
ut
videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

Dissertação

ELEMENTOS

DE

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

POR

DIOGO PACHECO D'AMORIM

COÍMBRA

Imprensa da Universidade

1914

ELEMENTOS

DE

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES


ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

ELEMENTOS

DE

CÁLCULO DAS PROBABILIDADES

POR

DIOGO PACHECO D'AMORIM

COÍMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1914

Dissertação inaugural para o acto de doutoramento na Faculdade de Matemática, na Universidade de Coímbra.

A meus Pais

PREFÁCIO

O presente volume que mais pròpriamente se poderia chamar — *Uma tentativa de racionalização do Cálculo das Probabilidades* — põe em especial relêvo uma proposição a que, até hoje, ninguem deu a importância devida — a proposição *tirar, à sorte, um elemento duma classe,* ou *lançar, à sorte, um ponto numa região.*

HENRIQUE POINCARÉ diz mesmo que ela, por si, não tem significação nenhuma (¹). Ora a verdade é que ela tem um sentido muito preciso e claro quando nós mesmos sômos os agentes das tiragens ou lançamentos e isso permite-nos construir a teoria das probabilidades com toda a clareza e rigor. Partindo dela, a teoria das probabilidades pode reduzir-se a uma sucessão de proposições e definições, como qualquer outro ramo das Matemáticas Puras; a probabilidade contínua e a probabilidade descontínua aparecem com feições em tudo idênticas; os paradoxos desaparecem.

(¹) H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse,* pag. 226.

Construida a teoria da probabilidade dos fenómenos correspondentes a tiragens ou lançamentos, feitos à sorte, por nós mesmos, é fácil de estender as suas conclusões aos fenómenos correspondentes a tiragens, ou lançamentos, feitos por agentes a nós semelhantes, caso essas tiragens sejam feitas em certas circunstâncias.

Para aplicar os resultados da teoria, assim construida, aos fénómenos naturais, teremos de regeitar, *à priori,* a hipótese determinista que é, aliás, incompativel com qualquer teoria das probabilidades; em seguida, a aplicação faz-se muito naturalmente.

*

O ponto de vista em que nos colocamos, levou-nos a alterar, em certos pontos, a fórma e mesmo a essência desta sciência. Tivemos de generalizar a definição de probabilidade, generalização essa já necessária na dedução da fórmula de BAYES, mas absolutamente indispensável na probabilidade contínua, como claramente mostra o prob. 3.º da pag. 48.

Tivemos de fazer a distinção entre a probabilidade dum ponto e a probabilidade dum outro que seja *sua imagem,* o que nos levou ao conceito da *lei da probabilidade,* etc.

A ordem das matérias tambêm teve de sair das normas clássicas.

A probabilidade contínua passou a ocupar o lugar e o desenvolvimento que lhe competia ao lado da probabilidade discontínua. Os Teorêmas de Bernoulli seguem-se-lhes na exposição, porque se aplicam igualmente a ambas as probabilidades. A seguir ao 3.º teorêma de Bernoulli colocamos umas generalizações do mesmo teorêma, feitas para dar à dedução da lei dos desvios que naturalmente se lhes segue, o rigôr que lhe faltava. A seguir colocâmos a teoria da *Esperança Matemática,* porque o valôr deste conceito se torna muito mais evidente com a aplicação do 3.º teorêma de Bernoulli, do que com a propria definição de esperança matemática. Por fim, alargamos o campo de acção desta sciência, fazendo a sua aplicação a fenómenos de que nós não sômos os agentes. Reservamos tambêm para o fim a classificação dos fenómenos de que se ocupa esta sciência, porque só depois do estudo dos fenómenos que directamente se ligam com o fenómeno tipo, apresentado na Introducção, se torna clara e racional essa classificação. Tencionavamos terminar com uma justificação da nossa maneira de considerar a teoria da probabilidade, seguida dum Apêndice onde se estudasse a probabilidade dos conjuntos *numeráveis,* depois de *numerados;* mas a já demasiada extensão desta dissertação impede-nos de o fazer.

INTRODUCÇÃO

INTRODUÇÃO

O Cálculo das Probabilidades, como aliás toda e qualquer sciência, tem por fim relacionar factos que supomos conhecidos com outros desconhecidos mas susceptíveis de serem relacionados com os primeiros.

Vejamos, com um exemplo, os factos que supomos conhecidos nesta sciência e porque é que os consideramos como tais.

Suponhamos, para isso, uma urna contendo bolas, idênticas em tudo menos na côr.

Nestas condições, podem dar-se os seguintes casos:

1.° desconhecermos, por completo, as côres das bolas que a urna contêm e, portanto, as suas percentagens respectivas;

2.° conhecermos as côres das bolas e desconhecermos as suas percentagens;

3.° conhecermos as côres das bolas e as suas percentagens.

Tire-se, à sorte, uma bola dessa urna e suponhamos que somos forçados a apostar numa côr, à nossa escolha.

Em que côr apostar?

No primeiro caso, não o saberemos. Visto que desconhecemos, por completo, o conteúdo da urna, não teremos razão nenhuma para apostar na côr branca ou em qualquer outra.

No segundo caso, a nossa ignorância é um pouco mais restrita, visto que sabemos que a bola a tirar ou é branca ou é preta.

Mas como desconhecemos as percentagens das bolas brancas e pretas, ainda não temos razões que nos decidam por uma ou outra destas côres.

Suponhamo-nos, porêm, no terceiro caso e para fixar ideias, suponhamos que na urna há uma percentagem de nove décimos de bolas brancas, para um décimo de pretas.

Nestas condições não hesitaremos em apostar na côr branca.

Evidentemente que nada sabemos de certo acêrca da côr da bola que vai saír que poderá ser branca ou preta, mas nem por isso hesitaremos na aposta.

É isto que distingue essencialmente o terceiro caso que acabâmos de considerar, dos dois antecedentes: êle pode servir-nos de guia de conduta em certas circunstâncias.

Por isso, supô-lo-hemos *conhecido*.

*

Êle consiste numa tiragem, feita à sorte, numa urna de composição conhecida qualitativa e quantitativamente.

Nós suporemos, pois, que todo o fenómeno que pode identificar-se com uma tiragem, feita à sorte, numa urna de composição qualitativa e quantitativamente conhecida, fica explicado logo que essa identificação seja feita. Dum modo mais geral, nós suporemos explicado todo o fenómeno que possa identificar-se com uma tiragem, feita à sorte, numa classe finita e qualquer, logo que essa classe seja conhecida qualitativa e quantitativamente.

*
* *

Como vimos, supunhamos conhecido o terceiro caso atrás considerado, por êle nos poder servir de guia de conduta em certas circunstâncias que nós sintetisámos numa aposta.

Vejamos, porêm, quais as razões que nesse exemplo nos levavam a apostar na côr branca.

A primeira era, sem dúvida, o conhecimento de que na urna havia mais bolas brancas do que pretas, ou, como atrás dissémos, que a percentagem das bolas brancas era superior à das pretas.

A segunda era o conhecimento de que a tiragem em questão era feita à sorte.

Sem estas duas condições não teriamas razões para apostar na côr branca.

A explicação da primeira destas condições é-nos dada pela Aritmética; a explicação da segunda, porêm, não nos é dada por sciência nenhuma até hoje constituida.

Ela leva-nos, por isso, a admitir como primitiva a seguinte proposição:

«Tirar, à sorte, um elemento duma classe finita de elementos».

É sôbre esta proposição que nós assentaremos as bases do Cálculo das Probabilidades.

*
* *

É conveniente notar que não tomâmos para base desta sciência a noção de *sorte* ou de *acaso*, noção esta demasiado vaga para sôbre ela assentar as bases de qualquer sciência, mas sim a proposição «tirar, à sorte, um elemento duma classe finita de elementos», o que é muito diferente.

Alguem dirá que esta proposição, visto ser formada com a palavra *sorte* e dela tirar todo o seu valor, fica tão vaga como a noção que essa palavra indica.

A isso responderemos dizendo que pouco interesse tem que a noção de *sorte* seja ou não vaga, logo que a proposição que com ela formamos seja entendida e com ela se exprima uma ideia capaz de nos orientar em dadas circunstâncias.

Tudo quanto acêrca dessa proposição se diga, não tem interesse nem debaixo do ponto de vista matemático nem debaixo do ponto de vista utilitário.

O mesmo acontece em Geometria com a noção de *espaço* e em Mecânica com a noção de *tempo*.

As questões levantadas à volta destas noções teem um mero interesse filosófico, nada mais. Pode mesmo dizer-se que estas noções nada teem que vêr com a Matemática.

O edifício matemático *podia* ser o mesmo se essas noções não existissem.

As verdades da Geometria, da Mecânica, ficariam latentes no simbolismo da Análise. Mas, embora invisíveis, essas verdades lá estavam.

As noções de espaço e de tempo servem apenas, como os reagentes córantes na microscópia, para dar às verdades analíticas uma coloração que as torne visíveis nos vários campos em que podem ser aplicados.

*
* *

Uma pregunta há, porêm, que é legitímo de fazer-se: como distinguir uma tiragem feita à sorte, doutra que o não é?

Evidentemente que nem todas as tiragens feitas numa urna são feitas à sorte e forçoso é, por isso, dar um critério de distinção.

Para se dar êsse critério, admitiremos que todo o indivíduo sabe distinguir uma tiragem feita à sorte, doutra que o não é, logo que *êsse mesmo indivíduo seja o agente da tiragem.*

*

Dentro desta hipótese nós construiremos a teoria das probabilidades que ficará sendo uma sciência subjectiva, como toda a sciência pura. Essa teoria dar-nos-há depois o critério que nos deve guiar quando o agente da tiragem seja outrem que não nós.

Mas essa parte do Cálculo das Probabilidades está já no limiar das suas aplicações.

*
* *

A utilidade das sciências, em geral, provêm de nos ensinarem a prever os acontecimentos com uma aproximação práticamente suficiente.

O Cálculo das Probabilidades, porêm, parece não atingir êste fim utilitário.

Com efeito, como prever a côr duma bola que se tire à sorte duma urna que contêm duas bolas brancas e uma preta ?

Evidentemente que o Cálculo das Probabilidades no-lo não diz.

Se em vez de duas bolas brancas e uma preta, a urna contivesse mil bolas brancas e uma preta, o Cálculo das Probabilidades continuava a nada prever, mas a nossa intuição principiava a prever a chegada duma bola branca.

É nessa previsão que a intuição nos sugére quando o número de bolas brancas é muito maior que o das pretas que reside o valor prático do Cálculo das Probabilidades.

Essa intuição ficará irredutívelmente separada da certeza, por mais que da unidade se apróxime a percentagem das bolas brancas. Mas nem por isso ela deixa de ter para nós um valor prático real.

*

O que se disse duma tiragem feita, à sorte, numa classe finita de elementos, dir-se-há tambêm do lançamento *dum ponto,* feito à sorte, numa região finita, a um número qualquer de dimensões.

CAPÍTULO I

CLASSES FINITAS

CAPÍTULO I

CLASSES FINITAS

Com o símbolo (A) representaremos uma classe com um número qualquer de elementos.

Se (A) e (B) forem classes, com o símbolo (A, B) representaremos a classe que se obtêm associando cada elemento de (A) com cada um dos elementos de (B).

O símbolo (A) representará tambem o número de elementos da classe (A).

*

Segundo esta notação, será

$$(A, B) = (A) . (B)$$

como é evidente.

*

Qualquer elemento de (A, B) diz-se *composto* de A e B e representa-se por (A B).

A classe (A, B) diz-se *composta* das classes (A) e (B). Uma classe qualquer de elementos compostos (que pode não ser uma classe composta) representá-la-hemos por (*A B*).

Proposição primitiva

a)

A proposição: *tirar, à sorte, um elemento da classe* (A) consideramo-la como primitiva, isto é, como tendo um sentido próprio e não precisando, por isso, de explicação.

b)

A proposição: A *é um elemento tirado, á sorte, da classe* (A) tem o mesmo sentido que a proposição *a)*, mas presta-se melhor para o símbolismo da lógica matemática, enquanto que *a)* se presta melhor para o uso da linguagem vulgar.

*

Segundo a hipótese que acabamos de fazer, as proposições «tirar, à sorte, uma carta dum baralho», «lançar, à sorte, um dado» (tirar, à sorte, uma face dum dado), «tirar, à sorte, uma bola de uma urna», etc., não precisam de explicação.

DEFINIÇÃO 1.ª

Tirar, à sorte, um elemento de (A) *ou* (B) *ou* (C)..., significa, por definição, *tirar, à sorte, um elemento da classe* (A + B + C...), representando (A + B + C + ...) a classe constituída pela totalidade dos elementos das classes (A), (B), (C)...

DEFINIÇÃO 2.ª

a)

Tirar, à sorte, um elemento de (A) *e outro de* (B) significa, por definição, *tirar, à sorte, um elemento de* (A, B).

b)

Tirar, à sorte, um elemento de (A), *outro de* (B) *e outro de* (C) significa, por definição, *tirar, à sorte, um elemento de* (A, B) *e outro de* (C), etc.

*

Segundo esta definição, *tirar, à sorte, um naipe e tirar à sorte um número* [1] significa, *tirar, à sorte, uma carta dum baralho* e recíprocamente.

DEFINIÇÃO 3.ª

a)

Seja (A) uma classe, a cada elemento da qual se faz corresponder outra classe (B), variável, em geral, de elemento para elemento.

Nestas condições, *tirar, à sorte, um elenento de* (A) *e outro na classe* (B) *correspondente ao elemento tirado de* (A) significa ainda, por definição, *tirar, à sorte, um elemento de* (A, B).

---

[1] Chamaremos *número* a qualquer carta, abstração feita do naipe.

b)

Se a cada elemento de (B), se fizer corresponder uma nova classe (C), *tirar, à sorte, um elemento de* (A), *outro da classe* (B) *correspondente a* A *e outro da classe* (C) *correspondente a* B, significa, *tirar, à sorte, um elemento de* (A, B) *e outro da classe* (C) *correspondente ao elemento* B, *tirado em* (B), etc.

Possibilidade

1.º — Elementos possíveis

Segundo as definições que acabamos de dar, ou bem se trata de tiragens, feitas à sorte, numa só classe (proposição primitiva, def. 1.ª e 2.ª), ou se trata de tiragens feitas, à sorte, num complexo de classes [def. 3.ª, *a*) *b*)].

Tudo depende do sistema de tiragens que se considerar e das classes em que elas se efectuarem.

No caso das tiragens serem feitas numa só classe ou de tudo se passar como se tal se desse (prop. primit., def. 1.ª e 2.ª), dizem-se *possíveis* todos os elementos dessa classe.

