
ut
videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

PRESSÕES DESENVOLVIDAS

NO

INTERIOR DOS LIQUIDOS EM MOVIMENTO

PRESSÕES DESENVOLVIDAS

NO

INTERIOR DOS LIQUIDOS EM MOVIMENTO

POR

Luciano Antonio Pereira da Silva

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1888

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O

ACTO DE CONCLUSÕES MAGNAS

NA

FACULDADE DE MATHEMATICA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

A

MINHA MÃE

E A

MEU TIO

ANTONIO AGOSTINHO COELHO DA SILVA

As equações geraes do movimento dos liquidos estabelecem-se com a maior facilidade na hypothese da fluidez perfeita. Outro tanto não succede, porém, quando se attende ás forças produzidas pela viscosidade, a fim de obter fórmulas mais de accordo com os phenomenos naturaes e portanto de mais util applicação na pratica, onde estas fórmulas são reclamadas para a resolução de problemas importantes como são os da canalisação e distribuição das aguas.

As primeiras tentativas n'este sentido são devidas a Navier, que partindo da hypothese de Newton, segundo a qual as acções desenvolvidas entre as moleculas do liquido em movimento são proporcionaes á velocidade com a qual ellas se afastam ou approximam umas das outras, obtem as expressões:

$$p_{xx} = -p + 2\varepsilon \frac{du}{dx}, \quad p_{yy} = -p + 2\varepsilon \frac{dv}{dy},$$

$$p_{zz} = -p + 2\varepsilon \frac{dw}{dz},$$

$$p_{yz} = \varepsilon\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right), \quad p_{zx} = \varepsilon\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right),$$

$$p_{xy} = \varepsilon\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),$$

$$p = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}),$$

com as quaes se estabelecem facilmente as equações do movimento. Estas são tambem as fórmulas de Cauchy e Poisson.

p_{xx}, p_{yy} etc. são, segundo a notação conhecida de Coriolis, as seis componentes normaes e tangenciaes das pressões referidas á unidade de superficie, exercidas no interior do fluido atravez de tres pequenas faces, cujas normaes têm a direcção dos primeiros indices, indicando os segundos o sentido da decomposição; u, v, w são as componentes, segundo os tres eixos coordenados, da velocidade d'uma molecula do fluido; e ε é o chamado «coefficiente do attrito interior» do liquido, a que Navier attribue um valor constante para cada fluido.

As experiencias de Darcy mostraram porém que os attritos desenvolvidos entre os filetes liquidos dependem tambem das secções fluidas; e Bazin, que foi o collaborador e o continuador de Darcy, emittiu pela primeira vez a opinião de que aquelles attritos dependem não só das velocidades relativas dos filetes contiguos, mas tambem das suas velocidades absolutas. Bazin não expõe os motivos da sua asserção, que á primeira vista parece paradoxal, pois que não influindo estas velocidades sobre a distancia das moleculas entre si, nem sobre o seu estado physico, não se vê que influencia ellas possam ter sobre as suas acções reciprocas.

N'uma memoria publicada no *Journal de Liouville* (t. 13) Boussinesq, sem recorrer á hypothese de Newton, mas suppondo que as velocidades das moleculas liquidas variam, n'um mesmo instante, continuamente de um ponto a outro do fluido, chega ás fórmulas de Navier e compara-as com as experiencias muito precisas de Poiseuille sobre o escoamento permanente dos liquidos em tubos circulares de secção muito pequena. Estas experiencias foram feitas com liquidos que molhavam as paredes dos tubos e Boussinesq, bem como E. Mathieu (*Comptes Rendus*, t. 57, p. 320), entendem que n'este caso se deve suppôr nulla a velocidade juncto das paredes. Para justificar esta hypothese diz Boussinesq: «visto que uma differença extremamente pequena de velocidades entre moleculas muito proximas desenvolve uma força sensivel, uma differença finita de velocidades, entre as moleculas da parede e as do fluido, desenvolveria um attrito incomparavelmente mais consideravel e portanto, para que este attrito faça equilibrio á acção tangencial exercida pelo fluido sobre a sua superficie, deve elle corresponder a uma velocidade muito pequena e analyticamente nulla.» Esta hypothese é tambem confirmada por experiencias.

Da comparação das fórmulas de Navier com as experiencias de Poiseuille, conclue Boussinesq que estas fórmulas são applicaveis ao movimento em espaços capillares, suppondo porém nulla a velocidade juncto das paredes. N'este caso os movimentos moleculares são com effeito continuos e regulares.

O mesmo não succede, porém, quando os liquidos se movem em tubos tendo secções comparaveis ás dos tubos de conducção das aguas ou em canaes descobertos. N'este caso as velocidades não variam gradualmente, em cada instante, d'um ponto do fluido para os pontos visinhos, porque, se assim fôsse, os coefficientes de attrito seriam muito pequenos e os filetes fluidos muito proximos deveriam adquirir differenças de velocidade enormes. Considerando, por exemplo, um canal descoberto, cheio de agua, cuja secção normal é um semi-circulo com 1^m de raio e com a inclinação apenas egual a 0,0001, Boussinesq acha para velocidade permanente do filete central 187^m por segundo, suppondo mesmo nulla a velocidade juncto das paredes. Seriam pois precisas variações muito rapidas de velocidade n'um sentido transversal aos filetes contiguos para que o attrito fizesse equilibrio á componente do peso parallela ao eixo do canal, se as velocidades variassem continuamente de um ponto para os pontos visinhos, como as fórmulas suppõem.

Esta continuidade de movimentos não tem logar, com effeito, quando as secções são sufficientemente grandes, para tornarem inevitavel a producção de movimentos oscillatorios que junctamente com o escorregamento dos filetes uns sobre os outros produzem uma grande quantidade de rupturas no seio da massa liquida. Das paredes, onde ha choques continuos, quer em virtude das suas rugosidades, quer d'aquellas oscillações, destacam-se porções de liquido que, sob a acção da parede e da translação geral, adquirem um movimento rotatorio formando redomoinhos, que, girando no seio do liquido, perturbam a regularidade do seu movimento. É claro que estes movimentos tumultuosos devem desenvolver resistencias muito mais consideraveis do que os attritos devidos a movimentos continuos, tornando menores as velocidades de translação.

A agitação, assim produzida nos liquidos em movimento, deve diminuir com a secção do tubo e as resistencias que ella produz devem tender para zero quando a secção decrescer indefinidamente, porque os affastamentos das moleculas para fóra das suas trajectorias medias não podem deixar de ser cada vez mais restrictos. É assim que estas resistencias desapparecem nos tubos capillares, deixando a descoberto as forças regulares de attrito. Então o coefficiente de attrito interior é constante. Nos tubos de maiores dimensões e nos canaes descobertos este coefficiente depende, em cada ponto, da intensidade da agitação do liquido e das perdas de força viva, que ella produz, e portanto das causas que fazem variar aquella intensidade, isto é: das dimensões das secções transversaes, que permittem aos redomoinhos um maior ou menor desenvolvimento; das velocidades contra as paredes, onde elles se fórmam; da fórma do contorno das secções; e das distancias do ponto, que se considera, a este contorno, a partir do qual os redomoinhos vão, ora convergir, ora divergir, propagando-se no interior do fluido. Assim explica-se bem o resultado das experiencias de Darcy e a affirmação de Bazin, a que já nos referimos.

Vê-se pois que os liquidos se movem de duas maneiras differentes, segundo se escoam em tubos de calibre muito pequeno ou em espaços de secções comparaveis ás dos tubos de canalisação. No primeiro caso as velocidades variam gradualmente, em cada instante, d'um ponto do fluido para os pontos visinhos e o movimento é representado com sufficiente approximação pelas fórmulas de Navier, suppondo nulla a velocidade juncto das paredes; no segundo caso o movimento é caracterisado por mudanças frequentes e rapidas. A observação mostra, porém, que estas variações de velocidade estão sujeitas a uma especie de periodicidade irregular, em virtude da qual, se se toma a media dos valores que, n'um espaço de tempo sufficientemente curto, toma a velocidade n'um ponto fixo, esta media, a que pode chamar-se *velocidade media local*, é uma funcção continua das coordenadas do ponto.

É em virtude das velocidades medias locaes, que são medidas pelos fluctuadores e outros instrumentos hydrometricos, que se opera a *translação* dos elementos fluidos, abstrahindo das suas rotações e oscillações.

Devem pois escolher-se, segundo Boussinesq, para estabelecer as equações do movimento, não as relações que exprimem, n'um momento dado, o equilibrio dynamico dos diversos volumes elementares do fluido, mas sim as medias d'estas relações durante um tempo sufficientemente curto, ou o que se pode chamar as equações do equilibrio dynamico medio das particulas fluidas, que passam successivamente n'um mesmo ponto.

Seguindo este caminho, Boussinesq procura exprimir os valores medios das pressões, exercidas no interior do liquido, atravez d'um elemento plano, em funcção das velocidades medias locaes e chega ás expressões de Navier, que atraz expômos, considerando porém variavel o coefficiente de attrito interior ε.

É das pressões desenvolvidas no interior dos liquidos em movimento que nos occupamos na nossa dissertação, que dividimos em duas partes. Na primeira fazemos o estudo estatico das pressões, vendo como a pressão exercida n'um ponto, atravez d'um elemento plano, varia com a orientação do elemento e expômos algumas propriedades muito interessantes d'estas pressões, descobertas por Kleitz e que elle aproveita para a escolha d'um systema de coordenadas curvilineas que permitte integrar com muita approximação as equações do movimento dos liquidos n'um certo numero de casos. Na segunda parte estudamos as relações entre as pressões e as velocidades, socorrendo-nos dos trabalhos de Boussinesq, que tanto elucidaram o problema do movimento dos liquidos, *cette désespérante énigme contre laquelle des esprits distingués se sont heurtés en vain,* no dizer de Saint-Venant. (*Comptes Rendus,* t. 74, p. 774).

I

1. Consideremos, no interior d'um liquido em movimento, uma porção de fluido limitada por uma superficie. Sobre cada molecula do liquido exercem-se as acções das moleculas, situadas em torno d'ella dentro da esphera de actividade molecular. Chamaremos resultante molecular á resultante d'aquellas acções e, designando por μ a massa da molecula sobre que ella actúa, representaremos por

$$\mu\xi, \quad \mu\eta, \quad \mu\zeta,$$

as suas componentes segundo tres eixos coordenados.

Projectemos as resultantes moleculares, que sollicitam as moleculas contidas no interior da superficie, sobre uma linha fixa, o eixo dos x por exemplo. A somma das projecções terá por expressão

$$\Sigma\mu\xi.$$

Designemos por f_e as acções desenvolvidas entre as moleculas

2

exteriores e as interiores á superficie e por f_i as acções que as moleculas interiores exercem umas sobre as outras. Teremos

$$\Sigma\mu\xi = \Sigma f_i \cos(f_i x) + \Sigma f_e \cos(f_e x),$$

sendo $\cos(f_i x)$ e $\cos(f_e x)$ os cosenos dos angulos formados pelas forças f_i e f_e com o eixo dos x. Ora a somma $\Sigma f_i \cos(f_i x)$ é nulla, porque se compõe de termos $[f_i \cos(f_i x) - f_i \cos(f_i x)]$ que se annullam dois a dois. Temos pois

$$\Sigma\mu\xi = \Sigma f_e \cos(f_e x).$$

Esta equação exprime que a somma das componentes das forças moleculares segundo uma direcção qualquer, para uma porção limitada de liquido, é egual á somma das componentes, segundo a mesma direcção, das acções exercidas sobre ella pelas moleculas exteriores á superficie limite.

