UNIVERSIDADE DE COIMBRA

REVISTA

DA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

VOL. IV — N.º 2

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1934

Reformas de ensino universitário

O ilustre professor da Faculdade de Ciências de Coimbra, Doutor H. Teixeira Bastos, cuja retirada do serviço os seus colegas profundamente lamentam, por perderem um colaborador de espírito sempre novo e vivamente interessado pelos problemas do ensino universitário, terminou o relatório sôbre os serviços da sua Faculdade, de 1911 a 1913, pela forma que segue:

«A principal base de tôda a reforma séria de estudos superiores em Portugal será criar um forte núcleo de professores, educados nos grandes meios científicos, e verdadeiramente apaixonados pela sua profissão e pela cultura desinteressada da ciência».

«A criação de Bolsas de aperfeiçoamento no estranjeiro (Decreto de 22 de Março de 1911) será um grande passo nesse sentido, se forem convenientemente dotadas pelo Estado e merecerem a protecção dos homens ricos do nosso país. Não lhes regateie o Parlamento largos fundos; será uma despesa abençoada, porque dela dependerá em grande parte a regeneração futura do país. Mas, emquanto as novas gerações se não educam, continuemos a enviar ao Estranjeiro os nossas professores em viagens demoradas de estudo; e, agora que se encontra mais desafogada a situação do Tesouro, peçamos ao Govêrno subsídios extraordinários que nos permitam contratar professores e naturalistas, que venham com o seu ensino e o seu entusiasmo comunicativo animar os nossos laboratórios e insuflar vida ao nosso meio científico».

«É esta a grande reforma; tudo mais são porventura... iriadas bolas de sabão».

Passados vinte anos, por não se terem aplicado os remédios indicados senão em doses mínimas, doses quási sem efeito, os males de que enferma o ensino superior em Portugal continuam com acuidade. Mas não foi só a aplicação deficiente daqueles remédios a causa da persistência do nosso atraso: outros aspectos do problema merecem estudo, em torno *da principal base*, considerada pelo sr. Doutor Teixeira Bastos. Resolvendo-os, consolidaremos essa base e evitaremos que o edifício levantado em pouco tempo caia em ruínas.

Criado o forte núcleo de verdadeiros professores, apaixonados pela sua profissão, será indispensável, para que se mantenha — *em primeiro lugar*, dar-lhes meios de vida relativamente desafogados e de harmonia com a sua função social; *em segundo lugar*, não regatear as dotações orçamentais dos laboratórios, bibliotecas e museus.

Julgo mesmo que o estabelecimento destas condições auxiliares domina imperativamente a organização dos diversos núcleos de professores de ensino superior. Devemos acrescentar, pelo que respeita a certas Faculdades e Escolas Técnicas, ser imprescindível, *em terceiro lugar*, que aos professores e aos naturalistas não falte o pessoal auxiliar em número e condições de trabalho verdadeiramente eficientes.

As Universidades criam os candidatos aos mais altos graus universitários, dentro de si, e enviando os melhores estudantes a centros notáveis do Estranjeiro, na aplicação liberal de bolsas de estudo. De entre êles irão recrutar assistentes, professores auxiliares, demonstradores, naturalistas. Conviria, para mais alargar as condições de escolha de professores auxiliares, admitir aos respectivos concursos diplomados de escolas superiores congéneros, cujo *curriculum vitae* lhes conferisse direito a isso.

Destas classes sairão naturalmente concorrentes aos lugares de professores catedráticos.

Também para o provimento dêstes últimos lugares poderão convidar, dentro do país, homens de ciência de firmado valor. E ainda devem ter possibilidades de contratar professores estranjeiros de nome consagrado.

São as formas consideradas na lei para o provimento dos lugares de professores catedráticos.

Por falta de meios, nunca, em rigor, poderam as Faculdades aplicar a última. A dotação orçamental de um lugar de catedrático não pode oferecer-se, como remuneração, a um professor de Universidade estranjeira, convidado a vir ensinar em Portugal. Fizeram-se, sem grande sucesso, contratos de estranjeiros, com informações universitárias boas, mas ainda no início da sua carreira científica.

Algumas Faculdades universitárias têm tido a fortuna de encontrar entre nós homens notáveis pela sua inteligência e saber e que se têm prestado a vir honrar as cátedras universitárias. A situação para que se convidam não difere da que se oferece a quem acaba com êxito as provas de um concurso. Essa situação é má. Mas é pouco melhor a do professor antigo, no uso de tôdas as diuturnidades. O que os catedráticos vencem, sem acumulação de regências, é, na generalidade dos casos, insuficiente para que vivam de harmonia com a sua categoria. Sem fortuna própria e com família, sugeitam-na a uma vida de privações.

As conseqüências desta inferioridade são bem conhecidas.

Os professores acumulam regências teóricas e de trabalhos práticos, elevando exageradamente o número de horas do seu trabalho *literalmente docente.* Na preparação dêsse trabalho esgotam tôda a possível actividade, sendo insignificante ou nula a sua produção científica fora do limitado campo do ensino.

Alguns professores recorrem simultâneamente a outra forma de elevar um pouco os vencimentos: voltam-se para a Junta de Educação Nacional e, como bolseiros dela, executam trabalhos, que, numa condição desafogada, normal, dos professores de ensino superior, constituiriam a parte principal da sua actividade científica.

Nas universidades os professores ensinam e investigam: transmitem conhecimentos, contribuem para os progressos da ciência que professam e educam investigadores. São funções conjugadas da actividade universitária. Precisam de tempo para exercer umas e outras, e devem ser remunerados pelo Estado por forma que se possa exigir que realmente as exerçam. São funções tão absorventes que excluem *absolutamente acumulações* com outras.

E, assim, o número de horas de trabalho docente não deveria passar de *seis horas por semana,* uma hora por dia. *Mas uma hora cada dia.*

Os laboratórios, os institutos de investigação, os simples *seminários,* exigem a *presença* dos professores. Os colaboradores, os alunos, precisam de *assistência,* com assiduïdade.

O professor catedrático regeria *a sua cadeira,* associando-lhe, um curso especial, dentro do quadro das licenciaturas ou ainda aulas práticas: o número máximo e também o mínino de horas dêste trabalho docente deveria *fixar-se em seis por semana.*

Entregando-se exclusivamente às suas funções universitárias o vencimento dos professores catedráticos, seria:

Nos primeiros dez anos............	4.000$00
Dos dez aos vinte anos............	4.500$00
Acima de vinte anos..............	5.000$00

Para professores que atingissem o limite de idade de 70 anos fixar-se-ia uma gratificação especial, quando continuassem a prestar serviços à sua Faculdade na regência de cursos da sua especialidade ou em trabalhos de museus ou laboratórios.

Há falta de professores, impondo-se uma revisão dos quadros dos professores catedráticos, cujo número depende dos ensinos fundamentais de cada Faculdade.

Aos professores auxiliares compete a regência de cursos especiais e cursos práticos e os seus vencimentos, com seis horas de serviço por semana, seriam de 1.800$00, por mês.

Aos assistentes pertence acompanhar os trabalhos dos professores, auxiliar os trabalhos práticos dos alunos, e os respectivos vencimentos, pelas seis horas semanais de trabalho docente, continuariam a ser de 1.000$00, por mês.

Os lugares de assistentes não devem representar duplicação dos de *demonstradores* e de *chefes de trabalhos práticos,* absolutamente indispensáveis nas Faculdades de Medicina e de Ciências. E estes últimos lugares, *fixos* e não *transitórios,* como os de assistentes, deveriam ser equiparados aos de observadores chefes, dos observatórios.

Outro grupo de professores devia admitir-se: como contratados, ou dentro de uma categoria especial de professores efectivos, prestariam serviço nas Faculdades os antigos professores que delas se afastassem para outros cargos mais rendosos e absorventes duma boa parte da sua actividade.

O nosso meio científico é tão pobre que não podemos abandonar o auxílio ao *ensino* de tantos professores distintos que preferem ou têm necessidade de, fora do campo universitário, prestar serviços ao Estado ou a instituïções particulares.

E a questão do «*full time*» vista por tantos com antipatia, mas, infelizmente, digna de ser discutida. Não haverá necessidade de considerar uma classe de professores — *em parte professores,* a que ocupações extra-universitárias apenas permitam um serviço atenuado de regência? Virão à Universidade fazer duas, três lições magistrais por semana, exercerão *apenas* essa função docente, aplicando o resto do seu tempo ao exercício de lugares mais rendosos.

A remuneração dêstes professores seria diferente e talvez devesse ter a forma de gratificação. *Seria mesmo uma questão que aos interessados competiria resolver.*

Um clínico, um advogado podem ter a sua actividade extra-universitária como expansão dos seus trabalhos dentro das respectivas Faculdades, mas não estará nas mesmas condições um governador de Banco ou administrador de companhia.

Ainda estamos na situação de atraso apontado pelo sr. Doutor Teixeira Bastos. Carecemos de contratar *professores de fora,* que venham criar ou dar novo impulso aos trabalhos universitários, formando escola, em torno de si.

Justamente «agora que se encontra mais desafogada a situação do Tesouro, peçamos ao Govêrno subsídios extraordinários que nos permitam contratar professores e naturalistas...».

Sempre se tem reclamado contra a insuficiência de dotações orçamentais para os laboratórios, institutos, bibliotecas e museus. São outras e muito importantes condições de actividade universitária cuja melhoria também é permitida pelas desafogadas condições do Tesouro.

Se, depois, a produção científica das universidades não fizer rápidos progressos... só teremos que desistir de ter ensino universitário em Portugal.

Em poucas dezenas de anos se formou e alcançou a situação explendida, que uma pujante produção científica demonstra, a Universidade japoneza. Não podemos esperar tanto, mas temos direito a esperar muito, da aplicação entre nós dos mesmos métodos de reorganização universitária.

A. Ferraz de Carvalho.

Notas sôbre algumas espécies de Heterópteros novas para a fauna de Portugal

Os estudos que temos realizado sôbre os Heterópteros de Portugal, mostram que, na realidade, a nossa fauna entomológica não apresenta, neste caso pelo menos, o interêsse que se presumia.

Predominam as formas do sul e do centro da Europa, por vezes também as de regiões do Norte e, de um modo geral, espécies já conhecidas da sub-região mediterrânea. Tipos que possam considerar-se particulares à fauna lusitânica, se existem, são raríssimos.

Entre as espécies da série *Anonychia* ainda deficientemente estudadas no nosso país, pareceu-nos que poderiam existir mais fàcilmente algumas formas desconhecidas, mas, o exame de numerosos exemplares representando quási tôdas as que foram mencionadas no catálogo publicado pelo Prof. Paulino de Oliveira e outras ainda, revelou-nos que esta divisão era constituída também por uma fauna comum às regiões da Europa já estudadas e bem conhecidas.

Receando ainda que as nossas classificações estivessem pouco actualizadas, pois carecemos quási que em absoluto de obras recentes sôbre a especialidade e que pudessem ser freqüentes as inexactidões, enviámos grande parte do nosso material de estudo ao notável hemipterólogo Dr. K. Schmidt que amàvelmente se ofereceu para proceder à dificultosa tarefa do seu estudo meticuloso. Assim conseguimos obter uma exactidão perfeita na identificação das espécies a que nos vamos referir, novas para a fauna lusitânica, mas já conhecidas de outras regiões da Europa ou do norte de África.

Apraz-nos reiterar neste lugar os nossos agradecimentos ao Dr. K. Schmidt, pela sua valiosíssima colaboração, não só no estudo das espécies a que nos vamos referir, como de muitas outras que, por terem sido já notadas na fauna de Portugal, não registamos aqui.

Às espécies da série *Anonychia (Cimicoideae* e *Capsiformes),* juntamos ainda algumas da série *Hydrobiatica* novas igualmente para Portugal.

O interesse que para estes estudos apresenta o conhecimento da distribuïção geográfica das diversas formas, leva-nos a referirmo-nos também a essa particularidade considerando que as nossas pesquisas, alteraram nalguns casos, os limites das zonas que eram atribuídas para algumas das espécies a mencionar.

Fam. ANTHOCORIDAE

Anthocoris Minki Dhrn.

Encontrámos esta espécie, própria do centro e do sul da Europa, citada também da Algéria, nas margens da Lagoa de Mira, em Agôsto de 1929. Do mesmo género tinha sido mencionada na fauna de Portugal a espécie *nemoralis* (F.), com a variedade *austriacus* (F.), própria da Europa, Norte de África, Síria e Ásia Menor e a *gallarum-ulmi* (De G.), da Europa também, Egipto e região do Caucaso.

Na sua configuração, a espécie *Minki* aproxima-se bastante da *nemoralis,* sendo porém um pouco mais pequena ($3{,}0^{mm}$), a cabeça, antenas, pronótum e escutelum, prêto brilhante, os hemélitros amarelados, sombreados na extremidade, *cuneus* em geral prêto e as membranas com pequenas manchas escuras. Os fémures anteriores são pretos com a extremidade e face anterior amarela, os intermédios e posterior unicolores, pretos; tíbias amarelas com a região superior preta.

Stichel e outros autores consideram esta espécie como própria dos freixos. Nas margens da Lagoa de Mira encontrámo-la nos vimieiros onde não é freqüente.

Xylocoris ater Duf.

Espécie da Europa, Síria e regiões Neárticas.

Um exemplar coligido no parque das Pedras Salgadas em Julho de 1927.

O género *Xylocoris* não se encontrava representado ainda na fauna lusitânica. O nosso exemplar mede apenas 1,6mm mas a espécie pode atingir 2,3mm. A forma característica, paralela, sub-plana e côr uniforme, prêto brilhante ou ferrugíneo escuro, são particularidades que distinguem bem esta forma de qualquer outra que represente os Anthocorideos na fauna de Portugal.

Parece tratar-se de uma espécie rara ou pouco freqüente.

Fam. CAPSIDAE

Miridius pallidus Horv.

Recorda a forma *quadrivirgatus* (Costa), sendo porém a cabeça aproximadamente tão comprida como larga, côr lívida, amarelada; os traços escuros longitudinais sôbre a fronte e pronótum, indistintos ou apagados, nulos sôbre o escutelum; o tegumento aparentemente liso.

Um exemplar de Soure. Julho de 1922. Espécie do sul da Europa e Algéria. Rara ou pouco freqüente em Portugal.

Phytocoris confusus Reut.

Obtivemos um exemplar desta interessante espécie quando em 1928 visitámos em missão de estudo a Serra do Gerez. Oshanin considera-a como própria da Áustria e da Hungria.

No exemplar a que nos referimos, a região anterior do pronótum e a região frontal, são levemente amareladas com pequenas pontuações auranciacas e o escutelum claro e unicolor. Parte posterior do pronótum e hemélitros irregularmente manchados de prêto. 1.º artículo das antenas e fémures, igualmente manchados. O colorido, em particular do pronótum e dos hemélitros, oferece por vezes modalidades importantes.

Raro ou pouco freqüente em Portugal

Phytocoris exoletus Costa.

Espécie do Sul da Europa e da Algéria. Um exemplar coligido na Serra do Marão em Julho de 1928 apresentando côr uniformemente ferrugínea, os anéis escuros nas tíbias anteriores, pouco aparentes e indistintos nas tíbias intermédias e posteriores.

Raro em Portugal.

O Dr. SCHMIDT, a quem devemos a classificação desta espécie, faz notar que as patas posteriores não oferecem os caracteres próprios do tipo. Na região articular, fémure-tibial, existem duas zebruras de côr sépia escura e na tíbia, próximo da articulação, duas pequenas manchas superiores.

Dêste interessante género, representado na fauna paleártica por numerosas espécies, foram notadas já em Portugal, as seis seguintes: *Abeillei* PUTON, *tiliae* (F.), *confusus* REUT., *femoralis* FIEB., *varipes* BOH., e *exoletus* COSTA. É de presumir que muitas outras existam na nossa fauna.

Lygus apicalis FIEB.

Esta espécie encontra-se muito disseminada por tôda a sub-região mediterrânea, etiópica e sul da China. É talvez freqüente em Portugal mas por emquanto possuímos apenas o exemplar a que nos referimos, coligido em Lagos em setembro de 1925. A côr, muito alterada, mostra ainda ter sido verde claro, as antenas e as patas amarelas e as membranas esfumadas.

Lygus Kalmi (L.).

Espécie própria da região paleártica, caracterizada justamente pelo grande número de modalidades que pode apresentar o seu colorido. Entre os nossos exemplares encontra-se a forma em que o pronótum, amarelo, é interceptado anterior e posteriormente, por duas estreitas faixas pretas e uma outra em que as faixas escuras desta região, são largas e longitudinais.

Soure. Julho de 1922! Jugueiros. Julho de 1927. Eng. PIMENTEL.

Do género *Lygus*, largamente representado também na fauna paleártica, têm sido notadas em Portugal as espécies: *pabulinus* (L.), *apicalis* FIEB., *pratensis* (L.), *rubricatus* (FALL.), *campestris* (L.), *Kalmi* (L.) e *rubicundus* (FALL.). De entre estas espécies, apenas a *pratensis* se pode considerar comum.

Poeciloscytus vulneratus (PNZ.).

Bastante freqüente na Mata de Leiria sôbre a urze branca (*Erica lusitânica*). Distingue-se fàcilmente pela côr amarela, mais ou menos sombreada de escuro, particularmente no pronótum e pela presença de dois pontos ou pequenas manchas vermelhas próximo do vértice dos hemélitros. Esta espécie encontra-se também nos pinhais de Lavos e naturalmente em várias outras regiões do país.

Forma própria da Europa e Ásia Menor.

Paulino de Oliveira tinha registado já dêste género a espécie *cognatus* Fieb. muito freqüente e disseminada por tôda a região paleártica.

Trigonotylus pulchellus (Hhn.).

Do género *Trigonotylus,* pouco numeroso, encontrava-se registada na fauna lusitânica a espécie *ruficornis* Geoffr., muito disseminada ainda por tôda ou quási tôda a região paleártica. A *pulchellus* é do centro e do sul da Europa, Egipto e Turquestão. Difere bastante da *ruficornis* pelas dimensões inferiores, não excedendo 5,0^{mm} o exemplar a que nos referimos, pela configuração do pronótum e côr.

Soure. Julho de 1922. Pouco freqüente.

Systellonotus Championiu Reut?

Devemos o único exemplar que possuímos desta interessante espécie a Correia de Barros que o obteve em Vila Real de Traz-os-Montes.

O Dr. Schmidt, que o estudou a nosso pedido, mantém dúvidas sôbre a sua classificação definitiva. Possuíamos um exemplar da espécie *triguttatus* (L.), de França mas desconhecemos tôdas as outras espécies que têm sido descritas e que pela sua distribuïção geográfica poderão aproximar-se possìvelmente da nossa fauna.

O exemplar de Vila Real representa um tipo particular pela sua forma estreita e alongada, subparalela, côr ferrugínea ou sépia claro, cabeça esferóide com os olhos muito volumosos, o pronótum curto e trapezoidal, convexo; escutelum medíocre e igualmente convexo. Sôbre os hemélitros, de côr mais clara, notam-se duas manchas transversais brancas, dirigindo-se das margens, aproximadamente, sôbre o vértice do *clavus;* duas outras, mais largas, separam a cória do *cuneus* que é prêto.

Membranas pretas; patas e antenas ferrugíneas; as tíbias e os últimos artículos das antenas, mais escuros. Compr. 6,0mm.

Península Ibérica.

Orthotylus flavinervis (Kbm.).

Alguns exemplares coligidos em Afife, Julho de 1928. A côr, certamente alterada, é amarela e não verde como é dado à espécie. O tipo, segundo Saunders, é de facto verde, com a cabeça e a base do escutelum amarelas.

Espécie do norte e centro da Europa. Pouco freqüente em Portugal.

Orthotylus nassatus (F.).

Um exemplar da mesma região da espécie precedente e igualmente descorado para amarelo claro em lugar de verde. Distingue-se contudo, no 1.° artículo das antenas, o traço prêto caracterìstico. Compr. 4,0mm.

Da Europa e Algéria. Raro ou pouco freqüente em Portugal.

O exemplar da colecção de Hemípteros paleárticos do Museu, a que nos referimos noutro lugar, parece-nos pertencer à espécie *flavinervis* (Kbm.) e não, como havíamos indicado, a esta outra.

Orthotylus rubidus (Puton).

Todos os exemplares desta espécie que obtivemos em Julho de 1925 na Mata de Leiria, são do tipo verde (var. *moncreaffi* (Dgl Sc.). A forma vermelha não foi ainda encontrada em Portugal.

Como sucede nas espécies precedentes, a côr própria encontra-se alterada.

Espécie do centro e do sul da Europa, Cáucaso e Algéria.

Orthotylus ericetorum (Fall.).

Na Mata de Leiria onde as espécies do género *Erica* são muito abundantes, encontrámos também em Julho de 1925 esta outra forma que não havia ainda sido mencionada na fauna de

Portugal. Todos os exemplares adquiriram depois de secos, a côr amarela.

Trata se de uma espécie da Europa, Sibéria e norte de África talvez freqüente em Portugal.

Do género *Orthotylus* tinham sido apenas notados na nossa fauna as espécies *Paulinoi* Reut., *flavosparsus* (C. Schlb.) e *virescens* (Dgl. Sc.).

Hypsitylus bicolor (Dgl. Sc.).

Era já conhecida na fauna de Portugal a espécie *Hypsitylus prasinus* Fieb. O exemplar representando esta outra, foi coligido nos campos de Coimbra em dezembro de 1923. O pronótum, escutelum e *clavus*, são pretos mas sôbre a fronte, a côr é idêntica à da cória, primitivamente verde oliváceo.

Espécie considerada como própria da Inglaterra, França e Dinamarca.

Brachynotocoris puncticornis Reut.

Espécie única do género e considerada como própria da Península Ibérica, sul da França, Síria e Crimeia.

Possuímos apenas dois exemplares da Herdade da Mitra, próximo de Évora, coligidos em agôsto de 1923 por J. do Nascimento e apresentando côr uniformemente verde amarelado, claro.

Raro ou pouco freqüente em Portugal.

Orthocephalus coracinus Puton.

Ao género *Orthocephalus*, que se encontrava representado na fauna de Portugal, apenas pela espécie *saltator* (Hhn.), podemos acrescentar esta outra forma e a seguinte, *Orthocephalus tenuicornis* Muls.

Os exemplares de *Orthocephalus coracinus* foram coligidos nas margens do rio Jamor, próximo da Cruz Quebrada. Trata-se de uma espécie da sub-região mediterrânea, naturalmente, freqüente em Portugal.

Orthocephalus tenuicornis (Muls.).

Apenas obtivemos exemplares de Aldeia Nova de S. Bento coligidos por Gomes Lopes em maio de 1923.

Esta espécie distingue-se fàcilmente da precedente pela sua configuração particular e côr ferrugínea das tíbias anteriores e intermédias e da base dos 2.° e 3.° artículos das antenas. *Orthocephalus coracinus* é uniformemente prêto.

Da sub-região mediterrânea e Sudueste da Russia Europeia.

Onychumenus decolor (Fall.).

Espécie única do género e própria da fauna da Europa, Algéria e regiões neárticas (Oshanin).

Possuímos apenas um exemplar coligido na Serra do Gerez em Julho de 1928.

Parece tratar-se de uma forma pouco comum em Portugal.

Tinicephalus flavopilosus Reut.

Muito freqüente na Mata de Leiria. Exemplares coligidos em Julho de 1925; outros procedentes de Soure, Julho de 1922.

Particularmente nos exemplares da Mata de Leiria, notam-se modalidades interessantes de colorido, variando do amarelo ferrugíneo ao amarelo claro ou branco amarelado. As manchas pretas das cicatrizes, da fronte e base do pronótum, acompanham em intensidade o excesso ou carência de pigmento escuro do tegumento.

Espécie considerada como própria do sul da França, Córsega e Algéria.

Dêste género tinha sido notada em Portugal apenas a espécie *discrepans* Fieb. própria da Península Ibérica, sul da França, Córsega e Itália.

Amblytylus affinis Fieb.

Recorda, de um modo geral, a forma precedente diferindo porém consideràvelmente nos seus caracteres genéricos, forma mais larga e ovóide, côr amarelo claro, o tegumento densamente revestido de pêlos pretos e as manchas da base do escutelum, aurancíacas.

Exemplares da Mata das Virtudes (Azambuja), onde a espécie parece ser pouco freqüente. Abril de 1930, Gomes Lopes.

OSHANIN indica para a distribuïção geográfica desta espécie, o centro e sul da Europa e Algéria.

O género não se encontrava representado na fauna de Portugal.

Macrotylus atricapillus (SCOTT.).

Segundo o Dr. SCHMIDT, o exemplar a que nos referimos representa uma variedade desconhecida. A côr é uniformemente verde claro, as membranas brancas com manchas escuras ocupando a parte inferior da célula e uma outra transversal sinuosa, aproximadamente a meio desta região das asas.

Espécie da Síria e Sul da Europa.

Duas outras formas, a *nigricornis* FIEB. e *lutescens* FIEB. tinham sido já mencionados em Portugal.

Consideramos por emquanto como raro ou pouco freqüente o tipo a que nos referimos.

Psallus callunae REUT.

Desta espécie pessuímos apenas alguns exemplares em mau estado de conservação, coligidos em Évora em setembro de 1923, outros de Serpa e de Aldeia Nova de S. Bento, julho e setembro.

