



Sala 5  
Gab. -  
Est. 56  
Tab. 19  
N.º 51

Sala 5  
Gab. -  
Est. 56  
Tab. 19  
N.º 51



UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
Biblioteca Geral

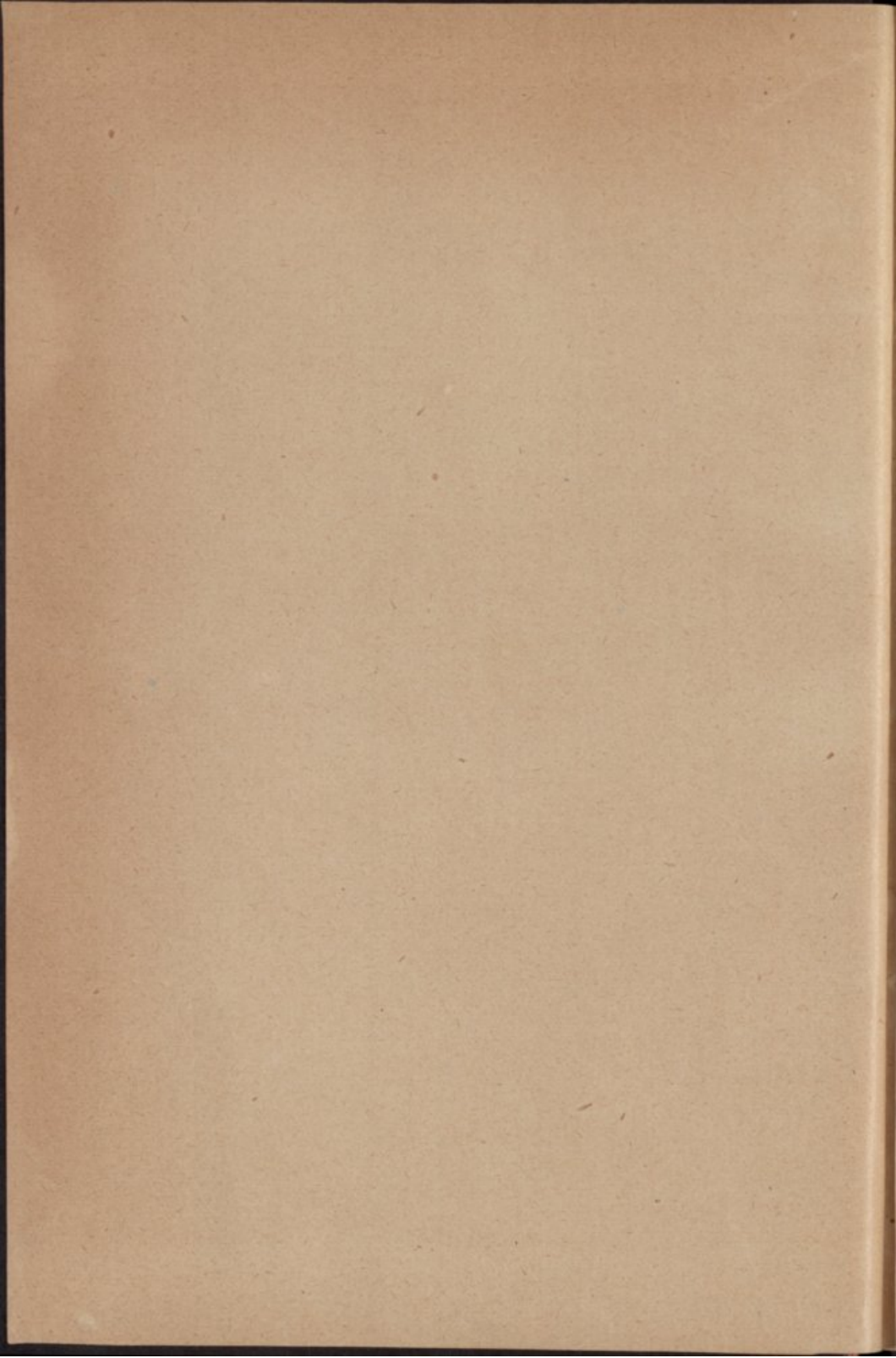


1301500181



b24484830







THEORIA  
ELECTROMAGNETICA  
DA LUZ

LIBRARY OF THE  
MUSEUM OF NATURAL HISTORY

DAVIDSON

1881

LIBRARY OF THE  
MUSEUM OF NATURAL HISTORY

DAVIDSON



THEORIA  
ELECTROMAGNETICA  
DA LUZ

POR

HENRIQUE TEIXEIRA BASTOS

Doutor em Philosophia  
e Socio effectivo do Instituto de Coimbra



COIMBRA  
IMPRESA DA UNIVERSIDADE  
1885



LIBRARY

ELECTROMAGNETICA

DA LUZ

HENRIQUE TEIXEIRA BASTOS

Trabalho apresentado ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) em cumprimento das exigências para a obtenção do título de Doutor em Física, sob a orientação do Professor Doutor Henrique Teixeira Bastos.



COPIA

REPRODUCIDA POR PERMISSÃO DO CNPQ

1986

DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

APRESENTADA Á

FACULDADE DE PHILOSOPHIA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

DISSERTAÇÃO DE CONCLUSÃO

FACULDADE DE FILOSOFIA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA



A primeira theoria da luz foi, como é sabido, a da emissão, fundada por Newton, em que a luz é um fluido projectado pelos corpos luminosos. Seguiu-se-lhe a theoria das ondulações estabelecida por Huyghens e desenvolvida sobretudo pelos trabalhos de Fresnel.

Nesta theoria, hoje universalmente seguida, a luz resulta de vibrações d'um meio eminentemente elastico e extremamente rarefeito — o ether. Ora a theoria electromagnetica da luz diz apenas que estas vibrações são correntes electricas. A optica entra assim no dominio da electricidade.

É claro que, sendo exacto este modo de ver, devem poder deduzir-se as leis dos phenomenos opticos das equações geraes do movimento da electricidade. A sciencia está, porém, muito atrasada ainda sobre este ponto; a theoria electromagnetica é, com effeito, muito recente para resolver completamente o problema.

Nós exporemos a parte até hoje constituida da theoria, partindo das equações differenciaes do movimento da electricidade e deduzindo d'ellas as leis da propagação da luz e as da reflexão e refração.

Foram-nos uteis na composição d'este trabalho os tratados de electricidade de Maxwel e Gordon, as lições sobre electricidade e magnetismo de Mascart e Joubert e principalmente o livro de O. Tumlirz — *Die elektromagnetische Theorie des Lichtes* — a unica obra especial que conhecemos sobre o assumpto, de que constantemente nos soccorremos.

A primeira teoria da luz foi dada por Newton, em que a luz é um fluido propagado pelas vibrações transversais segundo as leis da mecânica. Esta teoria foi abandonada devido aos trabalhos de Young.

Nesta teoria, depois de estabelecidas as leis da reflexão e refração, é um modo conveniente aplicar a eletrodinâmica para a luz. Ora a teoria eletrodinâmica da luz dá origem para estas teorias que tratam da luz como de ondas e não de partículas.

É claro que, sendo esta teoria de luz, devem poder explicar-se os fenômenos ópticos das espumas, gases e líquidos de eletrólitos. A teoria da luz, porém, não se aplica mais sobre estes; a teoria eletrodinâmica é que dá o modo mais adequado para resolver completamente o problema.

Nos experimentos a parte da luz constituída de ondas, quando das espumas, evidências de movimento de eletrólitos e de ondas de luz se tem da propagação da luz e se da luz e a reflexão.

Portanto, não se pode aplicar a teoria da luz, de eletrólitos de Hertz e Gordon, se não sobre líquidos e gases e não sobre espumas e líquidos - principalmente o fato de Hertz - de demonstrar a teoria da luz - a qual não se aplica para explicar sobre a espuma, de que constantemente se experimenta.

## INTRODUÇÃO

O principio da unidade das forças physicas está de dia para dia sendo confirmado por novos factos. Todos os ramos da physica possuem entre si pontos de contacto que a sciencia tem posto a descoberto pouco a pouco.

Relativamente aos phenomenos opticos, são conhecidas as suas analogias com os da acustica, as suas relações intimas com os do calor; e em epocha relativamente recente descobriram-se as conexões interessantes que os ligam aos phenomenos electricos, e cujo conjuncto constitue a electro-optica.

Faraday foi o creador d'esta sciencia.

Em 6 de novembro de 1845 communicou elle á Sociedade Real a sua descoberta da rotação electromagnetica do plano de polarisação da luz, o primeiro phenomeno electro-optico conhecido. O vidro e outras substancias inactivas adquiriam o poder rotatorio, quando se collocavam num campo magnetico de grande intensidade, por exemplo, entre os polos d'um forte electro-iman atravessado por uma corrente. A rotação electromagnetica observava-se ainda em substancias que possuiam poder rotatorio natural e em grande numero de liquidos.

Em 1846 Ed. Becquerel estudou a rotação de raios de diferentes côres no mesmo meio, concluindo que a rotação se fazia na razão inversa do quadrado do comprimento de onda.

Em 1852 começou Verdet a occupar-se d'este assumpto. Das



suas experiencias deduz-se que a lei de Becquerel é só aproximada, que a rotação, para um meio e uma côr dados, é proporcional á differença de potencial nos dois pontos de entrada e saída do raio, e que, para meios differentes, é proporcional a uma constante dependente da natureza do meio <sup>1</sup>.

Em 1879, Kundt, Röntgen e H. Becquerel descobriram esta rotação nos gazes, e H. Becquerel mostrou que se produzia na atmospherá sob a acção do magnetismo terrestre.

