

ANOS-DE 1934-A-1938
VOL-DE 4º-A-6º-VOL

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

REVISTA

DA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

VOL. VI—N.º 4



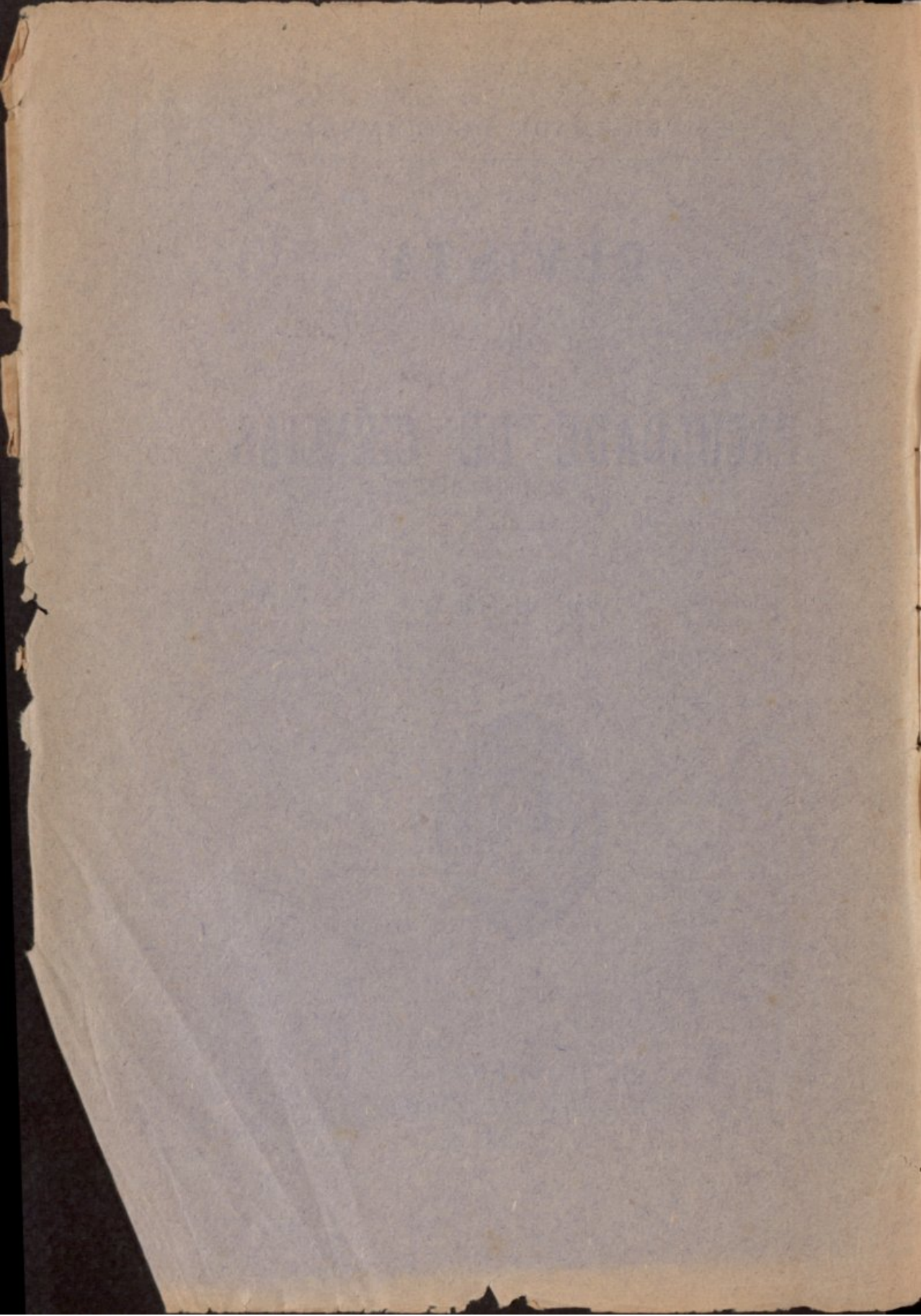
COIMBRA

TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA

1938

A
9
13

A
9
13



Studies on the ultraviolet absorption spectra of proteins

I AMINOACIDS

Introduction

In the course of a study of mucoproteins from human gastric juice, which will shortly be published (Bruno da Costa and Schön), we came to the problem of identifying the composition of small amounts of proteins. In recent times the spectrophotometric methods have been used to an ever increasing degree for the qualitative and quantitative determination of organic substances, and for this reason we believed it useful to apply this method also to the problem of proteins.

Amongst the known aminoacids, the aliphatic ones do not exhibit selective absorption in the visible or ultraviolet. In the extreme ultraviolet all these acids show increasing general absorption. The aromatic and some of the heterocyclic aminoacids show, however, a marked and, for some of them, characteristic selective absorption. As most of recent research concerning these acids is only of a qualitative nature, and amongst the older quantitative determinations the results frequently do not agree, we have decided to make an extensive quantitative research on the absorption spectra of these compounds.

When we had almost concluded the work described in this paper, there was brought to our notice the publication of Holi-

day (1936) regarding part of our work — tyrosine and tryptophan — to which we will refer later.

Methods

We have used for our studies a Hilger Medium Quartz spectrograph E 316 fitted with a Spekker photometer. As source of light we have generally used a condensed spark between tungsten-steel electrodes; for detecting the structure of the bands and the exact determination of the position of the maxima of narrow and definite bands we have also used as source of light a water cooled hydrogen tube with a quartz window, which gives a perfect continuous spectrum in the ultraviolet. The extinction coefficients, however, were always determined using the tungsten-steel spark plates. Quartz cells of 4 to 0.1 cm. were used compensated always with cells of the same thickness and filled with the same solvents. The densities of light varied between 0.1 and 1.8, the corresponding times of exposure being from 6 secs. to 4 mins. 10 secs. The absorption intensities referred to in the tables were obtained with densities between 0.8 and 1.5.

For photography Ilford and Lumière plates were employed, which are quite sensitive up to 230 $m\mu$. In the plates in which absorption maxima between 230 — 200 $m\mu$ were observed, the plates were sensibilised with white vaseline. Reading of the plates was made visually, the points of equal density being carefully plotted.

The absorption intensities recorded in the following curves and tables are expressed in ϵ and $\log \epsilon$ with $\epsilon = \frac{\log I_0/I}{c \cdot d}$ (c = molar concentration, and d = thickness of the cell in cm.).

The aminoacids and dipeptides were commercial products of the highest obtainable degree of purity. *l*-Tyrosine was purchased from Dr. Fraenkel & Landau, Berlin, *l*-histidine-mono-hydrochloride from Merck, Darmstadt, and the other substances from Hoffmann-La Roche, Basileia. A sample of *l*-carnosine (β -alanyl-*l*-histidine) (du Vigneaud and Hunt, 1936) was generously supplied to us by Professor V. du Vigneaud of the George

Washington University, Washington, to whom we express our best thanks.

Results

The following aminoacids were investigated: *l*-Phenylalanine, *l*-tyrosine, *l*-dioxypheylalanine, *l*-tryptophan, *l*-histidine. The absorption spectra of all these acids were obtained in aqueous, N/10 HCl and N/10 KOH solutions. The results are summed up in the following tables and figures.

l-PHENYLALANINE:

TABLE I

Molecular extinction coefficients of maxima and minima of Phenylalanine in water

Maxima						
Wavelength $m\mu$	267	263.1	257.5	251.3	247.0	213.0
ϵ	65	133	180	141	100	5000
Minima						
Wavelength $m\mu$	265.4	261.0	254.3	248.1	232.2	
ϵ	62	116	125	96	20.8	

The absorption spectrum of phenylalanine is of the benzenoid type. The resolution of the narrow bands in the region 265 — 235 $m\mu$ is still very good, although not so persistent as in benzene. All maxima are slightly displaced to longer wavelengths and the absorption coefficients are slightly lowered, with the exception of the first maximum (267 $m\mu$) which lies more towards the shorter wavelengths and the intensity of which is about 10 times higher than that of benzene. We believe that this effect on the first band is due to the substituents of the benzenic ring. A similar increasing effect of the absorption coefficient of the first band was observed in naphthalene derivatives by Morton and Gouveia (1934).

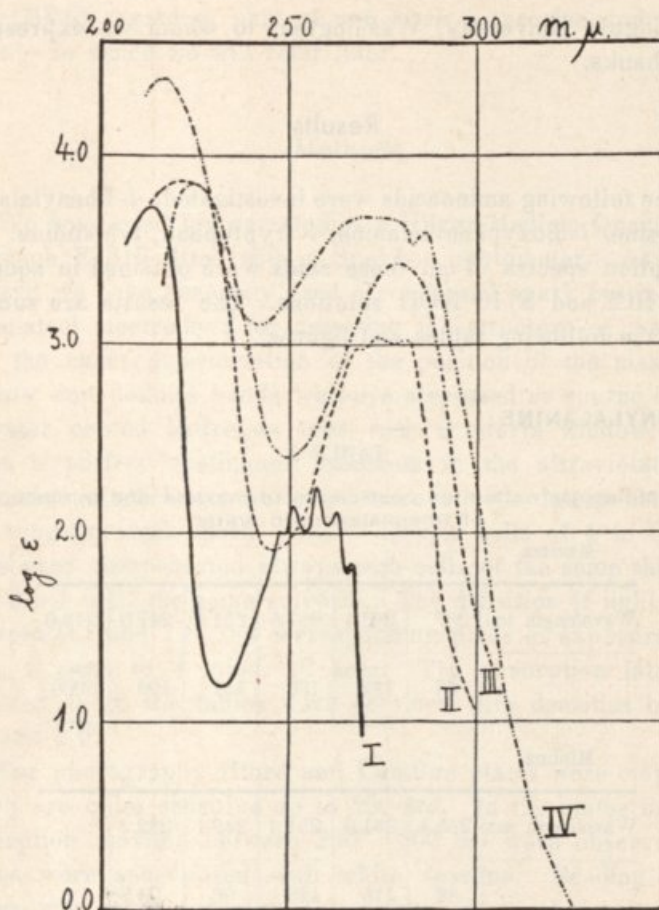


FIG. 1

I *l*-Phenylalanine. II *l*-tyrosine. III *l*-dioxyphenylalanine.
IV *l*-tryptophan, in aqueous solutions.

***l*-TYROSINE :**

TABLE II

Molecular extinction coefficients of tyrosine in aqueous
and N/10 KOH solutions

Wavelength $m\mu$	220	230	240	250	260	270	280	290	300
Water ϵ	7080	4870	138	88.5	850	796	796	77.4	
Alkali ϵ		7640	10000	7450	1230	727	1180	1660	1590

Maxima				Minima			
In water <i>mμ</i>	ϵ	In alkali <i>mμ</i>	ϵ	In water <i>mμ</i>	ϵ	In alkali <i>mμ</i>	ϵ
281.2	1060	295.0	1860	278.2	885		
273.8	1190			245.0	81.3	269.6	727
~ 268.0	932						
222.0	7080	240.8	10090				

~ = inflection

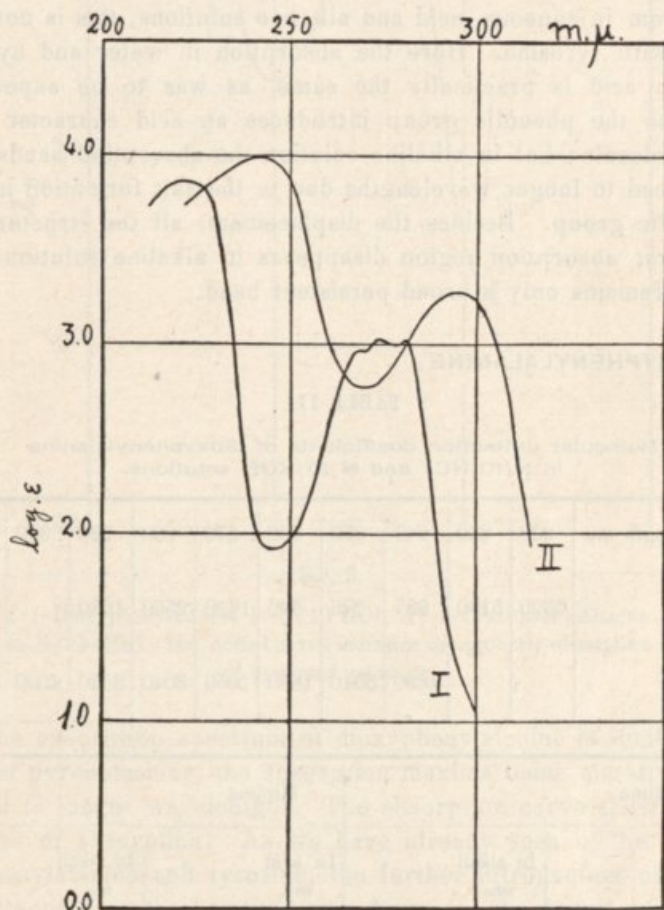


FIG. 2

I *l*-tyrosine in N/10 HCl. II *l*-tyrosine in N/10 KOH.

The spectrum of tyrosine is similar to that of phenol as far as concerns the localisation of the first region of absorption. In the case of phenol in aqueous and alcoholic solutions all the structure has been wiped out, showing only a broad well defined band with the maximum at 274 $m\mu$; tyrosine, however, shows in the same region a band with the principal maximum at 273.8 $m\mu$, with two further submaxima at 281.2 and 268 $m\mu$. In this respect it preserves still a certain similarity to phenylalanine and benzene. A second region of absorption shows a maximum at 222 $m\mu$.

While phenylalanine has a practically identical absorption spectrum in aqueous, acid and alkaline solutions, this is not the case with tyrosine. Here the absorption in water and hydrochloric acid is practically the same, as was to be expected, because the phenolic group introduces an acid character into the molecule; but in alkaline solution the absorption bands are displaced to longer wavelengths due to the salt formation in the phenolic group. Besides the displacement, all the structure of the first absorption region disappears in alkaline solution and there remains only a broad persistent band.

l-DIOXYPHENYLALANINE:

TABLE III

Molecular extinction coefficients of dloxyphenylalanine
in N/10 HCl and N/10 KOH solutions.