Nos exemplares estudados, observam-se contudo modalidades interessantes de colorido, alterando particularmente a mancha vermelha da extremidade da cória, mais ou menos intensa.

OSHANIN registava esta espécie como própria do sul da França.

O género *Psallus*, muito numeroso, encontrava-se já representado na fauna de Portugal, pelas espécies *ancorifer* FIEB., *ambiguus* (FALL.), *obscurellus* (FALL.), *quercus* KBM., *varians* (H. S.), *diminutus* (KBM.) e *aurora* (MULS.). Presumimos que muitas outras existirão no nosso país.

Plagiognathus fulvipennis (KBM.)

Alguns exemplares coligidos em Caminha, Julho de 1928.

Espécie própria do Centro e Sul da Europa e Cáucaso. Bastante comum nas regiões onde a encontrámos.

Tinham sido citadas já na fauna lusitânica, as espécies *chrysanthemi* (WLFF.) e *arbustorum* (F.) (Cat. Hem. Port. P. DE OLIVEIRA).

Tuponia brevirostris Reut.

Espécie pouco freqüente, pelo menos na Mata de Leiria onde encontrámos os exemplares a que nos referimos.

O género *Tuponia,* embora bastante numeroso, não estava representado ainda na nossa fauna mas, considerando a distribuïção geográfica de várias das suas espécies, presumimos que algumas ainda, além da que vimos de registar, se encontrarão no país. A *Tuponia brevirostris,* segundo Oshanin, é própria do sul da França, Sicília, Algéria, Egipto e Crimeia.

Fam. CORIXIDAE

Desta família registamos, como espécies novas para fauna lusitânica, as seguintes:

Corixa Geoffroyi Leach.

Exemplares de Faro. Raro.

(Espécie da Europa, Norte de África, Cáucaso, Turquestão chinês, norte das regiões orientais, etc.).

Corixa Panzeri (Fieb.).

Exemplares de Buarcos, Leirosa e Mira. Freqüente.

(Europa e norte de África).

Sigara semistriata (Fieb.).

Leiria, Mata de Foja. Setembro de 1926. Pouco freqüente

(Da Europa, Algéria e Sibéria).

Siragra castanea (Thms.).

Um exemplar de Quiaios. Setembro de 1926.

(Da Scandinavia seg. Oshanin).

Siragra Scotti (Fieb.).

Leirosa. Agôsto de 1926.

(Espécie dada como existindo em tôda a Europa).

A. F. de Seabra.

Contribuição para o estudo da teoria das funções

CAPÍTULO III

DISTÂNCIA ENTRE DOIS CONJUNTOS

Antes de apresentarmos uma definição geral de *distância entre dois conjuntos,* vamos ocupar-nos da *distância reduzida* entre estes, para introduzir em seguida a noção de *desvio* dum conjunto a outro.

I

DISTÂNCIA REDUZIDA ENTRE DOIS CONJUNTOS

20. Definição de distância reduzida. — Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dois subconjuntos quaisquer dum espaçóide $\mathbf{P}$. Chamemos *distância reduzida* entre estes conjuntos ao limite inferior das distâncias $\overline{\mathbf{ab}}$ entre cada elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ e cada elemento $\mathbf{b}$ de $\mathbf{B}$. Representemos por $\underline{\mathbf{AB}}$ a distância reduzida entre os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Claro está que é $\underline{\mathbf{AB}} = \underline{\mathbf{BA}}$.

Esta definição abrange, como caso particular, a distância reduzida entre um elemento e um conjunto. Se os dois conjuntos se transformam em simples elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, temos $\underline{\mathbf{ab}} = \overline{\mathbf{ab}}$.

A distância reduzida $\underline{\mathbf{AB}}$ é o limite inferior das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{aB}}$ entre cada elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ e o conjunto $\mathbf{B}$; efectivamente, o limite inferior dum conjunto soma de conjuntos de números reais é o limite inferior dos limites inferiores dêstes conjuntos parcelas.

Os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dizem-se *ligados* entre si ou *separados* um do outro conforme fôr $\underline{\mathbf{AB}} = 0$ ou $\underline{\mathbf{AB}} > 0$.

A distância reduzida entre dois conjuntos é a distância reduzida entre os lugares dos mesmos conjuntos.

Com efeito, seja D o conjunto das distâncias entre cada elemento de **A** e cada elemento de **B**, e D_1 o conjunto análogo relativo a [**A**] e [**B**]. A relação [D] | [D_1] [*p.* 44, *l.* 25] mostra que os limites inferiores de D e D_1 são iguais [*p.* 46, *nota*], isto é, $\underline{\mathbf{AB}} = \underline{[\mathbf{A}]\,[\mathbf{B}]}$.

A distância reduzida não se altera, pois, quando os conjuntos se substituem por outros que admitem os mesmos lugares que os primeiros.

Se os conjuntos **A** *e* **B** *são fechados e se um deles é limitado, a distância reduzida* $\underline{\mathbf{AB}}$ *representa a distância entre um elemento de* **A** *e um elemento de* **B** *convenientemente determinados.*

Porque, neste caso, o conjunto D é fechado [*p.* 45, *l.* 7].

Em particular, admitidas as condições do enunciado, se os conjuntos **A** e **B** são ligados entre si, podemos afirmar que um elemento dum dêstes conjuntos se juxtapõe a um elemento do outro. Os mesmos conjuntos **A** e **B** conterão um elemento comum se, além destas condições, supusermos que um deles é totalmente fechado. Assim, dados um elemento **a** e um conjunto **B** totalmente fechado, a condição $\underline{\mathbf{aB}} = 0$ exprime que o elemento **a** pertence ao conjunto **B**.

Das duas últimas proposições imediatamente concluímos que:

Se um dos conjuntos **A** *ou* **B** *é limitado, a distância reduzida* $\underline{\mathbf{AB}}$ *representa a distância entre um elemento de* [**A**] *e um elemento de* [**B**] *convenientemente determinados.*

Por exemplo, se os conjuntos **A** e **B** são ligados entre si e se um deles é limitado, os lugares [**A**] e [**B**] contêm um elemento comum. Recìprocamente, para que os conjuntos **A** e **B** sejam ligados é suficiente que [**A**] e [**B**] contenham um elemento comum.

A distância reduzida entre dois conjuntos de ordem n não é excedida pela distância reduzida entre duas correspondentes projecções dos mesmos conjuntos, quaisquer que estas sejam.

Porque a distância entre dois elementos compostos não é excedida, como já dissemos, pela distância entre duas correspondentes projecções dêstes elementos, quaisquer que sejam.

21. Relações entre distâncias reduzidas. — *Dados dois conjuntos quaisquer* **A** *e* **C** *e um conjunto limitado* **B** *de diâmetro* Δ, *verifica-se a relação*

(1) $$\underline{\mathbf{AC}} \lesssim \underline{\mathbf{AB}} + \underline{\mathbf{BC}} + \Delta.$$

Com efeito, considerando um elemento **a** de [**A**], elementos **b** e **b**′ de [**B**] e um elemento **c** de [**C**] tais que seja

$$\underline{\mathbf{ab}} = \underline{\mathbf{AB}} \quad \text{e} \quad \underline{\mathbf{b'c}} = \underline{\mathbf{BC}},$$

da relação

$$\underline{\mathbf{ac}} \lesssim \underline{\mathbf{ab}} + \underline{\mathbf{bb'}} + \underline{\mathbf{b'c}}$$

deduz-se imediatamente a relação (1).

Em particular, quando o conjunto **B** se transformar num elemento **b**, será $\Delta = 0$ e

(2) $$\underline{\mathbf{AC}} \lesssim \underline{\mathbf{Ab}} + \underline{\mathbf{bC}}.$$

A relação (1) generaliza-se do seguinte modo:

Dados dois conjuntos quaisquer **A** *e* **C** *e* k *conjuntos limitados*

$$\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_k,$$

respectivamente de diâmetros

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k,$$

verifica-se a relação

(3) $$\underline{\mathbf{AC}} \lesssim \underline{\mathbf{AB}_1} + \underline{\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2} + \ldots + \underline{\mathbf{B}_k\mathbf{C}} + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_k.$$

A demonstração é imediata por indução.

No caso particular dêsses k conjuntos passarem a simples elementos

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k,$$

virá

(4) $$\underline{\mathbf{AC}} \lesssim \underline{\mathbf{Ab}_1} + \underline{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2} + \ldots + \underline{\mathbf{b}_k\mathbf{C}}.$$

22. Relação entre a distância reduzida $\underline{\mathbf{AB}}$ e os diâmetros dos conjuntos A, B e A + B. — *Designando por* Δ' *e* Δ'' *os diâ-*

metros de dois conjuntos limitados $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *e por* Δ *o diâmetro da soma* $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, *verifica-se a relação*

$$(5)\qquad \Delta \lesssim \Delta' + \Delta'' + \underline{\mathbf{A}\mathbf{B}}.$$

Com efeito, considerando dois elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ respectivamente, podemos escrever

$$\Delta \lesssim \Delta' + \Delta'' + \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} \quad [p.\ 7,\ (3)],$$

donde se deduz a relação (5), visto-que os elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são quaisquer de $\mathbf{A}$ e de $\mathbf{B}$.

Em geral:

Designando por

$$\Delta_1\ \Delta_1,\ \ldots,\ \Delta_k$$

os diâmetros de k conjuntos limitados

$$(6)\qquad \mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_k$$

e por Δ *o diâmetro da soma dos mesmos conjuntos* (1), *temos a relação*

$$(7)\qquad \Delta \lesssim \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_k + \underline{\mathbf{A}_1}\,\underline{\mathbf{A}_2} + \underline{\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3} + \ldots + \underline{\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{A}_k}.$$

Com efeito, seguindo o método de indução, suponhamos que o enunciado é verdadeiro para os $k-1$ conjuntos

$$\mathbf{A}_1,\ \mathbf{A}_2,\ \ldots,\ \mathbf{A}_{k-1}.$$

Seja $\mathbf{A}'$ a soma dêstes conjuntos e Δ' o respectivo diâmetro. Temos

$$\Delta \lesssim \Delta' + \Delta_k + \underline{\mathbf{A}'\mathbf{A}_k} \lesssim \Delta' + \Delta_k + \underline{\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{A}_k}$$

e

$$\Delta' \lesssim \Delta_1 + \ldots + \Delta_{k-1} + \underline{\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2} + \ldots + \underline{\mathbf{A}_{k-2}\mathbf{A}_{k-1}},$$

---

(1) Já vimos que a soma dum número finito de conjuntos limitados é ainda um conjunto limitado [*p.* 6, *l.* 29].

donde se obtém a relação (7) que é, por conseguinte, verdadeira para qualquer k.

Em conseqüência temos a proposição seguinte:

Se dois dos conjuntos limitados (6), quaisquer que sejam, se puderem considerar extremos duma sucessão formada por alguns dos mesmos conjuntos, de tal forma que as distâncias reduzidas entre cada conjunto desta sucessão e o imediatamente seguinte não excedam o número ε, *será*

$$\Delta \lesssim \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_k + (k-1)\,\varepsilon . \tag{8}$$

Com efeito, recordemos, primeiro, que o diâmetro Δ da soma

$$\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \ldots + \mathsf{A}_k$$

é o diâmetro da soma de duas das parcelas convenientemente determinadas [*p.* 46, *l.* 11]; sejam estas A_r e A_v. Consideremos agora uma sucessão formada por alguns dos conjuntos dados (6), de que A_r e A_v sejam extremos,

$$\mathsf{A}_r\,,\ \mathsf{A}_s\,,\ \ldots,\ \mathsf{A}_u\,,\ \mathsf{A}_v\,,$$

determinada de modo que seja

$$\underline{\mathsf{A}_r\,\mathsf{A}_s} \lesssim \varepsilon\,,\ \ldots,\ \underline{\mathsf{A}_u\,\mathsf{A}_v} \lesssim \varepsilon\,.$$

A relação (7) dá

$$\Delta \lesssim \Delta_r + \Delta_s + \ldots + \Delta_v + \underline{\mathsf{A}_r\,\mathsf{A}_s} + \ldots + \underline{\mathsf{A}_u\,\mathsf{A}_v}\,,$$

donde se deduz imediatamente a relação (8) que desejávamos demonstrar.

Quando o número considerado ε se puder reduzir a zero, diremos que os conjuntos dados (6) se encontram *ligados entre si*(1). A êste respeito temos o seguinte caso particular da proposição precedente:

O diâmetro da soma dum número finito de conjuntos ligados entre si não excede a soma dos diâmetros das parcelas.

---

(1) No caso particular de considerarmos só dois conjuntos, temos a definição já dada a *p.* 88.

23. Continuïdade da distância reduzida entre um elemento e um conjunto. — *Se a sucessão de elementos*

$$\mathsf{a}_1\,,\ \mathsf{a}_2\,,\ \ldots,\ \mathsf{a}_i\,,\ \ldots$$

converge para o elemento a, *temos* $lim\, \underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{B}} = \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{B}}$, *qualquer que seja o conjunto dado* B.

Com efeito, no caso de ser

$$\mathsf{A}\,|\,\mathsf{a}_i\,,\quad \mathsf{C}\,|\,\mathsf{B}\quad \text{e}\quad \mathsf{b}\,|\,\mathsf{a}\,,$$

a relação (2) [*p.* 90] dá

$$\underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{B}} \lessdot \underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{a}} + \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{B}}\,,$$

ou

$$\underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{B}} - \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{B}} \lessdot \underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{a}}\,.$$

Da mesma forma podemos escrever

$$\underline{\mathsf{a}\,\mathsf{B}} - \underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{B}} \lessdot \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{a}_i}\,.$$

Estas duas relações dão

$$|\,\underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{B}} - \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{B}}\,| \lessdot \underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{a}}$$

e, por ser $lim\, \underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{a}} = 0$, temos

$$lim\,|\,\underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{B}} - \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{B}}\,| = 0\,,$$

ou seja $lim\, \underline{\mathsf{a}_i\,\mathsf{B}} = \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{B}}$.

Podemos, por conseguinte, dizer que:

A distância reduzida entre um elemento e um conjunto é uma função contínua dêsse elemento.

24. Lugar das distâncias reduzidas entre cada elemento dum conjunto A e um conjunto B. — Sejam dados dois conjuntos **A** e **B** e demonstremos as seguintes proposições:

O conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de **A** *e o conjunto* $\mathbf{B}$ *admite o mesmo lugar que o conjunto análogo relativo a* $[\mathbf{A}]$ *e* $[\mathbf{B}]$.

Seja D o conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de $\mathbf{A}$ e o conjunto $\mathbf{B}$, e D_1 o conjunto que se obtém da mesma forma a partir de $[\mathbf{A}]$ e de $[\mathbf{B}]$. Notemos, primeiro, que D também é o conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de $\mathbf{A}$ e o conjunto $[\mathbf{B}]$ [*p.* 89, *l.* 1]; logo é evidente a relação $D|{<}D_1$ donde vem $D|{<}[D_1]$.

Por outro lado também é verdadeira a relação $[D]|{>}D_1$; efectivamente, como um elemento de D_1 é a distância reduzida $\underline{\mathbf{a}\,[\mathbf{B}]}$ entre o lugar $[\mathbf{B}]$ e um limite $\mathbf{a}$ duma sucessão convergente

$$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_i,\ \ldots$$

de elementos de $\mathbf{A}$, temos

$$\underline{\mathbf{a}\,[\mathbf{B}]} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} = lim\ \underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} \quad [prop.\ prec.].$$

As duas relações $D|{<}[D_1]$ e $[D]|{>}D_1$ dão $[D]\,|\,[D_1]$.

Se um dos conjuntos $\mathbf{A}$ *ou* $\mathbf{B}$ *fôr limitado e se* $\mathbf{A}$ *fôr fechado, também será fechado o conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de* $\mathbf{A}$ *e o conjunto* $\mathbf{B}$.

Podemos considerar esta proposição como um corolário da da *p.* 43, *l.* 22. Com efeito, seja $\mathbf{A}^2$ o conjunto de segunda ordem constituído por todos os elementos compostos $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ nas seguintes condições: em cada elemento $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ a primeira coordenada $\mathbf{a}$ é um elemento de $\mathbf{A}$, e a segunda coordenada $\mathbf{b}$ um elemento do lugar $[\mathbf{B}]$ determinado de tal forma que se tenha $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}$ [*p.* 89, *l.* 24]. Como um dos conjuntos $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$ é limitado por hipótese, segue-se que o conjunto $\mathbf{A}^2$ tem uma projecção limitada. Além disso êste conjunto é fechado, porque, se considerarmos uma sucessão convergente de elementos de $\mathbf{A}^2$,

$$(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}_1),\ (\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}_2),\ \ldots,\ (\mathbf{a}_i,\ \mathbf{b}_i),\ \ldots,$$

as sucessões

$$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_i,\ \ldots$$

$$\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_i,\ \ldots$$

convergirão respectivamente para elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de $\mathbf{A}$ e de $[\mathbf{B}]$, visto-que estes conjuntos são fechados, donde resultará

$$\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} = \lim \overline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{b}_i} = \lim \underline{\mathbf{a}_i\,\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}\,.$$

Conseqüentemente o elemento $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ pertencerá a $\mathbf{A}^2$, como mostram estas igualdades.

O conjunto $\mathbf{A}^2$ satisfaz, pois, às hipóteses da referida proposição a *p.* 43. Logo o conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ entre as coordenadas de cada elemento de $\mathbf{A}^2$, ou seja o conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}$, é necessàriamente fechado.

O conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de $\mathbf{A}$ *e o conjunto* $\mathbf{B}$ *admite por lugar o conjunto análogo relativo a* $[\mathbf{A}]$ *e* $[\mathbf{B}]$, *supondo limitado um dos conjuntos* $\mathbf{A}$ *ou* $\mathbf{B}$.

Com efeito, adoptando as mesmas notações de há pouco, a primeira proposição dêste *n.º* diz que é $[D] \mid [D_1]$, a segunda mostra que D_1 é um conjunto fechado. Temos, portanto, $[D] \mid D_1$.

II

DESVIO DUM CONJUNTO A A UM CONJUNTO B

25. Definição de desvio. — Damos o nome de *desvio* dum conjunto $\mathbf{A}$ a um conjunto $\mathbf{B}$ ao limite superior do conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}$ entre cada elemento $\mathbf{a}$ do conjunto $\mathbf{A}$ e o conjunto $\mathbf{B}$. Representemos por $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ o desvio do conjunto $\mathbf{A}$ ao conjunto $\mathbf{B}$.

O desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ é finito quando $\mathbf{A}$ é um conjunto limitado, porque, designando por $\mathbf{b}$ um determinado elemento de $\mathbf{B}$, como é limitado o conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$ para todos os elementos $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$, o mesmo acontece ao conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}}$ devido à relação $\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} \leqq \overline{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}$.

Quando os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem ilimitados, o desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ ainda poderá ser finito. Mas, quando $\mathbf{A}$ fôr ilimitado e $\mathbf{B}$ limitado, o desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\,\mathbf{B}}$ será necessàriamente infinito visto-que, designando por **a** um elemento qualquer de **A**, por **b** um determinado elemento de **B** e por Δ o diâmetro dêste conjunto, virá

$$\underline{\mathbf{a}\mathbf{b}} \lessgtr \underline{\mathbf{a}\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{B}\mathbf{b}} + \Delta \quad [p.\ 90,\ (1)],$$

ou

$$\underline{\mathbf{a}\mathbf{b}} \lessgtr \underline{\mathbf{a}\mathbf{B}} + \Delta,$$

e esta relação mostra que, se fôr ilimitado o conjunto das distâncias $\underline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$, ilimitado será o conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathbf{a}\mathbf{B}}$.

Podemos dar a seguinte forma à definição de desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$, quando êste fôr finito. Seja ρ um número positivo tal que um esferóide qualquer de raio ρ e de centro num elemento de **A** contenha necessàriamente um elemento de **B**. *O desvio* $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ *é o limite inferior do conjunto de todos os números* ρ *assim definidos.* Efectivamente, para qualquer dêstes números ρ temos $\underline{\mathbf{a}\mathbf{B}} \lessgtr \rho$ seja qual fôr o elemento **a** de **A**, donde resulta $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} \lessgtr \rho$. Por outro lado também é manifesto que um número qualquer maior do que o desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ é necessàriamente um dos números ρ. O desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ é, portanto, o limite inferior do conjunto de todos êsses números ρ. Se fôr $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} = 0$, qualquer esferóide de centro num elemento de **A** conterá um elemento de **B**, e reciprocamente.

Quando **B** fôr um conjunto fechado, ainda poderemos dizer que: *o desvio* $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ *é o menor número, positivo ou nulo, tal que um esferóide qualquer de raio igual a êsse número e de centro num elemento de* **A** *contém necessàriamente um elemento de* **B**. De facto, tratando-se dum conjunto fechado **B**, a qualquer elemento **a** de **A** corresponde um elemento **b** de **B** que obedece à condição

$$\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}\mathbf{B}} \lessgtr \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} \quad [p.\ 89,\ l.\ 11],$$

e o esferóide de centro **a** e raio $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ contém um elemento de **B**.

Como casos particulares da definição de desvio temos $\overrightarrow{\mathbf{a}\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{a}\mathbf{B}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$.

Claro está que os desvios $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{A}}$ podem não ser iguais. Assim, já dissemos que, para **A** limitado e **B** ilimitado, o primeiro dêstes desvios é finito e o segundo infinito; também é evidente que temos $\overrightarrow{\mathbf{a}\mathbf{A}} = 0$ e $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{a}} > 0$ quando **a** é um elemento de A e quando êste conjunto contém elementos não juxtapostos ao elemento a.

O desvio $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ *não se altera quando os conjuntos* A *e* B *se substituem por outros que admitem os mesmos lugares que os primeiros.*

Noutros têrmos: são iguais os desvios $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ e $\overrightarrow{[\mathsf{A}][\mathsf{B}]}$. Com efeito, seja D o conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de A e o conjunto B, e D_1 o das distâncias reduzidas entre cada elemento de $[\mathsf{A}]$ e o conjunto $[\mathsf{B}]$. Sabemos que é $[D] \mid [D_1]$ [*p.* 93, *l.* 25]; logo são iguais os limites superiores de D e de D_1, ou seja $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}} = \overrightarrow{[\mathsf{A}][\mathsf{B}]}$.

Como aplicação podemos dizer que: o desvio $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ é o menor número tal que um esferóide qualquer de raio igual a êsse número e de centro num elemento de A contém necessàriamente um elemento do lugar $[\mathsf{B}]$. Na verdade, é $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}} = \overrightarrow{\mathsf{A}[\mathsf{B}]}$.

Se A *e* B *são conjuntos fechados e se* A *é limitado, o desvio* $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ *representa a distância entre um elemento de* A *e um elemento de* B *convenientemente determinados.*

De facto, existe neste caso um elemento a de A e um elemento b de B que satisfazem às condições

$$\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}} = \underline{\mathsf{a}\mathsf{B}} \quad [p.\ 94,\ l.\ 16]\ (1) \quad \text{e} \quad \underline{\mathsf{a}\mathsf{B}} = \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{b}} \quad [p.\ 89,\ l.\ 24].$$

Se A *é um conjunto limitado, o desvio* $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ *representa a distância entre um elemento de* $[\mathsf{A}]$ *e um elemento de* $[\mathsf{B}]$ *convenientemente determinados.*

Na verdade, é $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}} = \overrightarrow{[\mathsf{A}][\mathsf{B}]}$ e os conjuntos A e $[\mathsf{A}]$ são limitados ao mesmo tempo.

Se B *é um conjunto totalmente fechado e se é* $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}} = 0$, *verifica-se a relação* $\mathsf{A} | < \mathsf{B}$.

Com efeito, nestas condições vem $\underline{\mathsf{a}\mathsf{B}} = 0$ para um elemento qualquer a de A, donde resulta que a é um elemento de B, porque êste conjunto é totalmente fechado [*p.* 89, *l.* 20].

---

(1) O desvio $\overrightarrow{\mathsf{B}\mathsf{A}}$ seria infinito se tivéssemos suposto A ilimitado e B limitado.

Se é $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}=0$, *verifica-se a relação* $[\mathbf{A}] | < [\mathbf{B}]$ *e reciprocamente.*

Porque, sendo $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}=0$, também é $\overline{[\mathbf{A}][\mathbf{B}]}=0$.

Dados dois conjuntos de ordem n, $\mathbf{A}^n$ *e* $\mathbf{B}^n$, *o desvio* $\overrightarrow{\mathbf{A}^n\mathbf{B}^n}$ *não é excedido pelo desvio duma projecção qualquer de* $\mathbf{A}^n$ *à correspondente projecção de* $\mathbf{B}^n$.

Esta proposição resulta imediatamente da análoga com respeito à distância reduzida [*p.* 89, *l.* 31].

26. Relação entre desvios. — *Dados os conjuntos* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$ *verifica-se a relação*

$$(1) \qquad \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{C}} \lesssim \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{C}}.$$

Suponhamos, primeiro, que $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são conjuntos fechados. A qualquer elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ corresponde, então, um elemento $\mathbf{b}$ de $\mathbf{B}$ tal que

$$\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{B}} \lesssim \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} \quad [p.\ 89,\ l.\ 11],$$

e ao elemento $\mathbf{b}$ corresponde, da mesma forma, um elemento $\mathbf{c}$ de $\mathbf{C}$ tal que

$$\overline{\mathbf{b}\mathbf{c}} \lesssim \overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{C}}.$$

A relação

$$\overline{\mathbf{a}\mathbf{c}} \lesssim \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{b}\mathbf{c}}$$

combinada com as precedentes dá

$$\overline{\mathbf{a}\mathbf{c}} \lesssim \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{C}},$$

e ainda

$$\underline{\mathbf{a}\mathbf{C}} \lesssim \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{C}},$$

donde se deduz a relação (1), visto $\mathbf{a}$ representar um elemento arbitrário de $\mathbf{A}$.