Considerando, por exemplo, uma porção de liquido contida n'uma parede solida, vê-se que a somma das componentes, segundo uma dada direcção, das forças, que sollicitam as moleculas liquidas, é egual á somma das componentes das acções exercidas pela parede sobre o liquido.

2. O theorema, que acabamos de demonstrar, é importante, porque tem como resultado considerarem-se as forças moleculares exercendo-se sobre superficies, e referirem-se estas forças á unidade superficial e não á unidade de massa. Consideremos a superficie limite de uma porção de liquido dividida em elementos extremamente pequenos ω, ω', ω'', ..., e chamemos R, R',

R'',.... ás resultantes de todas as acções que se exercem entre as moleculas interiores e as exteriores á superficie, atravez dos elementos ω, ω', ω'',...., e sejam m, m', m'',.... os pontos em que as resultantes R, R', R'',.... encontram a superficie. Chamaremos pressões, referidas á unidade de superficie, nos pontos m, m', m'',...., ás relações

$$\frac{R}{\omega},\quad \frac{R'}{\omega'},\quad \frac{R''}{\omega''},\ldots.$$

Decompondo-as parallelamente aos x, y, z, e designando as componentes por p_x, p_y, p_z, teremos para uma porção de liquido de dimensões finitas:

$$\Sigma\mu\xi = \Sigma\omega p_x,\quad \Sigma\mu\eta = \Sigma\omega p_y,\quad \Sigma\mu\zeta = \Sigma\omega p_z.$$

Os signaes Σ dos primeiros membros extendem-se a todas as moleculas contidas na porção de liquido limitada pela superficie e os dos segundos membros a toda a extensão da superficie.

3. Consideremos agora um elemento de volume sobre cujas faces infinitamente pequenas, que designaremos por ω, ω', ω'',...., se exercem as pressões p, p', p'',...., referidas á unidade de superficie. A pressão p sobre a face ω, ab, (fig. 1) é a resultante de todas as acções que se exercem entre as moleculas do liquido, atravez d'ella. Á esquerda de ab temos a considerar duas especies de moleculas: as que são contidas no polyedro elementar e as que lhe são exteriores, como m'. Consideremos a acção que sobre esta molecula exerce a molecula m, tomada á direita de ω. A direcção mm', além da face ω, atravessará uma outra face ω', *fe*. Na pressão $p\omega$ entra a acção de m sobre m' e na pressão $p'\omega'$ a acção egual e contraria de m' sobre m. Projectando pois todas as pressões sobre o eixo dos x, por exemplo, as acções provenientes das moleculas exteriores sobre outras tambem exteriores annullar-se-hão duas a duas e ficarão apenas as projecções das acções das moleculas exteriores sobre as interiores. Ora a somma d'estas acções é egual á somma das projecções das resultantes moleculares que se exercem no interior do polyedro elementar. Temos pois

$$\Sigma\mu\xi = \Sigma p\omega\cos(p, x)$$

ou

$$\Sigma\mu\xi = \Sigma\omega p_x,$$

relação que já tinhamos demonstrado para o caso d'um volume finito e que, como vemos, subsiste para um volume infinitamente pequeno. N'esta equação devemos notar que a pressão p, applicada ao elemento ω, não comprehende só as acções que as moleculas exteriores ao elemento de volume exercem sobre as moleculas interiores atravez de ω, mas sim todas as acções moleculares que se exercem atravez d'este elemento plano.

4. As pressões que se exercem sobre um elemento plano, no interior d'um liquido em movimento, são em geral obliquas a esse elemento.

Nós decomporemos as pressões segundo duas direcções: parallelamente ao elemento plano, e na direcção da normal ao elemento. Teremos assim duas componentes: a componente normal e a componente tangencial. São estas componentes tangenciaes que constituem o chamado attrito interior ou communicação lateral do movimento nos fluidos.

As pressões variam em intensidade e direcção com a orientação do elemento plano sobre que actuam e a lei d'esta variação deduz-se da consideração do tetraedro de Cauchy.

Tomemos um ponto o (fig. 2) no interior do liquido e consideremos um elemento plano qualquer passando n'este ponto. A orientação do plano é determinada completamente pelos cosenos l, m, n dos angulos que a sua normal, tirada do lado onde se considera actuando a pressão, faz com a parte positiva dos eixos coordenados. É claro que as componentes da pressão p_x, p_y, p_z, mudam apenas de signal, quando os cosenos l, m, n, se tornam em $-l$, $-m$, $-n$, isto é, quando a pressão se exerce no outro lado do plano, visto que a nova pressão resulta de acções elementares eguaes e contrarias ás que constituiam a primeira. Vamos vêr como varia em geral a pressão com a orientação dos planos, isto é, vamos tratar de exprimir p_x, p_y, p_z, em funcção dos cosenos l, m, n.

Imaginemos uma recta, passando pelo ponto o e fazendo, com os eixos, angulos cujos cosenos são l, m, n, e um plano perpendicular a esta recta n'um ponto cuja distancia α a o é muito pequena. Tiremos além d'isso por o tres planos parallelos aos planos coordenados. Teremos assim um tetraedro $oabc$, cuja base abc é parallela ao elemento plano que se considera em o e no qual ha tres arestas oa, ob, oc respectivamente parallelas aos eixos dos x, dos y e dos z. Os comprimentos d'estas arestas são $\frac{\alpha}{l}$, $\frac{\alpha}{m}$, $\frac{\alpha}{n}$ e as areas das faces obc, oac, oab são eguaes a ωl, ωm, ωn, por serem estas faces as projecções, sobre os tres planos coordenados, da face abc, cuja area designamos por ω.

A pressão exercida sobre a face *abc* differe, n'um momento dado, muito pouco da pressão sobre o elemento plano parallelo que consideramos no ponto o e estas duas pressões tendem a ser eguaes quando diminuem as dimensões do tetraedro. As componentes, segundo os eixos, da acção exercida sobre o tetraedro atravez da face ω differem pois infinitamente pouco de ωp_x, ωp_y, ωp_z.

Chamemos: X_1, Y_1, Z_1, ás componentes da pressão, referida á unidade de superficie, que se exerce no lado interior da face *obc*, isto é, aos valores particulares de p_x, p_y, p_z, para um elemento plano, cuja normal tem a direcção dos x positivos; X_2, Y_2, Z_2, ás componentes da pressão exercida interiormente sobre a face *oac*, isto é, aos valores de p_x, p_y p_z, para $l = o$, $m = 1$, $n = o$; e X_3, Y_3, Z_3 ás componentes analogas da pressão sobre a face *oab*, normal aos z.

As componentes das pressões, exercidas exteriormente sobre o tetraedro, são pois:

$$-X_1 l\omega, \quad -Y_1 l\omega, \quad -Z_1 l\omega, \quad \text{sobre a face } obc$$

$$-X_2 m\omega, \quad -Y_2 m\omega, \quad -Z_2 m\omega, \quad \text{sobre } oac$$

$$-X_3 n\omega, \quad -Y_3 n\omega, \quad -Z_3 n\omega, \quad \text{sobre } oab$$

$$\omega p_x, \quad \omega p_y, \quad \omega p_z, \quad \text{sobre } abc.$$

Estas pressões têm por pontos de applicação os centros de gravidade das faces respectivas, pois que as acções que se exercem na extensão d'uma face differem infinitamente pouco umas das outras e podem considerar-se sensivelmente parallelas. Tiremos pelo centro de gravidade g da face abc tres eixos gx_1, gy_1, gz_1, parallelos aos eixos dos x, dos y e dos z, e no mesmo sentido.

Attendendo a que os centros de gravidade g', g'', g''' das faces obc, oac, oab são as projecções sobre ellas do centro de gravidade da face abc, teremos para coordenadas dos centros de gravidade das quatro faces em relação aos eixos dos x_1, y_1, z_1: $-\frac{1}{3}\frac{\alpha}{l}, 0, 0$ para o centro de gravidade g' da face obc;

$0, -\frac{1}{3}\frac{\alpha}{m}, 0$ para o centro de gravidade da face oac;

$0, 0, -\frac{1}{3}\frac{\alpha}{n}$ para a face oab; $0, 0, 0$ para a face abc.

O tetraedro deve estar em equilibrio sob a acção das pressões que se exercem sobre as suas faces, das forças exteriores que sollicitam a sua massa e das forças de inercia; são pois nullas as sommas das componentes e as dos momentos d'estas forças em relação aos tres eixos gx_1, gy_1, gz_1. As forças exteriores e as forças de inercia são da ordem das massas e são portanto infinitamente pequenos de terceira ordem; as pressões, proporcionaes ás areas das faces, são de segunda ordem. Introduzindo pois todas estas forças nas equações de equilibrio, as forças exteriores e as forças de inercia desapparecem comparativamente ás pressões. Teremos portanto de considerar apenas estas ultimas forças que, como vemos, devem ter entre si as mesmas relações de grandeza e direcção que teriam se, ellas só, tivessem em equilibrio o tetraedro.

As projecções das pressões sobre o eixo gx_1, por exemplo, são, como já vimos:

$$-X_1 l\omega, \quad -X_2 m\omega, \quad -X_3 n\omega, \quad \omega p_x$$

e os momentos em relação ao mesmo eixo são:

$$0, -Z_2 m\omega \times \frac{1}{3}\frac{\alpha}{m}, \quad Y_3 n\omega \times \frac{1}{3}\frac{\alpha}{n}, 0.$$

Temos pois relativamente ao eixo gx_1:

$$-X_1 l\omega - X_2 m\omega - X_3 n\omega + \omega p_x = 0$$

$$-Z_2\omega\alpha + Y_3\omega\alpha = 0$$

ou

$$p_x = lX_1 + mX_2 + nX_3, \quad Z_2 = Y_3,$$

e do mesmo modo se acha para os outros dois eixos gy_1, gz_1

$$p_y = lY_1 + mY_2 + nY_3, \quad X_3 = Z_1,$$

$$p_z = lZ_1 + mZ_2 + nZ_3, \quad Y_1 = X_2.$$

Z_2 é (fig. 3) a componente parallela ao eixo dos z da pressão que se exerce sobre a face perpendicular ao eixo dos y, e Y_3 a componente parallela aos y da pressão sobre a face perpendicular ao eixo dos z. A relação $Z_2 = Y_3$, bem como as egualdades $X_3 = Z_1$, $Y_1 = X_2$ mostram que as componentes tangenciaes das pressões sobre dois elementos planos, perpendiculares entre si, têm projecções eguaes no sentido perpendicular á sua intersecção commum.