São ainda extremamente interessantes os phenomenos descobertos pelo Dr. Kerr de Glasgow. Se os polos d'um electro-iman são polidos de modo que reflectam a luz, e incide sobre elles luz polarisada rectilineamente, o plano de polarisação soffre uma rotação dependente da magnetisação do electro-iman. Quando o vidro e outros isoladores transparentes se sujeitam a uma intensa deformação electrica, adquirem a propriedade da birefrangencia. Todos os dielectricos se comportavam como cristaes uniaxiaes, formando dois grupos — *positivos* e *negativos*.

Emfim Willoughby Smith descobriu, em 1873, o augmento que soffre sob a acção da luz a conductibilidade do selenio no estado amorpho; phenomeno em que se baseia o photophono de Bell <sup>2</sup>.

Todos estes phenomenos constituem relações da optica com a electricidade.

Outras relações têm sido deduzidas analyticamente por physicos e mathematicos eminentes.

---

<sup>1</sup> Gordon determinou esta constante para o sulfureto de carbone.

<sup>2</sup> O selenio apresenta-se em dois estados — amorpho ou vitreo e cristalino. Só é conductor no segundo estado.

Debaixo da acção solar passa do primeiro estado ao segundo.

Gauss, Riemann, Lorenz estabeleceram de diversos modos a analogia da propagação da electricidade nos dielectricos com a da luz, base da theoria electromagnetica; mas foram Maxwell e Helmholtz que mais trabalharam neste sentido. Maxwell é considerado o fundador da theoria electromagnetica que se encontra no seu *Treatise on electricity and magnetism*. Como Newton, Maxwell não admite as acções a distancia. A gravitação, o calor, a luz, as acções electricas e magneticas, tudo se propaga com uma certa velocidade atravez d'um meio intermediario.

Relativamente ao meio electromagnetico, mostrou Maxwell que elle é capaz de duas fórmas de energia (electrostatica e electrocinetica), do mesmo modo que o meio luminoso (potencial e cinetica).

A propagação faz-se pela polarisação do meio, que se transmite, em ondas transversaes, com uma velocidade igual á da luz. Maxwell conclue, pois, que os dois meios são identicos, que é o ether luminoso que transmite tambem as vibrações electricas. A possibilidade de explicação dos phenomenos electricos e luminosos pelo mesmo meio é um poderoso argumento a favor da sua existencia. Eis as proprias palavras de Maxwell: «To fill all space with a new medium whenever any new phenomenon is to be explained is by no means philosophical; but if the study of two different branches of science has independently suggested the idea of a medium, and if the properties which must be assigned to the medium to account for electromagnetic phenomena, are of the same kind as those which we attribute to the luminiferous medium to account for the phenomena of light, the evidence for the physical existence of the medium will be considerably strengthened.»

A concordancia das duas ordens de phenomenos observa-se,

não só na propagação, mas ainda na reflexão e refração na superfície de separação de dois meios diferentes, ponto não tratado por Maxwell, do qual Helmholtz foi o primeiro a occupar-se.

Em conclusão, a attracção universal, o calor, a luz, a electricidade, o magnetismo são movimentos ethereos.

É sabido como esta hypothese synthetisa brilhantemente os phenomenos, e tem dado logar a numerosas predicções (a da refração conica verificada por Lloyd, etc.).

No estado actual da sciencia, não nos parece necessaria a hypothese de pluralidade dos etheres, como affirma Stallo<sup>1</sup>.

Se pela admissão d'um unico ether a explicação dos phenomenos apresenta por vezes serias difficuldades, pode isso attribuir-se ao imperfeito conhecimento que temos ainda de muitos d'elles. Julgamos que, á medida que a sciencia fôr progredindo, irão cessando aquellas difficuldades; e, em physica, como em chimica e biologia, será uma theoria unitaria que dominará emfim todos os phenomenos, e fornecerá a sua verdadeira concepção mechanica.

---

<sup>1</sup> J. B. Stallo. — *La matière et la physique moderne*, pag. 84. Paris, 1884.



## Propagação da luz

- I. — Nos dielectricos isotropicos. II. — Nos dielectricos anisotropicos.  
 III. — Nos conductores isotropicos.

As equações geraes do movimento da electricidade num meio qualquer em repouso são, como mostrou Helmholtz:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= \frac{2}{v^2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dx dt} + 4 \pi \left( C + \epsilon_1 \frac{d}{dt} \right) \left[ \frac{d(\psi + \varphi)}{dx} + (1 + 4 \pi \delta) \frac{dU}{dt} + X \right] \\ \Delta V &= \frac{2}{v^2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dy dt} + 4 \pi \left( C + \epsilon_2 \frac{d}{dt} \right) \left[ \frac{d(\psi + \varphi)}{dy} + (1 + 4 \pi \delta) \frac{dV}{dt} + Y \right] \\ \Delta W &= \frac{2}{v^2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dz dt} + 4 \pi \left( C + \epsilon_3 \frac{d}{dt} \right) \left[ \frac{d(\psi + \varphi)}{dz} + (1 + 4 \pi \delta) \frac{dW}{dt} + Z \right] \end{aligned} \right\} (1)$$

U, V, W representam as componentes d'uma grandeza, a que Maxwell chama o *momento electrocinetico*, e que é o integral relativo ao tempo das forças electromotrices induzidas por todas as correntes electricas existentes no espaço;  $\psi$  e  $\varphi$  são respecti-

vamente os potenciaes devidos ás massas electricas existentes no espaço e á electricidade posta em liberdade no meio pela sua polarisação; X, Y, Z são as componentes das forças electro-motrices de origem thermo-electrica ou hydro-electrica;  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  são as constantes da polarisação dielectrica segundo as tres direcções principaes;  $\delta$  é a constante da polarisação magnetica, que, segundo as experiencias de Boltzmann, é proximamente igual para todas as substancias, com excepção apenas do ferro;  $v$  é o numero de unidades electrostaticas de electricidade contidas numa unidade electromagnetica.

Entre U, V, W existe a relação

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dy} + \frac{dW}{dz} = 0 \dots \dots (2).$$

Em todos os meios conductores e polarisaveis, além da corrente de conductibilidade existe tambem uma corrente dielectrica. Estas duas correntes formam uma corrente total, cujas componentes  $u, v$  e  $w$  satisfazem ás seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned} \Delta V &= 4\pi u + \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2\phi}{dxdt} \\ \Delta U &= 4\pi v + \frac{2}{v^2} \cdot \frac{d^2\phi}{dydt} \\ \Delta W &= 4\pi w + \frac{2}{v^2} \cdot \frac{d^2\phi}{dzdt} \end{aligned} \right\} \dots \dots (3).$$

Quando o meio é susceptivel de polarisação magnetica, as

correntes electricas existentes no espaço originam uma força magnetica, cujas componentes são :

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} \\ M &= \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} \\ N &= \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4).$$

Vejamos agora como as leis da propagação da luz se deduzem das equações (1).

Nos casos que vamos estudar, suporemos nullo o potencial  $\psi$  e as forças X, Y, Z.

## I

Sendo o meio isotropico é  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon$ ; e, se fôr completamente isolador, será  $C = 0$ .

Diferenciando as equações (1) respectivamente com relação a  $x, y, z$  e sommando-as, resulta, nesta hypothese :

$$\left( \frac{2}{v^2} + 4\pi\epsilon \right) \frac{d\Delta\varphi}{dt} = 0$$

ou 
$$d \frac{\Delta\varphi}{dt} = 0,$$

a que se pode dar a fórmula

$$\Delta \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$



Integrando esta equação, temos

$$\frac{d\varphi}{dt} = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z)$$

$$\varphi = [F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z)]t + F_3(x, y, z),$$

onde  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  são funções arbitrárias.

Nesta expressão,  $\varphi$  é proporcional ao tempo.

Ora, como os phenomenos luminosos são periodicos, deverá ser  $\varphi = 0$ , para o que é necessario que seja  $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ .

As equações (1) convertem-se então em:

$$\left. \begin{aligned} \Delta U &= 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\delta) \frac{d^2U}{dt^2} \\ \Delta V &= 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\delta) \frac{d^2V}{dt^2} \\ \Delta W &= 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\delta) \frac{d^2W}{dt^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(5),$$

$$\text{ou, pondo } 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\delta) = \frac{1}{A^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2U}{dt^2} &= A^2 \Delta U \\ \frac{d^2V}{dt^2} &= A^2 \Delta V \\ \frac{d^2W}{dt^2} &= A^2 \Delta W \end{aligned} \right\} \dots\dots(6).$$



Descrevendo em volta d'um ponto qualquer  $(x, y, z)$  como centro uma esphera de raio  $r$ , multiplicando a primeira das equações (6) por  $dx dy dz$ , e estendendo o seu integral ao volume da esphera, teremos

$$\frac{d^2}{dt^2} \iiint U dx dy dz = A^2 \iiint \Delta U dx dy dz;$$

ou, segundo o theorema de Green,

$$\frac{d^2}{dt^2} \iiint U dx dy dz = A^2 \iint \frac{dU}{dr} dS = A^2 r^2 \frac{d}{dr} \iint U d\omega,$$

onde  $dS$  e  $d\omega$  são elementos das superficies das espheras de raios  $r$  e 1.

Pondo  $dx dy dz = \rho^2 d\omega d\rho$ , teremos

$$\frac{d^2}{dt^2} \iint U d\omega \int_0^r \rho^2 d\rho = A^2 r^2 \frac{d}{dr} \iint U d\omega.$$

Derivando relativamente a  $r$ , vem

$$r^2 \frac{d^2}{dt^2} \iint U d\omega = A^2 \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \iint U d\omega \right)$$

ou, fazendo

$$\iint U d\omega = 4\pi \bar{U},$$

onde  $\bar{U}$  é o valor medio dos  $U$  sobre a superficie da esphera de raio 1,

$$\frac{d^2(\bar{U}r)}{dt^2} = A^2 \frac{d^2(\bar{U}r)}{dr^2}.$$

Esta equação, que é a das cordas vibrantes, tem, como é sabido, o integral

$$\bar{U}r = F(r - At) + f(r + At),$$

o qual mostra que o valor medio de  $U$  para uma esfera de raio  $r$ , tendo por centro o ponto  $x, y, z$  do meio, se propaga do mesmo modo que uma onda sonora espherica.