A mesma relação também será verdadeira se os conjuntos $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ não forem simultâneamente fechados, pois já dissemos que o desvio não se altera quando os conjuntos se substituem pelos respectivos lugares.

Notemos as relações

$$(2) \qquad \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{C}} \gtrsim \overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{C}} - \overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{A}} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{C}} \gtrsim \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} - \overrightarrow{\mathbf{C}\mathbf{B}},$$

que imediatamente se deduzem da que acabámos de demonstrar.

A relação (1) mostra que, se forem finitos os desvios $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{C}}$, o mesmo acontecerá ao desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{C}}$.

Para quaisquer conjuntos em número finito

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{U}, \mathbf{V}$$

podemos imediatamente generalizar a relação (1) do seguinte modo:

$$\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{V}} \leqq \overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{C}} + \ldots + \overrightarrow{\mathbf{U}\mathbf{V}}. \tag{3}$$

27. Relações entre desvios, distâncias reduzidas e diâmetros dos conjuntos. — *Se* Δ *e* Δ' *são os diâmetros dos conjuntos limitados* $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$ *respectivamente, verifica-se a relação*

$$\Delta \leqq \Delta' + 2\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}. \tag{4}$$

Com efeito, designando por $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}'$ dois elementos quaisquer de $\mathbf{A}$, temos

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{a}'} \leqq \underline{\mathbf{a}\mathbf{B}} + \underline{\mathbf{B}\mathbf{a}'} + \Delta' \quad [p.\ 90,\ (1)]$$

e

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{a}'} \leqq \Delta' + 2\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}},$$

donde se obtém a relação (4), porque $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}'$ são elementos quaisquer do conjunto $\mathbf{A}$.

Registemos também a relação

$$\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}} \leqq \Delta + \Delta' + \underline{\mathbf{A}\mathbf{B}}, \tag{5}$$

que se deduz da relação (5) a *p*. 91 atendendo a que o desvio $\overrightarrow{\mathbf{A}\mathbf{B}}$ não excede o diâmetro da soma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Outra relação que importa conhecer é a seguinte:

Dados três conjuntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *e* $\mathbf{C}$, *limitados ou não, temos*

$$\underline{\mathbf{A}\mathbf{C}} \leqq \underline{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{C}}. \tag{6}$$

Para a demonstração consideremos um número positivo ε e fixemos elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ que obedeçam à condição

$$\underline{\mathbf{ab}} < \underline{\mathbf{AB}} + \varepsilon .$$

Determinemos em seguida um elemento $\mathbf{c}$ do lugar $[\mathbf{C}]$ de modo que seja $\underline{\mathbf{bc}} = \underline{\mathbf{bC}}$. A relação

$$\overline{\mathbf{ac}} \mathrel{\overline{<}} \overline{\mathbf{ab}} + \overline{\mathbf{bc}}$$

dá, então,

$$\overline{\mathbf{ac}} \mathrel{\overline{<}} \underline{\mathbf{AB}} + \varepsilon + \underline{\mathbf{bC}},$$

donde se obtém

$$\underline{\mathbf{AC}} \mathrel{\overline{<}} \underline{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} + \varepsilon,$$

e, como ε é um número positivo arbitrário, vem a relação (6) que pretendíamos demonstrar.

Consideremos agora conjuntos quaisquer, em número finito,

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \ldots, \mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V}.$$

É imediata a seguinte generalização de (6):

$$\underline{\mathbf{AV}} \mathrel{\overline{<}} \underline{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{BC}} + \cdots + \overrightarrow{\mathbf{UV}}. \tag{7}$$

Da mesma relação (6) também se deduz a seguinte:

$$\underline{\mathbf{UV}} \mathrel{\overline{<}} \underline{\mathbf{AB}} + \overrightarrow{\mathbf{AC}} + \overrightarrow{\mathbf{BD}} + \cdots + \overrightarrow{\mathbf{TV}}. \tag{8}$$

Com efeito, temos

$$\begin{gathered} \underline{\mathbf{BC}} \mathrel{\overline{<}} \underline{\mathbf{BA}} + \overrightarrow{\mathbf{AC}} \\ \underline{\mathbf{CD}} \mathrel{\overline{<}} \underline{\mathbf{CB}} + \overrightarrow{\mathbf{BD}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underline{\mathbf{UV}} \mathrel{\overline{<}} \underline{\mathbf{UT}} + \overrightarrow{\mathbf{TV}}, \end{gathered}$$

donde se conclui a relação (8) somando e fazendo reduções evidentes.

28. Desvio duma soma de conjuntos a outra soma de conjuntos. — Se notarmos que o limite superior dum conjunto soma de conjuntos de números reais é o limite superior dos limites superiores das parcelas, tornar-se-á evidente que:

O desvio $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ *duma soma* $\mathsf{A} \mid \sum \mathsf{A}'$ *de conjuntos* A' *(em número finito ou infinito) a um conjunto* B *é o limite superior dos desvios* $\overrightarrow{\mathsf{A}'\mathsf{B}}$ *de cada parcela* A' *ao conjunto* B.

Imaginemos agora o conjunto B também decomposto em partes, $\mathsf{B} \mid \sum \mathsf{B}'$, e façamos corresponder a cada conjunto A' um (ou mais) conjuntos B'. Podemos afirmar que:

O desvio $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ *não excede o limite superior dos desvios* $\overrightarrow{\mathsf{A}'\mathsf{B}'}$ *de cada conjunto* A' *a um dos correspondentes* B'.

Com efeito, seja A' uma das parcelas de A e B' um dos conjuntos correspondentes de A'. A relação $\mathsf{B} \mid > \mathsf{B}'$ dá $\overline{\mathsf{a}'\mathsf{B}} \lesseqgtr \overline{\mathsf{a}'\mathsf{B}'}$ para qualquer elemento a' de A'. Daqui resulta $\overrightarrow{\mathsf{A}'\mathsf{B}} \lesseqgtr \overrightarrow{\mathsf{A}'\mathsf{B}'}$, e, como o desvio $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ é o limite superior dos desvios $\overrightarrow{\mathsf{A}'\mathsf{B}}$, o mesmo desvio $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ não excede o limite superior do conjunto dos desvios $\overrightarrow{\mathsf{A}'\mathsf{B}'}$.

III

DISTÂNCIA ENTRE DOIS CONJUNTOS

29. Definição de distância entre dois conjuntos. — Sejam A e B dois subconjuntos quaisquer dum dado espaçóide P. Ao maior dos desvios $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ e $\overrightarrow{\mathsf{B}\mathsf{A}}$ damos o nome de *distância* entre os conjuntos A e B. A distância entre estes conjuntos é, pois, o limite superior do conjunto das distâncias reduzidas entre cada elemento de A e de B e os conjuntos B e A respectivamente. Assim: a distância entre o conjunto dos números do intervalo $(0, 1)$ e o conjunto dos números da forma $\frac{i}{h+i}$ $(h=1, 2, \ldots)$ é igual a $\frac{1}{1+i}$; a distância entre dois intervalos de extremos inferiores α e α' e de extremos superiores β e β' é o maior dos módulos $\mid \alpha - \alpha' \mid$ e $\mid \beta - \beta' \mid$. Considerando o espaçóide P dos pontos do espaço ordinário de n dimensões, a distância entre duas hiperesferas dêste espaço que tenham o mesmo raio (círculos ou esferas, em particular) é a distância entre os centros; a distância entre duas hiperesferas do mesmo centro é a diferença dos raios; a distância entre duas hiperesferas quaisquer é a distância entre os centros aumentada da diferença dos raios. A distância entre um conjunto **A** e a soma de todos os esferóides do mesmo raio ρ e de centros nos diversos elementos de **A** não excede o número ρ.

Designemos por $\overline{\mathbf{AB}}$ a distância entre os conjuntos **A** e **B**. Da definição resulta que é $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{BA}}$.

A distância $\overline{\mathbf{AB}}$ é necessàriamente finita quando os conjuntos **A** e **B** são limitados, e infinita quando um dêstes conjuntos é limitado e o outro ilimitado, como resulta das considerações análogas que fizemos a propósito do desvio [*p.* 95]. Se ambos os conjuntos **A** e **B** forem ilimitados, a respectiva distância poderá ser finita ou infinita (1).

Suponhamos que existe um número positivo ρ tal que todo o esferóide de raio ρ e de centro num elemento de **A** ou de **B** contém necessàriamente um elemento de **B** ou de **A**. A distância $\overline{\mathbf{AB}}$ é, então, finita, e pode definir-se como sendo o limite inferior de todos os números ρ sujeitos a tal condição, como resulta do que

---

(1) Notemos que um dado espaçóide ilimitado **P** admite sempre dois subconjuntos ilimitados a uma distância infinita um do outro. Para citar um exemplo, considere-se uma sucessão de elementos de **P**,

(1) $$a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots,$$

determinada de forma que a seguinte sucessão de distâncias tenda para infinito:

(2) $$\overline{a_1a_2}, \overline{a_1a_3}, \overline{a_2a_3}, \overline{a_1a_4}, \overline{a_2a_4}, \overline{a_3a_4}, \ldots, \overline{a_1a_i}, \overline{a_2a_i}, \ldots, \overline{a_{i-1}a_i}, \ldots.$$

Para determinar uma tal sucessão basta que seja: a_1 um elemento qualquer de **P**; a_2 um elemento exterior ao esferóide de raio 2 e de centro em a_1; a_3 um elemento exterior a cada um dos esferóides do mesmo raio 3 e de centros em a_1 e a_2; em geral a_i um elemento exterior a cada um dos esferóides de raio i e de centros nos elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$.

Determinada a sucessão (1) de tal modo que a sucessão (2) tende para infinito, segue-se que a distância reduzida do têrmo a_i a qualquer conjunto constituído por outros têrmos da sucessão (1) tende igualmente para infinito com i, como é evidente. Logo a distância entre o conjunto dos têrmos de ordem ímpar da sucessão (1) e o conjunto dos de ordem par da mesma sucessão, por exemplo, é necessàriamente infinita.

dissemos a *p.* 96, *l.* 11. No caso de ser $\overline{\mathsf{AB}}=0$, qualquer esferóide de centro num elemento de A ou de B contém um elemento de B ou de A, e recìprocamente. Se A e B são conjuntos fechados, ainda podemos dizer que a distância $\overline{\mathsf{AB}}$ é o menor dos números ρ atrás definidos [*p.* 96, *l.* 22].

Como caso particular da definição de distância temos evidentemente $\overline{\mathsf{aB}}=\overline{\mathsf{Ba}}=\overrightarrow{\mathsf{Ba}}$ e, quando os conjuntos se reduzem a simples elementos, a distância entre os dois conjuntos reduz-se à distância entre êsses elementos. A definição de distância entre dois conjuntos é, pois, uma generalização da definição de distância entre dois elementos.

A distância entre dois conjuntos é a distância entre os lugares dos mesmos conjuntos.

Na verdade, como a distância $\overline{\mathsf{AB}}$ é o maior dos desvios $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathsf{BA}}$, e como é

$$\overrightarrow{\mathsf{AB}}=\overrightarrow{[\mathsf{A}][\mathsf{B}]} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{\mathsf{BA}}=\overrightarrow{[\mathsf{B}][\mathsf{A}]} \quad [p.\ 97,\ l.\ 6],$$

resulta $\overline{\mathsf{AB}}=\overline{[\mathsf{A}][\mathsf{B}]}$.

Logo a distância entre dois conjuntos não se altera quando estes se substituem por outros que admitem os mesmos lugares que os primeiros.

Se A e B são conjuntos limitados e fechados, a distância $\overline{\mathsf{AB}}$ é a distância entre um elemento de A e um elemento de B convenientemente determinados.

Com efeito, o maior dos desvios $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathsf{BA}}$ é, no caso de A e B serem limitados e fechados, a distância entre um elemento de A e um elemento de B convenientemente determinados [*p.* 97, *l.* 16].

Das duas últimas proposições resulta que:

A distância $\overline{\mathsf{AB}}$ entre dois conjuntos limitados é a distância entre um elemento de $[\mathsf{A}]$ e um elemento de $[\mathsf{B}]$ convenientemente determinados.

É condição necessária e suficiente para que se anule a distância $\overline{\mathsf{AB}}$ que seja $[\mathsf{A}] \mid [\mathsf{B}]$.

Com efeito, para que se tenha $\overline{\mathsf{AB}}=0$ é necessário e suficiente que seja $\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}=0$ e $\overrightarrow{\mathsf{B}\mathsf{A}}=0$. Ora, estas condições são necessárias e suficientes para que se virifiquem as relações

$$[\mathsf{A}]|\!<[\mathsf{B}] \quad \text{e} \quad [\mathsf{B}]|\!<[\mathsf{A}] \quad [p.\ 98,\ l.\ 1],$$

donde vem $[\mathsf{A}]\,|\,[\mathsf{B}]$.

Quando A e B forem conjuntos totalmente fechados, a distância $\overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ anular-se-á sòmente se tivermos $\mathsf{A}\,|\,\mathsf{B}$.

Dados dois conjuntos de ordem n, A^n e B^n, a distância $\overline{\mathsf{A}^n\mathsf{B}^n}$ não é excedida pela distância entre duas correspondentes projecções dêstes conjuntos, quaisquer que elas sejam.

Para a verificação do presente enunciado basta atender ao enunciado análogo para o desvio [*p.* 98, *l.* 3].

Por conseqüência, se fôr $\overline{\mathsf{A}^n\mathsf{B}^n}=0$, também será nula a distância entre duas correspondentes projecções de A^n e B^n, quaisquer que sejam.

30. Relação fundamental entre distâncias. — *Dados os conjuntos* A, B *e* C *verifica-se a relação*

$$(1) \qquad \overline{\mathsf{A}\mathsf{C}} \leqslant \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}+\overline{\mathsf{B}\mathsf{C}}.$$

Com efeito, sabemos que é

$$\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{C}} \leqslant \overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{B}}+\overrightarrow{\mathsf{B}\mathsf{C}} \quad [p.\ 98,\ (1)],$$

donde se deduz

$$\overrightarrow{\mathsf{A}\mathsf{C}} \leqslant \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}+\overline{\mathsf{B}\mathsf{C}}.$$

Da mesma forma se obtém

$$\overrightarrow{\mathsf{C}\mathsf{A}} \leqslant \overline{\mathsf{C}\mathsf{B}}+\overline{\mathsf{B}\mathsf{A}}.$$

Ora, uma das últimas relações pode escrever-se

$$\overline{\mathsf{A}\mathsf{C}} \leqslant \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}+\overline{\mathsf{B}\mathsf{C}},$$

como pretendíamos demonstrar.

Esta relação mostra que, se forem finitas as distâncias $\overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ e $\overline{\mathsf{B}\mathsf{C}}$, finita será a distância $\overline{\mathsf{A}\mathsf{C}}$.

Considerando conjuntos quaisquer em número finito,

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots, \mathsf{U}, \mathsf{V},$$

podemos escrever a relação

$$(2) \qquad \overline{\mathsf{AV}} \le \overline{\mathsf{AB}} + \overline{\mathsf{BC}} + \ldots + \overline{\mathsf{UV}},$$

que generaliza a (1) da página anterior; êste resultado obtém-se imediatamente por indução.

31. Relações entre distâncias, desvios, distâncias reduzidas e diâmetros dos conjuntos. — *Se* Δ *e* Δ' *são os diâmetros dos conjuntos limitados* A *e* B *verifica-se a condição*

$$(3) \qquad |\Delta - \Delta'| \le 2\overline{\mathsf{AB}}.$$

Com efeito, da relação (4), a *p.* 99, deduzimos

$$\Delta \le \Delta' + 2\overline{\mathsf{AB}};$$

da mesma forma podemos escrever

$$\Delta' \le \Delta + 2\overline{\mathsf{AB}},$$

relações estas que nos dão a (3) que desejávamos obter.

Da relação (5), a *p.* 99, também deduzimos

$$(4) \qquad \overline{\mathsf{AB}} \le \Delta + \Delta' + \underline{\mathsf{AB}},$$

atendendo à definição de distância e à igualdade $\underline{\mathsf{AB}} = \underline{\mathsf{BA}}$.

Dados os conjuntos A, B *e* C, *limitados ou não, temos:*

$$(5) \qquad \underline{\mathsf{AC}} \le \underline{\mathsf{AB}} + \overline{\mathsf{BC}}.$$

Esta relação também se deduz da correspondente para o desvio [*p.* 99, (6)], e pode generalizar-se, como vamos ver, de qualquer das seguintes formas:

Dados conjuntos quaisquer em número finito,

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \ldots, \mathsf{T}, \mathsf{U}, \mathsf{V},$$

temos

(6) $$\underline{\mathsf{AV}} \lesssim \underline{\mathsf{AB}} + \overline{\mathsf{BC}} + \overline{\mathsf{CD}} + \ldots + \overline{\mathsf{UV}}$$

e

(7) $$|\underline{\mathsf{AB}} - \underline{\mathsf{UV}}| \lesssim \overline{\mathsf{AC}} + \overline{\mathsf{BD}} + \ldots + \overline{\mathsf{TV}}.$$

A relação (6) obtém-se imediatamente atendendo a (2). Para deduzirmos a (7) escrevamos, primeiro,

$$\underline{\mathsf{UV}} - \underline{\mathsf{AB}} \lesssim \overline{\mathsf{AC}} + \overline{\mathsf{BD}} + \ldots + \overline{\mathsf{TV}},$$

que se obtém da relação (8), a *p.* 100. Se considerarmos agora os mesmos conjuntos dispostos pela ordem inversa da primeira, poderemos escrever, da mesma forma,

$$\underline{\mathsf{AB}} - \underline{\mathsf{UV}} \lesssim \overline{\mathsf{AC}} + \overline{\mathsf{BD}} + \ldots + \overline{\mathsf{TV}}.$$

Ora, as duas últimas relações dão-nos a (7) que desejávamos demonstrar.

Em particular, para quatro conjuntos

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D},$$

temos

(8) $$|\underline{\mathsf{AB}} - \underline{\mathsf{CD}}| \lesssim \overline{\mathsf{AC}} + \overline{\mathsf{BD}},$$

e, quando fôr $\mathsf{D} \mid \mathsf{B}$, virá

(9) $$|\underline{\mathsf{AB}} - \underline{\mathsf{BC}}| \lesssim \overline{\mathsf{AC}}.$$

Dados os conjuntos

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D},$$

verifica-se a relação

(10) $$|\overrightarrow{\mathsf{AD}} - \overrightarrow{\mathsf{BC}}| \lesssim \overline{\mathsf{AB}} + \overline{\mathsf{CD}}.$$

Com efeito, das relações já conhecidas [*p.* 99, (3)]

$$\overrightarrow{\mathsf{AD}} \leqq \overrightarrow{\mathsf{AB}} + \overrightarrow{\mathsf{BC}} + \overrightarrow{\mathsf{CD}}$$

$$\overrightarrow{\mathsf{BC}} \leqq \overrightarrow{\mathsf{BA}} + \overrightarrow{\mathsf{AD}} + \overrightarrow{\mathsf{DC}}$$

deduzem-se as seguintes

$$\overrightarrow{\mathsf{AD}} - \overrightarrow{\mathsf{BC}} \leqq \overline{\mathsf{AB}} + \overline{\mathsf{CD}}$$

$$\overrightarrow{\mathsf{BC}} - \overrightarrow{\mathsf{AD}} \leqq \overline{\mathsf{AB}} + \overline{\mathsf{CD}},$$

donde se obtém a relação (10).

Registemos também as relações

$$(11) \qquad |\overrightarrow{\mathsf{AC}} - \overrightarrow{\mathsf{AB}}| \leqq \overline{\mathsf{BC}} \quad \text{e} \quad |\overrightarrow{\mathsf{AC}} - \overrightarrow{\mathsf{BC}}| \leqq \overline{\mathsf{AB}},$$

que se deduzem de (10) supondo que os conjuntos dados são respectivamente

$$\mathsf{A}, \mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$$

para a primeira relação, e

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{C}$$

para a segunda.

As relações (10) e (11) podem manifestamente generalizar-se de combinação com a (2) [*p.* 105]. Assim, se considerarmos um número finito de conjuntos quaisquer

$$\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots, \mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{O}, \ldots, \mathsf{U}, \mathsf{V},$$

teremos a seguinte generalização de (10)

$$(12) \quad |\overrightarrow{\mathsf{AV}} - \overrightarrow{\mathsf{MN}}| \leqq \overline{\mathsf{AB}} + \overline{\mathsf{BC}} + \ldots + \overline{\mathsf{LM}} + \overline{\mathsf{NO}} + \ldots + \overline{\mathsf{UV}}.$$

32. Distância entre duas somas de conjuntos. — Da proposição que enunciámos a *p.* 101, *l.* 5, resulta evidentemente que:

Se decompusermos os conjuntos A *e* B *em conjuntos* A′ *e* B′,

$$\mathsf{A} \mid \sum \mathsf{A}' \quad e \quad \mathsf{B} \mid \sum \mathsf{B}',$$

em número finito ou infinito, a distância $\overline{\mathsf{AB}}$ *será o limite superior dos desvios* $\overrightarrow{\mathsf{A'B}}$ *e* $\overrightarrow{\mathsf{B'A}}$ *dos conjuntos* A' *e* B' *aos conjuntos* B *e* A *respectivamente.*

Da proposição a *p.* 101, *l.* 11, deduz-se da mesma maneira que:

Se associarmos cada conjunto A' *a um (ou mais) conjuntos* B' *de tal forma que um qualquer dos conjuntos* B' *corresponda a um (ou mais) conjuntos* A', *a distância* $\overline{\mathsf{AB}}$ *não excederá o limite superior das distâncias* $\overline{\mathsf{A'B'}}$ *entre os conjuntos de cada par assim constituído.*

Com efeito, basta notar que os desvios $\overrightarrow{\mathsf{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathsf{BA}}$ não excedem o limite superior das distâncias $\overline{\mathsf{A'B'}}$ entre conjuntos de cada par, por não excederem os limites superiores dos desvios $\overrightarrow{\mathsf{A'B'}}$ e $\overrightarrow{\mathsf{B'A'}}$ respectivamente.

Por exemplo, se as distâncias $\overline{\mathsf{A'B'}}$ forem tôdas nulas, também será $\overline{\mathsf{AB}}=0$.

Se tivermos

$$\mathsf{A} \mid \mathsf{A}_1+\mathsf{A}_2+\ldots+\mathsf{A}_i+\ldots,$$

a distância $\overline{\mathsf{AB}}$ não excederá o limite superior das distâncias

$$\overline{\mathsf{A}_i\mathsf{B}} \quad (i=1,\,2,\ldots).$$

Se tivermos

$$\mathsf{A} \mid \mathsf{A}_1+\mathsf{A}_2+\cdots+\mathsf{A}_k$$

e

$$\mathsf{B} \mid \mathsf{B}_1+\mathsf{B}_2+\cdots+\mathsf{B}_k,$$

a distância $\overline{\mathsf{AB}}$ não excederá a maior das distâncias

$$\overline{\mathsf{A}_i\mathsf{B}_i} \quad (i=1,\,2,\,\ldots,\,k),$$

nem a maior das distâncias

$$\mathsf{A}_i\,\mathsf{B}_h \quad (i \neq h).$$

Assim podemos escrever

$$\overline{\mathsf{AB}} \lesssim \overline{\mathsf{A}_1\mathsf{B}_1}+\overline{\mathsf{A}_2\mathsf{B}_2}+\cdots+\overline{\mathsf{A}_k\mathsf{B}_k}.$$

Como caso particular da última proposição temos que:

Dados os conjuntos A *e* B, *se a cada elemento* a *de* A *fizermos corresponder um elemento* b *de* B *de modo que um elemento qualquer de* B *seja correspondente dum elemento de* A, *a distância* $\overline{\mathsf{AB}}$ *não excederá o limite superior das distâncias* $\overline{\mathsf{ab}}$ *entre os elementos de cada par assim constituído.*

Dados dois conjuntos A *e* B *e um número positivo* ε, *a cada subconjunto* A' *de* A *corresponde um subconjunto* B' *de* B *tal que temos*

$$\overline{\mathsf{A}'\mathsf{B}'} \lesssim \overrightarrow{\mathsf{A}'\mathsf{B}} + \varepsilon. \tag{13}$$

Consideremos, com efeito, um subconjunto A' de A. Se a cada elemento a' dêste subconjunto fizermos corresponder os elementos b' de B para os quais é

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} < \underline{\mathsf{a}'\mathsf{B}} + \varepsilon \lesssim \overrightarrow{\mathsf{A}'\mathsf{B}} + \varepsilon,$$

o conjunto B' de todos os elementos b' correspondentes dos diversos elementos a' do conjunto A' verificará a relação (13), como se depreende da proposição anterior.