As forças tangenciaes reduzem-se pois a tres, que designaremos por T_1, T_2, T_3, reservando o indice 1 para as forças perpendiculares ao eixo dos x, o indice 2 para as forças perpendiculares ao eixo dos y e o indice 3 para as que são perpendiculares aos z. As componentes X_1, Y_2, Z_3, são normaes ás faces que sollicitam. Designaremos por N_1, N_2, N_3, estas tres forças respectivamente parallelas aos eixos dos x, dos y e dos z. Teremos assim

$$(1)\left\{\begin{aligned} p_x &= lN_1 + mT_3 + nT_2 \\ p_y &= lT_3 + mN_2 + nT_1 \\ p_z &= lT_2 + mT_1 + nN_3 \end{aligned}\right.$$

Estas relações exprimem a chamada lei da *reciprocidade* que consiste em que, se considerarmos dois elementos planos passando n'um mesmo ponto e projectarmos a pressão, referida á unidade de superficie, exercida em cada um d'elles, sobre a normal ao outro, as duas projecções são eguaes. Assim a primeira equação mostra que a projecção p_x, sobre os x positivos, da pressão exercida sobre o elemento plano normal á direcção (l, m, n) é egual á projecção $lN_1 + mT_3 + nT_2$, ou $lX_1 + mY_1 + nZ_1$, sobre esta direcção (l, m, n) da pressão (X_1, Y_1, Z_1) exercida sobre o elemento plano normal aos x positivos. As tres relações $Z_2 = Y_3$, $X_3 = Z_1$, $Y_1 = X_2$, são casos particulares d'esta lei.

As expressões (1) dão as pressões exercidas sobre todos os elementos planos que passam n'um ponto, em funcção das componentes, em numero de seis distinctas, das que se exercem sobre os tres elementos planos perpendiculares aos eixos coordenados.

5. O theorema da reciprocidade é o mesmo que se demonstra para os solidos na theoria da elasticidade d'estes corpos e, do mesmo modo que ahi se faz, deduz-se d'elle o theorema do ellipsoide das pressões, em virtude do qual, as pressões exercidas em volta d'um ponto podem ser representadas pelos semidiametros d'um ellipsoide, o *ellipsoide das pressões*, e a orientação dos elementos planos correspondentes é dada pelos planos tangentes a outro ellipsoide, o *ellipsoide director*, nos pontos em que elle é encontrado por aquelles semi-diametros.

A equação do ellipsoide das pressões é

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1$$

e a do ellipsoide director é

$$\frac{x'^2}{A}+\frac{y'^2}{B}+\frac{z'^2}{C}=\pm K$$

sendo K um numero arbitrario.

N'um ponto qualquer do liquido ha portanto tres planos orthogonaes, aos quaes as pressões são normaes. Estas pressões, que correspondem aos tres eixos principaes do ellipsoide, são as *pressões principaes*. Os semi-eixos A, B, C do primeiro ellipsoide representam estas pressões. Nós supporemos $A > B > C$.

As pressões sobre um elemento qualquer podem exprimir-se em funcção das pressões principaes. Supponhamos que as tres arestas orthogonaes do tetraedro, que atraz consideramos, são dirigidas segundo os eixos do ellipsoide das pressões. Teremos então $N_1 = A$, $N_2 = B$, $N_3 = C$, $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ e as expressões (1) darão:

$$p_x = lA, \quad p_y = mB, \quad p_z = nC.$$

A pressão, que se exerce sobre o elemento plano, tem pois o valor que dá a expressão

$$P^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = l^2A^2 + m^2B^2 + n^2C^2.$$

Obtem-se a componente normal d'esta pressão projectando as forças p_x, p_y, p_z, sobre a normal (l, m, n). Esta componente, que designaremos por N, é pois egual a

$$N = l^2A + m^2B + n^2C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

A componente tangencial, que designaremos por T, é dada por

$$T^2 = P^2 - N^2 = l^2A^2 + m^2B^2 + n^2C^2 -$$

$$-(l^2A + m^2B + n^2C)^2.$$

Desenvolvendo e attendendo á relação $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, vem

$$T^2 = l^2m^2(A-B)^2 + l^2n^2(A-C)^2 + m^2n^2(B-C)^2 \ldots (3)$$

Esta expressão é notavel, porque mostra, visto serem nos liquidos A, B e C do mesmo signal, que a componente tangencial da pressão sobre um plano qualquer depende, não dos valores totaes das pressões principaes, mas sim das suas differenças, não variando portanto quando estas pressões augmentam ou diminuem da mesma quantidade.

6. Obtida a expressão (3) da componente tangencial da pressão, procuremos a orientação do elemento plano a que corresponde o valor maximo d'aquella componente.

Temos para isso de differenciar e egualar a zero a expressão (3), o que dá:

$$[m^2(A-B)^2+n^2(A-C)^2]\,ldl+[l^2(A-B)^2+n^2(B-C)^2]\,mdm+$$

$$+[l^2(A-C)^2+m^2(B-C)^2]\,ndn=0\,\ldots\ldots\ldots(4)$$

As variaveis l, m, n não são independentes, porque têm de satisfazer á equação $l^2+m^2+n^2=1$, que dá entre as differenciaes dl, dm, dn a relação

$$ldl+mdm+ndn=0\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Os maximos e minimos de T obtêm-se eliminando uma das variaveis entre estas equações e egualando a zero os coefficientes das differenciaes das outras duas, que se consideram independentes.

Fazendo em (4) $ldl=-(mdm+ndn)$ e $l^2=1-m^2-n^2$, e egualando separadamente a zero os coefficientes de dm e dn, vem, substituindo $(B-C)^2-(A-C)^2-(A-B)^2$ por $-2\times$ $\times(A-C)(A-B)$:

$$\left.\begin{aligned}\left[(1-2m^2)(A-B)-2n^2(A-C)\right]m=0\\ \left[(1-2n^2)(A-C)-2m^2(A-B)\right]n=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots.(6)$$

Se, em vez de l, eliminarmos m, vem

$$\left.\begin{aligned}\left[(1-2l^2)(A-B)+2n^2(B-C)\right]l=0\\ \left[(1-2n^2)(B-C)+2l^2(A-B)\right]n=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots..(7)$$

e a eliminação de n dá

$$\left.\begin{aligned}\left[(1-2l^2)(A-C)-2m^2(B-C)\right]l=0\\ \left[(1-2m^2)(B-C)-2l^2(A-C)\right]m=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots.(8)$$

O systema (7) deduz-se de (6), mudando m, A e B em l, B e A, e as equações (8) obtêm-se de (7) mudando n, B e C em m, C e B. Assim devia ser, com effeito, como mostra a inspecção das equações (4) e (5).

Os valores de m e n, que resolvem o systema (6), pondo por ora de parte os valores nullos, são os que satisfazem ás equações

$$(1-2m^2)(A-B)-2n^2(A-C)=0$$

$$(1-2n^2)(A-C)-2m^2(A-B)=0.$$

Subtrahindo estas duas expressões uma da outra, vem

$$B = C$$

e portanto

$$1 - 2m^2 - 2n^2 = 0 \quad \text{ou} \quad l^2 = \frac{1}{2}.$$

A substituição d'estes valores em (3) dá $T^2 = \frac{(A-C)^2}{4}$.

A componente tangencial da pressão tem pois o valor maximo para todos os planos, cujas normaes formam em volta do eixo A um cóne com uma abertura de 90°, quando o ellipsoide das pressões é de revolução em volta d'aquelle eixo.

Analogamente as equações (7) dão $A = C$, e como nós suppomos $A > B > C$, o ellipsoide das pressões deve ser uma esphera. N'este caso a componente tangencial da pressão é constantemente nulla.

O systema (8) dá: $A = B$, $1 - 2l^2 - 2m^2 = 0$ ou $n^2 = \frac{1}{2}$, e $T^2 = \left(\frac{A-C}{2}\right)^2$. O ellipsoide das pressões é pois de revolução em volta do eixo C.

Conclue-se do que temos dito, que o maximo de T^2 corresponde a systemas de valores de l, m, n, não sendo nenhum d'elles nullo, unicamente no caso particular de ser de revolução o ellipsoide das pressões. Em geral deve pois ser nullo um d'aquelles valores pelo menos.

Se são nullos dois dos cosenos l, m, n, o terceiro é egual á unidade e o elemento plano seria perpendicular a um dos eixos principaes. A componente tangencial é nulla sobre estes planos e esta hypothese corresponderia portanto a um minimo de T.

Os valores maximos de T correspondem pois a systemas de valores de l, m, n, dos quaes só um é egual a zero.

Supponhamos $l=0$. As expressões (4) e (5) dão:

$$n^2-m^2=0$$

e como temos tambem

$$m^2+n^2=1$$

é

$$m^2=n^2=\frac{1}{2}$$

e

$$T^2=\frac{(B-C)^2}{4}$$

em virtude de (3).

Do mesmo modo, suppondo $m=0$, vem

$$l^2=n^2=\frac{1}{2}, \quad T^2=\frac{(A-C)^2}{4}$$

e suppondo $n=0$

$$l^2=m^2=\frac{1}{2}, \quad T^2=\frac{(A-B)^2}{4}.$$

D'estes tres valores de T^2 o maior é $\frac{(A-C)^2}{4}$, visto ser $A > B > C$.

A componente tangencial tem pois em geral um unico maximo, cujo valor absoluto é $\frac{A-C}{2}$ e que se exerce sobre dois planos cujas normaes são determinadas pelos cosenos

$$m=0, \quad l=n=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Estes dois planos passam pelo eixo B e cortam o plano dos outros dois eixos segundo duas rectas que formam com elles angulos de 45°. A componente normal da pressão sobre estes planos é, em virtude de (2),

$$N=\frac{1}{2}(A+C)$$

e a pressão total tem por valor

$$P=\sqrt{\frac{(A-C)^2}{4}+\frac{(A+C)^2}{4}}=\sqrt{\frac{A^2+C^2}{2}}.$$

7. Vejamos agora quaes as posições que toma em volta de um ponto um elemento plano para que a componente normal da pressão, que se exerce atravez d'elle, conserve um valor constante.

As equações do ellipsoide das pressões e do ellipsoide director são:

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1 \dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{x'^2}{A}+\frac{y'^2}{B}+\frac{z'^2}{C}=\pm K \dots\dots\dots\dots (10)$$

e os cosenos dos angulos que a normal a este ultimo ellipsoide n'um ponto x', y', z' faz com os eixos são:

$$\left.\begin{aligned}
l&=\frac{\frac{x'}{A}}{\sqrt{\frac{x'^2}{A^2}+\frac{y'^2}{B^2}+\frac{z'^2}{C^2}}}\\
m&=\frac{\frac{y'}{B}}{\sqrt{\frac{x'^2}{A^2}+\frac{y'^2}{B^2}+\frac{z'^2}{C^2}}}\\
n&=\frac{\frac{z'}{C}}{\sqrt{\frac{x'^2}{A^2}+\frac{y'^2}{B^2}+\frac{z'^2}{C^2}}}
\end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots (11)$$

A componente normal da pressão sobre um elemento parallelo ao plano tangente ao ellipsoide no ponto x', y', z' é pois, em virtude de (2),

$$N = l^2 A + m^2 B + n^2 C = \frac{\frac{x'^2}{A^2} A + \frac{y'^2}{B^2} B + \frac{z'^2}{C^2} C}{\frac{x'^2}{A^2} + \frac{y'^2}{B^2} + \frac{z'^2}{C^2}}.$$

e esta equação pode escrever-se assim:

$$x'^2 \left(\frac{N-A}{A^2}\right) + y'^2 \left(\frac{N-B}{B^2}\right) + z'^2 \left(\frac{N-C}{C^2}\right) = 0 \ldots . (12)$$

Os valores de x', y', z', que satisfazem a esta equação e a (10), dão a orientação dos elementos planos para os quaes a componente normal da pressão é egual a N.

