſervaremos que ſendo a tangente em O commua aos ramos OB, Ob, que ſe tocaõ no ponto O, ſe de huma e outra parte do meſmo ponto imaginarmos dous elementos, ou iguais ou deſiguais, a tangente ſerá a continuaçaõ de ambos, de maneira que eſtes elementos OM, Om eſtaráõ em linha recta.

Iſto poſto, tirem-ſe as ordenadas MP, OQ, mp, e ſeja AP $= x$, PM $= y$; ſerá M$r = dx$, O$r = dy$, O$r' = dx + ddx$, $mr' = dy + ddy$. Os triangulos MrO e Orm' ſaõ ſemelhantes; mas ſe ſuppuzermos MO $=$ Om, como he licito, os meſmos triangulos ſeráõ tambem iguais, e teremos $dx = dx + ddx$, e $dy = dy + ddy$, iſto he $ddx = \text{o}$, e $ddy = \text{o}$.

Logo

Logo para determinar os pontos de inflexaó ſimples, differenciaremos duas vezes ſucceſſivamente a equaçaó da curva, ſuppondo dx e dy conſtantes na ſegunda differenciaçaó; entaó eliminando dx ou dy de ambas as equações differenciais virá huma terceira, que ſendo primeiramente dividida por dy^2 ou por dx^2, e combinando-ſe depois com a equaçaó da curva, dará os valores de x e y, que convém ao ponto de inflexaó.

Exemplos. I. Na curva, cuja equaçaó he $x^3 - by^2 = a^3$, vem por primeira differenciaçaó . . . $3x^2dx - 2bydy = 0$, e por ſegunda . . . $6xdx^2 - 2bdy^2 = 0$, as quais daó $6xdx^2 - \frac{18bx^4dx^2}{4b^2y^2} = 0$, iſto he $4by^2 - 3x^3 = 0$. Comparando pois eſta com a propoſta, temos no ponto da inflexaó $x = a\sqrt[3]{4}$, $= a\sqrt{\frac{3a}{b}}$.

II. Na curva, cuja equaçaó he $y = a + (x-a)^{\frac{3}{5}}$, differenciando duas vezes conſecutivamente teremos . . . $dy = \frac{3}{5}(x-a)^{-\frac{2}{5}}dx$ . . . $0 = -\frac{6}{25}(x-a)^{-\frac{7}{5}}dx^2$; como eſta dá $dx = 0$, virá $(x-a)^{\frac{2}{5}} = 0$; logo $x = a = y$ ſaó os valores que correſpondem ao ponto de inflexaó.

Como achámos $dx = 0$, a tangente no ponto de inflexaó deſta curva he parallela ás ordenadas.

70 O methodo, que ordinariamente ſe dá para achar os pontos de inflexaõ, conſiſte em differenciar duas vezes a equaçaõ da curva, ſuppondo dx conſtante, e igualar ddy a nada, ou ao infinito. Ainda que eſta regra conduz aos meſmos reſultados, com tudo de propoſito naõ quizemos ſervir-nos della; porque na realidade o que entaõ he infinito he $\frac{ddy}{dx^2}$, e naõ ddy, que tanto neſte caſo como em outro qualquer ſó póde ſer nada; mas como dx he nada nos pontos de inflexaõ, em que he coſtume ſuppor ddy infinito, $\frac{ddy}{dx^2}$ he realmente $\frac{o}{o^2}$, que com effeito he infinito, tomando o por huma quantidade infinitamente pequena.

71 Quando a curva tiver muitos pontos de inflexaõ, a equaçaõ final paſſará do primeiro gráo, e dará muitos valores de x: ſuccede iſto nas curvas de curſo tortuoſo, como na *Figura* 27.

72 Se concebermos que os dous pontos de inflexaõ O e O′ (*Fig.* 27) ſe avizinhaõ cada vez mais, até que a ſua diſtancia ſeja infinitamente pequena; entaõ ſe repreſentarmos como acima os elementos OM, Om, O′M′, O′m', os dous lados Om e M′O′ eſtaráõ hum ſobre o outro; e como no ponto de inflexaõ MO eſtá em linha recta com Om, e M′O′ com O′m', ſegue-ſe que haverá tres elementos conſecutivos em linha recta.

Sejaõ Mm, mm', $m'm''$ (*Fig.* 28) eſtes tres elementos, de cujas extremidades ſe abaixem as ordenadas MP, mp, $m'p'$, $m''p''$; tirem-ſe Mr, mr',

mr', $m'r''$ parallelas a AP. Supponhamos AP $= x$, PM $= y$; teremos M$r = dx$, $mr = dy$, $mr' = dx + ddx$, $r'm' = dy + ddy$, $m'r'' = dx + 2ddx + d^3x$, $r''m'' = dy + 2ddy + d^3y$. Eſtando pois os tres elementos em linha recta, os tres triangulos Mrm, $mr'm'$, $m'r''m''$ saõ ſemelhantes; e ſe uſarmos da liberdade que temos de ſuppor os tres elementos iguais, os tres triangulos ſeraõ iguais, e aſſim teremos $ddx = 0$, $ddy = 0$, $d^3x = 0$, $d^3y = 0$. Logo em geral: differenciaremos a equaçaõ da curva tantas vezes, ſuppondo dx e dy conſtantes, quantos forem os pontos de inflexaõ; entaõ tirando da primeira equaçaõ differencial o valor de dx para o ſubſtituir em todas as outras, e dividindo depois a ſegunda por dy^2, a terceira por dy^3, &c teremos outras tantas equações, que devem ter lugar com a propoſta, para que haja huma, duas, tres, &c inflexões reunidas; iſto he, os valores de x e y tirados de duas equações deſtas, devem ſatisfazer ás outras em que ſe haõ de ſubſtituir.

Quando as inflexões reunidas naõ forem ſenaõ duas, a inflexaõ ſerá inviſivel; mas ſe forem tres, a inflexaõ ſerá viſivel. Em geral a inflexaõ he viſivel ou inviſivel, conforme for par ou impar o numero das inflexões reunidas. Logo, repreſentando geralmente a equaçaõ de huma curva por E $= 0$, para qua haja m pontos reunidos de inflexaõ, he neceſſario que differenciando E, $m + 1$ vezes, ſuppondo dx e dy conſtantes, todas as differenciais d^2x, d^2y, d^3x, d^3y, &c até o gráo $m + 1$ ſejaõ nada; e a inflexaõ ſerá viſivel ou inviſivel, conforme m for par ou impar.

73 Para determinar agora os pontos de inflexaõ, quando as ordenadas partem de hum ponto fixo, tirem-se (*Fig.* 29) as ordenadas CM, Cm, Cm' a dous elementos da curva, os quais devem estar em linha recta no ponto de inflexaõ, e descrevaõ-se os arcos Mr, mr', que podemos suppor perpendiculares a Cm, e Cm'. Isto posto, como $Cmm' + rmM = 180°$, ou $Cmr' + r'mm' + 90° - rMm = 180°$, será $r'mm' - rMm = 90° - Cmr' = mCr'$, porque o triangulo $Cr'm$ he rectangulo em r'; logo a differença entre $r'mm'$ e rMm he só o angulo mCr'.

Tire-se mn que faça o angulo $m'mn = mCr'$; será o angulo $nmr' = mMr$, e por conseguinte os triangulos tmr', mMr seraõ semelhantes. Supponhamos $CM = y$, $Mr = dx$, $Mm = ds$; teremos $mr = dy$, $mr' = dx + ddx$, $m'r' = dy + ddy$, $mm' = ds + dds$. Descrevendo do ponto m com o raio mm' o arco $m'n$, os sectores semelhantes Cmr', nmm' daráõ $Cm\,(y + dy) : mr'\,(dx + ddx) :: mm'\,(ds + dds) : m'n = \frac{dsdx}{y}$; mas pelos triangulos semelhantes $m'tn$, mrM, e $mr't$ temos $Mr\,(dx) : Mm\,(ds) :: m'n\left(\frac{dsdx}{y}\right) : m't = \frac{ds^2}{y}$, e $Mr\,(dx) : rm\,(dy) :: mr'\,(dx + ddx) : r't\,(dy + ddy - m't)$; logo $dxddy - dyddx - \frac{dxds^2}{y} = 0$.

Esta

Esta formula coincide com a das coordenadas parallelas, quando se suppõe que o ponto C está a huma distancia infinita, e os dx e dy se tomaõ como constantes; porque entaõ y he infinito, e o termo $dxds^2$ deve desprezar-se. Se suppuzermos dx constante, a formula será $ddy = \frac{ds^2}{y}$; mas naõ deve esquecer esta supposiçaõ, quando se differenciar a equaçaõ da curva. Por outra parte, como os dx saõ arcos descritos com hum raio variavel, podemos referillos a arcos descritos com hum raio constante CO, assim como se costuma de ordinario (40), pondo em lugar de dx o seu valor, que he sempre facil de achar, advertindo na semelhança dos sectores CSs, CMr.

Naõ nos demoraremos em dar nesta mesma hypothese as formulas para achar os outros pontos de inflexaõ, porque presentemente naõ póde haver nisso difficuldade.

Reflexaõ sobre hum Maximum & Minimum.

74. SEja a funçaõ F de huma ou muitas variaveis susceptivel de *maximum* ou *minimum*. Considerando esta funçaõ como ordenada ou abscissa de huma curva, isto he, suppondo $x = \text{F}$, vê-se pelo que dissemos sobre os pontos de inflexaõ, que se $d\text{F}$ ou dx he o todas as vezes que ha *maximum* ou *minimum*, a inversa nem sempre he verdadeira; porque achámos (70) hum caso em que era $dx = 0$ no ponto de inflexaõ, isto he, em que a tangente era parallela ás ordenadas, e nesse caso nem a orde-

denada, nem a abſciſſa ſaõ *maximum*, nem *minimum*. Aſſim para nos certificarmos da exiſtencia do *maximum* ou do *minimum*, devemos differenciar muitas vezes ſucceſſivamente a quantidade, fazendo conſtantes as differenças primeiras de cada variavel; entaõ ſe os valores que as variaveis tem no ponto buſcado do *maximum* ou *minimum*, aniquilarem dF, ddF, e naõ d^3F, naõ haverá *maximum* na curva, cuja equaçaõ he $x = F$, mas ſim hum ponto viſivel de inflexaõ, e conſeguintemente F naõ terá *maximum* nem *minimum*. Porém ſe d^3F ſe aniquilar, e naõ d^4F, haverá *maximum* ou *minimum*. Em geral: Todas as vezes que a ultima differencial que ſe aniquila for de grão impar, haverá *maximum* ou *minimum* na quantidade.

Dos pontos de Reverſaõ, e das differentes eſpecies de contacto dos ramos de huma curva.

75 DOus ramos de curva, quando chegaõ a tocar-ſe, ou oppõem hum ao outro as ſuas convexidades (*Fig.* 30), ou ſe abraçaõ (*Fig.* 31); e em ambos os caſos póde ſucceder, ou que continuem no ſeu curſo de huma e outra parte do ponto do contacto, ou que parem de repente neſſe meſmo ponto (*Fig.* 32, e 33). Neſte ultimo caſo o ponto do contacto chama-ſe *ponto de reverſaõ*, o qual he de *reverſaõ ſimples* (*Fig.* 32), e de *reverſaõ de bico* (*Fig.* 33). Quando ſe reunem mais que dous ramos, eſtas differentes variedades podem achar-ſe juntamente no meſmo ponto, e além dellas huma infinidade de outras; podem, por exemplo, os ra-

ramos ao tocar-ſe ter huma ou muitas inflexões. Póde acontecer, que ſe achem reunidos hum ponto de inflexaõ e hum ponto de reverſaõ, e pareçaõ formar hum ſó ponto de reverſaõ. Aſſim ſe o ramo EBD (*Fig.* 34), que fórma em E huma reverſaõ ſimples com o ramo EC, tiveſſe hum ponto de inflexaõ em B, quando eſte ſe achaſſe infinitamente vizinho do ponto E, naõ haveria ſenaõ a apparencia de huma reverſaõ de bico.

Naõ nos demoraremos em dar o caracter de cada variedade; obſervaremos ſómente, que quando muitos ramos de curva ſe tocaõ, 1° o ponto em que iſto acontece, como he multiplo, ha de ter as condições mencionadas (64). 2° A equaçaõ que ſerve para determinar as tangentes dos pontos multiplos, terá entaõ tantas raizes iguais, quantos forem os ramos que ſe tocaõ, porque neſſe caſo ha outras tantas tangentes reunidas. Aſſim na reverſaõ ſimples ſaõ neceſſarias as meſmas condições dos pontos duplos, e a equaçaõ, que dá as tangentes ou $\frac{dx}{dy}$, deve ter duas raizes iguais. Quem deſejar inſtruir-ſe mais neſta materia, póde conſultar a *Analyſe das linhas curvas de Cramer. Genebra* 1750.

Dos Raios da Curvatura, ou da Evoluta.

76 SE de cada ponto M, m, m', &c de huma curva qualquer AM (*Fig.* 35) ſe levantarem as perpendiculares MN, mn, $m'n'$, &c; as interſecções conſecutivas n, n', &c formaráõ huma curva, a que ſe dá o nome de *evoluta*; porque ſe imagi-

ginarmos applicado a ella hum fio ABN, que a toque na origem B, entaõ, desenvolvendo-se a curva, a extremidade A do fio descreverá a curva AM. Com effeito na evoluçaõ de Nn, por exemplo, considerando este arco como huma pequena recta, o fio MNn descreve ao redor de n como centro o arco Mm, ao qual he necessariamente perpendicular, porque o raio de hum circulo he perpendicular á sua circumferencia. Donde se vê 1º que o comprimento da tangente MN da evoluta he igual a AB + BN; logo a curva BN he rectificavel. 2º Que o ponto n se póde considerar como o ponto de reuniaõ de duas normais infinitamente vizinhas MN, mn'. Cada linha MN se chama *raio da evoluta*, ou *raio da curvatura*, ou tambem *raio osculador*.

77 Isto posto, para determinar o valor do raio osculador MN em qualquer ponto da curva dada AM, imaginem-se dous elementos consecutivos Mm, mm' (*Fig.* 36), duas perpendiculares MN, mN, e produza-se o elemento Mm. No triangulo NMm rectangulo em M teremos 1 : *sen* MNm ou MNm :: mN ou MN : Mm; logo

$$MN = \frac{Mm}{MNm} = \frac{Mm}{umm'} = \text{ao elemento da curva}$$

va dividido pelo angulo do contacto.

Se conduzirmos Mr, mr' parallelas a AP, está claro, que $umm' = \mp d\,(rMm)$, tendo lugar o sinal — quando a curva he concava como no nosso caso, e o sinal + quando a curva he convexa; e como (25, e 33) $d\,(rMm) = \frac{dx^2}{ds^2}\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)$;

sup-

ſuppondo Mm ou $\sqrt{(dx^2+dy^2)} = ds$, teremos

$$MN = \frac{ds}{\mp\frac{dx^2}{ds^2}d\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{ds^3}{\mp dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}.$$

Eſta formula dos raios da evoluta no caſo das ordenadas ſerem parallelas entre ſi, póde ter differentes fórmas, conforme ſe tomar huma ou outra differencial por conſtante. Se tomarmos o elemento ds da curva por conſtante, iſto he, ſe ſuppuzermos $dds = 0$, a equaçaõ $ds^2 = dx^2 + dy^2$ ſendo differenciada dará $dyddy = - dxddx$; logo $MN = \frac{dsdy}{\pm ddx}$. Se ſuppuzermos dy conſtante, ou $ddy = 0$, virá $MN = \frac{ds^3}{\pm dyddx}$. Se dx porém for a differencial conſtante, ſerá $MN = \frac{ds^3}{\mp dxddy}$.

Exemplos. I. No circulo, cuja equaçaõ he $yy = 2ax - xx$, teremos $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$; logo $ds = \sqrt{(dx + dy^2)} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, e $d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ $= d\left(\frac{a-x}{\sqrt{(2ax - xx)}}\right) = \frac{-a^2dx}{(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}}$. Subſtituindo pois eſtes valores na formula $\frac{ds^3}{-dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$,

 te-

teremos $\dfrac{\dfrac{a^3dx^3}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{a^2dx^3}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}} = a$; quer dizer que o raio osculador he ſempre da meſma grandeza, e igual ao raio do circulo, de maneira que a evoluta ſe reduz a hum ponto, que he o centro, como já ſabemos.

II. Na parabola temos $y^2 = px$, que dá $dy = \frac{1}{2}\,dx\,\sqrt{\frac{p}{x}}$; logo $ds = \frac{dx}{2\sqrt{x}}\,\sqrt{(4x+p)}$, $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{p}}{x\sqrt{x}}\,dx$; e a formula ſe tornará

em $\dfrac{\dfrac{dx^3(4x+p)^{\frac{3}{2}}}{8x^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{dx^3p^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}}} = \dfrac{4x+p}{2}\sqrt{\dfrac{4x+p}{p}}$. Se repreſentarmos a normal por n, teremos $n = \frac{1}{2}p\sqrt{\frac{4x+p}{p}}$ (Alg. 364) ; logo o raio da evoluta $= \dfrac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$; reſultado que tem lugar em todas as ſecções conicas.

III. Na cycloide (*Fig.* 37) temos $y = \text{AS} + \sqrt{(2ax-xx)}$, ſendo AP $= x$, PM $= y$, AB

$= 2a$; logo $dy = \frac{ad(\textit{sen}\ \mathrm{AS})}{\textit{cos}\ \mathrm{AS}} + \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$
$= \frac{a}{a-x} \cdot \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}} + \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}} =$
$dx\sqrt{\left(\frac{2a - x}{x}\right)}$, $ds = dx\sqrt{\frac{2a}{x}}$, $d\left(\frac{dy}{dx}\right) =$
$\frac{-adx}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{(2a - x)}}$, e por conſeguinte o raio da evoluta $\mathrm{MN} = 2\sqrt{2a(2a - x)} = 2\mathrm{BS}$. Vê-ſe pois 1° que o raio he nullo no ponto C ; e por conſeguinte a evoluta paſſa por eſte ponto. 2° Que o raio no ponto A he o dobro de AB.

78 Para acharmos a equaçaõ da evoluta BN (*Fig.* 38), forme-ſe o rectangulo PONQ, e ſeja $\mathrm{MN} = \mathrm{R}$, $\mathrm{AQ} = u$, $\mathrm{QN} = t$, $\mathrm{AP} = x$, $\mathrm{PM} = y$, o elemento da curva $\mathrm{AM} = ds$. No triangulo rectangulo MON temos $1 : \textit{sen}\ \mathrm{MNO}$ $\left(\frac{dx}{ds}\right) :: \mathrm{MN}\ (\mathrm{R}) : \mathrm{MO} = \frac{\mathrm{R}dx}{ds}$; logo $t = \frac{\mathrm{R}dx}{ds} - y$. Do meſmo modo NO ou $\mathrm{PQ} = \frac{\mathrm{R}dy}{ds}$; logo $u = \frac{\mathrm{R}dy}{ds} + x$: expreſsões que por meio da equaçaõ da curva daráõ a relaçaõ entre u e t.

Se por exemplo a curva AM for huma parabola, cuja normal CM $= n$, teremos R $= \frac{n^3}{\frac{1}{4}p^2}$, $\frac{dx}{ds} = \frac{PM}{CM} = \frac{y}{n}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{1}{2}p}{n}$; e consequintemente $t = \frac{4n^2y}{p^2} - y = \frac{4xy}{p} = \frac{4x\sqrt{px}}{p}$, e $u = \frac{2n^2}{p} + x = 3x + \frac{1}{2}p$, a qual dá $x = \frac{u - \frac{1}{2}p}{3}$.
Logo se fizermos $u - \frac{1}{2}p = z$, isto he, se contarmos as abscissas do ponto B, teremos $x = \frac{1}{3}z$, e por conseguinte $27pt^2 = 16z^3$. Donde se vê, que a evoluta NB da parabola ordinaria he a segunda parabola cubica, cujo parametro he igual a $\frac{27}{16}$ do parametro da parabola dada. Está claro, que a evoluta da parabola toda MAM′ tem hum ponto de reversaõ em B.

Do mesmo modo se achará, que a evoluta da cycloide CA (*Fig.* 37) he outra cycloide igual CE, mas em posiçaõ inversa.

79 Quando as ordenadas partem de hum ponto fixo *Fig.* 39, para achar o valor de $m'mu$, que se deve substituir na formula MN $= \frac{Mm}{m'mu}$, descreveremos os arcos Mr, mr', e teremos $m'mu = r'mu - m'mr'$; mas (73) $r'mu = m\mathrm{C}r' + r\mathrm{M}m = \mathrm{MC}r + r\mathrm{M}m$; logo $m'mu = \mathrm{MC}r + r\mathrm{M}m - r'mm' = \mathrm{MC}r - d\,(m\mathrm{M}r)$.

Isto

Isto posto, se for $Mr = dx$, e $CM = y$, teremos $MCr = \frac{dx}{y}$; logo $m'mu = \frac{dx}{y} \mp \frac{dx^2}{ds^2} d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, conforme a curva for concava ou convexa, e conseguintemente $MN = \frac{yds^3}{ds^2dx \mp ydx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. Quando $y = \infty$, isto he quando as ordenadas saõ parallelas, vem $MN = \frac{ds^3}{\mp dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, como já achámos.

Seja a curva CKM (*Fig.* 40) a *Spiral logarithmica*, cuja natureza he tal, que conduzindo de qualquer dos seus pontos M a recta MC ao centro C, e a tangente MT, o angulo CMT seja sempre o mesmo, ou $\frac{mr}{Mr} = \frac{dy}{dx} = \text{Const.}$ Logo teremos o raio osculador $= \frac{yds}{dx}$. Se tirarmos pois CB perpendicular a MC, e MB perpendicular á tangente MT, teremos $Mr\ (dx) : Mm\ (ds) :: CM\ (y) : MB = \frac{yds}{dx}$; logo o raio $=$ MB. Como produzindo BC, temos $CBM = CMT$, a evoluta CBD he a mesma spiral CKM em differente posiçaõ. Vê-se pois, que a tangente MB he de de comprimento igual á ſpiral CDB, e por conſeguinte MT = ao arco CBM.

80 Os raios da evoluta ſervem para medir a curvatura de qualquer curva em cada ponto. Com effeito, como na evoluçaõ do elemento N*n* da curva BN (*Fig.* 35) o fio deſcreve o pequeno arco *mm'*, ſegue-ſe que eſte meſmo arco tem huma curvatura igual á do circulo do raio *mn*; e conſeguintemente na expreſſaõ do raio da evoluta temos para cada ponto o raio do circulo, que neſſe meſmo ponto he de huma curvatura igual á da curva. Logo, pois que as curvaturas dos circulos eſtaõ na razaõ inverſa dos ſeus raios, com muita facilidade podemos comparar a curvatura de huma curva em qualquer ponto com a curvatura da meſma, ou de outra curva em outro qualquer ponto. Por exemplo, ſe quizeſſemos comparar a curvatura da parabola na ſua origem com a curvatura, que ella tem na extremidade da ordenada que paſſa pelo fóco, fariamos ſucceſſivamente na expreſſaõ do raio da evoluta $x = 0$, e $x = \frac{1}{4}p$ (Alg. 356), o que daria $\frac{1}{2}p$, e $p\sqrt{2}$; logo a curvatura no primeiro ponto he para a curvatura no ſegundo :: $p\sqrt{2} : \frac{1}{2}p :: 2\sqrt{2} : 1$. Sobre as propriedades das evolutas póde conſultar-ſe a *Analyſe dos infinitamente pequenos do Marquez de l'Hopital*, onde além diſſo ſe acharáõ outras applicações do Calculo Differencial.

81 ADVERTENCIA. Da ſuppoſiçaõ que fizemos (70) de eſtarem em linha recta os dous elementos proximos de huma curva no ponto de inflexaõ, parece ſeguir-ſe, que neſte ponto o raio da

evo-

evoluta he infinito ; porque entaõ as duas perpendiculares saõ parallelas. Sem embargo, em muitas curvas o raio da evoluta no ponto de inflexaõ he nullo, como por exemplo na parabola, cuja equaçaõ he $y = x^{\frac{3}{5}}$.

He porém de advertir, que na nossa supposiçaõ naõ ha cousa que determine a grandeza dos dous elementos consecutivos ; logo se cada hum delles se reduzir a hum ponto, nem por isso deixaráõ de estar ambos em linha recta, e as duas perpendiculares cahindo huma sobre outra, se encontraráõ no mesmo ponto donde partem. Succede isto nas curvas, em que o raio da evoluta $=$ o no ponto de inflexaõ ; porque sendo entaõ a curvatura infinita, cada hum dos dous elementos consecutivos se confunde com a tangente infinitamente menos que em outro qualquer caso, e por conseguinte ambos elles se devem considerar como dous pontos reunidos. Logo podem os dous elementos estar em linha recta, sem que por isso o raio da evoluta seja infinito ; mas daqui mesmo se segue tambem, que no ponto de inflexaõ o raio da evoluta he sempre ou infinito, ou nullo (70).

Como *o raio da evoluta he positivo no ponto do* maximum, *e negativo no ponto do* minimum, segue-se que para distinguir se huma quantidade y funçaõ de x he hum *maximum*, ou hum *minimum*, examinaremos se a expressaõ $\frac{ddy}{dx^2}$ he positiva, ou negativa ; no primeiro caso y será hum *minimum*, e no segundo hum *maximum*.

Ou-

Outras applicações do Calculo Differencial.

82 I. SUpponhamos que ſe pede o valor de $(a+x)^m$. Repreſentando eſte valor pela equaçaõ

$$(a+x)^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c$$

differenciemo-la conſecutivamente ; e dividindo por dx, teremos

$$m(a+x)^{m-1} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \&c$$

$$m(m-1)(a+x)^{m-2} = 2C + 2.3\,Dx + \&c$$

$$m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3} = 2.3\,D + \&c$$

e aſſim por diante.

Como todas eſtas equações devem ſer ſempre verdadeiras para qualquer valor de x, façamos $x=0$; virá . . . $A = a^m$ . . . $B = m\,a^{m-1}$ . . . $C = m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}$ . . . $D = m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^{m-3}$ . . . &c ; logo

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}x^2 + m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^{m-3}x^3 + \&c.$$

De outra ſorte. Seja $(a+x)^m = y$, teremos $ly = ml(a+x)$, que dá $(a+x)\frac{dy}{dx} - my = 0$.

Sup-

Suppondo $y = A + Bx + Cx^2 + \&c$, vem $\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + \&c.$; valores que ſendo ſubſtituidos na equaçaõ $(a + x)\frac{dy}{dx} - my = 0$, daõ

$$\begin{aligned} aB + 2aCx + 3aDx^2 + \&c = 0 \\ - mA + \quad Bx + \quad 2Cx^2 \\ - \quad mBx - \quad mCx^2 \end{aligned}$$

Logo $aB - mA = 0$ . . . $2aC + B - mB = 0$ . . . $3aD + 2C - mC = 0$; e como ſendo $x = 0$, he $y = a^m$, teremos $A = a^m$ . . . $B = m\,a^{m-1}$ . . . $C = m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}$ . . . $D = m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^{m-3}$; e por conſeguinte

$$(a + x)^m = a^m + ma^{m-1}x + m.\frac{m-1}{2}.a^{m-2}x^2 + \&c.$$

Se $x = \frac{-az}{a+z}$, a noſſa formula dará $\frac{a^{2m}}{(a+z)^m} = a^m + ma^{m-1}.\frac{-az}{a+z} + m.\frac{m-1}{2}a^{m-2}.\frac{a^2z^2}{(a+z)^2} + \&c$, iſto he, dividindo por a^{2m}, e pondo n em lugar de $-m$,

$$(a + z)^n = a^n\left(1 + n.\frac{z}{a+z} + n.\frac{n+1}{2}\frac{z^2}{(a+z)^2} + \&c\right)$$

for-

formula em que a ſerie pára, quando n he numero inteiro negativo.

II. Em geral: Trate-ſe de deſenvolver huma funçaõ y de x em huma ſerie da fórma $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c$. Exprimindo eſta hypotheſe, e differenciando-a ſucceſſivamente na ſuppoſiçaõ de dx conſtante, teremos as equações ſeguintes para determinar os coefficientes.

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c$$

$$\frac{dy}{dx} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \&c$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2C + 2.3\,Dx + 3.4\,Ex^2 + \&c$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2.3\,D + 2.3.4\,Ex + \&c$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2.3.4\,E + \&c$$

e aſſim por diante.

Fazendo pois $x = 0$, e repreſentando os valores que tem entaõ y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, &c reſpectivamente por V, V', V'', V''', V'''', &c teremos $A = V$, $B = V'$, $C = \frac{V''}{2}$, $D = \frac{V'''}{2.3.}$, $E = \frac{V''''}{2.3.4}$, &c; logo

$$y = V + V'x + \frac{V''}{2}x^2 + \frac{V'''}{2.3}x^3 + \frac{V''''}{2.3.4}x^4 + \&c.$$

Moſtremos o uſo deſte Theorema em alguns exemplos.

1º Pergunta-ſe qual he o valor de $l(a+x)$. Neſte caſo temos $y = l(a+x) \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{1}{a+x}$. $\ldots \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{(a+x)^2} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{(a+x)^3} \ldots \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{-2.3}{(a+x)^4}$ &c. Pondo em todas eſtas expreſsões $x=0$, acharemos $V = la \ldots V' = \frac{1}{a}$. $\ldots V'' = \frac{-1}{a^2} \ldots V''' = \frac{2}{a^3} \ldots V'''' = \frac{-2.3}{a^4}$ &c; logo

$$l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c.$$

Semelhantemente

$$l(a-x) = la - \left(\frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^4}{4a^4} + \&c\right).$$

Adiante veremos o modo de deduzir deſtas ſeries outras mais convergentes.

2º Querendo achar o valor de $ſen\ x$, teremos

mos . . . $y = sen\, x$ . . . $\frac{dy}{dx} = cos\, x$ . . . $\frac{d^2y}{dx^2} = -sen\, x$ . . . $\frac{d^3y}{dx^3}$ . . . $= -cos\, x$ . . . $\frac{d^4y}{dx^4} = sen\, x$ &c ; logo $V = 0$ . . . $V' = 1$ . . . $V'' = 0$ . . . $V''' = -1$ . . . $V'''' = 0$ &c, e conseguintemente

$$sen\, x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

O mesmo methodo dá

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \&c.$$

3° Para achar o valor de a^x, teremos . . . $y = a^x$ . . . $\frac{dy}{dx} = a^x la$ . . . $\frac{d^2y}{dx^2} = a^x l^2a$ . . . $\frac{d^3y}{dx^3} = a^x l^3a$; logo $V = 1$ . . . $V' = la$ . . . $V'' = l^2a$ . . . $V''' = l^3a$ . . . $V'''' = l^4a$, e por conseguinte

$$a^x = 1 + x\,la + \frac{x^2 l^2 a}{2} + \frac{x^3 l^3 a}{2.3} + \frac{x^4 l^4 a}{2.3.4} + \&c.$$

Se a for o numero cujo logarithmo $= 1$, teremos $x = ly$; logo

$$y = 1 + ly + \frac{l^2 y}{2} + \frac{l^3 y}{2.3} + \frac{l^4 y}{2.3.4} + \&c.$$

III.

III. Mais geralmente: Seja

$$y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} + \&c.$$

Suppondo $x^n = t$, e $A + Bt + Ct^2 + \&c = u$; e reprefentando por V o valor de u quando $t = 0$, e por V', V'', V''', &c os valores das quantidades $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^3u}{dt^3}$, &c quando fe faz $t = 0$, e $u = V$, teremos $A = V$, $B = V'$, $C = \frac{V''}{2}$, $D = \frac{V'''}{2.3}$, $E = \frac{V''''}{2.3.4}$ &c, e confeguintemente

$$y = Vx^m + V'x^{m+n} + \frac{V''}{2} x^{m+2n} + \frac{V'''}{2.3} x^{m+3n}$$

$$+ \frac{V''''}{2.3.4} x^{m+4n} + \&c.$$

IV. Suppondo como até agora, que y he huma funçaõ de x, eftá claro, que quando x fe muda em $x + dx$, y torna-fe em $y + dy$, e que fe x varia uniformemente, e fe faz $x + 2dx$, y vem a fazer-fe $y + dy + d(y + dy) = y + 2dy + ddy$. Do mefmo modo quando x fe muda em $x + 3dx$, y fe torna em $y + 3dy + 3ddy + d^3y$; e em geral fe na expreffaõ de y fe fubftituir $x + ndx$ em lugar de x, y fe tornará em $y + ndy + n. \frac{n-1}{2} ddy$

+

$$+ n. \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} d^3y + n. \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3}$$

$. \frac{n-3}{4} d^4y +$ &c. Logo ſe for $ndx =$ á quantidade finita q, n ſerá infinito ; e entaõ deſignando por Y o valor, que reſulta para y de x ſe fazer $x \pm q$, ou de ſe ſubſtituir $x \pm q$ em lugar de x, teremos

$$Y = y \pm q \frac{dy}{dx} + \frac{q^2}{2} \frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{q^3}{2.3} \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{q^4}{2.3.4} \frac{d^4y}{dx^4} \pm \&c.$$

1° Para fazermos algumas applicações, ſupponhamos que he conhecido o arco, cujo ſeno he x, e queremos ſaber qual he o arco correſpondente ao ſeno $x + q$. Temos neſte caſo $y =$

$$Arc. sen\, x \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \ldots \frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1+2xx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}, \&c.$$ Logo

$$Arc. sen\,(x+q) = Arc. sen\, x + \frac{q}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q^2x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{q^3(1+2xx)}{2.3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Do

Do mesmo modo

$$Arc.\,sen\,(x-q) = Arc.\,sen\,x - \frac{q}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{q^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{q^3(1+2xx)}{2.3(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

2° Seja agora $y = Arc.\,cos\,x$; teremos $\frac{dy}{dx}$

$$= \frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \ldots \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} =$$

$$- \frac{1+2xx}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$ &c. Logo

$$Arc.\,cos\,(x \pm q) = Arc.\,cos\,x \mp \frac{q}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{q^2 x}{2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mp \frac{q^3(1+2xx)}{2.3\,(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} - \&c.$$

3° Se for $y = sen\,x$, que dá $\frac{dy}{dx} = cos\,x \ldots \frac{d^2y}{dx^2} = -sen\,x \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = -cos\,x$, &c, teremos

$$sen\,(x+q) = sen\,x + q\,cos\,x - \frac{1}{2}q^2\,sen\,x - \frac{1}{6}q^3\,cos\,x$$

$$+ \frac{1}{24}q^4\,sen\,x + \&c$$

sen

$$sen\,(x-q) = sen\,x - q\,cos\,x - \frac{1}{2}q^2\,sen\,x + \frac{1}{6}q^3\,cos\,x + \frac{1}{24}q^4\,sen\,x - \&c.$$

Do mesmo modo

$$cos\,(x+q) = cos\,x - q\,sen\,x - \frac{1}{2}q^2\,cos\,x + \frac{1}{6}q^3\,sen\,x + \frac{1}{24}q^4\,cos\,x - \&c$$

$$cos\,(x-q) = cos\,x + q\,sen\,x - \frac{1}{2}q^2\,cos\,x - \frac{1}{6}q^3\,sen\,x + \frac{1}{24}q^4\,cos\,x + \&c.$$

Quando $x = 0$, as formulas $sen\,(x+q)$ e $cos\,(x+q)$ coincidem com as que acima deduzimos.