Se o conjunto A *é a soma de diversos conjuntos* A', $\mathsf{A} \mid \sum \mathsf{A}'$, *dados um outro conjunto* B *e um número positivo* ε, *a cada conjunto* A' *corresponde um subconjunto* B' *de* B *de tal modo que temos* $\mathsf{B} \mid \sum \mathsf{B}'$ e

$$\overline{\mathsf{A}'\mathsf{B}'} \lesssim \overline{\mathsf{AB}} + \varepsilon. \tag{14}$$

Consideremos uma parcela A' de A e seja a' um elemento de A'. A êste elemento a' façamos corresponder os elementos b' de B que verifiquem a seguinte condição:

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} \lesssim \overline{\mathsf{AB}} + \varepsilon \text{ (1)}.$$

(1) Para demonstrar a existência de elementos b' de B que satisfaçam à condição

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} \lesssim \overline{\mathsf{AB}} + \varepsilon,$$

basta notar que existe um elemento b' de B, pelo menos, tal que

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} < \underline{\mathsf{a}'\mathsf{B}} + \varepsilon \lesssim \overline{\mathsf{AB}} + \ .$$

O conjunto $\mathbf{B}'$ de todos os elementos $\mathbf{b}$ correspondentes dos diversos elementos $\mathbf{a}'$ de $\mathbf{A}'$ satisfaz à relação (14). Façamos corresponder a cada parcela $\mathbf{A}'$ do conjunto dado $\mathbf{A}$ o subconjunto $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{B}$ assim determinado e demonstremos que é $\mathbf{B} \mid \sum \mathbf{B}'$. A cada elemento $\mathbf{b}$ de $\mathbf{B}$ corresponde necessàriamente um elemento $\mathbf{a}'$ de $\mathbf{A}$ tal que

$$\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}} < \underline{\mathbf{A}\,\mathbf{b}} + \varepsilon \lesseqgtr \overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \varepsilon .$$

O elemento $\mathbf{a}'$ pertence a um dos conjuntos $\mathbf{A}'$, e esta desigualdade mostra que o elemento $\mathbf{b}$ pertence ao conjunto $\mathbf{B}'$ correspondente dêsse $\mathbf{A}'$. Como vemos, o conjunto $\mathbf{B}$ é a soma de todos os conjuntos $\mathbf{B}'$.

Logo, dados dois conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, a cada número positivo ε e a cada decomposição de $\mathbf{A}$ em vários subconjuntos, em número finito ou infinito, opõe-se uma decomposição de $\mathbf{B}$ em subconjuntos correspondentes dos primeiros, de tal forma que a distância entre dois subconjuntos correspondentes, quaisquer, não excede o número $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \varepsilon$.

Em particular, podemos dizer que: dados dois conjuntos quaisquer $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, a cada número positivo ε opõe-se uma decomposição do conjunto $\mathbf{B}$ em subconjuntos $\mathbf{B}'$ correspondentes dos elementos de $\mathbf{A}$, de tal forma que as distâncias $\overline{\mathbf{a}\mathbf{B}'}$ entre cada elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ e o correspondente subconjunto $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{B}$ não excedem o número $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} + \varepsilon$.

Dados os conjuntos $\mathbf{A}$ *e* $\mathbf{B}$, *supondo êste fechado, a cada subconjunto* $\mathbf{A}'$ *de* $\mathbf{A}$ *corresponde um subconjunto* $\mathbf{B}'$ *de* $\mathbf{B}$ *tal que temos*

$$\overline{\mathbf{A}'\mathbf{B}'} \lesseqgtr \overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{B}} . \tag{15}$$

Efectivamente, como $\mathbf{B}$ é um conjunto fechado, a cada elemento $\mathbf{a}'$ dum dado subconjunto $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{A}$ corresponde um elemento $\mathbf{b}'$ de $\mathbf{B}$, pelo menos, sujeito à condição

$$\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'} = \underline{\mathbf{a}'\,\mathbf{B}} \lesseqgtr \overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{B}} \quad [p.\ 89,\ l.\ 11].$$

Por conseguinte, o conjunto $\mathbf{B}'$ constituído por todos os elementos $\mathbf{b}'$ assim determinados satisfaz à relação (15), como é evidente.

Se o conjunto fechado A *é a soma de vários conjuntos* A', $\mathsf{A} \mid \sum \mathsf{A}'$, *dado um outro conjunto fechado* B, *a cada conjunto* A' *corresponde um subconjunto* B' *de* B *tal que temos* $\mathsf{B} \mid \sum \mathsf{B}'$ e

(16) $$\overline{\mathsf{A}'\mathsf{B}'} \lesssim \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}.$$

Consideremos, com efeito, uma parcela A' de A. A cada elemento a' de A' corresponde um elemento b' de B, pelo menos, que satisfaz à condição

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} \lesssim \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}\ (1).$$

Seja B' o conjunto de todos os elementos b' correspondentes dos diversos elementos a' de A'. A cada parcela A' de A corresponde, desta maneira, um subconjunto B' de B que satisfaz à relação (16). Demonstremos que é $\mathsf{B} \mid \sum \mathsf{B}'$. Dado um elemento b de B, podemos determinar um elemento a' de A de modo que seja

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}} = \underline{\mathsf{A}\,\mathsf{b}} \lesssim \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}},$$

e, se A' é uma parcela de A a que pertence a', o elemento b pertence ao conjunto B' correspondente de A'. Logo o conjunto B é a soma de todos os conjuntos B'.

Reproduzindo por outras palavras a presente proposição, podemos dizer que: dados dois conjuntos fechados A e B, a cada decomposição de A em subconjuntos A' opõe-se uma decomposição de B em subconjuntos B' correspondentes dos primeiros, de modo que a distância $\overline{\mathsf{A}'\mathsf{B}'}$ entre dois subconjuntos correspondentes, quaisquer, não excede a distância $\overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}$.

Esta distância $\overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}$ é o limite superior das distâncias $\overline{\mathsf{A}'\mathsf{B}'}$,

---

(1) Prova-se a existência de elementos b' de B tais que

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} \lesssim \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}}$$

notando que existe um elemento b' de B que obedece à condição

$$\overline{\mathsf{a}'\mathsf{b}'} = \underline{\mathsf{a}'\,\mathsf{B}} \lesssim \overline{\mathsf{A}\mathsf{B}},$$

porque B é um conjunto fechado.

como fàcilmente se reconhece tendo em vista a proposição a *p.* 108, *l.* 6.

Em particular: dados dois conjuntos fechados **A** e **B**, é possível determinar uma decomposição do conjunto **B** em subconjuntos **B′** correspondentes dos elementos de **A**, de tal forma que as distâncias $\overline{\mathbf{a}\mathbf{B}'}$ entre cada elemento **a** de **A** e o correspondente subconjunto **B′** de **B** não excedem a distância $\overline{\mathbf{AB}}$.

CAPÍTULO IV

ESPAÇÓIDES DE CONJUNTOS

No presente capítulo ocupar-nos-emos do *espaçamento* do conjunto de todos os subconjuntos limitados dum dado espaçóide **P**. Êste espaçamento consiste em demonstrar que — referindo-nos sòmente a conjuntos limitados — a definição que ùltimamente apresentámos de distância entre dois conjuntos satisfaz às propriedades fundamentais estabelecidas no primeiro capítulo [*p.* 4].

Antes porém de tratarmos de tal *espaçamento,* convém introduzir as noções de *limite integral* e de *limite comum* duma sucessão de conjuntos.

I

LIMITES INTEGRAL E COMUM DUMA SUCESSÃO DE CONJUNTOS

33. Definições. — Seja dada uma sucessão infinita de conjuntos quaisquer

(1) $$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i, \ldots$$

pertencentes a um mesmo espaçóide **P**. De acôrdo com a definição que demos a *p.* 13, *n.º* 5, diremos que uma *subsucessão* de (1) é tôda a sucessão

(2) $$\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s, \ldots, \mathbf{A}_u, \ldots$$

formada por têrmos de (1), mas dispostos pela ordem em que se encontram nesta sucessão $(r < s < \ldots)$.

Extrair uma sucessão de elementos da sucessão de conjuntos (1) é considerar uma sucessão de elementos

$$(3) \qquad \mathbf{a}_1\,,\ \mathbf{a}_2\,,\ \ldots,\ \mathbf{a}_i\,,\ \ldots$$

pertencentes respectivamente aos têrmos de (1). Mais geralmente, extrair uma sucessão de subconjuntos da sucessão (1) é considerar uma sucessão de subconjuntos dos têrmos correspondentes de (1).

Compreende-se, desta forma, o que seja uma sucessão de elementos

$$(4) \qquad \mathbf{a}_r\,,\ \mathbf{a}_s\,,\ \ldots,\ \mathbf{a}_u\,,\ \ldots$$

extraída duma subsucessão (2) de (1).

Eis agora as seguintes definições: o *limite integral* da sucessão de conjuntos (1) é o conjunto dos limites de tôdas as sucessões de elementos (4), convergentes, extraídas das diversas subsucessões (2) de (1); o *limite comum* da mesma sucessão (1) é o conjunto dos limites de tôdas as sucessões de elementos (3), convergentes, extraídas da sucessão (1). Por exemplo, se cada têrmo de ordem ímpar de (1) representar o conjunto dos números do intervalo (0, 2) e cada têrmo de ordem par o conjunto dos números do intervalo (1, 3), o limite integral da sucessão será o intervalo (0, 3) e o limite comum o intervalo (1, 2).

Representemos por $\ddot{\mathsf{A}}$ e $\dot{\mathsf{A}}$, ou por $\ddot{lim}\,\mathsf{A}_i$ e $\dot{lim}\,\mathsf{A}_i$, respectivamente o limite integral e o limite comum da sucessão de conjuntos (1).

É manifesto que entre os limites $\ddot{\mathsf{A}}$ e $\dot{\mathsf{A}}$ existe a relação $\ddot{\mathsf{A}} \mid\!> \dot{\mathsf{A}}$, quere dizer, o limite integral duma sucessão de conjuntos contém o limite comum da mesma sucessão. Também é evidente que estes limites não dependem da ordem dada aos têrmos da sucessão.

As definições de limite integral e de limite comum duma sucessão de conjuntos aplicam-se ainda ao caso particular dos têrmos da sucessão se reduzirem a simples elementos, e generalizam a definição dada de limite duma sucessão de elementos dum espaçóide. Na verdade, verificamos imediatamente que, para uma sucessão convergente de elementos

$$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_i,\ \ldots,$$

qualquer dos limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$ é constituído pelos limites $lim\,\mathbf{a}_i$ (todos juxtapostos entre si, como sabemos).

O limite integral duma sucessão de elementos é o respectivo derivado, e existirá tôdas as vezes que esta sucessão admitir uma subsucessão limitada [*p.* 18, *l.* 6]; o limite comum só existirá quando a sucesssão fôr convergente.

Retomando o caso geral duma sucessão de conjuntos (1), podemos dizer que os limites integral e comum são respectivamente a soma dos limites integrais e a soma dos limites comuns de tôdas as sucessões de elementos extraídas da sucessão dada (1).

Dissemos mais atrás [*p.* 24, *l.* 13] que a operação por meio da qual formamos o lugar dum conjunto é distributiva em relação à soma dum número finito de parcelas, e que pode não acontecer o mesmo no caso destas serem em número infinito. A êste respeito notemos agora que, numa sucessão infinita de conjuntos quaisquer, o lugar da soma dos têrmos é a soma do limite integral com os lugares dos têrmos da mesma sucessão:

$$[\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2+\cdots+\mathbf{A}_i+\cdots]\ |\ \ddot{\mathbf{A}}+[\mathbf{A}_1]+[\mathbf{A}_2]+\cdots+[\mathbf{A}_i]+\cdots.$$

Observação. — Descendo ao caso particular do conjunto **P** dos pontos dum espaço ordinário, é manifesto que as definições de limite integral e de limite comum são distintas das definições de *limite completo* e de *limite restrito* duma sucessão de conjuntos (1). Aquelas definições generalizam a definição habitual de limite duma sucessão de pontos; estas não generalizam.

A existência dos limites completo e restrito implica a existência dos limites integral e comum; estes contêm respectivamente aquêles, como é evidente.

Dum modo geral podemos dizer que não se verificam outras relações entre tais limites. Todavia, nas sucessões decrescentes

---

(1) Os limites completo e restrito duma sucessão de conjuntos foram considerados pela primeira vez por E. Borel (*Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 18).

de conjuntos fechados, os limites completo e integral (ou os limites restrito e comum) coincidem necessàriamente; com efeito, se numa sucessão de conjuntos fechados cada têrmo contém o imediatamente seguinte, qualquer dos mencionados limites reduz-se ao produto de todos os têrmos da sucessão.

Os limites completo e restrito aparecem na teoria da medida dos conjuntos e dos integrais definidos; os limites integral e comum têm aplicações de carácter inteiramente diferente, como veremos.

34. Algumas propriedades dos limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$. — *Podemos caracterizar um elemento qualquer* $\mathbf{a}$ *do limite integral* $\ddot{\mathbf{A}}$ *da sucessão de conjuntos (1) pela condição necessária e suficiente de existir uma subsucessão (2) de (1) de modo que seja* $\lim \underline{\mathbf{a}\mathbf{A}_u}=0$.

Com efeito, um elemento $\mathbf{a}$ de $\ddot{\mathbf{A}}$ é limite duma sucessão de elementos (4), extraída duma subsucessão (2) de (1), e temos

$$\lim \underline{\mathbf{a}\mathbf{A}_u} \leqq \lim \underline{\mathbf{a}\mathbf{a}_u}=0 .$$

Recìprocamente, suponhamos que um determinado elemento $\mathbf{a}$ tem por correspondente uma subsucessão (2) de (1) de forma que seja $\lim \underline{\mathbf{a}\mathbf{A}_u}=0$. Considerando uma sucessão de elementos (4) extraída de (2) e sujeita à condição

$$\underline{\mathbf{a}\mathbf{a}_u} < \underline{\mathbf{a}\mathbf{A}_u}+\frac{1}{u} \quad (u=r,\, s,\, \ldots),$$

temos $\lim \underline{\mathbf{a}\mathbf{a}_u}=0$. Logo o elemento $\mathbf{a}$ pertence a $\ddot{\mathbf{A}}$.

Um elemento qualquer $\mathbf{a}$ *do limite comum* $\dot{\mathbf{A}}$ *da sucessão de conjuntos (1) é caracterizado pela condição necessária e suficiente de ser* $\lim \underline{\mathbf{a}\mathbf{A}_i}=0$.

A demonstração é análoga à da proposição antecedente.

O limite integral duma sucessão de conjuntos (1) é a soma dos limites comuns das diversas subsucessões de (1).

Esta proposição resulta manifestamente das definições dadas para os limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$.

O limite comum duma sucessão de conjuntos (1), quando existe, é o produto dos limites integrais das diversas subsucessões de (1).

Com efeito, o limite $\dot{\mathbf{A}}$ da sucessão de conjuntos (1) está contido, evidentemente, no produto dos limites integrais das subsucessões de (1). Êste produto, por sua vez, está contido em $\dot{\mathbf{A}}$, porque, se um elemento $\mathbf{a}$ do referido produto não verificasse a condição $lim\, \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_i} = 0$ a que deve satisfazer um elemento de $\dot{\mathbf{A}}$, teríamos

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} > \varepsilon \quad (u = r, s, \ldots)$$

para um certo número positivo ε e para uma certa subsucessão (2) de (1), o que seria incompatível com a condição de o elemento $\mathbf{a}$ pertencer ao limite integral da sucessão (2).

O limite integral duma sucessão de conjuntos é um conjunto totalmente fechado.

Para demonstrar que o limite integral $\ddot{\mathbf{A}}$ da sucessão (1) é um conjunto totalmente fechado, consideremos um limite $\mathbf{a}'$ duma sucessão convergente, qualquer, de elementos de $\ddot{\mathbf{A}}$,

(5) $$\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_i, \ldots.$$

A cada têrmo $\mathbf{a}'_i$ desta sucessão façamos corresponder um elemento $\mathbf{a}_u$ dum têrmo $\mathbf{A}_u$ de (1) de modo que u seja crescente com i e que se verifique a desigualdade $\overline{\mathbf{a}'_i\,\mathbf{a}_u} < \frac{1}{i}$. Os têrmos da sucessão (5) encontram-se assim em correspondência com os têrmos duma outra

(6) $$\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s, \ldots, \mathbf{a}_u, \ldots$$

extraída duma subsucessão de (1) e, visto ser $lim\, \overline{\mathbf{a}'_i\,\mathbf{a}_u} = 0$, a sucessão (6) converge para o limite $\mathbf{a}'$ [*p.* 20, *l.* 27]. O elemento $\mathbf{a}'$ pertence, pois, ao conjunto $\ddot{\mathbf{A}}$ (1).

(1) Esta proposição faz ver, mais uma vez, que o lugar $|\mathbf{A}|$ dum conjunto $\mathbf{A}$ é um conjunto totalmente fechado. Na verdade, o lugar $|\mathbf{A}|$ é o limite integral da sucessão

$$\mathbf{A}, \mathbf{A}, \ldots, \mathbf{A}, \ldots.$$

A mesma proposição também faz ver que o derivado duma sucessão de elementos é um conjunto totalmente fechado.

O limite comum duma sucessão de conjuntos é um conjunto totalmente fechado.

Com efeito, já vimos que o produto de vários conjuntos totalmente fechados ainda é um conjunto totalmente fechado [*p.* 25, *l.* 17]. Ora, o limite comum duma sucessão de conjuntos é o produto dos limites integrais das suas diversas subsucessões, e estes são conjuntos totalmente fechados como demonstrámos ùltimamente.

Se

$$(7) \qquad \mathbf{A}'_1,\ \mathbf{A}'_2, \ldots,\ \mathbf{A}'_i, \ldots$$

é uma sucessão de subconjuntos de soma limitada, extraída da sucessão (1), temos $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}'_i \ddot{\mathbf{A}}} = 0$.

Consideremos uma sucessão (7) de subconjuntos dos têrmos da mesma ordem da sucessão (1), e suponhamos que é limitada a soma

$$\mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}'_2 + \ldots + \mathbf{A}'_i + \ldots .$$

Se não fôsse $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}'_i \ddot{\mathbf{A}}} = 0$, poderíamos determinar um número $\varepsilon > 0$ e uma subsucessão

$$(8) \qquad \mathbf{A}'_r,\ \mathbf{A}'_s, \ldots,\ \mathbf{A}'_u, \ldots$$

da sucessão (7) de maneira a verificar as desigualdades

$$\overrightarrow{\mathbf{A}'_u \ddot{\mathbf{A}}} > \varepsilon \quad (u = r, s, \ldots).$$

Em cada têrmo $\mathbf{A}'_u$ existiria um elemento $\mathbf{a}_u$ que fizesse $\overline{\mathbf{a}_u \ddot{\mathbf{A}}} > \varepsilon$ e, por ser limitada a soma dos têrmos da sucessão (8), limitada seria a sucessão dos elementos

$$(9) \qquad \mathbf{a}_r,\ \mathbf{a}_s, \ldots,\ \mathbf{a}_u, \ldots .$$

Para um limite **a** desta última sucessão teríamos $\overline{\mathbf{a}\, \ddot{\mathbf{A}}} \geqq \varepsilon$ [*p.* 93, *l.* 2] e, em oposição a êste resultado, viria $\overline{\mathbf{a}\, \ddot{\mathbf{A}}} = 0$, pois o elemento **a** pertenceria a $\ddot{\mathbf{A}}$, porque a sucessão (9) é extraída da (8) e portanto da (2). A condição $lim\, \overrightarrow{\mathbf{A}'_i \ddot{\mathbf{A}}} = 0$ é, por conseguinte, verdadeira.

Se $\mathbf{A}'$ *é um subconjunto limitado do limite comum* $\dot{\mathbf{A}}$ *da sucessão de conjuntos (1), temos* $\mathit{lim}\,\overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{A}_i}=0$.

Com efeito, se não existisse o limite $\mathit{lim}\,\overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{A}_i}=0$, teríamos $\overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{A}_u}>2\varepsilon$ para um certo número positivo ε e para todos os têrmos $\mathbf{A}_u$ duma certa subsucessão (2) de (1). A cada têrmo $\mathbf{A}_u$ poderíamos opor um elemento $\mathbf{a}'_u$ de $\mathbf{A}'$ que verificasse a desigualdade $\underline{\mathbf{a}'_u\mathbf{A}_u}>2\varepsilon$, e um elemento limite $\mathbf{a}'$ da sucessão assim obtida,

$$\mathbf{a}'_r,\ \mathbf{a}'_s,\ \ldots,\ \mathbf{a}'_u,\ \ldots,$$

pertenceria necessàriamente ao limite comum $\dot{\mathbf{A}}$, pois êste é um conjunto totalmente fechado, como sabemos. Seja

$$\mathbf{a}'_{r'},\ \mathbf{a}'_{s'},\ \ldots,\ \mathbf{a}'_{u'},\ \ldots$$

uma infinidade de têrmos desta sucessão determinados de tal forma que se tenha

$$\overline{\mathbf{a}'_{u'}\mathbf{a}'}<\varepsilon\quad(u'=r',\ s',\ \ldots).$$

A relação

$$\underline{\mathbf{a}'\mathbf{A}_{u'}}\geqq\underline{\mathbf{a}'_{u'}\mathbf{A}_{u'}}-\underline{\mathbf{a}'_{u'}\mathbf{a}'},$$

que se deduz de

$$\underline{\mathbf{A}_{u'}\mathbf{a}'_{u'}}\leqq\underline{\mathbf{A}_{u'}\mathbf{a}'}+\underline{\mathbf{a}'\mathbf{a}'_{u'}}\quad[p.\ 90,\ (2)],$$

dar-nos-ia, por conseguinte,

$$\underline{\mathbf{a}'\mathbf{A}_{u'}}>\varepsilon\quad(u'=r',\ s',\ \ldots),$$

em discordância com a condição $\mathit{lim}\,\underline{\mathbf{a}'\mathbf{A}_i}=0$ a que deveria satisfazer o elemento $\mathbf{a}'$ de $\dot{\mathbf{A}}$ [*p.* 115, *l.* 23].

Conseqüentemente existe $\mathit{lim}\,\overrightarrow{\mathbf{A}'\mathbf{A}_i}=0$.

35. Casos de existência e de coincidência dos limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$ (1). — O limite integral duma sucessão de conjuntos (1) existirá sempre que pudermos extrair desta sucessão uma de ele-

---

(1) No capítulo V estudaremos outros casos de existência e de coincidência dos limites $\ddot{\mathbf{A}}$ e $\dot{\mathbf{A}}$ além dos que vamos agora considerar.

mentos que por sua vez admita uma subsucessão limitada. Assim, se fôr limitado o conjunto soma

$$\mathsf{A}_1+\mathsf{A}_2+\ldots+\mathsf{A}_i+\ldots,$$

o limite integral existirá necessàriamente.

O limite comum duma sucessão de conjuntos pode não existir, ainda que seja limitada a soma dêstes conjuntos. É o que acontece com uma simples sucessão de elementos que seja divergente.

Acêrca da existência dos limites integral e comum duma sucessão de conjuntos quaisquer, eis as seguintes proposições:

Dada a sucessão de conjuntos (1), se fôr $\lim \overrightarrow{\mathsf{A}_{i'}\mathsf{A}_i}=0\ (i'<i)$ (1) *existirão os limites* $\ddot{\mathsf{A}}$ *e* $\dot{\mathsf{A}}$ *e teremos* $\ddot{\mathsf{A}} \mid \dot{\mathsf{A}}$.

Comecemos por considerar um determinado elemento $\mathfrak{b}$ e escrevamos a relação

$$\underline{\mathfrak{b}\,\mathsf{A}_i} \lesssim \underline{\mathfrak{b}\,\mathsf{A}_{i'}}+\overrightarrow{\mathsf{A}_{i'}\mathsf{A}_i} \quad [p.\ 99,\ (6)].$$

Dado um número $\delta>0$ e admitindo a condição do enunciado, podemos fixar o índice i' de forma que seja $\overrightarrow{\mathsf{A}_{i'}\mathsf{A}_i}<\delta$ para qualquer inteiro $i>i'$. A relação anterior dá então, para estes valores de i,

$$\underline{\mathfrak{b}\,\mathsf{A}_i} \lesssim \underline{\mathfrak{b}\,\mathsf{A}_{i'}}+\delta .$$

Conseqüentemente é limitado o conjunto das distâncias reduzidas $\underline{\mathfrak{b}\,\mathsf{A}_i}$ $(i>i')$, e o mesmo sucede ao conjunto de tôdas as distâncias reduzidas $\underline{\mathfrak{b}\,\mathsf{A}_i}$ $(i=1,2,\ldots)$.

Dito isto, se tomarmos em cada conjunto A_i um elemento $\mathfrak{a}_i$ tal que seja

$$\underline{\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}_i}<\underline{\mathfrak{b}\,\mathsf{A}_i}+\delta \quad (i=1,2,\ldots),$$

obteremos uma sucessão de elementos

$$\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_i,\ \ldots,$$

(1) Os inteiros i e i' tendem de qualquer forma para infinito, mas respeitando a relação $i'<i$.

sucessão esta que é limitada por ser limitado o conjunto das distâncias de cada têrmo a um determinado elemento $\mathbf{b}$. O derivado desta sucessão faz parte do limite integral de (1), que existe por conseguinte.