A equação (12) é a equação d'um cóne, cujo vertice está no centro dos ellipsoides, e o systema das equações (12) e (10) representa a curva de intersecção d'este cóne com o ellipsoide director. Os planos tangentes a este ellipsoide, nos pontos d'esta curva, são parallelos aos elementos planos para os quaes a componente normal tem o valor constante N, e as generatrizes do cóne representam em direcção as pressões totaes. O cóne (12) é pois o logar geometrico das direcções das pressões, cuja componente normal é egual a N.

Se N é egual a A, a equação (12) dá $y' = 0$ e $z' = 0$; se é N egual a C, devem ser $x' = 0$ e $y' = 0$. Effectivamente a componente normal só pode ter estes valores para planos perpendiculares aos eixos A e C. Ha porem uma infinidade de pontos para os quaes é $N = B$. A equação (12) dá n'este caso:

$$-x'^2 \frac{A-B}{A^2} + z'^2 \frac{B-C}{C^2} = 0$$

ou

$$z' = \pm\left(\frac{C}{A}\sqrt{\frac{A-B}{B-C}}\right)x' \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Esta equação representa dois planos que se córtam no eixo B, interceptando o plano principal AC segundo duas rectas symetricamente inclinadas relativamente aos eixos. Cada um d'estes planos córta o ellipsoide director segundo uma ellipse, cujo centro é o centro do ellipsoide. Os planos tangentes ao longo de cada uma d'estas intersecções têm por envolvente um cylindro e os elementos planos para os quaes a componente normal é egual a B são todos os que passam por qualquer dos eixos dos cylindros.

Sejam (fig. 4) DD' e $D_1 D'_1$ as intersecções dos planos (13) com o plano principal AC. Os diametros DD' e $D_1 D'_1$ representam as projecções, sobre este plano, das ellipses de contacto dos cylindros tangentes ao ellipsoide director. As generatrizes d'estes cylindros são parallelas ás tangentes DT e $D_1 T_1$ e os seus eixos são as rectas GG' e $G_1 G'_1$, parallelas tambem a DT e $D_1 T_1$.

Vamos determinar os angulos que os eixos dos cylindros formam com as direcções das pressões principaes A e C.

A recta ON, tirada por O perpendicularmente a DT, é normal ao plano tangente em D. l é o coseno do angulo que ON faz com o eixo OA ou o seno do angulo da tangente DT com o mesmo eixo; n é o coseno correspondente; o coseno m é egual a zero. A tangente do angulo DTA é pois, em virtude de (11),

$$\frac{l}{n}=\frac{\frac{x'}{A}}{\frac{z'}{C}}$$

ou, em virtude de (13),

$$\frac{l^2}{n^2}=\frac{B-C}{A-B}.$$

Designando por l_1 e n_1 os cosenos dos angulos que a tangente DT faz com os eixos A e C, teremos

$$\frac{l_1^2}{n_1^2}=\frac{n^2}{l^2}=\frac{A-B}{B-C} \quad \text{e} \quad l_1^2=\frac{A-B}{A-C}, \; n_1^2=\frac{B-C}{A-C}.$$

Estes valores de l_1^2 e n_1^2 determinam a posição dos eixos dos cylindros. Designaremos estes eixos pelo nome de *eixos de egual pressão normal.*

Os cylindros de egual pressão normal são de secção recta circular. Consideremos com effeito o cylindro tangente ao ellipsoide director, ao longo da ellipse que se projecta no plano principal AC segundo a recta DD′.

A secção recta d'este cylindro é determinada pelo plano que passa por ON e é perpendicular ao plano da figura. Procuremos o valor da projecção ON do diametro OD sobre este plano. As coordenadas x' e z' do ponto de contacto D satisfazem, em virtude da equação do ellipsoide director, á equação

$$\frac{x'^2}{A}+\frac{z'^2}{C}=K.$$

Esta é a equação d'uma ellipse e como A e C tem o mesmo signal, K deve ter tambem o signal de A e C.

Em virtude da equação (13) do diametro OD, temos tambem

$$\frac{z'^2}{C^2}=\frac{x'^2}{A^2}\left(\frac{A-B}{B-C}\right).$$

Estas duas equações dão:

$$x'^2=K\frac{A^2(B-C)}{B(A-C)},\quad z'^2=K\frac{C^2(A-B)}{B(A-C)}\ldots\ldots(14)$$

Temos portanto

$$OT=OE+ET=x'+z'\,\mathrm{cotang}\,DTE=x'+z'\frac{l_1}{n_1}=$$

$$=\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{B}}\left[\frac{A\sqrt{B-C}}{\sqrt{A-C}}+\frac{C\sqrt{A-B}}{\sqrt{(A-C)(B-C)}}\right]=\sqrt{KB}\sqrt{\frac{A-C}{B-C}}$$

e

$$ON=OT\,\mathrm{sen}\,OTN=OT\times n_1=\sqrt{KB}.$$

A projecção ON do diametro OD sobre a secção recta do cylindro é pois egual ao semi-eixo $\sqrt{KB}$ do ellipsoide director, segundo o qual se interceptam as duas secções ON e OD do cylindro. O cylindro de egual pressão normal é portanto de secção recta circular.

8. Consideremos agora o ellipsoide das pressões e designemos por x'' e z'' as coordenadas do ponto D$''$ onde o plano OD encontra a ellipse principal AC d'este segundo ellipsoide (fig. 5). É n'este plano que são dirigidas as pressões, cujas componentes normaes são eguaes a B. Em virtude da equação d'este ellipsoide, teremos

$$\frac{x''^2}{A^2}+\frac{z''^2}{C^2}=1\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

Designando por D$'$ e D$''$ os semi-diametros cujas extremidades tem as coordenadas (x', z') e (x'', z''), e por N$'$ e N$''$ as suas projecções sobre o plano ON, teremos, pela simples consideração de triangulos semelhantes,

$$\frac{x'}{x''}=\frac{z'}{z''}=\frac{D'}{D''}=\frac{N'}{N''}$$

ou

$$x''=\frac{N''}{N'}x' \quad \text{e} \quad z''=\frac{N''}{N'}z'.$$

Substituindo estes valores na expressão (15) e attendendo a que, em virtude dos valores (14) de x' e z', é

$$\frac{x'^2}{A^2}+\frac{z'^2}{C^2}=\frac{K}{B}$$

e á relação $N'=\sqrt{KB}$, temos

$$N''^2=B^2 \text{ ou } N''=B.$$

É pois um circulo a projecção, sobre um plano perpendicular ao eixo de egual pressão normal, da ellipse cujos semi-diametros representam as pressões de componente normal egual a B.

Construindo pois dois cylindros de arestas parallelas a um ou a outro dos eixos de egual pressão normal, dos quaes um é tangente ao ellipsoide director, passando o outro pelos pontos do ellipsoide das pressões, determinados pelos diametros que representam as pressões de componente normal egual a B, estes dois cylindros são de secção recta circular. O segundo não é em geral tangente ao ellipsoide das pressões.

9. Da proposição que acabamos de demonstrar deduz-se uma propriedade notavel dos eixos de egual pressão normal, relativamente ás componentes tangenciaes das pressões, que se exercem sobre os elementos que passam por estes eixos.

Tomemos para plano da figura o plano que se projecta em ON na fig. 4, isto é, o plano das secções rectas dos dois cylindros que atraz definimos. Estes cylindros projectam-se então segundo duas circumferencias (fig. 6). Consideremos um elemento qualquer OM passando pelo eixo de egual pressão normal.

A direcção da pressão, que actúa atravéz d'este plano, encontra o ellipsoide director n'um ponto onde o seu plano tangente é parallelo ao elemento OM, e esse plano é tambem tangente ao cylindro de egual pressão normal.

A direcção da pressão projecta-se pois sobre a secção normal segundo a perpendicular OL' ao elemento OM, e a sua projecção sobre o proprio elemento OM tem portanto a direcção do eixo O.

Por conseguinte, sobre todos os planos que passam pelos eixos de egual pressão normal, as componentes tangenciaes da pressão têm a direcção d'estes eixos.

10. A maior das componentes tangenciaes, que se exercem segundo um eixo de egual pressão normal, differe, em geral, da componente tangencial maxima para todas as orientações possiveis de um elemento plano passando n'um mesmo ponto d'um liquido. Podem porém coincidir estas duas forças em casos especiaes. Vejamos em que circumstancias isso tem logar.

O maximo valor da componente tangencial é, como vimos no n.° 6, $T=\frac{1}{2}(A-C)$ e esta força actúa sobre um plano passando pelo eixo B e inclinado de 45° em relação aos eixos A e C. Para que ella tenha a direcção do eixo de egual pressão normal devem ser

$$l_1=\sqrt{\frac{A-B}{A-C}}=\sqrt{\frac{1}{2}},\quad n_1=\sqrt{\frac{B-C}{A-C}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

o que dá

$$B=\frac{A+C}{2}.$$

Vê-se pois que quando a pressão principal B é a semi-somma das outras duas, os eixos de egual pressão normal fazem um angulo de 45° com os eixos A e C e a maxima componente tangencial exerce-se sobre dois planos passando por estes eixos perpendicularmente ao plano principal AC.

11. Resumindo o que temos dito nos numeros anteriores, vemos: que póde dar-se do quadrado da componente tangencial sobre um plano qualquer uma expressão em que não entram senão as tres differenças duas a duas das pressões principaes; que o plano, sobre o qual a componente tangencial é maxima, é bissector do angulo dos planos em que se exercem a maior A e a menor C das pressões principaes A, B, C e que esta componente tem por valor a sua semi-differença $\frac{A-C}{2}$; que ha duas rectas no plano principal AC, a que chamamos *eixos de egual pressão normal*, taes que, para todos os planos que passam por qualquer d'ellas, as componentes normaes são todas eguaes entre si e á pressão principal intermedia B, e as componentes tangenciaes são dirigidas no sentido do eixo, segundo o qual se cortam aquelles planos; que os eixos d'egual pressão normal formam, com as direcções A e C, angulos cujos cosenos são a raiz quadrada das relações $\frac{A-B}{A-C}$ e $\frac{B-C}{A-C}$; e finalmente para que a maxima componente tangencial se exerça segundo um d'aquelles eixos é preciso que B seja a semi-somma de A e C.