As funcções  $F$  e  $f$  determinam-se, quando  $U$  e  $\frac{dU}{dt}$  forem dados para o tempo  $t=0$ .

Sejam

$$U = \varphi(x, y, z), \quad \frac{dU}{dt} = \psi(x, y, z).$$

Para  $t=0$ , é

$$\bar{U} = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi(x + lr, y + mr, z + nr) d\omega$$

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{1}{4\pi} \iint \psi(x + lr, y + mr, z + nr) d\omega,$$

onde  $l, m$  e  $n$  representam os cosenos de inclinação do raio  $r$  pertencente ao elemento  $d\omega$ .

Por outro lado é, para  $t=0$ ,

$$\bar{U}r = F(r) + f(r)$$

$$\frac{d(\bar{U}r)}{dr} = F'(r) + f'(r)$$

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = -\frac{A}{r} F'(r) + \frac{A}{r} \cdot f'(r).$$

Portanto

$$f'(r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\bar{U}r)}{dr} + \frac{r}{2A} \cdot \frac{d\bar{U}}{dt}$$

$$F'(r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\bar{U}r)}{dr} - \frac{r}{2A} \cdot \frac{d\bar{U}}{dt},$$

ou

$$f(r) = \frac{1}{8\pi A} \int_0^r r dr \iint \psi(x+lr, y+mr, z+nr) d\omega$$

$$+ \frac{r}{8\pi} \iint \varphi(x+lr, y+mr, z+nr) d\omega - \frac{\text{const.}}{2A}$$

$$F(r) = \frac{r}{8\pi} \iint \varphi(x+lr, y+mr, z+nr) d\omega$$

$$- \frac{1}{8\pi A} \int_0^r r dr \iint \psi(x+lr, y+mr, z+nr) d\omega + \frac{\text{const.}}{2A}.$$

Para o tempo  $t$  será, pois,

$$\bar{U}r = \frac{1}{8\pi} (r+At) \iint \varphi[x+l(r+At), y+m(r+At), z+n(r+At)] d\omega$$

$$+ \frac{1}{8\pi A} \int_0^{r+At} r dr \iint \psi(x+lr, y+mr, z+nr) d\omega$$

$$+ \frac{1}{8\pi} (r-At) \iint \varphi[x+l(r-At), y+m(r-At), z+n(r-At)] d\omega$$

$$- \frac{1}{8\pi A} \int_0^{r-At} r dr \iint \psi(x+lr, y+mr, z+nr) d\omega \dots \dots (7).$$

Diferenciando em ordem a  $r$ , pondo depois  $r = 0$ , e, notando que, em virtude da symetria a respeito do ponto  $x, y, z$ , é

$$\iint \varphi(x+lr, y+mr, z+nr) d\omega = \iint \varphi(x-lr, y-mr, z-nr) d\omega$$

e

$$\iint \psi(x+lr, y+mr, z+nr) d\omega = \iint \psi(x-lr, y-mr, z-nr) d\omega,$$

obtem-se:

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{4\pi} \iint \varphi(x+lAt, y+mAt, z+nAt) d\omega$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} \iint \psi(x+lAt, y+mAt, z+nAt) d\omega$$

$$+ \frac{t}{4\pi} \iint \varphi(x+lAt, y+mAt, z+nAt) d\omega$$

ou

$$\bar{U}_0 = \frac{t}{4\pi} \iint \psi(x+lAt, y+mAt, z+nAt) d\omega$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{dt} \left[ t \iint \varphi(x+lAt, y+mAt, z+nAt) d\omega \right]. \quad (8).$$

$\bar{U}_0$  é o valor de  $U$  para  $r = 0$  e o tempo  $t$ ; isto é, o valor de  $\bar{U}$  para o tempo  $t$  e o ponto  $x, y, z$ . Pode, pois, concluir-se que o



estado actual do meio no ponto  $x, y, z$  depende a cada instante do estado em que elle se achava antes, á distancia  $\Lambda t$ ; ou as perturbações electricas propagam-se com uma velocidade constante

$$A = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon(1+4\pi\delta)}}.$$

Por ser  $\epsilon$  muito grande, é proximamente

$$A = \frac{1}{\sqrt{k\mu}},$$

sendo  $k$  e  $\mu$  as capacidades inductivas, electrica e magnetica.

Se o meio é o ar e adoptarmos o systema electrostatico é

$$k = 1 \quad \text{e} \quad \mu = \frac{1}{v^2}.$$

Adoptando o systema electromagnetico, é

$$k = \frac{1}{v^2} \quad \text{e} \quad \mu = 1.$$

Verifica-se sempre, pois, para o ar a equação

$$A = v,$$

onde  $v$  representa o numero de unidades electrostaticas de electricidade contidas numa unidade electromagnetica.

Se a luz é realmente um phenomeno electromagnetico deve A ser a velocidade da luz; e, portanto, a velocidade da luz deve ser numericamente egual á relação das unidades electrostatica e electromagnetica de electricidade. Ora a velocidade da luz e a relação das unidades electricas têm sido determinadas por differentes processos.

Achou-se:

Velocidade da luz	Relação das unidades electricas
Fizeau . . . . . $3,14 \times 10^{10}$	Weber . . . . . $3,1074 \times 10^{10}$
Meth. astron. . . . . $3,08 \times 10^{10}$	Maxwel . . . . . $2,88 \times 10^{10}$
Foucault. . . . . $2,9836 \times 10^{10}$	Thomson . . . . . $2,82 \times 10^{10}$
Cornu. . . . . $3,004 \times 10^{10}$	Ayrton e Perry . . . . . $2,98 \times 10^{10}$

Vê-se que a velocidade da luz e a relação das unidades concordam sensivelmente.

Se esta concordancia não é exacta, pode isso attribuir-se á falta de precisão na determinação d'aquellas grandezas pelos methodos actuaes.

Num meio differente do ar, designando  $A'$  a velocidade neste meio e  $k'$  a sua capacidade dielectrica, será

$$A' = \frac{1}{\sqrt{k' \cdot \mu}} \quad \text{e} \quad \frac{A'}{A} = \sqrt{\frac{k}{k'}}$$

Por outro lado a relação entre a velocidade da luz no meio considerado e no ar será  $\frac{1}{n}$ , sendo  $n$  o indice de refração do meio.

Teremos assim, sendo verdadeira a theoria,

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{k}{k'}} = \sqrt{\frac{1}{D}},$$

sendo D a capacidade dielectrica do meio referida ao ar, ou

$$n^2 = D \dots \dots (9).$$

O quadrado do indice de refracção deve, pois, ser igual á capacidade dielectrica referida ao ar.

O indice de refracção é differente para as diversas côres. Exigindo a theoria que  $n$  seja constante, é natural tomar para  $n$  o valor limite do indice, isto é, o que corresponde a raios de comprimento de onda infinito. Demais,  $n$  diminue quando augmenta o comprimento de onda, D diminue com a duração da electrificação; e é claro que só o movimento de ondas de comprimento infinito pode ser comparado com os processos lentos pelos quaes se determina D.

O indice de refracção de ondas de comprimento infinito acha-se, fazendo uso da formula de Cauchy:

$$n_1 \lambda_1^2 = A \lambda_1^2 + B$$

$$n_2 \lambda_2^2 = A \lambda_2^2 + B$$

d'onde

$$A = \frac{n_1 \lambda_1^2 - n_2 \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = n_\infty.$$

Boltzmann foi o primeiro que procurou verificar a equação (9), determinando a capacidade dielectrica de differentes substancias.



Esta grandeza tinha sido antes, mas sem aquelle intuito, objecto das experiencias de Cavendish, Faraday, Siemens, Gibson e Barclay. Estes ultimos chegaram a determinar o valor de  $D$  para paraffina com muita exactidão.

Boltzmann serviu-se d'um condensador de lamina de ar, entre cujos pratos collocava, talhada em lamina de faces parallelas, a substancia isoladora a estudar. A distancia dos dois pratos e a espessura dos dielectricos podiam ser exactamente medidas por meio d'um microscopio. A capacidade do condensador era comparada com a d'um electrometro de Thomson.

O electrometro era carregado com uma bateria de 18 elementos Daniell, e lia-se a indicação  $b$ .

Carregava-se depois o condensador com a mesma bateria, e punha-se em communicação com o electrometro previamente descarregado.

A nova indicação era  $c$ .

A capacidade  $C$  do condensador obtinha-se pela formula

$$C = E \left( 1 + \frac{c}{50000} \right) \frac{c}{b - c},$$

onde  $E$ , capacidade do electrometro, se pode sempre suppôr equal á unidade, porque se conservava constante em todas as experiencias.

Por outro lado é

$$C = \frac{S}{4\pi \left( d - e + \frac{e}{D} \right)},$$

onde  $S$  é a superficie de um dos pratos do condensador,  $d$  a sua



distancia ao outro,  $e$  a espessura do isolador. Se entre os dois pratos existe só uma lamina d'ar, é

$$C_0 = \frac{S}{4\pi d}.$$

A primeira e a terceira d'estas equações determinam  $C$  e  $S$ . A segunda dá então o valor de  $D$ , sendo conhecidos  $d$  e  $e$ .

Boltzmann empregou ainda outro methodo, fundado no calculo da attracção de duas pequenas esferas, uma conductora e a outra isoladora, attracção dependente da capacidade dielectrica.

As substancias com que experimentou Boltzmann foram o enxofre, a paraffina, o colophonio e a resina.