4° Seja $y = l\,sen\,x$; teremos $\frac{dy}{dx} = \frac{cos\,x}{sen\,x}$. . . $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{sen^2 x}$. . . $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2cos\,x}{sen^3 x}$ &c; e conseguintemente

$$l\,sen\,(x \pm q) = l\,sen\,x \pm \frac{q\,cos\,x}{sen\,x} - \frac{q^2}{2\,sen^2 x} \pm \frac{q^3\,cos\,x}{3\,sen^3 x}\ \&c.$$

Com igual facilidade se achará $l\,cos\,(x \pm q)$, $l\,tang\,(x \pm q)$, e $l\,cot\,(x \pm q)$.

ELE-

ELEMENTOS

DE

CALCULO INTEGRAL.

83 O Methodo inverſo do Calculo Differencial, iſto he, o methodo que enſina a voltar das quantidades differenciais para as finitas, de cuja differenciaçaõ aquellas reſultáraõ, chama-ſe *Calculo Integral.*

A letra ∫ poſta antes de huma quantidade differencial indica o ſeu *integral*, de maneira que eſta letra he equivalente ás palavras *integral de*, ou *ſoma de*; porque *integrar*, ou *tomar o integral*, ou tambem *achar a fluente* naõ he mais do que ſomar todos os aumentos infinitamente pequenos, que huma quantidade deve receber para chegar a hum eſtado finito determinado.

Se todas as quantidades differenciais procedeſſem de huma differenciaçaõ exacta, cada huma teria o ſeu integral; mas como por quantidade differencial ſe entende qualquer quantidade affecta de dx, dy, &c, ha muitas que naõ ſaõ ſuſceptiveis de integraçaõ, porque naõ podem reſultar de differenciaçaõ alguma, como por exemplo xdy, $xdy - ydx$.

Ha outras differenciais que naõ ſe podem integrar ſenaõ por approximaçaõ, como ſaõ as differenferenciais dos logarithmos, dos arcos de circulo, e em geral das quantidades que se chamaõ transcendentes. Trataremos primeiramente das differenciais, que tem integraçaõ exacta ou algebrica.

Das Differenciais de huma variavel susceptiveis de integraçaõ algebrica; e primeiramente das differenciais monomias.

84 REGRA fundamental. *Para integrar as differenciais monomias aumentaremos primeiramente com huma unidade o expoente da variavel, e dividiremos depois pelo expoente assim aumentado, e pela differencial da variavel.*

Com effeito, aqui naõ se trata de mais que de achar a quantidade que havia sido differenciada; logo devemos applicar huma regra inversa da differenciaçaõ (10).

Como todo o termo constante que entra em qualquer quantidade naõ aparece mais depois da differenciaçaõ, ajuntaremos sempre ao integral huma constante que representamos por C.

Isto posto, o integral de $2xdx$ ou $\int 2xdx = \frac{2x^{1+1}dx}{(1+1)\,dx} = x^2 + C \ldots \int xdx = \frac{x^2dx}{2dx} = \frac{x^2}{2} + C \ldots \int ax^{\frac{2}{3}}dx = \frac{ax^{\frac{2}{3}+1}dx}{\left(\frac{2}{3}+1\right)dx} = \frac{3}{5}ax^{\frac{5}{3}}$

$+C \ldots \int \frac{adx}{x^3}$ ou $\int ax^{-3}dx = \frac{ax^{-2}dx}{-2dx} =$

$\frac{-a}{2x^2} + C$. Em geral ſendo m hum expoente poſitivo ou negativo, inteiro ou fraccionario, teremos $\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}dx}{(m+1)dx} = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + C$.

Se $m = 0$, temos $\int adx = \frac{ax^{0+1}}{0+1} = ax$, como ſe vê claramente ſem recorrer á regra.

Se $m = -1$, temos $\int \frac{adx}{x} = \frac{ax^{1-1}}{1-1} =$

$\frac{a}{0} + C$, quantidade infinita, porque as fracções eſtaõ na razaõ inverſa dos denominadores; logo eſte caſo naõ ſe comprehende na regra fundamental. Em quanto naõ explicamos, porque razaõ o integral toma a fórma infinita, obſervaremos que $\frac{adx}{x}$ he a differencial do logarithmo hyperbolico de x, e aſſim $\int \frac{adx}{x} = alx$ ou lx^a $+ C$, como ſe póde ver fazendo a differenciaçaõ (27).

Se a quantidade monomia tiver radical, ſubſtituiremos em lugar delle hum expoente fraccionario. Aſſim $\int adx \sqrt[3]{x^2} = \int adx \,.\, x^{\frac{2}{3}} =$

$\frac{3}{5} ax^{\frac{5}{3}} + C$. Logo

Logo as differenciais monomias a huma variavel integraõ-ſe exactamente, ou ao menos por approximaçaõ empregando os logarithmos.

85 A conſtante que ſe deve ajuntar indiſpenſavelmente ao integral para o fazer completo, póde ter o valor que lhe quizermos dar, quando a noſſa tençaõ he ſó achar huma quantidade tal, que ſendo differenciada reproduza a differencial propoſta; porque para todo o valor de C, $d\left(\frac{ax^{m+1}}{m+1}+C\right)$ $=ax^m dx$. Porém quando a integraçaõ ſe faz com o fim de ſatisfazer a hum problema propoſto, a conſtante naõ he arbitraria, tem hum valor determinado, o qual em geral ſe achará formando huma equaçaõ particular, em que ſómente ſeja deſconhecida a conſtante: iſto ſe conſegue pelas condiçóes do problema, como veremos para diante.

Das Differenciais complexas que ſe integraõ pela regra fundamental.

86 1° PEla regra precedente podemos tambem integrar qualquer quantidade, em que naõ entrarem potencias de quantidades complexas, nem diviſores complexos que contenhaõ variaveis.

Aſſim $\int(ax^3dx+\frac{bx^2dx}{c}+edx)=\int ax^3dx+\int\frac{bx^2dx}{c}+\int edx=\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3c}+ex+C$. Da meſma ſorte $\int\left(ax^3dx+\frac{bdx}{x^4}+\frac{dx}{(a+b)^2}\right)=$

ax^4

$$\frac{ax^4}{4} - \frac{b}{3x^3} + \frac{x}{(a+b)^2} + C; \text{ e } \int dx\,(a+bx)$$

$$= \int adx + \int bxdx = ax + \frac{bx^2}{2} + C.$$

87 2º Ainda quando entrem potencias de quantidades complexas, a integraçaõ se fará pela regra fundamental, com tanto que as ditas potencias naõ estejaõ no denominador, e que ao mesmo tempo o expoente seja hum numero inteiro positivo.

Assim $\int dx\,(a+bx^2)^3 = \int dx\,(a^3 + 3a^2bx^2$

$+ 3ab^2x^4 + b^3x^6) = a^3x + a^2bx^3 + \frac{3ab^2x^5}{5} +$

$\frac{b^3x^7}{7} + C.$

88 Como naõ ha quantidade complexa elevada a huma potencia, cujo expoente seja numero inteiro positivo, que naõ possa reduzir-se (Alg. 149) a huma serie finita de monomios; segue-se que podemos integrar qualquer quantidade complexa, que naõ contenha outras partes complexas mais, que potencias cujos expoentes sejaõ numeros inteiros positivos. Se tivermos, por exemplo, para integrar $gx^3dx\,(a+bx^2)^2 + a^2x^7dx\,(c+ex^2+fx^3)^4$, desenvolveremos $(a+bx^2)^2$, e multiplicaremos cada termo do resultado por gx^3dx; desenvolveremos depois $(c+ex^2+fx^3)^4$, e multiplicaremos cada termo do resultado por a^2x^7dx; entaõ naõ teremos para integrar senaõ huma serie de monomios, que he o caso da regra fundamental.

89 Deve-ſe aqui exceptuar o caſo, em que haja algum expoente negativo, e ſucceda que depois da evoluçaõ e multiplicaçaõ, a variavel fique em algum termo com o expoente — 1; mas neſte caſo a integraçaõ ſe fará por logarithmos. Por exemplo $\int \frac{adx}{x^3}(a + bx^2)^2 = \int ax^{-3}dx\,(a^2 + 2abx^2 + b^2x^4) = \int a^3x^{-3}dx + \int 2a^2bx^{-1}dx + \int ab^2xdx = C - \frac{a^3x^{-2}}{2} + \frac{ab^2x^2}{2} + 2a^2b\int\frac{dx}{x} = C - \frac{a^3x^{-2}}{2} + \frac{ab^2x^2}{2} + 2a^2blx.$

90 3° Podemos tambem integrar pela regra fundamental huma quantidade complexa, elevada a qualquer expoente, ſe tudo o que multiplicar a quantidade complexa for a differencial della meſma, conſiderada ſem o ſeu expoente total, ou eſta differencial multiplicada ou dividida por hum numero conſtante: entaõ para integrar naõ ha mais que conſiderar a quantidade complexa como huma variavel ſimples, e applicar a regra fundamental palavra por palavra.

Com effeito a expreſſaõ $gx^{n-1}dx\,(a + bx^n)^m$ repreſenta todas as differenciais do caſo preſente; porque $gx^{n-1}dx$ he a differencial de $a + bx^n$ multiplicada por $\frac{g}{nb}$. Se fizermos pois $a + bx^n = z$, teremos $nbx^{n-1}dx = dz$, e $(a + bx^n)^m = z^m$; e por conſeguinte a noſſa expreſſaõ póde pôde transformar-ſe em hum monomio $\frac{g}{nb} z^m dz$, cujo integral he $\frac{gz^{m+1}}{nb(m+1)} + C$; logo

$$\int gx^{n-1}dx\,(a+bx^n)^m = \frac{g(a+bx^n)^{m+1}}{nb(m+1)} + C.$$

Aſſim $\int adx\,(b+x)^p = \frac{adx\,(b+x)^{p+1}}{(p+1)\,d\,(b+x)} = \frac{a(b+x)^{p+1}}{p+1} + C$. Do meſmo modo $\int \frac{(a^2+2ax)\,dx}{\sqrt{(ax+xx)}}$ ou $\int (a^2dx + 2axdx)\,(ax+xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(a^2dx+2axdx)\,(ax+xx)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(adx+2xdx)} = 2a\sqrt{(ax+xx)} + C$.

Deve-ſe exceptuar unicamente o caſo, em que o expoente da quantidade complexa he -1; porque entaõ he neceſſario fazer a integraçaõ por logarithmos, como adiante veremos.

Das Differenciais binomias, que ſe podem integrar algebricamente.

91 POr differencial binomia entendemos aquella, em que a quantidade complexa a mais compoſta he huma potencia qualquer de hum binomio. Aſſim $gx^5dx\,(a+bx^2)^{\frac{3}{5}}$ he huma differencial binomia. O meſmo ſe diz de $gx^m dx\,(a+bx^n)^p$.

$bx^n)^p$, que póde repreſentar toda e qualquer differencial binomia, pois que g, a, b, m, n, p pódem exprimir todos os numeros imaginaveis, poſitivos ou negativos.

Ignora-ſe o methodo geral de integrar qualquer differencial binomia. Porém pelo que fica dito ſe vê, que $gx^m dx\,(a + bx^n)^p$ he integravel algebricamente 1° quando p he numero inteiro poſitivo, ſejaõ quais forem os expoentes m e n (87), exceptuando ſómente o caſo mencionado (89); 2° quando o expoente m de x fóra do binomio he menor em huma unidade que o expoente n de x dentro do binomio (90), iſto he quando $m = n - 1$, ſejaõ quais forem n e p, exceptuando o caſo de $p = -1$. Além deſtes caſos temos mais os dous ſeguintes.

92 1° He integravel a differencial binomia, quando o expoente m de x fóra do binomio, ſendo aumentado de huma unidade, for diviſivel pelo expoente n de x dentro do binomio, e der por quociente hum numero inteiro poſitivo; iſto he, quando $\frac{m+1}{n}$ for numero inteiro poſitivo.

Porque ſeja $a + bx^n = z$, teremos $x^{m+1} = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}$, que dá $x^m dx = \frac{1}{nb^{\frac{m+1}{n}}} dz\,(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}$; logo $gx^m dx\,(a + bx^n)^p$ ſe muda em $\frac{g}{nb^{\frac{m+1}{n}}} z^p dz\,(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}$, que he integravel todas as as vezes que $\frac{m+1}{n}$ for numero inteiro positivo. Neste caso pois naõ ha mais do que transformar a differencial proposta, igualando o binomio a huma simples variavel, ou fazendo uso da transformada geral que acabamos de achar.

Por exemplo $gx^3dx\,(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}$ he integravel, porque $\frac{3+1}{2}=2$ numero inteiro positivo. Faça-se pois $a+bx^2=z$, teremos $x^4=\left(\frac{z-a}{b}\right)^2$, e $x^3dx=\frac{(z-a)\,dz}{2b^2}$; logo $\int gx^3dx$ $(a+bx^2)^{\frac{4}{5}}=\int\frac{gz^{\frac{4}{5}}dz\,(z-a)}{2b^2}=$ $\int\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}dz}{2b^2}-\int\frac{gaz^{\frac{4}{5}}dz}{2b^2}=\frac{gz^{\frac{4}{5}+2}}{\left(\frac{4}{5}+2\right)2b^2}-$ $\frac{gaz^{\frac{4}{5}+1}}{\left(\frac{4}{5}+1\right)2b^2}+C=\frac{gz^{\frac{4}{5}+1}}{2b^2}\left(\frac{5}{14}z-\frac{5}{9}a\right)+C=\frac{g}{2b^2}\,(a+bx^2)^{\frac{9}{5}}\left[\frac{5}{14}\,(a+bx^2)-\frac{5}{9}a\right]$ $+C$.

Do mesmo modo se tivermos para integrar $gx^8dx\,(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}}$, como $\frac{8+1}{3}=3$ numero inteiro positivo, faremos $a+bx^3=z$, e tereremos $x^3 = \left(\frac{z-a}{b}\right)^3$, que dá $x^8dx =$

$\frac{(z-a)^2dz}{3b^3}$; logo $\int gx^8dx\,(a+bx^3)^{-\frac{2}{3}} =$

$$\int \frac{gz^{-\frac{2}{3}}dz}{3b^3}(z-a)^2 = \int \frac{gz^{2-\frac{2}{3}}dz}{3b^3} -$$

$$\int \frac{2gaz^{1-\frac{2}{3}}dz}{3b^3} + \int \frac{ga^2z^{-\frac{2}{3}}dz}{3b^3} = \frac{gz^{3-\frac{2}{3}}}{3b^3\left(3-\frac{2}{3}\right)} -$$

$$\frac{2gaz^{2-\frac{2}{3}}}{3b^3\left(2-\frac{2}{3}\right)} + \frac{ga^2z^{1-\frac{2}{3}}}{3b^3\left(1-\frac{2}{3}\right)} + C =$$

$$\frac{g}{b^3}z^{1-\frac{2}{3}}\left(\frac{z^2}{7} - \frac{az}{2} + a^2\right) + C =$$

$$\frac{g}{b^3}(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}\left[\frac{1}{7}(a+bx^3)^2 - \frac{a}{2}(a+bx^3)\right.$$

$$\left. + a^2\right] + C.$$

93 2º Como $gx^m dx\,(a+bx^n)^p = gx^{m+pn}(b+ax^{-n})^p$, que se integra (92) quando $\frac{m+pn+1}{-n}$ ou $-p - \frac{m+1}{n}$ he hum numero inteiro positivo; segue-se que póde $\frac{m+1}{n}$ naõ ser numero inteiro positivo, e com tudo ser tambem integravel a differencial binomia: basta para isso que a so-

ſoma do quociente $\frac{m+1}{n}$ e do expoente p do binomio, tomada com ſinal contrario, ſeja numero inteiro poſitivo. Neſte caſo pois faremos a preparaçaõ, dividindo os dous termos do binomio por x^n, e multiplicando fóra por x^{pn} para naõ alterar o valor da expreſſaõ; iſto he, fazendo mudar de ſinal o expoente n de x dentro do binomio; e depois transformaremos como no caſo precedente.

Por exemplo a differencial $\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}$ ou $aadx\,(aa+xx)^{-\frac{3}{2}}$, em que $\frac{0+1}{2}$ naõ he numero inteiro, dá $-\left(\frac{0+1}{2}-\frac{3}{2}\right)=1$, numero inteiro poſitivo. Pelo que prepararemos a expreſſaõ, reduzindo-a á forma $gx^{m+pn}dx\,(b+ax^{-n})^p$, e teremos $aax^{-3}dx\,(1+aax^{-2})^{-\frac{3}{2}}$. Applicando agora o methodo antecedente, ſupponhamos $1+aax^{-2}=z$, teremos $x^{-2}=\frac{z-1}{aa}$, e $x^{-3}dx=-\frac{dz}{2aa}$; logo $\int aax^{-3}dx\,(1+aax^{-2})^{-\frac{3}{2}}=$

$$\int\frac{-z^{-\frac{3}{2}}dz}{2}=z^{-\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{(1+aax^{-2})}}$$

$+C$; e por conſeguinte $\int\frac{aadx}{(aa+xx)^{\frac{3}{2}}}=$ $\frac{x}{\sqrt{(aa+xx)}}+C.$

94 Até agora temos ſuppoſto que naõ havia potencia de x, ſenaõ em hum dos dous termos do binomio. Se porém a houver em ambos elles, reduziremos o binomio a naõ a ter mais do que em hum termo, fazendo uſo das regras ordinarias da Algebra. Aſſim ſe quizermos integrar $\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}}$ ou $aax^{-1}dx\ (ax+xx)^{-\frac{1}{2}}$, mudaremos eſta expreſſaõ em $aax^{-\frac{3}{2}}dx\ (a+x)^{-\frac{1}{2}}$. Applicando agora as regras dadas acharemos que $\frac{\frac{-3}{2}+1}{1}$ naõ he numero inteiro poſitivo, mas ſe lhe ajuntarmos $-\frac{1}{2}$, a ſoma tomada negativamente he 1. Faremos pois negativo o expoente de x dentro do binomio, e teremos $aax^{-2}dx\ (1+ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}$. Logo ſuppondo $1+ax^{-1}=z$, que dá $x^{-2}dx=-\frac{dz}{a}$, virá $\int aax^{-2}dx\ (1+ax^{-1})^{-\frac{1}{2}}=-2az^{\frac{1}{2}}+C=-2a\sqrt{(1+ax^{-1})}+C$, e conſeguintemente $\int\frac{aadx}{x\sqrt{(ax+xx)}}=C-2a\sqrt{\left(1+\frac{a}{x}\right)}$.

Se huma differencial binomia naõ ſe comprehender em nenhum dos caſos precedentes, podemos perder a eſperança de achar o ſeu integral puramente algebrico.

Em quanto ás quantidades trinomias, quadrinomias &c, ellas saõ integraveis nos casos mencionados (86, e seg.). Além destes ha outros, em que as ditas differenciais admittem integral algebrico; mas como estes casos saõ muito poucos, e encontraõ-se raras vezes, naõ nos demoramos em expollos.

Adiante daremos o methodo de descobrir as que saõ integraveis, e as que se podem reduzir a huma differencial conhecida.

Da integraçaõ das quantidades differenciais que constaõ de Senos, Cosenos &c.

95 COmo (22) $d(\mathit{sen}\ z) = dz\ \mathit{cos}\ z$, e $d(\mathit{cos}\ z) = -\ dz\ \mathit{sen}\ z$, será reciprocamente $\int dz\ \mathit{cos}\ z = \mathit{sen}\ z$, ou mais geralmente $\mathit{sen}\ z + C$, que tem a mesma differencial; e $\int -\ dz\ \mathit{sen}\ z = \mathit{cos}\ z + C$.

Se tivermos para integrar $dz\ \mathit{cos}\ 3z$, escreveremos deste modo $\frac{3dz\ \mathit{cos}\ 3z}{3}$, e entaõ o integral será $\frac{\mathit{sen}\ 3z}{3} + C$. Da mesma sorte $\int dz\ \mathit{sen}\ 3z = -\frac{1}{3}\int -3dz\ \mathit{sen}\ 3z = C - \frac{\mathit{cos}\ 3z}{3}$. Em geral $\int dz\ \mathit{sen}\ mz = -\frac{1}{m}\int -\ mdz\ \mathit{sen}\ mz = C$

—

$-\frac{cos\, mz}{m}$, e $\int dz\, cos\, mz = \frac{1}{m}\int mdz\, cos\, mz = \frac{sen\, mz}{m} + C.$

Se a expressaõ for $dz\, cos\, z\, (sen\, z)^n$, notaremos que esta quantidade he o mesmo que $(sen\, z)^n\, d\,(sen\, z)$; logo tratando *sen z* como huma simples variavel, teremos pela regra fundamental $\int (sen\, z)^n\, d(sen\, z) = \frac{(sen\, z)^{n+1}}{n+1} + C.$

Do mesmo modo $\int dz\, cos\, mz\, (sen\, mz)^n = \frac{1}{m}\int mdz\, cos\, mz\, (sen\, mz)^n = \frac{(sen\, mz)^{n+1}}{m\,(n+1)} + C$, e $\int dz\, sen\, mz\, (cos\, mz)^n = -\frac{1}{m}\int -mdz\, sen\, mz\, (cos\, mz)^n = C - \frac{(cos\, mz)^{n+1}}{m\,(n+1)}.$

Querendo integrar $dz\, sen\, pz\, cos\, qz$, mudaremos (Trig. 36) $sen\, pz\, cos\, qz$ em $\frac{1}{2}\, sen\,(pz + qz) + \frac{1}{2}\, sen\,(pz - qz) = \frac{1}{2}\, sen\,(p+q)z + \frac{1}{2}\, sen\,(p-q)\,z$; logo $\int dz\, sen\, pz\, cos\, qz = \frac{1}{2(p+q)}\int (p+q)\, dz\, sen\,(p+q)\,z + \frac{1}{2(p-q)}\int (p-q)\, dz\, sen\,(p-q)\,z = C - \frac{\frac{1}{2}\, cos\,(p+q)\,z}{p+q} - \frac{\frac{1}{2}\, cos\,(p-q)\,z}{p-q}.$

Da meſma ſorte ſe tratará $dz\ sen\ pz\ cos\ qz$ $sen\ rz$ &c reduzindo eſtes productos a ſenos ou a coſenos ſimples (Trig. 36).

Se tivermos para integrar $dz\ sen^3 z$, mudaremos eſta quantidade em $dz\ sen\ z\ sen^2 z =$ $dz\ sen\ z \times sen\ z\ sen\ z = dz\ sen\ z\,(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z) =$ $\frac{1}{2}\,dz\ sen\ z - \frac{1}{2}\,dz\ sen\ z\ \cos 2z$; e reduzindo $sen\ z$ $\cos 2z$, como fizemos em $sen\ pz\ cos\ qz$, facilmente acharemos o integral. Além de que, viſto ſer $sen^3 z$ $= \frac{3}{4}\ sen\ z - \frac{1}{4}\ sen\ 3z$ (Trig. 39), teremos

$$\int dz\ sen^3 z = -\frac{3}{4}\cos z + \frac{1}{3 \cdot 4}\cos 3z + C.$$

Vê-ſe pois de que modo ſe ha-de integrar $dz\ sen^n z$, e $dz\ cos^n z$ (ſendo n hum numero inteiro poſitivo), como tambem as quantidades da fórma $dz\,(sen\ pz)^m\ (cos\ qz)^n \cdot (sen\ rz)^s$ &c, ſendo m, n, s &c numeros inteiros poſitivos.

Além deſte methodo podemos uſar do ſeguinte, que he mais ſimples. Para iſſo advirta-ſe que como temos $d\,(xy) = xdy + ydx$, ſerá $ydx =$ $d\,(xy) - xdy$, e por conſeguinte $\int ydx = xy - \int xdy$.

Iſto poſto teremos $\int dz\ sen^n z = \int dz\ sen\ z \times$ $sen^{n-1} z = sen^{n-1} z \int dz\ sen\ z - \int [d\,(sen^{n-1} z) \times$

$\int dz$

$\int dz \, sen \, z] = - cos \, z \, sen^{n-1}z + (n-1)$
$\int dz \, sen^{n-2}z \, cos^2 z = - cos \, z \, sen^{n-1}z + (n-1)$
$\int dz \, sen^{n-2}z \, (1 - sen^2 z) = - cos \, z \, sen^{n-1}z +$
$(n-1) \int dz \, sen^{n-2}z - (n-1) \int dz \, sen^n z$; logo

$$\int dz \, sen^n z = - \frac{1}{n} cos \, z \, sen^{n-1}z + \frac{n-1}{n}$$

$\int dz \, sen^{n-2}z$. Do mesmo modo $\int dz \, sen^{n-2}dz =$

$$- \frac{1}{n-2} cos \, z \, sen^{n-3}z + \frac{n-3}{n-2} \int dz \, sen^{n-4}z,$$

$$\int dz \, sen^{n-4}dz = - \frac{1}{n-4} cos \, z \, sen^{n-5}z +$$

$\frac{n-5}{n-4} \int dz \, sen^{n-6}z$, &c. Logo quando n he numero par, temos

$$\int dz \, sen^n z = - cos \, z \left(\frac{1}{n} sen^{n-1}z + \frac{n-1}{n(n-2)} sen \, z^{n-3}z + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} sen^{n-5}z \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \ldots 3}{n(n-2)(n-4)(n-6) \ldots 2} sen \, z \right)$$
$$+ \frac{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7) \ldots 1}{n(n-2)(n-4)(n-6) \ldots 2} . z;$$

e quando n he impar, temos

$$\int dz \, sen^n z = - cos \, z \left(\frac{1}{n} sen^{n-1}z + \frac{n-1}{n(n-2)} sen^{n-3}z + \frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)} sen^{n-5}z \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \ldots 2}{n(n-2)(n-4)(n-6) \ldots 1} \right);$$

serie que depende sómente de $cos \, z$ e $sen \, z$.

Assim

Assim $\int dz\, sen^6 z = C - cos\, z \left(\frac{1}{6} sen^5 z + \frac{5}{6 \cdot 4} sen^3 z + \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 4 \cdot 2} sen\, z \right) + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} z$, e $\int dz\, sen^5 z = C - cos\, z \left(\frac{1}{5} sen^4 z + \frac{4}{5 \cdot 3} sen^2 z + \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} \right)$.

Pelas mesmas formulas se póde integrar $dy\, cos^n y$; porque fazendo $y = 90^o - z$, temos $dy = - dz$, $cos\, y = sen\, z$, e $\int dy\, cos^n y = - \int dz\, sen^n z$.

O mesmo methodo serve para achar o valor de $\int dz\, sen^n z\, cos^m z$, advertindo que por ser $d\,(sen^\nu z\, cos^\mu z) = \nu\, cos^{\mu+1} z\, sen^{\nu-1} z\,.\, dz - \mu\, cos^{\mu-1} z\, sen^{\nu+1} z\,.\, dz$, teremos $\int dz\, sen^{\nu-1} z\, cos^{\mu+1} z = \frac{1}{\nu} sen^\nu z\, cos^\mu z + \frac{\mu}{\nu} \int dz\, cos^{\mu-1} z\, sen^{\nu+1} z$; logo $\int dz\, sen^n z\, cos^m z = \frac{1}{n+m} sen^{n+1} z\, cos^{m-1} z + \frac{m-1}{n+m} \int dz\, sen^n z\, cos^{m-2} z$, e assim por diante até chegar a $\int dz\, sen^n z$, ou $\int dz\, sen^n z\, cos\, z$, conforme m for par ou impar.

Podemos tambem fazer $sen\, z$ ou $cos\, z$ igual a x, e transformar $dz\, sen^n z\, cos^m z$ em $x^n dx\, (1 - x^2)^{\frac{m-1}{2}}$, ou em $x^m dx\, (1 - x^2)^{\frac{n-1}{2}}$; donde se vê que a proposta he integravel algebricamente, quando hum dos dous expoentes n ou m he numero inteiro positivo impar.

Em fim todos os principios, que havemos dado para a integraçaõ das quantidades, servem para integrar as differenciais affectas de senos e cosenos, quando tem huma integral algebrica; e quando nellas entrarem tangentes, reduzillas-hemos a differenciais de senos e de cosenos, advertindo que $tang\,z = \frac{sen\,z}{cos\,z}$.

Applicaçaõ das regras precedentes á quadratura das Curvas.

96 PAra acharmos a superficie, ou (que vem a ser o mesmo) a quadratura das curvas, consideramos estas linhas como polygonos de infinitos lados: entaõ resolvendo a superficie em infinitos trapezios infinitamente pequenos pelas perpendiculares MP, mp (*Fig.* 40) tiradas das extremidades M, m de cada lado sobre o eixo das abscissas, cada trapezio PpmM he a differencial (6) do espaço finito APM; porque $PpmM = Apm - APM = d\,(APM)$. Se acharmos pois a expressaõ algebrica de PpmM, o seu integral será o espaço procurado APM.

Seja $AP = x$, $PM = y$; será $Pp = dx$, $pm = y + dy$, e conseguintemente a superficie do trapezió ou $\frac{PM + pm}{2} \cdot Pp = \frac{2y + dy}{2} \cdot dx =$ ydx

$ydx + \frac{dydx}{2}$. Mas $\frac{dydx}{2}$ he (4) infinitamente pequeno em comparaçaõ de ydx; logo $d\,(\text{APM}) = ydx$, e por conſeguinte $\text{APM} = \int ydx + C$.

Sendo pois dada a equaçaõ da curva, tiraremos della o valor de y, que ſubſtituiremos na formula ydx, e virá huma funçaõ differencial de x. Entaõ para termos a ſuperficie, integraremos eſſa differencial, e determinaremos immediatamente a conſtante, recorrendo á origem do integral onde o ſeu valor he nullo, e vendo o que he x neſſe meſmo ponto para ſubſtituir o ſeu valor no integral. Aſſim ſe formará huma equaçaõ particular, a qual dará o valor de C que ſe deve ſubſtituir na equaçaõ geral.

Para ſe ver a neceſſidade de ajuntar huma conſtante, deve-ſe notar que Pp mM tanto he a differencial da ſuperficie contada deſde a origem A das abſciſſas, como de outro qualquer eſpaço KPML contado de hum ponto fixo e determinado K; porque temos igualmente Pp mM $=$ KpmL $-$ KPML $= d\,$(KPML). Logo naõ ha razaõ para attribuir o integral, que ſe achar, antes ao eſpaço APM, do que a outro qualquer KPML, que differe daquelle em hum eſpaço determinado KAL. He pois neceſſario que ſe ajunte huma conſtante, que exprima eſta differença, iſto he que exprima de que ponto pertendemos contar a ſuperficie.

Exem-

Exemplos.

I. Na parabola temos $yy = px$, que dá $y = p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, logo $\int ydx = \int p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$.

Se contarmos os eſpaços deſde o ponto A origem das abſciſſas, a equaçaõ geral $\int ydx = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$ ſe reduz a $o = o + C$; logo $C = o$, e conſeguintemente o eſpaço indefinido $APM = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}AP.PM = \frac{2}{3}$ do rectangulo circumſcrito APMO, para qualquer AP.

Se contarmos porém os eſpaços deſde o ponto K onde ſuppomos $x = b$, a equaçaõ geral ſe tornará em $o = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + C$; logo $C = -\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}$, e por conſeguinte $KPML = \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}b.KL = \frac{2}{3}APMO - \frac{2}{3}AKLI$.

De todas as ſecções conicas ſómente a parabola he quadravel.

II.