Wavelength $m\mu$	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310
Acid ϵ	5920	5130	937	276	690	1620	2560	1080		
Alkali ϵ			4690	3040	1660	2050	3040	3830	4020	3750

Maxima				Minima			
In acid $m\mu$	ϵ	In alkali $m\mu$	ϵ	In acid $m\mu$	ϵ	In alkali $m\mu$	ϵ
279.8	2600	298.3	4020	250.0	276	262.7	1890
224.5	6900						

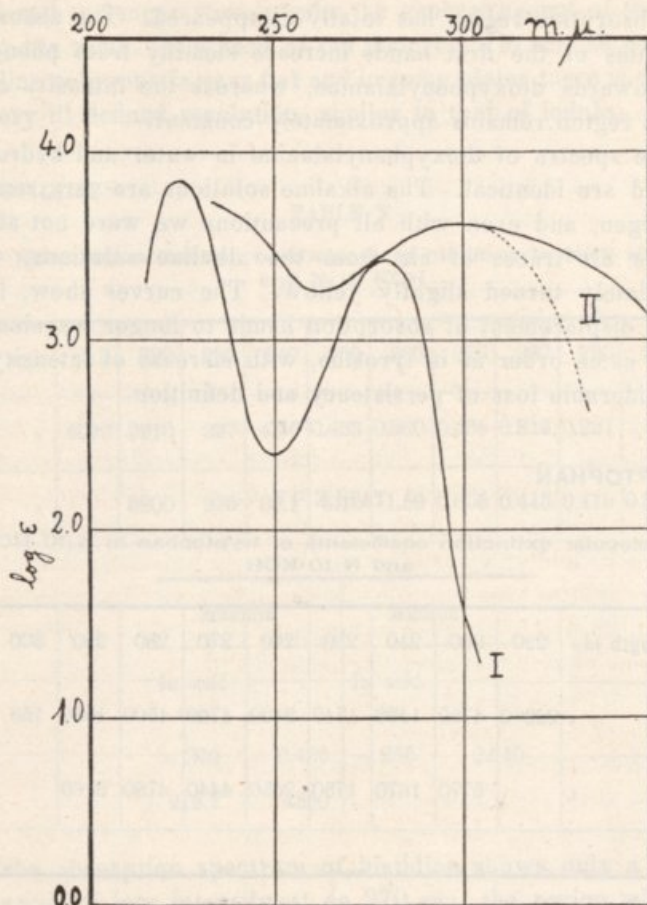


FIG. 3

I *l*-Dioxyphenylalanine in N/10 HCl, II *l*-Dioxyphenylalanine in N/10 KOH. The dotted curve indicates the probable absorption of unaltered solutions.

The absorption spectrum of dioxyphenylalanine is similar to that of pyrocatechine, the absorption maxima being slightly displaced to longer wavelentghs. The absorption curve shows two regions of absorption. As we have already seen in the cases of phenylalanine and tyrosine, the further introduction of new substituents into the benzenic ring decreases the degree of resolution of the first absorption region. The tendency continues in dioxyphenylalanine to such a degree, that all resolution of the

first absorption region has totally disappeared. The absorption intensities of the first bands increase steadily from phenylalanine towards dioxyphenylalanine, whereas the intensity of the second region remains approximately constant.

The spectra of dioxyphenylalanine in water and hydrochloric acid are identical. The alkaline solutions are very sensitive to oxygen, and even with all precautions we were not able to exclude all traces of air from the alkaline solutions, which immediately turned slightly yellow. The curves show, however, a displacement of absorption bands to longer wavelengths, of the same order as in tyrosine, with increase of intensity and a considerable loss of persistency and definition.

***l*-TRYPTOPHAN:**

TABLE IV

Molecular extinction coefficients of tryptophan in N/10 HCl and N/10 KOH

Wavelength $m\mu$	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310
Acid ϵ	22060	4750	1480	1710	3420	4700	4500	1580	153	14.6
Alkali ϵ		5770	1670	1750	2650	4440	4780	3160		

Maxima				Minima			
In acid $m\mu$	ϵ	In alkali $m\mu$	ϵ	In acid $m\mu$	ϵ	In alkali $m\mu$	ϵ
286.8	3730	288.0	4020	248.1	3480	285.6	3840
271.4	4750	280.0	4780	242.5	1480	244.2	1600
216.2	24900						

The spectrum of tryptophan is similar to that of indole (Friedli, 1925). It exhibits two regions of absorption, one with the maximum at 216.2 $m\mu$ and the other with the principal maximum at 271.4 $m\mu$ and a submaximum at 286.8 $m\mu$ in acid solution. In alkaline solution the absorption is slightly

displaced to longer wavelengths the general aspect of the curve being the same. The head of the main band in acid as well as in alkaline solutions is very flat and in some plates there is evidence of very ill defined resolution, similar to that of indole.

L-HISTIDINE:

TABLE V

Molecular extinction coefficients of histidine in N/10 HCl and N/10 KOH

Wavelength $m\mu$	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320
Acid ϵ	4090	2910	227	4.86	0.435	0.360	0.485	0.822	0.227			
Alkali ϵ		8800	955	38.1	5.13	1.59	0.605	0.445	0.419	0.374	0.294	0.210

Maxima		Minima	
In acid $m\mu$	ϵ	In acid $m\mu$	ϵ
~ 270	0.485	~ 255	0.840
213.7	4850		

The absorption spectrum of histidine shows only a marked inflection of low intensity at ca 270 $m\mu$, the region where the other investigated aminoacids show strong selective absorption. In the far ultraviolet it shows a marked band at 213.7 $m\mu$, with nearly the same intensity as the corresponding bands of the other acids.

Discussion

There is a good agreement between our results and the qualitative data of Ross (1934), Feraud & alièni (1935) and Lavin & Northrop (1935) as far as concerns the position of absorption maxima of phenylalanine. The values obtained by the various authors and ours generally differ by less than 1 $m\mu$. We were not able to detect the 2 maxima at 241.0 and 235.0 indicated by Feraud & alièni and by Lavin & Northrop. As they

lie in a region of decreasing absorption very probably they are not more than small inflections, without great interest for the detection of this aminoacid.

Our results regarding the absorption spectrum of tyrosine agree fairly well with the quantitative measurements of Holiday (1936). Our extinction coefficients are slightly lower. The most marked difference between our results and those of Holiday consists in the position of the first maximum, which we found to be at 281.2 $m\mu$, while Holiday found it at 278.5 $m\mu$. Working with the hydrogen tube as a continuous source of light, we were able to detect a marked inflection at 268 $m\mu$.

Feraud & alieni give in their paper a large number of maxima for tyrosine, which afterwards they were not able to confirm (Feraud & alieni, 1936). We find that the position of the first three maxima are correct, whilst the other do not exist; probably the authors dealt with a very impure product, as they indicate a concentration of 0.13% in aqueous solution, the actual solubility of tyrosine in water being only 0.04% at 17° (Winterstein, 1933). In alkaline solution Ross found two maxima for tyrosine at 284.0 and 276.0 $m\mu$, which we cannot confirm, finding only — in agreement with the results of Holiday — one broad unresolved band at 295 $m\mu$. Holiday does not give the exact numbers of the position of the maxima, and referring to his graphs we find a very slight displacement of the 295 $m\mu$ band.

As regards tryptophan our results are in full agreement with those of Holiday, Feraud & alieni and Ross, the actual maximum of the main band being difficult to determine, as the head of the band is very flat.

Applications

The problem of identifying the components of a protein has a twofold aspect: the qualitative and the quantitative. The presence of a number of marked, narrow bands in the region between 245 and 268 $m\mu$ is a sure indication of the presence of phenylalanine. But the low intensity of these bands makes the determination impossible even in the presence of relatively small amounts of the other aminoacids. Ross in his qualitative study has found that phenylalanine in the presence of tyrosine up to 10-15% or of tryptophan up to 5% may be detected.

The presence of tyrosine may be detected by the resolution

of its absorbing region between 285 and 265 $m\mu$, but we must emphasize, that the structure of the band is rather poor, and the detection will be impossible in the presence of even relatively small amounts of tryptophan and dioxyphenylalanine.

More characteristic and important for the detection of tyrosine is the displacement of the absorption band in acid and alkaline solutions of 21 $m\mu$. This displacement is peculiar to tyrosine and facilitates its distinction from tryptophan. This fact has been useful for the detection of tyrosine in proteins, as will be shown in a further paper. Besides tyrosine, only dioxyphenylalanine shows a similar behaviour.

Due to its high absorbing intensity, the qualitative determination of tryptophan seems to be easier than that of the other aminoacids, by the structure of its main band at 286.8 $m\mu$.

The quantitative determination of the aminoacids in proteins or in their hydrolyzing products seems to be handicapped by the complexity of the material, as even the aliphatic aminoacids show a general weak but definite absorption in the spectral region under consideration. Even in the most favourable cases we think that the values obtained are only approximate.

II DIPEPTIDES

The application of the spectrophotometric method to the detection of the components of proteins has as a condition, that the absorption of the aminoacids is not altered by peptidic linkages, the absorption spectrum of a protein being the sum of the absorptions of the single compounds. Although a great number of organic compounds fulfil this theoretical condition, there are some cases known in which small differences in the structure of related substances and even a different sterical arrangement of groups in the same compound give rise to important modifications in the absorption intensity and localisation of the bands. As an example we may remember here only the case of *cis*- and *trans*-stilbene (Smakula & Wassermann, 1931), the absorption spectra of which are quite different with regard to the position and intensity of absorption maxima, and the general aspect of the curves, which seem to belong to quite different chromophores. As very little is known about the molecular arrangement of proteins in solutions, great differences in the absorption spectrum may result from different positions of chromophoric groups. We have therefore investigated the absorption spectra of some of the simplest dipeptides.

GLYCYL-*l*-TYROSINE:

TABLE VI

Molecular extinction coefficients of glycyL-tyrosine in N/10 HCl and N/10 KOH

Wavelength $m\mu$	220	230	240	250	260	270	280	290	300
Acid	6240	4050	338	171	448	952	962		
Alkali	4050	6280	7620	5670	1350	724	1880	1920	1660

Maxima				Minima			
In acid <i>m.μ</i>	ϵ	In alkali <i>m.μ</i>	ϵ	In acid <i>m.μ</i>	ϵ	In alkali <i>m.μ</i>	ϵ
275.6	1070	291.4	1960	248.2	14.0	269.3	686
228.2	6710	240.3	7710	214.6	5520	220.0	4050

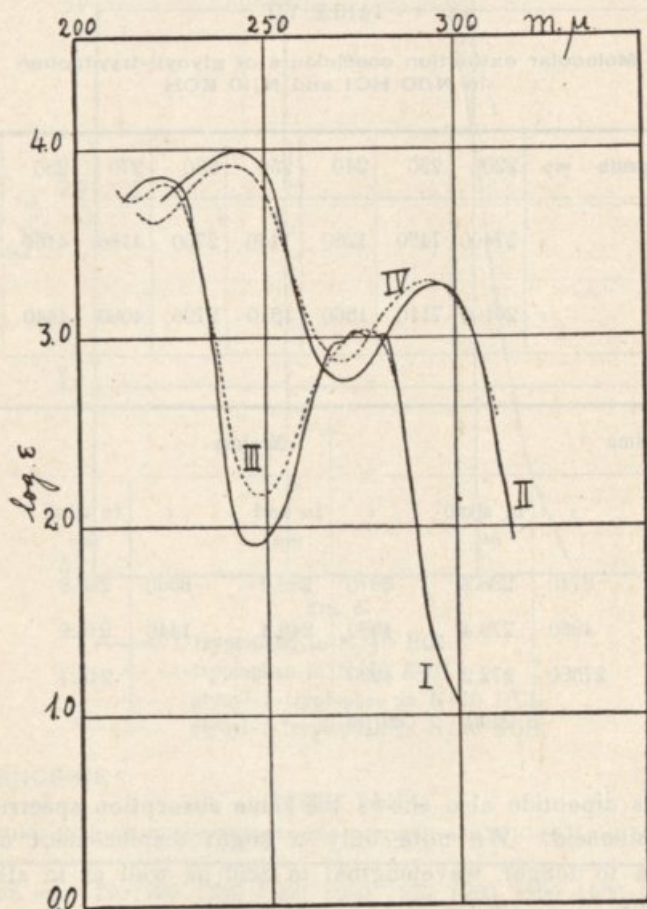


FIG. 4

I *l*-tyrosine in N/10 HCl. II *l*-tyrosine in N/10 KOH.
 III glycyl-*l*-tyrosine in N/10 HCl. IV glycyl-*l*-tyrosine
 in N/10 KOH.

The absorption spectra of glycyL-tyrosine in acid and alkaline solutions are practically the same as those of the parent aminoacid. In acid solution all structure of the main band disappears, but there is no appreciable displacement of the bands. These results agree with those of Abderhalden & Haas (1927).

GLYCYL-*l*-TRYPTOPHAN :

TABLE VII

Molecular extinction coefficients of glycyL-tryptophan
in N/10 HCl and N/10 KOH

Wavegenth $m\mu$		220	230	240	250	260	270	280	290
Acid	ϵ	27400	7490	1250	1440	2700	4160	4160	3270
Alkali	ϵ	26100	7110	1860	1810	2720	4080	4440	3550

Maxima				Minima			
In acid $m\mu$	ϵ	In alkali $m\mu$	ϵ	In acid $m\mu$	ϵ	In alkali $m\mu$	ϵ
288.1	8740	288.2	8870	286.2	3580	285.8	3660
276.4	4260	279.4	4500	246.4	1440	274.6	4180
218.8	27550	272.2	4290			245.3	1040
		220.1	26100				

This dipeptide also shows the same absorption spectrum as the aminoacid. We note only a slight displacement of the maxima to longer wavelengths, in acid as well as in alkaline solutions.