No caso das tiragens serem feitas num complexo de classes, como na prop. 3.ª *a*), dizem-se *possíveis* todos os elementos que se obteem associando cada elemento A de (A) com os elementos da classe (B) que lhe corresponde.

No caso da prop. 3.ª *b*), dizem-se *possíveis* todos os elementos que se obteem associando cada elemento A B, *possível* em relação às duas primeiras tiragens, com cada um dos elementos da classe (C) correspondente a B, etc.

2.º — Classes possiveis

Uma classe diz-se *possível* quando é constituída por elementos *possiveis.*

Á classe constituída pela totalidade de elementos possíveis, chamaremos *classe total possível.*

DEFINIÇÃO 4.ª

Representando por (A) o número de elementos da classe (A), ao número

$$\pi_A = \frac{1}{(A)}$$

chamarei *possibilidade dum elemento* A qualquer, tirado à sorte, de (A), ou ainda, *possibilidade por unidade.*

*

Os elementos provenientes de tiragens efectúadas numa mesma classe, ou a tal equivalentes, serão *egualmente possíveis.*

Proposição I

A possibilidade dum elemento composto é egual ao produto das possibilidades dos elementos componentes.

Com efeito, visto que

$$(A, B) = (A) . (B),$$

será

$$\frac{1}{(A, B)} = \frac{1}{(A)} . \frac{1}{(B)}$$

e por isso,

$$\pi_{A B} = \pi_A . \pi_B$$

c. d. d.

DEFINIÇÃO 5.ª

Chama-se possibilidade duma classe possível $(\underline{A})$, à soma das possibilidades dos seus elementos

$$\varpi_{(\underline{A})} = \sum_{(A)} \pi_{(A)}$$

Proposição II

Se $(\underline{A})$ é uma classe possível, tal que

$$(\underline{A}) = (A_1) + (A_2) + \ldots + (A_n),$$

será,

$$\varpi_{(\underline{A})} = \varpi_{(A_1)} + \varpi_{(A_2)} + \ldots + \varpi_{(A_n)},$$

como resulta imediatamente da definição de $\varpi_{(\underline{A})}$.

Proposição III

A possibilidade da classe total possível é igual à unidade.

Com efeito:

a)

Se os elementos são todos provenientes de tiragens feitas numa só classe (A), a prop. é evidente:

$$\varpi_{(A)} = \sum_{(A)} \frac{1}{(A)} = \frac{(A)}{(A)} = 1.$$

b)

Consideremos, agora, o caso de os elementos serem provenientes de tiragens feitas num complexo de classes e, para fixar ideias, suponhamos que se trata do sistema de tiragens da def. 3.ª *a*).

Sejam A_1, A_2, ... A_n, os elementos de (A) e (B_1), (B_2), ... (B_n) as classes correspondentes. A possibilidade de qualquer elemento da classe que se obtêm associando A_1 com cada um dos elementos de (B_1) é (prop. I)

$$\pi_{A_1 B_1} = \frac{1}{(A)(B_1)}.$$

A possibilidade desta classe, será

$$\sum_{(B_1)} \pi_{A_1 B_1} = \frac{1}{(A)} \cdot \sum_{(B_1)} \frac{1}{(B_1)} = \frac{1}{(A)}.$$

A possibilidade da classe total será (prop. II)

$$\sum_{(A)} \frac{1}{(A)} = 1$$

c. d. d.

Esta demonstração estende-se fácilmente a qualquer sistema de tiragens.

Proposição IV

Se a classe (A, B) fôr composta das classes (A) e (B), será

$$\varpi_{(A,\,B)} = \varpi_{(A)} \cdot \varpi_{(B)}$$

visto que a possibilidade de cada elemento de (A, B) é o produto da possibilidade dum elemento de (A) pela possibilidade dum elemento de (B).

Probabilidade

DEFINIÇÃO 6.ª

Seja (A) uma classe possível e (A′) outra nela contida; chamaremos «probabilidade de (A′) em relação a (A)» ao número

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{\varpi_{(A')}}{\varpi_{(A)}}$$

sendo $\varpi_{(A')}$ e $\varpi_{(A)}$ as possibilidades respectivas de (A′) e de (A).

Á classe (A') costuma chamar-se *favorável* e à classe $(A) - (A')$, *classe contrária*.

Ás vezes emprega-se a palavra *caso* como sinónimo de *elemento*.

*

Se os elementos de (A) forem igualmente possíveis, será

$$\varpi_{(A)} = (A)\,\pi_A, \quad \varpi_{(A')} = (A')\,\pi_A$$

π_A

e

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{(A')}{(A)}.$$

Logo: quando os elementos da classe possível forem igualmente possíveis, a probabilidade é dada pelo número de casos favoráveis divídido pelo número de casos possíveis.

*

Quando a classe possível fôr constituida pela totalidade dos elementos possíveis, será

$$\varpi_{(A)} = 1$$

e

$$P_{(A)}^{(A')} = \varpi_{(A')} \text{ (1)}.$$

---

(1) A definição mais geral que LAPLACE deu da probabilidade, coìncide com êste caso particular ser $\varpi_{(A)} = 1$.

Se a classe favorável fôr idêntica à classe possível, será

$$P = 1$$

e a probabilidade toma, neste caso, o nome de *certeza*.

Se a classe favorável fôr nula, diremos que

$$\varpi_{(A')} = 0$$

e, portanto,

$$P = 0.$$

A probabilidade toma, neste caso, o nome de *impossibilidade*.

A probabilidade varía, pois, entre os dois números limites, 0 e 1.

Postulado

Sejam S e S′ dois sistemas de tiragens, dando origem a elementos qualitativamente iguais. Nós diremos que estes dois sistemas são equivalentes, quando *classes* qualitativamente iguais tiverem em S e S′ as mesmas probabilidades.

*

A palavra *equivalente* empregada neste postulado, significa que tanto uma tiragem feita em S como uma feita em S′, despertam em nós os mesmos móveis de acção.

Êste postulado reduz-nos todos os sistemas de tiragens que definimos, a tiragens feitas numa só classe.

Proposição V

Da probabilidade total

Se a classe possível (A′) fôr constituída pelas classes parciais (A_1), (A_2), ... (A_n), de tal modo que

$$(A') = (A_1) + (A_2) + \dots + (A_n),$$

será (prop. II)

$$\varpi_{(A')} = \varpi_{(A_1)} + \varpi_{(A_2)} + \dots + \varpi_{(A_n)},$$

e, portanto

$$p_{(A)}^{(A')} = p_{(A)}^{(A_1)} + \dots + p_{(A)}^{(A_n)}$$

isto é, *a probabilidade da classe total é igual à soma das probabilidades das classes parciais.*

Proposição VI

Da probabilidade composta

a)

Se (A, B) é uma classe possível, composta de (A) e (B) e (A′, B′) outra nela contida [1], será (prop. IV)

---

[1] Em geral, com (A′) designaremos uma classe contida em (A).

$$\varpi_{(A,B)} = \varpi_{(A)} \cdot \varpi_{(B)}$$

e

$$\varpi_{(A',B')} = \varpi_{(A')} \cdot \varpi_{(B')}$$

e, por isso,

$$P_{(A,B)}^{(A',B')} = P_{(A)}^{(A')} \cdot P_{(B)}^{(B')}.$$

Se as classes (A) e (B) forem independentes, esta proposição pode enunciar-se: *a probabilidade duma classe composta é igual ao produto das probabilidades das classes componentes.*

b)

A prop. VI ficou demonstrada para o caso das classes favorável e possível serem ambas compostas. Ela pode, porém, generalizar-se para os casos seguintes:

1.º

Se

$$\varpi_{(A,B)} = 1,$$

isto é, se a classe possível fôr a classe total possível, será

$$\varpi_{(A)} = \varpi_{(B)} = \varpi_{(A)} \cdot \varpi_{(B)} = 1$$

e, portanto,

$$P_{(A,B)}^{(A',B')} = P_{(A)}^{(A')} \cdot P_{(B)}^{(B')}.$$

2.º

Se fôr

$$\varpi_{(A,B)} = \varpi_{(A)},$$

isto é, se a classe possível se obtiver da classe total pos-

W(A,B) = W(A)

sível, pela exclusão de certos elementos de (A) com todos os elementos das classes (B) que lhes correspondem, será ainda

$$\varpi_{(B)} = 1,$$

e

$$P_{(A,\,B)}^{(A',\,B')} = P_{(A)}^{(A')} \,.\, P_{(B)}^{(B')}.$$

Proposição VII

Sejam (A), (A′), (A″) classes tais que (A) contenha (A′) e (A′) contenha (A″). Teremos,

$$\frac{\varpi_{(A'')}}{\varpi_{(A)}} = \frac{\varpi_{(A')}}{\varpi_{(A)}} \,.\, \frac{\varpi_{(A'')}}{\varpi_{(A')}};$$

logo,

$$P_{(A)}^{(A'')} = P_{(A)}^{(A')} \,.\, P_{(A')}^{(A'')} \qquad (1)$$

Corolário

De (1) tira-se

$$P_{(A')}^{(A'')} = \frac{P_{(A)}^{(A'')}}{P_{(A)}^{(A')}}.$$

Proposição VIII

Formula de Bayes

Da probabilidade das causas

Quando as tiragens, à sorte, se efectuarem como ficou indicado na definição 3.ª, à classe (A) chama-se *causa* e às classes (B), *efeitos*.

O problema chamado *das probabilidades das causas*, tem por tipo o problema seguinte:

Consideremos um grupo de N urnas, das quais n_1, teem uma percentagem p_1 de bolas brancas, n_2, uma percentagem p_2, etc.

Tire-se, à sorte, uma urna de entre as N urnas, e da urna que saír, tire-se, à sorte, uma bola que, por hipótese, sáe branca.

Qual a probabilidade de que a bola tirada pertença a uma urna de percentagem p_i?

Resp.:

Visto que supomos que a bola saída é branca, a classe possível é constituída pela totalidade de elementos compostos de

urna — bola branca.

Designando por $\varpi_{(A)}$ a possibilidade desta classe, será (prop. II e IV)

$$\varpi_{(A)} = \frac{n_1}{N} p_1 + \frac{n_2}{N} p_2 + \cdots,$$

ou, pondo

$$\frac{n_i}{N} = \omega_i,$$

$$\varpi_{(A)} = \Sigma \, \omega_i \, p_i.$$

A classe favorável é formada pela totalidade dos elementos compostos de

urna de ordem i — bola branca;

logo (prop. IV)

$$\varpi_{(A')} = \omega_i \, p_i.$$

Logo (def. 6.ª)

$$\boxed{P_{(A)}^{(A')} = \frac{\omega_i p_i}{\sum \omega_i p_i}} \tag{2}$$

que é a expressão conhecida pelo nome de fórmula de Bayes.

Nesta expressão, ω_i representa a probabilidade de tirar, dentre as N urnas, uma urna de ordem i e por isso chama-se-lhe *probabilidade à priori* da classe das urnas de ordem i ou duma urna de ordem i, mais simplesmente.

A probabilidade $P_{(A)}^{(A')}$ representa a probabilidade da mesma classe, *depois* de feita a primeira tiragem e de saír uma bola branca; por isso se lhe chama *probabilidade à posteriori.*

*
* *

Compreende-se que as *causas,* atraz consideradas, possam ser provenientes não duma tiragem feita numa só classe, mas dum sistema qualquer de tiragens.

Generalizemos a fórmula (1) para esse caso:

Sejam

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

as probabilidades *à priori* das *n causas* que podem dar lugar à saída de uma bola branca e sejam

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

as probabilidades que cada uma dessas causas dá à saída duma bola branca.

Designemos por (A) a classe que se obtêm associando cada uma das causas a cada uma das *bolas* a que ela pode dar origem. Designemos por (A′) a classe que se obtêm associando cada uma das causas às *bolas brancas* a que ela pode dar origem. E designemos por (A″) a classe que se obtêm associando cada causa de ordem i com as *bolas brancas* a que cada uma dessas causas pode dar origem.

Teremos (prop. VI, *b*, 1.°)

$$P_{(A)}^{(A'')} = \omega_i p_i ; \tag{3}$$

por outro lado (prop. VII),

$$P_{(A)}^{(A'')} = P_{(A)}^{(A')} \cdot P_{(A')}^{(A'')}, \tag{4}$$

sendo (prop. V)

$$P_{(A)}^{(A')} = \Sigma\, \omega_i p_i,$$

visto que

$$(A') = \Sigma (A'').$$

Logo

$$P_{(A')}^{(A'')} = \frac{\omega_i p_i}{\Sigma\, \omega_i p^i}.$$

*
* *

Esta dedução que acabamos de fazer, mostra bem como é erronea a dedução que desta fórmula se faz nos livros de probabilidades. Com efeito, no caso das urnas não terem o mesmo número de bolas, a dedução é feita por meio das igualdades (3) e (4), mas justificando-as a ambas com o princípio das probabilidades compostas. Ora a prop. VI é irredutível à proposição VII, porque a prop. VII não se aplica a elementos considerados como compostos.

Êste êrro passava encoberto debaixo da falta de precisão na significação do termo *fenómeno composto*.

De resto, sem êste sofisma, seria impossível deduzir a fórmula de Bayes com a definição de probabilidade dada nesses livros, pela simples razão de que a fórmula de Bayes se refere a um caso de probabilidades que não está previsto nessa definição: o caso de, não sendo os elementos igualmente possíveis, a *classe possível* ser menor do que a *classe total possível*.

Proposição IX

Fórmulas inversas da de Bayes

Representando a probabilidade à posteriori duma causa de ordem i por P_i, teremos, como vimos,

$$Pi = \frac{\omega_i p_i}{\Sigma \omega_i p_i}. \tag{5}$$

Esta fórmula é simétrica em relação ~~em relação~~ a ω e p e nela supõem-se dados p e ω.

Consideremos, agora, o caso de serem dados P e p; neste caso teremos

$$\omega_i = \frac{\frac{P_i}{p_i}}{\Sigma \frac{P^i}{p_i}}.$$

Com efeito, de (5) tira-se

$$\frac{P_i}{p_i} = \frac{\omega_i}{\Sigma\, \omega_i p_i};$$

donde

$$\Sigma \frac{P_i}{p_i} = \frac{\Sigma\, \omega_i}{\Sigma\, \omega_i p_i} = \frac{1}{\Sigma\, \omega_i p_i}$$

? $= \frac{P_i}{\omega_i p_i}$

e por isso

$$\omega_i = \frac{\frac{P_i}{p_i}}{\Sigma \frac{P_i}{p_i}}.$$

Pela simetria de (5), será ainda

$$p_i = \frac{\frac{P_i}{\omega_i}}{\Sigma \frac{P_i}{\omega_i}}.$$

Proposição X

Consideremos o seguinte problema, em que se supõem as coisas dispostas como para o caso das probabilidades das causas.