II. A equaçaõ das parabolas de todos os gráos $y^m = x^n a^{m-n}$ dá $y = x^{\frac{n}{m}} a^{\frac{m-n}{m}}$; logo $\int ydx = a^{\frac{m-n}{m}} \int x^{\frac{n}{m}} dx = \frac{m}{m+n} a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{m+n}{m}} + C.$ Querendo contar os eſpaços deſde a origem A dos x (*Fig.* 41), temos $C = 0$; logo APM $= \frac{m}{m+n} xy =$ á parte determinada $\frac{m}{m+n}$ do rectangulo circumſcrito APMO. Pelo que todas as parabolas ſaõ quadraveis.

III. Nas hyperbolas referidas ás aſymptotas temos $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}$; logo $\int ydx = \frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}} + C.$ Se quizermos contar os eſpaços deſde a origem dos x, acharemos $C = 0$ no caſo de $m > n$; e $C = \frac{m}{m-n} \frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{0} = \infty$, no caſo de $m < n$, ou de ſer negativo o expoente $\frac{m-n}{m}$ de x, e por conſeguinte o eſpaço APM he infinito. Pelo contrario ſe contarmos os eſpaços deſde o ponto K onde AK $= b$, teremos $C = - \frac{m}{m-n} a^{\frac{m+n}{m}} b^{\frac{m-n}{m}}$, e por conſeguinte o eſpaço

$\int ydx$

$\int ydx$ ſerá entaõ finito, quer $m - n$ ſeja poſitivo, quer negativo.

Para iſto ſe perceber he preciſo advertir, que as curvas comprehendidas na equaçaõ $y = \frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{x^{\frac{n}{m}}}$, quando $m < n$ ſe approximaõ mais da aſymptota AZ (*Fig.* 42), que da aſymptota AY; porque quando x he infinito, y he infinitamente pequenos da ordem $\frac{n}{m} > 1$, e quando y he infinito, x he ſó infinitamente pequeno da ordem $\frac{m}{n} < 1$; logo os eſpaços APMS contados deſde a aſymptota AY ſaõ infinitos, porque o eſpaço comprehendido entre eſta aſymptota e o ramo infinito BS he infinito. Pelo contrario os eſpaços comprehendidos entre o ramo BM e a aſymptota AZ até o infinito tem hum valor finito; porque depois de hum mui curto intervallo o ramo ſe approxima rapidamente da ſua aſymptota, de ſorte que o eſpaço infinitamente comprido KLMOZ $= \frac{m}{n-m} \cdot \frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{b^{\frac{n-m}{m}}}$, e PMOZ $= \frac{m}{n-m} \cdot \frac{a^{\frac{m+n}{m}}}{x^{\frac{n-m}{m}}}$; logo KLMP $= \frac{m}{n-m} a^{\frac{m+n}{m}} \left(\frac{1}{b^{\frac{n-m}{m}}} - \frac{1}{x^{\frac{n-m}{m}}} \right)$.

Don-

Donde ſe ſegue, que ainda que naõ poſſamos ter os eſpaços contados deſde AY, com tudo podemos ter os eſpaços KLMP contados de hum ponto K o mais proximo que quizermos de AY.

Saõ pois quadraveis todas as hyperbolas referidas ás aſymptotas, excepto a hyperbola ordinaria.

IV. Na curva que tem por equaçaõ $y = \frac{aax - x^3}{aa}$, a qual ſe repreſenta na *Figura* 44, como ſe póde ver dando hum valor determinado a a, e conſecutivamente a x valores arbitrarios, acharemos $\int ydx = \int \frac{aaxdx - x^3dx}{aa} = \frac{2aax^2 - x^4}{4aa} + C$. Se contarmos os eſpaços deſde a origem A das abſciſſas, ſerá APM $= \frac{2aax^2 - x^4}{4aa}$.

V. Na logarithmica temos $\int ydx = \int amdy = amy + C$. Suppondo que $\int ydx = 0$, quando $y = a =$ AB (*Fig.* 45), virá $0 = ma^2 + C$, que dá $C = - ma^2$; logo APMB $= am\,(y - a)$; e como a ſubtangente PT $= am$ (30), ſerá APMB igual ao rectangulo OIQM. Se fizermos $y = 0$, virá o eſpaço infinitamente comprido BXYA $= - ma^2 =$ PQIT.

VI. Seja $y = ſen\ x$, que he a equaçaõ da curva dos ſenos; teremos $\int ydx = \int dx\, ſen\ x = C -$

coſ

cos x. Se contarmos os eſpaços do ponto A (*Fig.*46), em que $x = 0$, acharemos $C = 1$; logo APM $= 1 - cos\,x$. Segue-ſe pois, que quando $x = 180^o = c$, ſerá AMA'A $= 2$, iſto he o dobro do quadrado do raio; e quando $x = 2c =$ AA'', ſerá o eſpaço $= 0$, iſto he, o poſitivo igual ao negativo. Em geral, quando $x = 2nc$, o eſpaço ſerá nullo, e quando $x = (2n + 1)\,c$, ſerá o eſpaço $= 2$.

97 Moſtrámos (Alg.413) que ſe póde imitar qualquer contorno ABCD (*Fig.* 47), fazendo paſſar por certo numero de pontos A, B, C, D huma curva, cuja equaçaõ ſeja da fórma $y = m + nx + px^2 + qx^3 +$ &c; e vimos de que modo ſe determinaõ as quantidades m, n, p, &c. Supponhamos agora, que ſe pertende achar a ſuperficie ABCDLK, ſem ſer dada a equaçaõ da curva ABCD.

Para iſſo faremos paſſar (Alg. 413) por certo numero de pontos A, B, C, D huma curva A*e* B*f* C*g* D, a qual ſe confundirá tanto mais com a propoſta, quanto maior for o numero de pontos que ſe tomarem. E como temos a equaçaõ daquella, podemos conſideralla como a equaçaõ da curva ABCD, ao menos na extenſaõ ABCD. Viſto pois o ella conſtar de termos monomios, com facilidade ſe achará a ſuperficie procurada.

Em geral póde ſervir o meſmo calculo para achar por approximaçaõ tanto as ſuperficies das curvas, como o integral das quantidades, que naõ ſe podem integrar exactamente. Com effeito toda a

equa-

equaçaõ differencial se póde considerar como a expressaõ do elemento da superficie de huma curva, cuja ordenada seja igual a tudo o que está multiplicado por dx; por exemplo $dx\sqrt{(aa+xx)}$ he o elemento da superficie da curva, cuja ordenada $y=\sqrt{(aa+xx)}$. Assim calculando por meio desta equaçaõ alguns valores de y para alguns valores de x, e fazendo passar pelas extremidades das ordenadas huma curva da natureza, que acabamos de expôr, acharemos a sua superficie, a qual será o valor approximado de $\int dx\sqrt{(aa+xx)}$ na extensaõ que se tiver dado a x.

Supponhamos tres ordenadas PM (a), P'M' (b), P''M'' (c) (*Fig.* 48) correspondentes ás tres abscissas 0, 1, 2 nos pontos P, P', P''; teremos $y=a+(b-a)x+\left(\frac{a+c}{2}-b\right)(x^2-x)$; logo $\int ydx=$ PMM''P'' $=\int adx+(b-a)\int xdx+\left(\frac{a+c}{2}-b\right)\int(x^2dx-xdx)=ax+\frac{b-a}{2}x^2+\left(\frac{a+c}{2}-b\right)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)$; e substituindo PP'' $=2$ em lugar de x, teremos a superficie $=\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}c$ no caso de tres ordenadas. Em geral para maior numero de ordenadas somaremos as superficies parciais de tres em tres ordenadas, e será a superficie toda igual a hum

ter-

terço da primeira, e da ultima ordenada, mais $\frac{4}{3}$ das de numero par, isto he, da segunda, quarta &c, mais $\frac{2}{3}$ das de numero impar, isto he, da terceira, quinta, &c.

98 Tambem podemos achar a superficie das curvas, resolvendo-as em triangulos em lugar de trapezios. Assim considerando a superficie do segmento ANQA (*Fig.* 41) como composta de infinitos triangulos infinitamente pequenos AQq; se abaixarmos a perpendicular Qt, isto he, se descrevermos do centro A com o raio AQ o arco infinitamente pequeno Qt, entaõ supondo $AQ = y$, e $Qt = dx$, teremos o triangulo AQq ou $d(ANq)$

$$= \frac{Aq \cdot Qt}{2} = \frac{y + dy}{2} \cdot dx = \tfrac{1}{2} y dx \text{ ; logo}$$

$ANQA = \frac{1}{2} \int y dx + C.$

Se for ϕ o angulo comprehendido por AQ e por huma linha fixa que passe por A, isto he, o arco que mede este angulo no circulo do raio 1, teremos $Qt = y d\phi$, e por conseguinte $ANQA = \frac{1}{2} \int yy d\phi + C$.

Exemplos.

I. Se da extremidade A (*Fig.* 49) do diametro AB de hum circulo ANBN′ se tirarem rectas AQ para os differentes pontos da tangente BQ ao pon-

ponto B, e em cada huma dellas se tomar QM = AN, a curva MAM', que passa pelos pontos M, M' assim determinados, chama-se a *Cissoide de Diocles*, cuja asymptota he a tangente QBQ'. Seja AB $= a$, AM $= y$, o angulo MAB $= \phi$, teremos AQ $= \dfrac{a}{\cos\phi}$, AN $=$ MQ $= a\cos\phi$; logo $y = \dfrac{a}{\cos\phi} - a\cos\phi = \dfrac{a\,\text{sen}^2\phi}{\cos\phi}$, e $\frac{1}{2}\int yyd\phi =$

$$\frac{a^2}{2}\int \frac{d\phi}{\cos^2\phi} - aa\int d\phi + \frac{a^2}{2}\int d\phi\cos^2\phi = \frac{a^2}{2}\,\text{tang}\,\phi$$

$$- aa\phi + \frac{a^2}{2}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,\phi\cos\phi + \tfrac{1}{2}\phi\right) + C$$; e por conseguinte AKMNA $= \dfrac{1}{2}\,aa\,\text{tang}\,\phi + \dfrac{1}{8}\,aa\,\text{sen}\,2\phi - \dfrac{3}{4}\,aa\phi$ sem constante. Como o triangulo APM $= \dfrac{1}{2}\,yy\,\text{sen}\,\phi\cos\phi$, será AKMPA $= \dfrac{3}{4}\,a^2\phi - \dfrac{3}{8}\,a^2\,\text{sen}\,2\phi + \dfrac{1}{16}\,a^2\,\text{sen}\,4\phi$, que para $\phi = 90^\circ$ se torna em 3 ANBA = ao triplo do semicirculo genitor.

II. Na spiral de Archimedes (*Fig.* 50) temos $y = \dfrac{ax}{b}$; logo $\frac{1}{2}\int yyd\phi = \frac{1}{2}\int \dfrac{ax^2dx}{b^2} = \frac{1}{2}\,\dfrac{ax^3}{3b^2} + C$, e por conseguinte CKMC $= \frac{1}{2}\,\dfrac{ax^3}{3b^2}$.

He

He pois CKMAC $= \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} =$ ao terço do circulo inteiro. Se ϕ paſſar de 360°, os triangulos elementares comprehenderáõ os já ſomados; pelo que toda a extenſaõ, que ſe póde dar a $\frac{1}{2}\int yyd\phi$, he de $\phi = 360^\circ$.

III. Se do centro C (*Fig.* 51), tomado na linha indefinida CQ, ſe deſcreverem os arcos AG, QM, &c iguais entre ſi, a curva CKGM que ſe fizer paſſar pelas extremidades G, M &c, ſerá a *Spiral hyperbolica*. Seja CA $= a$, AN $= x$, CM $= y$, AG $=$ QM &c $= b$; os ſectores ſemelhantes CAN, CQM daráõ $xy = ab$. Se quizermos quadrar eſta curva, notaremos que $d\phi = -\frac{dx}{a} = \frac{bdy}{yy}$; logo $\frac{1}{2}\int yyd\phi = \frac{1}{2}by + C$.

Applicaçaõ á rectificaçaõ das curvas.

99 PAra rectificar huma curva AM (*Fig.*41), iſto he, para determinar o ſeu comprimento, ou aſſignar huma recta, que lhe ſeja igual, temos Mm $=$ Am $-$ AM $= d$(AM) $= \sqrt{(Mr^2 + rm^2)} = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; logo AM $= \int \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C$, quer as ordenadas ſejaõ parallelas, quer partaõ de hum ponto fixo. Differenciaremos pois a equaçaõ

da

da curva para exprimir $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ em x e dx, ou y e dy, e integraremos.

Exemplos.

I. Se a curva for a segunda parabola cubica, cuja equaçaõ he $y^3 = ax^2$, teremos $dx = \frac{3y^{\frac{1}{2}}dy}{2a^{\frac{1}{2}}}$; logo $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{9y\,dy^2}{4a}\right)} = dy\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{1}{2}}$; e por conseguinte (90) $\int\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{8a}{27}\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} + C$. Se quizermos contar a curva desde a origem A dos y, teremos $0 = \frac{8a}{27} + C$; logo $AM = \frac{8a}{27}\left[\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$.

II. A equaçaõ geral das parabolas $y^m = a^{m-n}x^n$ dá $\frac{mdy}{y} = \frac{ndx}{x}$; logo $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dx}{m}\sqrt{\left(m^2 + \frac{n^2y^2}{x^2}\right)} = \frac{dx}{m}\sqrt{\left(m^2 + n^2 a^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n-2m}{m}}\right)}$. Esta quantidade he interagravel quando $-\left(\frac{\frac{0+1}{2n-2m}}{m}+\frac{1}{2}\right)=t$, sendo t hum numero inteiro positivo, isto he, quando $m=\frac{2t+1}{2t}n$; logo saõ rectificaveis as parabolas que se comprehendem na equaçaõ $y^{\frac{2t+1}{2t}}=a^{\frac{1}{2t}}x$.

III. Na cycloide (*Fig.* 52) temos $dy=dx\sqrt{\frac{a-x}{x}}$, sendo $AB=a$; logo $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\sqrt{\frac{a}{x}}$; e integrando vem AM $(s)=2\sqrt{ax}=2$ AN; logo $s^2=4ax$.

IV. Na spiral logarithmica (*Fig.* 53) temos $dy=tdx$, sendo t a tangente do angulo CMT; logo $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dy\sqrt{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}=\frac{dy}{c}$, sendo c o coseno de CMT; e por conseguinte CKM $=\frac{y}{c}=$ MT.

Applicaçaõ ás superficies curvas.

100 TRataremos unicamente das superficies dos solidos de revoluçaõ, isto he, dos solidos que con-

concebemos gerados por huma curva AM (*Fig.*54) movendo-ſe ao redor de huma recta AP.

Neſte movimento o elemento Mm deſcreve a pequena pyramide conica truncada, que he a differencial, ou o elemento da ſuperficie deſcrita por AM. E como a ſuperficie da dita pyramide, por ſer Mm infinitamente pequeno, he igual ao producto de Mm (ds) pela circumferencia do raio PM (y), ſerá a ſuperficie dos ſolidos de revoluçaõ $= \int$ Mm circ. PM $= 2c \int yds = 2c \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} + C$.

Exemplos.

I. Se quizermos achar a ſuperficie de huma pyramide conica recta ABC (*Fig.* 55), onde a linha generante he huma hypothenuſa AC, teremos $y = x \, tang \, a$, ſuppondo o angulo DAC $= a$; logo $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dy \sqrt{\left(1 + \frac{1}{tang^2 a}\right)} = \frac{dy}{ſen \, a}$, e conſeguintemente $2c \int y \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{2c}{ſen \, a}$ $\int y \, dy = \frac{cy^2}{ſen \, a} + C = c$. PM. AM $+ C$. He pois a ſuperficie ABC $= c$. CD. AC $=$ AC. $\frac{1}{2}$ circ. CD.

II. Nos cylindros temos $ds = dx$, e y conſtante e igual ao raio do circulo da baſe. Logo repreſentando eſte raio por a, ſerá a ſuperficie $= 2ac \int dx = 2acx$.

III. Se o ſolido for huma esfera, a curva generante neſte caſo he o circulo AMB (*Fig.* 56), que tem por equaçaõ $yy = 2ax - xx$, ſendo $MC = a$, $AP = x$, $PM = y$. Logo $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, e $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} =$ $dx\sqrt{\left(1 + \frac{(a-x)^2}{2ax - xx}\right)} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$; como tambem ſe podia deduzir dos triangulos ſemelhantes CPM, Mrm, que daõ $ds = \frac{adx}{y}$. Subſtituindo pois na formula eſte valor, e o de y, teremos $2c\int y\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2c\int adx = 2acx + C$, ou ſimplesmente $2acx$, contando a ſuperficie deſde o ponto A. Logo a ſuperficie da esfera he igual á do cylindro circumſcrito.

IV. No ſolido paraboloide, que he gerado pela revoluçaõ da parabola AM (*Fig.* 54) ao redor do ſeu eixo, temos $yy = px$; logo $dx = \frac{2ydy}{p}$, e $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{2dy}{p}\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)}$. He pois a ſuperficie do paraboloide $= \frac{4c}{p}\int ydy\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)}$ $= \frac{4c}{3p}(\frac{1}{4}p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + C$. Se contarmos a ſuperficie

cie desde A, onde $y = 0$, temos $0 = \frac{4c}{3p}\left(\frac{1}{4}p^2\right)^{\frac{3}{2}}$ $+ C = \frac{4c}{3p}\cdot\frac{1}{8}p^3 + C$, que dá $C = -\frac{4c}{3p}\cdot\frac{1}{8}p^3$; logo AMLA $= \frac{c}{6p}\left[(p^2 + 4y^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right]$.

Applicação á medida dos solidos.

101 PAra medir o volume ou a solidez dos corpos, podemos imaginallos partidos por secções infinitamente vizinhas, e parallelas entre si; ou tambem concebellos como compostos de huma infinidade de pyramides, as quais tenhaõ por vertice commum hum mesmo ponto. Quando os consideramos como partidos por secções infinitamente vizinhas, e parallelas entre si, a differença entre duas superficies oppostas, que terminaõ cada secçaõ, he infinitamente pequena, e por conseguinte devemos omittilla no calculo. Donde vem, que considerando assim cada segmento como hum prisma, se for T a superficie de huma secçaõ, e dx a sua espessura, isto he, a sua altura infinitamente pequena, será Tdx o elemento do solido, e por conseguinte a solidez do corpo será $\int Tdx + C$. Devemos pois determinar em cada caso o valor T da secçaõ em x, e integrar.

Exemplo. Se o solido for huma pyramide SABC

I 2 (*Fig.*

(*Fig.* 57); ſuppondo a ſuperficie da baſe ABC $= bb$, a altura ST $= h$, e a diſtancia St de S a qualquer ſecçaõ abc parallela á baſe $= x$, teremos (19. 6. Eucl.) $hh : xx :: bb : abc$ ou $T = \frac{bbxx}{hh}$; e por conſeguinte a ſolidez de qualquer porçaõ da pyramide $= \frac{bb}{hh}\int x^2dx = \frac{bbx^3}{3hh} + C$; ou ſimplesmente $\frac{bbx^3}{3hh}$, ſe eſta porçaõ começar no vertice. Como temos S$abc = \frac{bbxx}{hh} \cdot \frac{1}{3} x$, ſegue-ſe que a ſolidez de huma pyramide he igual á baſe multiplicada pelo terço da altura: o que concorda com o que ſe demonſtra na Geometria (7. 12. Eucl.).

102 Quanto aos ſolidos de revoluçaõ, a ſuperficie da ſecçaõ, que neſte caſo he hum circulo do raio PM (*Fig.* 54), ſerá cy^2; logo hum ſolido qualquer de revoluçaõ $= \int cy^2dx + C$. Para fazer uſo deſta formula, devemos ſubſtituir o y^2 da linha generante, e integrar.

Exemplos.

103 I. Se quizermos achar a ſolidez da esfera, ſubſtituiremos $2ax - xx$ em lugar de y^2 na formula, e teremos a ſolidez de hum ſegmento esferi-

rico $= c \int (2ax - xx)\, dx = cx^2 (a - \frac{1}{3} x)$; logo pondo $x = 2a$ teremos a ſolidez de toda a esfera $= \frac{4}{3} a^3 c = \frac{2}{3}$ do cylindro circumſcrito.

104 II. Querendo applicar a meſma formula ao *Esferoide allongado*, que he gerado pela revoluçaõ da ellipſe á roda do ſeu eixo maior AB (*Fig.* 58), teremos $yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$, ſendo $AC = a$, $CD = b$, $AP = x$, $PM = y$; e por conſeguinte $\int cy^2 dx = \frac{cbb}{aa} \int (2ax - xx)\, dx = \frac{cbb}{aa} xx (a - \frac{1}{3} x) + C$, ou ſimplesmente $\frac{cbbxx}{aa}(a - \frac{1}{3} x)$, ſe contarmos a ſolidez do ponto A. Eſtá pois o ellipſoide inteiro para a esfera circumſcrita $:: bb : aa$, e por conſeguinte he igual aos dous terços do cylindro circumſcrito.

Para ter a ſolidez contada deſde hum ponto K, onde ſuppomos $AK = e$, formaremos huma equaçaõ pela condiçaõ de ſer o integral nullo quando $x = e$; o que dará $o = \frac{cbbee}{aa}(a - \frac{1}{3} e) + C$, iſto he, $C = - \frac{cbbee}{aa}(a - \frac{1}{3} e)$; logo a ſolidez de hum ſegmento de esferoide elliptico, comprehendido entre dous planos parallelos entre ſi, e perpendicula-

res

res ao eixo, em diſtancia hum do outro $= x - e$, tem por expreſſaõ $\frac{cbb}{aa}(ax^2 - ae^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}e^3)$.

Eſta formula ſerve para calcular a ſolidez, e conſeguintemente o pezo dos maſtros, e das vergas dos navios; como tambem para medir a capacidade dos toneis, cuja ſuperficie exterior ſe poſſa conſiderar como porçaõ de hum esferoide allongado.

105 III. No paraboloide (*Fig.* 54) temos $yy = px$, e $\int cy^2dx = c\int pxdx = \frac{1}{2}cpx^2 + C$. Logo o paraboloide ALMA $= cpx \cdot \frac{1}{2}x = cy^2 \cdot \frac{1}{2}x =$ á ametade do producto da ſuperficie do circulo, cujo raio he PM, pela altura x, ou (que vem a ſer o meſmo) á ametade do producto da baſe do ſolido pela ſua altura; e conſeguintemente he ametade do cylindro circumſcrito.

Se contarmos a ſolidez deſde hum ponto K em que $x = e$, teremos $\frac{cp}{2}(x^2 - e^2)$; formula, pela qual ſe póde medir a excavaçaõ das minas.

106 Podemos applicar a meſma formula ao *Hyperboloide*, que he o ſolido gerado pela revoluçaõ da hyperbola ao redor de hum dos eixos; como tambem ao *Ellipſoide chato*, que he gerado pela revoluçaõ da ellipſe á roda do ſeu eixo menor. Fazendo o calculo, acharemos que o ellipſoide chato he $\frac{2}{3}$ do cylindro circumſcrito; iſto he, que ſendo

a o eixo maior da ellipſe generante, e b o menor, o esferoide allongado (104) tem a ſolidez $=$ $\frac{2}{3}cabb$, e o esferoide chato a tem $= \frac{2}{3}caab$; logo o esferoide allongado eſtá para o esferoide chato :: $b : a$ :: o eixo menor para o maior.

Iſto he o que baſta pelo que reſpeita aos ſolidos de revoluçaõ. Porém para acoſtumar os principiantes a extender o uſo deſtes methodos, vamos a fazer mais duas applicações.

107 Exemplo I. *Achar a ſolidez da unha cylindrica* ABDE (*Fig.* 59), *formada pela ſecçaõ de hum plano* ABD *obliquo á baſe de hum cylindro recto, ſuppondo para maior facilidade, que o dito plano paſſa pelo centro da baſe.*

Se concebermos o ſolido partido por planos parallelos, infinitamente vizinhos, e perpendiculares á baſe AEB (*Fig.* 60), as ſecções ſeraõ triangulos ſemelhantes, cujas ſuperficies conſeguintemente ſeraõ como os quadrados dos lados homologos. Seja pois o raio CE da baſe $= a$, a altura DE $= b$, AP $= x$; ſerá a eſpeſſura Pp do elemento comprehendido entre duas ſecções contiguas $= dx$, e a baſe PM do triangulo PMN $= \sqrt{(2ax - xx)}$. Iſto poſto, como temos CED : PMN :: CE^2 : PM^2, e CED $= \frac{1}{2}ab$, ſerá PMN $= \frac{b}{2a}(2ax - xx)$; logo (101) a ſolidez da unha $=$

b

$$\frac{h}{2a}\int(2axdx - xxdx) = \frac{h}{2a}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) + C \text{ ; ou}$$

ſimplesmente $\frac{h}{2a}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right)$, contando-a deſde o ponto A. Para acharmos todo o ſolido, naõ ha mais do que ſuppor $x = 2a$, o que dá $\frac{2}{3}\ a^2h = \frac{1}{2}\ ah \cdot \frac{4}{3}\ a = \text{CED} \times \frac{2}{3}\ \text{AB}$. He pois a ſolidez da unha igual a dous terços do priſma, que tenha o triangulo CED por baſe, e o diametro AB por altura.

108 Exemplo II. *Achar a ſolidez de huma porçaõ de ellipſoide allongado, comprehendida entre dous planos parallelos entre ſi, e ao eixo maior.*

He neceſſario primeiramente demonſtrar, que as ſecções do ellipſoide parallelas ao eixo maior, ſaõ ellipſes ſemelhantes á ellipſe generante; iſto he, que os eixos de qualquer daquellas ſaõ entre ſi como os eixos deſta.

Para iſſo imaginemos o ellipſoide cortado por hum plano, o qual (para fixar as idêas) ſuppomos ſer vertical, e paſſar pelo eixo maior AB (*Fig.* 61); a ſecçaõ ſerá a ellipſe ADBE igual á generante. Imaginemos tambem o ellipſoide cortado por outros tres planos, dos quais dous ſejaõ verticais, e o terceiro horizontal. Sejaõ as ſecções dos dous primeiros com o plano ADBE repreſentadas pelo eixo menor DE, e pela parallela MN; e a ſecçaõ do terceiro com o meſmo plano ſeja repreſentada por ST.

Iſto

Isto posto, digo que a secçaõ representada por ST he huma ellipse semelhante a ADBE.

Imaginemos levantadas nos pontos R e O duas linhas (z e t) perpendiculares ao plano ADBE, que se encontrem com a superficie do ellipsoide. Como estas saõ ordenadas communas da secçaõ feita por ST, e das secções circulares feitas por MN e DE, teremos $zz = DR \times RE$, e $tt = MO \times ON$. Seja $CD = \frac{1}{2}b$, $CA = \frac{1}{2}a$, $CR = OP = u$; será $DR = \frac{1}{2}b + u$, $RE = \frac{1}{2}b - u$, $MO = y + u$, $ON = y - u$, e por conseguinte virá $zz = \frac{1}{4}bb - uu$, e $tt = yy - uu$. Mas suppondo $CP = x$, e a ordenada SR do eixo menor $= k$, temos (Alg. 307, e 304) $yy = \frac{bb}{aa}(\frac{1}{4}aa - xx)$, e $kk = \frac{aa}{bb}(\frac{1}{4}bb - uu)$, que dá $uu = \frac{1}{4}bb - \frac{bbkk}{aa}$; logo $zz = \frac{bbkk}{aa}$, e $tt = \frac{bbkk}{aa} - \frac{bbxx}{aa}$; e por conseguinte $zz : tt :: kk : kk - xx :: SR^2$ ou $SR \times RT : SO \times OT$; isto he, o quadrado da ordenada z, que corresponde ao ponto R, está para o quadrado da ordenada t, que corresponde ao ponto O, como o producto das duas abscissas correspondentes á primeira está para o producto das abscissas correspondentes á segunda; logo a secçaõ feita por ST he huma ellipse.

Além

Além diſto a equaçaõ $zz = \frac{bbkk}{aa}$ dá $z : k :: b : a$; mas z he a ametade da maior largura da secçaõ, ou a ametade do eixo menor deſta ellipſe, e k ou SR he a ametade do maior comprimento da ſecçaõ, ou a ametade do eixo maior da meſma ellipſe; logo os ſeus dous eixos tem entre ſi a meſma razaõ que os da ellipſe generante; e como em todo eſte raciocinio naõ entra a diſtancia CR da ſecçaõ que havemos conſiderado, ſegue-ſe que o meſmo ſuccederá em outra qualquer ſecçaõ parallela a AB.

Iſto poſto, para achar a ſolidez de qualquer porçaõ do ellipſoide comprehendida entre dous planos parallelos, repreſentados por AB e ST, ſeja a ſuperficie da ellipſe generante $= S$; ſerá a ſuperficie da ellipſe, cujo eixo maior he ST $= \frac{Skk}{\frac{1}{4}aa}$, e por conſeguinte o elemento do ſolido $= \frac{Skk}{\frac{1}{4}aa}du$ $= \frac{S}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bbdu - uudu)$. Integrando pois, teremos a ſolidez $= \frac{S}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bbu - \frac{1}{3}u^3) + C$, ou ſimplesmente $\frac{S}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bbu - \frac{1}{3}u^3)$, ſe a contarmos deſde o centro C. Porém ſe a porçaõ começar em outro ponto K, em que CK $= e$, teremos $o = \frac{S}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bbe - \frac{1}{4}e^3) + C$, e conſeguinguintemente a ſolidez da parte do ellipſoide allongado, comprehendida entre dous planos parallelos ao eixo maior, tem por expreſſaõ $\frac{S}{\frac{1}{4}bb}[\frac{1}{4}bb(u - e) - \frac{1}{3}(u^3 - e^3)] = \frac{S}{\frac{1}{4}bb}(u - e)(\frac{bb}{4} - \frac{ee + eu + uu}{3})$. Como $u - e$ he a diſtancia dos dous planos parallelos, ou a altura da porçaõ por elles comprehendida; ſe ſuppuzermos eſta altura $= h$, ſerá a ſolidez $= \frac{Sh}{\frac{1}{4}bb}(\frac{1}{4}bb - uu) + \frac{Shh}{\frac{1}{4}bb}(u - \frac{1}{3}h) = \frac{Shkk}{\frac{1}{4}aa} + \frac{Shh}{\frac{1}{4}bb}(u - \frac{1}{3}h)$.

Seja a ſuperficie da ſecçaõ feita por ST, ou $\frac{Skk}{\frac{1}{4}aa} = s$, a da ſecçaõ feita por LK $= s'$, e a ametade da ſua largura, ou a ametade do ſeu eixo menor $= l$; teremos, em razaõ da ſemelhança de todas as ſecções, $S = \frac{1}{4}\frac{bbs'}{ll}$; logo virá por ultima expreſſaõ reduzida do ſolido, $sh + \frac{s'hh}{ll}(u - \frac{1}{3}h)$.

Devemos pois 1° multiplicar a ſuperficie da ſecçaõ menor pela altura do ſolido; 2° multiplicar a ſuperficie da ſecçaõ maior pela razaõ $\frac{h^2}{l^2}$ do quadrado do da meſma altura para o quadrado da ſemilargura da ſecçaõ ſuperior, e pela diſtancia do centro á ſecçaõ inferior menos o terço da altura do ſolido.

Eſta regra póde-ſe applicar utilmente á medida da parte de hum navio mergulhada em razaõ do pezo da carga, com tanto que a figura deſta parte ſe poſſa comparar com hum tronco de ellipſoide. Entaõ s repreſentará a ſecçaõ feita á flor d'agua quando o navio eſtá ſem carga, e s' quando já eſtá carregado; h repreſentará a diſtancia das duas ſecçóes; l a maior largura de s', e finalmente u a diſtancia de s á maior ſecçaõ horizontal do esferoide.

Quanto ao modo de medir s e s', devemos advertir, que huma ſuperficie deſtas ſe determina pela outra; porque ambas pertencem á claſſe das ellipſes ſemelhantes, e por conſeguinte eſtaõ entre ſi como os quadrados dos ſeus eixos maiores, ou menores. Aſſim o que unicamente reſta, he determinar huma dellas. Adiante veremos, que a ſuperficie da ellipſe he para a do circulo de diametro igual ao eixo maior da meſma ellipſe, como o eixo menor he para o maior; e como ſabemos avaliar a ſuperficie do circulo com a approximaçaõ que quizermos, facilmente poderemos determinar a ſuperficie de huma ellipſe, cujos eixos ſejaõ conhecidos.

Dos methodos de integrar por approximaçaõ.

109 AS differenciais complexas, que naõ ſe comprehendem nos caſos que acima examinámos, integraõ-ſe por approximaçaõ. Para iſſo converte-ſe a quantidade propoſta em huma ſerie convergente

de

de termos monomios (Alg. 151), e integrando hum certo numero delles, teremos o valor approximado do integral procurado.

110 Exemplo I. *Achar o comprimento do arco de circulo* AM (*Fig.* 56) *por meio do seu seno verso* AP.

Suppondo que Mm he o elemento do arco, tire-se Mr parallela a AP, e o raio CM. Seja AP $= x$, CM $= \frac{1}{2}$; será PM $= \sqrt{(x - xx)}$; logo em razaõ dos triangulos semelhantes CPM, Mrm teremos M$m = \dfrac{\frac{1}{2}\,dx}{\sqrt{(x - xx)}}$, e conseguintemente AM $= \int \dfrac{\frac{1}{2}\,dx}{\sqrt{(x - xx)}}$.