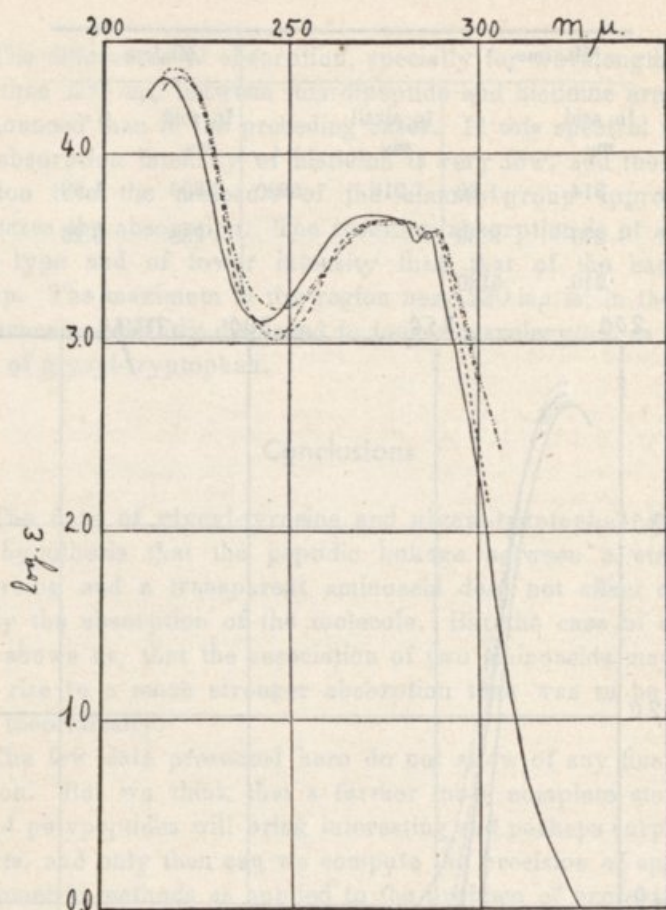


FIG. 5

- *l*-tryptophan in N/10 HCl.
 - - - *l*-tryptophan in N/10 KOH.
 - · - · glycyl-*l*-tryptophan in N/10 HCl.
 · · · · glycyl-*l*-tryptophan in N/10 KOH.

***l*-CARNOSINE :**

TABLE VIII

Molecular extinction coefficients of *l*-carnosine in N/10 HCl and N/10 KOH

Wavelength <i>mμ</i>	220	230	240	250	260	270	280	290	300	310	320
Acid ϵ	4890	766	82.1	8.88	8.27	8.58	8.04	2.42	1.97	1.74	1.86
Alkali ϵ	5120	795	61.7	14.1	8.19	6.69	5.88	5.02	4.15	3.17	2.42

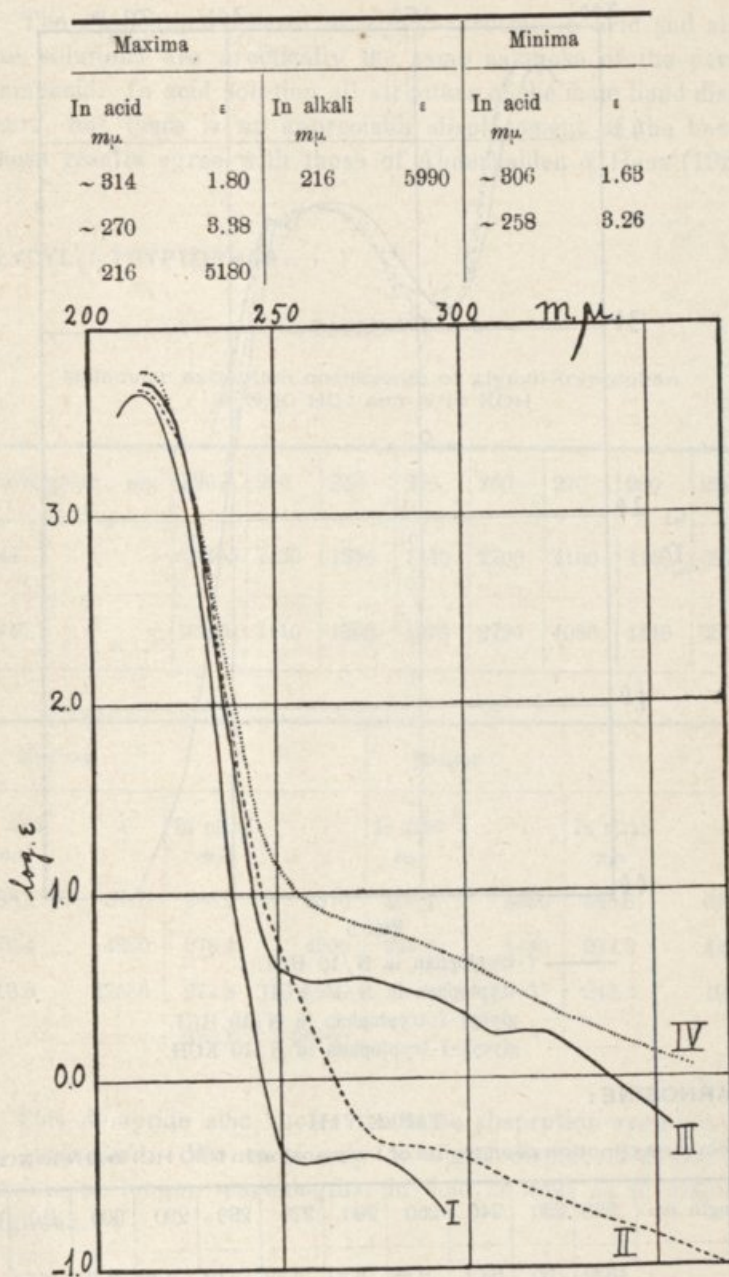


FIG. 6

I *l*-histidine in N/10 HCl. II *l*-histidine in N/10 KOH.
 III *l*-carnosine in N/10 HCl. IV *l*-carnosine in N/10 KOH.

The differences of absorption, specially for wavelengths longer than 250 $m\mu$, between this dipeptide and histidine are more pronounced than in the preceding cases. In this spectral region the absorption intensity of histidine is very low, and the introduction into the molecule of the alanine group appreciably increases the absorption. The resulting absorption is of a different type and of lower intensity than that of the carbonyl group. The maximum in the region near 220 $m\mu$ is, in the case of carnosine, slightly displaced to longer wavelengths, as in the case of glycyl-tryptophan.

Conclusions

The data of glycyl-tyrosine and glycyl-tryptophan confirm the hypothesis that the peptidic linkage between a strongly absorbing and a transparent aminoacid does not affect appreciably the absorption of the molecule. But the case of carnosine shows us, that the association of two aminoacids may also give rise to a much stronger absorption than was to be expected theoretically.

The few data presented here do not allow of any final conclusion. But we think that a further more complete study of di- and polypeptides will bring interesting and perhaps surprising results, and only then can we compute the precision of spectrophotometric methods as applied to the problem of proteins.

Summary

The ultraviolet absorption spectra of the aminoacids: *l*-phenylalanine, *l*-tyrosine, *l*-dioxypyphenylalanine, *l*-tryptophan and *l*-histidine, and of the dipeptides: glycyl-*l*-tyrosine, glycyl-*l*-tryptophan and *l*-carnosine (β -alanyl-*l*-histidine) are investigated in aqueous, acid and alkaline solutions. The possible application of the spectrophotometric method to the determination of these aminoacids in proteins is discussed.

The authors wish to express their sincerest thanks to Professor Dr. A. de Morais-Sarmento and Professor Dr. E. Pinto Basto for their interest shown in the course of this work.

References

- Abderhalden & Haas (1927, Hoppe-Seyl. Z. 166, 78.
Feraud, Dunn & Kaplan (1935), J. biol. Chem. 112, 323.
» » » (1936), J. biol. Chem. 114, 665.
Friedli (1925), cited after Tables annuelles de constantes et Données numériques, 808, table 69.
Holiday (1936), Biochemical J., 30, 1795.
Lavin & Northrop (1935), J. am. chem. Soc., 57, 874.
Morton & Gouveia (1934), J. chem. Soc., 916.
Ross (1934), J. biol. Chem., 104, 531.
Smakula & Wassermann (1931), Z. physik. Chem., 155, 353.
du Vigneaud & Hunt (1936), J. biol. Chem., 115, 93
Winterstein (1933), in G. Klein, Handbuch der Pflanzenanalyse 4 (1), 49
(Wien, Julius Springer).

A. J. A. DE GOUVEIA and F. PINTO COELHO

From the Laboratório Químico

AND

KARL SCHÖN

From the Laboratório de Química-Física e Química-Biológica
da Universidade de Coimbra

Summary

Estudos sôbre o gerador assíncrono auto-excitado

PREFÁCIO

Ao publicar o presente trabalho, é natural indicar as condições que tornaram possível a sua realização.

No verão de 1932 terminei em Zurich o meu trabalho de doutoramento «Die Selbsterregung von Asynchrongeneratoren» que foi aceite pela Eidgenössische Technische Hochschule — Zürich. Êste trabalho occupa-se do estudo dos fenómenos de auto-excitação da máquina assíncrona ligada a condensadores.

Em Outubro do mesmo ano, a Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra encarregou-me da regência da cadeira de Electricidade e respectivos trabalhos práticos. Reconheci desde logo que, para tirar o melhor rendimento possível da minha actividade, se tornava necessária a criação de um laboratório onde pudesse dar aulas práticas sôbre correntes alternadas e realizar trabalhos sôbre os assuntos a que já me tinha dedicado na Escola de Zurich.

Encontrei, da parte do Director do Laboratório de Física, o Professor Doutor Mário Silva, a melhor compreensão e interesse pela realização dêste intento. Havia, porém, uma dificuldade: Obter os meios materiais indispensáveis para adquirir as máquinas, instrumentos de medida e aparelhagem necessária. A dotação do Laboratório já estava absorvida por outras despesas e assim tivemos que esperar.

No fim do ano lectivo 1932-33 surgiu uma possibilidade: O Senado Universitário deliberara auxiliar com o «Fundo Sá Pinto» trabalhos de investigação sôbre assuntos bem especificados. Indiquei, como trabalho a realizar, o estudo das oscilações eléctricas no gerador assíncrono auto-excitado. O Senado Universitário aceitou a minha proposta. Cumpre-me agradecer a confiança com que me distinguia.

Com a importância concedida no primeiro ano adquiri as máquinas, o oscilógrafo, os condensadores e alguma aparelhagem. Com a parte concedida no verão de 1934 a que ainda se juntou verba do Laboratório, obtive os instrumentos de medida. Só no ano lectivo de 1935-36 é que se terminou a instalação, tornando-se possível realizar o trabalho que hoje publico.

Os aparelhos eram entretanto aproveitados, tanto quanto possível, para o ensino da cadeira de Electricidade.

Devo notar que as despesas foram muito reduzidas, graças ao cuidado que houve em aproveitar ao máximo os elementos de que o Laboratório já dispunha. Além disso, parte da aparelhagem foi construída nas oficinas do Laboratório. O Preparador Conservador Senhor António Ferreira auxiliou com interesse digno de louvor os trabalhos para a instalação projectada.

É para mim um dever agradável testemunhar neste lugar a minha profunda gratidão ao Prof. Dr. Mário Silva pela elevação com que me concedeu tôdas as facilidades para a realização do presente trabalho.

Laboratório de Física da Universidade de Coimbra, 1937.

CARLOS FERRER MONCADA

INTRODUÇÃO

Os estudos que constituem o objecto dêste trabalho pertencem a duas categorias: estudos teóricos e estudos experimentais.

Os dois encontram-se, porém, intimamente ligados e teem o mesmo fim: esclarecer o funcionamento do «gerador assíncrono auto-excitado». Damos esta designação ao complexo — máquina assíncrona ligada a condensadores — de maneira a constituir um sistema oscilante susceptível de entrar num regímen de auto-excitação.

Já nos ocupámos desta matéria num trabalho anterior — Die Selbsterregung von Asynchronegeneratoren ⁽¹⁾ — cujo assunto nos foi sugerido pelo nosso Mestre o Prof. Dr. Engenheiro K. Kuhlmann. Êste trabalho teve por fim esclarecer o que havia de essencial no fenómeno de auto-excitação da máquina assíncrona e só tratou do seu funcionamento em vazio e dos regímens transitórios de excitação nascente e de perda de excitação.

Os estudos que hoje apresentamos tentam dar um passo à frente, ocupando-se do funcionamento do gerador em regímen geral de carga. Partindo das equações fundamentais do electromagnetismo, devidas a Maxwell, começamos por estabelecer a teoria geral, passando depois a applicações concretas. Esta nossa teoria visa o esclarecimento da essência dos fenómenos e fornece-nos indicações sôbre a natureza das experiências a fazer e das medidas eléctricas que será necessário efectuar para a sua verificação. Êste assunto ocupa os dois primeiros capítulos, sendo os restantes destinados a estudos particulares. Assim, occupa-se o capítulo III das pulsações da amplitude das oscila-

(1) Êste trabalho — Die Selbsterregung von Asynchronegeneratoren — constituiu a nossa dissertação de doutoramento apresentada em Junho de 1932 à Eidgenössische Technische Hochschule — Zürich.

ções auto-excitadas enquanto que o capítulo iv estuda um régimen especial de funcionamento do gerador que lhe permite conservar uma frequência constante e independente da velocidade de rotação do rotor. Em qualquer destes dois capítulos estabelece-se uma teoria e procede-se à sua verificação por experiências e provas oscilográficas.

O capítulo v é finalmente dedicado ao curto-circuito trifásico instantâneo do gerador e apresenta os respectivos oscilogramas.

Dos oscilogramas apresentados há quatro — os correspondentes às figuras 19, 20, 29 e 30 — que foram tirados no Instituto de Electrotecnicia da Escola Superior Técnica Federal de Zurich.

Os doze restantes tiveram a sua origem no Laboratório de Física da Universidade de Coimbra, onde também foram realizadas tôdas as experiências e medidas comunicadas neste trabalho.

Como sistema de unidades adoptámos, no trabalho presente, o sistema prático electromagnético. Servimo-nos da notação simbólica para representar oscilações e designámos por letras góticas maiúsculas as amplitudes complexas.

A literatura conhecida sobre o gerador assíncrono auto-excitado é escassa e possui, em geral, um carácter pouco científico. Numa página destinada á bibliografia indicamos algumas publicações que conhecemos.

1) Teoria do gerador assíncrono auto-excitado em régimen estacionário de carga

A) Introdução

A teoria que vamos estabelecer diz respeito à máquina assíncrona simétrica com estator e rotor trifásico. O circuito de carga, também trifásico e simétrico, será ligado em derivação sobre o circuito oscilante formado pelos condensadores e máquina assíncrona segundo o esquema teórico representado na fig. 3.

Uma vez estabelecidas as oscilações auto-excitadas entre a máquina assíncrona e os condensadores podemos passar ao régimen de carga ligando o respectivo circuito. A experiência mostra que, em certas circunstâncias, as oscilações se mantem

e o sistema fornece energia ao circuito de carga. Ultrapassados certos limites, as oscilações desaparecem e o gerador perde assim a sua excitação.

O estudo que se segue, tem por fim estabelecer uma teoria dos fenómenos que se passam, de maneira a tornar possível a construção dos diagramas fundamentais do gerador conhecendo sòmente as suas constantes.