Estas propriedades das pressões, que representam as acções mutuas desenvolvidas entre as moleculas d'um liquido em movimento e que são baseadas sobre as condições necessarias do equilibrio d'um tetraedro extremamente pequeno, contendo um grande numero de moleculas, suppõem sómente que as moleculas exercem as suas acções mutuas em toda a extensão da massa liquida, isto é, que não ha solução de continuidade. Ellas têm logar não só nos liquidos em movimento, mas, em geral, n'um meio que se deforma quer seja um fluido, quer um solido elastico.

Expostas estas noções estaticas sobre as pressões, vamos agora tratar de as exprimir em funcção das velocidades relativas das moleculas liquidas.

II

12. Tomemos no interior do liquido um ponto fixo de coordenadas x, y, z, em relação a tres eixos coordenados, e projectemos sobre uma recta fixa as velocidades que adquirem as moleculas que passam successivamente n'este ponto. Se tomarmos a media d'estas projecções, durante um espaço de tempo sufficientemente curto τ, esta media é uma funcção continua das coordenadas do ponto. Representando por u, v, w, os valores medios das tres componentes, segundo os eixos coordenados, das velocidades no ponto x, y, z, chamaremos *velocidade media local* á resultante de u, v, w. Esta velocidade é independente do tempo no caso do movimento chamado *permanente*.

A velocidade media local, assim definida, é independente da escolha dos eixos coordenados. Consideremos, com effeito, um systema de eixos e tomemos uma recta fixa, que seja a direcção da velocidade media local no intervallo de tempo τ. A projecção sobre esta recta da velocidade effectiva, n'um momento dado, é egual á somma das projecções sobre a mesma recta das componentes d'esta velocidade segundo os x, y, z, e é portanto uma funcção linear d'estas componentes. Podem pois substituir-se n'aquella egualdade as tres componentes pelos seus valores medios u, v, w, e tambem a componente segundo a recta fixa pela sua media, que é a projecção sobre a sua propria direcção da velocidade media local. Considerando a mesma direcção fixa e um novo systema de eixos coordenados, e operando da mesma fórma, a media das projecções sobre aquella recta terá o mesmo valor e representará tambem a velocidade media local.

13. As superficies segundo as quaes se operam, n'um momento dado, as rupturas no seio dos liquidos, isto é, em que ha variações bruscas de velocidade, são talvez em numero muito grande, mas em todo o caso finito. Póde pois considerar-se continuo o movimento nas proximidades d'um ponto fixo, a não ser em momentos infinitamente curtos e d'uma duração total desprezivel em relação ao resto do tempo. Exceptuando estes momentos e chamando u_1, v_1, w_1, ás componentes da velocidade real no ponto x, y, z, e na epocha t, teremos a fórmula da conservação dos volumes

$$\frac{du_1}{dx}+\frac{dv_1}{dy}+\frac{dw_1}{dz}=0$$

que se estabelece na hydrodynamica na hypothese da incompressibilidade, hypothese que póde admittir-se sem erro sensivel, attento o pequeno coefficiente de compressibilidade dos liquidos.

Multiplicando aquella equação por $\frac{dt}{\tau}$ e integrando-a entre os limites t e $t+\tau$, exceptuando os intervallos infinitamente curtos, em que ha discontinuidade, vem

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} u_1 dt\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} v_1 dt\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} w_1 dt\right)=0$$

ou

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

visto que as quantidades entre parenthesis são as componentes da velocidade media local, no calculo da qual se póde desprezar um numero finito de instantes infinitamente curtos.

A fórmula (1) mostra que, se concebermos um fluido ficticio cujas velocidades reaes são, em cada ponto e em cada instante, as velocidades medias do liquido real, este fluido ficticio será incompressivel.

14. Mais adiante temos de considerar as seis expressões

$$\frac{du}{dx},\ \frac{dv}{dy},\ \frac{dw}{dz},\ \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\ \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz},\ \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx} \ldots\ldots (2)$$

Abstrahindo dos instantes em que ha discontinuidade no ponto x, y, z, as tres primeiras expressões representam a relação media para dt das dilatações que experimentam, no tempo dt, tres linhas materiaes infinitamente pequenas, tiradas na epocha t, a partir d'aquelle ponto parallelamente aos x, aos y e aos z; as tres ultimas representam do mesmo modo as relações medias para dt das variações que soffrem, durante o mesmo tempo, os cosenos dos angulos que aquellas tres linhas formam duas a duas. É o que vamos ver.

Não attendendo aos momentos infinitamente curtos, de que fallamos, as componentes, segundo os eixos, da velocidade real nos pontos $(x + dx, y, z)$, $(x, y + dy, z)$, $(x, y, z + dz)$ são respectivamente:

$$u_1 + \frac{du_1}{dx} dx, \quad v_1 + \frac{dv_1}{dx} dx, \quad w_1 + \frac{dw_1}{dx} dx,$$

$$u_1 + \frac{du_1}{dy} dy, \quad v_1 + \frac{dv_1}{dy} dy, \quad w_1 + \frac{dw_1}{dy} dy,$$

$$u_1 + \frac{du_1}{dz} dz, \quad v_1 + \frac{dv_1}{dz} dz, \quad w_1 + \frac{dw_1}{dz} dz$$

As segundas extremidades das pequenas linhas dx, dy, dz, affastam-se pois, durante o tempo dt, da sua primeira extremidade, situada primitivamente em (x, y, z), com velocidades cujas componentes segundo os eixos são:

$$\frac{du_1}{dx} dx, \quad \frac{dv_1}{dx} dx, \quad \frac{dw_1}{dx} dx,$$

$$\frac{du_1}{dy} dy, \quad \frac{dv_1}{dy} dy, \quad \frac{dw_1}{dy} dy,$$

$$\frac{du_1}{dz} dz, \quad \frac{dv_1}{dz} dz, \quad \frac{dw_1}{dz} dz,$$

e as projecções d'estas linhas sobre os eixos são, no fim do tempo dt, respectivamente eguaes a

$$\left(1+\frac{du_1}{dx}dt\right)dx,\quad \frac{dv_1}{dx}dt\,dx,\quad \frac{dw_1}{dx}dt\,dx,$$

$$\frac{du_1}{dy}dt\,dy,\quad \left(1+\frac{dv_1}{dy}dt\right)dy,\quad \frac{dw_1}{dy}dt\,dy,$$

$$\frac{du_1}{dz}dt\,dz,\quad \frac{dv_1}{dz}dt\,dz,\quad \left(1+\frac{dw_1}{dz}dt\right)dz.$$

Fazendo a somma dos quadrados d'estas quantidades tres a tres e extrahindo a raiz quadrada, acha-se que os comprimentos das tres pequenas linhas se tornaram, salvo infinitamente pequenos da ordem de dt^2, em

$$\left(1+\frac{du_1}{dx}dt\right)dx,\quad \left(1+\frac{dv_1}{dy}dt\right)dy,\quad \left(1+\frac{dw_1}{dz}dt\right)dz$$

e os cosenos dos angulos que ellas formam com os eixos, têm por valores

$$1,\quad \frac{dv_1}{dx}dt,\quad \frac{dw_1}{dx}dt,$$

$$\frac{du_1}{dy}dt,\quad 1,\quad \frac{dw_1}{dy}dt,$$

$$\frac{du_1}{dz}dt,\quad \frac{dv_1}{dz}dt,\quad 1.$$

Os cosenos dos angulos, que ellas formam entre si, são portanto

$$\left(\frac{dv_1}{dz}+\frac{dw_1}{dy}\right)dt,\quad \left(\frac{dw_1}{dx}+\frac{du_1}{dz}\right)dt,\quad \left(\frac{du_1}{dy}+\frac{dv_1}{dx}\right)dt,$$

e as variações experimentadas pela unidade de comprimento das tres linhas dx, dy, dz são:

$$\frac{du_1}{dx}dt,\quad \frac{dv_1}{dy}dt,\quad \frac{dw_1}{dz}dt.$$

As relações d'estas seis quantidades para dt têm por expressões

$$\frac{du_1}{dx},\ \frac{dv_1}{dy},\ \frac{dw_1}{dz},\ \frac{dv_1}{dz}+\frac{dw_1}{dy},\ \frac{dw_1}{dx}+\frac{du_1}{dz},\ \frac{du_1}{dy}+\frac{dv_1}{dx}.$$

Para obter os seus valores medios basta substituir n'estas expressões u_1, v_1, w_1 por u, v, w, pois que é este o resultado a que se chega, multiplicando-as por $\frac{dt}{\tau}$ e integrando entre os limites t e $t+\tau$, com excepção dos instantes em que ha discontinuidade no ponto x, y, z.

15. Vamos ainda deduzir as fórmulas de transformação, de que havemos de precisar, para passar do systema de coordenadas rectangulares x, y, z para um novo systema x', y', z', que se obtem fazendo girar o primeiro d'um angulo infinitamente pequeno θ em volta dos z. Os cosenos dos angulos que os novos eixos fazem com os primitivos são, desprezando os termos da ordem de θ^2: $1, \theta, 0$, para o eixo dos x'; $-\theta, 1, 0$, para o dos y'; $0, 0, 1$, para o dos z'.

As fórmulas geraes da transformação de coordenadas dão portanto:

$$\left.\begin{array}{lll} x'=x+\theta y, & y'=y-\theta x, & z'=z, \\ x=x'-\theta y', & y=y'+\theta x', & z=z', \\ u=u'-\theta v', & v=v'+\theta u', & w=w', \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots(3)$$

sendo u', v', w', as componentes da velocidade segundo os novos eixos.

A primeira linha de (3) permitte exprimir em x, y, z, uma funcção qualquer de x', y', z', e as derivadas d'esta funcção em ordem a x, y, z, serão dadas pelas fórmulas symbolicas.

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx'}-\theta\frac{d}{dy'},\quad \frac{d}{dy}=\frac{d}{dy'}+\theta\frac{d}{dx'},\quad \frac{d}{dz}=\frac{d}{dz'}\ldots\ldots(4)$$

Vejamos tambem como se exprimem as seis componentes $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_3$, $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$, $\mathcal{T}_3$, das pressões exercidas sobre os elementos planos perpendiculares aos novos eixos x', y', z' em funcção das componentes N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, relativas aos eixos primitivos. As fórmulas (1) do n.º 4 dão para componentes da pressão sobre a face perpendicular aos x', fazendo n'ellas $l=1$, $m=\theta$, $n=0$

$$p_x=N_1+\theta T_3,\quad p_y=T_3+\theta N_2,\quad p_z=T_2+\theta T_1,$$

Fazendo a somma das projecções d'estas componentes sobre o eixo dos x', isto é, multiplicando-as respectivamente por 1, θ, 0 e sommando, vem

$$\mathcal{N}_1 = N_1 + 2\theta T_3$$

desprezando o termo da ordem de θ^2.