Como esta quantidade naõ se póde integrar pelas regras dadas, mudalla-hemos (Alg. 112 e 141) em $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$; e reduzindo $(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$ a serie, teremos $(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} x^2 + \frac{5}{16} x^3 + \&c$; logo $\int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}} = \int \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{4} x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{16} x^{\frac{3}{2}} dx + \frac{5}{32} x^{\frac{5}{2}} dx + \&c \right)$, e integrando, AM $=$

$$x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2.3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1.3}{2.4.5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} x^{\frac{7}{2}} + \&c;$$

integral a que naõ ſe ajunta conſtante, porque dá $AM = 0$, quando $x = 0$, como deve ſer.

Dando a eſta ſerie a fórma $x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{6} x + \frac{1}{40} x^2 + \frac{5}{112} x^3 + \&c\right)$, vê-ſe que por ſer x ſempre menor que o diametro 1 (excepto quando ſe applica á ſemicircumferencia), os termos da ſerie tanto mais iráõ diminuindo, quanto menor for o ſeno verſo da queſtaõ. Aſſim ſe procurarmos, por exemplo, o comprimento do arco, cujo ſeno verſo he a centeſima parte do diametro, teremos

$x = 0{,}01$, $x^{\frac{1}{2}} = 0{,}1$; logo o arco $=$

$0{,}1 \left(1 + \frac{0{,}01}{6} + \frac{3(0{,}01)^2}{40} + \frac{5(0{,}01)^3}{112}\right)$; e como o termo ſeguinte da ſerie ſeria ao menos cem vezes menor que o ultimo deſtes, por ſer cada hum mais de cem vezes menor que o ſeu antecedente, ſe examinarmos qual he o valor do termo

$\frac{5}{112}(0{,}01)^3$, poderemos, tomando a centeſima parte delle, julgar do gráo da exactidaõ, em que temos o arco ſem paſſar além dos quatro primeiros termos da ſerie. Fazendo iſto vem $\frac{5}{112}(0{,}01)^3 =$

0,

$\frac{0,000005}{112} = 0,000000446$, cuja centeſima parte he 0,00000000446 ; logo podemos com toda a ſegurança avaliar cada termo da ſerie até 10 decimais, ſem o receio de que o valor do arco, que reſultar, tenha de erro huma unidade da nona caza de dizima. Aſſim teremos $\frac{5}{112}(0,01)^{1}$ $= 0,000000446$; $\frac{3}{40}(0,01)^{2} =$ $0,0000075000$; $\frac{0,01}{6} = 0,0016666666$; logo a totalidade da ſerie ſerá 0, 1 (1, 0016742112), ou 0, 100167421, limitando-nos a 9 decimais ; e ainda poderiamos com toda a ſegurança admittir a decima.

Achado eſte arco, ſe ſoubeſſemos quantas vezes o ſeu numero de gráos ſe contém em 360°, naõ era neceſſario mais para ter o valor approximado da circumferencia, do que multiplicar o comprimento achado por eſſe numero de vezes ; mas iſſo he o que ſe ignora.

Como ſabemos (Trig. 22) que o ſeno de 30° he ametade do raio, poderiamos calcular (Trig. 21) o ſeno verſo de 30°, ſubſtituillo em lugar de x na ſerie acima, e multiplicando o reſultado por 12, teriamos o comprimento proximo da circumferencia. Porém viria huma ſerie pouco convergente, de ſorte que ſeria neceſſario calcular hum grande numero de termos para achar o valor da circumferenrencia com huma approximaçaõ ſufficiente; pelo que enſinaremos outro modo de reſolver o problema.

111 Exemplo II. *Achar o comprimento do arco de circulo* AM (*Fig.*62) *por meio da ſua tangente* AN.

Tire-ſe a ſecante Cmn infinitamente vizinha de CMN, e com o raio CN deſcreva-ſe o arco Nr, que podemos conſiderar como huma perpendicular a Cn. Seja $CA = a$, e $AN = x$; ſerá $Nn = dx$, e $CN = \sqrt{(aa + xx)}$. Iſto poſto, como o triangulo CAN ou CAn he ſemelhante ao triangulo Nrn, teremos $Nr = \frac{CA \times Nn}{CN}$; mas os ſectores ſemelhantes CNr, CMm daõ $Mm = \frac{CA \times Nr}{CN}$; logo virá $Mm = \frac{CA^2 \times Nn}{CN^2} = \frac{aadx}{aa + xx}$, como já achámos (25); e por conſeguinte $\int Mm$ ou AM $= \int \frac{aadx}{aa + xx}$. Como eſta quantidade naõ ſe póde integrar exactamente, demos-lhe a fórma $\int aadx$ $(aa + xx)^{-1}$, e deſenvolvendo $(aa + xx)^{-1}$ em a^{-2} $\left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{x^6}{a^6} + \frac{x^8}{a^8} - \&c\right)$; teremos

$\int aadx\,(aa + xx)^{-1} = \int \Big(dx - \frac{x^2dx}{a^2} + \frac{x^4dx}{a^4} -$

$\frac{x^6dx}{a^6} + \frac{x^8dx}{a^8} - \&c \Big) = x - \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^5}{5a^4} -$ $\frac{x^7}{7a^6} + \frac{x^9}{9a^8} - \&c$; logo AM ou *Arc. tang* $x =$

$$x\left(1 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{5}\frac{x^4}{a^4} - \frac{1}{7}\frac{x^6}{a^6} + \frac{1}{9}\frac{x^8}{a^8} - \&c\right).$$

Fazendo $x = a$, teremos (Trig. 23) o comprimento do arco de $45^o = a\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c\right)$; e por conſeguinte a circumferencia $= 8a\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \&c\right)$. Porém como os termos deſta ſerie diminuem muito de vagar, reſolvamos o arco de 45^o em dous arcos de tangentes conhecidas, porque devendo ſer entaõ cada huma dellas menor que o raio, viráõ duas ſeries mais convergentes, que ambas juntas daráõ o comprimento do arco de 45^o. Sejaõ α e β eſtes dous arcos, cuja ſoma $= 45^o$; teremos $tang\,(\alpha + \beta) = 1$, e por conſeguinte a formula (Trig. 41) $tang\,(\alpha + \beta) = \frac{tang\,\alpha + tang\,\beta}{1 - tang\,\alpha\ tang\,\beta}$ dará

$tang\ c = \frac{1 - tang\ a}{1 + tang\ a}$. Se tomarmos pois $tang\ a = \frac{1}{2}$, teremos $tang\ c = \frac{1}{3}$. Logo pondo na ſerie ſucceſſivamente $\frac{1}{2}a$ e $\frac{1}{3}a$ em lugar de x, acharemos

$$\frac{a}{2}\left(1 - \frac{1}{3.2^2} + \frac{1}{5.2^4} - \frac{1}{7.2^6} + \frac{1}{9.2^8} - \frac{1}{11.2^{10}} + \frac{1}{13.2^{12}} - \&c\right)$$

$$\frac{a}{3}\left(1 - \frac{1}{3.3^2} + \frac{1}{5.3^4} - \frac{1}{7.3^6} + \frac{1}{9.3^8} - \frac{1}{11.3^{10}} + \frac{1}{13.3^{12}} - \&c\right);$$

Se quizermos achar os valores de cada hum deſtes arcos, exactamente expreſſos até a nona decimal, devemos calcular os primeiros 15 termos da primeira ſerie, e os 10 primeiros termos ſómente da ſegunda. Eſte calculo he muito facil de fazer, ſe repararmos, que na primeira ſe podem calcular os termos conſecutivos, formando huma ſerie, na qual cada termo ſeja igual ao precedente multiplicado por $\frac{1}{2^2}$, iſto he, que ſeja $\frac{1}{4}$ do precedente: depois multiplica-ſe eſta ſerie termo por termo pela ſerie $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ &c, e finalmente ajuntando em huma ſoma os termos de numero par, e os de numero impar em outra, tira-ſe a ſoma dos primeiros da ſoma dos ſegundos, e multiplica-ſe o reſto por $\frac{a}{2}$. Do meſmo modo ſe reduz o calculo

da

da ſegunda a formar huma ſerie, na qual cada termo ſeja o producto do precedente por $\frac{1}{3^2}$, ou por $\frac{1}{9}$, iſto he, que ſeja a nona parte do precedente: depois multiplica-ſe eſta ſerie termo por termo pela ſerie 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$ &c, e continua-ſe a fazer o meſmo que na primeira, excepto que ſe multiplica o reſultado por $\frac{a}{3}$, em lugar de ſe multiplicar por $\frac{a}{2}$. Se fizermos eſta operação levando a approximação até 10 decimais, teremos para a primeira ſerie $\frac{a}{2}$ (0,9272952180), ou a(0,4636476090); e para a ſegunda $\frac{a}{3}$(0,9652516632), ou a (0,3217505544); logo o arco de 45°, que he a ſoma daquelles dous, ſerá a (0,7853981634): Tomando pois o quadruplo, para termos a ſemicircumferencia, acharemos a (3,1415926536); logo o raio he para a ſemicircumferencia (ou o diametro he para toda a circumferencia) :: a : a (3,1415926536) :: 1 : 3,1415926536; razaõ que ainda ſe poderia calcular muito mais approximadamente.

112 Exemplo III. *Achar o logarithmo de qualquer numero dado.*

Concebamos o numero dividido em duas partes a e x, ſendo a a maior; $a+x$ repreſentará o numero dado. Como (27) temos $l(a+x)=\int\frac{dx}{a+x}$, e eſta quantidade naõ ſe póde integrar algebricamente, reduzamos em ſerie, e teremos $\int\frac{dx}{a+x}$ $=\int a^{-1}dx\left(1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}+\&c\right)$; logo $l(a+x)=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+$ &c $+C$.

Como eſta equaçaõ deve ſempre ter lugar, ſeja qual for o valor de x, ponhamos $x=0$, virá $C=la$; logo

$$l(a+x)=la+\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-\frac{x^4}{4a^4}+\&c.$$

Conhecendo pois o logarithmo de hum ſó numero a, podemos calcular por eſta ſerie o logarithmo de outro qualquer numero $a+x$. Seja por exemplo $a=10$, e $a+x=11$; teremos

$$l11=l10+0,1-\frac{(0,1)^2}{2}+\frac{(0,1)^3}{3}-\&c.$$

De

Do meſmo modo acharemos

$$l(a-x)=la-\left(\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^4}{4a^4}+\&c\right).$$

Como a ſerie geral poucas vezes he aſſás convergente, ſupponhamos $x=\frac{az}{a+z}$, teremos

$$l(a-x) \text{ ou } 2\,la-l(a+z)=la-\frac{z}{a+z}-\frac{z^2}{2(a+z)^2}-\frac{z^3}{3(a+z)^3}-\&c. \text{ Logo}$$

$$l(a+z)=la+\frac{z}{a+z}+\frac{z^2}{2(a+z)^2}+\frac{z^3}{3(a+z)^3}+\&c;$$

ſerie que he ſempre convergente.

A differença das duas ſeries, que exprimem os valores de $l\,(a+x)$ e $l\,(a-x)$, dará $l\,(a+x)-l\,(a-x)$ ou

$$l\,\frac{a+x}{a-x}=2\left(\frac{x}{a}+\frac{x^3}{3a^3}+\frac{x^5}{5a^5}+\frac{x^7}{7a^7}+\&c\right).$$

Porém a fim de darmos mais hum exemplo do modo de integrar por approximaçaõ, reſolvamos eſta meſma queſtaõ de outra maneira.

113 Exemplo IV. *Achar o logarithmo de huma fracçaõ, cujo numerador ſeja maior que o denominador.*

Re-

Reprefentando por a a foma do numerador e do denominador, e por x a fua differença, ferá (Trig. 177) o numerador $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x$, o denominador $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}x$, e confeguintemente $\frac{a+x}{a-x}$ exprimirá a fracçaõ; logo a differencial do feu logarithmo, confiderando fómente x como variavel *, he $\frac{dx}{a+x} + \frac{dx}{a-x} = \frac{2adx}{aa-xx} =$

$$2dx\left(\frac{1}{a} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^4}{a^5} + \frac{x^6}{a^7} + \frac{x^8}{a^9} + \&c\right);$$

logo $l\,\frac{a+x}{a-x} = 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} + \frac{x^5}{5a^5} + \frac{x^7}{7a^7} + \frac{x^9}{9a^9} + \&c\right)$ fem conftante, porque quando x

* Ainda que efta fracçaõ deva reprefentar qualquer fracçaõ propofta, iffo com tudo naõ impede, que fe poffa tomar a foma do numerador com o denominador, como conftante; porque naõ há fracçaõ, que fe naõ poffa preparar de modo, que dê a foma do numerador e do denominador igual ao numero que quizermos. Por exemplo, para fazermos que a fracçaõ $\frac{3}{5}$ tenha 12 por foma do numerador e do denominador, bafta que, havendo-lhe dado a fórma $\frac{3n}{5n}$, fupponhamos $3n + 5n$, ou $8n = 12$; donde fe deduz $n = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$; logo $\frac{3}{5} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}}$, cujo numerador fomado com o denominador dá realmente 12.

$x = 0$, $C = l\frac{a}{a} = l1 = 0$.

Para moſtrarmos o uſo deſta ſerie, procuremos v. g. o logarithmo de 2 ou de $\frac{2}{1}$; temos $a = 3$, $x = 1$, $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$, $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}$; logo tomando a nona parte do termo precedente, virá a ſerie $\frac{x}{a}$, $\frac{x^3}{a^3}$, $\frac{x^4}{a^4}$, o que dá

$\frac{x}{a} = 0,333333333$. logo $\frac{x}{a} = 0,333333333$

$\frac{x^3}{a^3} = 0,037037037$ . . . $\frac{x^3}{3a^3} = 0,012345679$

$\frac{x^5}{a^5} = 0,004115226$ . . . $\frac{x^5}{5a^5} = 0,000823045$

$\frac{x^7}{a^7} = 0,000457247$ . . . $\frac{x^7}{7a^7} = 0,000065321$

$\frac{x^9}{a^9} = 0,000050805$ . . . $\frac{x^9}{9a^9} = 0,000005645$

$\frac{x^{11}}{a^{11}} = 0,000005645$ . . . $\frac{x^{11}}{11a^{11}} = 0,000000513$

$\frac{x^{13}}{a^{13}} = 0,000000627$ . . . $\frac{x^{13}}{13a^{13}} = 0,000000048$

$\frac{x^{15}}{a^{15}} = 0,000000069$ . . . $\frac{x^{15}}{15a^{15}} = 0,000000004$

lo-

logo a ſoma he . . . 0,346573588, cujo dobro 0,69314718 = $l2$. Se quizeſſemos ter o valor até a nona caſa de dizima, ſeria neceſſario levar a approximaçaõ mais adiante.

Como $4 = 2^2$, e $8 = 2^3$, o dobro do logarithmo achado ſerá neceſſariamente o logarithmo de 4, e o triplo daquelle meſmo ſerá o logarithmo de 8.

Para acharmos o logarithmo de 3, podemos calcular da meſma forte o logarithmo da fracçaõ $\frac{4}{3}$, e tira-lo do logarithmo de 4; porque $3 = \frac{4}{\frac{4}{3}}$; logo $l3 = l4 - l\frac{4}{3}$. Podemos porém achar o meſmo $l3$ com mais facilidade, calculando o valor de $l\frac{8}{9}$, e tirando-o de $l8$ que ja he conhecido; a ametade do reſto ſerá o logarithmo procurado. Se ajuntarmos o logarithmo de 2 ao de 3, teremos o logarithmo de 6. Para ter o de 5, acharemos primeiramente $l10$, calculando o valor de $l\frac{10}{8}$, e ſomando-o com $l8$; depois tiraremos $l2$ de $l10$, e o reſto ſerá o logarithmo de 5. Aſſim virá $l\frac{10}{8} = 0,22314355$, que dá $l10 = 2,30258509$; logo $l5 = 1,60943791$.

Daqui

Daqui ſe vê, o que devemos fazer para calcular outro qualquer logarithmo. Mas he preciſo advertir, que á proporçaõ que he maior o numero, fica ſendo o calculo mais curto; de modo que tendo os logarithmos até 10 ſómente, pódem-ſe calcular os outros até 100, ſem que para iſſo ſeja preciſo uſar de mais que de 3 termos da ſerie, quando ſe tomaõ ſó 8 decimais; e quando o numero paſſa de 100, para ſe calcularem os que ſe ſeguem até mil, baſta empregar os dous primeiros termos; e finalmente baſta o primeiro termo, quando o numero paſſa de mil.

114 Querendo reduzir eſtes logarithmos aos tabulares, devemos advertir que a equaçaõ $dx = \frac{dy}{y}$, ſobre que ſe funda (27) o calculo actual dos logarithmos, dá $x = ly$, e que a equaçaõ geral a todos os ſyſtemas $dx = \frac{mdy}{y}$, em que ſe ſuppõe o primeiro termo a da progreſſaõ geometrica fundamental $= 1$, dá $x = mly$; logo os logarithmos hyperbolicos eſtaõ para os de outro ſyſtema cujo modulo $= m$, como $1 : m$. Para acharmos agora o modulo das taboas ordinarias, temos nellas $l\,10 = 1$, e nos hyperbolicos $l\,10 = 2{,}30258509$;

logo

logo $m \times 2,30258509 = 1$, que dá $m = 0,43429448$.

Logo, *os logarithmos hyperbolicos reduzem-ſe aos tabulares, multiplicando aquelles por* 0,43429448. E reciprocamente, *os tabulares reduzem-ſe aos hyperbolicos, multiplicando aquelles por* 2,30258509.

Aſſim ſe quizermos ter o logarithmo de 2 das taboas, multiplicaremos por 0,43429448 o logarithmo hyperbolico de 2, que he 0,69314718, e virá 0,3010300, como com effeito ſe acha nas taboas ordinarias.

115 Para paſſarmos do logarithmo dado ao ſeu numero reſpectivo, temos $l(a+x) = la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c$, iſto he

$$l\frac{a+x}{a} = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c.$$ Façamos por abbreviar $l\frac{a+x}{a} = z$, ſerá

$$z = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \&c.$$

Reſta pois achar o valor de $\frac{x}{a}$ em z.

Supponhamos que eſte valor ſe póde exprimir pela

pela equaçaõ

$$\frac{x}{a} = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c,$$

sendo A, B, C, D, &c. coeficientes constantes; teremos

$$z = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c.$$

$$- \frac{A^2}{2} z^2 - \frac{2AB}{2} z^3 - \frac{B^2}{2} z^4 + \&c.$$

$$+ \frac{A^3}{3} z^3 - \frac{2AC}{2} z^4 + \&c.$$

$$+ \frac{3A^2B}{3} z^4 + \&c.$$

$$- \frac{A^4}{4} z^4 + \&c.$$

Logo $A = 1 \ldots B - \frac{A^2}{2} = 0 \ldots C - AB + \frac{A^3}{3} = 0 \ldots D - \frac{B^2}{2} - AC + A^2B - \frac{A^4}{4} = 0$, donde se tira $B = \frac{1}{1.2} \ldots C = \frac{1}{1.2.3} \ldots D = \frac{1}{1.2.3.4}$; e por conseguinte $\frac{x}{a} = z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \&c$; logo $1 + \frac{x}{a}$

ou

ou $\frac{a+x}{a} = 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$

Tiraremos pois do logarithmo dado ou de $l(a+x)$ o logarithmo conhecido mais vizinho, cujo numero reprefentaremos por a; virá $l\frac{a+x}{a}$ ou z, o qual fendo fubftituido na formula precedente, dará o valor de $\frac{a+x}{a}$, e por confeguinte o de $a+x$.

Querendo, por exemplo, achar o numero cujo logarithmo he 1, devemos fuppor $l\frac{a+x}{a}$ ou $z=1$, e teremos $\frac{a+x}{a} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \&c = 2{,}7182818$, tomando fómente 7 decimais.

Se o logarithmo dado for tabular, o calculo deverá começar pela reducçaõ (114) do mefmo logarithmo, e do que fe tomar por $l\,a$, aos logarithmos de que actualmente tratamos.

Reprefentando x hum numero, feja $l\,x = z$, e e o numero 2, 7182818, cujo logarithmo $= 1$; teremos $l\,x = z\,l\,e = l\,e^z$, e por confeguinte

$$e^z = x = 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

ADVER-

116 ADVERTENCIA. O methodo de que nos ſervimos para tirar o valor de x da equaçaõ $z = \frac{x}{a} - \&c$, chama-ſe *Methodo inverſo* das ſeries, e conſiſte, como ſe vê, em ſuppor a variavel, de que ſe buſca o valor, expreſſa em huma ſerie, na qual a outra variavel tenha expoentes em progreſſaõ arithmetica, e cada termo tenha hum coefficiente conſtante indeterminado.

Se tiveſſemos muitos termos em x e em z na meſma equaçaõ, mas de ſorte que eſtas variaveis naõ eſtiveſſem multiplicadas entre ſi, determinariamos a ſerie dos expoentes, fazendo o expoente do primeiro termo da ſerie ſuppoſta, igual ao menor expoente da meſma variavel na equaçaõ, e tomariamos por differença commua dos expoentes da meſma ſerie o maior commum diviſor dos expoentes deſta meſma variavel na equaçaõ. Por exemplo, ſe tiveſſemos $z^{\frac{2}{3}} + 3z = 2x - \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{7}x^3 + \&c$, fariamos $x = Az^{\frac{2}{3}} + Bz + Cz^{\frac{4}{3}} + Dz^{\frac{5}{3}} + Ez^2 + \&c$; porque o menor expoente de z he $\frac{2}{3}$, e o maior diviſor commum dos expoentes $\frac{2}{3}$ e 1 da meſma variavel z he $\frac{1}{3}$.

Se porém as duas variaveis eſtiveſſem multiplicadas entre ſi, entaõ ſeria neceſſario obſervar outro methodo, com que naõ nos demoramos por naõ pertencer ao noſſo objecto; mas póde ver-ſe nas obras de Newton, e na *Analyse das linhas curvas* de Cramer.

117 Além do methodo exposto (109) temos muitos outros, que daõ series mais convergentes em certos casos. O que se segue he hum dos mais notaveis.

Seja y huma funçaõ de x; teremos, integrando $d(xy) = xdy + ydx$ por partes,

$$\int ydx = xy - \int xdy.$$

Supponhamos $dy = y'dx$; teremos do mesmo modo

$$\int xdy \text{ ou } \int xy'dx = \frac{x^2}{2}y' - \int \frac{x^2}{2}dy'.$$

Semelhantemente, fazendo $dy' = y''dx$, será

$$\int \frac{x^2}{2}dy' = \frac{x^3}{2 \cdot 3}y'' - \int \frac{x^3}{2 \cdot 3}dy'',$$

e assim por diante. Logo substituindo estes valores na primeira expressaõ acharemos

$$\int ydx = xy - \frac{x^2}{2}y' + \frac{x^3}{2 \cdot 3}y'' - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}y''' + \&c.$$

E como $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{ddy}{dx^2}$ (suppondo dx constante), e assim por diante, será

$$\int ydx = xy - \frac{x^2}{2}\frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}\frac{d^3y}{dx^3} + \&c.$$

Que-

Querendo por exemplo integrar $\frac{dx}{a+x}$, teremos $y = \frac{1}{a+x} \ldots \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(a+x)^2} \ldots \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(a+x)^3}$ &c; logo $\int \frac{dx}{a+x} = \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(x+a)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} +$ &c $+ C$, isto he $l(a+x) = la + \frac{x}{a+x} + \frac{x^2}{2(a+x)^2} + \frac{x^3}{3(a+x)^3} +$ &c, como ja se achou.

Uso das approximações antecedentes na integração de varias quantidades.

118 Por quanto temos taboas ja calculadas, tanto das differentes partes do circulo, como dos logarithmos, naõ he necessario reduzir a serie as differenciais que houvermos de integrar, huma vez que ellas se possaõ reportar ao circulo ou aos logarithmos. Vejamos quais destas differenciais saõ aquellas que se encontraõ mais vezes, e mostremos em alguns exemplos como se determinaõ os arcos de circulo, ou os logarithmos que saõ os seus integrais.

119 Sabemos (100 III), que $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ he o elemento de hum arco de circulo AM (*Fig.*56) cujo raio $= a$, e a abscissa ou o seno verso $= x$; de ma-

maneira que $\int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = AM$. Se quizermos pois o valor deste integral para hum x determinado, tiraremos de CA ou a o valor conhecido de x ou AP, e teremos CP; entaõ no triangulo rectangulo CPM, em que conhecemos CP, e $CM = a$, poderemos calcular o angulo ACM, ou o numero de gráos do arco AM, e conseguintemente, multiplicando esse numero de gráos por $\frac{3,1415926}{180} = 0,0174533$, teremos o comprimento do mesmo arco.

120 Se tivermos $\frac{hdx}{\sqrt{(gkx - pxx)}}$, sendo h, g, p e k quantidades conhecidas, faremos esta differencial semelhante á precedente, dividindo primeiramente tanto o numerador, como o denominador por $\sqrt{p}$, o que dará $\frac{h}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p} x - xx\right)}}$; depois multiplicaremos e dividiremos ao mesmo tempo por $\frac{1}{2} \cdot \frac{gk}{p}$, para que o multiplicador de dx seja a ametade do multiplicador de x dentro do radical, e teremos $\frac{2h\sqrt{p}}{gk} \cdot \frac{\frac{gk}{2p} dx}{\sqrt{\left(\frac{gk}{p} x - xx\right)}}$.

Agora se vê que o integral da differencial proposta he he $\frac{2h\sqrt{p}}{gk}$ multiplicado por hum arco de circulo cujo ſeno verſo he x, e o diametro $\frac{gk}{p}$; e por conſeguinte póde aſſignar-ſe com facilidade.

121 Se contaſſemos as abſciſſas do centro C, iſto he, ſe foſſe CP $= x$, teriamos $\frac{-adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ por elemento do arco AM, como já vimos (25), e ſe póde tambem deduzir dos triangulos ſemelhantes CPM, Mrm, notando que AM diminue quando x creſce; logo AM $= \int \frac{-adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$. Pelo que todas as vezes que tivermos huma differencial da fórma $\frac{kdx}{\sqrt{(gh-pxx)}}$, mudalla-hemos, como acima, em $\frac{k}{\sqrt{p}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p}-xx\right)}}$; e como $\frac{gh}{p}$ repreſenta aqui aa, a quantidade $-a$, que deve haver no numerador, he $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$; multiplicando pois e dividindo ao meſmo tempo por $-\sqrt{\frac{gh}{p}}$, teremos $-\frac{k}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{-\sqrt{\frac{gh}{p}}\,dx}{\sqrt{\left(\frac{gh}{p}-xx\right)}}$. Logo ſuppon-

do CA $= \sqrt{\frac{gh}{p}}$, e CP $= x$, teremos
$\int \frac{kdx}{\sqrt{gh - pxx}} = \frac{-k}{\sqrt{gh}} \times \text{AM} + C$. A constante C determina-se pelas condições do problema particular que conduzir á differencial proposta, e o arco AM (119) pelo calculo do triangulo CPM.

122 Já achámos (111) que $\frac{aadx}{aa + xx}$ exprimia hum arco de circulo, cujo raio he a, e x a tangente; arco que se póde determinar para hum valor dado de x, calculando o angulo ACN do triangulo rectangulo ACN (*Fig.* 62), e depois o comprimento do arco AM.

Logo se tivermos $\frac{kdx}{gb^2 + hx^2}$, reduziremos esta expressaõ á forma $\frac{k}{gb^2} \cdot \frac{\frac{gb^2}{h} dx}{\frac{gb^2}{h} + xx}$, e acharemos o seu integral, calculando o comprimento do arco do raio $b\sqrt{\frac{g}{h}}$, cuja tangente $= x$, e multiplicando-o por $\frac{k}{gb^2}$.

123 Os integrais das tres differenciais precedentes podem exprimir-se mais commodamente reduzindo-se ao raio 1. Porque na primeira $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, se fizermos $a - x = az$, teremos

$dx = -adz$, $\sqrt{(2ax - xx)} = \sqrt{[2a^2 - 2a^2z - (a^2 - 2a^2z + a^2z^2)]} = a\sqrt{(1 - z^2)}$; e substituindo estes valores na differencial, virá $\frac{-adz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$, cujo integral (25) he a *Arc. cos* z; logo $\int \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}} = a$ *Arc.* . *cos* $\frac{a - x}{a} + C$, ou $- a$ *Arc. sen* $\frac{a - x}{a} + C'$.

Quanto a $\frac{-adx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, fazendo $x = az$, teremos $\frac{-adz}{\sqrt{(1 - z^2)}}$, cujo integral he a *Arc. cos* z, e por conseguinte $\int \frac{-adx}{\sqrt{(aa - xx)}} = a$ *Arc* . *cos* $\frac{x}{a} + C$, ou $- a$ *Arc. sen* $\frac{x}{a} + C'$.

Do mesmo modo $\frac{aadx}{aa + xx}$ se transforma em $\frac{adz}{1 + z^2}$, fazendo $x = az$; e como (25) $\int \frac{dz}{1 + z^2}$ he arco cuja tangente $= z$, e o raio $= 1$, teremos $\int \frac{aadx}{aa + xx} = a$ *Arc. tang* $\frac{x}{a} + C$, ou $- a$ *Arc. cot* $\frac{x}{a} + C'$. Passemos ás differenciais que se integraõ pela superficie do circulo.

124 O elemento do ſemiſegmento APM (*Fig.*56) he $dx\sqrt{(2ax - xx)}$, ſendo AP $= x$; porque $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, e por conſeguinte ydx ou PpmM $= dx\sqrt{(2ax - xx)}$: logo $\int dx\sqrt{(2ax - xx)}$ $=$ APM $+ C$. Aſſim toda a differencial, que ou tiver eſta fórma, ou ſe poder reduzir a ella por meio de preparações ſemelhantes ás que acabamos de indicar, ſe integrará pelo ſemiſegmento de circulo cuja abſciſſa $= x$, e o raio $= a$; ſemiſegmento que ſe acha com facilidade, calculando o arco AM como enſinámos (119).

Se quizermos, por exemplo, achar a ſuperficie do ſemiſegmento elliptico APM (*Fig.* 63), teremos $y = \frac{b}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$; logo ydx ou d(APM) $= \frac{bdx}{a}\sqrt{(2ax - xx)}$; mas $\int dx\sqrt{(2ax - xx)} =$ APM′, ſuppondo que ſobre AB como diametro ſe tem deſcrito hum circulo; logo APM $=$ $\frac{b}{a}$ APM′, que dá APM : APM′ :: $b : a$; iſto he, *a ſuperficie do ſegmento elliptico eſtá para a ſuperficie do ſegmento circular correſpondente, como o eixo menor eſtá para o maior.* Donde ſe ſegue, que *a ſuperficie inteira da ellipſe eſtá para a do circulo deſcrito ſobre o ſeu eixo maior, como o eixo menor eſtá para o maior*, que he o que prometemos demonſtrar (108).

125

125 Se contarmos as abſciſſas do ponto C (*Fig.* 56), iſto he, ſe for CP $= x$, teremos $-dx\sqrt{(aa-xx)}$ por elemento do ſemiſegmento APM; porque entaõ $y=\sqrt{(aa-xx)}$, e á medida que x creſce, APM diminue, o que faz negativa a differencial de APM.

Para darmos hum exemplo de huma differencial que ſe reduz a eſta fórma, proponha-ſe achar a ſuperficie do esferoide elliptico allongado. Como a formula geral deſte genero de ſuperficies he $2cyds$ (100), e a equaçaõ da ellipſe $yy=bb-\frac{bb}{aa}xx$ dá yds ou $y\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{bdx}{aa}\sqrt{[a^4-xx(aa-bb)]}$, teremos $2cyds=\frac{2cbdx}{aa}\sqrt{[a^4-xx(aa-bb)]}$. Seja k a diſtancia CF (*Fig.* 64) do fóco F $=k$, iſto he (Alg. 294), ſeja $aa-bb=kk$; ſerá o elemento da ſuperficie contada do ponto A $=-\frac{2cbkdx}{aa}\sqrt{\left(\frac{a^4}{kk}-xx\right)}$, porque a ſuperficie diminue á medida que x creſce. Comparando pois com $-dx\sqrt{(aa-xx)}$, concluiremos que $-dx\sqrt{\left(\frac{a^4}{kk}-xx\right)}$ he hum ſemiſegmento de circulo cujo raio $=\frac{aa}{k}$, e a abſciſſa contada do centro $=x$. Logo ſe com huma terceira proporcional CO a CF e CA deſcreververmos o circulo ONR, teremos APM ou $\int -\frac{2cbkdx}{aa}\sqrt{\left(\frac{a^4}{kk}-xx\right)}=\frac{2cbk}{aa}\times$ OPM$'+C$.

Para determinar a conſtante, note-ſe que o integral he nullo na origem A, e que neſte ponto OPM$'$ ſe torna em OAN; logo $o=\frac{2cbk}{aa}\times$ OAN $+C$, donde ſe tira $C=-\frac{2cbk}{aa}\times$ OAN; logo o integral completo he $\frac{2cbk}{aa}$(OPM$'$ $-$ OAN) $=\frac{2cbk}{aa}\times$ APM$'$N. Vê-ſe pois, que a ſuperficie do ſemi-esferoide ſerá $\frac{2cbk}{aa}\times$ ACRN $=2c\times\frac{\text{CD}}{\text{CO}}\times$ ACRN, e a do esferoide inteiro ſerá o dobro.

Quanto á determinaçaõ de CO, deſcreva-ſe do ponto C com o raio CA o arco AL, que corte em L a perpendicular FL, levantada ſobre CA do ponto F; produza-ſe CL até encontrar em N a perpendicular levantada do ponto A; ſerá CN o valor procurado de CO. Com effeito os triangulos ſemelhantes CFL, CAN daõ CF (k) : CA (a) :: CL (a) : CN $=\frac{aa}{k}=$ CO.