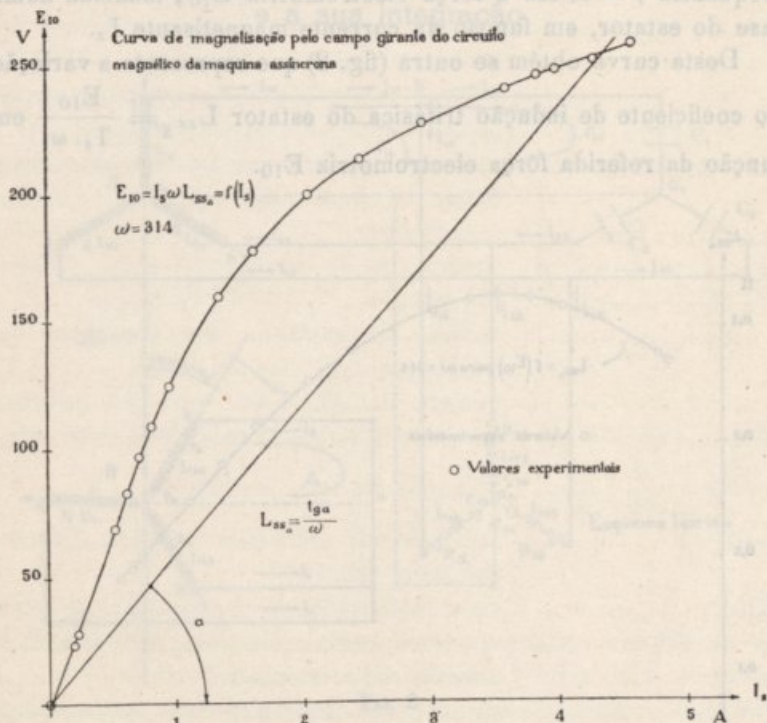


Fig. 1

FIG. 1

Partindo das leis fundamentais do electromagnetismo começaremos por estabelecer as equações diferenciais dos valores instantâneos. Admitimos em seguida o estabelecimento de oscilações com amplitude constante, sendo assim conduzidos a equações de valores máximos donde será possível determinar as grandezas que caracterizam o funcionamento do gerador em regímen auto-excitado. Como o que nos interessa é estudar o que há de essencial neste funcionamento, tomaremos sòmente

em linha de conta a harmónica fundamental das respectivas oscilações.

Para a determinação da sua amplitude será necessário considerar a variação dos coeficientes de indução com a saturação magnética do ferro. Esta é posta em evidência pela curva experimental de magnetisação do circuito magnético da máquina assíncrona (fig. 1) que representa, em valores eficazes, para a frequência $f = 50 \text{ Hz}$ a força electromotriz E_{10} , induzida numa fase do estator, em função da corrente magnetisante I_s .

Desta curva obtém-se outra (fig. 2) que representa a variação do coeficiente de indução trifásica do estator $L_{ss\Delta} = \frac{E_{10}}{I_s \cdot \omega}$ em função da referida força electromotriz E_{10} .

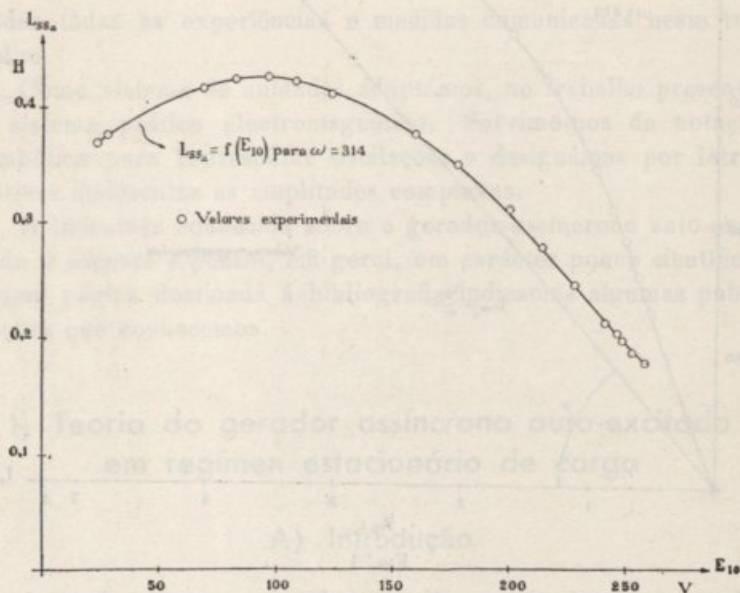


Fig. 3

FIG. 2

Os coeficientes de indução, assim definidos, são independentes dos valores instantâneos da corrente magnetisante e da respectiva força electromotriz e dependem somente das suas amplitudes.

No estudo que se segue, consideramos as oscilações auto-

-excitadas do gerador assíncrono como fenómenos quási-estacionários e não tomamos portanto em linha de conta a energia radiante. Além disso serão desprezadas as perdas de energia nos dielétricos dos condensadores e no ferro do circuito magnético da máquina assíncrona.

B) As equações diferenciais dos valores instantâneos e a sua integração

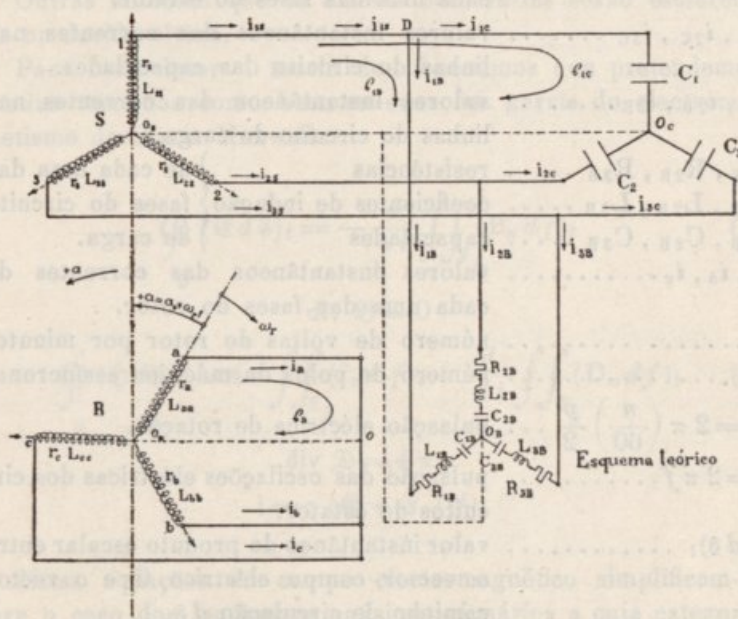


FIG. 3

Notações gerais segundo o esquema da fig. 3:

- $r_1, r_2, r_3 \dots \dots \dots$ resistência das fases do estator.
- $r_a, r_b, r_c \dots \dots \dots$ resistência das fases do rotor.
- $L_{11}, L_{22}, L_{33} \dots \dots \dots$ coeficientes de auto-indução de cada uma das fases do estator.
- $L_{aa}, L_{bb}, L_{cc} \dots \dots \dots$ coeficientes de auto-indução de cada uma das fases do rotor.
- $L_{12}, \dots \dots \dots$ coeficiente de indução mútua entre duas fases do estator.

L_{ab}, \dots	coeficiente de indução mútua entre duas fases do rotor	
L_{1a}, \dots	coeficiente de indução mútua entre uma fase do estator e uma fase do rotor.	
L_{a1}, \dots	coeficiente de indução mútua entre uma fase do rotor e uma fase do estator.	
C_1, C_2, C_3, \dots	capacidades ligadas em derivação sobre cada uma das fases do estator.	
$i_{1S}, i_{2S}, i_{3S}, \dots$	valores instantâneos das correntes de cada uma das fases do estator.	
$i_{1C}, i_{2C}, i_{3C}, \dots$	valores instantâneos das correntes nas linhas do circuito das capacidades.	
$i_{1B}, i_{2B}, i_{3B}, \dots$	valores instantâneos das correntes nas linhas do circuito de carga.	
$R_{1B}, R_{2B}, R_{3B}, \dots$	resistências	} de cada uma das fases do circuito de carga.
$L_{1B}, L_{2B}, L_{3B}, \dots$	coeficientes de indução	
$C_{1B}, C_{2B}, C_{3B}, \dots$	capacidades	
i_a, i_b, i_c, \dots	valores instantâneos das correntes de cada uma das fases do rotor.	
n, \dots	número de voltas do rotor por minuto.	
p, \dots	número de polos da máquina assíncrona.	
$\omega_r = 2\pi \left(\frac{n}{60}\right) \frac{p}{2}, \dots$	pulsção eléctrica de rotação.	
$\omega = 2\pi f, \dots$	pulsção das oscilações eléctricas dos circuitos do estator.	
$(\mathcal{E} d\mathcal{s})_t, \dots$	valor instantâneo do produto escalar entre o vector campo eléctrico \mathcal{E} e o vector caminho de circulação $d\mathcal{s}$.	
$(\mathcal{H} d\mathcal{s})_t, \dots$	valor instantâneo do produto escalar entre o vector campo magnético \mathcal{H} e o vector caminho de circulação $d\mathcal{s}$.	
$(B_n df)_t, \dots$	valor instantâneo do fluxo elementar do vector indução magnética B através da superfície df .	
$(i_n df)_t, \dots$	valor instantâneo do fluxo elementar do vector densidade de corrente i através da superfície df .	
$(D_n df)_t, \dots$	valor instantâneo do fluxo elementar do vector deslocamento D através da superfície df .	

- \mathcal{E}_e vector intensidade electromotriz devida a heterogeneidades do circuito.
 σ conductibilidade específica.
 ρ densidade cúbica eléctrica.
 t tempo.
 ε base dos logarithmos naturais.

$$j = +\sqrt{-1}$$

Outras notações que se tornem necessárias serão esclarecidas na devida altura.

Para estabelecer a teoria dos fenómenos que pretendemos estudar tomamos como base as equações gerais do electromagnetismo devidas a Maxwell:

$$\oint_{\mathfrak{B}} (\mathcal{E} d\mathfrak{s})_t = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}} (B_n df)_t \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$$

$$\oint_{\mathfrak{D}} (\mathfrak{D} d\mathfrak{s})_t = 4\pi \iint_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}} (i_n df)_t + \frac{d}{dt} \iint_{\mathfrak{F}_{\mathfrak{D}}} (D_n df)_t \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi \rho$$

$$i = \sigma (\mathcal{E} + \mathcal{E}_e) \quad (1)$$

Estas equações do campo electromagnético simplificam-se para o caso dos fenómenos quási-estacionários a cuja categoria pertencem as oscilações auto-excitadas que são objecto do nosso estudo. Assim é lícito desprezar o campo magnético originado pela variação do fluxo do vector deslocamento em relação ao campo magnético da corrente de condução e considerar êste como concentrado nas bobines de indução formadas por Z espiras. Considerando num sistema de h circuitos de bobinas 1, 2... h o circuito k e designando por Φ_{km} o fluxo de indução magnética ligado com Z_{km} espiras da mesma bobina, podemos a

(1) Na aplicação que a seguir vamos fazer desprezamos as forças electromotrices devidas às heterogeneidades dos circuitos e consideramos portanto $\mathcal{E}_e = 0$.

partir da equação (1) escrever a circulação ao longo do circuito k sob a forma

$$\oint_{\mathfrak{s}_k} (\mathfrak{E} d\mathfrak{s}) = - \frac{d}{dt} \sum_{m=1}^{m=Z} (\Phi_{km} \cdot Z_{km}) = - \frac{d\psi_k}{dt} \quad (3)$$

em que ψ_k representa o fluxo total de indução magnética ligado ao circuito k . Esta equação (3) é a expressão da lei de indução no caso dos fenómenos quási-estacionários.

Com o desprezo do campo magnético originado pela variação em relação ao tempo do fluxo do vector deslocamento a equação (2) reduz-se a

$$\oint_{\mathfrak{s}} (\mathfrak{H} d\mathfrak{s})_t = 4\pi \int \int_{\mathfrak{F}} (i_n df)_t \quad (4)$$

Designando por $i_1, i_2 \dots i_h$ os valores instantâneos das correntes nos circuitos 1, 2 ... h das h bobinas acima mencionadas e supondo a permeabilidade magnética independente destes valores instantâneos das correntes, a equação (4) permite-nos obter a relação

$$\psi_k = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=h} i_\lambda L_{\lambda k} \quad (5)$$

que exprime o fluxo total de indução magnética ψ_k ligado ao circuito k , em função das correntes que lhe dão origem e dos coeficientes de indução.

A aplicação da lei de indução (3) ao circuito oscilante formado pela fase 1 do estator e pelo condensador C_1 , (fig. 3) permite-nos estabelecer a respectiva equação dos valores instantâneos. A circulação é tomada ao longo do caminho fechado $\mathfrak{s}_{1c} = (1 D O_c O_s 1)$ e tem por expressão:

$$\oint_{\mathfrak{s}_{1c}} (\mathfrak{E} d\mathfrak{s}_{1c})_t = i_{1s} r_1 + \frac{\int i_{1c} dt}{C_1} \quad (6)$$

O segundo membro da equação (3) pode exprimir-se sob a forma

$$-\frac{d\psi_1}{dt} = -\left(\frac{d\psi_{1S}}{dt} + \frac{d\psi_{1R}}{dt}\right) \quad (7)$$

em que ψ_{1S} e ψ_{1R} representam os fluxos ligados à fase 1 que resultam respectivamente do estator e do rotor. A equação (5) permite-nos exprimir estes fluxos em função das correntes que lhe dão origem e dos coeficientes de indução. Atendendo a (5) obtém-se portanto:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{1S} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=3} i_{\lambda S} \cdot L_{\lambda S 1S} \\ \psi_{1R} &= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=3} i_{\lambda R} \cdot L_{\lambda R 1S} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Das equações (6), (7) e (8) resulta:

$$\begin{aligned} i_{1S} r_1 + \frac{d}{dt} (i_{1S} L_{11} + i_{2S} L_{21} + i_{3S} L_{31}) + \\ + \frac{d}{dt} (i_a L_{a1} + i_b L_{b1} + i_c L_{c1}) + \frac{f i_{1C} dt}{C_1} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Da mesma maneira obtém-se para os outros dois circuitos oscilantes as equações seguintes:

$$\begin{aligned} i_{2S} r_2 + \frac{d}{dt} (i_{2S} L_{22} + i_{3S} L_{32} + i_{1S} L_{12}) + \\ + \frac{d}{dt} (i_a L_{a2} + i_b L_{b2} + i_c L_{c2}) + \frac{f i_{2C} dt}{C_2} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} i_{3S} r_3 + \frac{d}{dt} (i_{3S} L_{33} + i_{1S} L_{13} + i_{2S} L_{23}) + \\ + \frac{d}{dt} (i_a L_{a3} + i_b L_{b3} + i_c L_{c3}) + \frac{f i_{3C} dt}{C_3} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

A aplicação da lei de indução aos circuitos de carga $\vec{s}_{1B} = (1 \ D \ O_B \ O_s \ 1)$, \vec{s}_{2B} e \vec{s}_{3B} dá logar às equações seguintes:

$$\left. \begin{aligned} F_1 + i_{1B} R_{1B} + L_{1B} \frac{di_{1B}}{dt} + \frac{\int i_{1B} dt}{C_{1B}} &= 0 \\ F_2 + i_{2B} R_{2B} + L_{2B} \frac{di_{2B}}{dt} + \frac{\int i_{2B} dt}{C_{2B}} &= 0 \\ F_3 + i_{3B} R_{3B} + L_{3B} \frac{di_{3B}}{dt} + \frac{\int i_{3B} dt}{C_{3B}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

em que, por simplicidade, se representou a soma dos primeiros três termos das equações (9), (10) e (11) respectivamente por F_1 , F_2 e F_3 .