Para demonstrar a existência de $\dot{\mathbf{A}}$ e a relação $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$ consideremos um elemento $\mathbf{a}$ de $\ddot{\mathbf{A}}$ e determinemos uma subsucessão (2) de (1) de modo que se tenha $\lim \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} = 0$. Como é também $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_u\mathbf{A}_i} = 0$ $(u < i)$ (1), a relação

$$\underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_i} \lessgtr \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_u} + \overrightarrow{\mathbf{A}_u\mathbf{A}_i}$$

dá $\lim \underline{\mathbf{a}\,\mathbf{A}_i} = 0$, quere dizer, o elemento $\mathbf{a}$ pertence ao limite comum da sucessão (1) [*p.* 115, *l.* 23], que existe portanto. Torna-se assim manifesta a relação $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$.

Dada a sucessão de conjuntos (1), se fôr $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$ $(i > i')$ *e se existir* $\ddot{\mathbf{A}}$, *também existirá* $\dot{\mathbf{A}}$ *e teremos* $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$.

A demonstração segue as mesmas linhas da segunda parte da demonstração do enunciado anterior; simplesmente devemos substituir a desigualdade $u < i$ por $u > i$ (2).

A-propósito da existência do limite comum duma sucessão de conjuntos acrescentemos ainda as seguintes proposições:

Para que uma dada sucessão de conjuntos (1) admita um

---

(1) Para conservar a relação $u < i$ podemos fazer tender i para infinito através dos valores

$$i = r + 1,\ r + 2,\ \ldots,$$

e dar sempre a u o valor do têrmo da sucessão r, s, ... imediatamente menor do que i. Por outras palavras: para o cálculo do limite $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_u\mathbf{A}_i}$, a sucessão dos desvios $\overrightarrow{\mathbf{A}_u\mathbf{A}_i}$ pode ser a seguinte:

$$\overrightarrow{\mathbf{A}_r\mathbf{A}_{r+1}},\ \overrightarrow{\mathbf{A}_r\mathbf{A}_{r+2}},\ \ldots,\ \overrightarrow{\mathbf{A}_r\mathbf{A}_s},\ \overrightarrow{\mathbf{A}_s\mathbf{A}_{s+1}},\ \ldots.$$

(2) Para manter a relação $u > i$ no cálculo do limite $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_u\mathbf{A}_i}$, basta considerar a sucessão dos desvios

$$\overrightarrow{\mathbf{A}_r\mathbf{A}_1},\ \overrightarrow{\mathbf{A}_s\mathbf{A}_2},\ \ldots$$

dos têrmos da sucessão (2) aos têrmos correspondentes da sucessão (1).

limite comum é necessário e suficiente que tôdas as subsucessões de (1) admitam limites integrais e que exista o produto de todos estes limites. Tal produto é o limite comum da sucessão (1).

É o que se depreende da demonstração do enunciado que se encontra a *p.* 115, *l.* 31.

Para que a sucessão de conjuntos (1) admita um limite comum é necessário e suficiente que tôdas as subsucessões de (1) admitam limites integrais e que exista o produto de quaisquer dêstes limites tomados em número finito, supondo um deles limitado.

Efectivamente, como tais limites integrais são conjuntos totalmente fechados [*p.* 116, *l.* 11], segue-se que, se existir o produto de quaisquer dêsses limites tomados em número finito e se um deles fôr limitado, também existirá o produto de todos [*p.* 25, *l.* 25], que é o limite comum da sucessão (1) (1).

36. Comparação dos limites integrais e comuns de certas sucessões de conjuntos. — *Dadas duas sucessões de conjuntos*

$$\text{(10)} \qquad \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_i, \ldots$$

$$\text{(11)} \qquad \mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \ldots, \mathsf{B}_i, \ldots,$$

se fôr $lim\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \mathsf{B}_i} = 0$, *teremos as relações* $\ddot{\mathsf{A}} \,|\!< \ddot{\mathsf{B}}$ *e* $\dot{\mathsf{A}} \,|\!< \dot{\mathsf{B}}$.

Com efeito, a um elemento a de $\ddot{\mathsf{A}}$ corresponde uma subsucessão de (10),

$$\mathsf{A}_r, \mathsf{A}_s, \ldots, \mathsf{A}_u, \ldots,$$

tal que é $lim\, \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{A}_u} = 0$ [*p.* 115, *l.* 10]. Mas a relação

$$\underline{\mathsf{a}\,\mathsf{B}_u} \lesssim \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{A}_u} + \overrightarrow{\mathsf{A}_u \mathsf{B}_u}$$

também dá $lim\, \underline{\mathsf{a}\,\mathsf{B}_u} = 0$. Logo o elemento a pertence a $\ddot{\mathsf{B}}$ e temos $\ddot{\mathsf{A}} \,|\!< \ddot{\mathsf{B}}$.

Da mesma forma se demonstra a relação $\dot{\mathsf{A}} \,|\!< \dot{\mathsf{B}}$.

---

(1) Importa observar que esta proposição não tem interferência alguma nas demonstrações que mais adiante apresentaremos [*n.os* 43 e 83] do teorema a *p.* 25, *l.* 25, no qual baseámos a referida proposição.

São evidentes os seguintes corolários:

Se entre os têrmos de duas sucessões de conjuntos (10) e (11) existirem as relações

$$\mathbf{A}_1 | {<} \mathbf{B}_1 , \ \mathbf{A}_2 | {<} \mathbf{B}_2 , \ \ldots , \ \mathbf{A}_i | {<} \mathbf{B}_i , \ \ldots ,$$

também será $\ddot{\mathbf{A}} | {<} \ddot{\mathbf{B}}$ *e* $\dot{\mathbf{A}} | {<} \dot{\mathbf{B}}$.

Se fôr $lim \, \overrightarrow{\mathbf{A}_i \mathbf{B}} = 0$, *teremos* $\ddot{\mathbf{A}} | {<} [\mathbf{B}]$; *se fôr* $lim \, \overrightarrow{\mathbf{B} \mathbf{A}_i} = 0$, *teremos* $[\mathbf{B}] | {<} \dot{\mathbf{A}}$.

Porque o conjunto $[\mathbf{B}]$ pode considerar-se limite integral e limite comum da sucessão

$$\mathbf{B} , \mathbf{B} , \ . \ , \mathbf{B} , \ldots .$$

Se fôr $lim \, \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{B}_i} = 0$, *teremos* $\ddot{\mathbf{A}} \mid \ddot{\mathbf{B}}$ *e* $\dot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{B}}$.

Em particular:

Se fôr $lim \, \overline{\mathbf{A}_i \mathbf{B}} = 0$, *teremos* $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}} \mid [\mathbf{B}]$.

Os limites integral e comum duma sucessão de conjuntos são os mesmos limites da sucessão dos lugares dos têrmos da primeira.

Com efeito, dada a sucessão de conjuntos (1), temos $\overline{\mathbf{A}_i [\mathbf{A}_i]} = 0$, donde vem $lim \, \overline{\mathbf{A}_i [\mathbf{A}_i]} = 0$, que nos dá, como já sabemos,

$$\ddot{lim} \, \mathbf{A}_i \mid \ddot{lim} [\mathbf{A}_i] \quad \text{e} \quad \dot{lim} \, \mathbf{A}_i \mid \dot{lim} [\mathbf{A}_i] .$$

Os limites integral e comum duma sucessão de conjuntos não se alteram, por conseqüência, quando todos ou alguns dêsses conjuntos se substituem por outros que admitem os mesmos lugares que os primeiros.

Consideremos agora k sucessões de conjuntos

$$\mathbf{A}_{h,1} , \ \mathbf{A}_{h,2} , \ \ldots , \ \mathbf{A}_{h,i} , \ \ldots \tag{12}$$

$$(h = 1 , 2 , \ldots , k)$$

e seja

$$\mathbf{B}_1 , \ \mathbf{B}_2 , \ \ldots , \ \mathbf{B}_i , \ \ldots \tag{13}$$

uma sucessão formada de têrmos das sucessões (12). Cada têrmo $\mathsf{A}_{h,i}$ que figure em (13) poderá repetir-se como têrmo desta sucessão, mas apenas um número finito de vezes.

Se notarmos que a sucessão (13) contém uma infinidade de têrmos duma, pelo menos, das sucessões (12) e se atendermos ás duas primeiras proposições do *n.º* 7 [*p.* 19], veremos que:

Se as k sucessões (12) admitem o mesmo limite integral, êste contém o limite integral $\ddot{\mathsf{B}}$ *de (13).*

Se as k sucessões (12) admitem o mesmo limite comum, êste pertence ao limite comum $\dot{\mathsf{B}}$ *de (13).*

Como caso particular vem a proposição seguinte:

Dada uma sucessão de conjuntos (1) e uma subsucessão (2) da primeira, entre os limites integrais e comuns existem as relações

$$\ddot{lim}\, \mathsf{A}_i \,|\!> \ddot{lim}\, \mathsf{A}_u \quad \text{e} \quad \dot{lim}\, \mathsf{A}_i \,|\!< \dot{lim}\, \mathsf{A}_u \,.$$

37. Caso em que é limitada a soma dos têrmos duma sucessão de conjuntos. Outros modos de definir os limites $\ddot{\mathsf{A}}$ e $\dot{\mathsf{A}}$. — *O limite integral duma sucessão de conjuntos (1) de soma limitada é o menor conjunto totalmente fechado* $\ddot{\mathsf{A}}$ (1) *para o qual temos* $lim\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \ddot{\mathsf{A}}} = 0$.

Com efeito, supondo limitada a soma dos têrmos da sucessão (1), temos $lim\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \ddot{\mathsf{A}}} = 0$ como caso particular da proposição a *p.* 117, *l.* 9. Além disto também já sabemos que outro conjunto totalmente fechado B na condição $lim\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \mathsf{B}} = 0$ contém necessàriamente o limite integral $\ddot{\mathsf{A}}$ [*p.* 122, *l.* 6]. Conseqüentemente o limite $\ddot{\mathsf{A}}$ é o menor conjunto totalmente fechado para o qual temos $lim\, \overrightarrow{\mathsf{A}_i \ddot{\mathsf{A}}} = 0$.

O limite comum duma sucessão de conjuntos (1) de soma limitada é o maior conjunto $\dot{\mathsf{A}}$ *para o qual temos* $lim\, \overrightarrow{\dot{\mathsf{A}} \mathsf{A}_i} = 0$.

Sendo limitada a soma dos têrmos da sucessão (1), o mesmo

(1) Já dissemos numa nota a *p.* 23 o que se entende por *maior e menor conjuntos duma dada colecção de conjuntos.*

sucede, evidentemente, ao limite comum desta sucessão. Temos, portanto, $\lim \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}_i} = 0$, como resulta da proposição a *p.* 118, *l.* 1. Mas, como qualquer outro conjunto $\mathbf{B}$ que satisfaça à condição $\lim \overrightarrow{\mathbf{B}\mathbf{A}_i} = 0$ é necessàriamente um subconjunto de $\dot{\mathbf{A}}$ [*p.* 122, *l.* 6], segue-se que o limite comum $\dot{\mathbf{A}}$ é o maior conjunto (necessàriamente fechado) que faz $\lim \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}_i} = 0$.

Notemos que a demonstração não exclui o caso de ser ilimitada a soma dos têrmos da sucessão (1), contanto-que seja limitado o respectivo limite comum. Logo, se numa sucessão de conjuntos quaisquer (1) o respectivo limite comum fôr limitado, êste será o maior conjunto $\dot{\mathbf{A}}$ para o qual temos $\lim \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}_i} = 0$.

Numa sucessão de conjuntos (1) de soma limitada, a condição $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$ *é necessária e suficiente para que seja* $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$.

A condição é necessária porque, sendo $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$, como é $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\ddot{\mathbf{A}}} = 0$ [*p.* 123, *l.* 17] e $\lim \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}_i} = 0$ [*prop. prec.*], a relação

$$\overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} \lesssim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\ddot{\mathbf{A}}} + \overrightarrow{\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}_{i'}} \quad [p.\ 98,\ (1)]$$

dá $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$.

A condição é suficiente, porque do limite $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$ resulta, em particular, que é $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$ $(i < i')$, donde se deduz a coincidência $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$ [*p.* 119, *l.* 10].

Reünindo esta proposição com as duas primeiras do *n.º* 35 [*p.* 118] podemos dizer que:

Numa sucessão de conjuntos (1) de soma limitada, uma qualquer das condições

$$\lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0\ (i < i'), \quad \lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0\ (i > i'), \quad \lim \overrightarrow{\mathbf{A}_i\mathbf{A}_{i'}} = 0$$

é necessária e suficiente para que seja $\ddot{\mathbf{A}} \mid \dot{\mathbf{A}}$.

Como vemos, duma qualquer das duas primeiras condições resulta necessàriamente a terceira, sempre que se tratar duma sucessão de conjuntos (1) de que a soma seja limitada.

Do que dissemos a *p.* 121, *l.* 6, ainda deduzimos o seguinte:

Para que uma sucessão de conjuntos, de que a soma seja limitada, admita um limite comum, é necessário e suficiente que exista *o produto dos limites integrais de quaisquer das respectivas subsucessões tomadas em número finito. O produto de todos estes limites integrais é o limite comum da sucessão proposta.*

38. Limites integral e comum duma soma e dum produto de sucessões de conjuntos. — *Se os têrmos duma dada sucessão de conjuntos*

$$\mathbf{S}_1 , \mathbf{S}_2 , \ldots , \mathbf{S}_i , \ldots$$

são somas de k conjuntos

$$\mathbf{S}_i \mid \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i + \ldots + \mathbf{V}_i$$
$$(i = 1 , 2 , \ldots),$$

temos as relações

$$\ddot{\mathbf{S}} \mid \ddot{\mathbf{A}} + \ddot{\mathbf{B}} + \ldots + \ddot{\mathbf{V}}$$

e

$$\dot{\mathbf{S}} \mid\!> \dot{\mathbf{A}} + \dot{\mathbf{B}} + \ldots + \dot{\mathbf{V}} .$$

Por outras palavras: o limite integral da soma dum número finito de sucessões (1) é a soma dos limites integrais das parcelas, e o limite comum contém a soma dos limites comuns das parcelas. Estas afirmações são evidentes.

No caso da soma duma infinidade de sucessões sòmente podemos dizer, em geral, que:

Os limites integral e comum da soma contêm respectivamente a soma dos limites integrais e a soma dos limites comuns das parcelas.

---

(1) Chamamos *soma* e *produto* de diversas sucessões de conjuntos, respectivamente à sucessão das somas e à sucessão dos produtos dos primeiros têrmos, dos segundos têrmos, etc., das mesmas sucessões. Estas sucessões chamam-se, então, *parcelas da soma* e *factores do produto*.

É claro que o produto de diversas sucessões de conjuntos pode não existir.

A soma duma sucessão de conjuntos com um conjunto $\mathbf{A}$ é a soma desta sucessão com a sucessão

$$\mathbf{A} , \mathbf{A} , \ldots , \mathbf{A} , \ldots ,$$

e identicamente se define o produto duma sucessão de conjuntos por um conjunto $\mathbf{A}$.

Consideremos, por exemplo, uma infinidade numerada de sucessões, nas quais todos os têrmos são um mesmo conjunto A, excepto o primeiro têrmo da primeira, o segundo têrmo da segunda, etc., que são substituídos por um outro conjunto B. Os limites integrais (ou comuns) destas sucessões são o lugar $[\mathsf{A}]$, a respectiva soma é o mesmo $[\mathsf{A}]$, o limite integral (ou comum) da sucessão soma é o lugar $[\mathsf{A}]+[\mathsf{B}]$ e não o lugar $[\mathsf{A}]$ se supusermos, por exemplo, que é $[\mathsf{A}]<[\mathsf{B}]$.

Os limites integral e comum do produto de diversas sucessões, em número finito ou infinito, pertencem respectivamente ao produto dos limites integrais e ao produto dos limites comuns dos factores.

Esta proposição também é evidente. No exemplo de há pouco o limite integral (ou comum) do produto das sucessões é o lugar $[\mathsf{A}\times\mathsf{B}]$ (1), o produto dos limites integrais (ou comuns) das mesmas sucessões é o lugar $[\mathsf{A}]$, e teremos $[\mathsf{A}\times\mathsf{B}]<[\mathsf{A}]$ se fôr, por exemplo, $[\mathsf{B}]<[\mathsf{A}]$.

39. Projecções dos limites integral e comum duma sucessão de conjuntos de ordem n. — *As projecções do limite integral* $\ddot{\mathsf{A}}^n$ *duma sucessão de conjuntos de ordem* n,

$$(14)\qquad \mathsf{A}^n_1,\ \mathsf{A}^n_2,\ \ldots,\ \mathsf{A}^n_i,\ \ldots,$$

pertencem aos limites integrais das correspondentes projecções da mesma sucessão.

Com efeito, seja B^k uma determinada projecção de $\ddot{\mathsf{A}}^n$ e

$$(15)\qquad \mathsf{B}^k_1,\ \mathsf{B}^k_2,\ \ldots,\ \mathsf{B}^k_i,\ \ldots$$

a correspondente projecção da sucessão proposta. Um elemento b^k de B^k é projecção dum elemento a^n de $\ddot{\mathsf{A}}^n$, e a êste elemento corresponde uma subsucessão de (14),

$$\mathsf{A}^n_r,\ \mathsf{A}^n_s,\ \ldots,\ \mathsf{A}^n_u,\ \ldots,$$

(1) Supomos que existe o produto $\mathsf{A}\times\mathsf{B}$. A relação $[\mathsf{B}]<[\mathsf{A}]$ que a seguir escrevemos, não implica necessàriamente a existência dêsse produto

tal que é $\lim \underline{\mathbf{a}^n \mathbf{A}^n_u} = 0$. Conseqüentemente de

$$\underline{\mathbf{b}^k \mathbf{B}^k_u} \lesssim \underline{\mathbf{a}^n \mathbf{A}^n_u} \quad [p.\ 89,\ l.\ 31]$$

resulta $\lim \underline{\mathbf{b}^k \mathbf{B}^k_u} = 0$, quere dizer, o elemento $\mathbf{b}^k$ pertence ao limite integral $\ddot{\mathbf{B}}^k$ da sucessão (15). Temos, portanto, $\mathbf{B}^k | < \ddot{\mathbf{B}}^k$, como desejávamos provar.

Notemos que a coincidência $\mathbf{B}^k \mid \ddot{\mathbf{B}}^k$ pode não dar-se necessàriamente; basta recordar que, para $\ddot{\mathbf{A}}^n$ ilimitado, $\mathbf{B}^k$ pode não ser um conjunto fechado [*p.* 41, *l.* 10]. Um outro exemplo é a sucessão dos segmentos do plano $x\,O\,y$ que unem o ponto $(1, 0)$ aos pontos

$$(0,1),\ (0,2),\ \ldots,\ (0,i),\ \ldots,$$

pois que o limite integral desta sucessão é a semirecta $x = 1$ com $y \gtrless 0$, a projecção do limite integral sôbre o eixo $O\,x$ é o ponto $(1, 0)$ e o limite integral da sucessão das projecções dêsses segmentos é o segmento do eixo $O\,x$ que une a origem ao ponto $(1, 0)$.

Da mesma forma se demonstra a proposição seguinte:

As projecções do limite comum da sucessão de conjuntos (14) pertencem aos limites comuns das correspondentes projecções da mesma sucessão.

Se a soma dos conjuntos (14) é limitada, as projecções do limite integral $\ddot{\mathbf{A}}^n$ *são os limites integrais das correspondentes projecções da mesma sucessão.*

Com efeito, no caso em que é limitada a soma dos têrmos da sucessão (14), o limite integral $\ddot{\mathbf{A}}^n$ satisfaz à condição $\lim \overrightarrow{\mathbf{A}^n_i \ddot{\mathbf{A}}^n} = 0$ [*p.* 123, *l.* 17] e, por ser

$$\overrightarrow{\mathbf{B}^k_i \mathbf{B}^k} \lesssim \overrightarrow{\mathbf{A}^n_i \ddot{\mathbf{A}}^n} \quad [p.\ 98,\ l.\ 3],$$

temos da mesma forma $\lim \overrightarrow{\mathbf{B}^k_i \mathbf{B}^k} = 0$. Daqui deduz-se $\ddot{\mathbf{B}}^k | < \mathbf{B}^k$ [*p.* 122, *l.* 6], porque $\mathbf{B}^k$ é um conjunto totalmente fechado [*p.* 41, *l.* 19], relação esta que, juntamente com a já demonstrada $\mathbf{B}^k | < \ddot{\mathbf{B}}^k$, dá $\mathbf{B}^k \mid \ddot{\mathbf{B}}^k$. Logo, quando nos referirmos a uma sucessão de conjuntos cuja soma seja limitada poderemos dizer, resumidamente, que os limites integrais das projecções são as projecções dos limites integrais.

Observação. — Não é verdadeira, em todos os casos, a proposição análoga para o limite comum. Por exemplo, supondo que se trata duma sucessão de conjuntos de pontos do plano xOy, se cada têrmo de ordem ímpar é o segmento de recta de extremos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, e cada têrmo de ordem par o segmento de extremos $(1, 0)$ e $(0, 1)$, o limite comum da sucessão é o ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ de intersecção dêsses segmentos, a primeira projecção do limite comum é $\frac{1}{2}$ e o limite comum da sucessão das primeiras projecções dêsses segmentos é o segmento de extremos $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

II

ESPAÇAMENTO DO CONJUNTO DOS SUBCONJUNTOS LIMITADOS DE $\mathbf{P}$

40. Juxtaposição de conjuntos. — Apresentámos já uma definição geral de distância entre dois conjuntos, mas esta distância, definida com tão grande generalidade, torna-se infinita nalguns casos: quando um dos conjuntos é limitado e o outro ilimitado, e ainda, possìvelmente, quando ambos os conjuntos são ilimitados [*p.* 102, *nota*]. A-fim-de evitar estes casos particulares na definição de distância entre dois conjuntos — como é necessário para que estes sejam elementos dum espaçóide — consideremos por agora, sòmente conjuntos limitados.

Seguindo as mesmas denominações que no *n.º* 1, diremos que os conjuntos $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são juxtapostos um ao outro ($\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$) quando fôr $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} = 0$. Dois conjuntos são, pois, juxtapostos quando cada elemento de qualquer deles é limite duma sucessão de elementos do outro, isto é, quando todo o esferóide de centro num elemento de qualquer dêstes conjuntos contém um elemento do outro.

Já vimos que da condição $\overline{\mathbf{A}\mathbf{B}} = 0$ se conclui $[\mathbf{A}] \mid [\mathbf{B}]$ e recìprocamente [*p.* 103, *l.* 32]. Logo, para que dois conjuntos sejam juxtapostos, é necessário e suficiente que admitam o mesmo lugar, ou, o que é o mesmo, é necessário e suficiente que cada um deles seja um subconjunto do lugar do outro [*p.* 23, *l.* 19]. Por exemplo, o conjunto dos números racionais dum intervalo e o conjunto dos números irracionais do mesmo intervalo juxtapõem-se um ao outro.

É evidente que, se cada elemento de qualquer dos conjuntos **A** e **B** é juxtaposto a um elemento do outro, estes conjuntos são juxtapostos entre si. Dois conjuntos totalmente fechados e juxtapostos são coincidentes.

Correspondentes projecções de conjuntos juxtapostos de ordem n são igualmente conjuntos juxtapostos [*p.* 104, *l.* 12].

Observação. — Um conjunto de números reais juxtaposto a um dado intervalo é qualquer conjunto *denso* nêsse intervalo. Em geral, a definição de conjuntos juxtapostos (que abrange o caso dos conjuntos ilimitados) generaliza a definição de — *conjunto* A, *de pontos dum espaço ordinário, denso sôbre um conjunto perfeito* B *que admite o primeiro por subconjunto* (1).

41. Conjuntos limitados de conjuntos. — Representemos por (**A**) um conjunto qualquer de subconjuntos limitados **A** dum dado espaçóide **P**. Diremos que (**A**) é um conjunto limitado quando fôr limitado superiormente o conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{A}\mathbf{A}'}$ entre os conjuntos constituintes de (**A**), ou elementos de (**A**), tomados dois a dois de todos os modos possíveis. O limite superior do conjunto destas distâncias é o diâmetro de (**A**).

Um conjunto (**A**) será pròpriamente infinito quando admitir um subconjunto infinito de elementos não juxtapostos, dois quaisquer deles.

Num conjunto limitado (**A**) *também é limitado o conjunto dos diâmetros dos conjuntos constituintes de* (**A**).

Para a justificação dêste enunciado basta notar que, se **A** e **A'** são conjuntos elementos de (**A**) e Δ e Δ' os respectivos diâmetros, temos

$$|\Delta - \Delta'| \lesssim 2\overline{\mathbf{A}\mathbf{A}'} \quad [p.\ 105,\ (3)].$$

Designando por α o diâmetro de (**A**) e por δ o limite inferior dos diâmetros Δ dos conjuntos elementos de (**A**), da última re-

(1) Para esta definição veja-se, por exemplo, Vicente Gonçalves, *Lições de Cálculo e Geometria*, *p.* 55, *l.* 27.

lação deduz-se fàcilmente a seguinte:

$$(1) \qquad \Delta \lesssim \delta + 2\alpha .$$

Um conjunto (**A**) *é limitado ao mesmo tempo que a soma* **S** *dos conjuntos constituintes de* (**A**).