126 Paſſando agora ás quantidades que ſe referem immediatamente aos logarithmos, podemos integrar por meio delles toda a differencial, que he, ou ſe póde reduzir a huma fracçaõ, cujo numerador ſeja a differencial do denominador, ou hum multiplo ou ſubmultiplo da meſma differencial.

No primeiro caſo, ou quando o numerador he exactamente a differencial do denominador, o integral he o logarithmo do denominador. Aſſim

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C \ldots \int \frac{dx}{a+x} = l(a+x) + C \ldots$$

$$\int \frac{2xdx}{aa+xx} = l(aa+xx) + C.$$

Quando porém o numerador for a differencial do denominador multiplicada ou dividida por hum numero conſtante, reſolveremos a differencial propoſta em dous factores, dos quais hum ſeja huma fracçaõ com o numerador exactamente differencial do denominador, e o outro ſeja hum numero conſtante; entaõ o integral ſerá o producto do factor conſtante pelo logarithmo do denominador variavel. Aſſim para integrar $\frac{ax^2dx}{a^3+x^3}$, como temos $d(a^3+x^3) = 3x^2dx$, prepararemos a noſſa differencial, de modo que venha $3x^2dx$ no numerador; para o que eſcreveremos deſta fórma $\frac{a}{3} \cdot \frac{3x^2dx}{a^3+x^3}$, cujo integral he $\frac{a}{3} l(a^3+x^3) + C$.

Da meſma ſorte $\int\frac{dx}{a-x}=-\int\frac{-dx}{a-x}=$ $-l(a-x)+C=l1-l(a-x)+C=$ $l\frac{1}{a-x}+C\ldots\int\frac{xdx}{aa+xx}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{aa+xx}$ $=\frac{1}{2}l(aa+xx)+C=l\sqrt{(aa+xx)}+C\ldots$ $\int\frac{ax^{n-1}dx}{k\pm bx^n}=\pm\frac{a}{nb}\int\frac{nbx^{n-1}dx}{k\pm bx^n}=\pm\frac{a}{nb}l(k\pm$ $bx^n)+C=\pm l(k\pm bx^n)^{\frac{a}{nb}}+C.$

Para darmos hum exemplo do modo de determinar eſtes integrais em numeros, ſupponhamos que ſe pede o valor de $l(a+x)$ para $x=2$, ſendo $a=5$. Buſque-ſe nas taboas o logarithmo pedido de 7, que he 0,8450980, e multiplicando-o (114) por 2,30258509 ou 2,3025851, teremos 1,9459100 ou 1,94591 por valor de $l(a+x)$ ou de $\int\frac{dx}{a+x}$, quando $a=5$, e $x=2$.

Algumas vezes encontraõ-ſe differenciais que ſe integraõ por logarithmos, ainda que naõ ſe poſſaõ preparar como as precedentes: $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ he deſte genero. Em alguns caſos para ſe lhes dar a fórma de differencial logarithmica, he util o ten-

tentar multiplica-las por huma funçaõ de x tal, que o producto venha a ser a differencial desta funçaõ, ou esta mesma differencial multiplicada ou dividida por hum numero constante; entaõ dividindo pela mesma funçaõ, a differencial será evidentemente huma differencial logarithmica. Por exemplo, multiplicando $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ por $x+\sqrt{(a^2+x^2)}$, vem $\frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}+dx$, que he com effeito a differencial de $x+\sqrt{(a^2+x^2)}$; logo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}=\int\frac{dx+\frac{xdx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}}{x+\sqrt{(a^2+x^2)}}=l\left[x+\sqrt{(a^2+x^2)}\right].$$

Do mesmo modo $\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}=l\left[x+\sqrt{(x^2-a^2)}\right]$; e $\int\frac{-dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}=-l\left[x+\sqrt{(a^2+x^2)}\right]=l\frac{1}{x+\sqrt{(a^2+x^2)}}$.

O integral pois de $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ou de $\frac{dx\cdot\sqrt{-1}}{\sqrt{(x^2-1)}}$, he $\sqrt{-1}\;l\left[x+\sqrt{(x^2-1)}\right]$, ou *Arc. sen* x (25); logo tambem $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)}}=$

—

$$-\sqrt{-1}\ Arc.\,sen\,x\sqrt{-1}=\frac{Arc.\,sen\,x\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}.$$

Em geral as differenciais que se integraõ por arcos de circulo, tambem se podem integrar por logarithmos, mas em fórma imaginaria; e reciprocamente as differenciais que se integraõ por logarithmos, tambem se podem integrar por arcos de circulo, mas nesta expressaõ entraráõ quantidades imaginarias.

127 Para darmos hum exemplo dos integrais por logarithmos, proponha-se quadrar a hyperbola ordinaria, referida ás asymptotas.

A equaçaõ da curva he $xy=1$, suppondo a potencia $=1$; logo $\int ydx=\int\frac{dx}{x}=lx+C$. Se contarmos os espaços desde a origem A dos x (*Fig.* 65), teremos $C=-lo$, e conseguintemente a area $=lx-lo=l\frac{x}{o}=\infty$; logo os espaços ZAPMV contados desde a asymptota saõ infinitos, o que naõ admira, sendo Z e V respectivamente as extremidades da asymptota, e do ramo correspondente da hyperbola. Se quizermos porém os espaços contados desde o vertice O, onde x ou $AN=1$, isto he, a superficie do espaço asymptotico comprehendido entre as ordenadas 1, $\frac{1}{x}$; teremos $o=l1+C$, que dá $C=-l1=o$; logo

N

NOMP $= lx$. He pois $\int \frac{dx}{x}$ finito ou infinito, conforme a porçaõ que delle queremos achar.

Daqui ſe vê 1° que os logarithmos, que o calculo dá immediatamente, exprimem os eſpaços hyperbolicos, comprehendidos entre a aſymptota e a curva, e contados deſde o vertice O da meſma curva. 2° Que ſe o integral de $\frac{dx}{x}$, tomado conforme a regra fundamental (84), ſahe infinito, he porque exprime os eſpaços contados deſde a origem das aſymptotas.

Do modo de reduzir a integraçaõ de huma differencial propoſta á de outra differencial conhecida, e de diſtinguir os caſos em que iſſo he poſſivel.

128 EXporemos o methodo ſómente a reſpeito das differenciais binomias; porque facilmente ſe poderá fazer a applicaçaõ ás differenciais mais compoſtas.

Seja primeiramente $hx^s\,dx\,(a+bx^n)^p$ a differencial propoſta, e $x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$ a differencial que ſe ſabe integrar, e de que aquella depende; iſto he, ſejaõ os meſmos os dous expoentes do binomio. Iſto poſto, poderemos ſuppôr $\int hx^s dx\,(a+bx^n)^p = X + R\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$, ſen-

ſendo X huma funçaõ algebrica de x, e R hum coefficiente conſtante. E como eſta equaçaõ dá $dX = (hx^s - Rx^m)(a + bx^n)^p dx$, vê-ſe que X naõ póde ſer igual ſenaõ a $(a + bx^n)^{p+1}$ multiplicado por huma ſerie da fórma $Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} + \ldots + Px^{k+tq}$, ſendo A, B, C &c coefficientes conſtantes deſconhecidos; k e q expoentes tambem indeterminados; e t hum numero inteiro poſitivo.

Supponhamos pois $\int hx^s dx\,(a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p+1}\left(Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} + \ldots + Px^{k+tq}\right) + R\int x^m dx\,(a + bx^n)^p$. Differenciando, e dividindo por $dx\,(a + bx^n)^p$, teremos $hx^s = (p + 1)\,nbx^{n-1}\left(Ax^k + Bx^{k+q} + Cx^{k+2q} + \ldots + Px^{k+tq}\right) + (a + bx^n)\left(kAx^{k-1} + (k + q)\,Bx^{k+q-1} + (k + 2q)\,Cx^{k+2q-1} + \ldots + (k + tq)\,Px^{k+tq-1}\right) + Rx^m$.

Agora para determinar os coefficientes A, B, C, &c do modo ordinario, he neceſſario que o numero das potencias de x que entrarem neſta equaçaõ naõ exceda o numero dos meſmos coefficientes, o qual he $t + 2$. E como ſe requer, que os expoentes de x formem huma progreſſaõ arithmetica, cuja differença ſeja q; ſe fizermos

mos $k - 1 = m$ (ſuppondo que m he o menor expoente), ſerá $k + tq + n - 1 = s$. Logo o numero dos termos deſta progreſſaõ (Alg. 231) ſerá

$$\frac{k + tq + n - 1 - k + 1}{q} + 1 \text{ ou } \frac{tq + n}{q} + 1;$$

e por conſeguinte teremos $\frac{tq + n}{q} + 1 = t + 2$, que dá $q = n$. Subſtituindo os valores de k e q na equaçaõ $k + tq + n - 1 = s$, virá $t = \frac{s - m}{n} - 1$.

Logo: *A reducçaõ de huma differencial para outra ſerá poſſivel, todas as vezes que a differença* $s - m$ *dos expoentes de* x *fóra dos dous binomios, dividida pelo expoente de* x *dentro do binomio, der hum quociente inteiro poſitivo*; e entaõ ſuppondo

$$\int bx^s dx (a + bx^n)^p = (a + bx^n)^{p+1} \left(Ax^{m+1} + Bx^{m+n+1} \right.$$

$$\left. + Cx^{m+2n+1} + \ldots + Px^{s-n+1} \right) + R \int x^m dx (a + bx^n)^p;$$

determinaremos os coefficientes A, B, C &c, differenciando eſta equaçaõ, dividindo-a por $dx\,(a + bx^n)^p$, e igualando a nada a ſoma das quantidades que multiplicarem huma meſma potencia de x, depois de haver tranſpoſto todos os termos para hum membro.

Exemplo. Trate-ſe de reduzir o integral de $\int x^4 dx\,(bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ a $\int dx\,(bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, que depende da da quadratura do circulo. Neſte caſo temos $\frac{s-m}{n}$ $= \frac{4-0}{2} = 2$; logo a reducçaõ he poſſivel; e como $t+1$ ou $\frac{s-m}{n}$ he o numero dos termos da ſerie, conſtará eſta de dous termos. Faremos pois $\int x^4\, dx\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}} = (bb-xx)^{\frac{3}{2}}\left(Ax + Bx^3\right) + R\int dx\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$; equaçaõ que ſendo differenciada, e dividida por $dx\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}}$ dará

$$\begin{array}{llll} 0 = Abb - & Ax^2 & -3 & Bx^4 \\ +R & +3Bbbx^2 & - & x^4 \\ & - & 3Ax^2 & -3Bx^4 \end{array}$$

donde ſe tira $A = -\frac{1}{8}bb \ldots B = -\frac{1}{6} \ldots$; $R = \frac{1}{8}b^4$; logo $\int x^4dx\,(bb-xx)^{\frac{1}{2}} = (bb-xx)^{\frac{3}{2}}$ $\left(-\frac{1}{8}bbx - \frac{1}{6}x^3\right) + \frac{1}{8}b^4\int dx\,\sqrt{(bb-xx)}$ $+C$.

He pois facil o achar por eſte methodo as differenciais, que ſe referem a huma differencial dada, e conſeguintemente as que ſe reduzem á quadradratura do circulo, da ellipſe e da hyperbola; differenciais, cujas expreſſões ſe achaõ com facilidade por meio das equações deſtas curvas. Aſſim, ſendo e hum numero inteiro poſitivo,

$\int \frac{x^{2e}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ depende de $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} =$ *Arc. ſen* x.

129 Eſtá claro, que ſe $\int x^s dx\,(a+bx^n)^p$ depender de $\int x^m dx\,(a+bx^n)^p$, reciprocamente eſta dependerá da primeira; e como neſte caſo para reduzir $\int x^m dx\,(a+bx^n)^p$ a $\int x^s dx\,(a+bx^n)^p$, deve ſer $\frac{m-s}{n}$ numero inteiro poſitivo, e a reducçaõ ſe effeitua ſuppondo $\int x^m dx\,(a+bx^n)^p = (a+bx^n)^{p+1}\left(Ax^{s+1} + Bx^{s+n+1} + \ldots + Px^{m-n+1}\right) + R\int x^s dx\,(a+bx^n)^p$; ſegue-ſe que ou s ſeja maior ou menor que m, com tanto que $\frac{s-m}{n}$ ou $\frac{m-s}{n}$ dê hum numero poſitivo, poderemos reduzir ſempre huma deſtas differenciais á outra, pondo por primeiro expoente de x na ſerie $Ax^k + Bx^{k+q}$ &c, o menor dos dous expoentes m e s, aumentado de huma unidade, e tomando por q o expoente de x dentro do binomio.

Exemplo. Querendo ſaber ſe $x^{-8}dx\,(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$ depende de $dx\,(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$, vemos

mos que $\frac{s-m}{n}$ ou $\frac{-8-0}{4}$ naõ dá numero inteiro positivo; mas como $\frac{m-s}{n}$ ou $\frac{8-0}{4}$ o dá, concluiremos que estas differenciais dependem huma da outra. Para integrar pois a quantidade proposta, faremos $\int dx\,(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}} = (a^4-x^4)^{\frac{1}{2}} \left(Ax^{-7}+Bx^{-3}\right) + R\int x^{-8}\,dx\,(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$, e havendo determinado os coefficientes A, B, R, deduziremos por transposição o valor de $\int x^{-8}\,dx\,(a^4-x^4)^{-\frac{1}{2}}$.

Podemos tambem neste caso fazer negativo em cada differencial o expoente de x dentro do binomio, e applicar a ambas as differenciais assim preparadas a primeira regra (128). Com effeito $x^s dx\,(a+bx^n)^p$, e $x^m dx\,(a+bx^n)^p$ mudaõ-se em $x^{s+pn}\,dx\,(ax^{-n}+b)^p$, e $x^{m+pn}\,(ax^{-n}+b)^p$; e a primeira destas ultimas quantidades reduz-se á segunda, quando $\frac{s+pn-m-pn}{-n}$ ou $\frac{m-s}{n}$ he numero inteiro positivo.

Assim no exemplo acima proposto reduziremos

mos $x^{-8}dx\ (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$ e $dx\ (a^4 - x^4)^{-\frac{1}{2}}$ a $x^{-10}dx\ (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ e $x^{-2}\ dx\ (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, onde ſe vê que $\frac{s-m}{n}$ ou $\frac{-10+2}{-4}$ $=$ ao numero inteiro poſitivo 2; faremos pois

$$\int x^{-10}dx\ (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}} = (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(Ax^{-1} + Bx^{-5}\right) + R\int x^{-2}\ dx\ (a^4x^{-4} - 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

130 Notemos de paſſagem, que eſte methodo tambem dá as differenciais binomias integraveis; porque procurar quando he integravel huma differencial binomia $hx^s dx\ (a + bx^n)^p$ he o meſmo que reduzi-la a $Rx^{n-1}\ dx\ (a + bx^n)^p$, que ſe integra immediatamente (90); e do que ſe tem dito (128) reſulta, que para eſſe fim, $\frac{s-n+1}{n}$ deve ſer numero inteiro poſitivo, iſto he, $\frac{s+1}{n}$ deve ſer numero inteiro poſitivo; o que concorda com a regra dada (92).

Póde acontecer em certos caſos, que a differencial propoſta ſeja integravel, e ſem embargo, ſe lhe applicarmos as regras precedentes, pareça dependente de huma differencial conhecida. Porém em tais casos o coefficiente R que se der á differencial, a que se trata de reduzir a proposta, acharse-ha $= 0$. Por exemplo $\frac{dx}{x^4 \sqrt{(aa - xx)}}$ depende de $\frac{dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$, porque mudando estas differenciais em $x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, e $x^{-1} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, temos $\frac{s - m}{n}$ ou $\frac{-5 + 1}{-2} = 2$; e com tudo $x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ he integravel (93). Porém a contradicçaõ he só apparente; porque se em virtude do exame precedente, passando com effeito a reduzir $x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ a $x^{-1} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, fizermos $\int x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}} = (aax^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}} \left(A + Bx^{-2}\right) + R \int x^{-1} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, e determinarmos os coefficientes, teremos $A = -\frac{2}{3a^4}$, $B = -\frac{1}{3a^2}$, $R = 0$, e por consequencia $\int x^{-5} dx (aax^{-2} - 1)^{-\frac{1}{2}}$ virá igual a huma quantidade puramente algebrica, como se acha pelo methodo dado (93).

131

131 Supponhamos agora, que os dous binomios tem expoentes differentes, de maneira que a differencial propoſta ſeja $bx^s dx\ (a + bx^n)^r$, e a de integraçaõ conhecida ſeja $x^m dx\ (a + bx^n)^p$, ſendo $p < r$. Se r for poſitivo, iſto he, ſe $r - p$ for poſitivo, mudaremos a propoſta em $bx^s dx\ (a + bx^n)^{r-p}$. $\times (a + bx^n)^p$, a qual, ſe $r - p$ for numero inteiro, poderá reduzir-ſe em ſerie da fórma $\left(A'x^s + B'x^{s+n} + C'x^{s+2n} + \&c\right) dx\ (a + bx^n)^p$. Entaõ cada hum deſtes termos póde reduzir-ſe a $x^m dx\ (a + bx^n)^p$ pelo methodo antecedente, ſe $s - m$ for diviſivel por n; e para reduzir a totalidade, applicaremos palavra por palavra o que ſe enſinou no meſmo methodo, tomando pelo que lá ſe chamava s, o maior expoente de x no valor achado de $bx^s dx\ (a + bx^n)^{r-p}$.

Se tiveſſemos, por exemplo, para reduzir $\int x^2 dx\ (bb - xx)^{\frac{3}{2}}$ a $\int dx\ (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$, mudariamos a primeira em $\int x^2 dx\ (bb - xx)$ $(bb - xx)^{\frac{1}{2}}$ ou $\int (bbx^2 dx - x^4 dx)\ (bb - xx)^{\frac{1}{2}}$; e aſſim em lugar de s tomaremos 4; logo, conforme o methodo, ſupporemos $\int (bbx^2 dx - x^4 dx)$

$(bb - xx)^{\frac{1}{2}} = (bb - xx)^{-\frac{1}{2}} \left(Ax + Bx^3\right) +$

$R \int dx\,(bb - xx)^{\frac{1}{2}}$.

Se pelo contrario o valor de r for negativo, ou $r - p$ for negativo, em lugar de reduzir $hx^t dx$ $(a + bx^n)^r$ a $x^m dx\,(a + bx^n)^p$, reduziremos a segunda á primeira, iſto he, daremos á differencial conhecida a fórma $x^m dx\,(a + bx^n)^{p-r} \times (a + bx^n)^r$, que ſe poderá reduzir a huma ſerie finita de termos da fórma $\left(A'x^m + B'x^{m+n} + C'x^{m+2n} + \&c\right)(a + bx^n)^r$, quando $p - r$ for numero inteiro; e depois praticaremos, como acabamos de enſinar para o caſo de r poſitivo.

Se quizeſſemos, por exemplo, reduzir $\int gx^{-2} dx\,(aa + xx)^{-2}$ a $\int dx\,(aa + xx)^{-1}$ ou $\int \frac{dx}{aa + xx} = \frac{1}{a} Arc.\ tang\ \frac{x}{a}$, mudariamos $dx\,(aa + xx)^{-1}$ em $(aa + xx)\,dx\,(aa + xx)^{-2}$; e como o menor expoente fóra do binomio propoſto he $- 2$, ſupporiamos $R \int (aa + xx)\,dx$ $(aa + xx)^{-2} = (aa + xx)^{-1} \left(Ax^{-1} + Bx\right)$ $+ \int gx^{-2} dx\,(aa + xx)^{-2}$; e havendo determinado do os coefficientes como acima, teriamos por transposiçaõ o valor de $\int gx^{-2} dx (aa + xx)^{-2}$, no qual mudariamos depois $R \int (aa + xx) dx (aa + xx)^{-2}$ em $R \int dx (aa + xx)^{-1}$.

Podemos pois por este methodo reduzir

$\int \frac{x^{2e} dx}{(1 + xx)^m}$ a $\int \frac{dx}{1 + xx}$, sendo e e m numeros inteiros.

Se $p - r$ naõ for numero inteiro, a reducçaõ naõ será possivel.

Das Fracções racionais.

132 T*Oda a quantidade differencial racional he sempre integravel, ou algebricamente, ou por arcos de circulo, ou por logarithmos, ou por todos estes tres meios juntamente, ou por dous delles sómente.*

Temos visto (84) que ella he integravel algebricamente, 1° todas as vezes que naõ contém denominador variavel; 2° quando o tem, mas monomio da fórma x^m, sendo m todo e qualquer numero á excepçaõ de -1. Falta pois mostrar a verdade da nossa proposiçaõ, no caso de haver na differencial proposta hum denominador racional complexo.

Supporemos que a variavel está menos elevada no numerador da fracçaõ differencial proposta, que

que no denominador. Se assim naõ for, dividiremos o numerador pelo denominador, até que a maior potencia do resto seja menor que a do denominador. Se tivessemos, por exemplo, para integrar $\frac{x^3dx}{aa+3ax+xx}$, principiariamos por dividir o numerador pelo denominador, o que daria xdx, e o resto $-(3ax^2+aax)dx$; dividiriamos ainda este resto pelo mesmo denominador, e teriamos $-3adx$ por quociente, e o resto $(8a^2x+3a^3)dx$; entaõ em lugar de $\frac{x^3dx}{aa+3ax+xx}$ tomariamos

$$xdx-3adx+\frac{(8a^2x+3a^3)dx}{aa+3ax+xx}.$$

133 Como a differencial do logarithmo de huma quantidade he igual á differencial da quantidade, dividida pela mesma quantidade, he muito natural o tentar resolver huma fracçaõ racional $\frac{Pdx}{Q}$ que se trate de integrar, em tantas fracçóes simples, quantos saõ os factores do denominador Q, ou quantas saõ as raizes da equaçaõ $Q=0$.

Com effeito $d[2a\,l(a+x)-2a\,l(2a+x)]$ $=\frac{2adx}{a+x}-\frac{2adx}{2a+x}=\frac{2aadx}{2aa+3ax+xx}$; logo para integrar esta fracçaõ, naõ he necessario mais que resolve-la em duas fracçóes, das quais huma te-

tenha por denominador $a + x$, e a outra $2a + x$, e cujos numeradores ſejaõ numeros conſtantes multiplicados por dx; entaõ as duas fracções ſe integraráõ por logarithmos. Eſte he o methodo que póde e deve obſervar-ſe, quando os factores do denominador ſaõ todos deſiguais.

134 Porém quando entre os factores do denominador ha alguns iguais entre ſi, naõ devemos eſperàr deſte methodo ſoluçaõ conveniente; porque a integraçaõ naõ póde entaõ depender totalmente de logarithmos. Com effeito $\frac{dx}{(a+x)^2}$, em que ha dous factores iguais $a + x$ e $a + x$, tem (90) o integral $C - (a + x)^{-1}$ independente de logarithmos. Mas ſe differenciaſſemos, por exemplo,

$$\frac{aa}{a+x} + 2al(a+x) + 2al(2a+x) - al(3a+x),$$

teriamos $\frac{(2ax + aa)dx}{(a+x)^2} + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$,

ou $\frac{10a^4dx + 26a^3xdx + 17a^2x^2dx + 3ax^3dx}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}$;

fracçaõ que para ſer integrada, naõ ſeria neceſſario mais que reſolver-ſe em tres fracções, huma das quais tiveſſe por denominador todos os factores iguais, e por numerador todas as potencias de x menores que a mais alta do denominador; quanto ás outras duas, cada huma teria por denominador hum dos factores deſiguais, e naõ teria potencia al-

alguma de x no numerador. Tal he com effeito o methodo de integrar qualquer fracçaõ racional, ao menos quando o denominador naõ tiver factores imaginarios.

Assim se suppuzermos, que a expressaõ $\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots kx^{n-1})\, dx}{M + Nx + Px^2 + \ldots + Tx^n}$, a qual representa em geral toda a fracçaõ racional, tem no denominador hum numero m de factores iguais $x+g$, hum numero p de factores iguais $x+h$, &c, e os factores desiguais $x+i$, $x+q$, $x+r$, &c; isto he, se a fracçaõ proposta tiver a fórma

$$\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{n-1})\, dx}{(x+g)^m (x+h)^p \times \&c\, (x+i)(x+q)(x+r) \times \&c};$$

para a integrar faremos

$$\frac{(a + bx + cx^2 + \ldots + kx^{n-1})\, dx}{(x+g)^m (x+h)^p \times \&c\, (x+i)(x+q)(x+r) \times \&c}$$

$$= \frac{Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + R}{(x+g)^m}\, dx +$$

$$\frac{A'x^{p-1} + B'x^{p-2} + \ldots + R'}{(x+h)^p}\, dx + \&c$$

$$+ \frac{Ldx}{x+i} + \frac{Mdx}{x+q} + \frac{Ndx}{x+r} + \&c,$$ sendo A, B, C, &c coefficientes constantes e indeterminados. Entaõ se podermos determinar os coefficientes,

o

o integral das fracções ſimples $\frac{Ldx}{x+i}$, $\frac{Mdx}{x+q}$, $\frac{Ndx}{x+r}$ &c ſerá $Ll\,(x+i)$, $Ml\,(x+q)$, $Nl\,(x+r)$ &c ; e quanto ás fracções

$$\frac{Ax^{m-1}dx + Bx^{m-2} + \ldots + R}{(x+g)^m}\,dx \text{ \&c},$$

integraremos $\frac{Ax^{m-1}dx}{(x+g)^m}$, $\frac{Bx^{m-2}dx}{(x+g)^m}$, &c, ou em geral $x^n dx\,(x+g)^{-m}$, fazendo $x+g=z$ (92), o que dará hum ſó termo da fórma $\frac{dz}{z}$, integravel por logarithmos.

135 Para achar os coefficientes A, B, C, &c reduziremos ao meſmo denominador todas as fracções em que elles entraõ ; e ſupprimindo o denominador commum a ambos os membros da equaçaõ formada da fracçaõ propoſta e das novas fracções, tranſporemos, e igualaremos a nada o coefficiente de cada potencia de x ; condiçaõ que dará tantas equações, quantos ſaõ os coefficientes indeterminados.

Exemplos.

I. Propondo-ſe integrar $\frac{dx}{aa-xx}$, reſolveremos $aa-xx$ nos ſeus dous factores $a+x$, $a-x$,

e

e ſupporemos $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{Adx}{a + x} + \frac{Bdx}{a - x}$. Reduzindo pois ao meſmo denominador, virá $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{Aa - Ax + Ba + Bx}{aa - xx} dx$; e ſupprimindo o denominador commum, dividindo por dx e tranſpondo, teremos $\left\{ \begin{array}{c} 1 + Ax \\ - Aa - Bx \\ - Ba \end{array} \right\} = 0.$

Logo $1 - Aa - Ba = 0$, e $A - B = 0$; donde ſe tira $A = \frac{1}{2a}$, $B = \frac{1}{2a}$, e por conſeguinte temos $\frac{dx}{aa - xx} = \frac{1}{2a} \frac{dx}{a + x} + \frac{1}{2a} \frac{dx}{a - x}$; integrando pois vem $\int \frac{dx}{aa - xx} = \frac{1}{2a} l(a + x) - \frac{1}{2a} l(a - x) + C = \frac{1}{2a} l \frac{a + x}{a - x} + C.$

II. Se a fracçaõ for

$\frac{10a^4 + 26a^3x + 17a^2x^2 + 3ax^3}{(a + x)^2 (2a + x)(3a + x)} dx$, que achámos (134) differenciando $\frac{aa}{a + x} + 2a\, l(a + x) + 2a\, l(2a + x) - a\, l(3a + x)$ ſupporemos,

10a^4

$$\frac{10a^4 + 26a^3x + 17a^2x^2 + 3ax^3}{(a+x)^2(2a+x)(3a+x)}dx = \frac{Ax+B}{(a+x)^2}dx$$

$+ \frac{Cdx}{2a+x} + \frac{Ddx}{3a+x}$; e reduzindo ao meſmo denominador, teremos depois da tranſpoſiçaõ

$$\left.\begin{array}{l} 10a^4 + 26a^3x + 17a^2x^2 + 3ax^3 \\ - 6Ba^2 - 5Bax - Bx^2 - Ax^3 \\ - 3Ca^3 - 6Aa^2x - 5Aax^2 - Cx^3 \\ - 2Da^3 - 7Ca^2x - 5Cax^2 - Dx^3 \\ \quad - 5Da^2x - 4Dax^2 \end{array}\right\} = 0$$

logo $3a - A - C - D = 0$, $17a^2 - B - 5Aa - 5Ca - 4Da = 0$, $26a^3 - 5Ba - 6Aa^2 - 7Ca^2 - 5Da^2 = 0$, $10a^4 - 6Ba^2 - 3Ca^3 - 2Da^3 = 0$, equações donde ſe tira $A = 2a$, $B = a^2$, $C = 2a$, $D = -a$.

A differencial propoſta ſe mudará pois em $\frac{2ax + aa}{(a+x)^2}dx + \frac{2adx}{2a+x} - \frac{adx}{3a+x}$. Os dous ultimos termos tem evidentemente por integral $2al(2a+x) - al(3a+x)$. Quanto ao primeiro, faremos $a + x = z$, que o transforma em $\frac{2az - aa}{zz}dz = \frac{2adz}{z} - \frac{aadz}{zz}$, cujo integral hē $2alz + \frac{aa}{z}$, ou $2al(a+x) + \frac{aa}{a+x}$; logo o in-

integral total he $\frac{aa}{a+x} + 2al\,(a+x) +$ $2al\,(2a+x) - al\,(3a+x)$, como deve ser.

136 Este methodo de achar os coefficientes das fracções parciais, he geral; mas naõ he o unico: o que vamos a expôr he muito expedito, porque dá hum coefficiente qualquer independente dos outros.

Seja $\frac{Pdx}{Q}$ a fracçaõ differencial proposta, $bx+a$ hum dos factores do denominador, e M o quociente de Q dividido por $bx+a$; isto he, seja $M\,(bx+a) = Q$; será $\frac{Pdx}{Q} = \frac{Adx}{bx+a} +$ $\frac{Ndx}{M}$; logo reduzindo ao mesmo denominador teremos $P = AM + N\,(bx+a)$. Porém a equaçaõ $(bx+a)\,M = Q$, sendo differenciada, dá $bMdx + (bx+a)\,dM = dQ$; logo se puzermos em ambas as equações achadas o valor de x, que dá o mais simples resultado, isto he, se puzermos em lugar de x o valor $\frac{-a}{b}$, que se acha suppondo $bx+a=0$, teremos $bMdx = dQ$, e $P = AM$; logo $A = \frac{bPdx}{dQ}$; quer dizer, que para acharmos o numerador A de qualquer das fracções par-

parciais, dividiremos o numerador Pdx da propoſta pela differencial dQ do ſeu denominador, e havendo ſubſtituido por x o valor que ſe deduz, quando ſe iguala a nada o denominador da fracçaõ parcial, multiplicaremos tudo pelo coefficiente de x no meſmo denominador ſimples.

Por exemplo, para acharmos os numeradores A e B das fracções $\frac{Adx}{a+x}$ e $\frac{Bdx}{a-x}$, em que acima reſolvemos a fracçaõ $\frac{dx}{aa-xx}$, dividiremos o numerador dx da propoſta por $-2xdx$, que he a differencial do denominador, e virá $-\frac{1}{2x}$; no qual pondo por x os valores $-a$ e a, que ſe achaõ para x igualando ſucceſſivamente a nada os denominadores $a+x$ e $a-x$ das fracções parciais, multiplicaremos pelos valores 1 e -1 de b, e teremos $\frac{1}{2a}$ e $\frac{1}{2a}$ por valores de A e B, como já ſe achou.

Do meſmo modo ſe deduziráõ regras gerais para determinar os coefficientes dos numeradores das fracções parciais, que tem por denominador o producto das raizes iguais.

137 As regras dadas para integrar as fracções racionais ſaõ gerais; porém quando alguns factores do denominador forem imaginarios, os integrais

grais ferãõ quantidades compoftas de imaginarias, os quais ainda que por iffo naõ deixem de fer reais, com tudo nem fempre fe podem reduzir a fórma real. Pelo que nefte cafo, depois de extrahirmos do denominador todos os feus factores reais, refolveremos o refto, naõ em factores do primeiro gráo, mas em factores do fegundo, os quais fempre faõ reais (Alg. 229), e fe podem reprefentar cada hum por $ax^2 + bx + c$. Affim formando para cada factor do fegundo gráo huma fracçaõ da fórma $\frac{(Ax + B)\,dx}{ax^2 + bx + c}$, determinaremos os coefficientes como precedentemente.

Para integrar, por exemplo, a fracçaõ $\frac{a^4 dx}{a^3 - x^3}$, cujo denominador tem hum factor $a - x$, e outro $a^2 + ax + x^2$, que contém dous factores imaginarios; refolveremos a quantidade propofta em duas fracções fómente, das quais huma tenha por denominador o factor $a - x$, e a outra o factor $a^2 + ax + x^2$, ifto he, fupporemos $\frac{a^4 dx}{a^3 - x^3} = \frac{A dx}{a - x} + \frac{(Bx + C)\,dx}{aa + ax + xx}$. Reduzindo agora ao mefmo denominador e tranfpondo, teremos . . .

$$\left.\begin{array}{l} a^4 - Aax - Ax^2 \\ -Aa^2 + Cx + Bx^2 \\ -Ca - Bax \end{array}\right\} = 0;$$

don-

donde ſe tira $A = \frac{a^2}{3} \ldots B = \frac{a^2}{3} \ldots C = \frac{2a^3}{3}$; logo $\int \frac{a^4 dx}{a^3 - x^3} = \frac{a^2}{3} \int \frac{dx}{a-x} + \frac{a^2}{3} \int \frac{(x+2a)\,dx}{aa+ax+xx}$.