Os seus resultados são :

DIELECTRICO	D		$n_{\infty}^2$
	METHODO DO CONDENSADOR	METHODO DA ACÇÃO A DISTANCIA	
Enxofre. . . . .	3,84	3,90	4,06
Paraffina . . . .	2,32	2,30	2,33
Colophonio. . . .	2,55	2,48	2,38
Resina. . . . .	3,15	—	—

Boltzmann verificou tambem para os gazes a equação (9). O poder inductor especifico era determinado do seguinte modo:

O condensador collocava-se num recipiente contendo o gaz, e um dos seus pratos era carregado por 300 elementos Daniell, estando o outro em communicacão com o solo. Isolando este ultimo e pondo em communicacão o condensador com o electro-

metro não se observava desvio algum; mas, junctando-se um elemento á pilha, lia-se o desvio  $\beta$ . Punha-se, por um momento, o electrometro e, outra vez, o prato do condensador em communição com o solo; isolavam-se de novo, deixando-os em communição, e fazia-se o vazio no recipiente que continha o gaz. Seja —  $\alpha$  o desvio do electrometro. Se forem  $D_1$  e  $D_2$  as capacidades dielectricas do gaz á pressão normal e depois de rarefeito, será

$$\frac{D_1}{D_2} = 1 + \frac{\alpha}{300\beta};$$

d'onde se deduziu que o augmento da capacidade dielectrica é proporcional ao augmento da pressão.

Podemos, pois, escrever

$$D = C \left( 1 + \lambda \frac{p}{760} \right),$$

onde  $C$  e  $\lambda$  são constantes,  $p$  a pressão do gaz expressa em millimetros. No vazio absoluto é

$$p = 0 \quad \text{e} \quad D = C.$$

Tomando para unidade das capacidades dielectricas a do vazio, será, pois,

$$D = 1 + \lambda \frac{p}{760},$$

que para  $p = 760$  dá

$$D_{760} = 1 + \lambda.$$

Fazendo igual a 1 o indice de refração do vazio e chamando

$\mu$  o seu augmento, quando o gaz passa á pressão 760, a equação (9) dá

$$(1 + \mu)^2 = 1 + \lambda,$$

ou, por ser  $\mu$  muito pequeno,

$$\mu = \frac{\lambda}{2}.$$

Os numeros que achou Boltzmann, são os seguintes:

	$\lambda_2$	$\mu$
Ar.....	0,000279	0,000278
Anhydr. carb.....	0,000446	0,000424
Hydrogeneo.....	0,000125	0,000130
Oxydo de carbone.....	0,000325	0,000321
Prot. de azote.....	0,000469	0,000475
Etylena.....	{ 0,000604	0,000641
	{ 0,00063	
Gaz dos pantanos.....	0,000445	0,000419.

Seja  $t$  a temperatura a que se determinaram estes numeros. Supponhamos que  $\sqrt{D_{760}} = 1 + \frac{\lambda}{2}$  varia com a temperatura do mesmo modo que o indice de refração. Representando por  $\sqrt{D_{0,760}}$  e  $n_{0,760}$  os valores de  $\sqrt{D}$  e  $n$  á temperatura 0 e á pressão 760, será

$$\sqrt{D_{0,760}} = n_{0,760} = 1 + \frac{\lambda}{2} (1 + 0,00366 t).$$



Boltzmann obteve assim os seguintes numeros:

	$\sqrt{D_{0,760}}$	$n_{0,760}$
Ar.....	1,000295	1,000294
Anhy. carb. ....	1,000473	1,000449
Hydrogeneo .....	1,000132	1,000138
Oxydo de carbone. ....	1,000345	1,000340
Prot. de azote .....	1,000497	1,000503
Etylena .....	1,000656	1,000678
Gaz dos pantanos.....	1,000472	1,000443.

Além d'estas experiencias devemos mencionar as de Schiller, Silow, Gordon, Hopkinson.

Schiller achou:

	D	$n^2$
Paraffina (resfriada lentamente, branca) .....	2,47	2,34
Paraffina (resfriada depressa, quasi transparente)..	1,92	2,19
Caoutchouc puro .....	2,34	2,25.

Os valores de  $n$  são a media dos indices de refração de cada uma das côres do espectro.

Silow achou para a terebenthina:

$$\sqrt{D} = 1,490 \quad , \quad n_{\infty} = 1,459.$$

Gordon achou:

	$\sqrt{D}$	$n_{\infty}$
Flint-glass duplo muito pesado... 1,778	1,778	1,672
Flint-glass muito pesado..... 1,747	1,747	1,620
Flint-glass leve..... 1,734	1,734	1,555
Crown-glass duro..... 1,763	1,763	1,504
Paraffina..... 1,4119	1,4119	1,4220.



Hopkinson repetiu as experiencias de Gordon:

	D
Flint-glass duplo muito pesado.....	9,896
Flint-glass pesado.....	7,376
Flint-glass leve.....	{ 6,72 6,69
Flint-glass muito leve.....	6,61
Corwn-glass duro.....	6,69
Vidro de janella inglez.....	8,45

Operou com diversos liquidos, achando:

	$n_{\infty}^2$	D
Espirito de petroleo.....	1,922	1,92
Oleo de petroleo (de Field) ...	2,075	2,07
Oleo de petroleo ordinario ...	2,078	2,10
Oleo de ozocerite (de Field)...	2,086	2,13
Oleo de terebenthina.....	2,128	2,23
Oleo de ricino.....	2,153	4,78
Oleo de spermaceti.....	2,135	3,02
Azeite.....	2,131	3,16
Oleo de pé de boi.....	2,125	3,07.

Os valores de  $n_{\infty}^2$  e D concordam sensivelmente para os hydrocarbonetos. Para as diferentes especies de vidro e para os oleos gordos, animaes e vegetaes, é  $D > n_{\infty}^2$ .

De todas as experiencias precedentes conclue-se que  $n_{\infty}^2$  e D são, na maioria dos casos, numericamente eguaes.

Nem sempre se observa concordancia exacta, talvez por não sabermos determinar com precisão os verdadeiros valores de  $n_{\infty}^2$ .

\* \* \*

Consideremos agora o caso particular em que a propagação se faz por ondas planas perpendiculares ao eixo dos  $z$ .

Todas as quantidades cujas variações constituem estas ondas, dependem só de  $z$  e  $t$ , sendo independentes de  $x$  e  $y$ .

As equações (5), por ser  $\frac{dW}{dz} = 0$  em virtude de (2), convertem-se em

$$\frac{d^2U}{dz^2} = 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\delta) \frac{d^2U}{dt^2}$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\delta) \frac{d^2V}{dt^2}$$

$$0 = \frac{d^2W}{dt^2},$$

cujos integraes são;

$$U = F_1(z - At) + F_2(z + At)$$

$$V = F_3(z - At) + F_4(z + At)$$

$$W = F_5(z) + F_6(z)t,$$

onde

$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$$

são funcções arbitrarías e

$$A = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\delta)}}.$$

As componentes da corrente são, segundo as equações (3),

$$u_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d^2 U}{dz^2}$$

$$u_2 = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d^2 V}{dz^2}$$

$$u_3 = 0,$$

e as da força magnetica, attendendo ás equações (4),

$$L = \frac{dV}{dz}$$

$$M = -\frac{dU}{dz}$$

$$N = 0.$$

Estas equações mostram que a direcção da corrente electrica e a da força magnetica existem na superficie de onda.

Assim, tanto a perturbação electrica como a magnetica concordam com a que constitue a luz em serem perpendiculares á direcção de propagação.

Para  $V=0$ , a força electrica é parallela ao eixo dos  $x$  e a magnetica ao eixo dos  $y$ .

Para  $U=0$ , a força electrica é parallela ao eixo dos  $y$  e a magnetica ao eixo dos  $x$ .

Sendo  $U$  e  $V$  diferentes de zero, podemos decompôr a vibração em duas perpendiculares entre si, segundo os  $x$  e os  $y$ .



## II

Faça-se nas equações (1)

$$X=Y=Z=0, \quad \psi=0, \quad C=0.$$

Virá

$$\Delta U = \frac{2}{v^2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dx dt} + 4\pi \epsilon_1 \left[ \frac{d^2 \varphi}{dx dt} + (1 + 4\pi \delta) \frac{d^2 U}{dt^2} \right]$$

$$\Delta V = \frac{2}{v^2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dy dt} + 4\pi \epsilon_2 \left[ \frac{d^2 \varphi}{dy dt} + (1 + 4\pi \delta) \frac{d^2 V}{dt^2} \right]$$

$$\Delta W = \frac{2}{v^2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dz dt} + 4\pi \epsilon_3 \left[ \frac{d^2 \varphi}{dz dt} + (1 + 4\pi \delta) \frac{d^2 W}{dt^2} \right].$$

Supponhamos que as vibrações electricas se propagam em ondas planas, cuja equação é

$$lx + my + nz - At = d,$$

onde  $l$ ,  $m$  e  $n$  são os cosenos de inclinação da normal,  $A$  a velocidade de propagação e  $d$  a distancia da onda á origem das coordenadas no tempo  $t=0$ .



As funcções U, V, W,  $\varphi$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  devem considerar-se funcções de  $d$ , e será

$$\frac{dU}{dx} = U'l, \quad \frac{d^2U}{dx^2} = U''l^2 \text{ etc.}$$

As equações tomam então a fórma:

$$U'' = -\frac{2lA\varphi''}{v^2} + 4\pi\varepsilon_1 \left[ -lA\varphi'' + (1 + 4\pi\delta)A^2U'' \right]$$

$$V'' = -\frac{2mA\varphi''}{v^2} + 4\pi\varepsilon_2 \left[ -mA\varphi'' + (1 + 4\pi\delta)A^2V'' \right]$$

$$W'' = -\frac{2nA\varphi''}{v^2} + 4\pi\varepsilon_3 \left[ -nA\varphi'' + (1 + 4\pi\delta)A^2W'' \right].$$

Sendo  $i$  a vibração electrica num ponto  $(x, y, z)$ , as suas componentes são

$$u_1 = ai, \quad u_2 = bi, \quad u_3 = ci,$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os cosenos de inclinação da direcção da vibração.