«Tire-se, à sorte, uma urna e da urna tirada, uma bola que se verifica ser branca. Metida a bola na urna, pregunta-se: qual a probabilidade de que, feita outra tiragem na mesma urna, se obtenha uma bola branca» ?

1.ª solução

Resolvamos êste problema aplicando directamente a definição de probabilidade.

A classe possível, pode ser considerada como a totalidade dos elementos compostos de

urna qualquer — bola branca — bola qualquer ;

será, pois,

$$\varpi_{(A)} = \Sigma\, \omega_i p_i \,.\, 1 = \Sigma\, \omega_i p_i.$$

A classe favorável será constituída pela totalidade dos elementos compostos de

urna qualquer — bola branca — bola branca ;

logo

$$\varpi_{(A')} = \Sigma\, \omega_i p_i p_i = \Sigma\, \omega_i p_i^2.$$

Logo

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{\Sigma\, \omega_i p_i^2}{\Sigma\, \omega_i p_i}.$$

2.ª solução

Podemos ainda considerar as coisas do seguinte modo: a primeira tiragem equivale a substituir as urnas de probabilidade ω, por outras de probabilidade P, sendo ω as probabilidades à priori e P as probabilidades à posteriori. O problema em questão é, portanto, equivalente a êste outro:

Se n causas de probabilidades

$$P_1, P_2, \ldots P_n,$$

dão a um determinado efeito, as probabilidades

$$p_1, p_2, \ldots p_n,$$

respectivamente, qual a probabilidade dêsse efeito?

A probabilidade pedida será (prop. V)

$$P = \Sigma P_i p_i = \frac{\Sigma \omega_i p_i^2}{\Sigma \omega_i p_i},$$

como já tinhamos achado.

*

Dum modo mais geral:

Se numa urna, tirada à sorte, fizermos $m+n$ tiragens (metendo na urna cada bola tirada, antes de feita a tiragem imediata) e dessas tiragens nos resultarem m bolas brancas e n pretas, a probabilidade de que a tiragem de ordem $m+n+1$ dê uma bola branca, é

$$P=\frac{\Sigma\,\omega_i p_i^{m+1} q_i^n}{\Sigma\,\omega_i p_i^m q_i^n},$$

resultado êste que se pode obter, ainda, pelos dois processos empregados para o caso particular de duas tiragens.

Corolário

Se as urnas tiverem a mesma probabilidade à priori, isto é, se

$$\omega_i = \text{const.},$$

será

$$P=\frac{\Sigma\,p_i^{m+1} q_i^n}{\Sigma\,p_i^m q_i^n}.$$

Problema

Dá-se uma urna contendo N bolas, brancas e pretas, de percentagens desconhecidas. Supondo que todas as percentagens são egualmente prováveis, qual a probabilidade de tirar uma bola branca na tiragem de ordem $m+n+1$, sabendo-se que nas primeiras $m+n$ tiragens se obtiveram m bolas brancas e n pretas ?

*

Êste problema é idêntico a êste outro.

Dão-se $N+1$ urnas, contendo a primeira N bolas pretas, a segunda uma bola branca e $N-1$ pretas, a terceira 2 bolas brancas e $N-2$ pretas, etc., a última N bolas brancas.

Tira-se uma urna, à sorte, e fazem-se dela $m+n$ tiragens (tornando a pôr na urna cada bola, antes de tirar a seguinte) que dão m bolas brancas e n pretas. Pergunta-se: qual a probabilidade de que a tiragem de ordem $m+n+1$, dê uma bola branca?

*

O problema é resolvido, portanto, pela fórmula do corolário antecedente; pondo

$$p_i = \frac{N-\alpha}{N} \quad \text{e} \quad q_i = \frac{\alpha}{N},$$

virá

$$P = \frac{\sum_{\alpha=0}^{N} \left(\frac{N-\alpha}{N}\right)^{m+1} \left(\frac{\alpha}{N}\right)^{n}}{\sum_{\alpha=0}^{N} \left(\frac{N-\alpha}{N}\right)^{m} \left(\frac{\alpha}{N}\right)^{n}},$$

ou, aproximadamente,

$$P = \frac{\int_0^N \left(\frac{N-\alpha}{N}\right)^{m+1} \left(\frac{\alpha}{N}\right)^{n} d\alpha}{\int_0^N \left(\frac{N-\alpha}{N}\right)^{m} \left(\frac{\alpha}{N}\right)^{n} d\alpha}$$

ou, pondo

$$\alpha = N x,$$

$$P = \frac{\int_0^1 (1-x)^{m+1} x^n \, dx}{\int_0^1 (1-x)^m x^n \, dx}.$$

Ora

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx = \frac{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(m+1)}{\Gamma(m+n+2)}$$

e, sendo n inteiro,

$$\Gamma(n) = (n-1)\,!$$

Logo

$$P = \frac{\Gamma(m+2)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+3)} \cdot \frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}$$

ou

$$P = \frac{(m+1)\,!}{(m+n+2)\,!} \cdot \frac{(m+n+1)\,!}{m\,!} = \frac{m+1}{m+n+2},$$

sendo esta fórmula tanto mais aproximada quanto maior fôr N.

CAPÍTULO II

PROBABILIDADE CONTÍNUA

CAPITULO II

PROBABILIDADE CONTÍNUA

DEFINIÇÃO 1.ª

Se (A), (B), ... representam regiões limitadas quaisquer e a qualquer número de dimensões, com (A + B + ...) representaremos a região constituída pela totalidade dos pontos de (A), (B), ...

DEFINIÇÃO 2.ª

Se (A) e (B) representam regiões quaisquer, com (A, B) representaremos a totalidade dos pontos que se obtêm associando cada ponto de (A) com cada um dos pontos de (B).

*

Nas definições que acabamos de dar, a linguagem geométrica é simplesmente uma linguagem figurada em que a palavra *ponto,* num espaço a n dimensões, significa apenas um grupo qualquer de n números.

*

Demonstra-se na Pangeometria que se (A) e (B) representam regiões e os mesmos símbolos as suas *medidas* respectivas, se tem

$$(A, B) = (A) . (B),$$

ou melhor, a Pangeometria generaliza a noção de *medida* do hyper-espaço de modo tal que se mantêm a relação

$$(A, B) = (A) . (B).$$

(A, B) dir-se-há uma *região composta* de (A) e (B) e os seus pontos dir-se-hão *pontos compostos*, tal qual como na probabilidade discontínua.

Proposição primitiva

a)

Análogamente ao caso da probabilidade das classes discontínuas e finitas, consideraremos como primitiva a proposição: *Lançar, à sorte, um ponto numa região* (A) *limitada e a um número qualquer de dimensões.*

b)

A proposicão M *é um ponto lançado, à sorte, em* (A) tem uma significação análoga à da proposição precedente, mas presta-se melhor para o simbolismo da lógica.

DEFINIÇÃO 1.ª

Lançar, à sorte, um ponto em (A) *ou* (B) *ou* ... significa, por definição, *lançar, à sorte, um ponto na região* $(A + B + \ldots)$.

DEFINIÇÃO 2.ª

a)

Lançar, à sorte, um ponto em (A) *e outro em* (B), significa, por definição, *lançar, à sorte, um ponto em* (A, B).

b)

Lançar, à sorte, um ponto em (A) *e outro em* (B) *e outro em* (C), significa, por definição, *lançar, à sorte, um ponto em* (A, B) *e outro em* (C), etc.

Assim, lançar, à sorte, um ponto M no segmento AB e um ponto N no segmento AC, significa, por definição, lançar, à sorte, um ponto P no paralelogramo $ABDC$ *(fig. 1)*.

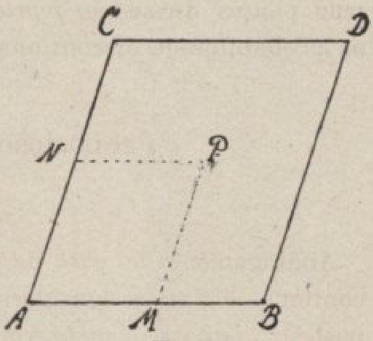


Figura 1

Lançar, à sorte, um ponto num arco de curva qualquer e outro num segmento de recta, sería o mesmo que lançar, à sorte, um ponto num segmento de superfície cilíndrica, etc.

DEFINIÇÃO 3.ª

a)

Consideremos, agora, o caso do lançamento à sorte ser feito, não em regiões quaisquer, mas em regiões sujeitas a certa dependência.

Seja (A) uma região qualquer e suponhamos que a cada ponto de (A) se faz corresponder uma outra região (B), variável, em geral, com o ponto de (A) considerado.

Lançar, à sorte, um ponto em (A) *e outro na região* (B) *correspondente ao ponto de* (A) *coïncidente,* significa, por definição, *lançar, à sorte, um ponto na região* (A, B) sendo (B) a região correspondente ao ponto coïncidente de (A).

b)

Se a cada ponto de (B) fizermos corresponder uma nova região (C), *lançar, à sorte, um ponto em* (A), *outro na região* (B) *correspondente ao ponto coïncidente de* (A) *e*

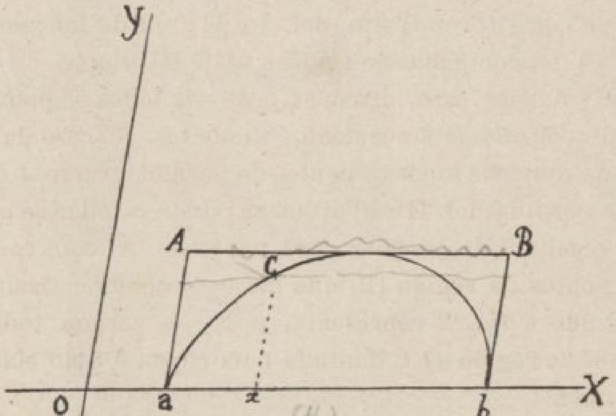


Figura 2

outro na região (C) *correspondente ao ponto coïncidente de* (B), significa por definição, *lançar, à sorte, um ponto em* (A, B) *e outro em* (C), etc.

*

Assim, suponhamos que (A) seja *(fig. 2)* o segmento *ab* e que as regiões (B) são as ordenadas dos pontos da curva $a\,C\,b$, correspondendo a cada ponto x a ordenada $x\,C$.

Se o ponto lançado à sorte em ab coincidir com x, o segundo lançamento far-se-há em $x\,C$ e tudo se passará, segundo a definição, como se se fizesse um só lançamento num paralelogramo de base ab, com o lado superior passando por C e contido, portanto, no paralelograma $ab\,BA$.

Possibilidade

Segundo as definições que acabamos de dar, ou bem se trata de lançamentos feitos à sorte numa região ou a tais equivalentes (prop. prim. def. I e II), ou de lançamentos feitos num complexo de regiões (def. III a e b).

No primeiro caso, dizem-se *possíveis* todos os pontos da região em que os lançamentos são feitos. No caso da *fig. 1* seriam *possíveis* todos os pontos do paralelogramo $A\,B\,D\,C$.

No caso da def. III, a) dizem-se *possíveis* todos os pontos que resultam de associar cada ponto de (A) com cada um dos pontos da região (B) que lhe corresponde. Assim, no caso que a *fig. 2* representa, *possíveis* seriam todos os pontos da região $a\,b\,C$ limitada pela curva e pelo eixo dos $X\,X$, etc.

Possibilidade num ponto ou possibilidade por unidade

Seja (A) a grandeza duma região em que se faz um lançamento à sorte.

Ao número

$$\pi_A = \frac{1}{(A)}$$

chama-se *possibilidade no ponto A* ou *possibilidade por unidade.*

Podemos dizer que neste caso todos os pontos de (A) são *igualmente possíveis,* para nos servirmos duma linguagem análoga à da probabilidade discontínua, querendo dizer com *pontos igualmente possíveis,* pontos *nos* quais a possibilidade é sempre a mesma.

*

Segundo esta definição, os pontos das regiões consideradas na *prop. prim.* e *def. I* e *II* são igualmente possíveis. Nos casos da *def. III* a possibilidade não será, em geral, a mesma para todos os pontos.

Em qualquer dos casos, porêm, ela é perfeitamente determinada, visto que, segundo as definições dadas, cada ponto possível faz parte duma região e duma só, em que se efectua um lançamento à sorte, do qual lhe resulta a propriedade de ser *possível.*

A possibilidade num ponto fica sendo uma função definida das coordenadas do mesmo.

Proposição I

Por razões perfeitamente idênticas às do caso análogo das ~~probabilidades~~ possibilidades das classes finitas, *a ~~probabilidade~~* possibilidade *num ponto composto é igual ao produto das possibilidades nos pontos componentes.*

$(A,B)=(A).(B)$

Possibilidade duma região

Uma região diz-se *possível* quando é formada por pontos possíveis.

Chama-se possibilidade duma região (A), ao integral da possibilidade por unidade, estendido a toda essa região, caso êsse integral exista.

Representaremos pos $\varpi_{(A)}$ a possibilidade de (A).

Proposição II

Em virtude da definição antecedente, será ainda,

$$\varpi_{(A)} = \varpi_{(A_1)} + \varpi_{(A_2)} + \ldots + \varpi_{(An)}$$

todas as vezes que

$$(A) = (A_1) + (A_2) + \ldots + (A_n).$$

*

Chamaremos, ainda, *região total possível,* à totalidade dos pontos possíveis, em relação a determinado sistema de lançamentos.

Proposição III

A possibilidade da região total possível é igual à unidade como se demonstra de modo perfeitamente análogo ao da probabilidade discontínua.

Proposição IV

Teremos ainda

$$\varpi_{(A,\ B)} = \varpi_{(A)} \cdot \varpi_{(B)}.$$

Com efeito, visto que a função $\frac{1}{(B)}$ é independente das coordenadas dos pontos de (A), e visto que

$$\frac{1}{(A, B)} = \frac{1}{(A)} \cdot \frac{1}{(B)},$$

será

$$\varpi_{(A, B)} = \int_{(A, B)} \frac{d(A, B)}{(A, B)} = \int_{(A)} \frac{d(A)}{(A)} \cdot \int_{(B)} \frac{d(B)}{(B)} = \varpi_{(A)} \cdot \varpi_{(B)}$$

c. d. d.

Probabilidade

Seja (A) uma região *possível* relativamente a um dado sistema de lançamentos à sorte, e (A′) outra nela contida.