138 Reſta ſaber de que modo ſe integra a quantidade $\frac{(Ax+B)\,dx}{ax^2+bx+c}$. Supponhamos para maior ſimplicidade, que a fracçaõ parcial ſe reduz a eſta fórma $\frac{A'x+B'}{x^2+a'x+b'}\,dx$, o que he ſempre poſſivel dividindo o numerador e o denominador por a. Entaõ faremos deſapparecer o ſegundo termo do denominador pela hypotheſe $x = z - \frac{1}{2}a'$, que dá $dx = dz$, e teremos huma quantidade deſta fórma $\frac{Cz+D}{zz+qq}\,dz = \frac{Czdz}{zz+qq} + \frac{Ddz}{zz+qq}$, cujo integral he $\frac{C}{2}\,l\,(zz+qq) + \frac{D}{q}\,Arc.\,tang\,\frac{z}{q} + C'$.

139 No caſo de alguns factores do ſegundo gráo ſerem iguaes entre ſi, formaremos para cada collecçaõ de factores iguaes huma fracçaõ da fórma $\frac{(Ax^{2n-1}+Bx^{2n-2}+\&c+R)\,dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, ſendo n o nu-

me-

mero dos factores $ax^2 + bx + c$, que se acharem iguais entre si.

Se tivermos, por exemplo, de integrar $\frac{(x^4 + 5ax^3 + 4a^3x)\,dx}{(a^2 + ax + x^2)(x^3 - a^3)}$, cujo denominador se resolve em tres factores $x - a$, $x^2 + ax + a^2$, e $x^2 + ax + a^2$, tomaremos o producto dos dous ultimos $(a^2 + ax + x^2)^2$ por denominador de huma fracçaõ, e faremos entrar no numerador todas as potencias de x inferiores á mais alta das que tiver o denominador. Assim supporemos

$$\frac{x^4 + 5a^3 + 4a^3x}{(a^2 + ax + x^2)(x^3 - a^3)}\,dx = \frac{Adx}{x - a} + \frac{(Bx^3 + Cx^2 + Dx + E)\,dx}{(aa + ax + xx)^2},$$ e determinaremos os coefficientes ao modo ordinario.

140 Para integrar agora as quantidades da fórma ... $\frac{Ax^{2n-1} + Bx^{2n-2} + \&c + Q}{(x^2 + ax + b)^n}\,dx$, faremos desapparecer o segundo termo do denominador, pondo $x = z - \frac{1}{2}a$, e teremos huma quantidade da fórma $\frac{A'z^{2n-1} + B'z^{2n-2} + \&c + Q'}{(zz + qq)^n}\,dz$, que se póde resolver em $\frac{A'z^{2n-1}\,dz}{(zz + qq)^n} +$

B'

$\frac{B'z^{2n-2}dz}{(zz+qq)^n}$ + &c , iſto he em termos , nos quais o numerador ou tem potencia par ou impar. Os termos em que z tem expoente impar , integraõ-ſe (92) em parte algebricamente , e em parte por logarithmos ; aquelles porém em que z tem expoente par , podem reduzir-ſe (131) a $\frac{dz}{zz+qq}$, e por conſeguinte ſaõ integraveis em parte algebricamente , e em parte por arcos de circulo.

Aſſim toda a fracçaõ racional he integravel exactamente , ou quando muito , naõ depende ſenaõ de arcos de circulo , e de logarithmos.

De algumas transformações , que podem facilitar as integrações.

141 SObre eſta materia naõ ſe podem dar regras gerais. A inſpecçaõ das quantidades , o exercicio , e a ſagacidade dictaõ nos caſos particulares o que ſe deve praticar.

As transformações , de que vamos a tratar , dirigem-ſe a fazer racionais as differenciais propoſtas ; porque effeituada eſta reducçaõ , naõ ha difficuldade em integra-las. Vejamos alguns caſos em que iſſo he poſſivel.

142 Se os radicais naõ affectarem ſenaõ monomios , reduzilos-hemos todos ao meſmo grão , que repreſentamos por m ; e ſuppondo $x^{\frac{1}{m}} = z$,

que dá $x = z^m$, e $dx = mz^{m-1}\,dz$, faremos as ſubſtituições, e virá huma quantidade racional.

Por exemplo, ſe tivermos $\frac{\sqrt{x}+a}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}\,dx$, eſcrèveremos aſſim $\frac{x^{\frac{3}{6}}+a}{x^{\frac{4}{6}}+x^{\frac{3}{6}}}\,dx$. Fazendo pois $x^{\frac{1}{6}} = z$, teremos $x = z^6$, $dx = 6z^5dz$, e conſeguintemente $\frac{6z^8+6az^5}{z^4+z^3}\,dz$, iſto he $\frac{6z^5+6az^2}{z+1}\,dz$, que ſe integra facilmente (132 e ſeg.).

143 Se houver hum ſó radical complexo do ſegundo gráo, e a variavel debaixo delle naõ paſſar do quadrado, iſto he, ſe a quantidade tiver a fórma $\sqrt{(a+bx+cxx)}$, ſempre ſe poderá fazer racional por qualquer dos dous modos ſeguintes. 1º Depois de deſembaraçar o quadrado da variavel dentro do radical, igualar-ſe-ha eſte radical á meſma variavel mais ou menos outra: 2º ou reſolver-ſe-ha a quantidade affecta do radical nos ſeus dous factores, e ſe igualará neſta fórma a hum delles multiplicado por huma nova variavel.

Se tivermos por exemplo $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$, fa-

re-

remos $\sqrt{(xx - aa)} = x - z$, que dá $x = \frac{zz + aa}{2z}$; logo $dx = \frac{zz - aa}{2zz} dz$, e $\sqrt{(xx - aa)}$

$x - z = \frac{zz + aa}{2z} - z = - \frac{zz - aa}{2z}$; donde

$\frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}} = - \frac{dz}{z}$, cujo integral he $- lz$.

Será pois $\int \frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}} = C - l[x - \sqrt{(xx - aa)}]$

$= C' + l[x + \sqrt{(xx - aa)}]$. O meſmo ſe acharia ſuppondo $\sqrt{(xx - aa)} = z - x$.

Podemos tambem neſte meſmo exemplo fazer $\sqrt{(xx - aa)}$ ou $\sqrt{[(x - a)(x + a)]} = (x - a)z$; donde quadrando, e dividindo depois por $x - a$,

vem $x + a = (x - a)zz$, que dá $x = \frac{a + azz}{zz - 1}$;

logo $dx = \frac{-4azdz}{(zz - 1)^2}$, $\sqrt{(xx - aa)} = \frac{2az}{zz - 1}$,

e por conſeguinte $\frac{dx}{\sqrt{(xx - aa)}} = \frac{-2dz}{zz - 1}$.

Se a expreſſaõ for $dy \sqrt{\left(1 + \frac{4y^2}{p^2}\right)}$, que he o elemento ds da parabola, deſembaraçaremos primeiramente y^2, e teremos $ds =$

 $2dy$

$\frac{2dy}{p}\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)}$. Fazendo pois $\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)} = y + z$, que dá $dy = \frac{-dz}{2z^2}(\frac{1}{4}p^2 + z^2)$, virá $ds = \frac{2ydy}{p} + \frac{2zdy}{p} = \frac{2ydy}{p} - \frac{dz}{pz}(z^2 + \frac{1}{4}p^2)$; logo $s = \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{2p} - \frac{1}{4}plz = C - \frac{1}{8}p + \frac{y}{p}\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)} - \frac{1}{4}pl[-y + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)}] = C' + \frac{y}{p}\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)} + \frac{1}{4}pl[y + \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 + y^2)}]$.

144 Quando naõ houver ſenaõ hum radical quadrado, nem entrarem ſenaõ potencias pares da variavel, podemos igualar o radical a huma nova variavel, multiplicada pela variavel actual. Por exemplo em $\frac{dx}{\sqrt{(aa - xx)}}$ poderiamos fazer $\sqrt{(aa - xx)} = xz$. E ainda que houveſſe hum ſegundo termo, poderia ſervir eſta transformaçaõ, fazendo logo deſaparece-lo, ao menos quando naõ houveſſe potencia alguma de x fóra do radical.

145

145 Em fim, querendo fazer huma expreſſaõ racional, podemos uſar de tentativa, igualando a variavel, ou huma funçaõ qualquer della, a huma nova variavel ou a huma ſua funçaõ, deixando neſta alguma quantidade indeterminada, que ſirva para o fim que nos propomos.

Querendo, por exemplo, ſaber em que caſos podemos fazer racional a quantidade $x^m dx\ (a + bx^n)^p$, ſupporemos $(a + bx^n)^p = z^q$, ſendo q indeterminado, e teremos $x^m dx\ (a + bx^n)^p$,

$$= \frac{q}{npb} z^{\frac{q}{p} + q - 1} dz \,.\, \left(\frac{z^{\frac{q}{p}} - a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n} - 1}, \text{ que}$$

fazendo $q = p$ ſe reduz a racional, todas as vezes que $\frac{m+1}{n} - 1$ for numero inteiro negativo; porque ſe for numero inteiro poſitivo ou cifra, a expreſſaõ he integravel em qualquer valor de q. Se o valor de p for $\pm \frac{k}{2}$, ſendo k hum numero inteiro impar, a expreſſaõ ſe reduzirá ao caſo mencionado (143), fazendo $q = k$, ſe for $\frac{m+1}{n} = \pm \frac{k'}{2}$, ſendo k' hum numero inteiro impar.

146 Naõ he preciſo extender mais eſte genero de transformações; baſta notar, que muitas vezes ſe facilitaõ certas integrações, igualando a varia-

riavel a huma fracçaõ tal como $\frac{1}{z}$. Por exemplo, se nos dessem $\frac{x^{15}dx + adx}{x^{20} + x^{18}}$; fazendo $x = \frac{1}{z}$, teriamos $\frac{-z^{3}dz - az^{18}dz}{1 + zz}$, que por meio da divisaõ se reduziria a huma serie de monomios, e a huma quantidade da fórma $\frac{Adz}{1 + zz}$, cujo integral he actualmente conhecido.

Da integraçaõ das quantidades exponenciais e logarithmicas.

147 A Regra geral, que se póde dar sobre a integraçaõ das quantidades exponenciais consiste em tentar resolve-las em dous factores, dos quais hum seja a differencial do logarithmo do outro, ou huma parte constante della (28); porque entaõ para integrar naõ ha mais que dividir pela differencial do logarithmo do segundo factor.

Assim vemos que $x^{y}\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)$ he integravel, porque o factor $dylx + \frac{ydx}{x}$ he a differencial de ylx, que he o logarithmo de x^{y}; teremos pois $\int x^{y}\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right) = \frac{x^{y}\left(dylx + \frac{ydx}{x}\right)}{\frac{d(lx^{y})}{x^{y}}} =$

$x^y + C$. Do mesmo modo $e^{ax}dx$ he integravel, porque dx he a differencial do logarithmo de e^{ax}, dividida por huma constante; logo teremos $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}dx}{adxle} = \frac{e^{ax}}{ale}$. Se e for o numero cujo logarithmo $= 1$, a regra se reduz a dividir a differencial proposta pela differencial do expoente de e.

Se tivermos para integrar $x^m e^{ax}dx$, podemos faze-lo quando m he numero inteiro positivo, suppondo $\int x^m e^{ax}dx = e^{ax}(Ax^m + Bx^{m-1} + Ex^{m-2} + \ldots + k)$. Seja proposta, por exemplo, a quantidade $x^2 e^{ax}dx$; faremos $\int x^2 e^{ax}dx = e^{ax}(Ax^2 + Bx + E)$, o que, differenciando e dividindo por $a^{ax}dx$, dá

$$x^2 = \left\{\begin{matrix} Aale.x^2 + Bale.x + Eale \\ + 2Ax + B \end{matrix}\right\};$$

logo $A = \frac{1}{ale}$, $B = \frac{-2}{a^2l^2e}$, $E = \frac{2}{a^3l^3e}$, e conseguintemente $\int x^2 e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{ale} - \frac{2x}{a^2l^2e} + \frac{2}{a^3l^3e}\right) + C$. Se for $le = 1$, será $\int x^2e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) + C$.

Em geral: Como integrando por partes temos

$$\int x^m e^{ax}dx = \frac{x^m e^{ax}}{ale} - \frac{m}{ale}\int x^{m-1} e^{ax}dx,$$

$$\int x^{m-1} e^{ax} dx = \frac{x^{m-1} e^{ax}}{ale} - \frac{m-1}{ale} \int x^{m-2} e^{ax} dx,$$

e assim por diante; será

$$\int x^m e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{ale} \left(x^m - \frac{m}{ale} x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{a^2 l^2 e} x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{a^3 l^3 e} x^{m-3} + \&c.\right)$$

Se $m = -1$, isto he, se a expressaõ for $\frac{e^{ax}dx}{x}$, reduziremos e^{ax} em serie, e integraremos termo por termo.

Na integraçaõ de muitas quantidades, principalmente das que contém logarithmos, podemos usar com vantagem do numero e, cujo logarithmo he 1. Por exemplo, se tivermos para integrar $x^n dx l^m x$, faremos $lx = z = zle$, o que dá $x = e^z$, $dx = e^z dz$; e conseguintemente $x^n dx l^m x = z^m e^{(n+1)z} dz$, que se integra nos mesmos casos que a precedente, e do mesmo modo. Se $m = -1$, será $\int \frac{e^{(n+1)z} dz}{z} = \int \frac{dz}{z} \left(1 + (n+1)z + \frac{(n+1)^2 z^2}{2} + \frac{(n+1)^3 z^3}{2 \cdot 3} + \&c.\right) = C + lz + (n+1)z + \frac{(n+1)^2 z^2}{2 \cdot 2} + \frac{(n+1)^3 z^3}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \&c$; logo $\int \frac{x^n dx}{lx} = C + l \,.\, lx + (n+1)\, lx + \frac{(n+1)^2 l^2 x}{2 \cdot 2} + \frac{(n+1)^3 l^3 x}{2 \cdot 3 \cdot 3} + \&c$, que no caso

do

de $n = 0$ dá $\int \frac{dx}{lx}$, de huma differencial apparentemente taõ ſimples, igual á ſerie infinita $C + l.lx + lx + \frac{l^2x}{2.2} + \frac{l^3x}{2.3.3} + \&c$; e no caſo de $n = -1$ dá $\int \frac{dx}{xlx} = C + l.lx$, como ſe ſabe (27) independentemente da ſerie.

Da integraçaõ das quantidades de duas, ou mais variaveis.

148 SE nos lembrarmos da regra dada para differenciar as quantidades de muitas variaveis, facilmente veremos, que para integrar as differenciais de muitas variaveis (quando iſſo he poſſivel), devemos ajuntar todos os termos affectos da differencial de huma meſma variavel, e integra-los como ſe todas as outras variaveis foſſem conſtantes. Entaõ ſe eſte integral ſe differenciar fazendo variar ſucceſſivamente todas as variaveis, e o reſultado ſe tirar da differencial propoſta, o integral achado ſerá (ajuntando-lhe huma conſtante) o integral verdadeiro, ſe naõ houver reſto. Porém ſe o houver, nelle naõ entrará a variavel a reſpeito da qual ſe fez a integraçaõ; praticar-ſe-ha pois no meſmo reſto de hum modo analogo ao precedente, e aſſim por diante em ordem a cada huma das variaveis.

Por exemplo, ſe for dada a quantidade $3x^2ydx$
+

$+ x^3dy + 5xy^4dy + y^5dx$, tomaremos os dous termos affectos de dx, a saber $3x^2ydx + y^5dx$, e integrando-os como se y fosse constante, teremos $x^3y + y^5x$. E como a differencial desta quantidade, tomada em ordem a x e y, sendo tirada da differencial proposta naõ dá resto algum, concluiremos que o integral he $x^3y + y^5x + C$.

Se tivermos $x^3dy + 3x^2ydx + x^2dz + 2xzdx + xdx + y^2dy$; ajuntando todos os termos affectos de dx, e integrando na supposiçaõ de y e z serem constantes, acharemos $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$. Porém como subtrahindo da quantidade proposta a differencial da quantidade achada, tomada em ordem a x, y e z, apparece y^2dy, ajuntaremos o integral $\frac{y^3}{3}$ deste resto ao que ja se achou, e teremos o integral total $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C$.

149 Como nem sempre he possivel integrar todas as differenciais de muitas variaveis, será conveniente que mostremos o caracter, porque se distingue quando a integraçaõ he possivel.

150 Para isso deve-se notar, que se em qualquer funçaõ Q de duas quantidades x e y substituirmos primeiramente, em lugar de x, huma quantidade qualquer p; e no resultado substituirmos em lugar de y huma quantidade q, virá o mesmo que te-

teríamos, ſe houveſſemos ſubſtituido primeiramente q em lugar de y, e depois p em lugar de x; iſto he evidente.

151 Donde ſe ſegue que ſe differenciarmos huma funçaõ qualquer Q de x e y, tomando primeiramente ſó a x como variavel, e depois differenciarmos o reſultado, conſiderando ſó a y como variavel, teremos o meſmo que achariamos, ſe principiaſſemos por differenciar ſómente em ordem a y, e differenciaſſemos depois o reſultado em ordem a x ſómente.

Com effeito, ſupponhamos que ſubſtituindo primeiramente $x + dx$ em lugar de x, Q ſe muda em Q'; ſerá $Q' - Q$ a differencial. Supponhamos que pondo neſta $y + dy$ em lugar de y, Q' ſe muda em Q'', e Q em Q''', de maneira que $Q' - Q$ ſe torne em $Q'' - Q'''$; ſerá $Q'' - Q''' - Q' + Q$ a ſegunda differencial.

Paſſando agora a fazer as ſubſtituições em ſentido contrario, como pela ſubſtituiçaõ de $y + dy$ em lugar de y, Q ſe torna em Q''', ſerá $Q''' - Q$ a primeira differencial na ſuppoſiçaõ de y variavel. Se neſta quantidade puzermos $x + dx$ em lugar de x, Q ſe mudará em Q' como acima; e Q''' (150) ſe tornará em Q'', de maneira que $Q''' - Q$ ſe tornará em $Q'' - Q'$; logo a ſegunda differencial ſerá $Q'' - Q' - Q''' + Q$, identicamente a meſma que a de cima.

Iſto

Isto posto adoptaremos a notação seguinte. Seja A huma função de x e y; representaremos por $\frac{dA}{dy}dy$ a differencial de A tomada fazendo variar y, e por $\frac{dA}{dx}dx$ a de A tomada fazendo variar x. Da mesma sore $\frac{ddA}{dxdy} \cdot dxdy$ indicará que primeiramente se faz a differenciação de A, suppondo só x variavel, e que depois se differenceia o resultado fazendo variar sómente y.

152 Seja agora $Adx + Bdy$ huma differencial exacta, e M o seu integral; teremos $\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy = Adx + Bdy$; logo $\frac{dM}{dx} = A$, e $\frac{dM}{dy} = B$; como tambem $\frac{ddM}{dxdy}dy = \frac{dA}{dy}dy$, e $\frac{ddM}{dydx}dx = \frac{dB}{dx}dx$, ou $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{dA}{dy}$, e $\frac{ddM}{dydx} = \frac{dB}{dx}$; mas demonstrámos (151) que $\frac{ddM}{dxdy}dxdy = \frac{ddM}{dydx}dydx$; logo $\frac{ddM}{dxdy} = \frac{ddM}{dydx}$; logo tambem $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; quer dizer,

que

que *se* Adx + Bdy *he huma differencial completa, a differencial de* A, *tomada fazendo variar sómente* x, *e dividida por* dy, *deve ser igual á differencial de* B, *tomada fazendo variar só* y, *e dividida por* dx.

Assim $\frac{1}{3}y^3dx + xy^2dy$ he huma differencial completa, porque $\frac{d(\frac{1}{3}y^3)}{dy} = \frac{d(xy^2)}{dx}$; e com effeito o primeiro membro reduz-se a $\frac{y^2dy}{dy}$, e o segundo a $\frac{y^2dx}{dx}$: logo integrando (148) acharemos $\frac{1}{3}y^3x + C$. Pelo contrario $xydx + 2xdy$ naõ he integravel, porque $\frac{d(xy)}{dy}$ naõ he igual a $\frac{d(2x)}{dx}$.

Do mesmo modo a differencial $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ he exacta, porque $\frac{d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)}{dx}$, ou $\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2 - y^2 + 2x^2}{(x^2+y^2)^2}$; com effeito a quantidade proposta he a differencial de *Arc. tang* $\frac{x}{y}$.

Fazendo o meſmo exame na expreſſaõ $\frac{ae^x dx}{\sqrt{(a^2+y^2)}} - \frac{ae^x ydy}{\sqrt{(a^2+y^2)^3}}$, conheceremos que he huma differencial exacta; cujo integral ſerá $\frac{ae^x}{\sqrt{(a^2+y^2)}} + C$.

153 Se na differencial propoſta entrarem tres variaveis, iſto he ſe a differencial conſtar de tres termos ou tiver a fórma $Adx + Bdy + Cdz$, para que ſeja completa, ou para que poſſa integrar-ſe, devem ter lugar eſtas condições $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, $\frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx}$, $\frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$. Com effeito podemos conſiderar ſucceſſivamente z, y e x como conſtantes, e a differencial que entaõ naõ tem mais que dous termos (porque eſta ſuppoſiçaõ dá $dz = 0$, ou $dy = 0$, ou $dx = 0$) ha-de ſer huma differencial completa, ſe a propoſta o for; logo deve ter em cada caſo as condições das differenciais completas de duas variaveis.

Geralmente, em huma differencial completa de hum numero qualquer de variaveis haverá tantas equações identicas, a que ſe dá o nome de *equações de condiçaõ*, quantas forem as combinações duas a duas, que admittirem os termos da differencial propoſta.

154 ADVERTENCIA. Seja Q huma funçaõ desconhecida de x, y e constantes, e supponhamos que he conhecida a sua differencial Adx tomada na supposiçaõ de ser y constante. Se quizermos ter a differencial total de Q, supporemos que ella he $Adx + Bdy$; entaõ B deve ser tal que tenhamos $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$; logo $dB = \frac{dA}{dy} dx$. Integremos considerando x só como variavel, porque em B tambem fizemos variar sómente x; teremos $B = \int \frac{dA}{dy} dx$, e por conseguinte $Bdy = dy \int \frac{dA}{dy} dx$. Mas pela hypothese temos $Q = \int Adx$, fazendo-se a integraçaõ considerando sómente x como variavel; logo a differencial completa de Q ou de $\int Adx$ he $Adx + dy \int \frac{dA}{dy} dx$, onde a integraçaõ $\int \frac{dA}{dy} dx$ deve fazer-se, tomando y como constante.

Das Equações differenciais.

155 QUando a equaçaõ differencial proposta naõ contém mais que duas variaveis x e y; se ella estiver *separada*, isto he se os x e dx estiverem em hum só membro, e os y e dy no outro, a inte-

tegraçaõ ſe reduz a fazer uſo em cada membro das regras que havemos dado para as differenciais de huma ſó variavel.

Aſſim a equaçaõ geral de dous termos $ax^m y^n dx = by^q x^r dy$, na qual podemos ſeparar immediatamente as indeterminadas dividindo por $y^n x^r$, reduz-ſe a $ax^{m-r}dx = by^{q-r}dy$, cujo integral he $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = \frac{by^{q-n+1}}{q-n+1} + C$.

156 Porém como acontece muitas vezes, que hum dos dous membros da equaçaõ differencial ſeparada, ou ambos elles naõ ſejaõ integraveis algebricamente, e com tudo a equaçaõ poſſa ſer algebrica, ou ao menos reduzir-ſe a huma fórma tal; ſerá conveniente, que examinemos os caſos que ſe encontraõ mais frequentemente.

I Se na equaçaõ antecedente for $m - r = -1$, e $q - n = -1$, teremos $\frac{adx}{x} = \frac{bdy}{y}$, cujo integral naõ ſe acha para cada membro ſenaõ por meio dos logarithmos; de ſorte que vem $alx = bly + lC$, ſuppondo livremente, como he licito, que a conſtante he hum logarithmo. Porém eſta equaçaõ póde fazer-ſe algebrica, eſcrevendo-ſe deſte modo $lx^a = ly^b + lC$, ou deſte $lx^a = lCy^b$; porque como ſendo os dous logarithmos iguais, as quantidades reſpectivas devem ſer iguais, teremos $x^a = y^b$, que he huma equaçaõ algebrica.

157

157 II Se for sómente $q - n = -1$, a equação se reduzirá a $ax^{m-r}dx = \frac{bdy}{y}$, cujo integral he $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1} = bly + lC$. Porém podemos dar huma fórma algebrica a esta equação, multiplicando o primeiro membro por le, sendo e (114) o numero cujo logarithmo he 1, o que não altera a equação. Teremos pois $\frac{ax^{m-r+1}}{m-r+1}le = bly$ $+ lC$, ou fazendo $m - r + 1 = p$, $le^{\frac{ax^p}{p}} = lCy^b$; logo $e^{\frac{ax^p}{p}} = Cy^b$.

158 III Se a equação for $ndx = \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$; como o segundo membro exprime o elemento de hum arco de circulo, cujo seno he z, e o raio 1, será z o seno de $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, isto he, de $\int ndx$ ou de $nx + C$; logo o integral será $z = sen\,(nx + C)$.

Do mesmo modo da equação $ndx = \frac{-dz}{\sqrt{(1-zz)}}$ concluiremos $z = cos\,(nx + C)$.

159 A equação $ndx = \frac{dz}{1+zz}$ tambem dá $z = tang\,(nx + C)$. Porém se tivermos $ndx =$

O bdz

$\frac{bdz}{a + fzz}$, para a reduzir á fórma da precedente faremos $z\sqrt{f} = u\sqrt{a}$, e virá $ndx = b\sqrt{\frac{1}{af}} \cdot \frac{du}{1 + uu}$, isto he $\frac{du}{1+uu} = \frac{n\sqrt{af}}{b} dx$, que dá $u = tang\left(\frac{n\sqrt{af}}{b} x + C\right)$; logo $z = \sqrt{\frac{a}{f}} \cdot tang\left(\frac{n\sqrt{af}}{b} x + C\right)$.

160 Note-se que nas expressões achadas $sen\,(nx + C)$, $tang\,(nx + C)$ &c, $nx + C$ exprime o comprimento absoluto do arco em partes do raio 1. Porem como he mais commodo usar antes do numero dos gráos, devemos reduzir os arcos a gráos, o que he facil dividindo-os pelo numero de partes do raio de que consta hum gráo, isto he por 0,0174533, ou (que vem a ser o mesmo) multiplicando-os por 57,2957795. Assim o seno do arco que tem o comprimento b, ou o seno do arco que tem o numero de gráos expresso por $b \times 57{,}2957795$, vem a ser a mesma cousa.

161 IV Na equaçaõ $\frac{ndx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}}$ em que ambos os membros exprimem os elementos de dous arcos, cuja razaõ he a de $1 : n$, e cujos senos saõ x e y, faremos $\sqrt{(1 - xx)} = x\sqrt{-1} - z$, $\sqrt{(1 - yy)} = y\sqrt{-1} - t$, e virá a trans-

fosformada racional $\frac{ndz}{z} = \frac{dt}{t}$, cujo integral (156) he $Ct = z^n$; logo $C[y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}]^n$.

Querendo fazer uſo deſta equaçaõ, que exprime geralmente a relaçaõ dos ſenos x e y de dous arcos multiplos hum do outro, devemos determinar antes diſſo a conſtante. Supponhamos como he licito, que os dous arcos tem a meſma origem; entaõ ſerá ao meſmo tempo $x = 0$, e $y = 0$; e por conſeguinte $-C\sqrt{1} = (-\sqrt{1})^n$, ou $-C = \pm 1$, conforme n for par ou impar; logo $\mp[y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)}] = [x\sqrt{-1} - \sqrt{(1-xx)}]^n$, ſervindo o ſinal ſuperior para n par, e o inferior para n impar.

Em cada hum dos caſos particulares ſempre poderemos fazer deſapparecer as quantidades imaginarias; o meio porém mais ſimples de o conſeguir he igualar a nada a ſoma das quantidades reais, depois de haver transpoſto tudo para hum ſó membro; entaõ veremos, que a equaçaõ que reſtar ſerá diviſivel por $\sqrt{-1}$, e a meſma que ſe tiver formado, igualando a nada a ſoma das quantidades reais. Seja, por exemplo, $n = 2$; teremos $-y\sqrt{-1} + \sqrt{(1-yy)} = -xx - 2x\sqrt{-1}.\sqrt{(1-xx)} + 1 - xx$, ou $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 + 2x\sqrt{-1}.\sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{-1} = 0$. Igualando pois a nada a ſoma das quantidades reais, virá

$\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = 0$; e a equaçaõ total ſe reduzirá a $2x\sqrt{-1} \cdot \sqrt{(1-xx)} - y\sqrt{-1} = 0$, que ſendo dividida por $\sqrt{-1}$ dá $y = 2x\sqrt{(1-xx)}$ (Trig. 38), a meſma que a outra $\sqrt{(1-yy)} + 2xx - 1 = 0$, como ſe póde ver elevando ambas ao quadrado.

Do meſmo modo ſe podem achar os coſenos e as tangentes dos arcos multiplos. Quanto a eſtas ultimas integraremos $\frac{ndx}{1+xx} = \frac{dy}{1+yy}$, reſolvendo $1+xx$ em $(1+x\sqrt{-1})(1-x\sqrt{-1})$, e $1+yy$ em $(1+y\sqrt{-1})(1-y\sqrt{-1})$, e praticando depois conforme ſe enſinou nas fracções racionais (133 e 135).

162 Para moſtrarmos incidentemente hum modo util de exprimir o ſeno, o coſeno, e a tangente de hum arco, integremos a equaçaõ $dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-yy)}}$, que exprime a relaçaõ entre hum arco x e o ſeu ſeno y. Se fizermos $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} - z$, virá $\frac{dz}{z} = -dx\sqrt{-1}$, cujo integral he $lz = -x\sqrt{-1} + lC$, ou $lz = -x\sqrt{-1}\, le + lC$, que dá z ou $y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)} = Ce^{-x\sqrt{-1}}$. Quanto á determinaçaõ da conſtante, como ao arco $x = 0$ correſponde o ſeu ſeno $y = 0$,

$y = 0$, teremos $-\sqrt{1} = C$; logo $y\sqrt{-1} - \sqrt{(1-yy)} = -e^{-x\sqrt{-1}}$, e por conseguinte $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}$. Quadrando pois e reduzindo, teremos $y = \frac{1 - e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1} \cdot e^{-x\sqrt{-1}}} =$
$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, isto he $sen\ x =$
$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

Se no segundo membro da equaçaõ $\sqrt{(1-yy)} = y\sqrt{-1} + e^{-x\sqrt{-1}}$ puzermos em lugar de y o seu valor achado, teremos $\sqrt{(1-yy)}$, isto he, $cos\ x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$; e por conseguinte $\frac{sen\ x}{cos\ x}$ ou $tang\ x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1}$.

Voltemos á integraçaõ das equações.

163 Temos visto que huma equaçaõ differencial proposta, representada geralmente por $Adx + Bdy = 0$, he integravel, todas as vezes que A for funçaõ só de x ou de y, e o mesmo aconteçer a B. Quando assim naõ for, isto he quando as indeterminadas naõ estiverem separadas, antes de tentar o reduzillas a esse estado, devemos examinar se acaso a equaçaõ será integravel na fórma em que se acha, isto he, examinaremos (152) se $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. Quando esta equaçaõ tiver lugar, integraremos como fica dito (148).

164 Póde porém acontecer que esta condiçaõ naõ tenha lugar, e sem embargo a equaçaõ seja integravel; mas para isso será necessario multiplicalla por hum factor conveniente, funçaõ de x, y e constantes, o que naõ muda a igualdade.

Seja P este factor; será $APdx + BPdy = 0$ huma differencial completa; logo $\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d(BP)}{dx}$. Assim toda a questaõ se reduz a achar para P huma funçaõ de x e y, que satisfaça a esta equaçaõ. Porém como esta indagaçaõ requer hum exame muito extenso, naõ trataremos de achar P, senaõ no caso de elle incluir sómente x e constantes, ou sómente y e constantes.

Supponhamos pois que P deve ser funçaõ de x; teremos simplesmente $P\frac{dA}{dy} = B\frac{dP}{dx} + P\frac{dB}{dx}$, donde se tira $\frac{dP}{P} = \frac{\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)}{B}dx$; logo com facilidade acharemos P, se $\frac{\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}}{B}$ se reduzir a huma funçaõ de x, como deve ser necessariamente, para que P seja huma funçaõ de x sómente conforme a supposiçaõ.

Poderiamos tambem achar o factor, no caso de elle ser huma funçaõ de x, multiplicada ou dividida por huma funçaõ de y de huma fórma conhecida.

165 Por efte meio podemos integrar geralmente qualquer equaçaõ da feguinte fórma $Xy^q dy + X'y^{q+1}dx + X''y^r dx = 0$, fendo X, X', X'' quaisquer funções de x; q e r quaisquer expoentes.