Ora as equações (3) dão

$$U'' = 4\pi ai - \frac{2lA\varphi''}{v^2}$$

$$V'' = 4\pi bi - \frac{2mA\varphi''}{v^2}$$

$$W'' = 4\pi ci - \frac{2nA\varphi''}{v^2};$$

e, substituindo estes valores em

$$lU'' + mV'' + nW'' = 0,$$

derivada de (2) em ordem a  $d$ , vem

$$4\pi i (la + mb + nc) = \frac{2A\phi''}{v^2}.$$

As equações diferenciaes tomam então a seguinte fôrma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\epsilon_1 v^2} &= -2\pi l (la + mb + nc) \\ &+ 4\pi (1 + 4\pi\delta) \frac{A^2}{v^2} \left[ a - l (la + mb + nc) \right] \\ \frac{b}{\epsilon_2 v^2} &= -2\pi m (la + mb + nc) \\ &+ 4\pi (1 + 4\pi\delta) \frac{A^2}{v^2} \left[ b - m (la + mb + nc) \right] \\ \frac{c}{\epsilon_3 v^2} &= -2\pi n (la + mb + nc) \\ &+ 4\pi (1 + 4\pi\delta) \frac{A^2}{v^2} \left[ c - n (la + mb + nc) \right] \end{aligned} \right\} \dots (10).$$

Multiplicando estas equações respectivamente por  $l$ ,  $m$ ,  $n$  e sommando, resulta

$$\frac{la}{\epsilon_1 v^2} + \frac{mb}{\epsilon_2 v^2} + \frac{nc}{\epsilon_3 v^2} = -2\pi (la + mb + nc),$$

d'onde se deduz proximamente, por serem  $\epsilon_1 v^2$ ,  $\epsilon_2 v^2$ ,  $\epsilon_3 v^2$  muito grandes,

$$la + mb + nc = 0 \dots \dots (11),$$

o que quer dizer que as vibrações são transversaes.

As equações (10) dão então as velocidades segundo as tres direcções principaes do meio

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_1(1+4\pi\delta)}}, A_2 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_2(1+4\pi\delta)}}, A_3 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_3(1+4\pi\delta)}}.$$

Eliminando das equações (10) as quantidades  $la + mb + nc$  e  $A^2$ , tem-se

$$\frac{l}{a}(A_2^2 - A_3^2) + \frac{m}{b}(A_3^2 - A_1^2) + \frac{n}{c}(A_1^2 - A_2^2) = 0 \dots \dots (12).$$

Multiplicando as equações (10) respectivamente por  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e sommando-as, obtem-se, desprezando os termos infinitamente pequenos de ordem superior

$$A_1^2 a^2 + A_2^2 b^2 + A_3^2 c^2 = A^2 \dots \dots (13).$$

Os valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$  deduzidos das equações (11), (12) e  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$  são os cosenos de inclinação dos eixos da ellipse determinada no ellipsoide  $A_1^2 x^2 + A_2^2 y^2 + A_3^2 z^2 = 1$  por um plano central paralelo a superficie de onda.

A  $a$  é a reciproca do comprimento do semi-eixo correspondente á direcção  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

Vê-se, portanto, que num conductor anisotropico se propagam em cada direcção duas vibrações electricas transversaes dirigidas segundo os eixos d'uma ellipse,



A velocidade de propagação de cada uma d'estas vibrações, é a reciproca do comprimento do semi-eixo respectivo.

São os mesmos resultados a que chegou Fresnel para a luz.

\* \* \*

Sendo exacta a theoria electromagnetica, a constante dielectrica dos corpos anisotropicos crystalisados deve variar com a direcção.

Conhecem-se as experiencias de Boltzmann sobre este assumpto.

Boltzmann achou pelo calculo que a relação entre a attracção d'uma esphera isoladora e a d'uma conductora da mesma grandeza, sob a acção das mesmas forças, era

$$\frac{D-1}{D-2} = E,$$

onde D representa a constante dielectrica da esphera isoladora referida ao ar.

Baseiando-se neste resultado, procedia do modo seguinte :

Suspendia a um dos braços d'uma balança de torsão, por meio d'um fio isolador, uma esphera da substancia não conductora que se estudava. O outro braço era equilibrado por um espelho, por meio do qual se observavam as torsões.

A distancia da esphera isoladora, achava-se uma esphera fixa que se carregava por uma machina de inducção e podia ser facilmente descarregada. Como a esphera fixa não era sempre carregada com a mesma quantidade de electricidade, estava em comunicação com uma segunda esphera fixa, um pouco distante d'uma segunda balança de torsão, inteiramente analoga á primeira, cuja esphera communicava com a terra. A carga da segunda balança media a quantidade de electricidade.



Como as cargas eram muito pequenas, podiam suppôr-se proporcionaes á força.

Boltzmann chama *attracção da esphera isoladora* á carga da primeira balança dividida pela carga da segunda; e *attracção da esphera conductora* áquelle quociente, quando a esphera isoladora era substituida por uma conductora da mesma grandeza. O quociente d'estas duas attracções dá-nos o valor de E.

Este valor dependia muitas vezes da duração da experiencia. Para attenuar esta causa de erro, Boltzmann ligava o fio que communicava a esphera da balança com a esphera fixa a um diapasão em vibração, que, num segundo, tocava mais de 100 vezes no electrodo positivo e outras tantas no electrodo negativo da machina de inducção; de modo que sobre a esphera a estudar actuava alternadamente electricidade positiva e electricidade negativa.

Boltzmann determinou E para duas espheras talhadas em crystaes naturaes de enxofre.

A electricidade actuava successivamente segundo os tres eixos de elasticidade  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ .

Calculando E, segundo a formula (9), por meio dos indices de refração correspondentes áquellas direcções, achavam-se valores sensivelmente proximos dos deduzidos pela experiencia:

	E	
	Pelo calculo	Pela experiencia
		1. <sup>a</sup> Esph.      2. <sup>a</sup> Esph.
Direcção $A_1$ . . . . .	1,82 . . . . .	1,79 . . . . . 1,805
— $A_2$ . . . . .	2,04 . . . . .	2,02 . . . . . 2
— $A_3$ . . . . .	2,16 . . . . .	2,06 . . . . . 2,07.

Boltzmann operou tambem com a paraffina, colophonio e resina. Os seus discipulos na Universidade de Gratz, Romich, Novak e Faydiga estudaram a attracção de esferas de enxofre cobertas com uma camada delgada de resina ou paraffina e esferas de paraffina cobertas com uma camada de resina. Não sendo a camada muito expressa, a attracção era a mesma que se ella não existisse. Examinaram ainda quatro esferas de spatho calcareo, vidro, spatho-fluor, quartzo e selenio.

Todas estas experiencias confirmam, em geral, a theoria electromagnetica da luz. As discordancias que se observam, são devidas á acção da duração da experiencia sobre a constante de dielectricidade.

### III

Se o meio além de ser capaz de polarisação dielectrica é magnetica, possui algum poder conductor, é

$$X = Y = Z = 0 \quad , \quad \psi = 0 \quad , \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = \epsilon.$$

A densidade da electricidade livre diminue muito rapidamente com o tempo por causa da conductibilidade, sendo nulla para  $t = \infty$ .

Podemos, pois, suppôr tambem  $\varphi = 0$ .

Admittamos que a propagação se faz em ondas planas perpendiculares ao eixo dos  $z$ .

As equações (1) tomam a fórma:

$$\frac{d^2U}{dz^2} = 4\pi(1 + 4\pi\delta) \left( C + \varepsilon \frac{d}{dt} \right) \frac{dU}{dt}$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = 4\pi(1 + 4\pi\delta) \left( C + \varepsilon \frac{d}{dt} \right) \frac{dV}{dt}$$

$$0 = \left( C + \varepsilon \frac{d}{dt} \right) \frac{dW}{dt}.$$

Como só temos em vista movimentos periodicos, deveremos abstrahir de W. Pondo além d'isso  $V=0$ , temos uma onda plana, em que as vibrações electricas se executam parallelamente ao eixo dos  $x$ .

Um integral particular da primeira equação é

$$U = e^{-pz} \cos \left( \frac{z}{A} - t \right),$$

onde  $p$  e  $A$  satisfazem ás condições

$$\frac{1}{A^2} - p^2 = 4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\delta)$$

$$\frac{p}{A} = 2\pi(1 + 4\pi\delta) C.$$

A velocidade de propagação é, pois,

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 + 4\pi\delta)} \sqrt{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + C^2}}}$$



e o movimento faz-se com uma absorção

$$p = \frac{C \sqrt{2\pi(1 + 4\pi\delta)}}{\sqrt{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + C^2}}},$$

a qual cresce com C.

Esta formula é confirmada pela experiencia.

A maior parte dos corpos transparentes são bons isoladores; e todos os bons conductores são opacos.

Se muitos electrolyts conduzem a electricidade apesar de transparentes não deve isso admirar-nos, porque as equações differenciaes de que partimos, não se referem a meios em que a corrente opera decomposições.

Para os outros meios, as formulas precedentes mostram que, só sendo  $C = \infty$ , será  $p = \infty$  ou  $A = 0$ , e o movimento não se propagará. Ora, como a conductibilidade dos corpos é finita, devem elles deixar passar sempre mais ou menos luz. Com effeito, o ouro, a prata, a platina são muito bons conductores; e, em laminas muito finas, apresentam-se, como é sabido, translucidos.

Maxwell estudou a absorção da luz numa lamina d'ouro, e achou que a transparencia era muito maior do que a deduzida da theoria.

Para explicar este facto, admitte Maxwell que a absorção do movimento é menor, quando a força electromotriz actua em direcções oppostas, durante tempos muito curtos, como succede para cada vibração simples da luz do que quando actua por um tempo sensivel na mesma direcção, como acontece nas nossas experiencias ordinarias.