Operando da mesma fórma em relação ao eixo dos y', isto é, multiplicando-as respectivamente por $-\theta$, 1, 0 e sommando, vem

$$\mathcal{T}_3 = T_3 - \theta (N_1 - N_2)$$

e projectando-as sobre o eixo dos z', isto é, multiplicando-as por 0, 0, 1, vem

$$\mathcal{T}_2 = T_2 + \theta T_1.$$

Operando analogamente em relação ás componentes das pressões sobre as faces perpendiculares aos y' e aos z', para as quaes l, m, n são eguaes a $-\theta$, 1, 0 e 0, 0, 1, obtem-se afinal as expressões:

$$\left.\begin{array}{lll} \mathcal{N}_1 = N_1 + 2\theta T_3, & \mathcal{N}_2 = N_2 - 2\theta T_3, & \mathcal{N}_3 = N_3, \\ \mathcal{T}_1 = T_1 - \theta T_2, & \mathcal{T}_2 = T_2 + \theta T_1, & \mathcal{T}_3 = T_3 - \theta (N_1 - N_2) \end{array}\right\} \ldots (5)$$

16. A fim de distinguir as velocidades effectivas das velocidades medias locaes designamos as componentes das primeiras por u_1, v_1, w_1 e as das segundas por u, v, w. Analogamente designaremos por N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 as componentes das pressões, exercidas na epocha t e no ponto x, y, z atravez dos tres elementos planos perpendiculares aos eixos e por N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 os valores medios d'estas componentes no intervallo de tempo muito pequeno τ. Estas medias são funcções continuas de x, y, z, t. Em virtude das fórmulas (1) do n.° 4, teremos

$$p'_x = lN'_1 + mT'_3 + nT'_2$$

$$p'_y = lT'_3 + mN'_2 + nT'_1$$

$$p'_z = lT'_2 + mT'_1 + nN'_3$$

sendo p'_x, p'_y, p'_z as componentes da pressão, na epocha t, sobre o elemento normal á recta de inclinação l, m, n.

Estas fórmulas são lineares em relação aos N', T' e a p'_x, p'_y, p'_z. Podem pois substituir-se estas quantidades pelas suas medias N, T, p_x, p_y, p_z, o que dá

$$p_x = lN_1 + mT_3 + nT_2,$$

$$p_y = lT_3 + mN_2 + nT_1,$$

$$p_z = lT_2 + mT_1 + nN_3.$$

17. Os liquidos são corpos faceis de deformar e o seu movimento não é mais que uma serie ininterrompida de deformações, uma passagem rapida por uma serie de estados moleculares distinctos em cada um dos quaes o liquido podia ficar em equilibrio, mas que o movimento destroe successivamente á medida que elles se formam, para os substituir por outros. A resistencia que o liquido oppõe a estas deformações deve depender portanto do numero de estados moleculares distinctos pelos quaes elle passa na unidade de tempo. As forças N′, T′ devem pois ser uma funcção das velocidades relativas de que se acham animadas, na epocha t, as moleculas visinhas do ponto que se considera. Os seus valores medios N, T devem porém depender das deformações medias operadas em volta do ponto (x, y, z) e portanto das seis quantidades (2) que caracterisam aquellas deformações. É o que vamos vêr.

Consideremos dois pontos fixos de coordenadas $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, e $x + \delta' x$, $y + \delta' y$, $z + \delta' z$, muito proximos do ponto x, y, z, e sejam: $u_1 + \delta u_1$, $v_1 + \delta v_1$, $w_1 + \delta w_1$, as tres componentes da velocidade effectiva da molecula que passa no primeiro ponto, na epocha t; $u_1 + \delta' u_1$, $v_1 + \delta' v_1$, $w + \delta' w_1$, as componentes da velocidade da molecula que passa no segundo ponto; e finalmente representemos por $u + \delta u$, $v + \delta v$, $w + \delta w$, e $u + \delta' u$, $v + \delta' v$, $w + \delta' w$, os valores medios d'estas componentes. A velocidade com a qual a segunda d'estas moleculas se affasta da primeira tem por componentes segundo os eixos:

$$\delta' u_1 - \delta u_1, \quad \delta' v_1 - \delta v_1, \quad \delta' w_1 - \delta w_1;$$

e, pondo

$$\delta' x - \delta x = r \cos \alpha, \quad \delta' y - \delta y = r \cos \beta, \quad \delta' z - \delta z = r \cos \gamma,$$

em que r é a distancia actual das duas moleculas, aquella velocidade relativa terá por valor

$$(\delta' u_1 - \delta u_1)\cos\alpha + (\delta' v_1 - \delta v_1)\cos\beta + (\delta' w_1 - \delta w_1)\cos\gamma \,..(6)$$

O seu valor medio obtem-se substituindo n'esta expressão $\delta' u_1 - \delta u_1$, $\delta' v_1 - \delta v_1$, $\delta' w_1 - \delta w_1$, por $\delta' u - \delta u$, $\delta' v - \delta v$, $\delta' w - \delta w$. Ora os valores de δu, δv, δw, $\delta' u$, $\delta' v$, $\delta' w$ são, visto serem u, v, w funcções continuas das coordenadas:

$$\delta u = \frac{du}{dx}\delta x + \frac{du}{dy}\delta y + \frac{du}{dz}\delta z,$$

$$\delta v = \frac{dv}{dx}\delta x + \frac{dv}{dy}\delta y + \frac{dv}{dz}\delta z,$$

$$\delta w = \frac{dw}{dx}\delta x + \frac{dw}{dy}\delta y + \frac{dw}{dz}\delta z,$$

$$\delta' u = \frac{du}{dx}\delta' x + \frac{du}{dy}\delta' y + \frac{du}{dz}\delta' z,$$

$$\delta' v = \frac{dv}{dx}\delta' x + \frac{dv}{dy}\delta' y + \frac{dv}{dz}\delta' z,$$

$$\delta' w = \frac{dw}{dx}\delta' x + \frac{dw}{dy}\delta' y + \frac{dw}{dz}\delta' z.$$

Temos pois, em virtude dos valores de $\delta' x - \delta x$, $\delta' y - \delta y$,

$\delta' z - \delta z$,

$$\delta' u - \delta u = r\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right)$$

$$\delta' v - \delta v = r\left(\frac{dv}{dx}\cos\alpha + \frac{dv}{dy}\cos\beta + \frac{dv}{dz}\cos\gamma\right)$$

$$\delta' w - \delta w = r\left(\frac{dw}{dx}\cos\alpha + \frac{dw}{dy}\cos\beta + \frac{dw}{dz}\cos\gamma\right).$$

O valor medio ζ da velocidade relativa (6) das duas moleculas consideradas é portanto

$$\zeta = r\left[\frac{du}{dx}\cos^2\alpha + \frac{dv}{dy}\cos^2\beta + \frac{dw}{dz}\cos^2\gamma + \right.$$

$$+\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\cos\beta\cos\gamma + \left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\cos\gamma\cos\alpha +$$

$$\left. + \left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\cos\alpha\cos\beta\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

A mesma velocidade relativa (6) póde ser representada por $\zeta_1 + \zeta$, sendo ζ_1 uma quantidade cujo valor medio é nullo, mas cujo valor absoluto é em geral muito maior que ζ, em virtude da rapidez com que variam as velocidades effectivas de um ponto para os pontos visinhos. Esta quantidade ζ_1 exprimiria evidentemente a velocidade relativa de affastamento de duas moleculas, se as velocidades effectivas u_1, v_1, w_1 nos differentes pontos fossem todas diminuidas a cada instante dos seus valores medios locaes u, v, w, ou, em outros termos, se todo o movimento geral de translação cessasse, ficando apenas a *agitação*, representada em cada ponto pelas differenças $u_1 - u$, $v_1 - v$, $w_1 - w$. Este estado de agitação sem movimento progressivo podia realizar-se, com effeito, sob a acção de forças convenientemente escolhidas; elle não é incompativel com a incompressibilidade supposta do fluido, porque $u_1 - u$, $v_1 - v$, $w_1 - w$ satisfazem á condição linear (1) de continuidade, que é verificada por u_1, v_1, w, bem como por u, v, w.

As componentes N′, T′ dependem, como já dissemos, das velocidades relativas das moleculas que cercam o ponto (x, y, z), e são portanto funcções d'um grande numero de variaveis analogas a $\zeta_1 + \zeta$. Como ζ é muito pequeno em relação a ζ_1, podem desenvolver-se estas funcções pela serie de Taylor segundo as potencias ascendentes das quantidades ζ, levando o desenvolvimento só até aos termos de primeira ordem. Substituindo depois estas quantidades pelos seus valores (7), poderão reunir-se n'um só todos os termos affectados de cada uma das seis expressões (2), de que as forças N′, T′ ficarão sendo funcções lineares. Tomando emfim as medias dos valores d'estas forças durante um intervallo de tempo sufficientemente curto, ver-se-ha que «as acções medias exercidas atravez dos elementos planos fixos, tomados no interior d'um liquido em movimento, são funcções lineares das seis expressões (2), affectadas de coefficientes variaveis com a agitação media no ponto que se considera».

18. Imaginemos no ponto (x, y, z) um elemento plano normal aos xx e supponhamos que a distribuição das velocidades medias locaes em volta d'este ponto é tal que as expressões $\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}$, $\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}$ sejam nullas. Em virtude da significação das expressões (2), equivale isto a suppôr que as pequenas linhas materiaes perpendiculares ao elemento plano tomam sobre elle inclinações, durante o tempo dt, de modo a ficarem-lhe em media normaes, exceptuando comtudo os instantes infinitamente curtos em que ha brusca discontinuidade das volocidades no ponto x, y, z. As componentes das velocidades relativas das moleculas proximas d'este ponto, avaliadas parallelamente ao elemento plano, componentes a que podemos chamar velocidades de escorregamento, devem pois ser em media nullas e portanto deve tambem ser nulla a acção tangencial media exercida sobre o elemento plano considerado.

São pois nullas as componentes T_3, T_2 da acção tangencial media, exercida sobre um elemento normal aos xx, quando se annullam as duas ultimas expressões (2). As fórmulas lineares de T_2 e T_3 reduzem-se portanto aos dois termos affectados d'estas duas expressões. Raciocinando do mesmo modo sobre um plano normal aos zz, conclúe-se que T_2 deve reduzir-se unicamente aos dois termos affectados de $\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}$. Deve pois T_2 conter um só termo affectado de $\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}$, e analogamente se vê que T_3, T_1 contêm um unico termo, respectivamente affectado de $\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}$ e de $\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}$.