Poderiamos procurar fe ella fe faz integravel, multiplicando-a por hum factor da fórma Py^n, fendo P huma funçaõ de x, e n hum expoente indeterminado; e achariamos que iffo he poffivel, fuppondo $n = -r$. Porém he mais fimples reduzir immediatamente a equaçaõ á fórma

$$y^{q-r}dy + Fy^{q-r+1}dx + F'dx = 0,$$

dividindo por Xy^r, e reprefentando por F e F' os quocientes $\frac{X'}{X}$ e $\frac{X''}{X}$. Entaõ para integrar efta, fupponhamos que P, funçaõ de x, he o factor conveniente; teremos

$$Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx + F'Pdx = 0.$$

Como $F'P$ he huma funçaõ de x, $\int F'Pdx$ fe reduzirá á integraçaõ das quantidades de huma fó variavel; e affim naõ ha neceffidade fenaõ de fazer $Py^{q-r}dy + FPy^{q-r+1}dx$ huma differencial completa, para o que fe requer que $\frac{d(Py^{q-r})}{dx}$ $= \frac{d(FPy^{q-r+1})}{dy}$; ifto he, que $y^{q-r}\frac{dP}{dx} =$

(q —

$(q-r+1)y^{q-r}FP$, donde ſe tira $\frac{dP}{P} = (q-r+1)Fdx$; e integrando, $lP = \int(q-r+1)Fdx$; logo $P = e^{\int(q-r+1)Fdx}$. Subſtituindo pois eſte valor de P na equaçaõ $Py^{q-r}dy + \&c$, e integrando teremos

$$\frac{y^{q-r+1}}{q-r+1}e^{\int(q-r+1)Fdx} + \int F'dxe^{\int(q-r+1)Fdx} + C = 0.$$

Naõ ajuntámos conſtante na integraçaõ que deu P, porque naõ havendo condiçaõ alguma para a determinar, fica livre o ſuppolla nulla.

Exemplo. Se tivermos para integrar $dy + \frac{aydx}{x} + (bx^2 + cx + f)dx = 0$; multiplicando pelo factor P, virá

$$Pdy + \frac{ayPdx}{x} + P(bx^2 + cx + f)dx = 0,$$

Deve pois ſer $\frac{dP}{dx} = \frac{d\left(\frac{ayP}{x}\right)}{dy} = \frac{aP}{x}$; logo $\frac{dP}{P} = \frac{adx}{x}$, que dá $lP = alx$, iſto he $P = x^a$. Aſſim a equaçaõ ſe muda em

$$x^a dy + ax^{a-1}ydx + bx^{a+2}dx + cx^{a+1}dx + fx^a dx,$$

cujo integral he $x^a y + \frac{bx^{a+3}}{a+3} + \frac{cx^{a+2}}{a+2} + \frac{fx^{a+1}}{a+1} + C = 0.$ 166

166 A equaçaõ geral que acabamos de integrar, encontra-se muitas vezes; e o methodo, de que nos havemos servido, póde applicar-se a outros muitos casos.

Se tivermos, por exemplo, as duas equações *

$$dx + ady + (bx + cy)Tdt = 0,$$

$$kdx + a'dy + (b'x + c'y)Tdt = 0,$$

sendo x, y e t tres variaveis; a, b, c, a' &c. constantes, e T huma funçaõ qualquer de t; poderemos integrallas pelo methodo exposto, praticando da maneira seguinte.

Multiplique-se huma dellas, v. g. a primeira, por hum coefficiente constante e indeterminado g, e ajuntando o producto com a segunda, multiplique-se a totalidade por hum factor P, que se suppõe ser funçaõ de t; teremos

$$(gP + kP)\,dx + (gaP + a'P)\,dy + \left[(gbP + b'P)\,x + (gcP + c'P)\,y\right]Tdt = 0$$

Suppondo agora que esta equaçaõ he huma differencial completa, deve ser (153)

$$1^{\circ}\ \frac{d(gP + kP)}{dt} = \frac{d\left[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y\right]}{dx}T;$$

$$2^{\circ}\ \frac{d(gaP + a'P)}{dt} = \frac{d\left[(gbP + b'P)x + (gcP + c'P)y\right]}{dy}T;$$

$$3^{\circ}\ \frac{d(gP + kP)}{dy} = \frac{d(gaP + a'P)}{dx}.$$

Mas

* Veja-se nas *Mem. Acad. de Berlin ann.* 1748 o methodo que Mr. d' Alembert deu para integrar estas equações.

Mas esta ultima equaçaõ tem lugar, porque se reduz a $0 = 0$ conforme a supposiçaõ de P ser funçaõ de t. Quanto ás outras duas, ellas daõ $(g+k)\frac{dP}{dt} = (gb+b')PT$, e $(ga+a')\frac{dP}{dt} = (gc+c')PT$; donde se tira $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}Tdt$, e $\frac{dP}{P} = \frac{gc+c'}{ga+a'}Tdt$; logo igualando estes dous valores de $\frac{dP}{P}$, teremos $\frac{gb+b'}{g+k} = \frac{gc+c'}{ga+a'}$; equaçaõ que dará dous valores para g, por quanto he do segundo gráo.

Agora sendo conhecido g, com facilidade acharemos P por meio da equaçaõ $\frac{dP}{P} = \frac{gb+b'}{g+k}Tdt$, que dá $P = e^{\int \frac{gb+b'}{g+b}Tdt}$. E como a equaçaõ $(gP+kP)dx +$ &c. he actualmente huma differencial exacta, se a integrarmos, teremos $(gP+kP)x + (gaP+a'P)y + C = 0$. Seja g o primeiro valor de g deduzido da equaçaõ do segundo gráo, g' o segundo valor, e P' o valor de P quando nelle se substitue g' em lugar de g; teremos tambem $(g'P'+kP')x + (g'aP' + a'P')y$

$a'P')y + C' = o$, porque naõ ha razaõ para nos ſervirmos de hum valor de g com preferencia ao outro. Logo por meio deſtas duas equações deduziremos facilmente os valores de x e y, que viráõ expreſſos em t e em conſtantes.

Se a funçaõ T de t, que entra nas duas equações, for differente em ambas ellas, ſeguiremos o meſmo methodo, conſiderando porém g como funçaõ de t; e a integraçaõ ſe reduzirá á de huma equaçaõ a duas variaveis ſómente g e t.

Se tiveſſemos tres equações a quatro variaveis x, y, z e t, deſta fórma $adx + bdy + cdz + (ex + fy + ht)Tdt = o$, ſendo a funçaõ T a meſma em todas; integrariamos do meſmo modo, multiplicando a ſegunda e a terceira por quantidades conſtantes e indeterminadas g e g': depois ajuntando os dous productos com a primeira, multiplicariamos a ſoma por hum factor P, funçaõ de t ſómente. Suppondo entaõ que eſta nova equaçaõ era huma differencial exacta, achariamos (153) as equações que devem determinar g, g' e P. A equaçaõ que determinar g, ou a que determinar g', ſerá do terceiro gráo; teremos pois tres valores para g, tres correſpondentes para g', e tres correſpondentes para P; o que dará, mudando a conſtante para cada valor de g, tres integrais, por meio dos quais com facilidade ſe determinaráõ x, y e z em t.

Bem ſe vê agora o que ſe deve fazer quando hou-

houver maior numero de variaveis, com tanto que as equações tenhaõ a meſma fórma que as precedentes. O methodo naõ variaria, ainda que nellas houveſſe hum ou muitos termos expreſſos puramente em t, dt e conſtantes.

167 Se porém for dado em geral hum numero qualquer m de equações, em que entrem $m+1$ variaveis combinadas entre ſi de qualquer maneira; multiplicaremos a ſegunda, terceira, &c até a ultima, reſpectivamente por g, g', g'', &c funções indeterminadas das variaveis; entaõ havendo ajuntado os productos com a primeira, e multiplicado a ſoma por hum factor P, funçaõ tambem das meſmas variaveis, ſupporemos que a equaçaõ total he huma differencial completa.

Sejaõ dadas, por exemplo, as duas equações $Adx+Bdy+Cdz=0$, $A'dx+B'dy+C'dz=0$.

Formando, como ſe acaba de enſinar, a equaçaõ
$$P(A+A'g)dx+P(B+B'g)dy+P(C+C'g)dz=0;$$
ſerá neceſſario, para que eſta ſeja differencial completa, que

$$\frac{d[P(A+A'g)]}{dy}=\frac{d[P(B+B'g)]}{dx};$$

$$\frac{d[P(A+A'g)]}{dz}=\frac{d[P(C+C'g)]}{dx};$$

$$\frac{d[P(B+B'g)]}{dz}=\frac{d[P(C+C'g)]}{dy}:$$

iſto

isto he,

$$\frac{dP}{dy}(A+A'g)+P\frac{d(A+A'g)}{dy}=$$
$$\frac{dP}{dx}(B+B'g)+P\frac{d(B+B'g)}{dx};$$
$$\frac{dP}{dz}(A+A'g)+P\frac{d(A+A'g)}{dz}=$$
$$\frac{dP}{dx}(C+C'g)+P\frac{d(C+C'g)}{dx};$$
$$\frac{dP}{dz}(B+B'g)+P\frac{d(B+B'g)}{dz}=$$
$$\frac{dP}{dy}(C+C'g)+P\frac{d(C+C'g)}{dy}.$$

Se por meio das duas ultimas equações tirarmos os valores de $\frac{dP}{dx}$ e de $\frac{dP}{dy}$, e os substituirmos na primeira, teremos

$$(C+C'g)\left[\frac{d(A+A'g)}{dy}-\frac{d(B+B'g)}{dx}\right]+$$
$$(A+A'g)\left[\frac{d(B+B'g)}{dz}-\frac{d(C+C'g)}{dy}\right]+$$
$$(B+B'g)\left[\frac{d(C+C'g)}{dx}-\frac{d(A+A'g)}{dz}\right]=0,$$

equaçaõ independente de P. Buscaremos pois para g huma funçaõ de x, y, e z, a mais geral que for pos-

possivel, e que possa satisfazer a esta equaçaõ. Depois de ter achado g, buscaremos para P huma funçaõ de x, y e z, que satisfaça a duas quaisquer das tres equações de cima; o que na verdade muitas vezes requer grandes indagações, mas ao menos naõ envolve impossibilidade.

Advirta-se, que se naõ tivessemos mais que huma equaçaõ, isto he, se fosse $A'=0$, $B'=0$, $C'=0$, a ultima equaçaõ achada se reduziria a $C\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)+A\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)+B\left(\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dz}\right)=0$; equaçaõ de condiçaõ, que mostra a relaçaõ que deve haver entre os coefficientes A, B, C, para que seja integravel huma equaçaõ differencial de tres variaveis $Adx+Bdy+Cdz=0$, ainda no caso de se multiplicar por hum factor. Feita esta averigoaçaõ, ou preenchendo-se a condiçaõ $C\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)+\&c=0$, determinaremos o factor P de modo que satisfaça a duas das tres equações $\frac{d(AP)}{dy}=\frac{d(BP)}{dx}$, $\frac{d(AP)}{dz}=\frac{d(CP)}{dx}$, $\frac{d(BP)}{dz}=\frac{d(CP)}{dy}$.

Daqui se vê o que devemos fazer, quando for maior o numero das equações e das variaveis. Pelo mesmo meio poderemos achar, em que equações

ções baſta que g ſeja huma conſtante, ou huma funçaõ de huma ou de duas &c variaveis.

168 Quando a equaçaõ differencial propoſta naõ ſe comprehende nos caſos de que havemos tratado até aqui, devemos ver ſe ſerá poſſivel o ſeparar as variaveis. Para iſſo algumas vezes baſta unicamente a applicaçaõ das regras ordinarias da Algebra; outras vezes ſaõ neceſſarias as transformações: em muitas equações porém ignora-ſe qual ſeja a transformaçaõ conveniente.

A equaçaõ $ax^n dx + by^q x^n dx = y^k dy\,(e + fx^h)^r$ ſepara-ſe immediatamente pela diviſaõ, porque he o meſmo que $(a + by^q)\,x^n dx = y^k dy\,(e + fx^h)^r$, e eſta vem a ſer $\frac{x^n dx}{(e + fx^h)^r} = \frac{y^k dy}{a + by^q}$, cuja integraçaõ depende da integraçaõ das quantidades binomias de huma ſó variavel. Em geral, na equaçaõ $Adx + Bdy = 0$, ſe for $A = XY$, e $B = X'Y'$, ſendo X e X' funções de x, e Y e Y' funções de y, teremos a equaçaõ ſeparada $\frac{Xdx}{X'} = -\frac{Ydy}{Y'}$.

Porém ſe tiveſſemos $gxdx = ax^4 ydy + 2abx^2 y^3 dy + abby^5 dy$, que ſe póde eſcrever aſſim $gxdx = (x^2 + by^2)^2 aydy$, vê-ſe que a ſeparaçaõ terá lugar, ſe fizermos $x^2 + by^2 = z$; porque com effeito teremos $x^2 = z - by^2$, $xdx = \frac{1}{2}dz - bydy$, e por conſeguinte $\frac{1}{2}gdz - bgydy = azzydy$, donde ſe ſe tira $\frac{\frac{1}{2}gdz}{bg + azz} = ydy$, equaçaõ ſeparada e facil de integrar.

Como naõ podemos dar regras gerais ſobre as transformações, trataremos ſómente de alguns caſos, em que ſe conſegue a ſeparaçaõ.

169 Em geral, ſaõ ſeparaveis todas as equações homogeneas de duas variaveis, iſto he aquellas, em que a ſoma de dimensões das duas variaveis x e y he a meſma em todos os termos; e para iſſo naõ ha mais que fazer $\frac{y}{x} = z$.

Com effeito, ſe dividirmos huma equaçaõ homogenea $Adx + Bdy = 0$ por huma potencia de x, cujo expoente ſeja igual ao numero de dimensões da equaçaõ, eſtá claro que em A e B naõ haverá mais que potencias de $\frac{y}{x}$ e conſtantes; de maneira que a equaçaõ ſerá $Fdx + F'dy = 0$, ſendo F e F' funções de $\frac{y}{x}$ e de conſtantes. Iſto poſto, como $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xx}$, que dá $dx = \frac{-xx}{y} d\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{x}{y} dy$; ſe fizermos $\frac{y}{x} = z$, teremos $dx = \frac{-ydz}{zz} + \frac{dy}{z}$; logo ſubſtituindo, a equaçaõ ſe mudará em $-\frac{Fydz}{zz} +$

Fdy

$\frac{Fdy}{z} + F'dy = 0$, isto he em $-ydz + zdy + Zdy = 0$, sendo Z huma funçaõ de z; logo teremos $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{Z+z}$, equaçaõ separada.

Exemplo. Se tivermos a equaçaõ homogenea $y^3dx + y^2xdy + bx^3dy = 0$, que se póde reduzir á fórma $\frac{y^3}{x^3}dx + \frac{y^2}{x^2}dy + bdy = 0$, dividindo por x^3, porque 3 he o numero de dimensões da equaçaõ; faremos $\frac{y}{x} = z$, que dá $x = \frac{y}{z}$, $dx = \frac{zdy - ydz}{zz}$; e virá $z^2dy - yzdz + z^2dy + bdy = 0$; logo $\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{2z^2 + b}$. Agora o integral desta he $y^4 = C^4(2z^2 + b)$; e por conseguinte $y^4 = C^4\left(\frac{2y^2}{x^2} + b\right)$.

170 Seria pois muito vantajoso o poder fazer as equações homogeneas. Porém como para isso naõ ha methodo geral, devemos recorrer ás transformações. As que podem dar alguma esperança, consistem em igualar huma das variaveis, ou huma funçaõ da mesma e tambem de ambas, a huma funçaõ de huma nova variavel com expoentes indeterminados, os quais se determinaõ depois pela condiçaõ que seja homogenea a equaçaõ transformada.

Exemplo. Se quizermos achar os caſos, em que póde ſer homogenea a equaçaõ geral de tres termos $ax^m dx + by^n x^q dy + cy^k dy = 0$, faremos $x = z^h$, e virá a transformada $ahz^{mh+h-1}dz + by^n z^{qh}dy + cy^k dy = 0$, a qual ſerá homogenea quando $k = qh + n$, e $k = mh + h - 1$; logo $h = \frac{n+1}{m-q+1}$ e $k = \frac{mn+q+n}{m-q+1}$. Logo ſe os expoentes k, q, m e n forem tais, que eſta ultima equaçaõ tenha lugar, poderemos fazer a equaçaõ homogenea, e conſeguintemente ſeparar.

171 Em geral, na falta de methodos directos procuramos reduzir as equações propoſtas a outras, cuja integraçaõ ſeja conhecida. Aſſim ſe pratica, por exemplo, na equaçaõ particular $dy + ay^2dx = bx^m dx$, conhecida pelo nome de *equaçaõ de Riccati*, a qual naõ ſe ſabe integrar ſenaõ para certos valores de m.

Seja $m = 0$, teremos $dy + ay^2dx = bdx$, que he ſeparavel, e dá $\frac{dy}{b - ay^2} = dx$, cuja integraçaõ he facil.

Mas quando m tem outros valores, he neceſſario mudar a equaçaõ em outra, onde ay^2 e b eſtejaõ multiplicados por huma meſma potencia de x, porque entaõ ſerá ſeparavel. Eis-aqui o modo de achar os valores de m, que permittem eſta tranſformaçaõ.

Fa-

Façamos $y = Ax^p + x^q t$, que dá $dy = pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt$; ſubſtituindo na equaçaõ propoſta, virá $pAx^{p-1}dx + qx^{q-1}tdx + x^q dt + ax^{2q}ttdx + aAAx^{2p}dx + 2aAx^{p+q}tdx = bx^m dx$.

Supponhamos $p - 1 = 2p$, $pA + aAA = 0$, $p + q = q - 1$, $q + 2aA = 0$; teremos $p = -1$, $A = \frac{1}{a}$, $q = -2$; o que muda a transformada em $x^{-2}dt + ax^{-4}ttdx = bx^m dx$, ou em $dt + ax^{-2}ttdx = bx^{m+2}dx$, que ſerá ſeparavel, ſe $m = -4$

Façamos neſta $t = \frac{1}{z}$, ella ſe mudará em $dz + bx^{m+2}zzdx = ax^{-2}dx$. Fazendo pois $z = A'x^{p'} + x^{q'}t'$, e obrando como acima, teremos $p'A'x^{p'-1}dx + q'x^{q'-1}t'dx + x^{q'}dt' + bx^{2q'+m+2}t't'dx + bA'^2x^{2p'+m+2}dx \ldots + 2bA'x^{p'+q'+m+2}t'dx = ax^{-2}dx$.

Suppondo $2p' + m + 2 = p' - 1$, $p'A' + bA'^2 = 0$, $q' + 2bA' = 0$, $q' - 1 = p' + q' + m + 2$, teremos $p' = -m - 3$, $A' = \frac{m+3}{b}$, $q' = -2m - 6$, e $x^{-2m-6}dt' + bx^{-3m-10}t't'dx = ax^{-2}dx$, ou $dt' + bx^{-m-4}t't'dx = ax^{2m+4}dx$, que ſerá ſeparavel, ſe $-m-4 = 2m+4$, ou ſe $m = -\frac{8}{3}$.

Se fizermos $t' = \frac{1}{z'}$, depois $z' = A''x^{p''} + x^{q''}t''$, e continuarmos ſempre da meſma ſorte, acharemos ſucceſſivamente, que a equaçaõ he ſeparavel, quando $m = -\frac{12}{5}$, $m = -\frac{16}{7}$, $m = -\frac{20}{9}$ &c, iſto he em geral, quando $m = \frac{-4r}{2r-1}$, ſendo r hum numero inteiro poſitivo.

E ſubindo ás ſubſtituições antecedentes, ver-ſe-ha, que y tem por expreſſaõ

$$y = Ax^{-1} + x^{-2} \cdot \cfrac{1}{A'x^{-m-3} + x^{-2m-6} \cdot \cfrac{1}{A''x^{-2m-5} + x^{-4m-10} \cdot \cfrac{1}{A'''x^{-3m-7} + \&c}}}$$

continuando até que o expoente de x no primeiro termo do ultimo denominador ſeja $-(m+2)(r-1)-1$; e entaõ o ſegundo termo deſte denominador ſerá $x^{-(2m+4)(r-1)-2}t$; ſendo t huma variavel, que depois da ſubſtituiçaõ deſte valor de y ſe determina pela integraçaõ da equaçaõ reſultante, que entaõ he ſeparavel; he preciſo ſómente exceptuar o caſo de ſer $r = 1$, no qual devemos fazer ſimplesmente $y = Ax^{-1} + x^{-2}t$.

Tornemos á equaçaõ $dy + ay^2dx = bx^m dx$, e em lugar de ſubſtituir como acima $y = Ax^p + x^q t$

$x^q t$, façamos primeiramente $y = \frac{1}{z}$, depois $z = Ax^p + x^q t$, e continuemos a fazer o meſmo que precedentemente; concluiremos da meſma ſorte, que a equaçaõ ſe ſeparará, todas as vezes que $m = \frac{-4r}{2r+1}$, ſendo r hum numero inteiro poſitivo. O valor de y entaõ ſerá

$$y = \cfrac{1}{Ax^{-m-1} + x^{-2m-2} \cdot \cfrac{1}{A'x^{-2m-3} + x^{-4m-6} \cdot \cfrac{1}{A''x^{-3m-5} + \&c}}}$$

continuando da meſma ſorte até que o primeiro termo em x no ultimo denominador ſeja $-mr - 2r + 1$; entaõ o ſegundo termo deve ſer $x^{-2mr - 4r + 2} t$.

A equaçaõ $x^q dy + ay^2 x^n dx = bx^m dx$ reduz-ſe ao meſmo caſo, dividindo por x^q, e fazendo depois $x^{n-q+1} = z$,

Tais ſaõ os meios gerais, de que ſe faz uſo, todas as vezes que os dx e os dy naõ paſſaõ do primeiro gráo. Porém ſe paſſarem, como as equações, em que entrarem differentes potencias de dx e de dy, devem ſer homogoneas relativamente a dx e dy, dividiremos tudo por dx elevado á ſoma das dimensões de dx e dy; e reſolveremos a equaçaõ tomando $\frac{dy}{dx}$ por incognita. Tendo aſſim huma equaçaõ em dx e dy no primeiro gráo, trataremos de applicar-lhe os methodos precedentes.

Das

Das Quantidades e Equações differenciais da segunda, terceira, &c ordem.

172 A Liberdade, que temos quando differenciamos, de tomar por constante (20) qualquer differença primeira, póde facilitar a integraçaõ em muitos casos. Como porém póde acontecer, que se tenha feito constante a differencial, que naõ he a mais propria para facilitar a integraçaõ, mostraremos primeiramente de que modo huma equaçaõ differencial, em que se considerou esta ou aquella differença como constante, se reduz a outra em que naõ haja mais constante, para ao depois se poder livremente suppôr constante a differença que quizermos.

Seja pois $Adx^2 + Bdxdy + Cdy^2 + Dddy = 0$ a equaçaõ de differenças segundas a duas variaveis, em que se tenha supposto constante a differença primeira dx de huma das variaveis. Havendo dividido a equaçaõ por dx, escreveremos deste modo $Adx + Bdy + \frac{Cdy^2}{dx} + Dd\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$, que vem a ser a mesma; porque suppondo dx constante, $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ddy}{dx}$. Porém senaõ quizermos que dx seja constante, entaõ $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$; logo a equaçaõ se transforma em $Adx + Bdy$ +

$+ \frac{Cdy^2}{dx} + D\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = 0$, na qual naó ha mais differença alguma conſtante.

Seja $Adx^3 + Bdx^2dy + Cdy^2dx + Ddy^3 + Edxddy + Fdyddy + Gd^3y = 0$ a equaçaó de differenças terceiras, ſendo dx conſtante. Dividindo por dx^2, e eſcrevendo deſta fórma $Adx + Bdy + C\frac{dy^2}{dx} + D\frac{dy^3}{dx^2} + Ed\left(\frac{dy}{dx}\right) + F\frac{dy}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) + Gd\left[\left(\frac{1}{dx}\right)d\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] = 0$, faremos variar tudo nas differenciações indicadas, e virá huma equaçaó ſem differença alguma conſtante.

Exemplo. Se tivermos $dx^2dy - dy^3 = adxddy + xdxddy$, em que ſe haja ſuppoſto dx conſtante, naó ſe vê de repente como eſta equaçaó ſe poderá integrar; mas ſe fizermos dx variavel, eſcrevendo $dxdy - \frac{dy^3}{dx} = (adx + xdx)\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, poderemos na differenciaçaó indicada tomar dy por conſtante, e virá $dx^2 + xddx + addx - dy^2 = 0$, cujo integral claramente he $xdx + adx - ydy + Cdy = 0$, ajuntando huma conſtante Cdy da meſma ordem do integral. Eſta equaçaó, ſendo integrada novamente, dá $\frac{1}{2}x^2 + ax - \frac{1}{2}y^2 + Cy + C' = 0$.

173 A regra que demos (148) para integrar

as quantidades differenciais de muitas variaveis, applica-ſe ás quantidades differenciais de todas as ordens, conſiderando as differenças ddx, ddy, d^3x, d^3y, &c como outras tantas variaveis differentes.

Propondo-ſe, por exemplo, integrar $x^3ddy + 6x^2dxdy + 6xydx^2$, em que ſe ſuppoz dx conſtante; integraremos primeiramente, conſiderando ddy ſó como variavel; e teremos x^3dy, cuja differencial ſendo tirada da propoſta, vem o reſto $3x^2dxdy + 6xydx^2$. Integremos eſte, conſiderando y ſómente como variavel; virá $3x^2ydx$; quantidade que ſendo differenciada, e tirada do primeiro reſto, naõ dá mais reſto algum; logo o integral da quantidade propoſta he $x^3dy + 3x^2ydx + Cdx$, e integrando novamente teremos $x^3y + Cx + C'$.

174 Quanto ás equaçóes differenciais, integrallas-hemos do meſmo modo, quando forem integraveis no eſtado em que ſe propuzerem; o que ſe conhece procedendo á integraçaõ, e vendo ſe o ultimo reſto he nullo, como acabamos de enſinar. Póde porém acontecer, que o ultimo reſto naõ ſeja nullo, e com effeito as equaçóes ſejaõ integraveis, pela multiplicaçaõ de hum factor conveniente, que vamos a conſiderar.

Examinemos primeiramente as equaçóes de differenças ſegundas a duas variaveis, iſto he, aquellas em que naõ ha differença que paſſe da ſegunda ordem, ſeja qual for por outra parte a potencia a que dx e dy eſtejaõ elevados. Ainda que ſuppomos, que huma das differenças he conſtante; com tudo facilmente se fará applicaçaõ ao caso de serem ambas variaveis.

Representando pois por $Addy + B = 0$ a equaçaõ geral deste genero, onde A, e B saõ quaisquer funções de x, y, dx, dy e constantes; escrevamos deste modo ... $Addy + \left(\frac{B-k}{dy}\right) dy + \frac{k}{dx} dx = 0$, sendo k huma funçaõ desconhecida da mesma natureza que A e B. Multipliquemos esta equaçaõ por hum factor P, funçaõ de x, y, dx, dy e constantes; teremos

$$APddy + P\left(\frac{B-k}{dy}\right) dy + \frac{Pk}{dx} dx = 0,$$

o que suppomos ser huma differencial completa. Logo considerando as tres differenças ddy, dy e dx como de outras tantas variaveis differentes, he necessario (153) que tenhaõ lugar as tres equações

$$1^{a} \quad \frac{d(AP)}{dy} = \frac{d\left(P\frac{B-k}{dy}\right)}{ddy};$$

$$2^{a} \quad \frac{d(AP)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pk}{dx}\right)}{ddy};$$

$$3^{a} \quad \frac{d\left(P\frac{B-k}{dy}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pk}{dx}\right)}{dy}.$$

Podemos pois deduzir destas (167) huma equa-

çaõ

çaõ ſem P, a qual ſervirá para determinar k, tomando por k huma funçaõ, a mais geral que for poſſivel, de x, y, dx e dy com coefficientes indeterminados, para a ſubſtituirmos neſta meſma equaçaõ. Depois diſſo determinaremos P, tomando tambem huma funçaõ do meſmo genero, e tal que ſatisfaça a duas das tres equações de condiçaõ. Podemos porém ſimplificar eſta indagaçaõ, e limitalla a buſcar ſómente para P huma funçaõ de x, y, dx, dy, que ſatisfaça a duas equações.

Das duas primeiras equações de condiçaõ ſe tira

$$\frac{d(AP)}{dy} = -\frac{1}{dy^2} P(B-k) + \frac{1}{dy}\frac{d(PB)}{ddy}$$

$$-\frac{1}{dy}\frac{d(Pk)}{ddy}, \text{ e } \frac{d(AP)}{dx} = \frac{1}{dx}\frac{d(Pk)}{ddy}.$$ Tomando neſta ultima o valor de $\frac{d(Pk)}{ddy}$, e ſubſtituindo-o na primeira, teremos

$$P(B-k) = dy\,\frac{d(PB)}{ddy} - dxdy\,\frac{d(AP)}{dx} - dy^2\,\frac{d(AP)}{dy},$$

por onde ſerá facil de achar k, huma vez que ſeja conhecido P.

Tire-ſe deſta ultima o valor de Pk, e ſubſtitua-ſe juntamente com o de $P(B-k)$ nas equações de condiçaõ 1ª e 3ª, teremos

d

$$\frac{d(AP)}{dy} = \frac{d\left[\frac{d(PB)}{ddy} - dx\,\frac{d(AP)}{dx} - dy\,\frac{d(AP)}{dy}\right]}{ddy},$$

e

$$\frac{d\left[\frac{d(PB)}{ddy} - dx\,\frac{d(AP)}{dx} - dy\,\frac{d(AP)}{dy}\right]}{dx} =$$

$$\frac{d\left[\frac{PB}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{d(PB)}{ddy} + dy\,\frac{d(AP)}{dx} + \frac{dy^2}{dx}\,\frac{d(AP)}{dy}\right]}{dy}.$$

Reduz-ſe pois toda a queſtaõ a achar para P huma funçaõ de x, y, dx, dy e conſtantes, que ſatisfaça a eſtas duas equações. Porém ainda que iſto ſempre ſeja poſſivel, com tudo naõ he igualmente facil; por iſſo abandonamos eſta indagaçaõ geral, e paſſamos a examinar algumas equações mais limitadas, ainda que muito extenſas.

Antes de começar notaremos, que pelo que fica dito he facil o determinar, ſe a equaçaõ propoſta he integravel no eſtado em que ſe acha: naõ ha mais que ſuppôr $P = 1$. Aſſim huma equaçaõ para ſer integravel, deve ſatisfazer ás duas equações ſeguintes

$$\frac{dA}{dy} = \frac{d\left(\frac{dB}{ddy} - dx\,\frac{dA}{dx} - dy\,\frac{dA}{dy}\right)}{ddy},$$

$$\frac{d\left(\frac{dB}{ddy} - dx\,\frac{dA}{dx} - dy\,\frac{dA}{dy}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{B}{dx} - \frac{dy}{dx}\,\frac{dB}{ddy} + dy\,\frac{dA}{dx} + \frac{dy^2}{dx}\,\frac{dA}{dy}\right)}{dy}.$$

Eſta relaçaõ entre os coefficientes he geral, ſeja qual for a equaçaõ differencial da ſegunda ordem, ſendo dx conſtante.

175 Proponha-se agora integrar a equaçaõ $Gdx^2 + Hdxdy + Kdy^2 + Lddy = 0$, suppondo que tanto o factor P que a faz integravel, como as quantidades G, H, K e L, saõ unicamente funções de x, y e constantes.

Como comparando esta equaçaõ com a geral $Addy + B = 0$, temos $A = L$, e $B = Gdx^2 + Hdxdy + Kdy^2$; se substituirmos estes valores nas duas equações acima achadas para determinar P, e attendermos á supposiçaõ de que P, G, H, K, L naõ incluem nem dx, nem dy, virá

(I) $\frac{d(PL)}{dy} = KP$, e outra equaçaõ, a qual depois de nella se substituir KP em lugar $\frac{d(PL)}{dy}$, se reduz a $\frac{d\left(PHdx + KPdy - dx\,\frac{d(PL)}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(PGdx + dy\,\frac{d(PL)}{dx}\right)}{dy}$. Porém a primeira equaçaõ $\frac{d(PL)}{dy} = KP$ dá $\frac{d(KP)}{dx} = \frac{d\left(\frac{d(PL)}{dy}\right)}{dx} = \frac{dy}{dy}\,\frac{d\left(\frac{d(PL)}{dx}\right)}{dy}$, e conseguintemente $\frac{d(KP\,dy)}{dx} = \frac{}{dy}$

$$dy\,\frac{d\left(\frac{d(PL)}{dx}\right)}{dy}$$; logo a segunda equaçaõ se reduz a

$$\text{(II)}\quad \frac{d(PH)}{dx} - \frac{dd(PL)}{dxdx} * = \frac{d(PG)}{dy}.$$

Executando a differenciaçaõ indicada na equaçaõ (I), em que sómente y he considerada como variavel, teremos $\frac{dP}{P} = \frac{K}{L}dy - \frac{dL}{L}$; e integrando na mesma supposiçaõ de ser y sómente variavel, porque assim foi feita a differenciaçaõ, virá $P = \frac{X}{L} e^{\int \frac{K}{L} dy}$, sendo a constante X funçaõ de x.