\* \* \*

No caso em que a conductibilidade é muito grande relativamente á capacidade inductiva, as equações differenciaes tornam-se em

$$dU = 4\pi C(1 + 4\pi\delta) \frac{dU}{dt}$$

$$dV = 4\pi C(1 + 4\pi\delta) \frac{dV}{dt}$$

$$dW = 4\pi C(1 + 4\pi\delta) \frac{dW}{dt}.$$

Estas equações têm a mesma fórmula que as dadas por Fourier para a propagação do calor.

As funcções U, V e W variam em tempo e posição do mesmo modo que a temperatura d'um corpo solido homogeneo, correspondendo-se nos dois casos as condições inicial e superficial, e sendo  $4\pi C(1 + 4\pi\delta)$  igual ao producto do calor especifico pela densidade, dividido pela conductibilidade calorifica.

No caso em que a condutibilidade é muito grande relativa-  
mente à capacidade inercial, as equações diferenciais tornam-se

$$U = \frac{U_0}{w} (1 + \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{w^2})$$

$$V = \frac{V_0}{w} (1 + \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{w^2})$$

$$W = \frac{W_0}{w} (1 + \frac{1}{2} \frac{W_0^2}{w^2})$$



## Reflexão e refração da luz

Vamos estudar o caso em que uma onda plana encontra a superfície de separação de dois meios isoladores e isotrópicos, que suporemos também plana.

Tomemos a superfície limite para plano dos  $yz$ , a normal para eixo dos  $x$ ; e supponhamos que o plano de incidência determinado pela normal à onda incidente e a normal à superfície limite se confunde com o plano dos  $xy$ . Como os meios são isotrópicos, tanto a onda reflectida como a refractada são planas.

Sejam  $A$  e  $A'$  as velocidades de propagação nos dois meios,  $\alpha$  o angulo de incidencia,  $\alpha'$  o de reflexão e  $\alpha''$  o de refração.

O movimento ao longo da superfície limite propaga-se no primeiro meio com uma velocidade  $\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{A}{\sin \alpha'}$ , e no segundo com a velocidade  $A' = \frac{A \sin \alpha''}{\sin \alpha}$ , d'onde

$$\sin \alpha = \sin \alpha'$$

$$\sin \alpha'' = \frac{A'}{A} \sin \alpha$$

ou

$$\left. \begin{aligned} \alpha' &= 180 - \alpha \\ \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha'} &= \frac{A}{A'} \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

Vamos considerar dois casos:

1) As vibrações são perpendiculares ao plano de incidencia ou paralelas ao eixo dos  $z$ .

2) Existem no plano de incidencia ou são perpendiculares ao eixo dos  $z$ .

Nas ondas incidentes, reflectida e refractada, representaremos as grandezas  $u_1, u_2, u_3, U, V, W$  respectivamente por

$$\begin{array}{lll} u & , & v & , & w & & U & , & V & , & W \\ u' & , & v' & , & w' & & e & & U' & , & V' & , & W' \\ u'' & , & v'' & , & w'' & & & & U'' & , & V'' & , & W'' \end{array}$$

e admittiremos que as phases das tres ondas são as mesmas na superficie de separação.

1) Neste caso é  $u = v = 0$ , e a onda incidente pode representar-se por

$$\left. \begin{aligned} U &= 0 \\ V &= 0 \\ W &= F \left( \frac{x \cos \alpha + y \text{sen } \alpha}{A} - t \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(15).$$

Admittindo que nas ondas reflectida e refractada as vibrações

são também paralelas ao eixo dos  $z$ , será

$$U' = V' = U'' = V'' = 0$$

$$\left. \begin{aligned} W' &= a F \left( \frac{-x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{A} - t \right) \\ W'' &= a' F \left( \frac{x \cos \alpha'' + x \operatorname{sen} \alpha''}{A} - t \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(16),$$

representando  $a$  e  $a'$  constantes.

As funções  $W$  e as suas primeiras derivadas variam continuamente; e portanto na superfície de separação, ou para  $x=0$  será

$$W + W' = W''$$

$$\frac{dW}{dx} + \frac{dW'}{dx} = \frac{dW''}{dx}$$

$$\frac{dW}{dy} + \frac{dW'}{dy} = \frac{dW''}{dy}$$

Substituindo os valores de (15) e (16), e attendendo a (14), vem

$$\left. \begin{aligned} 1 + a &= a' \\ \frac{\cos \alpha}{A} (1 - a) &= a' \frac{\cos \alpha''}{A'} \end{aligned} \right\} \dots\dots(17)$$

ou

$$\left. \begin{aligned} a &= - \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \alpha'')}{\operatorname{sen}(\alpha + \alpha'')} \\ a' &= \frac{2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha''}{\operatorname{sen}(\alpha + \alpha'')} \end{aligned} \right\} \dots\dots(18).$$



As componentes da força magnetica deduzidas dos valores de  $W$ ,  $W'$  e  $W''$  são expressas por

$$L = -\frac{\text{sen } \alpha}{A} F' \left( \frac{x \cos \alpha + y \text{sen } \alpha}{A} - t \right)$$

$$M = \frac{\cos \alpha}{A} F' \left( \frac{x \cos \alpha + y \text{sen } \alpha}{A} - t \right)$$

$$L' = -\frac{a \text{sen } \alpha}{A} F' \left( \frac{-x \cos \alpha + y \text{sen } \alpha}{A} - t \right)$$

$$M' = \frac{a \cos \alpha}{A} F' \left( \frac{-x \cos \alpha + y \text{sen } \alpha}{A} - t \right)$$

$$L'' = -\frac{a' \text{sen } \alpha''}{A'} F' \left( \frac{x \cos \alpha'' + y \text{sen } \alpha''}{A'} - t \right)$$

$$M'' = \frac{a' \cos \alpha''}{A'} F' \left( \frac{x \cos \alpha'' + y \text{sen } \alpha''}{A'} - t \right)$$

Num ponto da superficie de separação, a força magnetica na onda incidente está para a força magnetica nas ondas reflectida e refractada como  $1 : a : a' \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha''}$ .

2) Neste caso a onda incidente pode ser representada por

$$\left. \begin{aligned} U &= \text{sen } \alpha F \left( \frac{x \cos \alpha + y \text{sen } \alpha}{A} - t \right) \\ V &= -\cos \alpha F \left( \frac{x \cos \alpha + y \text{sen } \alpha}{A} - t \right) \\ W &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(19).$$

As ondas reflectida e refractada podem ter a fórma:

$$\left. \begin{aligned} U' &= a \operatorname{sen} \alpha F \left( \frac{-x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{A} - t \right) \\ V' &= a \cos \alpha F \left( \frac{-x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{A} - t \right) \\ W' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (20)$$

$$\left. \begin{aligned} U'' &= a' \operatorname{sen} \alpha'' F \left( \frac{x \cos \alpha'' + y \operatorname{sen} \alpha''}{A'} - t \right) \\ V'' &= -a' \cos \alpha'' F \left( \frac{x \cos \alpha'' + y \operatorname{sen} \alpha''}{A'} - t \right) \\ W'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (21).$$

Como as funcções U, V e as suas primeiras derivadas são continuas, será para  $x = 0$ :

$$U + U' = U''$$

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dU'}{dx} = \frac{dU''}{dx}$$

$$\frac{dU}{dy} + \frac{dU'}{dy} = \frac{dU''}{dy}$$

$$V + V' = V''$$

$$\frac{dV}{dx} + \frac{dV'}{dx} = \frac{dV''}{dx}$$

$$\frac{dV}{dy} + \frac{dV'}{dy} = \frac{dV''}{dy}$$

Substituindo nestas equações as expressões de (19), (20) e (21), vem

$$(1 + a) \operatorname{sen} \alpha = a' \operatorname{sen} \alpha''$$

$$\frac{1 - a}{A} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{a' \operatorname{sen} \alpha'' \cos \alpha''}{A'}$$

$$\frac{1 + a}{A} \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{a' \operatorname{sen}^2 \alpha''}{A'}$$

$$(1 - a) \cos \alpha = a' \cos \alpha''$$

$$\frac{1 + a}{A} \cos^2 \alpha = \frac{a' \cos^2 \alpha''}{A'}$$

$$\frac{1 - a}{A} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \frac{a' \operatorname{sen} \alpha'' \cos \alpha''}{A'}$$

A segunda, quarta e sexta equações, assim como a primeira e terceira, são idênticas.

Sommando a terceira e quinta, vem

$$\frac{1 + a}{A} = \frac{a'}{A'}$$

Esta e a quarta dão

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \alpha'')}{\operatorname{tg}(\alpha + \alpha'')} \\ a' &= \frac{2 \operatorname{sen} \alpha'' \cos \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \alpha'') \cos(\alpha - \alpha'')} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22).$$



A força magnetica tem os valores

$$N = \frac{1}{A} F' \left( \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{A} - t \right)$$

$$N' = \frac{a}{A} F' \left( \frac{-x \cos \alpha + y \sin \alpha}{A} - t \right)$$

$$N'' = \frac{a'}{A'} F' \left( \frac{x \cos \alpha'' + y \sin \alpha''}{A'} - t \right).$$

A relação d'estas forças num ponto da superficie de separação é

$$1 : a : a' \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''}.$$

\* \* \*

Vamos agora determinar a relação das intensidades dos raios incidente, reflectido e refractado.

Imaginemos na direcção da onda incidente um cylindro de secção  $\omega$ , e estudemos a propagação do movimento entre dois planos paralelos A e B perpendiculares ao eixo do cylindro.

Este movimento divide-se na superficie de separação em movimento reflectido e refractado, propagando-se o primeiro num cylindro de secção  $\omega$ , entre os planos A' e B', e o segundo num cylindro de secção  $\omega'$ , entre os planos A'' e B''.

As secções  $\omega$  e  $\omega'$  têm entre si a relação  $\frac{\omega}{\cos \alpha} = \frac{\omega'}{\cos \alpha''}$ .