Chama-se *probabilidade da região* (A′) *em relação à região* (A), *ao número*

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{\varpi_{(A')}}{\varpi_{(A)}},$$

sendo $\varpi_{(A')}$ e $\varpi_{(A)}$ as possibilidades de (A′) e de (A).

*

Se os pontos de (A) forem *igualmente possíveis*, será

$$P_{(A)}^{(A')} = \frac{(A')}{(A)}.$$

Quando a *classe possível* coincidir com a *classe total possível*, será

$$\varpi_{(A)} = 1$$

e

$$P_{(A)}^{(A')} = \varpi_{(A')}.$$

Exemplos:

1.º

Parte-se, à sorte, um segmento em três partes: qual a probabilidade de que essas três partes formem um triângulo?

Resp.:

Partir um segmento em três partes é considerar sôbre êle dois pontos; parti-lo à sorte, será, por definição, lançar, à sorte, dois pontos sôbre êle, ou, o que é o mesmo (def. II), lançar, à sorte, um ponto num quadrado que tem êsse segmento de lado.

Seja AB o segmento dado *(fig. 3)* e seja $ABCD$ o quadrado *(fig. 4)*.

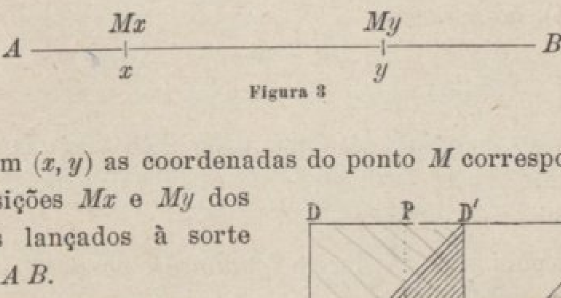


Figura 3

Sejam (x, y) as coordenadas do ponto M correspondente às posições Mx e My dos pontos lançados à sorte sôbre AB.

Supondo que os segmentos mencionados no enunciado do problema em questão são aditivos, teremos a determinar a probabilidade de que os segmentos Ax, xy (caso $x < y$) e yB formem um triân-

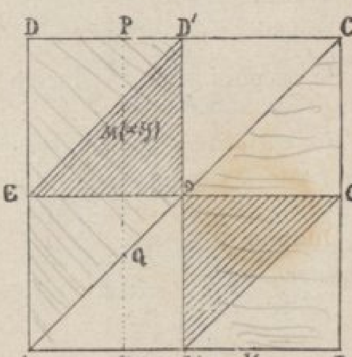


Figura 4

$Ax = x$
$xy = (y - x)$
$yB = a - y$

gulo; caso $y < x$, os segmentos a considerar serão Ay, yx, xB.

Seja, em primeiro lugar, $x < y$.

Para que os três segmentos possam formar triângulo será necessário e suficiente que

$$\begin{aligned} x &< (y-x)+(\alpha-y) \\ y-x &< x+(\alpha-y) \\ \alpha-y &< x+(y-x) \end{aligned}$$

representando por α o comprimento do segmento AB.

Estas condições são equivalentes a estas outras, como se vê imediatamente,

$$\begin{aligned} 0 < \ & y > \frac{\alpha}{2} \\ 0 < \ & x < \frac{\alpha}{2} \qquad (1) \\ 0 < \ & y-x < \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

A região favorável (A′) será, pois, constituida pela totalidade dos pontos do quadrado $ABCD$ cujas coordenadas satisfaçam às condições (1).

A estas condições só satisfazem os pontos da região $OD'E$, como é óbvio.

No caso de $x > y$, a região favorável seria formada pelo triângulo simétrico em relação a AC.

E como todos os pontos sam igualmente possíveis, a probabilidade pedida será dada pelo quociente das áreas das regiões favorável e possível, isto é,

$$P = \frac{1}{4}.$$

2.º

Suponhamos agora que partimos o mesmo segmento em dois e depois o segmento *maior* ainda em dois: qual a probabilidade de que os três segmentos possam formar triângulo ?

Resp.:

O campo favorável é ainda o mesmo do problema antecedente; vejamos o campo possível.

Para $x \leqslant \frac{a}{2}$, será $\mathrm{A}x < x\mathrm{B}$ e por isso $x<y<a$, isto é, quando o primeiro ponto cáe em x o segundo ponto cairá em qualquer ponto de $x\,\mathrm{B}$ e por isso todos os pontos de Q P são possíveis e portanto são possíveis todos os pontos da região A O D' D *(fig. 4)*.

Por razões idênticas é possível a região E' O C B. Como a questão é simétrica em relação a A C, consideremos só a parte A O D' D como região possível e O D' E como região favorável.

No problema antecedente os elementos possíveis eram tambêm igualmente possíveis, porque cada um dos pontos supunha-se lançado sôbre todo o segmento, o que neste caso se não dá. Chamando F à região favorável e P à região possível, será

$$\varpi_{\mathrm{P}} = 1$$

e

$$\varpi_{\mathrm{F}} = \int_{\mathrm{OD'E}} \frac{2\,dx}{a} \cdot \frac{dy}{a-x} = \frac{2}{a} \int_{0}^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{a-x} \cdot \int_{\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} dy$$

donde

$$\varpi_F = \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{x}{a-x}\,dx =$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^{\frac{a}{2}}\left[-1+\frac{a}{a-x}\right]dx = -1+2\left[-\log.\,(a-x)\right]_0^{\frac{a}{2}} =$$

$$= 2\log.\,2 - 1 = 0{,}44\,\ldots\ldots$$

e, portanto,

$$P = 0{,}44\,\ldots\ldots$$

isto é, a probabilidade augmentou, como era de esperar.

3.º

Consideremos ainda outra variante do mesmo problema.

Lança-se à sorte um ponto M em A E′ *(fig. 4)* e outro M′ no segmento M B e supõe-se que o ponto M′ caíu entre E′ e B; pede-se a probabilidade de que os três segmentos A M, M M′ e M′ B possam formar triângulo.

Resp.:

As regiões *total* possível, possível e favorável são respectivamente AOD′D, EOD′D e EOD′.

Teremos pois:

$$\varpi_P = \iint_{EOD'D} \frac{dx}{\frac{a}{2}} \cdot \frac{dy}{a-x}$$

$$= \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{dx}{a-x}$$

ou,

$$\varpi_P = \Big[-\log.\,(a-x)\Big]_0^{\frac{a}{2}}$$

$$= \log.\, a - \log.\, \frac{a}{2}.$$

$$= \log.\, 2$$

e (prob. 2.º)

$$\varpi_F = 2 \log.\, 2 - 1\,;$$

logo

$$P = 2 - \frac{1}{\log.\, 2} = 0{,}6\ldots$$

Observação

Tudo o que se disse da probabilidade discontínua, diz-se da probabilidade contínua. Assim, as proposições V, VI, VII, demonstradas para a probabilidade discontinua, demonstram-se de modo idêntico para a probabilidade contínua e serão indicadas neste capítulo com os mesmos números. O «problema das probabilidades das causas» podia ser tratado aqui do mesmo modo que no capítulo antecedente.

No capítulo IV será esse problema tratado dum modo bastante diferente e mais geral.

Proposição VIII

Se um ponto M, variando numa dada região, se puder decompor em dois componentes, M_1 e M_2 tais que, a cada posição de M_1 corresponda sempre para M_2 o mesmo campo favorável e o mesmo campo possível, M_1 será *independente* de M_2 e por isso as suas probabilidades podem calcular-se separadamente, o que, em geral, facilita muito a resolução do problema. No caso particular da probabilidade de M_1 ser igual à unidade, a probabilidade de M será independente dos parametros que definem a posição de M_1 que por isso poderemos supôr *fixo*.

Quando a região em que se faz o lançamento de M tiver um elemento de simetria, será, em geral, aplicável esta proposição.

Exemplo:

Lançam-se, à sorte, dois pontos sôbre a superfície duma esfera. Pergunta-se: qual a probabilidade de que o menor arco do círculo máximo que liga os dois pontos, seja inferior a α?

Resp.:

Qualquer que seja a posição dum dos pontos M, por exemplo, para o outro corresponderá sempre a mesma região favorável e a mesma possível.

Supondo, então, M fixo, a região favorável será dada pela calote tendo o ângulo 2α de abertura e M por vértice, a região possível, sendo toda a superfície da esfera. O problema é, pois, equivalente a êste outro: qual a probabilidade de que um ponto lançado à sorte na superfície duma esfera, cáia sôbre um segmento dessa superfície? Problema êste de solução imediata.

Proposição IX

«Se o campo da variação de M se puder decompor em partes, de modo que a probabilidade de M seja a mesma em cada uma delas, teremos que a probabilidade no campo total será igual à probabilidade em qualquer das partes».

Com efeito, sejam (A), (B), ... (L), as partes do campo possível e (A'), (B') ... (L') as partes correspondentes do campo favorável; teremos que, por hipótese,

$$P = \frac{\varpi_{(A')}}{\varpi_{(A)}} = \frac{\varpi_{(B')}}{\varpi_{(B)}} = \ldots = \frac{\varpi_{(L')}}{\varpi_{(L)}}.$$

Logo

$$P = \frac{\Sigma\, \varpi_{(L')}}{\Sigma\, \varpi_{(L)}}$$

que é a probabilidade de M,

c. d. d.

DEFINIÇÃO 4.ª

A proposição *lançar, à sorte, um ponto em* (A) sendo (A) ilimitada, significa, *lançar, à sorte, um ponto em* (A') sendo (A') uma região contida em (A), limitada e arbitràriamente grande.

Se M é um ponto lançado à sorte em (A) e (A) é ilimitada, chama-se probabilidade de M na região (A) ao limite da probabilidade de M em (A') quando (A) aumenta indefenidamente, isto é, ao número P tal que a todo o $\delta > 0$

corresponda uma região (C) tal que

$$| P - P_{(B)} | < \delta$$

para todas as regiões (B) tais que

$$(B) > (C).$$

Trataremos mais desenvolvidamente dêste caso num *apêndice* em que estudaremos a probabilidade dos conjuntos numeráveis, depois de numerados.

CAPÍTULO III

CAPÍTULO III

PRIMEIRA PARTE

Todas as proposições em que entrem as frases *tirar à sorte, lançar à sorte* associadas a figuras rígidas ou variáveis, terão de ser definidas por meio de lançamentos ou tiragens à sorte, como está indicado nas definições 1.ª, 2.ª e 3.ª dos capítulos I e II.

Lançamentos de figuras rígidas

DEFINIÇÃO 1.ª

Tirar, à sorte, um sentido num espaço a n *dimensões,* significa, por definição, *lançar à sorte um ponto no espaço da figura cuja equação é*

$$(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2 = 1.$$

O sentido será o do vector definido pelo ponto de coordenadas $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ como origem e pelo ponto lançado à sorte como extremidade.

O ponto $(x'_1, x'_2, \ldots, x_n)$ pode ser qualquer.

No caso particular de $n = 2$, o lançamento faz-se sôbre uma circunferência e no de $n = 3$, sôbre uma esfera.

Análoga definição serve para a tiragem, à sorte, duma direção.

DEFINIÇÃO 2.ª

Sejam A B e A′ B′ dois segmentos de recta. Sobreponhamo-los de modo que o ponto A coìncida com o ponto A′ e façamos escorregar o segmento menor sôbre o maior até que o ponto B coìncida com o ponto B′. Dêste modo o segmento menor passa por todas as posições que êle pode ocupar em relação ao segmento maior e no final do percurso todos os pontos do segmento menor terão descrito segmentos de recta iguais.

Lançar, à sorte, o segmento menor sôbre o maior significa, *lançar, à sorte, um ponto qualquer do segmento menor sôbre o segmento que esse mesmo ponto descreve quando o segmento menor percorre o segmento maior.*

Lançar, à sorte, o segmento maior sôbre o menor, significa o mesmo que *lançar o menor sôbre o maior.*

*

Para que esta definição seja correcta é necessário e basta que ela não dependa de nenhum ponto particular, isto é, que seja a mesma qualquer que seja o ponto considerado sôbre o segmento. Ora de facto assim é, visto que todos os pontos do segmento descrevem segmentos iguais.

Como, em virtude do sistema das definições 1.ª, 2.ª e 3.ª, tudo se resume ao lançamento dum ponto numa região ou complexo de regiões, a cada figura lançada à sorte corresponderá, em geral, um ponto que lhe serve de definição no lançamento. A êsse ponto chamaremos ponto *equivalente* da figura em relação ao lançamento considerado. O ponto equivalente deve ser tal que, qualquer que seja a figura em questão, êle não dependa de nenhum dos pontos dessa figura.

Problema

Dois amigos passeiam todas as tardes, durante meia hora, num jardim público que está aberto das duas horas até às qùatro. Qual a probabilidade de que se encontrem em certo dia ?

Resp. :

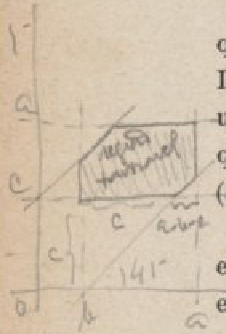
Supõe-se casual a hora a que qualquer dos indíviduos se dirige para o jardim. Nestas condições, visto que o tempo é um *contínuo* a uma dimensão, podemos enunciar assim êste problema:

Dá-se um segmento de recta de comprimento a e mais dois outros de comprimentos b e c; lançam-se b e c, à sorte, sôbre a: qual a probabilidade de que se sobreponham ?

No caso de $b+c \geqslant a$, os segmentos sobrepõem-se sempre e por isso

$$p=1.$$

No caso de $b+c<a$, vejamos como as coisas se passam. Quando b percorrer o segmento a, qualquer dos seus pontos descreve segmentos iguais a $a-b$ e, análogamente,



qualquer ponto de c descreve segmentos iguais a $a-c$. Lançar à sorte os dois segmentos sôbre a, é lançar à sorte um ponto de b em $a-b$ e um ponto de c em $a-c$, ou, o que é o mesmo, lançar à sorte um ponto no rectângulo $(a-b)\,(a-c)$.

Escolhamos para pontos equivalentes de b e c as suas extremidades da direita e sejam x e y as distâncias dessas extremidades à origem 0 de a *(fig. 5)*.