Para determinar X, substituiremos este valor de P na equaçaõ (II), e dividindo por $e^{\int \frac{K}{L} dy}$, teremos huma equaçaõ, em que os y devem desapparecer, pois que X deve ser funçaõ de x, para que a equaçaõ proposta seja integravel pela multiplicaçaõ de hum factor, funçaõ sómente de x, y e constantes. A condiçaõ de desapparecerem os y dará muitas equações; mas estas deveráõ reduzir-se a huma unica, porque naõ ha mais que huma só indeterminada.

Exem-

* Por esta expressaõ $\frac{dd(PL)}{dxdx}$ entendemos que se deve 1° differenciar PL, fazendo variar x, e dividir por dx; 2° differenciar o resultado, fazendo variar x, e tornar a dividir por dx.

Exemplos.

I. Na equaçaõ da ſegunda ordem $2ydx^2 + (2x + 3yx)\, dxdy + 2x^2dy^2 + x^2yddy = 0$, que naõ he integravel no eſtado em que ſe acha, temos $L = x^2y$, $G = 2y$, $H = 2x + 3yx$, $K = 2x^2$; logo $P = \frac{X}{x^2y} e^{\int \frac{2dy}{y}} = \frac{X}{x^2y} e^{ly^2} = \frac{X}{x^2y} y^2 = \frac{Xy}{x^2}$. Subſtituindo eſte valor de P, e os de L, G, H, &c na equaçaõ (II), virá $-\frac{4Xy}{x^2} + \frac{2ydX}{xdx} - \frac{2Xy}{x^2} + \frac{3y^2dX}{xdx} - \frac{3Xy^2}{x^2} - \frac{y^2ddX}{dx^2} = 0$; igualando pois a nada a ſoma dos termos affectos de y, teremos $\frac{dX}{X} = \frac{3dx}{x}$, e $- x^2ddX + 3xdXdx - 3Xdx^2 = 0$. A primeira dá $X = x^3$, e eſte valor ſubſtituido na ſegunda ſatisfaz a ella; logo $X = x^3$, e por conſeguinte he poſſivel fazer integravel a equaçaõ propoſta, multiplicando-a por huma funçaõ de x e y, ou por hum factor $P = \frac{x^3y}{x^2} = xy$.

Como neſte caſo (174) $Pk = 2xy^2dx^2 + 3x^2y^2dxdy$, e $P\,(B - k) = 2x^2ydxdy + 2x^3ydy^2$, a equaçaõ propoſta referida á fórma geral (172) ſe eſcreverá aſſim $x^3y^2ddy + (2x^2ydx + 2x^3ydy)\, dy +$

(2x-

$(2xy^2dx + 3x^2y^2dy)\,dx = 0$. Logo integraremos o primeiro termo (148), conſiderando dy ſómente como variavel, e teremos x^3y^2dy; quantidade que ſendo differenciada, e tirada da equaçaõ, dá o reſto $(2x^2ydx)\,dy + (2xy^2dx)\,dx$. Integraremos o primeiro deſtes termos, conſiderando y ſó como variavel, e teremos x^2y^2dx, cuja differencial, tomada ſuppondo x e y variaveis, ſendo tirada do reſto antecedente, naõ deixa reſto algum; logo o integral primeiro completo da equaçaõ propoſta he $x^3y^2dy + x^2y^2dx + Cdx = 0$.

II. A equaçaõ $2dx^2 + (3x + y + 2)\,dydx + 2xdy^2 + (x^2 + xy)\,ddy = 0$ ſe integrará do meſmo modo. Acharemos que deve ſer $X = x$, e $P = x + y$.

176 Se depois da ſubſtituiçaõ do valor de P na equaçaõ (II), os y deſapparecerem todos por ſi meſmos, entaõ a equaçaõ, que deve dar X, ſerá differencial da ſegunda ordem; pelo que parece que o methodo naõ ſerve para eſte caſo. Devemos porém advertir, que entaõ virá huma equaçaõ deſta fórma $Adx^2 + BXdx^2 + CdXdx + EddX = 0$, ſendo A, B, C, E funçóes de x e de conſtantes. Para a integrar pois eſcreva-ſe aſſim $AP'dx^2 + BP'Xdx^2 + (C - k')\,P'dxdX + k'P'dXdx + EP'ddX = 0$; e ſuppondo actualmente que P' e k' ſaõ funçóes ſómente de x, e que os quatro ultimos termos formaõ huma differencial exacta, o primei-

meiro termo, como he funçaõ de x, facilmente se integrará; e a respeito dos outros termos, teremos as quatro equações

$$\frac{d(EP')}{dx} = \frac{d(k'P'dX + BP'Xdx)}{ddX},$$

$$\frac{d(EP')}{dX} = \frac{[(C-k')P'dx]}{ddX},$$

$$\frac{d(k'P'dX + BP'Xdx)}{dX} = \frac{d[(C-k')P'dX]}{dx},$$

$$\frac{d[(C-k')P'dx]}{dx} = \frac{d(BP'Xdx)}{dX},$$

as quais, attendendo a que k', P', A, B, &c naõ incluem X, se reduzem ás duas

$$\frac{d(EP')}{dx} = k'P', \quad BP' = \frac{d[(C-k')P']}{dx}.$$

Logo igualando entre si os dous valores de $\frac{dP'}{P'}$, que tirarmos destas duas equações, virá

$$Edk' + (C-k')dE - k'(C-k')dx + BEdx - EdC = 0;$$

equaçaõ differencial da primeira ordem sómente, que dará o valor de k'; e conseguintemente se achará P' por meio da equaçaõ $k'P' = \frac{d(EP')}{dx}$ ou $\frac{dP'}{P'} = \frac{k'dx}{E} - \frac{dE}{E}$, que dá $P' =$

H

$\frac{H}{E} e^{\int \frac{k'dx}{E}}$, ſendo H huma conſtante. Agora para ter X, meteremos os valores de k' e P' na equaçaõ $AP'dx^2 + \&c$, que por ſer preſentemente huma differencial completa, tem por integral $dx \int AP'dx + Xdx \int BP'dx + dX \int k'P'dx + Ldx = 0$, ſendo L huma conſtante; integrando pois novamente (165) acharemos X. Logo em geral, todas as vezes que a equaçaõ $Gdx^2 + Hdxdy + Kdy^2 + Lddy = 0$, para ſer differencial exacta, depender ſómente de hum factor funçaõ de x, y e conſtantes, poderá reduzir-ſe a huma equaçaõ differencial da primeira ordem, quaisquer que ſejaõ G, H, K, L.

Porém ſe depois da ſubſtituiçaõ do valor de P na equaçaõ (II), naõ podermos fazer deſapparecer os y ſem ſujeitar os coefficientes G, H, K, L a certas condiçóes, ſerá iſſo huma próva de que o factor P deve incluir tambem dx e dy; entaõ ſerá neceſſario recorrer ao methodo geral (174).

O meſmo ſe obſervará para achar, em que caſos outra qualquer equaçaõ differencial da ſegunda ordem de huma fórma conhecida, póde ſer integrada pela multiplicaçaõ de hum factor, funçaõ de x e y, ou de x, dy e dx, ou de y e dx.

177 O methodo, porque havemos integrado a equaçaõ $Adx^2 + BXdx^2 + \&c$, póde applicar-ſe facilmente á equaçaõ geral $d^n y + ad^{n-1} ydx + bd^{n-2} ydx^2 + \ldots + mydx^n + Xdx^n = 0$, ſendo

a, b, &c e dx conſtantes, e X huma funçaõ de x e conſtantes. Para iſſo eſcreveremos deſta maneira

$$Pd^n y + P(a-k)d^{n-1}ydx + Pkd^{n-1}ydx + P(b-k')d^{n-2}ydx^2$$
$$+ Pk'd^{n-2}ydx^2 + \&c \ldots + Pmydx^n + PXdx^n = 0,$$

ſendo o factor P funçaõ de x; e k, k', &c conſtantes indeterminadas.

Suppondo entaõ que os termos tomados dous a dous, começando pelo primeiro, fórmaõ huma differencial exacta, teremos as equações neceſſarias para determinar P, k, k', &c. Para iſſo havendo igualado os valores de $\frac{dP}{P}$, viráõ equações em k, k' &c, que determinaráõ k por huma equaçaõ reſultante do gráo n. Achado o valor de k, teremos os de k', k'' &c; e integrando, o que ſerá muito facil, acharemos o valor de P. Para cada valor pois de k teremos hum integral particular com conſtante differente; logo tirando de $n-1$ deſtas equações os valores de $d^{n-1}y$, $d^{n-2}y$, &c, e ſubſtituindo-os na ultima, acharemos o valor de y em x.

178 Quanto ás equações differenciais da terceira ordem, as quais ſe podem repreſentar geralmente por $Ad^3y + B = 0$, ſendo A e B funções de x, y, dx, dy, ddy e conſtantes; ſupponhamos que P he o factor, funçaõ de x, y, dx, dy, ddy e conſtantes, que faz integravel a equaçaõ propoſta. Iſto poſto, podemos eſcrevella deſta maneira

APd^3y

$$APd^3y + P\frac{B-k}{ddy}ddy + P\frac{k-k'}{dy}dy + \frac{Pk'}{dx}dx = 0:$$

Logo deverá ſer

$$\frac{d(AP)}{ddy} = \frac{d\left(P\frac{B-k}{ddy}\right)}{d^3y}; \quad \frac{d(AP)}{dy} = \frac{d\left(P\frac{k-k'}{dy}\right)}{d^3y};$$

$$\frac{d(AP)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pk'}{dx}\right)}{d^3y}; \quad \frac{d\left(P\frac{B-k}{ddy}\right)}{dy} = \frac{d\left(P\frac{k-k'}{dy}\right)}{ddy},$$

$$\frac{d\left(P\frac{B-k}{ddy}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pk'}{dx}\right)}{ddy}; \quad \frac{d\left(P\frac{k-k'}{dy}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{Pk'}{dx}\right)}{dy}.$$

Por meio deſtas ſeis equações ſe determinaráõ k, k' e P.

Exemplo. Se tiveſſemos $d^3y + addydx + bdydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, eſcreveriamos aſſim $d^3y + kddydx + (a-k)\,ddydx + k'dydx^2 + (b-k)\,dydx^2 + cydx^3 + Xdx^3 = 0$, ſendo k e k' conſtantes; e ſupporiamos que eſta equaçaõ ſe fazia integravel pela multiplicaçaõ de hum factor P funçaõ de x. Dando pois ao producto a fórma ſeguinte $Pd^3y + Pkdxddy + [P(a-k)\,ddy + Pk'dydx]\,dx + [P(b-k')\,dydx + Pcydx^2 + PXdx^2]\,dx = 0$, deduziriamos ſeis equações, que pela ſuppoſiçaõ feita para k', k e P ſe reduziriaõ a tres; e a equaçaõ final daria tres valores para k, e tres correſpondentes para k, e para P; donde viriaõ tres equa-

çóes

ções em y, x, $dxdy$ e ddy, das quais eliminando ddy e dy, teriamos o valor finito de y em x e conſtantes.

Daqui ſe vê o que devemos fazer nas equações differenciais dos gráos ſuperiores.

179 O meſmo methodo terá lugar, quando houver maior numero de equações, e de variaveis que naõ paſſem do primeiro grão, e que naõ eſtejaõ multiplicadas nem entre ſi, nem as ſuas differenças por differencial alguma das meſmas variaveis, á excepçaõ daquella que ſe houver ſuppoſto conſtante. Começaremos por reduzir todas as equações a huma, ſomando a primeira com a ſegunda, terceira &c, multiplicadas cada huma deſtas por hum coefficiente indeterminado e conſtante p, p' &c. Reſolvendo depois os termos affectos das differenças de huma meſma variavel, multiplicaremos por hum factor P, funçaõ da variavel, cuja differença ſe ſuppuzer conſtante.

Exemplo. Se tivermos as equações

$$addz + bddy + (cdz + edy)\,dx + (fz + gy)\,dx^2 = 0$$

$$a'ddz + b'ddy + (c'dz + e'dy)\,dx + (f'z + g'y)\,dx^2 = 0;$$

multiplicando a ſegunda por p, ajuntando o producto com a primeira, e multiplicando a ſoma por P, virá $P(a + a'p)\,ddz + P(c + c'p)\,dzdx + P(f + f'p)\,zdx^2 + P(b + b'p)\,ddy + P(e + e'p)\,dydx + P(g + g'p)\,ydx^2 = 0$.

Depois reſolveremos $c + c'p$ em $c + c'p - k$ e k, como tambem $e + e'p$ em $e + e'p - k'$ e k'.

Sup-

Suppondo entaõ que os termos tomados dous a dous formaõ differenciais exactas, teremos as equações necessarias para determinar k, k' e P. A equaçaõ em k subirá em geral ao gráo $2n$, o que dará $2n$ integrais, por meio dos quais se eliminaráõ todas as differenças, e teremos as equações em z e x, em y e x, &c.

Se as equações fossem mais gerais, considerariamos p, p' &c e P como funções de todas as variaveis, e das suas differenças; e determinariamos estas funções pela condiçaõ de que a equaçaõ total fosse huma differencial completa.

180 Quando em huma equaçaõ a duas variaveis faltar huma das variaveis finitas, podemos sempre reduzilla ás differenças da ordem immediatamente inferior, igualando a differença primeira de huma das variaveis á differença da outra variavel, multiplicada por huma nova variavel.

Exemplo. Querendo integrar $\frac{ddy}{dy}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=(ay+b)\,dx$, em que dx se suppoz constante, e onde falta a variavel x; faremos $dy=pdx$, sendo p huma nova variavel, o que dá $ddy = dpdx$, e por conseguinte $\frac{dp}{p}\sqrt{(1+pp)}=(ay+b)\,.\,\frac{dy}{p}$, ou $dp\sqrt{(1+pp)}=(ay+b)\,dy$, cujo segundo membro se integra algebricamente, e o primeiro em parte algebricamente e em parte por logarithmos, fazendo $\sqrt{(1+pp)}$ racional. Con-

Concluiremos eſte tratado reſolvendo o problema ſeguinte: *Entre todas as curvas iſoperimetras, que paſſaõ pelos pontos dados* B *e* D (*Fig.* 66), *achar qual he a que faz a maior ſuperſicie* ABDE, *ſupponde dada a poſiçaõ de* AE.

Eſta queſtaõ inverſa de *maximis & minimis* reduz-ſe a achar entre as curvas do meſmo comprimento, qual he aquella em que $\int ydx$ he hum maximo.

Supponhamos que BD he a curva procurada; eſtá claro pela natureza do maximo, que ſe hum ponto m variar infinitamente pouco em qualquer ſentido, por exemplo, parallelamente a AE para maior facilidade, ou ſe o elemento Mm ſe tornar em $M\mu$, e mm' em $\mu m'$, o elemento da abſciſſa Pp em $P\pi$, e pp' em $\pi p'$, conſervando-ſe $\mu\varrho = mr$; o valor do maximo poriſſo naõ terá mudança, iſto he, a variaçaõ que na ſua expreſſaõ reſultar da mudança que houver na curva, ſerá $=0$. A meſma invariabilidade deve tambem ter lugar no comprimento da curva. Para exprimir pois eſtas duas condições, ſerá neceſſario fazer variar do meſmo modo outro ponto m'; e aſſim haverá variaçaõ em tres elementos Mm, mm', $m'm''$.

Iſto poſto, ſeja $AP = x$, Ap ou $x + dx = x'$, Ap' ou $x' + dx' = x''$; $PM = y$, $pm = y'$, $p'm' = y''$ &c; ſerá $Pp = dx$, $pp' = dx'$, $p'p'' = dx''$, $mr = dy$, $m'r' = dy'$, $m''r'' = dy''$, $Mm = ds$, $mm' = ds'$ &c; e em geral, ſendo F a funçaõ que convém a hum elemento, ſerá F', por abbreviar,

viar, a funçaõ respectiva $F + dF$ do elemento consecutivo, de maneira que $F' - F = dF$.

Pela condiçaõ de maximo temos $\delta(ydx + y'dx' + y''dx'') = 0$, isto he, pois que y, y', y'' naõ variaõ,

$$1^{a} \quad y\delta dx + y'\delta dx' + y''\delta dx'' = 0\,;$$

usando da caracteristica δ para naõ confundir estas variações com as differenças naturais das coordenadas.

A condiçaõ de se conservar constante o comprimento do arco dá $\delta ds + \delta ds' + \delta ds'' = 0$; mas $ds^2 = dx^2 + dy^2$, e conseguintemente $\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx$, por ser $\delta dy = 0$, e assim nos outros elementos; logo substituindo virá

$$2^{a} \quad \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dx'}{ds'}\delta dx' + \frac{dx''}{ds''}\delta dx'' = 0.$$

E como o intervallo $dx + dx' + dx''$ naõ varia, teremos tambem

$$3^{a} \quad \delta dx + \delta dx' + \delta dx'' = 0.$$

Eliminando $\delta dx''$ das equações 1^{a} e 3^{a}, virá $dy\delta dx + dy'(\delta dx + \delta dx') = 0$; e fazendo o mesmo na 2^{a} e 3^{a}, acharemos $d\left(\frac{dx}{ds}\right)\delta dx + d\left(\frac{dx'}{ds'}\right)(\delta dx + \delta dx') = 0$; logo eliminando $\delta dx + \delta dx'$ destas duas equações, teremos $\frac{d\left(\frac{dx'}{ds'}\right)}{dy'} - \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy} = 0$,

isto he $d\left[\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{dy}\right] = 0.$

In-

Integrando virá $d\left(\frac{dx}{ds}\right) = \frac{dy}{a}$; e integrando segunda vez, $\frac{adx}{ds} = y + b$, iſto he $a^2dx^2 = (y+b)^2(dx^2 + dy^2)$; donde ſeparando teremos $dx = \pm \frac{dy(y+b)}{\sqrt{[a^2 - (y+b)^2]}}$, cujo integral he $x = c \pm \sqrt{[a^2 - (y+b)^2]}$; equaçaõ do circulo, que ſe poderá conſtruir depois de haver determinado as tres conſtantes a, b, c.

Para a determinaçaõ dellas obſervaremos: 1° que $x = 0$ dá $y =$ AB; 2° que $x =$ AE dá $y =$ DE; 3° que ſuppondo dado o comprimento da curva, ou o angulo que ella faz em B com huma linha dada de poſiçaõ, ou outra qualquer condiçaõ equivalente, facilmente deduziremos huma terceira equaçaõ.

As Obras que ſe pódem conſultar ſobre o Calculo Integral, ſaõ as de *MM. Euler*, *d'Alembert*, *Fontaine*, *Condorcet*, *Bougainville*, e *Reynau*.

Calculo Est. I. Fig. 1.

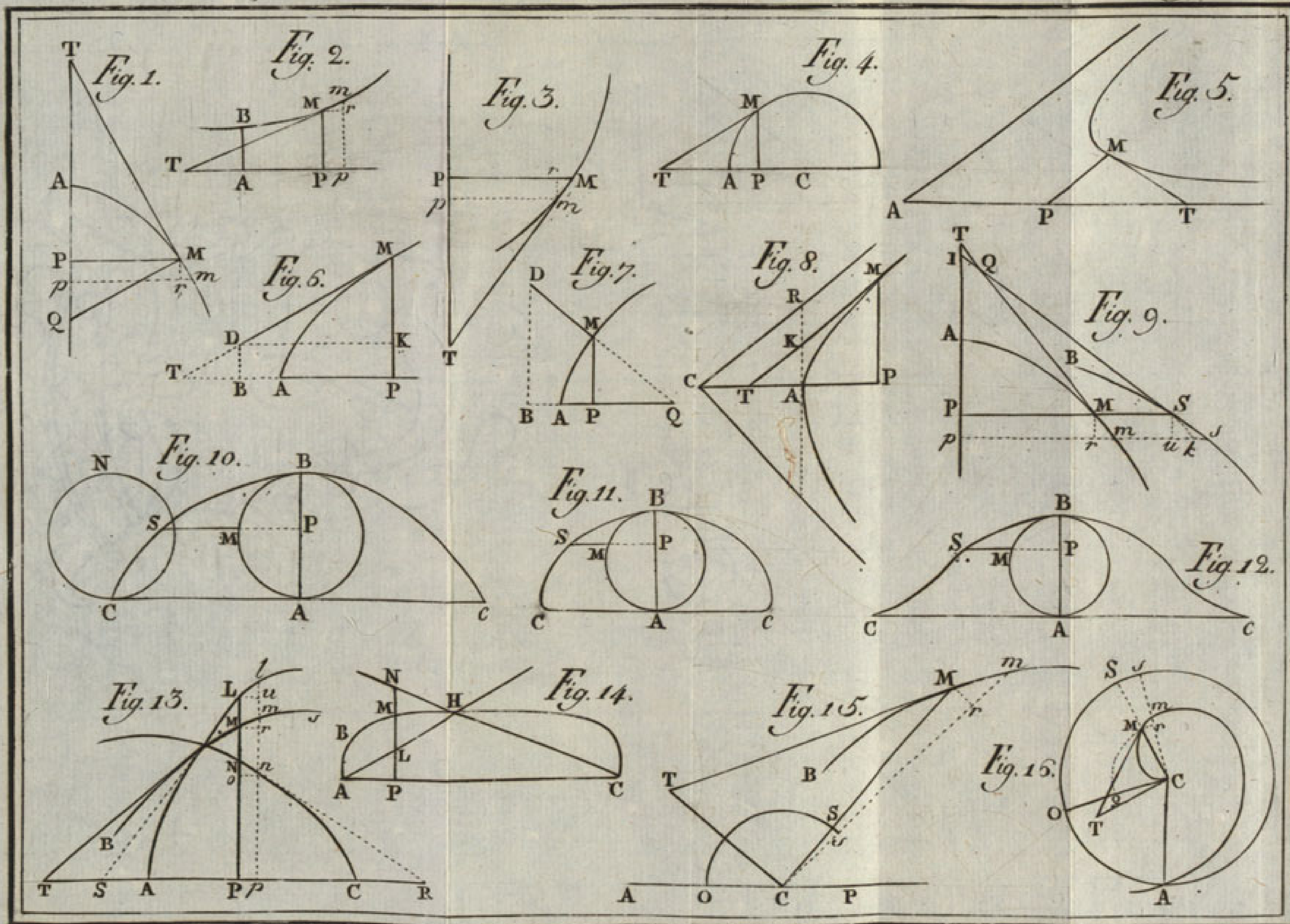

Fig. 16.

Calculo Vol. I

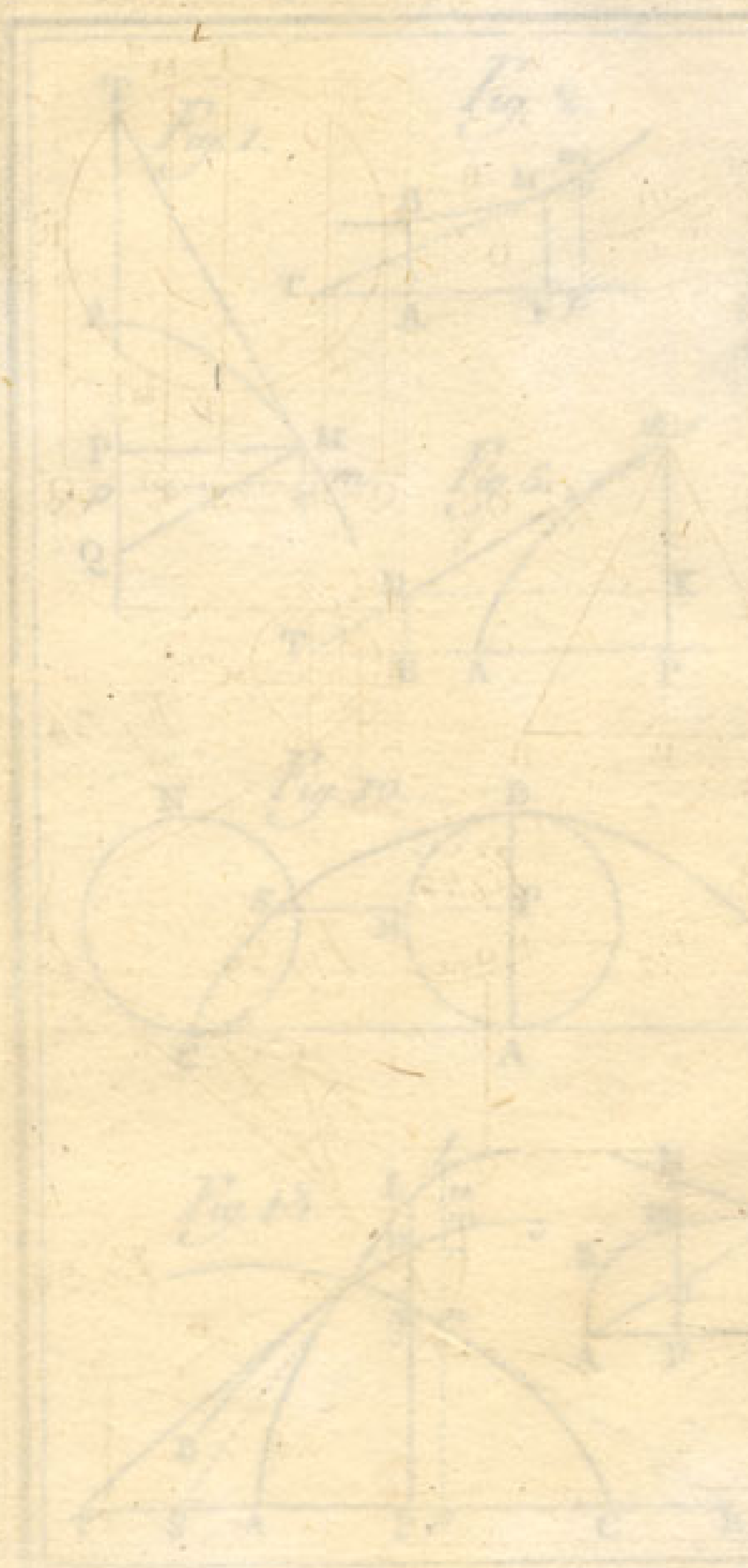

Fig. 17.

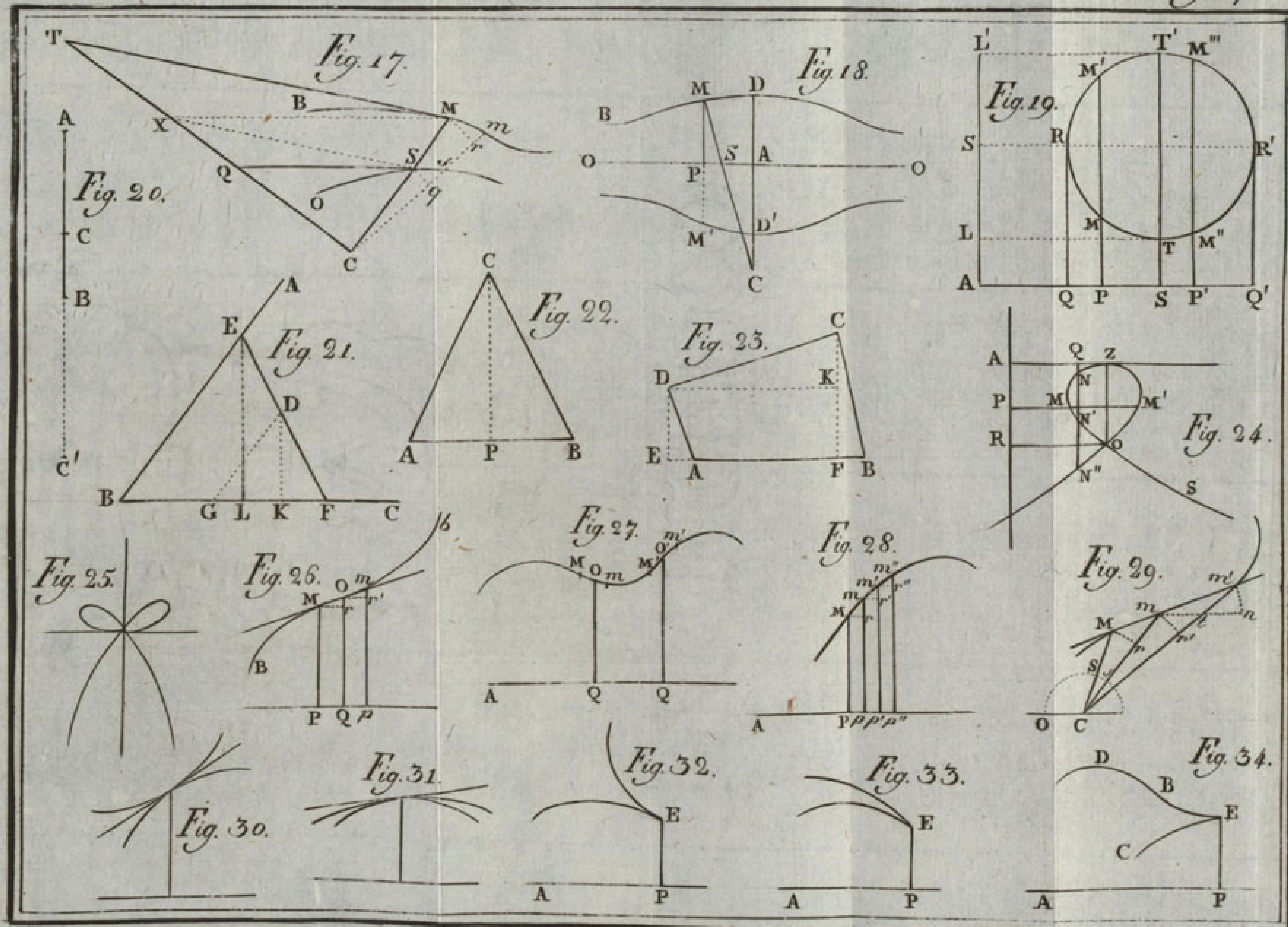
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.

Fig. 34.

Calculo Est. II

 Fig. 35.

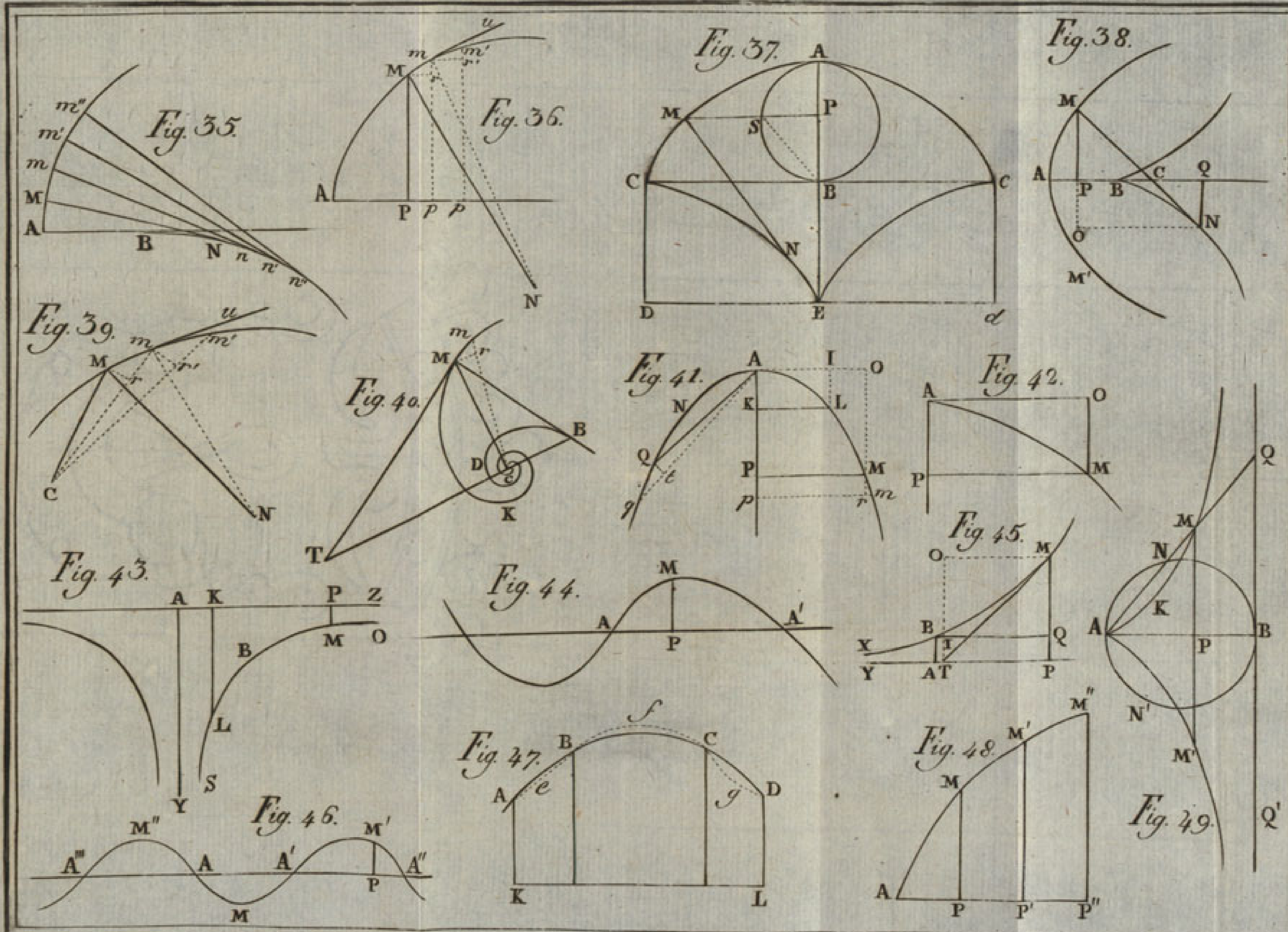
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.

Fig. 49.

BEZOUT
ANALYS

2