Supponhamos que o movimento se executa no tempo  $t$ , entre os planos A e B, e no tempo  $t'$  entre os planos A'B' e A''B''.

As distancias d'estes planos são respectivamente

$$\Delta, \Delta, \Delta \frac{\text{sen } \alpha''}{\text{sen } \alpha}.$$

A energia da onda incidente divide-se na das ondas reflectida e refractada.

Teremos, pois, a equação

$$\left. \begin{aligned} & \iiint (u U + v V + w W) dx dy dz \\ & = \iiint (u' U' + v' V' + w' W') dx' dy' dz' \\ & + \iiint (u'' U'' + v'' V'' + w'' W'') dx'' dy'' dz'' \end{aligned} \right\} \dots (23),$$

onde a integração se estende ao volume dos cylindros comprehendido entre os planos AB, A'B' e A''B''.

Supponhamos que as vibrações incidentes são lineares e obliquas ao plano de incidencia.

Sendo os cosenos de inclinação das vibrações incidente, reflectida e refractada respectivamente

$$\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu', \nu'; \lambda'', \mu'', \nu'',$$

podemos escrever

$$U = \lambda F \left( \frac{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{A} - t \right)$$

$$V = \mu F \left( \frac{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{A} - t \right)$$

$$W = \nu F \left( \frac{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{A} - t \right)$$

$$U' = b \lambda' F \left( \frac{-x' \cos \alpha + y' \operatorname{sen} \alpha}{A} - t' \right)$$

$$V' = b \mu' F \left( \frac{-x' \cos \alpha + y' \operatorname{sen} \alpha}{A} - t' \right)$$

$$W' = b \nu' F \left( \frac{-x' \cos \alpha + y' \operatorname{sen} \alpha}{A} - t' \right)$$

$$U'' = b' \lambda'' F \left( \frac{x'' \cos \alpha'' + y'' \operatorname{sen} \alpha''}{A'} - t' \right)$$

$$V'' = b' \mu'' F \left( \frac{x'' \cos \alpha'' + y'' \operatorname{sen} \alpha''}{A'} - t' \right)$$

$$W'' = b' \nu'' F \left( \frac{x'' \cos \alpha'' + y'' \operatorname{sen} \alpha''}{A'} - t' \right)$$

onde  $b$  e  $b'$  são constantes.



A equação (23) dá:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{A^2} \iiint F \left( \frac{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{A} - t \right) \\
 & \quad F'' \left( \frac{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{A} - t \right) dx dy dz \\
 = & \frac{b^2}{A^2} \iiint F \left( \frac{-x' \cos \alpha + y' \operatorname{sen} \alpha}{A} - t' \right) \\
 & \quad F'' \left( \frac{-x' \cos \alpha + y' \operatorname{sen} \alpha}{A} - t' \right) dx' dy' dz' \\
 + & \frac{b'^2}{A'^2} \iiint F \left( \frac{x'' \cos \alpha'' + y'' \operatorname{sen} \alpha''}{A'} - t' \right) \\
 & \quad F'' \left( \frac{x'' \cos \alpha'' + y'' \operatorname{sen} \alpha''}{A'} - t' \right) dx'' dy'' dz''
 \end{aligned} \quad \dots (24).$$

O movimento que no tempo  $t$  tem lugar num ponto  $(x, y)$  da onda incidente, chega no fim do tempo  $t'$  aos pontos  $(x'y')$  e  $(x''y'')$ .

Chamando  $E, E', E''$  as distancias d'estes pontos aos planos  $A, A', A''$  e  $\Delta, \Delta', \Delta''$ , as distancias d'estes planos á origem, teremos

$$x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = -\Delta + E$$

$$-x' \cos \alpha + y' \operatorname{sen} \alpha = \Delta' + E'$$

$$x'' \cos \alpha'' + y'' \operatorname{sen} \alpha'' = \Delta'' + E''$$

$$t' = t + \frac{\Delta + \Delta'}{A} = t + \frac{\Delta}{A} + \frac{\Delta'}{A'}$$

Pondo em vez dos elementos de volume  $dx dy dz$ ,  $dx' dy' dz'$ ,  $dx'' dy'' dz''$  os elementos de volume  $\omega dE$ ,  $\omega' dE'$ ,  $\omega'' dE''$  e substituindo em (24), resulta

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta} F\left(\frac{E-\Delta}{A}-t\right) F''\left(\frac{E-\Delta}{A}-t\right) dE \\ &= b^2 \int_0^{\Delta} F\left(\frac{E'-\Delta}{A}-t\right) F''\left(\frac{E'-\Delta}{A}-t\right) dE' \\ &+ b'^2 \frac{\cos \alpha''}{\cos \alpha} \frac{A^2}{A'^2} \int_0^{\Delta \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha''}} F\left(\frac{E''-\Delta}{A'}-\frac{\Delta}{A}-t\right) F''\left(\frac{E''-\Delta}{A'}-\frac{\Delta}{A}-t\right) dE''. \end{aligned}$$

Pondo  $\frac{E'}{A'} = \frac{y}{A}$ , é  $dE' = \frac{A'}{A} dy$

e o limite superior do terceiro integral igual a  $\Delta$ . Teremos

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Delta} F\left(\frac{E-\Delta}{A}-t\right) F''\left(\frac{E-\Delta}{A}-t\right) dE \\ &= b^2 \int_0^{\Delta} F\left(\frac{E'-\Delta}{A}-t\right) F''\left(\frac{E'-\Delta}{A}-t\right) dE' \\ &+ \frac{b'^2 \cos \alpha''}{\cos \alpha} \frac{A}{A'} \int_0^{\Delta} F\left(\frac{y-\Delta}{A}-t\right) F''\left(\frac{y-\Delta}{A}-t\right) dy, \end{aligned}$$

ou  $1 = b^2 + b'^2 \frac{\cos \alpha'' \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha''}$ .

A intensidade da onda incidente está, pois, para a das ondas reflectida e refractada como

$$1 : b^2 : b'^2 \frac{\cos \alpha'' \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha''}.$$

Nos dois casos particulares de que temos tratado, obtem-se :

$$1 : \frac{\sin^2(\alpha - \alpha'')}{\sin^2(\alpha + \alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin \alpha''}{\sin^2(\alpha + \alpha'')} \dots \dots (26).$$

$$1 : \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha - \alpha'')}{\operatorname{tg}^2(\alpha + \alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha''}{\sin^2(\alpha + \alpha'') \cos^2(\alpha - \alpha'')} \dots \dots (27).$$

As formulas (18), (22), (26), (27) são identicas ás deduzidas por Fresnel.

\* \* \*

Consideremos agora o caso particular em que o primeiro meio possue menor velocidade de propagação que o segundo, ou em que  $\frac{\sin \alpha''}{\sin \alpha} = n$  é maior do que 1.

Para  $\sin \alpha = \frac{1}{n} = \sin N$  é  $\alpha'' = 90$ . Quando  $\alpha$  é superior a

$N$  tem logar a reflexão total.

Consideremos os dois casos de que nos temos occupado:

1) Sendo as vibrações perpendiculares ao plano de incidencia,



temos para expressão dos coeficientes  $a$ ,  $a'$  e para relação das intensidades:

$$a = -\frac{\operatorname{sen}(\alpha - \alpha'')}{\operatorname{sen}(\alpha + \alpha'')} , \quad a' = \frac{2 \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha''}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha'' + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha''}$$

$$1 : \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha - \alpha'')}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \alpha'')} : \frac{\operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} 2\alpha''}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \alpha'')} .$$

A intensidade da onda refractada tende para zero, á medida que o angulo  $\alpha$  se aproxima de  $N$ .  $a'$  tende para 2.

Sendo  $\alpha > N$ ,  $a$  e  $a'$  tomam as fórmás

$$a = \frac{n^2 + 1 - 2n^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{n^2 - 1} - i \frac{2n \cos \alpha \sqrt{n^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1}}{n^2 - 1}$$

$$a' = \frac{2n^2 \cos^2 \alpha}{n^2 - 1} - i \frac{2n \cos \alpha \sqrt{n^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1}}{n^2 - 1} ,$$

onde

$$i = \sqrt{-1} .$$

A complexidade dos valores de  $a$  e  $a'$  mostra-nos que neste caso não têm logar todas as hypotheses estabelecidas.

Com effeito, escrevendo  $a$  e  $a'$  debaixo da fórma

$$A_1 e^{-i\psi} \quad \text{e} \quad A_2 e^{-i\psi'} ,$$

e escolhendo para a funcção  $F$  a fórma

$$e^{i \left( \frac{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{\Lambda} - t \right)}$$

obtemos para as tres ondas as expressões

$$e^{i\left(\frac{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{\Lambda} - t\right)}$$

$$A_1 e^{i\left(\frac{-x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{\Lambda} - t - \psi\right)}$$

$$A_2 e^{i\left(\frac{x \cos \alpha' + y \operatorname{sen} \alpha'}{\Lambda} - t - \psi'\right)}$$

Comparando com as expressões que correspondem ao caso de ser  $\alpha < N$

$$e^{i\left(\frac{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{\Lambda} - t\right)}$$

$$a e^{i\left(\frac{x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}{\Lambda} - t\right)}$$

$$a' e^{i\left(\frac{x \cos \alpha' + y \operatorname{sen} \alpha'}{\Lambda} - t\right)}$$

vê-se que a complexidade dos valores de  $a$  e  $a'$  resulta sómente de não ter logar a hypothese da igualdade de phase.