19. Consideremos um novo systema de eixos, obtido fazendo girar o primeiro d'um angulo muito pequeno θ em volta do eixo dos zz, como no n.º 15. A propriedade das componentes tangenciaes, que acabamos de demonstrar, tem logar qualquer que seja o systema de eixos rectangulares e portanto as novas componentes T_1, T_2, T_3 não contêm senão um termo respectivamente affectado de

$$\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'},\quad \frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'},\quad \frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}.$$

As fórmulas de transformação (4) dão, desprezando os termos da ordem de θ^2:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}&=\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}+\theta\left(\frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'}\right),\\
\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}&=\frac{dw'}{dx'}+\frac{dw'}{dz'}-\theta\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right),\\
\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}&=\frac{du'}{dy'}+\frac{dv'}{dx'}+2\theta\left(\frac{du'}{dx'}-\frac{dv'}{dy'}\right),
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(8)$$

Substituindo na quarta das expressões (5) os valores de T_1 e T_2 que são da fórma

$$T_1=\varepsilon\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right),\quad T_2=\varepsilon'\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right),$$

e as expressões (8) de $\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}$ e $\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}$, vem

$$\mathcal{T}_1=\varepsilon\left(\frac{dv'}{dz'}+\frac{dw'}{dy'}\right)+\theta\,(\varepsilon-\varepsilon')\left(\frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'}\right).$$

$\mathcal{T}_1$ é independente de $\frac{dw'}{dx'}+\frac{du'}{dz'}$ e portanto deve ser $\varepsilon=\varepsilon'$. Os tres coefficientes de attrito que entram nas expressões de T_1, T_2, T_3 são portanto eguaes e teremos, qualquer que seja o systema de eixos coordenados,

$$\left.\begin{array}{c} T_1=\varepsilon\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right),\quad T_2=\varepsilon\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right), \\ T_3=\varepsilon\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right). \end{array}\right\}\ldots\ldots(9)$$

A ultima expressão de $\mathcal{T}_1$ mostra além d'isso que o coefficiente ε não varia quando os eixos soffrem uma pequena rotação em volta de um d'elles e portanto quando tomam uma direcção qualquer no espaço.

Substituindo os valores (9) de T_1, T_2, T_3 nas duas ultimas expressões (5) e os valores (8) de

$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy},\quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz},\quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx},$$

deve obter-se para T_2 e T_3 as expressões

$$T_2 = \varepsilon\left(\frac{dw'}{dx'} + \frac{du'}{dz'}\right), \quad T_3 = \varepsilon\left(\frac{du'}{dy'} + \frac{dv'}{dx'}\right).$$

Operando assim, acha-se a condição

$$N_1 - 2\varepsilon\frac{du}{dx} = N_2 - 2\varepsilon\frac{dv}{dy},$$

e analogamente, por uma rotação dos eixos coordenados em volta do eixo dos xx, achar-se-hia

$$N_2 - 2\varepsilon\frac{dv}{dy} = N_3 - 2\varepsilon\frac{dw}{dz}.$$

Podemos pois pôr

$$N_1 - 2\varepsilon\frac{du}{dx} = N_2 - 2\varepsilon\frac{dv}{dy} = N_3 - 2\varepsilon\frac{dw}{dz} = -p \ldots . (10)$$

Como o coefficiente ε é em geral muito pequeno, a quantidade p differe geralmente pouco da pressão que se exerceria no ponto (x, y, z), se o liquido estivesse em repouso. Esta quantidade p não depende da escolha dos eixos coordenados, como é facil de vêr por meio das relações (4), (9), (10) e das tres primeiras (5).

Das relações (10) deduz-se

$$-\frac{1}{3}(N_1+N_2+N_3)=p-\frac{2}{3}\varepsilon\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)$$

ou, em virtude de (1),

$$p=-\frac{1}{3}(N_1+N_2+N_3).$$

A pressão p é pois, com differença de signal, a media arithmetica das forças normaes N_1, N_2, N_3.

Das fórmulas (9) e (10) deduz-se portanto para expressões definitivas das forças N, T:

$$\left.\begin{array}{c} N_1=-p+2\varepsilon\frac{du}{dx},\quad N_2=-p+2\varepsilon\frac{dv}{dy}, \\ N_3=-p+2\varepsilon\frac{dw}{dz}, \\ T_1=\varepsilon\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right),\quad T_2=\varepsilon\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right), \\ T_3=\varepsilon\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right). \end{array}\right\}\ldots\ldots(11)$$

20. As expressões (11) são analogas ás de Navier. N'estas porém considera-se ε constante, u, v, w são as componentes da velocidade effectiva, e suppõe-se que estas velocidades variam continuamente de um a outro ponto do liquido. As fórmulas de Navier applicam-se, por isso, só a movimentos extremamente lentos ou ao movimento em espaços capillares. Nas expressões (11) u, v, w são as componentes das *velocidades medias locaes* e ε é variavel d'um ponto para outro.

A noção da velocidade media local resulta da *periodicidade* que se observa na velocidade das moleculas em cada ponto d'uma massa fluida em movimento Esta periodicidade tinha sido notada em 1833 por Savart nas suas experiencias sobre o escoamento por orificios, e nas experiencias de Boileau, feitas em 1845, notava-se que a alavanca do hydrodynamometro, transmissora dos impulsos da corrente, executava um duplo systema de oscillações tanto mais rapidas quanto maior era a velocidade do fluido. A periodicidade do movimento observa-se tambem nos cursos de agua naturaes e é designada pelos engenheiros americanos com o nome de *pulso* dos rios; ella foi perfeitamente observada nas experiencias hydraulicas feitas no Mississipi por uma commissão de engenheiros militares e professores dos Estados Unidos. A observação conduz pois á consideração das velocidades medias locaes para o estudo do movimento dos liquidos. É a constancia d'estas velocidades em cada ponto e não a da velocidade effectiva, que caracterisa a *permanencia* do movimento, assim como o *regimen uniforme* deve ser definido, como faz Boileau, pela egualdade das velocidades medias locaes sobre uma mesma trajectoria parallela ás paredes. As fórmulas de Navier foram deduzidas na hypothese da continuidade das velocidades effectivas. Esta hypothese só se realisa em casos particulares. As fórmulas (11) foram deduzidas suppondo a continuidade das velocidades medias locaes e por isso se applicam a todo o movimento em geral.

Resta-nos, para completar as expressões (11), determinar os differentes valores a dar ao coefficiente ε em cada ponto do liquido. Kleitz (*Comptes Rendus*, t. 74, p. 430) e Levy (*Comptes Rendus*, t. 68, p. 588) tentaram resolver o problema. Porém um e outro suppõem, na deducção da expressão de ε, os movimentos fluidos continuos e regulares. Ambos partem da hypothese de Navier em virtude da qual as acções entre as moleculas, no estado de movimento, dependem das suas velocidades relativas, e attribuem a discordancia entre as fórmulas de Navier e os dados da observação á *insufficiente approximação* d'estas fórmulas.

É assim que Kleitz entende que a acção dynamica entre duas moleculas em vez de ser, como pensava Navier, simplesmente o producto d'uma funcção da sua distancia pela sua velocidade relativa, deve ser expressa por uma somma de termos affectados das potencias 1, 3, 5, 7... d'esta velocidade. Levy julga sufficiente attender-se só á primeira potencia das velocidades relativas, mas na avaliação d'estas velocidades diz que se deve attender ás potencias superiores e aos productos das tres projecções das pequenas distancias moleculares de que dependem aquellas velocidades; potencias e productos que vem affectados, nos desenvolvimentos que exprimem as velocidades relativas, das derivadas de ordem superior das velocidades absolutas u, v, w, em relação ás coordenadas x, y, z.

As fórmulas porém a que chegam Kleitz e Levy, ainda que sabiamente deduzidas, têm o defeito de suppôrem os movimentos fluidos continuos e regulares. Estas fórmulas não poderiam portanto applicar-se quando os movimentos são tumultuosos e u, v, w designam as velocidades medias locaes, porque as expressões que elles tomam para representar as forças em funcção de u,

v, w não formariam então senão uma parte muito diminuta das acções resistentes desenvolvidas pelo movimento, pois que a parte mais consideravel d'estas acções é sem duvida a que é devida aos movimentos relativos visiveis constituidos pelos redomoinhos que sulcam a massa liquida em todas as direcções. Nem mesmo para os movimentos regulares e continuos têm as fórmulas de Kleitz e Levy vantagem sobre as de Navier, porque a experiencia mostra que as fórmulas de Navier, com ε constante, têm a approximação sufficiente para este caso.

É n'uma direcção differente da que seguiram Kleitz e Levy, que se devem procurar os valores diversos a attribuir ao coefficiente de attrito ε para os differentes pontos do liquido. Com effeito, sendo ε variavel com a agitação media em cada ponto, como vimos no n.º 17, devem examinar-se as causas de que depende esta agitação e assim poderemos concluir a lei de variação do coefficiente ε.

21. A observação das correntes liquidas mostra que a regularidade do escoamento é perturbada por volumes fluidos, de dimensões muito pequenas mas finitas, que se destacam das paredes, formando redomoinhos que se propagam no interior do liquido. Se observarmos, por exemplo, a superficie livre da agua correndo n'um canal, vêem-se pequenas porções do liquido, um instante adherentes ás paredes, destacarem-se d'ella, formando redomoinhos de eixo vertical que caminham para o interior da massa fluida; assim como se observam tambem, principalmente no meio do canal, redomoinhos de eixo horisontal, que, partindo do fundo, immergem um instante acima da superficie livre para mergulhar em seguida. São pois estes redomoinhos que produzem no seio do liquido os movimentos de sentidos alternadamente oppostos, que se sobrepõem á translação geral, constituindo a *agitação* do escoamento.

Esta agitação dependerá pois de muitas causas. Assim a que se produz n'um ponto d'uma parede deve variar: com a velocidade media local n'este ponto, porque esta velocidade mede o impulso medio que origina os redomoinhos e lhes communica a sua força viva; com o *raio medio*, isto é, com a grandeza da relação $\frac{\omega}{\chi}$ da secção normal fluida ω para o seu contorno molhado χ, relação que mede a extensão de secção correspondente á unidade de contorno molhado, porque esta grandeza favorece os movimentos oscillatorios perpendiculares á parede, que tendem a destacar d'ella os pequenos volumes fluidos que vão formar os redomoinhos; finalmente com o grau de polido da parede considerada.

A partir das paredes os redomoinhos propagam-se para o interior e é impossivel avaliar a agitação total que elles vão produzir n'um ponto dado, sem conhecer as leis da sua propagação e da sua extincção ou transformação em energia interna, bem como as da sua reflexão sobre as superficies limites do fluido. É todavia natural admittir que a agitação augmenta a partir das paredes quando os redomoinhos, d'ellas emanados ou reflectidos por ellas, se propagam sobre superficies cuja área é cada vez mais pequena, o que succede quando o contorno molhado da secção é concavo; que ella diminue no caso contrario, e que fica sensivelmente constante quando, sendo a secção normal um rectangulo de base indefinida, o contorno molhado é rectilineo. É tambem natural suppôr que a agitação é a mesma n'um tubo de secção rectangular muito larga ou circular e n'um canal descoberto tendo por secção a metade inferior d'aquella. Com effeito a reflexão, sobre a superficie livre, dos redomoinhos partidos do fundo e das paredes, no caso do canal descoberto, deve produzir uma agitação sensivelmente egual á que causariam no tubo, sobre a metade inferior das secções, os redomoinhos vindos da parte superior das paredes.