Aplicando finalmente a lei de indução aos circuitos do rotor obtêm-se as equações:

$$\left. \begin{aligned} i_a r_a + \frac{d}{dt} (i_a L_{aa} + i_b L_{ba} + i_c L_{ca}) + \\ + \frac{d}{dt} (i_1 L_{1a} + i_2 L_{2a} + i_3 L_{3a}) &= 0 \\ i_b r_b + \frac{d}{dt} (i_b L_{bb} + i_c L_{cb} + i_a L_{ab}) + \\ + \frac{d}{dt} (i_1 L_{1b} + i_2 L_{2b} + i_3 L_{3b}) &= 0 \\ i_c r_c + \frac{d}{dt} (i_c L_{cc} + i_a L_{ac} + i_b L_{bc}) + \\ + \frac{d}{dt} (i_1 L_{1c} + i_2 L_{2c} + i_3 L_{3c}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

As equações (9), (10), (11), (12) e (13) têm um carácter geral e constituem um sistema de nove equações diferenciais relativas às oscilações nos circuitos da máquina assíncrona ligada a condensadores e em regimen de carga.

O estudo que pretendemos fazer limita-se ao caso de uma máquina com enrolamentos simétricos no estator e no rotor, ligada a circuitos também simétricos de condensadores e de carga.

A expressão matemática das condições de simetria é a seguinte:

Estatótor :

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_s, L_{11} = L_{22} = L_{33} = L_{ss}, \\ L_{12} = L_{21} = L_{23} = L_{32} = L_{31} = L_{13} = L_{ms}.$$

Rotor :

$$r_a = r_b = r_c = r_r, L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L_{rr}, \\ L_{ab} = L_{ba} = L_{bc} = L_{cb} = L_{ca} = L_{ac} = L_{mr}. \quad (14)$$

Condensadores :

$$C_1 = C_2 = C_3 = C.$$

Circuito de carga :

$$R_{1B} = R_{2B} = R_{3B} = R_B,$$

$$L_{1B} = L_{2B} = L_{3B} = L_B,$$

$$C_{1B} = C_{2B} = C_{3B} = C_B$$

Da equação (4) resultam para os pontos de derivação de corrente O_s, O_c, O_b e O_r as relações seguintes :

$$\left. \begin{aligned} i_{1s} + i_{2s} + i_{3s} = 0, i_{1c} + i_{2c} + i_{3c} = 0 \\ i_{1B} + i_{2B} + i_{3B} = 0, i_a + i_b + i_c = 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Atendendo às relações (14) e (15) as equações diferenciais (9), (10), (11), (12) e (13) tomam a forma :

$$\left. \begin{aligned} i_{1s} r_s + (L_{ss} - L_{ms}) \frac{di_{1s}}{dt} + \\ + \frac{d}{dt} (i_a L_{a1} + i_b L_{b1} + i_c L_{c1}) + \frac{\int i_{1c} dt}{C} = 0 \\ i_{2s} r_s + (L_{ss} - L_{ms}) \frac{di_{2s}}{dt} + \\ + \frac{d}{dt} (i_a L_{a2} + i_b L_{b2} + i_c L_{c2}) + \frac{\int i_{2c} dt}{C} = 0 \\ i_{3s} r_s + (L_{ss} - L_{ms}) \frac{di_{3s}}{dt} + \\ + \frac{d}{dt} (i_a L_{a3} + i_b L_{b3} + i_c L_{c3}) + \frac{\int i_{3c} dt}{C} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} F'_1 + i_{1B} R_B + L_B \frac{di_{1B}}{dt} + \frac{\int i_{1B} dt}{C_B} &= 0 \\ F'_2 + i_{2B} R_B + L_B \frac{di_{2B}}{dt} + \frac{\int i_{2B} dt}{C_B} &= 0 \\ F'_3 + i_{3B} R_B + L_B \frac{di_{3B}}{dt} + \frac{\int i_{3B} dt}{C_B} &= 0 \end{aligned} \right\} (17)$$

$$\left. \begin{aligned} i_a r_R + (L_{RR} - L_{MR}) \frac{di_a}{dt} + \frac{d}{dt} (i_1 L_{1a} + i_2 L_{2a} + i_3 L_{3a}) &= 0 \\ i_b r_R + (L_{RR} - L_{MR}) \frac{di_b}{dt} + \frac{d}{dt} (i_1 L_{1b} + i_2 L_{2b} + i_3 L_{3b}) &= 0 \\ i_c r_R + (L_{RR} - L_{MR}) \frac{di_c}{dt} + \frac{d}{dt} (i_1 L_{1c} + i_2 L_{2c} + i_3 L_{3c}) &= 0 \end{aligned} \right\} (18)$$

em que, por simplicidade, se representou nas equações (17) a soma dos primeiros três termos das equações (16) respectivamente por F'_1 , F'_2 e F'_3 .

Os dois primeiros termos de cada uma das equações (16) resultam dos circuitos do estator. O terceiro termo de cada equação representa a reacção do rotor. Nestes termos figuram os coeficientes de indução mútua entre o rotor e o estator, tornando assim necessária a sua definição matemática. A disposição dos enrolamentos do estator e rotor no espaço (fig. 3) acarreta as seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned} L_{a1} &= L_{a1 \max} \cos \alpha, & L_{a1} &= L_{a1 \max} \cos \alpha \\ L_{b1} &= L_{b1 \max} \cos (\alpha + 120) & L_{a2} &= L_{a2 \max} \cos (\alpha + 240) \\ L_{c1} &= L_{c1 \max} \cos (\alpha + 240) & L_{a3} &= L_{a3 \max} \cos (\alpha + 120) \\ L_{1a} &= L_{1a \max} \cos (360 - \alpha) & L_{1a} &= L_{1a \max} \cos (360 - \alpha) \\ L_{2a} &= L_{2a \max} \cos (120 - \alpha) & L_{1b} &= L_{1b \max} \cos (240 - \alpha) \\ L_{3a} &= L_{3a \max} \cos (240 - \alpha) & L_{1c} &= L_{1c \max} \cos (120 - \alpha) \\ L_{a1 \max} &= L_{b1 \max} = L_{c1 \max} = L_{a2 \max} = L_{a3 \max} = L_{RS} \\ L_{1a \max} &= L_{1b \max} = L_{1c \max} = L_{2a \max} = L_{3a \max} = L_{SR} \end{aligned} \right\} (19)$$

$$\text{em que} \quad \alpha = \alpha_0 + \omega_r t. \quad (20)$$

Nesta equação representa ω_r a pulsação eléctrica de rotação, t o tempo, α o ângulo em medida eléctrica formado pelos eixos

das bobinas (fig. 3) e α_0 uma constante arbitrária. As equações (19) e (20) exprimem que os coeficientes L_{a1}, L_{a2}, L_{a3} são funções periódicas do tempo com a mesma amplitude L_{RS} , a mesma pulsação ω_r e diferem umas das outras na fase, constituindo um sistema trifásico simétrico. O mesmo tem lugar para os coeficientes $L_{b1}, L_{b2}, L_{b3}; L_{c1}, L_{c2}, L_{c3}$ assim como para os seus correspondentes nas equações (18) dos circuitos do rotor. As equações (16), (17) e (18) representam um sistema de nove equações diferenciais relativas às oscilações auto-excitadas nos circuitos simétricos da máquina assíncrona ligada a condensadores e em carga. Vamos tentar satisfazê-las por funções harmónicas para as correntes. De acôrdo com os resultados experimentais admitimos para uma determinada pulsação ω_r do rotor o estabelecimento de oscilações de amplitude constante e com a pulsação ω nos circuitos do estator e $S\omega$ nos circuitos do rotor formando dois sistemas trifásicos e simétricos. Desta maneira chegaremos a equações que nos tornarão possível a determinação das frequências e amplitudes das oscilações que pretendemos estudar.

Considerando somente a primeira harmónica das referidas oscilações obtemos para a sua expressão matemática as equações seguintes:

$$\left. \begin{aligned} i_{1S} &= I_{mS} \varepsilon^{j(\omega t + \varphi)} & i_a &= I_{mR} \varepsilon^{j(S\omega t + \gamma)} \\ i_{2S} &= I_{mS} \varepsilon^{j(\omega t + \varphi - 120)} & i_b &= I_{mR} \varepsilon^{j(S\omega t + \gamma - 120)} \\ i_{3S} &= I_{mS} \varepsilon^{j(\omega t + \varphi - 240)} & i_c &= I_{mR} \varepsilon^{j(S\omega t + \gamma - 240)} \\ i_{1C} &= I_{mC} \varepsilon^{j(\omega t + \beta)} & i_{1B} &= I_{mB} \varepsilon^{j(\omega t + \delta)} \\ i_{2C} &= I_{mC} \varepsilon^{j(\omega t + \beta - 120)} & i_{2B} &= I_{mB} \varepsilon^{j(\omega t + \delta - 120)} \\ i_{3C} &= I_{mC} \varepsilon^{j(\omega t + \beta - 240)} & i_{3B} &= I_{mB} \varepsilon^{j(\omega t + \delta - 240)} \end{aligned} \right\} (21)$$

Vamos agora proceder aos cálculos necessários para introduzir as relações (21) no sistema de equações diferenciais (16), (17) e (18).

1.º Cálculos relativos às equações (16):

a) Termos com origem nos próprios circuitos do estator.

Para a primeira das equações (16) obtêm-se com auxílio das relações (21) as seguintes expressões:

$$\left. \begin{aligned} i_{1S} r_S &= I_{mS} \cdot r_S \varepsilon^{j(\omega t + \varphi)} \\ (L_{SS} - L_{MS}) \frac{di_{1S}}{dt} &= I_{mS} \cdot j\omega L_{SS\Delta} \cdot \varepsilon^{j(\omega t + \varphi)} \\ \frac{\int i_{1C} dt}{C} &= \frac{I_{mC}}{j\omega C} \varepsilon^{j(\omega t + \beta)} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

em que $L_{SS\Delta} = (L_{SS} - L_{MS})$ representa o coeficiente de indução trifásica do estator.

b) Termo da reacção do rotor.

Para a primeira das equações (16) tem este termo a forma seguinte:

$$\frac{d}{dt} (i_a L_{a1} + i_b L_{b1} + i_c L_{c1}).$$

Das equações (19), (20) e (21) resulta:

$$\begin{aligned} i_a &= I_{mR} \varepsilon^{j(S\omega t + \gamma)} & L_{a1} &= L_{RS} \cos(\alpha_0 + \omega_r t) \\ i_b &= I_{mR} \varepsilon^{j(S\omega t + \gamma - 120)} & L_{b1} &= L_{RS} \cos(\alpha_0 + \omega_r t + 120) \\ i_c &= I_{mR} \varepsilon^{j(S\omega t + \gamma - 240)} & L_{c1} &= L_{RS} \cos(\alpha_0 + \omega_r t + 240) \end{aligned}$$

e aplicando a fórmula de Euler, $\cos \alpha = \frac{1}{2} [\varepsilon^{+j\alpha} + \varepsilon^{-j\alpha}]$, obtém-se:

$$\left. \begin{aligned} i_a L_{a1} + i_b L_{b1} + i_c L_{c1} &= I_{mR} \varepsilon^{j\gamma} \cdot \varepsilon^{jS\omega t} \cdot L_{RS} \frac{1}{2} \times \\ \times \left[\varepsilon^{j\omega_r t} \cdot \varepsilon^{j\alpha_0} \cdot 3 + \varepsilon^{-j(\alpha_0 + \omega_r t)} \underbrace{(\varepsilon^{j0} + \varepsilon^{-j240} + \varepsilon^{-j480})}_0 \right] &= \\ = I_{mR} \varepsilon^{j\gamma} \cdot \varepsilon^{j(S\omega + \omega_r)t} \cdot \frac{3}{2} L_{RS} \cdot \varepsilon^{j\alpha_0} & \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Para que este termo da reacção do rotor possuía a mesma pulsação ω dos restantes termos com origem nos próprios circuitos do estator [equações (22)] tem de ser válida a relação

$$S\omega + \omega_r = \omega \quad (24)$$

em que S representa a grandeza «escorregamento» conhecida da teoria da máquina assíncrona.

Das equações (23) e (24) resulta:

$$\frac{d}{dt} (i_a L_{a1} + i_b L_{b1} + i_c L_{c1}) = I_{mR} \cdot \varepsilon^{j\gamma} \cdot j\omega L_{RS_\Delta} \cdot \varepsilon^{j\omega t} \cdot \varepsilon^{j\alpha_0}, \quad (25)$$

em que $L_{RS_\Delta} = \frac{3}{2} L_{RS}$ representa o coeficiente de indução mútua trifásica do rotor sobre o estator. Introduzindo as equações (22) e (25) na primeira das equações diferenciais (16) obtém-se:

$$(r_s + j\omega L_{SS_\Delta}) \mathfrak{I}_{mS} \cdot \varepsilon^{j\omega t} + j\omega L_{RS_\Delta} \mathfrak{I}_{mR} \varepsilon^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \mathfrak{I}_{mC} \cdot \varepsilon^{j\omega t} = 0 \quad (26)$$

em que se usou da notação simbólica:

$$\mathfrak{I}_{mS} = I_{mS} \varepsilon^{j\varphi}, \quad \mathfrak{I}_{mR} = I_{mR} \varepsilon^{j\gamma}, \quad \mathfrak{I}_{mC} = I_{mC} \varepsilon^{j\beta} \quad (27)$$

e, por simplicidade, se considerou $\alpha_0 = 0$.