Figura 5

Para que b e c se não sobreponham terá de ser

$$y-x>b \quad \text{ou} \quad x-y>c.$$

As rectas cujas equações são

$$y-x=b \quad \text{e} \quad x-y=c$$

determinam sôbre o rectângulo $(a-b)\,(a-c)$ dois semi-quadrados que são, para o problema proposto, a região *contrária*. E tem-se, como é fácil de vêr,

$$1-P=\frac{\frac{1}{2}(a-b-c)^2+\frac{1}{2}(a-c-b)^2}{(a-b)\,(a-c)}=\frac{(a-b-c)^2}{(a-b)\,(a-c)}.$$

Para

$$a=2,\; b=c=\frac{1}{2},$$

vem

$$P=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}.$$

DEFINIÇÃO 3.ª

Lançar, à sorte, uma recta numa região (A), significa, por definição, *lançar, à sorte, um ponto em* (A) *e tirar, à sorte, uma direcção* sendo a recta definida por êstes dois elementos.

Exemplo:

Lança-se, à sorte, uma recta dentro dum círculo ; qual a probabilidade de que ela intersecte uma corda inferior ao segmento *c* ?

Para lançar, à sorte, a recta, principiamos por tirar, à sorte, a sua direcção. Em virtude da simetria do círculo, a qualquer direcção da recta corresponde, sempre, para o ponto lançado no círculo, o mesmo campo favorável S' (menor segmento de círculo limitado pela corda c) e o mesmo possível S (área total). Logo (prop. VIII) a probabilidade pedida será independente da direcção D *(fig. 6)* da recta que, por isso, suporemos fixa e dependerá apenas de M. Logo

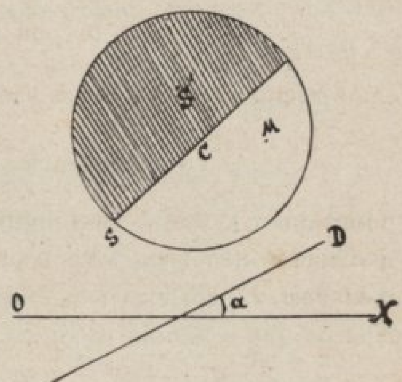


Figura 6

$$P = \frac{S'}{S} = \frac{\alpha - \operatorname{sen} \alpha}{\pi}$$

$S = \pi R^2$

sendo α o ângulo subintendido pela corda c, visto que a corda será maior ou menor que c, conforme M estiver ou não sôbre S'.

*

A solução generaliza-se imediatamente ao caso duma recta lançada numa esfera.

A mesma solução se daria ao problema que dêste resulta substituindo a recta por um plano e a corda pela área de uma secção plana.

DEFINIÇÃO 4.ª

Lançar, à sorte, um segmento de recta numa região (A) significa, por definição, *lançar, à sorte, uma recta em* (A) (def. 3.ª) *e na parte dessa recta interior a* (A), *o segmento em questão* (def. 2.ª)

Exemplo:

Problema da agulha

Lança-se, à sorte, uma agulha (segmento da recta) sôbre uma folha de papel (plano ilimitado) cortada por linhas rectas paralelas e equidistantes; qual a probabilidade de que a agulha encontre uma dessas rectas?

Resp.:

Seja l o comprimento da agulha e a a distância das paralelas AB, A'B', ... *(fig. 7).*

Principiemos por tirar, à sorte, a direcção α da recta que contêm o segmento; em seguida teremos de lançar à sorte um ponto M dentro dum segmento do plano arbitráriamente grande (cap. II, def. 4.ª). Por maior, porêm, que seja êsse segmento do plano, poderemos sempre determinar um paralelogramo P Q R S com os lados paralelos à direcção achada e às rectas A B, A' B', paralelogramo êsse que contenha o segmento do plano considerado e fazer dentro dêle o lançamento de M. Suponhamos que estes dois lançamentos nos determinaram a recta D E. Determinada ela, resta lançar o segmento l sôbre o segmento D E (def. 4.ª). Ora, qualquer que seja a posição do ponto M, a probabilidade de l encontrar uma das rectas é sempre

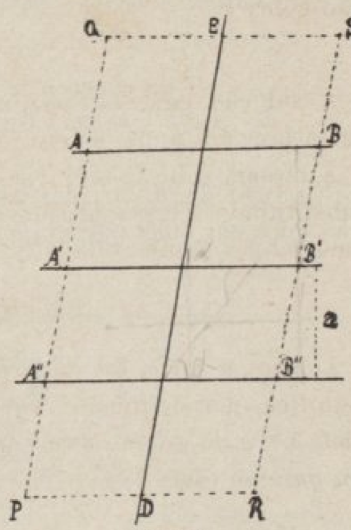


Figura 7

a mesma. Logo (cap. II, def. 8.ª) podemos supôr M fixo. Posto isto, façamos percorrer a l a recta D E. Quando a origem de l percorrer um segmento de D E compreendido entre duas paralelas consecutivas, o espaço durante o qual êsse segmento encontra uma das paralelas é sempre o mesmo.

As paralelas dividem, pois, o campo possível do lançamento de l sôbre D E em partes de igual probabilidade (desprezando as duas partes extremas, o que é legítimo em virtude da arbitrariedade do paralelogramo); logo (def. 9.ª) bastará calcular a probabilidade numa dellas:

$$p = \frac{l}{BB'} = \frac{l \operatorname{sen} \alpha}{a},$$

(sendo α o ângulo EDR), caso $a > l$; por outro lado, a probabilidade por unidade de α é $\frac{1}{\pi}$; logo

$$P = \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \cdot \frac{l \operatorname{sen} \alpha}{a} d\alpha = \frac{l}{a\pi} (-\cos\alpha)_0^\pi = \frac{2l}{a\pi}.$$

No caso de $a < l$, decomponhamos o campo da variação de α em duas partes: a 1.ª constituida pela totalidade

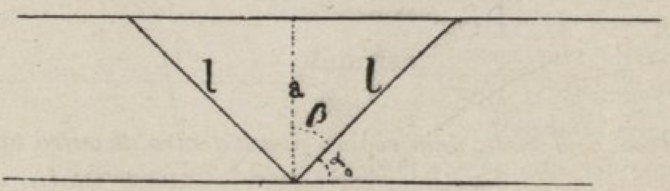


Figura 8

de valores de α para os quais pode não haver o encontro; a 2.ª constituida pelos outros valores. Aplicando os teoremas das probabilidades totais e compostas e pondo

$$a = l \cos B = l \operatorname{sen} \alpha_0,$$

virá

$$P = \frac{\pi - 2\alpha_0}{\pi} \cdot 1 + 2 \cdot \frac{\alpha_0}{\pi} \cdot \int_0^{\alpha_0} \frac{l \operatorname{sen} \alpha}{a} \cdot \frac{d\alpha}{\alpha_0}$$

$$= \frac{\pi - 2\alpha_0}{\pi} + \frac{2l}{a\pi} [1 - \cos \alpha_0]$$

$$= \frac{2B}{\pi} + \frac{2l}{a\pi}(1 - \operatorname{sen} B).$$

Nota

Convêm notar que a probabidade de encontro é proporcional ao comprimento da agulha logo que $l < a$.

DEFINIÇÃO 5.ª

Lançar, à sorte, um plano [1] *dentro duma região* (A) *também plana,* significa, por definição, *tirar, à sorte, em* (A) *um sentido.*

DEFINIÇÃO 6.ª

Lançar, à sorte, uma região plana dentro de outra também plana (A), significa, por definição, *lançar em* (A) *um plano* (def. 5.ª) *e em seguida lançar, à sorte, um ponto da região móvel ou a ela invariavelmente ligado, dentro da região que êsse mesmo ponto descreve quando a figura móvel ocupa dentro de* (A) *todas as posições compatíveis com a orientação que a sorte designa para o seu plano.*

Evidentemente que o ponto equivalente terá sempre a mesma possibilidade qualquer que seja o ponto escolhido no plano da figura móvel, visto que, deslocando-se o plano da figura móvel paralelamente a si mesmo, todos os seus pontos descrevem regiões iguais.

---

(1) Êste plano fica perfeitamente orientado logo que se dê dêle uma semi-recta.

DEFINIÇÃO 7.ª

Lançar, à sorte, um plano num espaço a n $>$ 3 *dimensões,* significa, por definição, *lançar, à sorte, um ponto nesse espaço e, á volta dele, dois sentidos.*

DEFINIÇÃO 8.ª

Lançar, à sorte, num espaço a n *dimensões, uma figura plana,* significa, por definição, *lançar, à sorte, um plano nessa região e, sôbre a parte do plano interior a essa região, a figura plana em questão.*

DEFINIÇÃO 9.ª

Lançar, à sorte, um espaço a três dimensões, numa região (A) *a três dimensões também,* significa, por definição, *lançar, à sorte, um ponto em* (A), *e à volta dele dois sentidos* (1).

*

A generalização destas definições para espaços de um número superior de dimensões é intuitiva.

Nota

Convêm notar que, segundo estas definições, lançar, à, sorte, a região finita (B) sôbre a região também finita (A), é equivalente a lançar, à sorte, um ponto numa região que depende de (A) e (B). Desta dependência se conclue imediatamente (basta analisar um caso particular, o do lan-

(1) Bastam dois sentidos para orientar três eixos.

çamento dum segmento de recta sôbre um segmento plano, por exemplo) que do lançamento, à sorte, do *todo*, se não conclue o lançamento, à sorte, de qualquer das *partes*, porque, no caso de regiões finitas, o ponto equivalente duma parte de (B) variará numa região diferente da do ponto equivalente de (B), isto é, lançando a parte junta ao todo, o campo de variação do seu ponto equivalente será um (campo do ponto de equivalência do todo), lançada separadamente, o seu campo de variação será outro.

No caso do lançamento ser feito em campo ilimitado, pode dar-se o caso de o lançamento à sorte do todo, arastar o lançamento à sorte, da parte.

Assim, por exemplo, no problema da agulha (def. 4.ª), o lançamento à sorte da agulha arrasta o lançamento à sorte de qualquer das suas partes, porque, quer uma parte da agulha seja lançada, à sorte, isoladamente, quer fazendo parte da agulha, o seu ponto equivalente terá sempre o mesmo campo possível.

SEGUNDA PARTE

Lançamento, à sorte, de figuras variáveis

DEFINIÇÃO 10.ª

Lançar, à sorte, uma figura variável numa dada região (A), significa, por definição, *tirar, à sorte, a forma dessa figura e, em seguida, lançá-la, á sorte, em* (A), *como se fosse rígida.*

A segunda proposição de que se compõe esta definição já foi tratada na primeira parte dêste capítulo. Resta-nos apenas dizer o que entendemos por «tirar, à sorte, a forma duma figura variável».

Evidentemente que a questão não pode ser resolvida dum modo geral. Nós trataremos a questão das figuras poligonais (abertas ou fechadas) articuladas e, como caso limite, as curvas flexíveis e inextensíveis.

DEFINIÇÃO 11.ª

Figuras poligonais abertas

Uma figura poligonal articulada é, como se sabe, uma linha poligonal de ângulos variáveis.

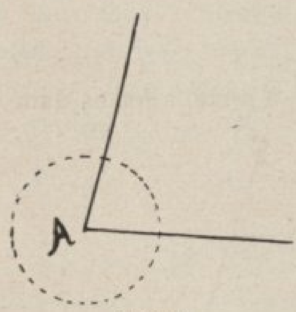


Figura 9

Fixar, à sorte, a sua forma, será, por definição, *tirar, à sorte, a forma de cada um dos seus vértices.*

Para definir esta última proposição, consideremos um dêsses vértices ou articulações A *(fig. 9)* que podemos supôr localizado no espaço a n dimensões e sejam $(x'_1, x'_2, \dots x'_n)$ as coordenadas de A. Consideremos o espaço formado pelos pontos que satisfazem à equação

$$(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2 = 1. \tag{1}$$

Suponhamos um dos ramos da articulação A fixo e o outro movendo-se de modo a ocupar em relação ao fixo todas as posições possíveis. Seja (B) [1] a região por êle descrita sôbre o espaço (1). *Tirar, à sorte, a forma da articulação* (A) é, por definição, *lançar, à sorte, um ponto em* (B).

DEFINIÇÃO 12.ª

Figuras poligonais fechadas

a)

No plano

Principiaremos pelas figuras planas e passaremos em seguida para as figuras articuladas no espaço.

1.º

Suponhamos que se trata de tirar, à sorte, a forma dum

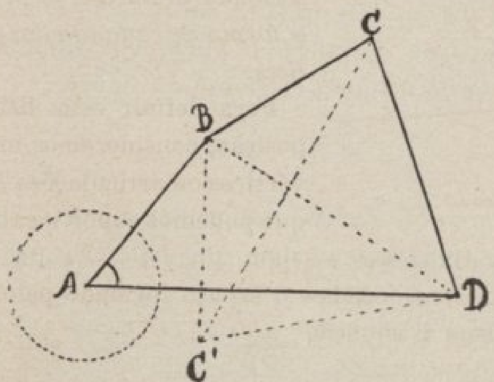


Figura 10

quadrilátero plano ABCD *(fig. 10)*. Quando êste quadrilá-

[1] (B) pode não ser a totalidade da superfície da hiper-esfera.

tero passa por todas as formas possíveis, o ângulo A passa por duas espécies de valores: uns correspondentes à posição C do vértice que lhe é oposto; outros correspondentes à posição C'. Ou, o que é o mesmo, supondo que à volta de A se descrevera uma circunferência de raio unidade, e que AD se considera fixo, o ponto de intersecção do lado invariável com a circunferência, descreve duas regiões que podem sobrepôr-se no todo ou em parte [1] quando o quadrilátero passa por todas as posições possíveis. Mas nem por isso essas regiões deixam de ser distintas uma da outra. Representêmo-las por (A) e (A_1). Logo que seja dado um ponto qualquer destas duas regiões, a figura fica definida na forma. Consideremos as mesmas duas regiões em B, C, D, e sejam (B) e (B_1), (C) e (C_1), (D) e (D_1).

Tirar, à sorte, a forma do quadrilátero será, por definição, *tirar, à sorte, um ponto de* (A) *ou* (A_1) *ou* (B) *ou* (B_1) *ou* (C) *ou* (C_1) *ou* (D) *ou* (D_1) (def. I, cap. II).

Segundo esta definição o ponto equivalente não fica dependente de nenhum elemento da figura.

2.º

Consideremos, agora, um pentágono e vejamos como passar do lançamento dum quadrilátero para o desta figura.

Quando a articulação A *(fig. 11)* toma a forma particular A, o quadrilátero BCDE pode tomar uma infinidade

---

[1] As articulações podem estar sujeitas a ligações que não tornem possível a posição C'.

de formas, umas no semi-plano BCE, outras no semi-plano BC'E.