Sejam **a** e **a**$'$ dois elementos quaisquer do conjunto soma **S**, **A** e **A**$'$ as parcelas a que pertencem tais elementos, Δ e Δ' os diâmetros dêstes conjuntos. Podemos escrever, atendendo à relação (5) a *p.* 91,

$$(2) \qquad \overline{\mathbf{a}\mathbf{a}'} \lesssim \Delta + \Delta' + \underline{\mathbf{A}\mathbf{A}'} \lesssim \Delta + \Delta' + \overline{\mathbf{A}\mathbf{A}'} .$$

Mas, se o conjunto (**A**) é limitado, os números $\overline{\mathbf{A}\mathbf{A}'}$ admitem um limite superior, e o mesmo sucede aos números Δ [*prop. prec.*]. Por conseguinte também é limitado superiormente o conjunto das distâncias $\overline{\mathbf{a}\mathbf{a}'}$, como resulta da relação (2), quere dizer, o conjunto **S** é limitado.

Designando por α o diâmetro de (**A**) e por δ o limite inferior dos diâmetros Δ, como fizemos há pouco, das relações (1) e (2) concluímos que o diâmetro de **S** não excede o número

$$2(\delta + 2\alpha) + \alpha = 2\delta + 5\alpha .$$

Recìprocamente, suponhamos agora que **S** é um conjunto limitado e demonstremos que o mesmo acontece a (**A**). Neste caso, como os diversos conjuntos **A** são evidentemente limitados, como a distância entre dois quaisquer dêstes conjuntos é a distância entre dois elementos convenientemente determinados nos respectivos lugares [*p.* 103, *l.* 29], como estes elementos pertencem ao lugar [**S**] [*p.* 24, *l.* 17] e como [**S**] é um conjunto limitado [*p.* 23, *l.* 7], segue-se que (**A**) também é um conjunto limitado. O diâmetro de (**A**) não excede o de [**S**], isto é, não excede o de **S** [*p.* 45, *l.* 29].

42. Verificação das propriedades fundamentais. — Continuemos a considerar um determinado espaçóide **P** e todos os conjuntos limitados **A**, **B**, ... nêle contidos, únicos de que nos ocupamos, por emquanto. Designemos ainda por (**A**) um conjunto qualquer constituído por alguns dos conjuntos **A**, **B**, ...

Demonstremos agora que o conjunto de todos os conjuntos $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots$ é um novo espaçóide, supondo que adoptamos a definição já enunciada de distância entre dois conjuntos.

1) *Dados os conjuntos* A, B *e* C, *tem lugar a relação*

$$\overline{\mathsf{AC}} \lesseqgtr \overline{\mathsf{AB}} + \overline{\mathsf{BC}}.$$

É o que já demonstrámos no *n.º* 30 [*p.* 104].

2) *Se a sucessão de conjuntos*

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_i, \ldots$$

satisfaz à condição $\lim \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_{i'}} = 0$, *existe um conjunto* A *tal que temos* $\lim \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}} = 0$.

Com efeito, nesta condição, como a um dado número $\delta > 0$ corresponde um inteiro positivo k tal que temos $\overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_k} < \delta$ para todo o $i > k$, segue-se que é limitado o conjunto das distâncias

$$\overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_k} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Por conseguinte também é limitado o conjunto de tôdas as distâncias $\overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_{i'}}$ [*p.* 7, *l.* 19], assim como o conjunto soma

$$\mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \ldots + \mathsf{A}_i + \ldots.$$

Existe, portanto, o limite integral $\ddot{\mathsf{A}}$ e, da condição $\lim \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_{i'}} = 0$(1), vem $\ddot{\mathsf{A}} \mid \dot{\mathsf{A}}$ [*p.* 124, *l.* 12].

Ora, designando por A êste limite único, temos $\lim \overrightarrow{\mathsf{A}_i \mathsf{A}} = 0$ e $\lim \overrightarrow{\mathsf{A} \mathsf{A}_i} = 0$, por se tratar duma sucessão de conjuntos cuja soma é limitada [*p.* 123, *l.* 17 e 27], resultados estes que nos dão $\lim \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}} = 0$, como desejávamos demonstrar.

3) *É possível dividir qualquer conjunto limitado* (A) *de conjuntos* A *num número finito de partes de diâmetros menores do que um número positivo* δ *prèviamente dado.*

---

(1) É evidente que as condições $\lim \overline{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_{i'}} = 0$ e $\lim \overrightarrow{\mathsf{A}_i \mathsf{A}_{i'}} = 0$ são equivalentes.

Para tanto comecemos por dividir o conjunto S, soma dos conjuntos A constituintes de (A), num número finito de conjuntos parciais de diâmetros menores do que δ [*p.* 4, 3)] (1). Sejam

$$(3) \qquad \mathsf{S}_1, \mathsf{S}_2, \ldots, \mathsf{S}_k$$

os conjuntos parciais assim obtidos. Em seguida formemos grupos com os conjuntos A do modo seguinte: os conjuntos A contidos em S_1, os contidos em S_2, etc.; os conjuntos A (distintos dos já considerados) contidos em $\mathsf{S}_1 + \mathsf{S}_2$, os contidos em $\mathsf{S}_1 + \mathsf{S}_3$, etc. Em geral, os conjuntos A de (A) pertencentes a um mesmo grupo correspondem a determinados dos conjuntos (3),

$$(4) \qquad \mathsf{S}_r, \mathsf{S}_s, \ldots, \mathsf{S}_u,$$

da seguinte maneira: cada um daqueles conjuntos está contido na soma

$$\mathsf{S}_r + \mathsf{S}_s + \ldots + \mathsf{S}_u$$

e não em nenhuma soma de conjuntos (3) que seja formada por menor número de parcelas.

Os grupos assim constituídos são em número finito, e pode suceder que um ou outro seja desprovido de conjuntos A, como é evidente.

Demonstremos agora que os diâmetros dêsses grupos de conjuntos são menores do que o número considerado δ. Um determinado grupo corresponde, como vimos, a determinados conjuntos (4). Estes dividem qualquer conjunto A do mesmo grupo em partes:

$$\mathsf{A} \mid \mathsf{A}_r + \mathsf{A}_s + \ldots + \mathsf{A}_u,$$

sendo

$$\mathsf{A}_r \mid \mathsf{A} \times \mathsf{S}_r, \quad \mathsf{A}_s \mid \mathsf{A} \times \mathsf{S}_s, \ldots, \mathsf{A}_u \mid \mathsf{A} \times \mathsf{S}_u.$$

Temos, da mesma forma, para qualquer outro conjunto A' do referido grupo,

$$\mathsf{A}' \mid \mathsf{A}'_r + \mathsf{A}'_s + \ldots + \mathsf{A}'_u.$$

---

(1) Já demonstrámos que a soma S é um conjunto limitado [*p.* 130, *l.* 3].

Mas a distância $\overline{\mathsf{A}\mathsf{A}'}$ não excede a maior das distâncias

$$\overline{\mathsf{A}_r\mathsf{A}'_r},\ \overline{\mathsf{A}_s\mathsf{A}'_s},\ \ldots,\ \overline{\mathsf{A}_u\mathsf{A}'_u}\quad [p.\ 108,\ l.\ 21],$$

e, como estas distâncias não excedem respectivamente os diâmetros dos conjuntos (4), vem $\overline{\mathsf{A}\mathsf{A}'} < \delta$. Por conseguinte o diâmetro de cada grupo não excede o número δ, como desejávamos demonstrar.

43. Demonstração dum teorema de Riesz-Sierpinski. — Como aplicação da doutrina exposta anteriormente apresentemos a seguinte demonstração dum teorema de Riesz-Sierpinski, já enunciado a *p.* 25, e estendido a conjuntos de elementos dum espaçóide qualquer:

Para que exista o produto duma infinidade de conjuntos totalmente fechados, um dos quais supomos limitado, é necessário e suficiente que exista o produto de quaisquer dêsses conjuntos tomados em número finito.

A condição é manifestamente necessária. Para demonstrar que é suficiente suponhamos, primeiro, que a soma dos conjuntos dados A é limitada. Neste caso o conjunto (A) de todos os conjuntos A também é limitado [*p.* 130, *l.* 3], e podemos, por isso, dividi-lo num número finito de subconjuntos (A') de diâmetros inferiores a um número dado $\frac{1}{i}$. Tomemos um só conjunto elemento A' de cada subconjunto (A'), seja A_i o produto dêstes conjuntos A', que existe por hipótese, e demonstremos que é verdadeira a desigualdade $\overline{\mathsf{A}_i\mathsf{A}} < \frac{1}{i}$, seja qual fôr o elemento A do conjunto (A). Com efeito, se (A') é o subconjunto de (A) a que pertence o elemento dado A, e se A' é o elemento de (A') que é factor na formação do produto A_i, temos, em virtude da relação $\mathsf{A}_i | < \mathsf{A}'$,

$$\overrightarrow{\mathsf{A}_i\mathsf{A}} \lesssim \overrightarrow{\mathsf{A}'\mathsf{A}} \lesssim \overline{\mathsf{A}'\mathsf{A}} < \frac{1}{i}.$$

Procedendo desta maneira para todos os valores inteiros e positivos de i, obtemos a sucessão de conjuntos

$$\mathsf{A}_1,\ \mathsf{A}_2,\ \ldots,\ \mathsf{A}_i,\ \ldots,$$

sucessão esta que admite um limite integral $\ddot{\mathsf{A}}$ [*p.* 119, *l.* 2], e na qual é *lim* $\overrightarrow{\mathsf{A}_i\mathsf{A}}=0$ seja qual fôr o elemento A de (A). Daqui resulta que o limite integral $\ddot{\mathsf{A}}$ satisfaz à condição $\ddot{\mathsf{A}} | < \mathsf{A}$, porque A é um conjunto totalmente fechado [*p.* 122, *l.* 6]. Como vemos, existe o produto de todos os conjuntos dados A, pois o limite integral $\ddot{\mathsf{A}}$ pertence a qualquer deles.

Podemos até afirmar que $\ddot{\mathsf{A}}$ coincide com o produto de todos os conjuntos A, porque êste produto está evidentemente contido em qualquer dos têrmos da sucessão anterior e, por conseguinte, está contido no limite $\ddot{\mathsf{A}}$.

Suponhamos agora que a soma dos conjuntos A é ilimitada. Entre estes existe, por hipótese, um conjunto limitado que designamos por A'. Substituamos cada um dos restantes conjuntos A pelo correspondente produto $\mathsf{B} \mid \mathsf{A}' \times \mathsf{A}$. Como existe o produto de A' por quaisquer dos conjuntos A em número finito, também existe evidentemente o produto de quaisquer dos conjuntos B em número finito. Logo existe o produto de todos os conjuntos B (porque é limitada a respectiva soma), que é o produto de todos os conjuntos dados (1).

O teorema que acabámos de demonstrar pode generalizar-se do seguinte modo:

Para que exista o produto duma infinidade de conjuntos totalmente fechados, é necessário e suficiente que exista o produto de quaisquer dêsses conjuntos tomados em número finito, supondo que um dos produtos é limitado.

Com efeito, como na infinidade de conjuntos dados existem alguns, em número finito, que, por hipótese, admitem um produto limitado, segue-se que, se substituirmos na mesma infinidade estes últimos conjuntos pelo respectivo produto, obteremos uma nova infinidade de conjuntos mas nas condições do teorema precedente. Ora o produto dos conjuntos da nova infinidade é justamente o produto de todos os conjuntos dados.

44. Espaçóides de conjuntos de origem P. — A teoria que desenvolvemos precedentemente mostra, em resumo, como *espaçar* o conjunto P_1 dos subconjuntos dum determinado espaçóide

---

(1) Veremos no *n.º* 83 uma outra demonstração dêste teorema.

P (1). Diremos, então, que o espaçóide P é a *base* do novo espaçóide P_1.

Da mesma forma podemos *espaçar* o conjunto P_2 dos subconjuntos de P_1, depois o conjunto P_3 dos subconjuntos de P_2, e assim sucessivamente. Sabemos construir, portanto, uma infinidade de espaçóides

$$(5) \qquad \mathsf{P}_1, \mathsf{P}_2, \ldots, \mathsf{P}_i, \ldots,$$

de natureza diferente dos já considerados no *n.º* 13 [*p.* 36], por meio da — *formação de conjuntos de conjuntos* — aplicada sucessivamente a partir dum certo espaçóide P.

Aos conjuntos (5) chamamos *espaçóides de conjuntos* e ao conjunto P a *origem* dos mesmos espaçóides. Dizemos que estes são respectivamente de primeira espécie, de segunda espécie, etc., em relação à origem P.

Quando esta origem fôr o conjunto de todos os números reais e imaginários, obteremos os *espaçóides numéricos de conjuntos*, que podem ser de primeira espécie, de segunda espécie, etc. Também chamamos espaçóide numérico de conjuntos a qualquer espaçóide contido num dos precedentes.

Observação. — É evidente que o conjunto P pertence a P_1, pois consideram-se subconjuntos particulares de P os seus próprios elementos. De igual modo se nota que P_1 pertence a P_2, que êste pertence a P_3 e que, em geral, cada têrmo da sucessão (5) pertence ao têrmo imediatamente seguinte. Logo cada têrmo P_i admite por subconjuntos todos os têrmos de ordem inferior a i.

Somos levados, por conseqüência, à consideração do conjunto

$$\mathsf{S} \mid \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2 + \cdots + \mathsf{P}_i + \cdots$$

da totalidade dos elementos dos conjuntos P_i $(i = 1, 2, \ldots)$, pois encontra-se naturalmente definida a distância entre dois elementos quaisquer da soma S: dois elementos de S pertencem, na verdade, a um mesmo conjunto P_i. A relação fundamental

(1) Continuamos a considerar sòmente os subconjuntos de P que são limitados. Esta restrição é de resto indispensável para o *espaçamento* de P_1, como veremos numa observação que se encontra no final do *n.º* 55.

entre distâncias é evidentemente verdadeira mas, a-pesar-disso, tal definição de distância não leva o conjunto S à classe dos espaçóides, visto não obedecer, como vamos verificar, a tôdas as propriedades características dêstes conjuntos.

Com efeito, observemos, por exemplo, que não é possível dividir todo o subconjunto limitado de S num número finito de conjuntos de diâmetros menores do que um número positivo qualquer prèviamente dado. Para citar um caso simples, tomemos dois elementos a e b de P, não juxtapostos um ao outro, e consideremos o subconjunto A de S constituído pelos elementos

$$\mathsf{a}\,,\ \mathsf{b}\,,\ \mathsf{A}_1\,,\ \mathsf{A}_2\,,\ \ldots\,,\ \mathsf{A}_i\,,\ \ldots\,,$$

em que: A_1 é o conjunto dos elementos a e b; A_2 é o conjunto dos elementos a, b e A_1; em geral A_i é o conjunto dos elementos

$$\mathsf{a}\,,\ \mathsf{b}\,,\ \mathsf{A}_1\,,\ \mathsf{A}_2\,,\ \ldots\,,\ \mathsf{A}_{i-1}\,.$$

Fàcilmente reconhecemos, por indução, que a distância entre dois elementos quaisquer de A é igual a $\overline{\mathsf{ab}}$. O conjunto A é, pois, limitado e de diâmetro $\overline{\mathsf{ab}}$, mas não podemos dividi-lo num número finito de partes de diâmetros inferiores à distância $\overline{\mathsf{ab}}$, como é evidente. Êste conjunto A não satisfaz ao enunciado de Bolzano-Weierstrass: é limitado e pròpriamente infinito mas não admite elemento limite algum.

45. Espaçóides, em geral, de origem P. — As duas operações — *composição de conjuntos e formação de conjuntos de conjuntos* — permitem-nos construir ainda outros espaçóides (a começar por um certo espaçóide P) de formas mais complicadas (em relação a P) do que os já mencionados nos *n.os* 13 e 44. De facto, os espaçóides de conjuntos de origem P podem figurar como origens na formação de espaçóides compostos, e estes, por sua vez, servem de origens a novas infinidades de espaçóides de conjuntos.

Todos os espaçóides que se obtêm por intermédio das aludidas operações aplicadas a partir dum dado conjunto P podem dispor-se numa infinidade numerada de grupos, como a seguir indicamos: o grupo (P_0) constituído ùnicamente pelo conjunto $\mathsf{P}_0 \mid \mathsf{P}$; o grupo (P') dos espaçóides compostos de componentes P;

o grupo (P_1) dos espaçóides de conjuntos de bases nos dos grupos (P_0) e (P') [*p.* 135, *l.* 1]; o grupo (P'') dos espaçóides compostos em cada um dos quais um dos componentes pertence a um dos grupos (P') ou (P_1), e cada um dos restantes componentes a um dos grupos (P_0), (P') ou (P_1); o grupo (P_2) dos espaçóides de conjuntos de bases nos dos grupos (P_1) e (P''). Em geral, o grupo $(\mathsf{P}^{(i)})$ é constituído pelos espaçóides compostos em cada um dos quais um dos componentes pertence a um dos grupos $(\mathsf{P}^{(i-1)})$ ou (P_{i-1}), e cada um dos restantes componentes a um dos grupos anteriores a $(\mathsf{P}^{(i)})$; o grupo (P_i) é constituído pelos espaçóides de conjuntos de bases nos dos grupos (P_{i-1}) e $(\mathsf{P}^{(i)})$.

Aos diversos conjuntos dos grupos

$$(6) \qquad (\mathsf{P}'),\ (\mathsf{P}_1),\ (\mathsf{P}''),\ (\mathsf{P}_2),\ \ldots,\ (\mathsf{P}^{(i)}),\ (\mathsf{P}_i),\ \ldots$$

chamemos, em geral, ***espaçóides de origem*** P.

Imediatamente reconhecemos que os espaçóides compostos

$$\mathsf{P}',\ \mathsf{P}'',\ \ldots,\ \mathsf{P}^{(i)},\ \ldots$$

de origem P, definidos no *n.º* 13, *p.* 36, fazem parte respectivamente dos grupos

$$(\mathsf{P}'),\ (\mathsf{P}''),\ \ldots,\ (\mathsf{P}^{(i)}),\ \ldots,$$

e que os espaçóides de conjuntos

$$\mathsf{P}_1,\ \mathsf{P}_2,\ \ldots,\ \mathsf{P}_i,\ \ldots$$

com a mesma origem P, definidos no *n.º* precedente, fazem parte respectivamente dos grupos

$$(\mathsf{P}_1),\ (\mathsf{P}_2),\ \ldots,\ (\mathsf{P}_i),\ \ldots.$$

Dizemos que os restantes espaçóides dos grupos (6) são *mixtos* em relação à origem P.

Os espaçóides dos grupos (P') e (P_1) são de *primeira espécie*, os dos grupos (P'') e (P_2) são de *segunda espécie;* em geral, dizemos que os espaçóides dos grupos ($\mathsf{P}^{(i)}$) e (P_i) são de *espécie i* em relação à origem **P**.

Damos o nome de *espaçóides numéricos,* duma maneira geral, aos espaçóides de origem no conjunto de todos os números reais e imaginários. Também damos essa designação a qualquer espaçóide contido num dêstes últimos.

Os espaçóides numéricos podem ser conjuntos compostos ou conjuntos de conjuntos; uns e outros podem ser mixtos ou não, e classificam-se em espécies como acima dissemos.

Estas breves considerações bastam para pôr em evidência a grande generalidade da teoria já exposta até agora, e para mostrar como as duas operações a que nos temos referido conduzem a espaçóides extremamente complexos em relação ao conjunto **P** tomado para origem.

46. Potência do conjunto dos espaçóides de origem P. — *É numerável o conjunto dos espaçóides de origem* **P**.

Como já dispusemos tais espaçóides numa infinidade numerada de grupos (6), obteremos a demonstração do enunciado se provarmos que os espaçóides de cada grupo constituem uma infinidade numerável.

Para isso notemos, primeiro, que:

É numerável o conjunto de todos os espaçóides compostos nos quais os componentes são têrmos duma certa infinidade numerável de espaçóides.

Efectivamente, se formarmos uma sucessão com esta infinidade de conjuntos, cada um dos referidos espaçóides compostos será determinado por um sistema de índices, em número finito, indicadores das ordens dos componentes na mesma sucessão (1).

---

(1) *É numerável qualquer conjunto cujos elementos sejam definidos por índices em número finito, embora êste número possa variar de elemento para elemento, índices êsses que tomam todos os valores inteiros positivos independentemente uns dos outros.*

Com efeito, basta notar que, se fizermos corresponder a cada elemento dum tal conjunto o número inteiro cuja decomposição em factores primos tem a forma $2^{\alpha}.3^{\beta}.\ \ldots$ sendo α, β, ... os índices de que depende êsse elemento, teremos estabelecido uma correspondência biunívoca entre os elementos do conjunto considerado e os números inteiros em cada um dos quais os factores primos diferentes são consecutivos a partir de 2.

(Deve-se a Vicente Gonçalves a idea desta demonstração)

Por conseguinte, se supusermos que os grupos anteriores a $(\mathsf{P}^{(i)})$ são numeráveis, o mesmo acontecerá ao grupo $(\mathsf{P}^{(i)})$, visto cada espaçóide dêste grupo admitir por componentes alguns dos espaçóides do grupo numerável

$$(\mathsf{P}_0)+(\mathsf{P}')+(\mathsf{P}_1)+\cdots+(\mathsf{P}^{(i-1)})+(\mathsf{P}_{i-1}).$$

O grupo (P_i) também será numerável, como é evidente. Logo, atendendo a que os grupos anteriores a (P'') são numeráveis, concluímos, por indução, que o mesmo acontece a todos os grupos da sucessão (6).

47. Os limites de conjuntos. Primeira extensão do teorema de Bolzano-Weierstrass. — Uma vez espaçado o conjunto dos subconjuntos limitados dum dado espaçóide, manter-se-á verdadeira tôda a doutrina exposta desde o princípio se imaginarmos que os elementos então considerados a, b, ... representam subconjuntos dêsse espaçóide, quaisquer mas limitados.

São verdadeiras, em particular, tôdas as definições e proposições sôbre limites de conjuntos, correspondentes às que se encontram enunciadas e demonstradas no *cap.* I, § II.

Assim, a definição de convergência duma sucessão

$$(7) \qquad \mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_i, \ldots$$

de subconjuntos limitados de P é a definição já conhecida da *p.* 12: *a sucessão (7) converge para o conjunto limitado* A *quando temos*

$$lim\, \overline{\mathsf{A}_i\mathsf{A}} = 0.$$

Também podemos dizer que uma sucessão (7) de conjuntos limitados converge para um conjunto limitado A quando cada número $\delta > 0$ determina uma ordem k tal que, para $i > k$, a um elemento qualquer de A_i ou de A corresponde um elemento de A ou de A_i a uma distância do primeiro menor do que δ.

É claro que a definição de convergência duma sucessão de subconjuntos limitados de P generaliza a definição de convergência duma simples sucessão de elementos.

É particularmente importante a seguinte extensão do teorema de BOLZANO-WEIERSTRASS, que se apresenta como resultado desta teoria:

Qualquer conjunto de conjuntos limitados, limitado e pròpriamente infinito, admite um conjunto limite.

Se atendermos a que um conjunto de conjuntos limitados é limitado ao mesmo tempo que a soma dêstes conjuntos, poderemos enunciar da seguinte forma o teorema precedente:

Qualquer conjunto pròpriamente infinito de conjuntos de soma limitada admite um conjunto limite.

Podemos afirmar, portanto, que é sempre possível extrair uma sucessão convergente de conjuntos duma sucessão qualquer de conjuntos de soma limitada.

A doutrina dos limites de conjuntos será exposta detalhadamente no capítulo imediato. Nesse mesmo capítulo generalizaremos a definição agora dada de limite duma sucessão de conjuntos; consideraremos conjuntos quaisquer, e não sòmente conjuntos limitados.

(Continua).

LUÍS BEDA NETO.

Relatórios apresentados pelo director da Faculdade de Ciências F. M. da Costa Lôbo relativos aos anos de 1930-31, 1931-32, 1932-33

1930-31

Continuaram sendo regidos todos os cursos com a habitual regularidade e zêlo, e igualmente foram executados todos os serviços que incumbem à Faculdade.

Na congregação de 19 de Janeiro de 1931 foi designado o Professor Anselmo Ferraz de Carvalho para tomar parte na comissão de aerologia por ocasião da reünião do Comité Internacional de Meteorologia em Madrid.

Na congregação de 3 de Fevereiro de 1931 resolveu a Faculdade tomar parte no Congresso das Associações portuguesa e espanhola para o progresso das ciências, o qual deveria realizar-se em Lisboa em Junho dêsse ano. Êste congresso só reüniu em Maio de 1932 e nêle colaboraram os Professores da nossa Faculdade por forma muito valiosa, como referirei na devida altura.

Na congregação de 2 de Março de 1931 apresentou o Professor Pacheco de Amorim um relatório sôbre a sua viagem de estudo em França, trabalho de grande importância especialmente pelas conclusões que expõe relativamente às aplicações da teoria das probabilidades, sobretudo à Estatística.

Na congregação de 27 de Abril de 1931 foi apresentado pelo Professor Anselmo Ferraz de Carvalho o seu relatório sôbre os trabalhos da Comissão Internacional destinada aos estudos da exploração da alta atmosfera, a qual funcionou em Madrid desde 16 a 22 de Abril do mesmo mês. As informações fornecidas são de grande valor, e o referido relatório foi muito apreciado.

Nesta mesma congregação foi encarregado o Professor Anselmo Ferraz de Carvalho de representar a Faculdade no Senado Universitário, e na congregação de 28 de Maio foi o mesmo Professor eleito representante da Faculdade de Ciências no Senado Universitário.