Para as outras duas equações (16) obtem-se expressões análogas. Todas são funções harmónicas diferindo apenas pela fase e constituindo um sistema trifásico simétrico. É de notar que cada um dos circuitos oscilantes se comporta electricamente como se existisse independente e possuísse um coeficiente de indução que resulta da sua ligação magnética com os restantes. Nestas condições basta, para o estudo que pretendemos fazer, considerar somente a equação (26) como representante do sistema (16).

2.º) Cálculos relativos às equações (17):

Para a primeira das equações (17) obtem-se com auxílio das relações (21) as seguintes expressões:

$$\left. \begin{aligned} i_{1B} R_B &= I_{mB} R_B \cdot \varepsilon^{j(\omega t + \delta)}, \\ L_B \frac{di_{1B}}{dt} &= I_{mB} \cdot j\omega L_B \cdot \varepsilon^{j(\omega t + \delta)}, \\ \int \frac{i_{1B} dt}{C_B} &= \frac{I_{mB}}{j\omega C_B} \varepsilon^{j(\omega t + \delta)}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

As expressões de F'_1 , F'_2 e F'_3 já se encontram calculadas nas equações (22) e (23). Introduzindo as relações (28) na primeira das equações (17) e atendendo às relações (22) e (23) obtém-se:

$$(r_s + j\omega L_{SS_\Delta}) \mathfrak{F}_{mS} \varepsilon^{j\omega t} + j\omega L_{RS_\Delta} \mathfrak{F}_{mR} \varepsilon^{j\omega t} + \left(R_B + j\omega L_B + \frac{1}{j\omega C_B} \right) \mathfrak{F}_{mB} \varepsilon^{j\omega t} = 0 \quad (29)$$

em que se usou da notação $\mathfrak{F}_{mB} = I_{mB} \varepsilon^{j\delta}$.

Fazendo considerações análogas às do caso anterior resulta que basta considerar como representante do sistema (17) simplesmente a equação (29).

3.º Cálculos relativos às equações (18):

Procedendo-se de uma maneira análoga à empregada no estudo das equações (16) obtém-se para a primeira das equações (18) a expressão:

$$(r_R + jS\omega L_{RR_\Delta}) \mathfrak{F}_{mR} \varepsilon^{jS\omega t} + jS\omega L_{SR_\Delta} \mathfrak{F}_{mS} \varepsilon^{jS\omega t} = 0 \quad (30)$$

em que $L_{RR_\Delta} = (L_{RR} - L_{MR})$ representa o coeficiente de indução trifásica do rotor e $L_{SR_\Delta} = \frac{3}{2} L_{SR}$ o coeficiente de indução mútua trifásica do estator sobre o rotor. Conforme o adotado ao estabelecer a equação (26) supusemos $\alpha_0 = 0$. Da mesma maneira que nos casos anteriores basta aqui considerar somente a equação (30) como representante do sistema (18).

A nossa atenção dirige-se agora para as equações fundamentais (26), (29) e (30) que acabamos de obter e podemos escrever sob a forma:

$$(r_s + j\omega L_{SS_\Delta}) \mathfrak{F}_{mS} + j\omega L_{RS_\Delta} \mathfrak{F}_{mR} + \mathfrak{B}_C \mathfrak{F}_{mC} = 0 \quad (31)$$

$$(r_s + j\omega L_{SS_\Delta}) \mathfrak{F}_{mS} + j\omega L_{RS_\Delta} \mathfrak{F}_{mR} + \mathfrak{B}_B \mathfrak{F}_{mB} = 0 \quad (32)$$

$$(r_R + jS\omega L_{RR_\Delta}) \mathfrak{F}_{mR} + jS\omega L_{SR_\Delta} \mathfrak{F}_{mS} = 0 \quad (33)$$

em que, por simplicidade, se adotaram as notações

$$\mathfrak{B}_C = -j \frac{1}{\omega C}, \quad \mathfrak{B}_B = R_B + j \left(\omega L_B - \frac{1}{\omega C_B} \right) \quad (34)$$

para as impediências do circuito dos condensadores e do circuito de carga. As três equações (31), (32) e (33) são equações vectoriais escritas em representação simbólica.

Atendendo às equações (4) e (21) podemos escrever para o ponto de derivação D (fig. 3) a seguinte relação:

$$\mathfrak{Z}_{ms} = \mathfrak{Z}_{mc} + \mathfrak{Z}_{mB}. \quad (35)$$

De (31) e (32) resulta:

$$\frac{\mathfrak{Z}_{mc}}{\mathfrak{Z}_{mB}} = \frac{\mathfrak{Z}_B}{\mathfrak{Z}_C}. \quad (36)$$

Das equações (35) e (36) obtém-se:

$$\mathfrak{Z}_{mc} = \mathfrak{Z}_{ms} \left(\frac{1}{1 + \frac{\mathfrak{Z}_C}{\mathfrak{Z}_B}} \right) \quad (37)$$

onde resulta

$$\mathfrak{Z}_{mc} \mathfrak{Z}_C = \mathfrak{Z}_{ms} \left(\frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{Z}_B} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_C}} \right) = \mathfrak{Z}_{ms} (a - jb) \quad (38)$$

em que a e $(-jb)$ representam respectivamente a parte real e a parte imaginária da impediência

$$\mathfrak{Z}' = \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{Z}_B} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_C}} = (a - jb). \quad (39)$$

Juntando a equação que se obtém introduzindo (38) em (31) à equação (33), resulta o sistema de duas equações:

$$(r_s + j\omega L_{SS_\Delta} + a - jb) \mathfrak{Z}_{ms} + j\omega L_{RS_\Delta} \mathfrak{Z}_{mR} = 0 \quad (40)$$

$$(r_R + jS\omega L_{RR_\Delta}) \mathfrak{Z}_{mR} + jS\omega L_{SR_\Delta} \mathfrak{Z}_{ms} = 0. \quad (33)$$

Para uma dada pulsação ω são os valores a e b condicionados pela capacidade C e pelas constantes do circuito de carga. Dados assim a e b a máquina assíncrona só poderá funcionar em regi-

men auto-excitado se as equações (33) e (40) forem satisfeitas. As únicas variáveis de que a máquina assíncrona dispõe para se poder adaptar às condições exigidas são a saturação do ferro do seu circuito magnético, que se evidencia no valor dos seus coeficientes de indução, e o escorregamento S que, segundo a equação (24), para uma determinada pulsação ω só poderá variar com ω_r , isto é, com a velocidade angular do rotor.

O problema que nos propomos resolver é o seguinte: Sendo dadas para uma certa pulsação ω as constantes a e b [equação (39)], determinar as condições em que o funcionamento do gerador se torna possível, isto é, determinar o escorregamento S , a pulsação ω_r e o valor dos coeficientes de indução (estado de saturação do ferro do circuito magnético) que por sua vez permite obter as amplitudes das correntes dos circuitos do estator e do rotor e da tensão nos terminais do gerador. Antes de o abordarmos servindo-nos das equações (33) e (40) vamos previamente examinar as suas soluções no caso limite $\lim (r_s + a) = 0$, o que, sob o ponto de vista físico, significa ausência de perdas no circuito oscilante do estator.

Da equação (33) resulta:

$$\mathfrak{I}_{mR} = - \frac{j\omega L_{SR\Delta}}{\left(\frac{r_R}{S}\right) + j\omega L_{RR\Delta}} \cdot \mathfrak{I}_{mS}. \quad (41)$$

Introduzindo (41) em (40) e atendendo à condição limite $(r_s + a) = 0$ tem-se:

$$\left[j(\omega L_{SS\Delta} - b) + \frac{\omega^2 L_{RS\Delta} \cdot L_{SR\Delta}}{\left(\frac{r_R}{S}\right) + j\omega L_{RR\Delta}} \right] \cdot \mathfrak{I}_{mS} = 0. \quad (42)$$

No regimen auto-excitado do gerador, isto é, para valores de $\mathfrak{I}_{mS} \neq 0$ terá então lugar a relação:

$$j(\omega L_{SS\Delta} - b) = - \frac{\omega^2 L_{RS\Delta} L_{SR\Delta}}{\left(\frac{r_R}{S}\right) + j\omega L_{RR\Delta}}. \quad (43)$$

Como a parte real do primeiro membro da equação (43) é nula, a parte real do segundo membro também tem que o ser. Para que isso tenha lugar há duas possibilidades:

1.^a) O segundo membro da equação (43) é nulo:

Esta hipótese acarreta a solução:

$$\left. \begin{aligned} S &= 0 \\ \omega L_{SS_{\Delta}} &= b \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

que em virtude das equações (41) e (24) conduz às relações seguintes:

$$\left. \begin{aligned} \Im_{mR} &= 0 \\ \omega_r &= \omega. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Esta solução é fisicamente possível e significa que havendo sincronismo entre a pulsação eléctrica ω_r do rotor e a do campo girante ω , as correntes do rotor são nulas e nem este recebe nem fornece energia ao sistema oscilante do estator que na hipótese presente é caracterizado pela ausência de perdas. A solução (44) resulta também directamente das expressões que se obtêm considerando inicialmente nulas as correntes do rotor ($i_a = i_b = i_c = 0$) nas equações diferenciais dos valores instantâneos (16), (17) e (18).

As equações (40) e (33) tomam, neste caso, a forma

$$\left. \begin{aligned} [(r_s + a) + j(\omega L_{SS_{\Delta}} - b)] \Im_{mS} &= 0 \\ jS \omega L_{SR_{\Delta}} \Im_{mS} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Para $\Im_{mS} \neq 0$, este sistema só pode ser satisfeito tendo lugar a relação $(r_s + a) = 0$ e admite então a solução única expressa pelas relações (44).

2.^a) O segundo membro da equação (43) é um imaginário puro.

Para isso é necessário que somente a sua parte real seja nula. Esta hipótese acarreta a solução:

$$\left. \begin{aligned} S &= \infty \\ \omega L_{SS_{\Delta}} &= \frac{b}{1 - K^2} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

em que K é definido pela relação $K = \sqrt{\frac{L_{SR_{\Delta}} \cdot L_{RS_{\Delta}}}{L_{SS_{\Delta}} \cdot L_{RR_{\Delta}}}}$.

A solução expressa pelas relações (47) conduz, em virtude das equações (41) e (24), às seguintes relações:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}_{mR} &= -\frac{L_{SR\Delta}}{L_{RR\Delta}} \mathfrak{I}_{mS} \\ \omega_r &= \infty. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

A relação $\omega_r = \infty$ implica uma velocidade angular de rotação infinitamente grande, o que é fisicamente impossível. A solução expressa pelas relações (48) é portanto estranha ao fenómeno físico que pretendemos estudar. O sistema de equações (33) e (40) admitindo além das soluções que são compatíveis com as possibilidades físicas, outras que o não são, apresenta um carácter mais geral do que os fenómenos que desejamos estudar. Temos pois que impor ao sistema (33), (40) uma restrição para que ele traduza unicamente o fenómeno físico em questão. Esta será uma condição limite: das soluções do sistema (33), (40) só correspondem ao fenómeno físico que pretendemos estudar aquelas cujos valores para $\lim (r_S + a) = 0$ tendam para a solução (44) do sistema (46).

Feitas estas restrições podemos passar à resolução do problema: Dadas as constantes a e b para uma certa pulsação ω , determinar o escorregamento S , a pulsação ω_r e o estado de saturação do circuito magnético compatíveis com o funcionamento do gerador. Partindo das equações (33), (40) pretendemos chegar a duas equações em que só entrem impediências e que nos permitam determinar as incógnitas S e $L_{SS\Delta}$. Os restantes coeficientes de indução estão ligados por relações de proporcionalidade a $L_{SS\Delta}$. A grandeza ω_r determina-se, para uma dada pulsação ω , a partir da equação (24) logo que se conheça o escorregamento S .

Da equação (33) resulta:

$$\mathfrak{I}_{mR} = -j\omega L_{SR\Delta} \left[\frac{\frac{r_R}{S}}{\left(\frac{r_R}{S}\right)^2 + \omega^2 L_{RR\Delta}^2} - j \frac{\omega L_{RR\Delta}}{\left(\frac{r_R}{S}\right)^2 + \omega^2 L_{RR\Delta}^2} \right] \mathfrak{I}_{mS}. \quad (49)$$

De (49) e (40) resulta:

$$[\mathfrak{I}_A + (a - jb)] \mathfrak{I}_{mS} = 0 \quad (50)$$

em que

$$\mathfrak{Z}_A = r_s + \frac{r_R}{S} H^2 + j (\omega L_{S S_\Delta} - \omega L_{R R_\Delta} \cdot H^2) \quad (51)$$

e

$$H^2 = \frac{\omega^2 L_{R S_\Delta} L_{S R_\Delta}}{\left(\frac{r_R}{S}\right)^2 + \omega^2 L_{R R_\Delta}^2} = \left(\frac{I_{mR}}{I_{mS}}\right)^2 \quad (52)$$

representam respectivamente a impedância da máquina assíncrona e o quadrado do valor absoluto da relação entre as amplitudes da corrente do rotor e da corrente do estator. No caso de se estabelecerem na máquina assíncrona as oscilações auto-excitadas que pretendemos estudar, terá de ser $\mathfrak{Z}_{mS} \neq 0$ e a equação (50) só poderá ser satisfeita se tiver lugar a relação:

$$\mathfrak{Z}_A = - (a - jb) = - \left(\frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{Z}_B} + \frac{1}{\mathfrak{Z}_C}} \right) = - \mathfrak{Z}' \quad (53)$$

isto é, se fôr possível à máquina assíncrona modificando o seu escorregamento e a saturação do seu circuito magnético obter uma impedância que seja igual em valor absoluto e de sinal contrário à impedância definida pela equação (39) e que resulta da associação em paralelo de \mathfrak{Z}_C e \mathfrak{Z}_B definidas pelas equações (34). A relação (53) atendendo a (51) acarreta as duas equações:

$$(r_s + a) + \frac{r_R}{S} H^2 = 0 \quad (54)$$

$$\omega (L_{S S_\Delta} - L_{R R_\Delta} \cdot H^2) - b = 0 \quad (55)$$

que juntas à equação (24)

$$\omega_r = \omega (1 - S) \quad (24)$$

constituem as equações fundamentais relativas às oscilações auto-excitadas do gerador assíncrono em regimen de carga.