A essas formas correspondem grupos (B) e (B'), (C) e (C'), (D) e (D'), (E) e (E'), para os ângulos de BCDE e grupos análogos, mas diferentes em geral, para o quadrilátero BC'D'E. Associemos os valores possíveis de A a cada um dos elementos dos grupos de BCDE e chamemos (A) ao

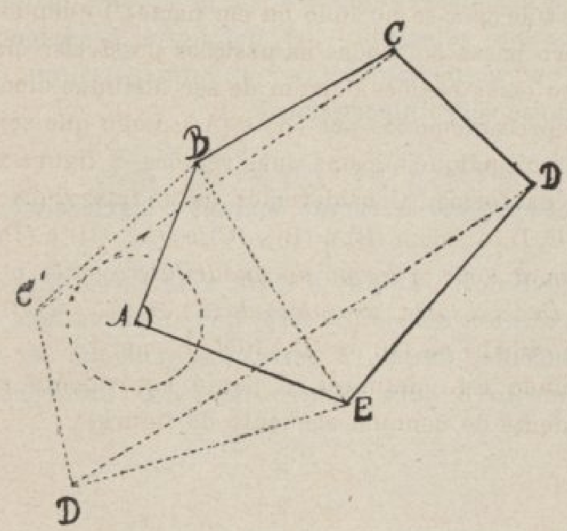


Fig. 11

conjunto obtido. Façamos o mesmo para o quadrilátero BC'D'E e chamemos ao conjunto obtido (A_1). Um elemento qualquer dêstes dois conjuntos basta para definir o pentágono. Façamos o mesmo para todos os outros vértices e sejam (B) e (B_1), (C) e (C_1), ..., os conjuntos obtidos.

Tirar, à sorte, a forma dum pentàgno, significa, por definição, *tirar, à sorte, um elemento de* (A) *ou* (A_1) *ou* (B) *ou* (B_1) ...

Dum modo análogo se definia a tiragem, à sorte, da forma dum exágono, a dum eptágono, etc.

b)

No espaço

Para o lançamento duma figura poligonal fechada num espaço a um número qualquer de dimensões, não teremos mais do que substituir, nas definições precedentes, os pontos que se moviam sôbre circunferências, por pontos movendo-se sôbre hiper-esferas.

Lançamento de curvas flexíveis e inextensíveis

Por definição, *lançar, à sorte, uma curva flexível e inextensível, num espaço* (A) será, quer a curva seja aberta quer fechada, *lançar, à sorte, um polígono do mesmo comprimento e dum número de lados arbitràriamente grande.*

*

Todo o problema relativo a um polígono articulado, com um número arbitrário de lados, terá uma solução dependente do número e grandeza dêsses lados. Se essa solução tender para um limite quando os lados do polígono tenderem para zéro, dir-se-há que êsse limite é a solução do mesmo problema relativo a uma curva flexível e inextensível.

CAPÍTULO IV

DO PONTO IMAGEM

CAPITULO IV

PONTO IMAGEM

Proposição I

Sejam (A) e (B) duas regiões tais que entre os seus pontos se possa estabelecer uma correspondência biunivoca, completa e contínua. Quando se lança, à sorte, um ponto M em (A), o ponto N, correspondente em (B), designa-se com o nome de *ponto imagem* do primeiro. Dum modo geral, qualquer elemento de (B) diz-se *imagem* do elemento correspondente de (A), logo que em (A) se efetue um lançamento à sorte.

A posição do ponto imagem N ficará dependente do acaso, visto que depende da posição do ponto M que é lançado à sorte em (A). Mas a dependência de N em (B) é muito diferente da dependência de M em (A), visto que M é lançado *directamente* à sorte em (A), enquanto que N varía em (B) como *imagem* de (A).

Por esta razão chamaremos a M *ponto livre* e a N ponto imagem ou *sujeito*.

Defeniremos a possibilidade no ponto sujeito, pela possibilidade no ponto livre correspondente. Possibilidade duma região (B′), imagem da região (A′), pela possibilidade de (A′). Dum modo geral, tudo que debaixo do ponto de vista da probabilidade se diz do ponto imagem N, variando em (B), define-se por meio do ponto livre correspondente variando em (A). As propriedades mencionadas para o ponto livre, são ainda verdadeiras para o ponto imagem, como será fácil de vêr.

Aplicação

Seja $f(x)$ uma função, contínua e crescente, de x, num intervalo (α, β). Tira-se, à sorte, um número dêste intervalo e pergunta-se: qual a probabilidade de que o valor de y correspondente tenha o número dígito d na casa decimal da ordem a?

Sejam ω e ω' os números inteiros que mais aproximadamente satisfazem às desigualdades

$$f(\alpha) < \frac{10\,\omega + d}{10^a}, \quad f(\beta) > \frac{10\,\omega' + d + 1}{10^a},$$

e representemos por $f^{-1}(x)$ a função inversa de $f(x)$; os valores de $f(x)$ que satisfazem às condições do enunciado estão compreendidos nos intervalos

$$\left(\frac{10\,\omega + d}{10^a}, \frac{10\,\omega + d + 1}{10^a}\right),$$

$$\left(\frac{10\,(\omega + 1) + d}{10^a}, \frac{10\,(\omega + 1) + d + 1}{10^a}\right), \ \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{10\,(\omega + i) + d}{10^a}, \frac{10\,(\omega + i) + d + 1}{10^a}\right), \ \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{10\,\omega'+d}{10^a},\ \frac{10\,\omega'+d+1}{10^a}\right).$$

A probabilidade pedida será, pois, em virtude das definições antecedentes e do teorema das probabilidades totais,

$$P_{(d,\,a)}^{(\alpha,\,\beta)}=\frac{\Sigma\left\{f^{-1}\left[\frac{10\,(\omega+i)+d+1}{10^a}\right]-f^{-1}\left[\frac{10\,(\omega+i)+d}{10^a}\right]\right\}}{\beta-\alpha}$$

1.º

Apliquemos esta fórmula à função

$$y=\log_{\alpha} x$$

considerada no intervalo de variação de y

$$\left(0,\ \frac{10\,\omega+10}{10^a}\right).$$

Teremos, neste caso,

$$\omega=0,\quad \omega'=\omega,\quad \text{e}\quad P_{(d,\,a)}^{(0,\,\omega)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{\omega}\left[\alpha^{\frac{10\,i+d+1}{10^a}}-\alpha^{\frac{10\,i+d}{10^a}}\right]}{\alpha^{\frac{10\,\omega+10}{10^a}}-1}=$$

$$=\alpha^{\frac{d}{10^a}}\,\frac{\left[\alpha^{\frac{1}{10^a}}-1\right]\sum\limits_{i=0}^{\omega}\alpha^{\frac{i}{10^{a-1}}}}{\alpha^{\frac{\omega+1}{10^{a-1}}}-1}=\alpha^{\frac{d}{10^a}}\,\frac{\alpha^{\frac{1}{10^a}}-1}{\alpha^{\frac{1}{10^{a-1}}}-1}. \tag{1}$$

A fórmula (1) mostra que a probabilidade pedida não depende de ω e portanto do intervalo em questão; podemos representá-la por $P_{(d,\,a)}$.

*

De (1) tira-se

$$\frac{P_{(d+1,\,a)}}{P_{(d,\,a)}} = \alpha^{\frac{1}{10^a}}.$$

relação esta independente de d.

Facilmente se vê que $P_{(d,\,a)}$ tende rapidamente para $\frac{1}{10}$, quando a aumenta.

2.º

Consideremos a função

$$y = \alpha^x, \quad \alpha > 1$$

no intervalo correspondente a (ω, ω'); será

$$P_{(d,\,a)}^{(\omega,\,\omega')} = \frac{\sum\limits_{n=\omega}^{\omega'} \left[\log_\alpha \frac{10\,n + d + 1}{10^a} - \log_\alpha \frac{10\,n + d}{10^a}\right]}{\log_\alpha \frac{10\,\omega' + 10}{10^a} - \log_\alpha \frac{10\,\omega}{10^a}}$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=\omega}^{\omega'} \log_\alpha \left[1 + \frac{1}{10\,n + d}\right]}{\log_\alpha \frac{\omega' + 1}{\omega}}$$

o que mostra que a probabilidade pedida é independente de a.

*

Facilmente se vê que

$$\lim_{\omega'=\infty} \mathrm{P}_{(d,\,a)}^{(\omega,\,\omega')} = \frac{1}{10}\,.$$

Para o provar, mostraremos primeiro que a sucessão cujo termo geral é

$$\mathrm{U}_n = \frac{\sum\limits_{n=\omega}^{n} \log_\alpha\left(1+\dfrac{1}{10\,n+d}\right)}{\sum\limits_{n=\omega}^{n} \log_\alpha\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$$

é crescente; em seguida que se mantêm inferior a 1.

a)

A sucessão U_n é crescende quando $d > 9$ (d pode ser um número qualquer, na expressão de U_n).

Com efeito, a função

$$f(n) = \frac{\log_\alpha\left[1+\dfrac{1}{10\,n+d}\right]}{\log_\alpha\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}$$

que tem por derivada

$$f'(n) = \frac{\frac{-10}{(10n+d)\,(10n+d+1)} \log_\alpha \left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n\,(n+1)} \log_\alpha \left(1+\frac{1}{10n+d}\right)}{\log \alpha \,.\, \log_\alpha^2 \left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

é crescente, pois $f'(n) > 0$. Com efeito, visto que

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

é uma função crescente, será

$$\left(1+\frac{1}{10\,n+d}\right)^{10\,n+d} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

e também, se $d > 9$

$$\left\{\left(1+\frac{1}{10\,n+a}\right)^{10\,n+d}\right\}^{10\,n+d+1} > \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^{10\,n+10};$$

tirando os logaritmos de base α a esta desigualdade, vê-se imediatamente que

$$f'(n) > 0.$$

Ora, U_n é um quebrado que tem por numerador a soma dos numeradores de

$$f(1),\ f(2),\ \ldots\ f(n)$$

e por denominador a soma dos denominadores e como $f(n)$ é crescente, U_n sê-lo-há tambem.

2.°

$$U_n < 1$$

qualquer que seja n.

Com efeito

$$\log_\alpha\left(1+\frac{1}{10\,n+d}\right)<\log_\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

logo

$$\Sigma\log_\alpha\left(1+\frac{1}{10\,n+d}\right)<\Sigma\log_\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

e por isso

$$U_n < 1.$$

Logo, U_n tende para um limite quando n tende para o infinito e $d \geqslant 9$.

*

Pela expressão de U_n se vê que

$$U_n(0) > U_n(d) > U_n(10)$$

se

$$0 \leqslant d < 10\,;$$

logo

$$U_n(d) - U_n(10) < U_n(0) - U_n(10) =$$

$$= \frac{\sum\limits_{n=\omega}^{n} \left[\log_\alpha\left(1+\frac{1}{10n}\right) - \log_\alpha\left(1+\frac{1}{10(n+1)}\right)\right]}{\log_\alpha(n+1) - \log_\alpha \omega} =$$

$$= \frac{\log_\alpha\left(1+\frac{1}{10\,\omega}\right) - \log_\alpha\left(1+\frac{1}{10(n+1)}\right)}{\log_\alpha(n+1) - \log_\alpha \omega} <$$

$$< \frac{\log_\alpha\left(1+\frac{1}{10\,\omega}\right)}{\log_\alpha(n+1)} < \delta$$

qualquer que seja $\delta > 0$, logo que n seja suficientemente grande. Logo, existe o

$$\lim_{n=\infty} U_n(d)$$

qualquer que seja d e esse limite não depende de d; mas como

$$\lim_{n=\infty} \sum_{d=0}^{9} U_n(d) = 1 = \sum_{d=0}^{9} \lim_{n=\infty} U_n(d) = 10 \,.\, \lim_{n=\infty} U_n(d)$$

segue-se que

$$\lim_{n=\infty} U_n(d) = \frac{1}{10}\,.$$

Facilmente se vê que U_n converge muito rapidamente para $\frac{1}{10}$.

Nota

O problema geral que acabamos de resolver, dá-nos a distribuìção dos algarismos numa tábua ideal que contivesse todos os valores duma função num intervalo (α, β). Numa tábua qualquer, em que os valores da variável independente estejam em progressão arithmética, intervalos iguais, contidos em (α, β), compreendem, aproximadamente, o mesmo número de valores de x escritos na tábua, com êrro relativo tanto menor quanto menor fôr a razão da progressão dos valores de x. De modo que a probabilidade de que um valor de x, tirado à sorte em (α, β), pertença a um intervalo parcial, será, aproximadamente, proporcional à amplitude do intervalo, tal qual como acontecia na tábua ideal.

Esta tábua ideal será como que o limite duma sucessão de tábuas, em que a razão da progressão dos valores de x fosse decrescendo até zero. Portanto, a fórmula geral (1) dará tanto mais exactamente a distribuìção dos algarismos numa tábua de $f(x)$, quanto mais pequena fôr a razão da progressão dos valores de x. Assim, numa tábua de logarithmos decimais, visto que a mantissa se não altera com a divisão de x por uma potência de 10 (inteira), segue-se que a fórmula

$$\frac{P_{(d+1,\,a)}}{P_{(d,\,a)}} = 10^{\frac{1}{10^a}}$$

deve ser muito mais aproximada no fim da tábua do que no princípio. E assim é, realmente. Numa tábua pode vêr-se que desde 1289 a 1319, e de 1319 a 1349 se encontram respectivamente os algarismos 1 e 2 na segunda casa decimal, o que dá

$$\frac{P_{(2,\,2)}}{P_{(1,\,2)}} = \frac{30}{30} = 1\,;$$

e desde 10232 a 10471, e dêste número a 10715 se encontram os mesmos algarismos na mesma casa decimal, o que dá

$$\frac{P_{(2,\,2)}}{P_{(1,\,2)}} = \frac{244}{239} = 1{,}0209\ldots$$

número êste muito mais próximo do número teórico

$$\sqrt[100]{10} = 1{,}0233$$

do que o primeiro.