Não podendo obter-se uma expressão geral de ε, que abranja todos os casos do movimento, vamos considerar os movimentos mais simples e que são tambem os mais importantes. Supporemos que o liquido se move em tubos ou canaes descobertos de eixo sensivelmente recto, tendo secções normaes pouco variaveis de uma para outra emquanto á fórma e á grandeza. Os filetes fluidos são então proximamente normaes ás secções e a *agitação* não é augmentada pela sua divergencia ou pela pequena convexidade que possam apresentar as paredes no sentido longitudinal, nem pela sua convergencia ou pela pequena concavidade longitudinal das paredes. Poderemos pois admittir que o coefficiente ε differe pouco, nos diversos pontos d'uma secção, do que elle seria se todos os filetes fluidos fossem parallelos e que este coefficiente não depende portanto senão do estado do liquido n'essa secção. A sua expressão mais simples e mais natural obter-se-ha suppondo-o proporcional ás causas que pela sua maior ou menor intensidade fazem crescer ou diminuir a agitação do liquido.

22. Procuremos primeiramente esta expressão nos quatro casos simples seguintes: o de um tubo tendo por secção um rectangulo de base muito grande, que possa suppôr-se indefinida, e de altura $2h$; o de um canal descoberto com egual secção, em que a profundidade do liquido é h; d'um tubo circular de raio R; e d'um canal descoberto semi-circular, cheio de liquido, e tambem de raio R. Pelo que deixamos dito, ε será sensivelmente proporcional á velocidade na parede, que designaremos por u_0 e que tem n'estes quatro casos um valor constante em todo o contorno molhado da secção, e ao raio medio $\frac{\omega}{\chi}$, que é egual a h nos dois primeiros casos e a $\frac{R}{2}$ nos dois ultimos. Além d'isso ε será, nos dois primeiros casos, sensivelmente constante nos diversos pontos da mesma secção, porque as superficies, tiradas parallelamente ás paredes no interior d'um tubo ou canal de secção rectangular de base indefinida, são todas da mesma grandeza e a agitação fluida propagando-se n'ellas não se concentra nem se dispersa. Outro tanto não succede nos dois casos ultimos porque a agitação se propaga a partir das paredes sobre cylindros ou semi-cylindros de raios r cada vez menores; a agitação concentra-se na relação $\frac{R}{r}$ e é natural suppôr que o coefficiente ε varía a partir das paredes na mesma relação. Portanto, chamando ρg o peso constante da unidade de volume do liquido e sendo A um coefficiente tanto maior quanto maior é o gráu de rugosidade das paredes, teremos

$$\varepsilon = \rho g A h u_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

quando a secção é rectangular muito larga, e

$$\varepsilon = \rho g A \frac{R}{2} u_0 \frac{R}{r}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

quando a secção é circular ou semi-circular.

Como ε só approximadamente é proporcional a u_0 e ao raio medio h ou $\frac{R}{2}$, não deve considerar-se A absolutamente constante, mas sim lentamente variavel com u_0 e h. A observação mostra que este coefficiente depende pouco de u_0 e que elle diminue quando augmentam h ou $\frac{R}{2}$.

Estas expressões de ε são de Boussinesq. A sua deducção funda-se em hypothese plausiveis e racionaes e ellas são confirmadas pelos resultados a que chega Boussinesq quando as aproveita no estudo do movimento uniforme ou por filetes parallelos. Com effeito d'estas fórmulas resultam para as velocidades, a diversas distancias da superficie livre nos dois primeiros casos e do centro nos dois ultimos, leis representadas por parabolas do segundo e do terceiro gráu respectivamente, e este resultado é conforme ás experiencias hydrometricas, convenientemente discutidas, de Darcy, Bazin, Boileau, etc.

23. Quando a secção tem uma fórma qualquer, a expressão de ε é sem duvida complicada e talvez impossivel de obter. Porém em secções semelhantes a agitação deve propagar-se semelhantemente nos pontos homologos, se as velocidades u_0 sobre o contorno molhado conservarem entre si as mesmas relações, e o estudo do movimento uniforme mostra que assim deve succeder. Se pois referirmos a dois eixos rectangulares dos y e dos z os diversos pontos d'uma secção, sendo estes eixos tomados no plano da secção e egualmente dispostos para todas as secções semelhantes, será ε proporcional: ao raio medio $\frac{\omega}{\chi}$; á media U_0 dos valores que toma a velocidade u_0 ao longo do contorno molhado χ; a uma funcção F, a mesma para todas as secções semelhantes, das relações $\frac{\chi y}{\omega}$, $\frac{\chi z}{\omega}$, que são eguaes nos pontos homologos de duas secções; e ao coefficiente A, que augmenta com as rugosidades da parede, que varia lentamente com o raio medio e é pouco dependente de v_0. Teremos pois

$$\varepsilon = \rho g \mathrm{A} \frac{\omega}{\chi} v_0 \mathrm{F}\left(\frac{\chi y}{\omega}, \frac{\chi z}{\omega}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

24. Com as fórmulas (14) (13) e (12) e com as (11) estabelecem-se facilmente as equações indefinidas do movimento.

Consideremos um parallelipipedo rectangulo elementar tendo, a partir do ponto fixo (x, y, z), tres arestas parallelas aos eixos coordenados e eguaes a dx, dy, dz. Se designarmos por ρ a densidade do fluido, por X, Y, Z as componentes da gravidade segundo os eixos e por u_1'', v_1'', w_1'' o valor medio, na epocha t, das tres accelerações, segundo os eixos, da materia que occupa o parallelipipedo, estabelecer-se-hão facilmente, á maneira ordinaria, as equações do equilibrio dynamico:

$$\frac{dN'_1}{dx} + \frac{dT'_3}{dy} + \frac{dT'_2}{dz} + \rho \mathrm{X} = \rho u''_1,$$

$$\frac{dT'_3}{dx} + \frac{dN'_2}{dy} + \frac{dT'_1}{dz} + \rho \mathrm{Y} = \rho v''_1,$$

$$\frac{dT'_2}{dx} + \frac{dT'_1}{dy} + \frac{dN'_3}{dz} + \rho \mathrm{Z} = \rho w''_1.$$

Multiplicando estas equações por $\frac{dt}{\tau}$ e integrando-as entre os limites t e $t+\tau$, poderão substituir-se os N', T' pelos seus valores medios N, T, e u''_1, v''_1, w''_1 pelas accelerações medias locaes u', v', w'. Teremos assim as tres equações do equilibrio dynamico medio

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X=\rho u',\\
&\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y=\rho v',\\
&\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+\rho Z=\rho w'.
\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(15)$$

Substituindo n'estas fórmulas por N, T as suas expressões (11) e depois por ε as expressões (12), (13) ou (14), e por u', v', w' os seus valores

$$u'=\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}+w\frac{du}{dz},$$

$$v'=\frac{dv}{dt}+u\frac{dv}{dx}+v\frac{dv}{dy}+w\frac{dv}{dz},$$

$$w'=\frac{dw}{dt}+u\frac{dw}{dx}+v\frac{dw}{dy}+w\frac{dw}{dz},$$

obter-se-hão as tres equações indefinidas que junctamente com a condição (1) de continuidade determinam as quatro variaveis desconhecidas p, u, v, w.

Nos casos em que se póde suppôr desprezivel a influencia dos attritos, isto é, em que se póde suppôr $N_1 = N_2 = N_3 = -p$ e $T_1 = T_2 = T_3 = 0$, as expressões (15) reduzem-se a

$$-\frac{dp}{dx} + \rho X = \rho u', \qquad -\frac{dp}{dy} + \rho Y = \rho v',$$

$$-\frac{dp}{dz} + \rho Z = \rho w'.$$

Estas expressões têm exactamente a fórma das da hydrodynamica racional. Vê-se pois que, nos casos em que se póde desprezar a acção das forças de attrito, as equações da hydrodynamica racional regem os movimentos agitados e discontinuos dos fluidos, substituindo n'ellas ás velocidades e pressões effectivas os seus valores medios locaes.

As consequencias que nos tratados de mechanica racional se deduzem da fórma d'estas equações subsistem portanto, nas mesmas condições, quando os movimentos são discontinuos. Citaremos por exemplo o principio de Daniel Bernoulli, em virtude do qual, quando a acção da gravidade se póde suppôr de grandeza e direcção constantes, a quantidade $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} - \zeta$, em que V designa a velocidade total n'um ponto e ζ uma ordenada vertical d'este ponto contada de cima para baixo a partir d'um plano horisontal fixo, é invariavel ao longo d'um mesmo filete fluido quando o movimento é permanente.

FIM.

Fig.1

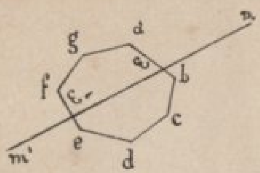


Fig. 2

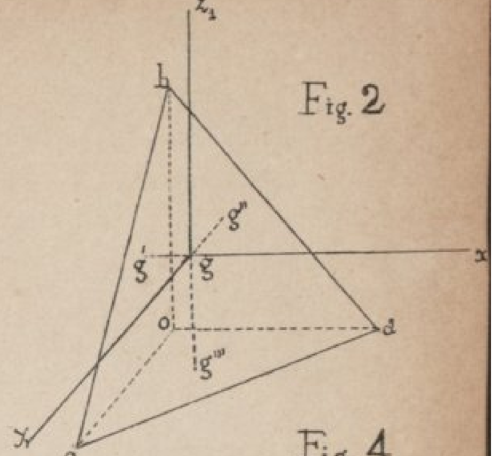


Fig. 3

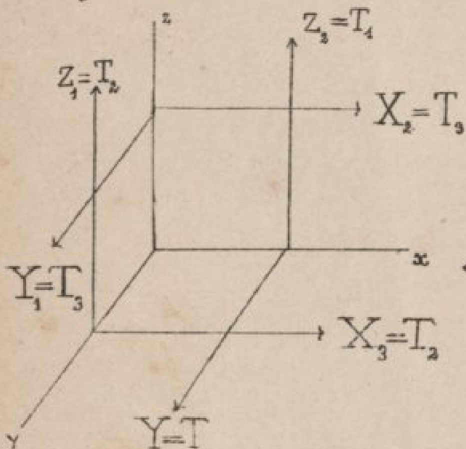


Fig. 4

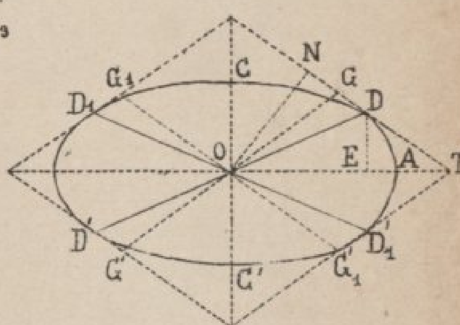


Fig.5

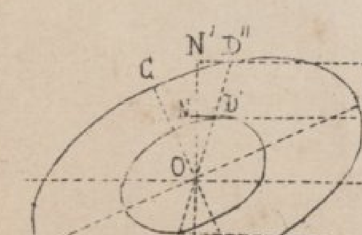
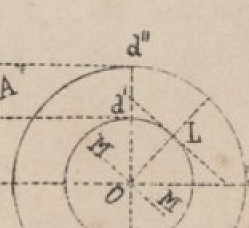


Fig.6



Coimbra. Lyth: M.M. Ribeiro-M. da Feira-4.

1888

P. DA SILVA - DISSERTAÇÃO INAUGURAL

MATHEMATICA