Antes de irmos mais longe vejamos o significado físico destas equações:

A primeira, equação (54), significa que a energia gasta nos

circuitos oscilantes do estator — perdas ohmicas no próprio enrolamento do estator (r_s) e energia gasta no circuito de carga (constante a positiva) — é fornecida pelo rotor através do campo magnético da máquina assíncrona. Para que esse fornecimento seja exacto estabelece-se na máquina assíncrona o devido escorregamento. A equação (54) mostra que isto só pode ter lugar para um escorregamento S negativo o que está conforme com o funcionamento da máquina assíncrona como gerador e implica segundo a equação (24), a desigualdade $\omega_r > \omega$.

A equação (55) mostra-nos que a energia necessária para a magnetização da máquina assíncrona oscila entre as suas bobinas (energia do campo magnético) e os condensadores (energia do campo eléctrico). As duas energias oscilam em oposição e a troca é reversível. Uma tal oscilação só poderá ter lugar sendo a grandeza b positiva, pois, só nesse caso é que a componente imaginária ($-jb$) da impedância β' [equação (39)] tem um carácter capacitivo. Porém nenhuma das equações (54), (55) e (24) nos informam sobre a amplitude das oscilações. Esta só poderá ser determinada tomando em linha de conta a saturação do ferro do circuito magnético da máquina assíncrona.

Para introduzirmos no sistema de equações (54) e (55) uma variável que traduza este estado de saturação magnética basta exprimir L_{RR_Δ} e $L_{SR_\Delta} \cdot L_{RS_\Delta}$ em função de L_{SS_Δ} . Com grande aproximação têm lugar independentemente do estado de saturação magnética, as relações seguintes:

$$L_{RR_\Delta} = A \cdot L_{SS_\Delta} \quad (56)$$

$$L_{SR_\Delta} \cdot L_{RS_\Delta} = A \cdot K^2 L_{SS_\Delta} \quad (57)$$

$$A = \left(\frac{Z_R}{Z_S} \right)^2 \quad (58)$$

onde Z_R e Z_S representam respectivamente o número de espiras de uma fase do rotor e de uma fase do estator, e

$$K = \sqrt{\frac{L_{SR_\Delta} \cdot L_{RS_\Delta}}{L_{SS_\Delta} \cdot L_{RR_\Delta}}} \quad (59)$$

representa o factor de ligação magnética do sistema estator-rotor. Despresamos as pequenas variações do valor de K com o estado de saturação do circuito magnético e consideramo-lo constante para a teoria que se segue. Introduzindo as expressões (56) e (57) nas equações (52), (54) e (55) e designando por comodidade ωL_{SS_A} por x obtem-se as equações:

$$H^2 \frac{r_R}{S} + (r_S + a) = 0 \quad (60)$$

$$(1 - AH^2)x - b = 0 \quad (61)$$

em que tem lugar:

$$H^2 = \frac{AK^2x^2}{\left(\frac{r_R}{S}\right)^2 + A^2x^2} = \left(\frac{I_{mR}}{I_{mS}}\right)^2 \quad (62)$$

e a que juntamos a relação (24)

$$\omega_r = \omega(1 - S). \quad (24)$$

Para uma certa pulsação ω e para determinadas constantes a e b condicionadas pela impedância β' [equação (39)], as equações (60), (61) e (24) representam um sistema algébrico de três equações a três incógnitas (ω_r , S e $x = \omega L_{SS_A}$), que passamos a resolver.

Egualando os valores de H^2 tirados das equações (60) e (61) obtem-se:

$$(b - x)r_R - (r_S + a) \cdot A \cdot x \cdot S = 0 \quad (63)$$

ou seja:

$$S = - \frac{(x - b)r_R}{(r_S + a) \cdot A \cdot x}. \quad (64)$$

De (60) e (62) resulta:

$$(r_S + a) \cdot A^2 \cdot S^2 \cdot x^2 + r_R \cdot A \cdot K^2 \cdot S \cdot x^2 + r_R^2 \cdot (r_S + a) = 0. \quad (65)$$

Introduzindo (64) em (65) resulta, depois de feitas as simplificações, a seguinte equação para x :

$$(1 - K^2)x^2 - (2 - K^2)bx + b^2 + (r_S + a)^2 = 0 \quad (66)$$

que admite as soluções dadas pela expressão

$$x = \frac{b(2 - K^2) \pm \sqrt{K^4 b^2 - 4(r_s + a)^2(1 - K^2)}}{2(1 - K^2)} \quad (67)$$

Para sabermos quais as soluções que correspondem ao fenómeno físico que pretendemos estudar é preciso, como já acen- tuámos, examinar os valores que as soluções tomam para $\lim (r_s + a) = 0$ e só tomar em linha de conta aquelas cujos valo- res, para $\lim (r_s + a) = 0$, tendam para a solução expressa pelas relações (44), isto é, para $x = b$, $S = 0$. Para $\lim (r_s + a) = 0$ as raízes da equação (66) expressas pela relação (67) tendem, conforme se toma o sinal (-) ou (+) do radical, respectivamente para:

$$\begin{aligned} \text{sinal}(-) \dots\dots\dots x &= b \\ \text{sinal}(+) \dots\dots\dots x &= \frac{b}{1 - K^2} \end{aligned}$$

Das equações (61) e (62) resulta então:

$$\begin{aligned} \text{para } x = b: \quad H^2 &= 0 \quad S = 0 \\ \text{para } x = \frac{b}{1 - K^2}: \quad H^2 &= \frac{K^2}{A} \quad S = \infty \end{aligned}$$

Daqui se conclui que só a solução que se obtém tomando o sinal (-) para o radical, na expressão (67), satisfaz ao fenómeno físico em questão.

A solução obtida do sistema (60), (61) e (24) correspondente ao fenómeno físico a estudar é portanto dada pelas expressões:

$$x = \omega L_{SS\Delta} = \frac{b(2 - K^2) - \sqrt{K^4 b^2 - 4(r_s + a)^2(1 - K^2)}}{2(1 - K^2)} \quad (68)$$

$$S = - \frac{(x - b) r_R}{(r_s + a) \cdot A \cdot x} \quad (64)$$

$$\omega_r = \omega (1 - S) \quad (24)$$

Daqui se conclui que, para uma certa pulsação ω e constan- tes a e b , a máquina assíncrona só pode funcionar em regimen auto-excitado com um certo e determinado escorregamento S ,

uma determinada velocidade angular de rotação correspondente a ω_r e um valor determinado para o coeficiente de indução L_{SS_Δ} . As expressões (68) e (64) mostram que $x = \omega L_{SS_\Delta}$ é independente de A e da resistência r_R e que o escorregamento S é directamente proporcional à mesma resistência. Este facto permitir-nos-á, mais adiante, fazer uma aplicação interessante da máquina assíncrona auto-excitada como gerador funcionando, dentro de certos limites, com uma frequência independente da velocidade de rotação do rotor. Da mesma expressão (68) conclui-se que terá sempre lugar a desigualdade

$$\omega L_{SS_\Delta} > b \quad (69)$$

a qual em virtude das relações (64) e (24) acarreta as desigualdades

$$S < 0, \quad \omega_r > \omega \quad (70)$$

que são características do funcionamento como gerador da máquina assíncrona. A expressão (68) indica além disso que os valores de $x = \omega L_{SS_\Delta}$ só serão reais caso tenha lugar a relação

$$b^2 > \frac{4(r_s + a)^2(1 - K^2)}{K^4} \quad (71)$$

Caso a e b não satisfaçam esta condição o valor de x tornar-se-á imaginário. Sob o ponto de vista físico significa este resultado que as oscilações auto-excitadas do gerador assíncrono não se podem manter e a máquina perde assim a sua excitação.

Satisfeitas as condições (69), (70) e (71) resta nos agora a partir do valor de L_{SS_Δ} determinar a amplitude das oscilações auto-excitadas.

Para esta determinação basta conhecer, para uma dada frequência, a curva de magnetização pelo campo girante do circuito magnético da máquina assíncrona em questão (Fig. 1). Desta curva resulta outra que representa a função $L_{SS_\Delta} = f(E_{10})$, para $\omega = \text{const.}$, em que E_{10} exprime o valor eficaz da força electromotriz induzida pelo campo magnético girante numa fase do estator da máquina assíncrona.

Na Fig. 2 encontra-se representada esta curva que foi obtida experimentalmente e pertence à máquina assíncrona que utilizámos para os nossos estudos. Esta curva possui um máximo para um valor de E_{10} diferente de zero. Como porém demonstrámos num trabalho anterior (*Die Selbsterregung von Asynchronengeneratoren*) a parte da curva relativa ao domínio em que a função $L_{SS_A} = f(E_{10})$ é crescente, corresponde a estados de funcionamento instáveis. É pois completamente impossível obter oscilações auto-excitadas correspondentes a este domínio. Os regímens estáveis que pretendemos determinar, correspondem portanto à parte da curva em que a dita função é decrescente. Nesta região corresponde a um determinado valor do coeficiente de indução L_{SS_A} somente um valor da força electromotriz E_{10} .

Feitas estas restrições vamos finalmente mostrar como se determinam, com auxílio da curva da fig. 2, os valores das amplitudes das oscilações auto-excitadas.

Para uma determinada pulsação ω consideramos como conhecidas as grandezas a e b que representam os valores das componentes real e imaginária da impediência Z' (equação 39). Para estes valores a máquina assíncrona só poderá funcionar em regímen auto-excitado se a sua impediência, expressa pela equação (51), satisfizer à equação (53). O vector impediência, da máquina assíncrona em regímen auto-excitado fica assim previamente fixado. O gerador só poderá obter esta impediência por meio de uma pulsação ω_r , um escorregamento S e um coeficiente de indução L_{SS_A} determinados pelas relações (68), (64) e (24). Conhecido assim, para a pulsação ω , o coeficiente de indução L_{SS_A} , a curva da fig. 2 permite determinar unívocamente, na sua região decrescente, a força electromotriz E_{10} correspondente. O menor valor que a força electromotriz pode tomar corresponde ao valor máximo do coeficiente de indução. Se a expressão (68) exigir um valor superior a este o gerador perderá a sua excitação.

Representando simbòlicamente por \mathcal{E}_{10} e por \mathcal{E}_1 respectivamente os vectores «força electromotriz» induzida numa fase do estator e «tensão de fase» correspondente e por E_{10} e E_1 as suas grandezas, podemos escrever em valores eficazes as relações seguintes:

$$\mathcal{E}_{10} = \mathcal{E}_1 + \mathfrak{Z}_s r_s \quad (72)$$

$$\mathcal{E}_1 = -\mathfrak{Z}_s \mathfrak{Z}_A \quad (73)$$

donde se conclui

$$\mathcal{E}_{10} = -\mathfrak{I}_s \mathfrak{Z}_{A0} \quad (74)$$

em que \mathfrak{Z}_{A0} representa o vector impediência definido pela relação

$$\mathfrak{Z}_{A0} = -(a + r_s) + jb = \mathfrak{Z}_A - r_s \quad (75)$$

e cuja grandeza designamos por Z_{A0} .

Da equação (74) resulta para a corrente I_s das oscilações do estator o valor eficaz :

$$I_s = \frac{E_{10}}{Z_{A0}} \quad (76)$$

Da relação (73) obtem-se para o valor eficaz da tensão de fase a expressão

$$E_1 = I_s Z_A \quad (77)$$

A diferença de fase entre os vectores \mathcal{E}_1 e \mathfrak{I}_s obtem-se a partir da equação (73).

Como só considerámos a harmónica fundamental, as amplitudes das oscilações determinam-se multiplicando por $\sqrt{2}$ os respectivos valores eficazes.

Com estes elementos fica o problema completamente resolvido, pois conhecendo os vectores \mathcal{E}_1 e \mathfrak{I}_s facilmente se determinam as outras grandezas que poderão interessar, como sejam: as correntes dos circuitos do estator e do rotor, o factor de potência e a potência fornecida pelo gerador. Resta-nos agora, para completar este estudo, fazer uma aplicação da teoria exposta com o fim de ser verificada pela experiência. Isto constituirá o assunto do próximo parágrafo.

C) Os diagramas de impediência e os diagramas de corrente do gerador assíncrono auto-excitado

Designamos por diagrama de impediência do gerador, em determinado régimen de carga, a curva que neste régimen é descrita pela ponta do seu vector impediência. O diagrama de corrente será uma curva equivalente para a ponta do vector corrente.

Em primeiro lugar vamos estabelecer teoricamente os diagramas de impedância do gerador, para em seguida passarmos aos diagramas de corrente.

Diagramas de impedância

A impedância do gerador assíncrono auto-excitado é condicionada pela equação (53) em que, segundo as equações (34) tem lugar as relações:

$$\left. \begin{aligned} Z_C &= -j \frac{1}{\omega C} & (34_a) \\ Z_B &= R_B + j X_B & (34_b) \\ X_B &= \left(\omega L_B - \frac{1}{\omega C_B} \right) & (34_c) \end{aligned} \right\} (34)$$

Vamos agora considerar vários regímenes de carga e determinar os respectivos diagramas de impedância.

a) Regímen de carga conservando constantes a capacidade C e a pulsação ω dos circuitos oscilantes do estator e bem assim o factor de potência $\cos \varphi_B$ do circuito de carga.

Faz-se somente variar o módulo do vector impedância do circuito de carga, conservando constante a sua direcção e sentido:

$$C = \text{const}, \omega = \text{const}, \cos \varphi_B = \frac{R_B}{Z_B} = \text{const.}$$

$$|Z_B| = Z_B = \text{variável.}$$

Consideramos em primeiro lugar os casos limites em que $R_B = 0$:

a₁) Carga indutiva pura:

$$R_B = 0, X_B > 0, \varphi_B = +\frac{\pi}{2}, \cos \varphi_B = 0.$$

De (34) e (53) resulta:

$$Z_A = \frac{1}{-j\omega C + j\frac{1}{X_B}} = \frac{1}{Z_A'} \quad (78)$$

Fazendo variar a grandeza positiva $\frac{1}{X_B}$ desde o valor zero até ao valor (ωC) , a ponta do vector β'_A descreve o segmento de recta $\overline{N'O}$ (Fig. 4) e a ponta do seu inverso $\beta_A = \frac{1}{\beta'_A}$ descreve a semi-recta principiando em N e dirigindo-se no sentido do eixo $+j$. O diagrama de impedância é portanto neste caso uma semi-recta.