3.º

É curioso determinar a relação

$$\frac{P_{d+1}}{P_d}$$

para as diferenças tabulares dos logarithmos. Estas diferenças podem considerar-se como valores da função

$$y = \log(1+x) - \log(x)$$

$$= \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

correspondentes a valores de x escritos em progressão arithmética. Ou, pondo

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{10\,\omega+d}{10^a},$$

$$\log\left(1+\frac{1}{x'}\right)=\frac{10\,\omega+d+1}{10^a},$$

$$\log\left(1+\frac{1}{x''}\right)=\frac{10\,\omega+d+2}{10^a},$$

será

$$\frac{P_{d+1}}{P_d}=\frac{x''-x'}{x'-x}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{10^{\frac{10\,\omega+d+2}{10^a}}-1}-\dfrac{1}{10^{\frac{10\,\omega+d+1}{10^a}}-1}}{\dfrac{1}{10^{\frac{10\,\omega+d+1}{10^a}}-1}-\dfrac{1}{10^{\frac{10\,\omega+d}{10^a}}-1}}$$

muito aproximadamente

$$=\frac{\dfrac{1}{\dfrac{10\,\omega+d+2}{10^a}\log 10}-\dfrac{1}{\dfrac{10\,\omega+d+1}{10^a}\log 10}}{\dfrac{1}{\dfrac{10\,\omega+d+1}{10^a}\log 10}-\dfrac{1}{\dfrac{10\,\omega+d}{10^a}\log 10}}$$

$$=\frac{(10\,\omega+d)\,(10\,\omega+d+1)}{(10\,\omega+d+1)\,(10\,\omega+d+2)}=\frac{10\,\omega+d}{10\,\omega+d+2};$$

logo

$$\frac{P_d}{P_{d+1}} = 1 + \frac{2}{10\,N + d} = 1 + \frac{2}{10^a\,D}, \tag{1}$$

sendo

$$D = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{10\,N + d}{10^a}.$$

Visto que $10^a\,D$ é a parte inteira do produto duma qualquer diferença tabular, tendo o algarismo d na casa decimal de ordem a, por 10^a, segue-se que: dada uma diferença tabular D, se pode obter imediatamente por meio de (1) a relação

$$\frac{P_d}{P_{d+1}}$$

sendo d o número dígito que D tem na casa decimal de ordem a. Assim, dada a diferença tabular 0,0000524, deduz-se, para $a = 5$,

$$\frac{P_5}{P_6} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}400.$$

Procurando nas tábuas vê-se qne a diferença tabular 0,0000500 tem por número máximo, correspondente o número 8694; a diferença tabular 0,0000600, tem por correspondente o número 7243, a diferença 0,0000700 tem por número máximo correspondente, o número 6208; teremos, pois, segundo as tábuas,

$$\frac{P_5}{P_6} = \frac{1451}{1035} = 1{,}401.$$

Observação

Para as casas inteiras, isto é, para $a = 0, -1, -2, \ldots$, a fórmula

$$\frac{P_{d+1}}{P_d} = 10^{\frac{1}{10^a}}$$

é exacta, devido a que os números inteiros são logarithmos de valores de x escritos nas tábuas.

Proposição II

Lei da possibilidade

Seja (A) uma região contendo a região (A′) e sejam (B) e (B′) imagens respectivamente de (A) e (A′). Consideremos em (A) o ponto livre M e a sua visinhança ΔS e em (B) o ponto imagem N com a visinhança $\Delta S'$, imagem de ΔS. Representando por $\Delta \varpi$ a possibilidade de ΔS, será ainda $\Delta \varpi$ (prop. I) a possibilidade de $\Delta S'$. Consideremos o

$$\lim_{\Delta S' = 0} \frac{\Delta \varpi}{\Delta S'},$$

êste limite sendo tomado de modo que a maior dimensão de $\Delta S'$ tenda para zero conjuntamente com $\Delta S'$. *A totalidade de pontos* N *para os quais exista êste limite, forma o campo de existência duma função das coordenadas do ponto* N, *função cujo valor em cada ponto é dado por êsse limite e a que chamaremos lei da possibilidade.*

Corolário

A possibilidade de (B′) será dada por

$$\varpi_{(B')} = \int_{(B')} \left[\lim_{\Delta S' = 0} \frac{\Delta \varpi}{\Delta S'} \right] d S'.$$

Conhecida a lei da possibilidade poderemos, pois, determinar a possibilidade de qualquer região (B′), independentemente da consideração da região (A′) de que a primeira é imagem.

Proposição III

Lei da probabilidade

De modo idêntico se define a lei da probabilidade como a função que tem em cada ponto N o valor dado pelo

$$\lim_{\Delta S' = 0} \frac{\Delta P}{\Delta S'}.$$

Proposição IV

Sendo (A) a região possível em relação à probabilidade ΔP e $\varpi(N)$ a lei da possibilidade de N, será

$$\lim_{\Delta S' = 0} \frac{\Delta P}{\Delta S'} = \lim_{\Delta S' = 0} \frac{\dfrac{\Delta \varpi}{\int_{(A)} \varpi(N)\, d\varpi}}{\Delta S'}$$

ou

$$\lim_{\Delta S'=0} \frac{\dfrac{\Delta \varpi}{\Delta S'}}{\int_{(A)} \varpi(N)\, d\varpi} = \frac{\varpi(N)}{\int_{(A)} \varpi(N)\, d\varpi}$$

o que mostra que para uma dada região possível, a lei da probabilidade é proporcional à lei da possibilidade.

Leis à priori e leis à posteriori

No que vai seguir-se, suporemos que o ponto cuja posição depende do acaso, varía numa região plana, para facilitar a exposição. As demonstrações ficarão, aliás, com toda a generalidade.

Lei à priori

Seja $M(x, y)$ um ponto variando numa região plana *(fig. 12)* e $m(x)$ a sua projecção sôbre o eixo dos XX'.

Chamaremos *lei de probabilidade à priori do ponto* $M(x, y)$, *à lei da probabilidade da sua projecção* $m(x)$.

Proposição V

Sendo $\varphi(x, y)$ *a lei da probabilidade de* $M(x, y)$ *na região* (A), será

$$a(x) = \int \varphi(x, y)\, dy$$

a lei da probabilidade à priori do mesmo ponto.

Com efeito, consideremos um filete de espessura ΔS, paralelo ao eixo do YY' e contendo os pontos de absissa x.

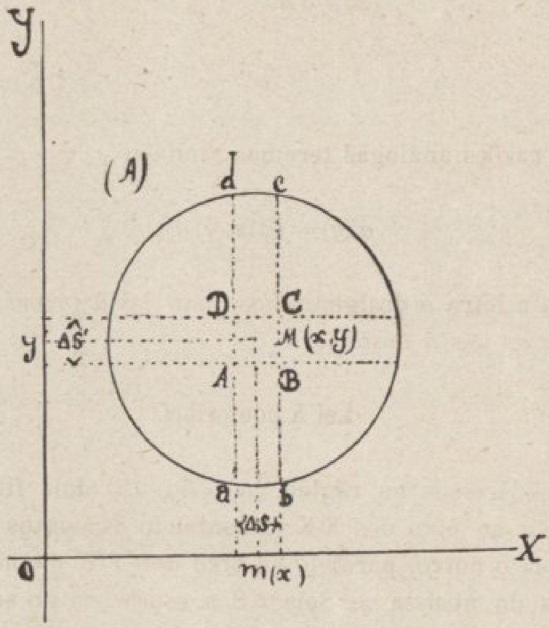


Figura 12

A probabilidade ΔP de que o ponto m caía na visinhança ΔS de x é dada pela probabilidade de que o ponto $M(x, y)$ cáia dentro da região $abcd$; logo,

$$\Delta P = \iint_{abcd} \varphi(x, y)\, dx\, dy = \Delta S \int_{y'_1}^{y'_2} \varphi(x_1, y)\, dy$$

sendo y'_1 e a y'_2 a menor e maior ordenada dos pontos de (A) de absissa x_1. Ora, segundo a definição de lei *à priori*,

$$a(x) = \lim_{\Delta S = 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(x, y)\, dy$$

c. d. d.

*

Por razões análogas teremos também

$$a(y) = \int \varphi(x, y)\, dx.$$

Com a letra a designaremos uma lei *à priori;* com a letra p as leis *à posteriori*.

Lei à posteriori

Consideremos na região (A) *(fig. 12)* dois filetes, um paralelo ao eixo dos XX' e contendo os pontos de ordenada y; o outro, paralelo ao eixo dos YY' e contendo os pontos da absissa x. Seja ΔS a espessura do segundo e $\Delta S'$ a do primeiro. A probabilidade da região ABCD em relação a *abcd* é (cap. II, prop. VII, observ.)

$$\Delta P = \frac{\iint_{ABCD} \varphi(x, y)\, dx\, dy}{\iint_{abcd} \varphi(x, y)\, dx\, dy} = \frac{\Delta S \,.\, \Delta S' \varphi(x', y')}{\Delta S \int_{y'_1}^{y'_2} \varphi(x'_1, y)\, dy} =$$

$$= \frac{\Delta S' \varphi(x', y')}{\int_{y'_1}^{y'_2} \varphi(x'_1, y)\, dy}$$

sendo x' e x'_1 funções de ΔS que tendem para x quando ΔS tende para zero. Ao

$$\lim_{\Delta S = 0} \Delta P = \frac{\Delta S' \varphi(x, y')}{\int_{y'_1}^{y'_2} \varphi(x, y)\, dy}$$

chamaremos probabilidade *à posteriori* de $\Delta S'$.

Pode dizer-se que é a probabilidade de que y caia no intervalo $\Delta S'$, caso x tenha tomado o valor particular x.

Chamaremos lei *à posteriori* de y ao

$$\lim_{\Delta S' = 0} \frac{\Delta P}{\Delta S'} = \frac{\varphi(x, y)}{\int \varphi(x, y)\, dy} = p(y). \qquad (1)$$

Proposição VI

De (1) e da prop. V tira-se

$$\varphi(x, y) = a(x) \cdot p(y) = a(y) \cdot p(x).$$

*

As prop. V e VI são análogas às proposições relativas à probabilidade total e à probabilidade composta.

Destas duas proposições fácilmente se deduz uma fórmula análoga à

Fórmula de Bayes,

o que justifica as designações de lei *à priori* e lei *à posteriori* das leis atraz definidas.

Com efeito, visto que (prop. VI)

$$\varphi(x, y) = a(x) p(y) = a(y) p(x)$$

e

$$a(y) = \int \varphi(x, y)\, dx = \int a(x) p(y)\, dx,$$

segue-se que

$$p(x) = \frac{\varphi(x, y)}{a(y)} = \frac{a(x) p(y)}{\int a(x) p(y)\, dx}$$

e, análogamente,

$$p(y) = \frac{a(y) p(x)}{\int a(y) p(x)\, dy},$$

fórmulas estas que nos dão as leis à *posteriori* duma das variáveis, logo que se conheça a sua lei à *priori*, a lei à *posteriori* da outra e o seu campo de variação.

*

Desta fórmula podem tirar-se outras a que pode chamar-se

Fórmulas inversas da de Bayes

Com efeito, de

$$p(x) = \frac{a(x) p(y)}{\int a(x) p(y)\, dx},$$

tira-se, tomando as derivadas parciais em ordem a x e atendendo a que

$$\int a(x) p(y)\, dx$$

não dependa de x,

$$\frac{\frac{\partial p(x)}{\partial x}}{p(x)} = \frac{a'(x)}{a(x)} + \frac{\frac{\partial p(y)}{\partial x}}{p(y)} ;$$

donde

$$\frac{a'(x)}{a(x)} = \frac{\frac{\partial p(x)}{\partial x}}{p(x)} - \frac{\frac{\partial p(y)}{\partial x}}{p(y)} ;$$

donde

$$a(x) = k(y) \frac{p(x)}{p(y)} ;$$

onde $k(y)$ é uma função arbitrária de y que se determina pela condição de

$$\int a(x)\, dx = k(y) \int \frac{p(x)}{p(y)}\, dx = 1 ;$$

donde,

$$k(y) = \frac{1}{\int \frac{p(x)}{p(y)}\, dx}$$

e

$$a(x) = \frac{\frac{p(x)}{p(y)}}{\int \frac{p(x)}{p(y)}\, dy}$$

e, análogamente,

$$a(y) = \frac{\frac{p(y)}{p(x)}}{\int \frac{p(y)}{p(x)}\, dy}$$

fórmulas estas análogas às já achadas na probabilidade discontínua.

*

As definições e demonstrações que acabamos de fazer são duma generalização imediata. O que se disse para um ponto variando numa região plana estende-se imediatamente a um ponto variando numa região qualquer. Do que acabamos de dizer, devemos excetuar a dedução das fórmulas inversas da fórmula de Bayes, dedução essa que não é suscetivel de ser estendida imediatamente ao caso de muitas variáveis. A dedução pode fazer-se, dum modo geral, muito fácilmente.

Com efeito, ainda que x e y representem complexos de variáveis, teremos sempre

$$a(x) \, . \, p(y) = a(y) p(x) \qquad (1)$$

sendo as funções $a(x)$ e $a(y)$ funções só dos complexos (x) e (y) respectivamente e $p(y)$ e $p(x)$ sendo funções dos dois complexos simultaneamente. De (1) tira-se

$$a(x) = a(y) \, . \, \frac{p(x)}{p(y)}$$

donde,

$$\int_{(x)} a(x) \, d(x) = a(y) \int_{(x)} \frac{p(x)}{p(y)} \, d(x) = 1 \, .$$

e portanto

$$a(x) = \frac{\dfrac{p(x)}{p(y)}}{\displaystyle\int_{(x)} \frac{p(x)}{p(y)}\, d(x),}$$

em todos os casos.

CAPÍTULO V

TEOREMAS DE JACOB BERNOULLI

E

LEI DOS DESVIOS

CAPITULO V

PRIMEIRA PARTE

Teoremas de Jacob Bernoulli

A uma tiragem, à sorte, numa classe finita de elementos ou a um lançamento feito, à sorte, numa região, chamaremos: um *caso*, um *acontecimento* ou um *fenómeno*, conforme está estabelecido pelo uso. Um fenómeno, caso ou acontecimento, dir-se-há *favorável* ou *contrário*, conforme o elemento obtido na tiragem ou lançamento pertencer à classe favorável ou não.

Posto isto, seja p a probabilidade do acontecimento favorável e q a do acontecimento contrário. Será, como é evidente,

$$p+q=1.$$

Se obrigarmos o acontecimento a produzir-se uma vez, dois casos poderão dar-se

$$p \quad \text{ou} \quad q$$

(representando os acontecimentos pelas suas probabilidades). Se obrigarmos o fenómeno a produzir-se duas vezes, quatro casos podem dar-se:

Arranjos de m objectos k a k com repetição $= m^k$

$$pp \quad \text{ou} \quad pq \quad \text{ou} \quad qp \quad \text{ou} \quad qq.$$

Se repetirmos o fenómeno três vezes, os casos possíveis seriam dados pelos arranjos com repetição dos dois objectos p e q, três a três, etc. Isto, supondo que a produção dum fenómeno não alterava a probabilidade do seguinte.

Daqui se conclue que:

Proposição I

A probabilidade de que, produzindo m *vezes sucessivas o fenómeno cujas modalidades favorável e contrária são* p *e* q, m — i *acontecimentos da probabilidade* p *e* i *de probabilidade* q *se produzam, segundo uma ordem préviamente fixada, é*

$$P = \cancel{q}\,p^{m-i} q^i, \quad = p^{m-i} \cdot q^i$$

como resulta imediatamente das proposições relativas á probabilidade composta.