A variação de phase é

$$\psi = \operatorname{arc. tg} \left( \frac{2n \cos \alpha \sqrt{n^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1}}{n^2 + 1 - 2n^2 \operatorname{sen}^2 \alpha} \right)$$

$$\psi' = \operatorname{arc. tg} \left( \frac{\sqrt{n^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 1}}{n \cos \alpha} \right),$$

sendo

$$A_1^2 = 1$$

$$A_2^2 = \frac{4n^2 \cos \alpha}{n^2 - 1}.$$

O movimento no segundo meio, por ser  $\cos \alpha'' = i \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}$  é expresso por

$$A_2 e^{-\frac{x}{\Lambda'} \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}} e^{i \left( \frac{y \sin \alpha}{\Lambda} - t - \psi' \right)}$$

$$\frac{y \sin \alpha}{\Lambda} - t - \psi' = \text{const.}$$

representa um plano que se move paralelamente aos  $xz$  com a velocidade  $\frac{\Lambda}{\sin \alpha}$  igual áquella com que o movimento se propaga na superficie de separação.

Quando  $\alpha = 90$  a intensidade da onda refractada é nulla, isto é, não ha refração.

A intensidade da onda reflectida é igual á da onda incidente.

2) Neste caso, os coefficients  $a$  e  $a'$  são;

$$a = \frac{\text{tg}(\alpha - \alpha'')}{\text{tg}(\alpha + \alpha'')} , \quad a' = \frac{2 \sin \alpha'' \cos \alpha}{\sin(\alpha + \alpha'') \cos(\alpha - \alpha'')}$$

e a intensidade:

$$1 : \frac{\text{tg}^2(\alpha - \alpha'')}{\text{tg}^2(\alpha + \alpha'')} : \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha''}{\sin^2(\alpha + \alpha'') \cos^2(\alpha - \alpha'')}.$$

Para  $\alpha = N$ , a intensidade da ordem refractada é nulla e  $a' = 2n$ .



Para  $\alpha > N$  é

$$a = \frac{\cos^2 \alpha - n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)}{\cos^2 \alpha + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)} - i \frac{2n \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{\cos^2 \alpha + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)}$$

$$a' = \frac{2n \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)} - i \frac{2n^2 \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{\cos^2 \alpha + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)}$$

e mostra-se, como anteriormente, que a complexidade d'estas grandezas é devida a não ter logar a egualdade de phase.

Pondo

$$a = B_1 e^{-i\chi}$$

$$a' = B_2 e^{-i\chi'},$$

a variação da phase é dada por

$$\chi = \operatorname{arctg} \left( \frac{2n \cos \alpha \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{\cos^2 \alpha - n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)} \right)$$

$$\chi' = \operatorname{arctg} \left( \frac{n \sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{\cos \alpha} \right),$$

sendo

$$B_1^2 = 1$$

e

$$B_2^2 = \frac{4n^2 \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + n^2 (n^2 \sin^2 \alpha - 1)}.$$

No segundo meio não ha movimento refractado, e a onda reflectida tem a mesma intensidade que a incidente.

Se as vibrações não são parallelas nem perpendiculares ao plano da incidencia, o raio luminoso pode decompor-se em dois, cujas vibrações tenham aquellas direcções.

Na reflexão total estas duas componentes soffrem mudança de phase, differente para cada uma.

A differença d'estas phases é

$$\varphi - \chi = \text{arc. cos} \left( \frac{\cos^2 \alpha + n^2 \sin^2 \alpha (2 \sin^2 \alpha - 1)}{(1 + n^2) \sin^2 \alpha - 1} \right).$$

\* \* \*

Vamos fazer applicação das formulas (26) e (27) a um caso particular, calculando por meio d'ellas as intensidades dos raios reflectidos e refractados no Crown-glass n.º 13, cujo indice de refração é 1,5243 para a risca B e 1,545 para a risca H. Consideremos o caso, em que o primeiro meio é o ar e o segundo o vidro. Representemos por 1 a intensidade da luz incidente, por I a da luz reflectida.

$I_{B_s}$  e  $I_{H_s}$  representam as intensidades da luz reflectida dos comprimentos de onda B e H, vibrando perpendicularmente ao plano de incidencia;  $I_{B_p}$  e  $I_{H_p}$ , as intensidades de luz reflectida dos mesmos comprimentos de onda, de vibrações parallelas áquelle plano.

A tabella seguinte dá, para as riscas B e H, os angulos de refração correspondentes a angulos de incidencia succedendo-se de 5 em 5 grãos, e as intensidades correspondentes da luz refle-

etida. As intensidades da luz refractada não vêm na tabella, porque são a differença entre 1 e a intensidade da luz reflectida.

$\alpha$	$\alpha''_B$	$I_{B_s}$	$I_{B_p}$	$\alpha''_H$	$I_{H_s}$	$I_{H_p}$
0°.....	0°	0,04344	0,04344	0°	0,045858	0,045858
5°.....	3°16' 40''	0,04357	0,04270	3°14'45''	0,04606	0,04537
10°.....	6°32' 30''	0,04489	0,04440	6°27'12''	0,04771	0,04404
15°.....	9°46' 35''	0,04720	0,03923	9°38'32''	0,05015	0,04175
20°.....	12°58'	0,05063	0,036185	12°47'20''	0,053727	0,03858
25°.....	16° 3' 48''	0,05544	0,032256	15°32'30''	0,05878	0,03435
30°.....	19° 3' 57''	0,06194	0,02747	18°33'	0,0655	0,029417
35°.....	22° 6' 12''	0,07065	0,02194	21°47'35''	0,07465	0,023556
40°.....	24°56' 39''	0,08222	0,01581	24°35' 5''	0,08661	0,017166
45°.....	27°38' 19''	0,09774	0,00955	27°44'12''	0,10244	0,01049
50°.....	30°10' 9''	0,11854	0,003905	29°45'42''	0,12358	0,004434
55°.....	32°30' 30''	0,14662	0,000326	31° 1' 8''	0,15260	0,000465
56°43'58,5''	33°16'1,5''	0,15858	0	32°45'50''	0,165045	0,000015
57° 5'13,5''	33°25' 8''	0,161166	0,000015	32°54'46,5''	0,1677	0
60°.....	34°37' 20''	0,18487	0,00147	34° 5'35''	0,1918	0,001208
65°.....	36°29'	0,23733	0,012183	35°55'	0,24487	0,01154
70°.....	38° 3'	0,30977	0,041307	37°27'40''	0,31793	0,04028
75°.....	39°19' 26''	0,4096	0,10531	38°41'47''	0,4175	0,10405
80°.....	40°14' 50''	0,54798	0,23524	39°36'	0,5556	0,23374
85°.....	40°48' 44''	0,72735	0,49193	40° 9'	0,73117	0,49118
90°.....	40°59' 59''	1	1	40°20' 4''	1	1

Se as vibrações são perpendiculares ao plano de incidencia, a intensidade da luz reflectida augmentará progressivamente até se tornar egual a 1; a da luz refractada diminuirá até se annullar. Demais a intensidade da luz reflectida é tanto maior e a da refractada tanto menor quanto maior é a sua refrangibilidade.



Se as vibrações são paralelas, a intensidade de luz reflectida diminue até se annullar quando o ângulo de incidencia é igual ao da polarisação; depois cresce até se tornar igual a 1. A intensidade da luz refractada augmenta correspondentemente até á unidade, e diminue depois até zero. Pelo que diz respeito á côr, a intensidade dos raios reflectidos augmenta com a refrangibilidade, quando o angulo de incidencia cresce até se tornar igual ao angulo de polarisação, e diminue entre este angulo e 90°. Para a refração succede o contrario.

Consideremos agora o caso em que o primeiro meio é o vidro e o segundo o ar

$\alpha$	$\alpha''_B$	$I_{Bs}$	$I_{Bp}$	$\alpha''_H$	$I_{Hs}$	$I_{Hp}$
0°.....	0°	0,04314	0,04314	0°	0,045858	0,045858
5°.....	7°38' 3''	0,04415	0,042127	7°44' 19''	0,046938	0,044771
10°.....	15°20'54''	0,047393	0,039034	15°33'44''	0,050459	0,044458
15°.....	23°14' 7''	0,053565	0,033741	23°34'14''	0,057134	0,035717
20°.....	31°25'18''	0,064122	0,025971	31°53'56''	0,068651	0,02730
25°.....	40° 6'16''	0,082526	0,01569	40°45'50''	0,088764	0,016449
30°.....	49°39' 9''	0,116879	0,004252	50°34'44''	0,126951	0,003881
32°54'46,5''	55°55' 2''	0,15279	0,000075	57° 5'13,5''	0,1677	0
33°16' 1,5''	56°43'58,5''	0,158564	0	57°56'26''	0,174339	0,000094
35°.....	60°57'36''	0,193708	0,002584	62°23'48''	0,215305	0,004527
40°.....	78°27'30''	0,500454	0,185326	83°16'10''	0,67206	0,038147
40°20' 4''	80°36' 7''	0,56785	0,257761	90°	1	1
40°59'59''	90°	1	1			

Se a luz está polarisada no plano de incidencia, tudo succede como no caso anterior. Se está polarisada num plano perpendicular ao da incidencia, a intensidade varia para uma côr deter-

minada ainda do mesmo modo que anteriormente; mas o angulo de polarisação é agora differente, e egual ao angulo de refracção correspondente ao angulo de polarisação do caso antecedente.

Para duas côres differentes, quando o angulo de incidencia cresce desde zero até perto do angulo de polarisação da côr mais refrangivel, a intensidade dos raios reflectidos cresce com a refrangibilidade. Succede o contrario desde este angulo até ao angulo de polarisação da côr menos refrangivel. A partir d'este angulo, a intensidade da côr mais refrangivel é de novo maior que a do menos refrangivel. Na refracção tem lugar o contrario.

\* \* \*

Seguir-se-hia agora estudar a reflexão e refracção na superficie de isoladores anisotropicos e na de conductores isotropicos e anisotropicos. O exame de todos estes casos levar-nos-hia, porém, muito longe. Apenas diremos que o seu estudo se fazia por um processo analogo ao precedente, e que ainda nelles se via confirmada a theoria electromagnetica da luz.

FIM.