Na congregação de 9 de Junho do mesmo ano foi apresentado pelo Professor Anselmo Ferraz de Carvalho o 1.º número da *Revista da Faculdade,* devendo aqui consignar com reconhecimento e louvor que muito deve à sua iniciativa e acção a realização desta importante manifestação de vitalidade da Faculdade.

Na congregação de 7 de Julho foi incumbido o Professor Costa Lôbo de representar a Faculdade no Centenário de Faraday, missão de que se desempenhou em Londres, tomando na mesma ocasião parte no Congresso realizado pela British Association, no qual fêz uma conferência sôbre as suas teorias físicas, a qual foi presidida pelo Professor de Astrofísica do Imperial College de Kensington, A. Fowler.

Nesta mesma congregação foi aprovada uma proposta daquele Professor para que fôsse estudada a criação dum curso de engenheiros electrotécnicos, que compreenda o ensino de instalações hidroeléctricas, tendo chamado a atenção para a vantagem que haveria para o desenvolvimento da investigação científica de existirem no mesmo estabelecimento de ensino cursos de aplicações; e sem dúvida além do curso a que aludiu, muito importante seria também, entre outros, criar cursos de aplicação da botânica, que seriam de grande utilidade e assim seria reatada a tradição da Faculdade, e de química, que tantas e tão importantes aplicações tem.

A propósito observei a importância dada nas Universidades Americanas aos cursos de aplicação, e que para coadjuvar os cursos de electrecidade tinha assegurado o precioso concurso, desinteressado, dos Ilustres Professores da Universidade de Toulouse Drs. Camichel e Scande que ali dirigem com notável êxito os estudos hidroeléctricos debaixo da sábia direcção do Professor Camichel.

Ainda na mesma congregação foi resolvido, por aclamação, conceder o grau de *doctor honoris causa* ao Comandante Vítor Hugo de Azevedo Coutinho a quem foram tributados justificados louvores pelo seu valor científico e serviços prestados à Faculdade. Também foi resolvido testemunhar ao Engenheiro Castelo

Branco o reconhecimento da Faculdade pela sua valiosa e desinteressada colaboração no ensino de Topografia e Geodesia.

Na congregação de 30 de Julho o Professor Anselmo Ferraz de Carvalho referiu o êxito dos trabalhos realizados no Observatório Astronómico, dando conta das apreciações que estão merecendo pelos meios científicos estrangeiros.

Correspondendo a um convite muito especial, tomou o Professor Costa Lôbo parte no Congresso Nacional Francês de Astronomia, que reüniu em Paris de 21 a 23 de Julho de 1931, no qual se ocupou de vários assuntos e fêz uma larga comunicação na Comissão de Estudos Solares. Também em Setembro do mesmo ano tomou o mesmo Professor parte, em Londres, na reünião preparatória que ali teve lugar debaixo da presidência de sir Frank Dyson para o Congresso de Cambridge da União Internacional de Astronomia.

Neste ano há a registar a nomeação para Professor Catedrático do Doutor Mário Silva que tomou parte pela primeira vez na congregação de 30 de Julho, na qual lhe foi testemunhada, tanto pelo director como por todos os vogais presentes, a alta consideração que merecem as suas qualidades intelectuais e de investigador, as quais asseguram o sucesso da sua carreira de Professor. Infelizmente há também a registar o falecimento do Professor Catedrático Bernardo Aires que desempenhou com grande distinção a sua missão de Professor assinalando-se a sua direcção no Instituto de Zoologia. A Faculdade exarou nas actas das suas congregações o testemunho do seu profundo pezar.

Emquanto ao movimento da Faculdade, tanto relativamente a inscrições como exames e licenciaturas, é dado no fim do relatório de 1932 a 1933 um quadro geral relativo aos três anos académicos de 1930 a 1933.

Sôbre publições temos a registar:

Para a 1.ª secção

Relatório de uma missão ao estranjeiro; pelo Professor Diogo Pacheco de Amorim.

A determinação do azimute de precisão da mira do observa-

tório magnético do Instituto Geofísico da Universidade de Coimbra; pelo Observador Chefe do Observatório Astronómico, José António Madeira.

Para a 2.ª secção

O átomo do Hidrogénio; pelo Professor Egas Pinto Bastos.

Sur une méthode de détermination de la vie moyenne d'un ion négatif; pelo Professor Mário Silva.

Análise química da água de abastecimento da cidade de Coimbra; pelo Assistente de Química, António de Andrade Gouveia.

Radioactivité des gas spontanés de la source thermal de Luso; pelo Professor Mário Silva.

Sôbre dois métodos de determinação da probabilidade h de Thomson; pelo Professor Mário Silva.

Formation et manifestations des atomes; pelo Professor Contratado Walter Wessel.

Para a 3.ª secção

Um novo afloramento de diorito de augite, ofítico, descoberto no Pinhal de Leiria e semelhante aos que na carta geológica vêm indicados com ω; pelo Professor José Custódio de Morais.

O índice cefálico e a criminalidade; pelo Professor Eusébio Tamagnini.

Primeiro Centenário da Sociedade Geológica de França: notícia sôbre a comemoração, pelo Professor J. Custódio de Morais.

Antes de encerrar estas minhas sucintas notas relativas ao ano Académico decorrido desde Outubro de 1930 até Setembro de 1931, desejo ainda consignar aqui que no mês de Setembro imediatamente anterior a êste período teve lugar em Coimbra o Congresso Internacional de Antropologia. Teve como presidente da secção nacional portuguesa o nosso sábio colega Eusébio Tamagnini, e foi notável tanto pelo seu valor científico, como pela recepção com que Portugal e, especialmente a nossa Universidade, acolheram os seus ilustres hóspedes. Muito prestigiou a nossa Universidade que contribuíu com valiosíssimos trabalhos científicos para o seu sucesso, comprindo eu gostosamente o dever de registar a acção dos dois ilustres colegas da nossa Faculdade, Professor Eusébio Tamagnini, a quem já me referi, e Professor Barros e Cunha.

1931-1932

Continuaram sendo regidos todos os cursos com a costumada regularidade e zêlo, igualmente foram executados os mais serviços cometidos à Faculdade.

Tendo voltado a tomar parte nos trabalhos da Faculdade o Professor Aurélio Quintanilha, esta testemunhou-lhe, na congregação de 16 de Outubro, a sua satisfação e confiança no sucesso dos estudos que terá realizado.

A Faculdade foi muito absorvida durante êste ano lectivo pelas suas reclamações sôbre o ensino, e neste sentido solicitou o apoio das Faculdades de Ciências de Lisboa e Pôrto, as quais distintamente o prestaram, terminando-se pela redacção de uma exposição, de que foi relator o Professor Aurélio Quintanilha, a qual foi lida em Lisboa a suas Ex.^{cias}, o Presidente da República, Presidente do Govêrno e Ministro da Instrução Pública, apresentada por uma comissão de Professores delegados das três Faculdades. Também foi a Faculdade obrigada a gastar bastante tempo com a sua justa reclamação relativa ao pagamento de vencimentos de exercícios executados na regência de cursos, emfim atendida. Ao nosso colega Professor Egas Pinto Bastos testemunhou a Faculdade o seu reconhecimento pela eficaz intervenção que teve neste assunto, e por outros importantes serviços que lhe prestou, entre êles a distribuïção dos serviços das regências.

Resolveu a Faculdade dar todo o seu apoio às reclamações expostas pelos Engenheiros Geógrafos a-fim-de serem devidamente aproveitados os seus serviços. O director observou a propósito que para ser conseguido o desejado resultado muito conviria ampliar o curso dêstes engenheiros com algumas cadeiras de ordem geral, e congratula-se com o êxito obtido com a criação dêste curso de engenharia, de que teve a iniciativa, notando com satisfação a consideração que estão merecendo tantos diplomados pela nossa Faculdade e que estão exercendo cargos de destaque.

Na congregação de 15 de Fevereiro de 1932 foi aprovada a proposta do director para ser conferido o grau de *doctor honoris causa* ao sábio Astrónomo director do Observatório de Paris Mr. H. Deslandres, acompanhado de considerações do maior louvor para os notáveis trabalhos daquele sábio e de reconhecimento pelos serviços prestados ao nosso Observatório Astronómico.

Na congregação de 17 de Março foi resolvido comemorar o Centenário de Emile Galois com uma sessão solene e convidar para nela vir fazer uma conferência o sábio Professor do Instituto Superior Técnico, Doutor pela Faculdade de Ciências da nossa Universidade, Mira Fernandes.

A referida solenidade realizou-se com todo o brilho na Sala dos Capelos no dia 31 de Maio, e nela pronunciou o Professor Mira Fernandes uma notável conferência subordinada ao tema, — *Evolução do Conceito do grupo,* a qual foi publicada no II volume da *Revista da Faculdade.*

Na congregação de 24 de Maio de 1932 foi resolvido por aclamação conferir o grau de Doutor ao Professor Mário Silva e a 12 de Junho do mesmo ano realizou-se a cerimónia da imposição das insígnias de Doutor ao Comandante e Professor Vítor Hugo de Azevedo Coutinho, na qual foi orador o Professor Mário Silva.

A 5 de Dezembro de 1931 realizou na Sala dos Capelos uma notável conferência o Professor da Universidade de Zurich e Presidente do Congresso Internacional de Matemáticas Rodolfo Fueter, sôbre o tema, — *Quelques resultats de l'Algebre Moderne,* o qual expressamente veio a Portugal para aceder ao convite que lhe foi dirigido pela nossa Faculdade. Esta conferência encontra-se publicada no II volume da *Revista da Faculdade.*

A convite da Universidade Católica de Paris, realizou naquele importante estabelecimento científico, com a presidência de Monsenhor Baudrillart e de Branly, uma conferência sôbre *Novas teorias físicas* o Professor Costa Lôbo, a qual foi publicada no *Boletim* daquela Universidade.

Revestiu excepcional brilho a comemoração promovida pela nossa Faculdade em honra de Isaac Newton em cumprimento da deliberação tomada em congregação de 28 de Outubro de 1931 por proposta do director, a qual teve lugar a 26 de Novembro do referido ano. Nela tomaram parte sua Ex.$^{\text{cia}}$ o Embaixador da Inglaterra em Lisboa, sir Claud Russel, e o director do Observatório de Greenwich sir Frank Dyson, que expressamente veio de Inglaterra.

Nesta comemoração, da qual é feito o relato no II volume da nossa *Revista,* usaram da palavra: — sua Ex.cia sir Claud Russel, que presidiu; sir Frank Dyson que fêz uma conferência sôbre, — *A obra Astronómica de Newton;* o Professor Joaquim de Carvalho que versou o tema, — *Newton e o ideal da Ciência Moderna;* o Professor Pacheco de Amorim que expôs largamente, — *A obra Matemática de Newton;* o Professor Mário Silva ocúpou-se do tema, — *Newton experimentador;* e o Professor Costa Lobo do tema, — *O Princípio da Gravitação Universal.* Antes de ser encerrada a sessão sua Ex.cia o Reitor da Universidade, Professor João Duarte de Oliveira, congratulou-se pelo êxito desta comemoração que terminou por uma visita ao Observatório Astronómico, onde se encontrava uma exposição das obras de Newton, e foi descerrada por sua Ex.cia o Embaixador de Inglaterra uma lápide com a inscrição *Sala de Isaac Newton* colocada sôbre o portal da Sala do museu de instrumentos dedicada ao Ilustre sábio. Para esta sala ofereceu sua Ex.cia sir Claud Russel um busto de Newton, que já se encontra ali instalado.

Na congregação de 24 de Maio de 1932 entre outras foram tomadas as seguintes resoluções: — agradecer ao director geral dos edifícios públicos Engenheiro Gomes da Silva, e Engenheiro Homem de Melo, chefe dos mesmos serviços no Norte do país, o interêsse que lhes têm merecido as obras nos edifícios pertencentes à Faculdade de Ciências de Coimbra: — que o Professor Costa Lôbo representasse a Faculdade no Congresso Internacional de Astronomia de Cambridge (Estados Unidos da América): — O professor Eusébio Tamagnini no Congresso da Sociedade Alemã de Antropologia em Viena: — O Professor Mário Silva no Congresso de Electricidade de Paris.

Foi também resolvido incumbir o Professor Anselmo Ferraz de Carvalho de visitar as instalações magnéticas da Europa que julgasse poderem melhor servir-lhe para proceder às instalações do novo observatório magnético do Instituto Geofísico.

Em conseqüência do adiamento, a que já fiz referência do Congresso das Associações portuguesa e espanhola para o progresso das ciências, teve êste lugar no mês de Maio de 1932, em Lisboa, e nêle tomaram parte importante Professores da

Faculdade de Ciências de Coimbra. Pertenceu ao Professor Pacheco de Amorim o discurso inaugural da 1.ª secção (Matemática) o qual teve por tema, — *A Matemática e a economia política*. O mesmo Professor fêz uma comunicação sôbre, — *O fenómeno da probabilidade composta na teoria da probabilidade dos conjuntos*.

O Professor José Vicente Gonçalves apresentou as seguintes comunicações; — I Sôbre os máximos e mínimos de uma função real; — II Condição necessária e suficiente da compatibilidade de um sistema de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes; — III Sôbre a equação intrínseca das geodésicas de um helicóide. Além disso foram feitas as seguintes comunicações do Professor Eusébio Tamagnini, com o título, — *O índice facial superior dos portugueses;* Do Professor Mário da Silva sôbre o tema, — *Um método para a determinação da vida média dos iões negativos;* Do Assistente Gumersindo Sarmento da Costa Lôbo, — *Um estudo dos filamentos obtidos nos espectrogramas cromosféricos (risca K_3), efectuado sôbre as imagens planificadas* (sistema F. M. da Costa Lôbo): Do professor F. M. da Costa Lôbo, — I *Considerações sôbre o princípio de Newton que estabelece a independência do efeito de uma fôrça sôbre um corpo em movimento e a velocidade por êste adquirida anteriormente;* — II *Análise das riscas espectrais observadas nos espectroeliogramas;* — III As instalações do Observatório Astronómico da Universidade de Coimbra e os trabalhos nêle realizados; — IV *Um aparelho transformador de coordenadas esféricas;* — V Um projecto de organização do Estado para os países latinos. O mesmo Professor realizou uma conferência sôbre o tema, — *Intrepretação dos fenómenos da atmosfera solar*.

No Congresso Internacional realizado em Zurich, em Setembro de 1932, foi apresentada uma comunicação do Professor Costa Lôbo, delegado de Portugal, com o título, — *Démonstration du principe de la variation de l'effet d'un action sur un corps mobile avec la vitesse de ce corps*. Foi publicada nas actas do referido Congresso.

Da intervenção do Professor Costa Lôbo na Assembleia geral da União Internacional de Astronomia, que teve lugar em Cambridge (Estados Unidos da América) desde 2 a 9 de Setembro de 1932, dá conta um relatório a que depois será feita referência limitando-me aqui a notar que o mesmo Professor fêz parte das comissões internacionais, de *Longitudes,* — de *Latitudes,* — de *Física solar,* e de *Efemérides,* e que por aclamação foi votado em Assembleia geral, a conclusão prèviamente votada pela Comissão de física solar apresentada pelo Presidente S.t John nos seguintes termos: «The comission of Solar Physics, after examination of the publications of the Coimbra Observatory concerning the solar activity, ande acnowledging the great importance of that work, considering that the Observatory of Coimbra should be able to continue these observations and this important publication, considering that is necessary for the continuation of the international work that the Coimbra Observatory sends its results to Meudon and Zurich in order to make the synoptical charts and the caracter figures more complete, wishes that the Coimbra Observatory will be able to go on with its important publications and its international collaboration».

É oportuno consignar que a publicação dos *Anais do Observatório Astronómico de Coimbra* foi acolhida com testemunhos de grande aplauso manifestados directamente por muitos dos mais importantes observatórios, que motivou a visita do director do Observatório de Greenwich sir Frank Dyson e a apreciação feita na sessão de 27 de Junho de 1932 da Academia das Ciências de Paris, pelo sábio Astrónomo Mr. H. Deslandres, nos seguintes termos que constam dos *Compte Rendus* da referida Academia: «Mr. H. Deslandres presente le premier volume des *Observations solaires poursuivies à l'Observatoire de Coimbra* (Portugal) par son directeur le D.r da Costa Lôbo. On sait que cet Observatoire portugais travaille en collaboration avec notre Observatoire de Meudon qui publie avec une subvention internationale des cartes synoptiques de l'atmosphère du Soleil.

«Ce premier volume reuni toutes les observations de l'année 1929. Il reproduit les épreuves de la courbe superieure et les protuberances obtenues chaque jour à Coimbra, et ajout un dessin très original, qui, par un méthode de projection nouvelle, présente tous les details du Soleil, en conservant les surfaces. Enfin les coordonnées de tous les points interessants sont données dans des tableaux particuliers. Cette publication fait le plus grand honneur à l'Observatoire de Coimbra et à son directeur».

Além das publicações que já foram referidas a propósito da intervenção de alguns professores desta Faculdade em congressos e conferências temos ainda a registar as seguintes:

Da 1.ª secção

Theories in Physics resulting from the Phenomena of Radioactivity; pelo Professor F. M. da Costa Lôbo.

O que são as ondas de T. S. F.; pelo Professor Manuel dos Reis.

Astronomia prática — Determinação da Inclinação do eixo de rotação do instrumento circular meridiano; pelo Observador Chefe do Observatório Astronómico, José António Madeira.

Da 2.ª secção

Influência dos tactóides sôbre a tixotropia do sal de pentóxido de vanádio; pelo Professor contratado Curt Kopper.

La «Théorie physique basée sur les phénomènes de radioactivité»; pelos Professores Egas Pinto Basto e Mário Silva.

Da 3.ª secção

O magnetismo terrestre: Estado actual da sua teoria; pelo Professor Anselmo Ferraz de Carvalho.

Influências lunares sôbre o magnetismo terrestre; pelo Observador do Instituto Geofísico, Artur Dias Pratas.

Instituto Botânico da Universidade de Coimbra — Colecção de fotografias diapositivas de Angola; pelo Professor Luiz W. Carrisso.

A Antiga população das Canárias; pelo Professor Eusébio Tamagnini.

Relatório do Dr. Aurélio Quintanilha, dirigido à Junta de Educação Nacional; pelo Professor Aurélio Quintanilha.

Um afloramento do Silúrico na Beira Transmontana (Serra da Marofa); por Júlio Galhardo de Almeida.

A propósito do índice cefálico português; pelo Professor Eusébio Tamagnini.

Sôbre alguns caracteres antropométricos da população portuguesa; pelo Assistente António Armando Themido.

1932-1933

Continuaram sendo regidos todos os cursos com a costumada regularidade e zêlo, e igualmente foram executados todos os serviços que incumbem à Faculdade.

Há a registar que neste ano já houve muitos professores que forneceram aos cursos os textos dos seus apontamentos, e alguns publicaram, mesmo, as suas lições desinteressadamente.

O Professor Costa Lôbo publicou lições de Astronomia e Mecânica Celeste, o Professor Pacheco de Amorim, de Mecânica Racional e de Cálculo das Probabilidades.

O Professor Vicente Gonçalves já publicara o Tratado para o ensino do Cálculo e Análise superior, e publicou ùltimamente um tratado de Álgebra, o que representa um importante serviço.

Os professores têm geralmente reconhecido que a proficuïdade do ensino exige que os alunos disponham de textos que sirvam de guia seguro, verificando-se quanto tem sido prejudicial o uso de apontamentos tirados pelos alunos nas aulas, geralmente dificientes e abundantes em erros de doutrina.

Adoptada a referida medida os alunos não só possuïrão textos de confiança para o seu estudo, mas também disporão do tempo que lhes é indispensável, e poderão nas aulas aproveitar com grande vantagem a exposição feita pelos professores.

A Faculdade encontrou-se durante a maior parte do ano preocupada com os projectos anunciados de reforma do ensino superior. Durante bastante tempo só pôde ter conhecimento do que se passava sôbre êste assunto na Comissão para êsse fim nomeada, devido à bondade dos delegados das Faculdades de Ciências de Lisboa e Pôrto, especialmente do delegado da Faculdada de Ciências da Universidade do Pôrto, Professor Alexandre de Sousa Pinto, actualmente ilustre Ministro da Instrução Pública, que repetidas vezes veio a Coimbra dar informações e colher opiniões.

Tendo, enfim, sido nomeado para tomar parte nos referidos trabalhos o Professor da nossa Faculdade José Custódio de Morais acompanhou êste com o maior zêlo os trabalhos da Comissão sempre em harmonia com as opiniões da nossa Faculdade e excelente entendimento com os representantes das Faculdades de Lisboa e Pôrto.

No Senado Universitário repetidas vezes solicitou esclarecimentos, e reclamou para as Universidades e Faculdades as devidas regalias, o delegado da nossa Faculdade, Professor Anselmo Ferraz de Carvalho, o qual numa certa altura, a despeito das instâncias do Senado e da nossa Faculdade, solicitou instantemente a sua substituïção, tendo então sido eleito representante da Faculdade o Professor Eusébio Tamagnini.

Infelizmente todos os esforços foram vãos. Oxalá que finalmente sejam ràpidamente atendidas as aspirações das Faculdades, e organizado o ensino por forma que dêle seja tirado todo o proveito, e para isso será, sobretudo, indispensável que os professores não sejam demasiadamente sobrecarregados com regências, nem os alunos com freqüências de cursos, e que aos professores seja dada uma condigna remuneração sem serem obrigados a desperdiçar o tempo que queiram dedicar a profundas investigações científicas. A boa vontade e competência do actual titular da pasta da Instrução Pública fazem esperar que em breve serão atendidas as justas reivindicações do professorado do ensino superior, sem prejuízo de oportunamente serem também devidamente consideradas as reclamações do professorado dos outros ramos de ensino.

A opinião da nossa Faculdade pode considerar-se concretizada na seguinte moção apresentada em congregação pelo Professor Egas Pinto Basto, a qual foi aprovada por unanimidade:

«A Faculdade de Ciências entende que se impõe uma reforma do ensino Universitário que o torne digno dêste nome. Como o ensino da Faculdade de Ciências está ligado com o das escolas profissionais, a reforma deve abranger os dois ensinos. A reforma a fazer constitui um problema delicado e complicado que só pode ser resolvido por uma comissão convenientemente organizada e com largo tempo para a estudar; uma reforma séria implica um aumento de despesa. A Faculdade de Ciências manifesta-se contrária a tôdas as reformas precepitadamente estabelecidas, que, deixando o ensino universitário essencialmente na mesma, só servem para complicar e confundir a sua legislação».

Ainda debaixo do ponto de vista da intervenção da Faculdade no sentido de se conseguirem reformas que melhorem as condições do ensino universitário e da vida universitária, há a registar a proposta que na Assembleia geral dos professores foi apresentada pelo Professor Pacheco de Amorim, e que provocou a nomeação de uma comissão encarregada de propor as bases a estudar, para a qual, por parte da Faculdade de Ciências, foram eleitos os Professores Eusébio Tamagnini e Pacheco de Amorim.

Aprovadas em Assembleia geral dos professores as bases propostas por aquela comissão, em harmonia com a resolução tomada, a Faculdade de Ciências elegeu os seguintes membros para as comissões do estudo detalhado do assunto:

— *Recrutamento e condições do professorado:* Professores Anselmo Ferraz de Carvalho, Manuel Esparteiro, Mário Silva.

— *Preparação dos estudantes, exames, provas, etc.:* Professores Pacheco de Amorim, Aurélio Quintanilha, Manuel dos Reis.

— *Planos de estudos, programas, etc.:* Professores Eusébio Tamagnini, Pereira Dias, Custódio de Morais.

— *Educação física:* Professores Eusébio Tamagnini, Luiz W. Carrisso, Aurélio Quintanilha.

A Faculdade aprovou para professores catedráticos, — da primeira secção, o Dr. Manuel dos Reis, e da terceira secção, o Dr. Barros e Cunha, os quais seguramente contribuïrão para o prestígio da nossa Faculdade.

Na distribuïção do fundo Sá Pinto, feita pelo Senado Universitário, coube à Faculdade de Ciências uma parte importante, facto que revela o desejo que o Senado tem de contribuir para que sejam melhoradas as deficientes condições em que se encontra a Faculdade de Ciências para convenientemente realizar trabalhos de investigação. A Faculdade significou ao Senado o seu reconhecimento e manifestou a esperança de que numa próxima distribuïção seja particularmente atendido o Laboratório de Química merecedor de especial consideração.

É oportuno lembrar que para aplicação dêste fundo na sua primeira distribuïção duas propostas de ordem geral partiram da nossa Faculdade.

Uma do Professor Eusébio Tamagnini para a instalação de um Instituto Eugénico. Mereceu tôda a consideração, mas foi geral a opinião de que atenta a importância e despesa dêste Instituto devia ser instalado oficialmente na nossa Universidade e nesse sentido deveriam ser feitas as precisas solicitações.

Outra do Professor Egas Pinto Basto para ser feita uma instalação destinada à reunião dos Professores, a-fim-de se conseguir um maior estreitamento das suas relações. Sem dúvida esta aspiração é justificada, mas exigirá uma considerável despesa, sobretudo se a sua realização tiver lugar pela forma que julgo mais vantajosa, com a adopção do tipo da fundação universitária que, por exemplo, em Bruxelas funciona com completo êxito, em vasto edifício com importante biblioteca, salões de conferências, e aposentos para professores sobretudo estranjeiros que ali vão ocupar-se de assuntos científicos.