Corolário

A probabilidade de que os fenómenos se sucedam segundo uma ordem préviamente fixada, tende para zero quando o número de experiências aumenta.

Com efeito, supondo, para fixar ideias, que $p < q$, será

$$P = p^{m-i} q^i < p^m;$$

e como $p < 1$, segue-se que p^m tende para zero quando m aumente indefinidamente.

*

Se a probabilidade duma sucessão de m acontecimentos não depende da ordem por que se sucedem os seus elementos componentes, depende contudo do número de casos que nela entram duma ou outra categoria (favorável ou contrária). De que modo essa variação se faz, é o que vamos tratar neste capítulo.

Para tornar mais claro o enunciado dessa questão suporemos que os fenómenos considerados, são tiragens de bolas brancas e pretas, feitas à sorte numa urna que lhes dê as probabilidades respectivas p e q. É evidente que esta identificação só se poderá fazer quando p e q forem racionais; mas isso não se opõe a que nos sirvamos dela, como duma linguagem figurada, nos outros casos.

Proposição II — Lei binomial -

Fazendo numa urna que contêm bolas brancas e pretas, m *tiragens, a probabilidade de que se obtenham* n *bolas brancas e* m — n *pretas é, sendo* p *e* q *as probabilidades respectivas,*

$$P_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} p^n q^{m-n}.$$

Com efeito, a probabilidade de qualquer sucessão de n

bolas brancas e $m - n$ pretas, é (prop. I)

$$p^n q^{m-n}.$$

Ora, o número de sucessões *distintas* que se podem obter com n bolas brancas e $m - n$ pretas é dado pelo número de permutações de m objectos dos quais $m - n$ e n são repetidos, isto é, por

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!}.$$

Logo

$$P_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} p^n q^{m-n},$$

c. d. d.

Corolário

A probabilidade de tirar m — n *bolas brancas e* n *pretas é dada pelo termo correspondente do desenvolvimento de*

$$(p+q)^m. = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} p^i q^{m-i}$$

Proposição III

Supondo m fixo, tem-se que:

1.º *A probabilidade* $P_{m,n}$ *cresce com* n *desde zero até ao maior número inteiro contido em*

$$p(m+1);$$

2.° *Diminue desde o menor inteiro* n *que contêm*

$$p(m+1)-1$$

até $n=m$;

3.° *Torna-se máxima para o inteiro compreendido entre*

$$p(m+1)-1 \quad \text{e} \quad p(m+1).$$

$p(m+1)-1 \qquad p(m+1) \qquad m$

$0 \qquad p(m+1)-2$

cresce Maximo decresce

Com efeito:

1.°

Se

$$n < p(m+1), \tag{1}$$

$0<x<1$

será dividindo por pn

$$\frac{1}{p} < \frac{m+1}{n} \quad : \quad \frac{p+q}{p}$$

$1+\frac{q}{p} \leq \frac{m+1}{n}$.

e

$$\frac{q}{p} < \frac{m+1}{n} - 1 = \frac{m-n+1}{n}$$

e (multiplicando por $\frac{p}{q}$

$$1 < \frac{m-n+1}{n} \cdot \frac{p}{q};$$

mas

$$\frac{m-n+1}{n}\,\frac{p}{q} = \frac{P_n}{P_{n-1}};$$

pois $\frac{P_{m,n}}{P_{m,n-1}} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!\,n!}\,p^n q^{m-n}}{\frac{m!}{(m-n+1)!\,(n-1)!}\,p^{n-1} q^{m-n+1}}$

$= \frac{m!}{(m-n)!\,n!}\,p^n q^{m-n} \div \text{———}$

$= \frac{m-n+1}{n} \times \frac{p}{q}$

logo

$$P_{n-1} < P_n,$$

c. d. d.

2.°

Se

$$n > p(m+1)-1 \tag{2}$$

será , dividindo por $p(n+1)$

$$\frac{1}{p} > \frac{m+1}{1+n}$$

$$\frac{p+q}{p} > \frac{m+1}{n+1}$$

e

$$\frac{n}{p(n+1)} \geq \frac{p(m+1)}{p(n+1)} - \frac{1}{p(n+1)}$$

$$1+\frac{q}{p} > \frac{m+1}{1+n}$$

e

$$\frac{n}{p(n+1)} + \frac{1}{p(n+1)} \geq \frac{m+1}{n+1}$$

$$\frac{q}{p} > \frac{m-n}{n+1}$$

e

$$\frac{n+1}{p(n+1)} \geq \frac{m+1}{n+1}$$

$$1 > \frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{p}{q} ;$$

mas

$$\frac{m-n}{n+1} \, \frac{p}{q} = \frac{P_{n+1}}{P_n} ;$$

logo

$$P_n > P_{n+1},$$

c. d. d.

3.º

Da primeira e segunda parte desta proposição se deduz que P_n será máximo quando n satisfizer a (1) e (2), isto é, quando fôr o inteiro da forma

$$p(m+1) - r, \qquad (0 < r < 1).$$

Caso $p(m+1)$ seja um número inteiro, haverá ambiguidade na determinação de n. A indeterminação levanta-se atendendo a que, neste caso, haverá o sinal de igualdade na primeira e segunda parte da proposição antecedente e por isso qualquer dos termos de ordem

$$p(m+1) \quad \text{ou} \quad p(m+1)-1$$

será máximo, por serem iguais.

Proposição IV

Consideremos todos os arranjos com repetição que se podem obter com dois objectos, tomados m a m.

Sejam os objectos uma bola branca e outra preta, por exemplo. Á totalidade de arranjos com o mesmo número de bolas brancas e pretas, chamaremos uma *combinação*. Posto isto, teremos que:

A probabilidade da combinação mais provável tende para zero quando o número das tiragens aumenta indefinidamente.

Com efeito, segundo a prop. III, a probabilidade da combinação mais provável será dada por

$$P = \frac{m!}{\underbrace{[p(m+1)-r]!}_{n}\ \underbrace{[q(m+1)-1+r]!}_{m-n}}\, p^{p(m+1)-r}\, q^{(m+1)-1+r}$$

visto que, representando por $(m+1)p-r \overset{n}{=}$ o número mais provável de bolas brancas, será

p = 1-q

$$m - \overbrace{(m+1)p}^{n} + r = (m+1)q + r - 1$$

m-mp-p+r = m(1-p)-p+r = mq-1+q+r =
=(m+1) q+r-1=

o número correspondente de bolas pretas.

Ora, pela formula de Stirling

$$m! = m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}\,(1 + \varepsilon_m),$$ Formula de Stirling

sendo ε_m uma função que tende para zero quando m tende para infinito. Podemos, pois, escrever

$$P = \frac{m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m}\,(1 + \varepsilon_m)}{(mp)^{mp} e^{-mp} \sqrt{2\pi mp}\,(1 + \varepsilon_{mp})\,(mq)^{mq} e^{-mq} \sqrt{2\pi mq}\,(1 + \varepsilon_{mq})} p^{mp} q^{mq}$$

expressão esta que se obtêm da antecedente de P, substituindo os factoriais pelas expressões equivalentes e desprezando r e $1 - r$, o que é ligítimo quando m crescer além de todo o limite. Efectuando as reduções em P, resulta, imediatamente

$$P = \frac{1 + \alpha_m}{\sqrt{2\pi mpq}}$$

sendo α_m uma função que tende para zero quando m tende para infinito. P tenderá, pois, para zero quando m aumente indefinidamente,

c. d. d.

Proposição V

(1.º Teorema de Jacob Bernoulli)

Seja p a probabilidade dum acontecimento favorável e q a do acontecimento contrário. Faça-se um determinado número de experiências e sejam (p) e (q) os números respectivos de acontecimentos, favoráveis e contrários, resultantes. *A razão* $\frac{(p)}{(q)}$ *poderá tomar valores vários; mas o mais provável dêsses valores é aquele que menos se afasta de* $\frac{p}{q}$ *e quanto mais* $\frac{(p)}{(q)}$ *se afasta dêste número, menos provável se torna.*

A probabilidade de $\frac{(p)}{(q)}$ a que se refere a proposição que acabamos de enunciar, é a da combinação de (p) acontecimentos favoráveis e de (q) contrários.

Posto isto, entremos na demonstração da proposição enunciada.

Como vimos já (prop. III, 3.° ponto) o número mais provável de casos favoráveis é dado pelo maior inteiro da forma

$$p(m+1)-r, \qquad (0<r<1);$$

o número correspondente de acontecimentos contrários, será dado por

$$q(m+1)-1+r;$$

a razão dêstes dois números é

$$\frac{(p)}{(q)}=\frac{p(m+1)-r}{q(m+1)-1+r}=\frac{p}{q}+\frac{(1-r)p-qr}{(m+1)q-1+r}\cdot\frac{1}{q};$$

Supondo que o número de casos favoráveis cresce, a razão de probabilidade imediatamente inferior (prop. III, 2.ª parte) é

$$\frac{(p)}{(q)}=\frac{p(m+1)-r+1}{q(m+1)-1+r-1}=\frac{p}{q}+\frac{p(1-r)-qr+1}{q(m+1)-1+r-1};$$

a imediata a esta, é

$$\frac{(p)}{(q)}=\frac{p(m+1)-r+2}{q(m+1)-1+r-2}=\frac{p}{q}+\frac{q(1-r)-qr+2}{q(m+1)-1+r-2};$$

sendo o número mais provável de acontecimentos favoráveis excedido de α unidades, a razão em questão será,

$$\frac{(p)}{(q)}=\frac{p(m+1)-r+\alpha}{q(m+1)-1+r-\alpha}=\frac{p}{q}+\frac{p(1-r)-qr+\alpha}{q(m+1)-1+r-\alpha}.$$

Como estas igualdades mostram, a diferença

$$\frac{(p)}{(q)}-\frac{p}{q}$$

vai crescendo com α; logo (prop. III, 2.ª parte), a sua probabilidade vai diminuindo,

c. d. d.

*

Se o número de acontecimentos favoráveis diminuisse, consideravamos a razão $\frac{(q)}{(p)}$ e ficavamos reduzidos ao caso antecedente.

Proposição VI

(2.º Teorema de Bernoulli)

Á medida que se multiplicam as experiências, a probabilidade de cada valor de $\frac{(p)}{(q)}$ *vai diminuindo, mas tanto mais rapidamente quanto maior fôr*

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{(p)}{(q)} \right| .$$

Chamando afastamento ao número α que entra na proposição antecedente, a probabilidade de $\frac{(p)}{(q)}$ será máxima quando o afastamento fôr nulo (prop. ant.) e como neste caso ela tende para zero quando m aumenta indefinidamente (prop. IV), por maioria de razão ela tenderá também para zero nos outros casos. Além disso, tem-se

$$\frac{P_{\alpha-1}}{P_\alpha} = \frac{q(m+1)+r+\alpha}{p(m+1)-r-\alpha+1} \cdot \frac{p}{q} = \frac{A+p\alpha}{B-q\alpha},$$

relação esta que mostra que, quanto maior fôr α, maior é a razão

$$\frac{P_{\alpha-1}}{P_\alpha};$$

ou, o que é o mesmo, quanto maior fôr

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{(p)}{(q)} \right|,$$

visto que o que se diz do afastamento relativo a p, se diz igualmente do afastamento relativo a q.

Proposição VII

(Lema de Vallée-Poussin)

Designemos por T_i *a probabilidade duma combinação que tem* i *casos favoráveis e* T_n *a combinação mais provável.*

Pondo

$$S = T_{n-\alpha} + T_{n-\alpha+1} + \dots + T_n + \dots + T_{n+\alpha},$$

teremos,

$$1 - S < \frac{m}{\left(1 + \frac{\alpha}{(m+1)pq}\right)^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Com efeito, tem-se

$$T_{n+1} = \frac{m-n}{n+1}\,\frac{p}{q},$$

onde

$$n = (m+1)p - r$$

e

$$n+1 = (m+1)p - r + 1$$

e

$$m - n = (m+1)q - 1 + r;$$

e, pondo

$$1-r=\varepsilon,\ (0<\varepsilon<1),$$

virá

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{(m+1)q-\varepsilon}{(m+1)p+\varepsilon}\cdot\frac{p}{q}=\frac{1-\dfrac{\varepsilon}{q(m+1)}}{1+\dfrac{\varepsilon}{p(m+1)}}.$$

Ora,

$$\frac{1-\dfrac{\varepsilon}{q(m+1)}}{1+\dfrac{\varepsilon}{p(m+1)}}<\frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon}{pq(m+1)}}$$

qualquer que seja $\varepsilon>0$, como fácilmente se verifica; logo

$$\frac{T_{n+1}}{T_n}<\frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon}{pq(m+1)}}$$

Do mesmo modo se obteem as desigualdades seguintes, visto ε poder ser qualquer número positivo

$$\frac{T_{n+2}}{T_{n+1}}=\frac{m-n-1}{n+1+1}\ \frac{p}{q}=\frac{(m+1)q-\varepsilon-1}{(m+1)p+2+1}\ \frac{p}{q}$$

$$=\frac{(m+1)q-(1+\varepsilon)}{(m+1)q+(1+\varepsilon)}\cdot\frac{p}{q}$$

$$<\frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon+1}{pq(m+1)}};$$

dum modo geral

$$\frac{T_{n+\alpha+1}}{T_{n+\alpha}} < \frac{1}{1+\frac{\varepsilon+\alpha}{pq(m+1)}}.$$

Multiplicando membro a membro estas desigualdades, vem

$$\frac{T_{n+\alpha+1}}{T_n} < \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{pq(m+1)}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\varepsilon+1}{pq(m+1)}} \cdots \frac{1}{1+\frac{\varepsilon+\alpha}{pq(m+1)}}$$

$$< \frac{1}{1+\frac{1}{pq(m+1)}} \cdots \frac{1}{1+\frac{\alpha}{pq(m+1)}}$$

$$= \prod_{x=1}^{\alpha} \frac{1}{1+\frac{x}{pq(m+1)}};$$

invertendo a ordem a todos os factores dêste producto, vem

$$\frac{T_{n+\alpha+1}}{T_n} < \prod_{x=1}^{\alpha} \frac{1}{1+\frac{\alpha+1-x}{pq(m+1)}};$$

multiplicando membro a membro estas duas desigualdades vem

$$\left(\frac{T_{n+\alpha+1}}{T_n}\right)^2 < \prod_{x=1}^{\alpha} \left[\frac{1}{1+\frac{x}{pq(m+1)}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\alpha+1-x}{pq(m+1)}}\right];$$