Na distribuïção aludida figura por forma importante relativamente aos recursos de que se dispunha o subsídio concedido ao Observatório Astronómico. Foi assim possível fazer a aquisição de uma rêde de difracção, idêntica às célebres rêdes de Rowland, como foi verificado no Observatório de Meudon, expressamente construída pelo sábio Professor Wood, da Universidade de Baltimore, objecto que pode ser considerado uma jóia, vista a dificuldade, quási insuperável, desde a morte de Rowland, para a construção de peças suficientemente perfeitas dêste género.

Com o referido subsídio foi também adquirida a aparelhagem precisa para a adaptação desta rede ao grande espectroheliógrafo do nosso Observatório Astronómico. Mas sem menos aprêço, quando tanto há que agradecer, ficaram ainda a descoberto as despesas para as instalações urgentes da recepção dos sinais horários, necessárias para que o nosso Observatório pudesse cooperar com tôda a eficiência na determinação internacional de longitudes, que teve execução em Outubro e Novembro de 1933, facto que originou grandes dificuldades, vencidas é certo emquanto à execução dos trabalhos científicos, mas não em relação à liquidação das despesas feitas, embora com rigorosa economia, e também para a instalação de um espectrohelioscópico neste momento quási completamente realizada, e que dentro em poucos dias deverá ser um facto, em condições de grande vantagem e economia, bastando notar que instalações inferiores montam a muito mais de 50:000$00, sendo justo aqui consignar que para o primeiro caso muito contribuíu a eficaz coadjuvação do Corpo de engenharia de telegrafia, e para o segundo o zêlo e capacidade demonstrada mais uma vez pelo maquinista do laboratório de física António Ferreira.

Também devo referir-me à concessão do subsídio solicitado pelo Professor Pacheco de Amorim, o qual permitiu que já tenham sido adquiridas máquinas muito necessárias e que tenham sido iniciadas debaixo da sábia direcção daquele nosso colega investigações estatísticas que asseguram o êxito de um Instituto de Estatística que muita importância virá a dar à nossa Universidade, e muito utilizará ao Estado.

Pelo Professor Luiz W. Carrisso foi tomada a iniciativa, apoiada pela Faculdade, da criação de um Instituto de Estudos Coloniais, assunto para o qual êste sábio Professor tem já dado um notável contingente. A faculdade tomou também conhecimento da transformação que, vantajosamente, foi dada à Sociedade Broteriana, notável criação do sábio Professor Júlio Henriques em 1880, e da importância reconhecida no estranjeiro ao serviço de fornecimento de sementes pelo Instituto Botânico.

A Faculdade congratulou-se com as manifestações de aprêço tributadas à publicação dos *Anais do Observatório Astronómico* na Assembleia geral da União Internacional Astronómica, realizada em Cambridge (Estados Unidos da América), onde foi apresentada pelo Professor Costa Lôbo, e na Academia das Ciências de Paris; e com a consideração que mereceu ao Congresso de Matemáticas de Zurich o trabalho ali apresentado pelo seu representante Professor Costa Lôbo, membro da Comissão internacional de ensino das matemáticas, nomeado posteriormente membro do *Bureau des Longitudes de Paris.*

Os professores Anselmo Ferraz de Carvalho e Mário Silva deram conta das missões que realizaram, o primeiro de visita a observatórios magnéticos com o intuito de melhor poder levar a cabo as instalações magnéticas do Instituto Geofísico que superiormente dirige, facto já distintamente realizado, vencidas grandes dificuldades, e o segundo por tomar parte no Congresso Internacional de Electricidade realizado em Paris.

O Professor Costa Lôbo deu conta num relatório da sua representação no Congresso da União Internacional Astronómica realizado em Cambridge.

Para representar a Faculdade no próximo Congresso Internacional de Geografia, que deverá realizar-se em Varsóvia, foi nomeado o sábio Professor Anselmo Ferraz de Carvalho.

A Faculdade de Ciências contribuiu com um valioso concurso para o êxito da quinta Assembleia geral da União Internacional de Geodesia e Geofísica a qual, por proposta do Professor

Costa Lôbo, representante de Portugal e especialmente da nossa Universidade e da Faculdade de Ciências, na quarta Assembleia geral realizada em Stokolmo, acaba de ter lugar no mês de Setembro em Lisboa e em Coimbra onde teve lugar a sessão de encerramento. Entre outros elementos da nossa Faculdade que nela colaboraram menciona o presidente da direcção da secção nacional portuguesa e da secção de geodesia, Professor Costa Lôbo, e o presidente da secção de sismologia, Professor Anselmo Ferraz de Carvalho, que apresentou um relatório.

A Faculdade de Ciências manifestou o profundo pezar que sofreu com a morte do eminente sábio Professor Francisco Gomes Teixeira, que fêz o seu curso como aluno da Faculdade de Matemática da nossa Universidade, da qual foi depois notável Professor.

A Faculdade fêz-se representar nos funerais do saudoso e sábio Mestre pelo seu director Costa Lôbo, e resolveu realizar oportunamente uma comemoração em homenagem àquele ilustre sábio.

A-fim-de prestar uma devida homenagem aos antigos astrónomos da Universidade de Coimbra, Drs. Pedro Nunes, Monteiro da Rocha e Rodrigo de Sousa Pinto, tinha resolvido a Faculdade que se realizasse oportunamente uma sessão comemorativa, em que tomariam parte, fazendo o respectivo elogio, os Professores Pacheco de Amorim, Gomes Teixeira e Costa Lôbo. A morte do Professor Gomes Teixeira motivou o adiamento desta sessão que afinal teve lugar a 21 de Janeiro de 1934, já depois do período a que se refere êste relatório, debaixo da presidência de sua Ex.cia o Reitor da Universidade, que representou sua Ex.cia o Ministro da Instrução Pública e com a assistência do Professor A. Queiroz, representante da Faculdade de Ciências da Universidade do Pôrto, tendo deixado de assistir por motivo de fôrça maior a representação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e o director do Observatório Nacional de Lisboa. Um estudo profundo de Pedro Nunes foi feito pelo nosso colega Professor Pacheco de Amorim; o assistente Gumersindo Sarmento da Costa Lôbo leu o notável estudo que nos foi legado pelo sábio Professor Gomes Teixeira; coube-me dar conta da notável obra do Conselheiro Rodrigo de Sousa Pinto, avô do actual Ministro da Instrução Pública, e sábio Professor da Universidade do Pôrto, Alexandre de Sousa Pinto, e testemunhar a propósito a alta consideração que sua Ex.cia nos merece.

Terminarei dando conta das publicações dos membros da Faculdade relativas a êste período e que tinham sido já indicadas.

Da 1.ª secção

A Astronomia da actualidade e a Assembleia geral da União Internacional Astronómica; pelo Professor F. M. da Costa Lôbo.

O problema da gravitação Universal; pelo Professor Manuel dos Reis.

A classificação de alguns fenómenos cromosféricos e a sua comparação com os fenómenos terrestres; pelo assistente Gumersindo Sarmento da Costa Lôbo.

Instrumentos espectroheliográficos e sua aplicação ao estudo da atmosfera solar; pelo assistente Gumersindo Sarmento da Costa Lôbo.

Relatório apresentado à Junta de Educação Nacional; pelo observador chefe do Observatório Astronómico, José António Madeira.

Da 2.ª secção

Les valeurs absolues de la mobilité des ions gazeux dans le gaz pur; pelo Professor Mário Silva.

Sur la théorie quantique de l'interaction entre le rayonement et la matière; pelo Professor contratado W. Wessel.

Sur la charge électrique du recul radioactif; pelo Professor Mário Silva.

O emissor de T. S. F. do Laboratório de Física da Universidade de Coimbra; pelo assistente J. Teixeira Lopes.

L'ionisation dans l'hydrogène très pur; pelo Professor Mário Silva.

Expressão do resultado da análise de uma água mineral; pelo Professor Egas Pinto Basto.

Da 3.ª secção

Novos estudos cariológicos no género «Narcissus»; pelo Professor Abílio Fernandes.

Granitos e formações precâmbricas portuguesas; pelo Professor Anselmo Ferraz de Carvalho.

O índice facial dos portugueses; pelo Professor Eusébio Tamagnini.

Crânio de um soba quioco da região do Saurimo, Lunda; pelo Professor Barros e Cunha.

O Moliço da Ria de Aveiro; pelo assistente Américo Lemos.

Aves de Portugal, Catálogo das colecções do Museu de Zoologia; pelo assistente A. A. Themido.

Crustácea: II *Stoma topoda;* III *Decápoda, Catálogo da Colecção de Invertebrados existente no Museu de Zoologia;* pelo conservador R. N. de Carvalho.

Conchas da colecção «Carvalho Monteiro» gen. Conus 1.ª parte; pelo Professor Barros e Cunha.

Subsídios para o conhecimento da fauna das matas nacionais — Coleoptera (continuação); pelo Professor A. F. de Seabra.

Segue o mapa do movimento da Faculdade.

F. M. da Costa Lôbo.

Inscrições, exames (antes de Janeiro, e depois de Janeiro), Licenciaturas nos anos de 1930-1931, 1931-1932, 1932-1933

	1930-1931				1931-1932				1932-1933			
	Inscrições	Exames antes de Janeiro	Exames depois de Janeiro	Licenciaturas	Inscrições	Exames antes de Janeiro	Exames depois de Janeiro	Licenciaturas	Inscrições	Exames antes de Janeiro	Exames depois de Janeiro	Licenciaturas
1.ª secção												
Álgebra superior, etc.	111	18	76	—	127	36	91	—	124	41	97	—
Matemáticas gerais	23	3	2	—	33	8	3	—	26	4	15	—
Geometria descritiva, etc.	97	10	32	—	101	8	33	—	103	15	36	—
Geometria projectiva	2	—	2	—	8	1	4	—	24	2	11	—
Cálculo infinitesimal	42	3	16	—	40	9	7	—	61	17	12	—
Análise superior	2	—	2	—	8	1	3	—	7	3	2	—
Cálculo das probabilidades	7	4	3	—	10	4	6	—	22	4	10	—
Mecânica racional	23	11	10	—	23	3	14	—	43	8	26	—
Física matemática	5	2	3	—	7	3	1	—	8	2	2	—
Astronomia	6	1	5	—	13	1	10	—	18	—	14	—
Geodesia	9	—	7	—	10	2	4	—	10	2	8	—
Mecânica celeste	5	—	5	—	8	1	7	—	17	1	16	—
Aperfeiçoamento de astronomia	7	1	5	—	5	1	3	—	6	2	2	—
Topografia	8	2	—	—	10	2	4	—	6	1	5	—
Complementos de álgebra, etc.	5	—	3	—	5	1	1	—	13	—	9	—
Geometria superior	3	—	—	—	5	—	2	—	6	2	3	—
Geometria matemática	—	—	—	—	—	—	—	—	6	—	6	—
Desenho rigoroso	85	—	—	—	88	—	—	—	106	—	—	—
Desenho de máquinas	55	—	—	—	78	—	—	—	67	—	—	—
Desenho topográfico, etc.	17	—	—	2	21	—	—	6	22	—	—	1
2.ª secção												
Física geral	127	24	52	—	98	32	36	—	99	16	37	—
Física dos sólidos e fluídos	—	2	1	—	1	—	1	—	3	3	4	—
Acústica, óptica e calor	3	1	4	—	2	1	—	—	6	1	2	—
Electricidade	11	6	10	—	12	3	3	—	19	7	4	—
Termodinâmica	22	—	16	—	15	2	15	—	23	1	17	—
Química geral	64	4	35	—	76	28	28	—	92	16	31	—

	1930-1931				1931-1932				1932 1933			
	Inscrições	Exames antes de Janeiro	Exames depois de Janeiro	Licenciaturas	Inscrições	Exames antes de Janeiro	Exames depois de Janeiro	Licenciaturas	Inscrições	Exames antes de Janeiro	Exames depois de Janeiro	Licenciaturas
Química inorgânica	11	5	5	—	14	4	7	—	5	—	5	—
Química orgânica	18	5	3	—	9	11	4	—	18	3	14	—
Química-física	3	4	2	—	3	1	3	—	7	2	8	—
Análise química, 1.ª parte . . .	41	2	32	—	31	3	29	—	45	2	38	—
Análise química, 2.ª parte . . .	9	1	3	—	11	6	8	—	18	2	14	—
Noções gerais de Química-física.	16	—	10	10	6	—	3	5	3	2	—	5
3.ª secção												
Minerologia e geologia geral . .	36	10	14	—	41	13	15	—	47	12	24	—
Cristalografia	5	7	10	—	21	4	10	—	7	4	5	—
Minerologia e petrologia	2	3	3	—	3	—	1	—	5	2	1	—
Geografia física.	31	5	5	—	11	8	1	—	23	5	15	—
Geologia	4	3	2	—	4	—	1	—	3	2	2	—
Paleontologia.	19	3	7	—	8	6	8	—	6	—	4	—
Botânica geral	18	1	15	—	18	1	10	—	25	1	15	—
Morfologia e fisiologia vegetais.	7	1	3	—	4	1	3	—	3	—	—	—
Botânica sistemática	8	2	5	—	6	1	2	—	6	1	2	—
Ecologia vegetal e fitogeografia.	—	-	—	—	1	—	—	—	1	—	1	—
Zoologia geral.	12	1	4	—	12	2	5	—	5	2	2	—
Zoologia sistemática	1	2	—	—	5	1	5	—	2	—	2	—
Anatomia e fisiologia comparada.	13	2	7	—	3	4	1	—	4	3	3	—
Ecologia animal e zoogeografia.	2	—	2	—	5	—	5	—	1	—	1	—
Biologia.	4	2	3	—	9	1	5	—	2	3	2	—
Antropologia	6	—	5	—	7	1	5	—	6	2	2	—
Desenho biológico.	10	—	—	4	5	—	—	5	7	—	—	13
Preparatórios médicos												
Física médica.	165	13	73	—	169	74	77	—	143	51	62	—
Química médica.	183	2	152	—	193	19	107	—	142	16	117	—
Botânica médica	148	6	109	—	147	30	67	—	142	35	64	—
Zoologia médica.	158	6	136	--	167	20	108	—	145	8	94	—

Doutoramento do Naturalista e Professor catedrático contratado da Universidade de Coimbra Antero Frederico de Seabra

Na reunião do Conselho da Faculdade de Ciências, de 30 de Janeiro de 1934, sob proposta, largamente justificada do Dr. Barros e Cunha, actualmente director do Museu Zoológico, foi por unanimidade de votos conferido o grau de Doutor *honoris causa* ao naturalista do referido Museu, o Ex.^{mo} Sr. Antero Frederico de Seabra.

Ao elevado número dos seus trabalhos anteriores vieram juntar-se os que publicou nas *Memórias e Estudos* e nos *Arquivos de Biologia e Parasitologia,* do Museu Zoológica, que, tanto honram a Faculdade de Ciências e cuja existência pode dizer-se é devida ao trabalho constante e indefectível do Sr. Antero de Seabra.

A cerimónia de Doutoramento realizou-se na Sala dos Capelos da Universidade, em 3 de Junho próximo passado. A êsse acto, revestido do brilho e solenidade tradicionais, concorreram em grande número os admiradores da obra do doutourando e nêle se fizeram representar várias sociedades científicas, entre elas a Academia das Ciências de Lisboa, de que o Dr. Seabra é sócio efectivo.

Nos têrmos que seguem fêz o elogio do novo Doutor o Professor, Director do Museu Zoológico, Dr. J. G. de Barros e Cunha.

Ex.^mo^ Senhor Reitor da Universidade,
Ilustres Professores e Doutores,
Mocidade estudiosa,
Minhas Senhoras e meus Senhores:

Conferiu a Faculdade de Ciências desta Universidade o grau, *Honoris causa,* de Doutor em Ciências ao Sr. Antero Frederico de Seabra, e, neste acto solene da imposição das insignias, incumbiu-me de, com o elogio do Doutorando, justificar perante V.as Ex.as esta resolução da Faculdade. Não deve ficar no espírito de alguém qualquer dúvida de que impensadamente, ou sem pezar com rigoroso escrúpulo as qualidades e os trabalhos científicos do Sr. Antero de Seabra, a Faculdade de Ciências o tenha admitido ao mais alto grau académico que pode conferir uma Universidade.

Os graus académicos, Senhores Estudantes, conquistam-se pelo brilho da carreira académica. Também ligitimamente os podem conquistar aqueles que, como o Sr. Antero de Seabra, sem terem estudado na Universidade o curso regulamentar da licenciatura, contribuíram em larga escala pelos seus trabalhos para o progresso de algum ramo da ciência. Tributavam os romanos honras especiais a quem tivesse alargado o *pomoerium* área de terreno consagrado, em tôrno dos muros da cidade: o *pomoerium* da ciência zoológica portuguesa é constituído pelos nossos conhecimentos sôbre a fauna de Portugal, e no dilatar dêsses conhecimentos trabalha há alguns quarenta anos, persistentemente, incansàvelmente, o Sr. Antero de Seabra.

Filho do ilustrado e estudioso General Antero Frederico Ferreira de Seabra e da Ex.ma Sr.a D. Rita Augusta de Seabra, sobrinho do eminente jurisconsulto Visconde de Seabra, antigo Reitor desta Universidade, nasceu o Sr. Antero de Seabra em 1874, estando pois quási a completar sessenta anos de idade; e desde muito novo começou a revelar-se nêle o gôsto pelas ciências naturais, pois em 1887, sendo ainda estudante do liceu, foi nomeada preparador auxiliar fora do quadro do Museu Zoológico de Lisboa, então dirigido pelo eminente Professor José Vicente Barbosa de Bocage, mestre de todos os zoólogos portugueses, como de todos os botânicos portugueses foi mestre o grande Professor desta Universidade Dr. Júlio Henriques.

Em 1892, tendo já concluído o curso liceal e feito além disso uma preparação especial sob a direcção de professores da então Escola Politécnica, foi o Sr. Antero de Seabra para Paris com o fim de se apresentar ao concurso de admissão ao Instituto Superior de Agronomia daquela cidade; mas, chegado lá, e por conselho do eminente Professor MILNE EDWARDS, para quem levara uma carta de recomendação do Professor Barbosa de Bocage, mudou de intenção e passou a freqüentar os cursos do Museu de Paris. Para se avaliar da qualidade de preparação científica que ali obteve basta citar os nomes de alguns dos professores: MINE EDWARDS, e EDMOND PERRIER, em Zoologia; Professor Bouvier em Entomologia, Professor Filhol em Anatomia comparada, Professor VAN TIEGHEM em Botânica, Professor DE LACROIX em Geologia... são nomes que ainda hoje conhece todo o mundo científico.

A aplicação ao trabalho do Sr. Antero de Seabra atraiu para êle a atenção dos seus ilustres professores: o Professor Filhol sugeriu-lhe a preparação de uma tese sôbre os corpos vermelhos dos teleósteos, e para êsse trabalho especial lhe deu as máximas facilidades, chegando a ser-lhe oferecido o lugar de preparador de uma estação de Biologia marítima para em melhores condições poder continuar êsse estudo. Não chegou a ser apresentada a tese, mas foram publicados os resultados dessa sua primeira investigação científica, em nota resumida no *Bulletin du Muséum de Paris*, n.º 6, 1897, e com mais algum desenvolvimento em folheto *Sur les corps des Téléostéens*.

Precipitadamente, e sem concluir o seu curso em Paris, regressou o Sr. Antero de Seabra a Lisboa por lhe ser oferecido um lugar vago de *naturalista coadjuvante* do Museu de Lisboa. E pouco depois disso foi proposto em Conselho da então Escola Politécnica a sua nomeação para demonstrador da cadeira de Zoologia, lugar que porém não chegou a ser criado.

Na vaga deixada pelo admirável naturalista Alberto Girard, cujo nome recordo com saudade porque dêle fui amigo pessoal, passou o Sr. Seabra a ocupar em 1904 o lugar de conservador da Secção Zoológica do Museu de Lisboa, o qual conservou até 1918, passando depois disso a naturalista do quadro do mesmo Museu, acumulando desde 1911 até 1917 as funções de assistente da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, e dirigindo, de 1909 a 1914, o Aquário Vasco da Gama, onde introduziu importantes melhoramentos.

De 1918 a 1920 foi assistente do Instituto Superior de Agronomia, desempenhou também as funções de Chefe da Secção Entomológica, e mais tarde da Secção de Estudos especiais, do Laboratório de Patologia Vegetal de Lisboa, e de Chefe da Secção Entomológica do Laboratório de Biologia Florestal.

De várias missões científicas oficiais foi o Sr. Antero de Seabra encarregado pelo Govêrno, entre as quais mencionarei pela sua importância especial a representação do nosso país na Conferência Internacional de Madrid em 1923 para o estudo das doenças e parasitas da oliveira, e no Congresso Internacional de Olivicultura de Roma em 1926.

Estas múltiplas funções e comissões de serviço relacionavam-se tôdas, como se vê, com a ciência Zoológica, pura ou aplicada; e escusado é certamente acentuar aqui quanto é errónea a noção daqueles que supõem haver alguma barreira intransponível entre a ciência pura e a ciência aplicada. Quantas vezes uma investigação científica meramente especulativa conduz a imprevistas e importantes aplicações práticas! Quantas vezes observações feitas com um fim utilitário são o início de pontos de vista teóricos inteiramente novos! Ciência pura e ciência aplicada constituem uma simbiose e não podem separar-se sem prejuízo de ambas.

Em tôdas as funções que desempenhou relevou o Sr. Antero de Seabra a mesma paciente e infatigável dedicação pelos progressos da ciência e pela boa organização dos serviços; porque além das suas outras qualidades é Sua Ex.ª dotado dessa, que não é das mais vulgares, um notável espírito de método e de organização.

Em 1922, finalmente, veio o Sr. Antero de Seabra para Coimbra e, nos doze anos decorridos, valiosíssimos têm sido os serviços por êle prestados a esta Universidade, como naturalista adjunto do nosso Museu de Zoologia, acumulando nos anos lectivos de 1931-32 e 1932-33, a regência, como de Professor contratado, da cadeira de Zoologia sistemática.

Tão larga fôlha de serviços não podia deixar de reflectir-se em numerosas publicações de carácter científico, que desde o ano de 1898 apareceram em revistas diversas, principalmente no *Jorn. de Sc. Mat. Físicas e Naturais,* no *Boletim da Soc. Port. de Sc. Naturais* nos *Anais da Academia Politécnica do Pôrto,* nas *Publicações do Laboratório de Patologia Vegetal* e também nos *Bulletins de la Soc. Ent. de France.*

Em 1924 começou a publicar-se a revista *Memórias e Estudos do Museu Zoológico de Coimbra,* e em 1929 outra com o título de *Arquivos da Secção de Biologia e Parasitologia* e destas publicações não é exagêro dizer-se que o Sr. Antero de Seabra tem sido a alma: sem os seus trabalhos nada seriam estas revistas, sem os seus esforços não teria sido possível obter para elas a colaboração de sábios estrangeiros, que, estudando a fauna das nossas possessões ultramarinas, têm honrado as nossas *Memórias e Estudos* publicando aqui os resultados dos seus trabalhos.

Pouco conhecidas cá no país, alcançaram as *Memórias e Estudos* um lisongeiro acolhimento no estranjeiro: todos os meses quási se recebem no Museu novos pedidos de permuta com revistas zoológicas estrangeiras.

Não tentarei sequer fazer um resumo bibliográfico da vasta obra contida nas cêrca de 200 publicações de Sr. Antero de Seabra. Bastará dizer que tendo-se ocupado a princípio principalmente de mamíferos, réptis e peixes — avultam nesse período os seus trabalhos sôbre os Queirópteros de Portugal, de Angola e de Timor, — passou mais tarde a aplicar-se de preferência à Entomologia, com crescente especialização, sendo hoje reconhecida em todo o mundo a sua autoridade no que se refere à sistemática da difícil ordem dos Hemipteros heterópteros.

Tal é a soma imensa de trabalho científico com que aqui se apresenta o Sr. Antero Frederico de Seabra. Quer porém o uso da nossa, como de outras Universidades, que no acto solene de receber as insígnias do seu grau o doutorando se apresente patrocinado por alguém de alta categoria científica ou social. Na qualidade de padrinho do Sr. Antero de Seabra apresenta-se seu cunhado o ilustre Engenheiro António dos Santos Viegas.

Há muitos anos que o Sr. António dos Santos Viegas me honra com a sua amizade pessoal. Não tentarei porém fazer o seu elogio, porque bem pode dispensar elogios meus quem aqui em Coimbra é de todos conhecido:

Filho do notabilíssimo Professor da Faculdade de Filosofia

Dr. António dos Santos Viegas, de quem me honro de ter sido discípulo, aluno laureado desta Universidade, o Sr. Engenheiro António Viegas tem desempenhado as mais difíceis e elevadas funções, como oficial do exército, como engenheiro, como administrador de grandes emprezas, e na gerência, durante o Govêrno do malogrado Presidente Sidónio Pais, da melindrosíssima pasta das Finanças, sempre o Sr. António Viegas evidenciou as suas altas qualidades de inteligência de estudo e de carácter.

Sr. Reitor! creio ter dito o suficiente para poder terminar pedindo a V. Ex.ª que seja investido Dr. Antero Frederico de Seabra nas insígnias do grau que merecidamente lhe foi conferido.

AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida à Direcção da Faculdade de Ciências, com a indicação de que se refere à REVISTA.