(a₂) Carga capacitiva pura:

$$R_B = 0, X_B < 0, \varphi_B = -\frac{\pi}{2}, \cos \varphi_B = 0.$$

A impedância é dada pela mesma expressão (78) do caso anterior sendo agora, porém, a grandeza $\frac{1}{X_B}$ negativa. Fazendo variar o valor absoluto desta grandeza entre 0 e ∞ , a ponta do vector β'_A descreve a semi-recta principiando em N' e dirigindo-se no sentido do eixo $-j$. O seu inverso β_A descreve o segmento de recta $\overline{N'O}$. O diagrama de impedância é portanto neste caso um segmento de recta.

(a₃) Passamos agora a considerar os casos em que $R_B \neq 0$ e X_B pode ser

$$\begin{aligned} X_B > 0 & \text{ carga indutiva} \\ X_B = 0 & \text{ carga ohmica} \\ X_B < 0 & \text{ carga capacitiva.} \end{aligned}$$

Em todos os casos terá, porém, lugar a relação

$$\cos \varphi_B = \frac{R_B}{Z_B} = \text{const} \neq 0. \quad (79)$$

Atendendo à relação

$$t_g \varphi_B = \frac{X_B}{R_B} \quad (80)$$

e a equação (34_b) obtém-se a expressão:

$$\beta_B = R_B (1 + j t_g \varphi_B). \quad (81)$$

De (81) e (53) resulta

$$\mathfrak{Z}_A = \frac{1}{-j\omega C - \frac{1}{R_B(1+jt_g\varphi_B)}}. \quad (82)$$

Atendendo porém à relação

$$\frac{1}{1+jt_g\varphi_B} = V \cdot (1 - jt_g\varphi_B), \quad (83)$$

em que, por simplicidade, se usou da notação $V = \cos^2 \varphi_B$, a equação (82) toma a forma

$$\mathfrak{Z}_A = \frac{1}{-j\omega C + \frac{V}{R_B}(-1 + jt_g\varphi_B)} = \frac{1}{\mathfrak{Z}'_A}. \quad (84)$$

Usando das notações

$$\mathfrak{A} = -j\omega C, \quad \mathfrak{B} = V(-1 + jt_g\varphi_B) \quad (85)$$

resulta para o vector \mathfrak{Z}'_A a expressão

$$\mathfrak{Z}'_A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \frac{1}{R_B}. \quad (86)$$

No régimen de carga que estamos a considerar ($C = \text{const.}$, $\omega = \text{const.}$, $t_g\varphi_B = \text{const.}$), os vectores \mathfrak{A} e \mathfrak{B} são constantes e portanto a única variável que existe na equação (86) é a resistência R_B . Vamos em primeiro logar determinar a curva descrita pela ponta do vector \mathfrak{Z}'_A quando se faz variar a resistência R_B . Fazendo variar a resistência desde $R_B = \infty$ até $R_B = 0$, a ponta do vector \mathfrak{Z}'_A descreve uma semi-recta (Fig. 4) que principia no ponto N' e forma com a parte negativa do eixo real o ângulo $+\varphi_B$, $-\varphi_B$ ou $\varphi_B = 0$ conforme $t_g\varphi_B$ é positiva (carga indutiva), negativa (carga capacitiva) ou nula (carga ohmica). Três destas semi-rectas, correspondentes respectivamente aos casos mencionados, estão traçadas a cheio na Fig. 4 e passam tôdas pelo ponto N' . Os seus prolongamentos traçados a pontoado não são fisicamente possíveis porque a resistências do cir-

cuito de carga R_B é uma grandeza essencialmente positiva que determina o carácter de «receptor de energia» do mesmo circuito.

Construção geométrica dos diagramas de impedância

do gerador assíncrono auto-excitado para

$C = \text{const}$ $f = \text{const}$, $\cos \varphi_B = \text{const}$ $|\beta_A| = Z_B$ variável

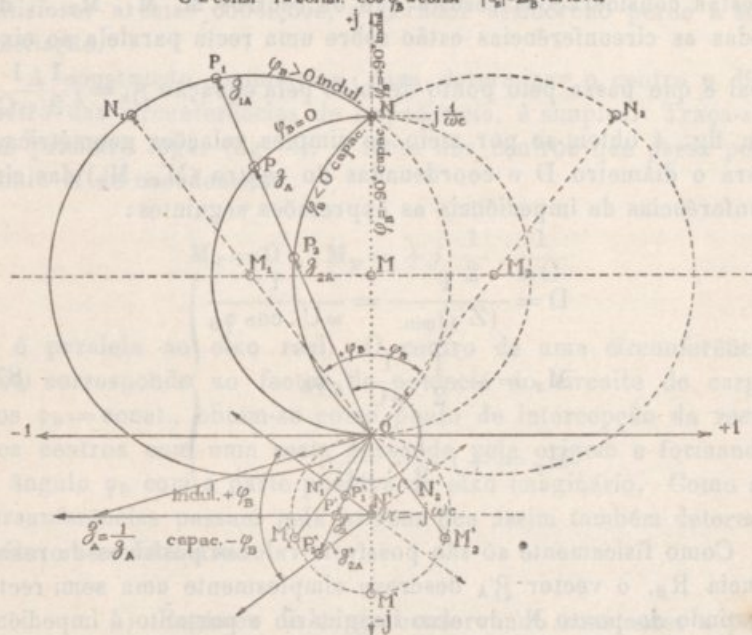


FIG. 4

Os diagramas de impedância da máquina assíncrona obtêm-se, segundo a equação (84) por «inversão vectorial» dos diagramas correspondentes do vector β'_A (equação 86) em relação à origem das coordenadas considerada como centro de inversão. No caso presente os diagramas do vector β'_A são, como vimos, rectas passando pelo ponto N' . Os diagramas de impedância $\beta_A = \frac{1}{\beta'_A}$ são portanto circunferências passando pela origem, como centro de inversão e pelo ponto N correspondente a N' .

A cada factor de potência do circuito de carga, $\cos \varphi_B$, corresponde portanto para o vector β'_A uma recta e para o vector impedância β_A uma circunferência. Todas estas rectas teem um

ponto comum N' ($\mathcal{R} = -j\omega C$) e formam com a parte negativa do eixo real o ângulo correspondente φ_B . Daqui se conclui que tôdas as circunferências de impediência teem dois pontos comuns (fig. 4): a origem $\mathcal{Z}_A = 0$ e o ponto (N) $\mathcal{Z}_A = j \frac{1}{\omega C}$, que correspondem respectivamente aos valores $\mathcal{Z}'_A = \infty$ e $\mathcal{Z}'_A = -j\omega C$. Destas considerações resulta que os centros $M, M_1, M_2 \dots$ de tôdas as circunferências estão sôbre uma recta paralela ao eixo real e que passa pelo ponto definido pela equação $\mathcal{Z}_A = j \frac{1}{2} \frac{1}{\omega C}$. Da fig. 4 obtem-se por meio de simples relações geométricas, para o diâmetro D e coordenadas do centro (M_x, M_y) das circunferências de impediência as expressões seguintes:

$$\left. \begin{aligned} D &= \frac{1}{(Z'_A)_{\min.}} = \frac{1}{\omega C \cdot \cos \varphi_B} \\ M_x &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega C} \operatorname{tg} \varphi_B \\ M_y &= +j \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega C} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Como fisicamente sô são possíveis valores positivos da resistência R_B , o vector \mathcal{Z}'_A descreve simplesmente uma semi-recta partindo do ponto N' do eixo imaginário e portanto a impediência \mathcal{Z}_A descreve sômente a parte correspondente da respectiva circunferência

A parte de cada circunferência de impediência que corresponde aos valores positivos de R_B está traçada a cheio na fig. 4, tendo ficado a parte restante a ponteadado.

Na fig. 4 estão representadas três circunferências de impediência de centros M_1, M e M_2 correspondendo respectivamente à carga indutiva, carga ohmica e carga capacitiva.

Das expressões (87) resulta que sendo fixadas a pulsação ω e a capacidade C , a grandeza e posição das circunferências de impediência depende sômente do factor de potência $\cos \varphi_B$ do circuito de carga. Daqui se conclui que, dadas as grandezas ω, C e $\cos \varphi_B$, a impediência de qualquer máquina assíncrona, funcionando nestas condições como gerador auto-excitado, terá de seguir a mesma circunferência. Para isso é necessário que

seja possível à máquina em questão obter as impediências exigidas pelo diagrama servindo-se das variáveis que estão à sua disposição (ω_r , S e $L_{SS\Delta}$) de maneira a que as equações fundamentais (60), (61) e (24) do parágrafo anterior sejam satisfeitas. Se a máquina, devido aos seus dados de construção, não conseguir, para uma dada impediência do circuito de carga, satisfazer a estas condições, o gerador assíncrono perde a sua excitação.

A construção geométrica, para determinar o centro e diâmetro das circunferências de impediência, é simples. Traça-se, em primeiro lugar (fig. 4), a recta dos centros que passa pelo ponto M de coordenadas :

$$M_x = 0, \quad M_y = +j \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega C}$$

e é paralela ao eixo real. O centro de uma circunferência que corresponde ao factor de potência do circuito de carga $\cos \varphi_B = \text{const.}$, obtem-se como ponto de intercepção da recta dos centros com uma recta passando pela origem e formando o ângulo φ_B com a parte positiva do eixo imaginário. Como as circunferências passam pela origem fica assim também determinado o seu diâmetro.

b) Regimen de carga conservando constantes a pulsação ω e a impediência Z_B do circuito de carga. Faz-se variar somente a capacidade C desde $C = 0$ até valores muito grandes (teòricamente $C = \infty$).

Da equação (84) conclui-se que neste caso a ponta do vector Z'_A descreve uma semi-recta principiando no ponto de coordenadas :

$$x = -\frac{\cos^2 \varphi_B}{R_B}, \quad y = j \frac{\cos^2 \varphi_B}{R_B} t_{g \varphi_B}$$

e dirigindo-se paralelamente ao eixo imaginário e no seu sentido positivo. O vector impediência $Z_A = \frac{1}{Z'_A}$ descreve então a parte correspondente duma circunferência que passa pela origem e

cujo diâmetro D e coordenadas do centro M são dadas pelas expressões:

$$D = \frac{R_B}{\cos^2 \varphi_B} \quad \left. \begin{array}{l} M_x = -\frac{1}{2} \cdot D \\ M_y = 0. \end{array} \right\} \quad (88)$$

b) Caso particular em que $X_B = 0$

Neste caso (carga ohmica pura) teremos $\cos \varphi_B = 1$ e $t_g \varphi_B = 0$ e as expressões (88) tomam a forma

$$D = R_B \quad \left. \begin{array}{l} M_x = -\frac{1}{2} R_B \\ M_y = 0. \end{array} \right\} \quad (89)$$

c) Regimen de carga conservando constantes a capacidade C e a resistência R_B e tendo lugar a relação $X_B = 0$. Como grandeza variável consideramos somente a pulsação ω .

Da equação (84) conclui-se que variando ω , desde $\omega = 0$ até valores muito grandes (teóricamente $\omega = \infty$), a ponta do vector \mathcal{Z}'_A descreve, no caso presente, a mesma semi-recta do que no caso anterior (*b*). O diagrama de impediência coincide portanto com o diagrama do caso anterior, isto é, com a circunferência cujo diâmetro e coordenadas do centro são dadas pelas relações (89).

d) Regimen de carga conservando constantes o factor de potência do circuito de carga ($\cos \varphi_B = \text{const.}$), a pulsação ω e o estado de saturação do ferro do circuito magnético do gerador.

Para $\cos \varphi_B = \text{const.}$ a equação (84) toma a forma

$$\mathcal{Z}'_A = \frac{1}{-j\omega C + \frac{\mathcal{B}}{R_B}} = \frac{1}{\mathcal{Z}'_A}, \quad (90)$$

em que o vector \mathfrak{B} definido pela equação (85) é uma grandeza constante. Mantendo a pulsação ω constante e fazendo variar a capacidade C e o módulo Z_B do vector impedância do circuito de carga de maneira que a ponta do vector \mathfrak{B}'_A descreva uma circunferência que não passa pela origem, conclui-se da equação (90) que o diagrama de impedância é também uma circunferência que não passa pela origem. É claro que existe uma infinidade de circunferências de impedância satisfazendo a esta condição. Entre elas tem interesse particular aquelas que correspondem ao funcionamento do gerador conservando constante o estado de saturação do seu circuito magnético e portanto a sua força electromotriz. Essas circunferências são exactamente as que se obtém considerando nas equações (51) e (52) os coeficientes de indução como constantes correspondendo a um determinado estado de saturação do circuito magnético. Com efeito, das equações (51) e (52) resulta, para a impedância \mathfrak{Z}_A , a expressão:

$$\mathfrak{Z}_A = r_s + j\omega L_{SS_\Delta} + \frac{\omega^2 L_{RS_\Delta} \cdot L_{SR_\Delta}}{\frac{r_R}{S} + j\omega L_{RR_\Delta}}, \quad (91)$$

em que a única variável é, no caso presente, o escorregamento S . Supondo que S varia desde $-\infty$ a $+\infty$, a ponta do vector \mathfrak{Z}_A descreve, atendendo à equação (91), uma circunferência cujo diâmetro e coordenadas do centro são dadas pelas expressões:

$$D = \frac{\omega^2 L_{RS_\Delta} L_{SR_\Delta}}{\omega L_{RR_\Delta}} \quad \left. \begin{array}{l} M_x = + r_s \\ M_y = + j \left(\omega L_{SS_\Delta} - \frac{D}{2} \right) \end{array} \right\} \quad (92)$$

Como no caso do gerador auto-excitado só são possíveis valores negativos para o escorregamento S , o vector impedância descreverá sómente parte da referida circunferência.

Funcionando o gerador assíncrono com tensão constante nos terminais, o estado de saturação do seu circuito magnético só pode modificar-se com variações da queda de tensão $\mathfrak{Z}_s r_s$ nas resistências das fases do estator. Estas variações são porém, em geral, muito pequenas e a sua influência sobre o estado de

saturação magnética praticamente desprezável. Dêste modo o funcionamento do gerador, com tensão constante nos terminais, corresponde praticamente ao funcionamento com saturação constante do circuito magnético e a circunferência de impedância obedecendo às relações (92) corresponde ao diagrama de impedância do gerador funcionando com tensão constante.

Diagramas de corrente

O diagrama teórico de corrente tem, em geral, de ser calculado ponto por ponto. Para um ponto do diagrama de impedância obtêm-se os vectores:

$$\mathfrak{I}_A = -a + jb \quad , \quad \mathfrak{I}_{A0} = -(a + r_s) + jb$$

e portanto atendendo à equação (73) fica assim determinada a diferença de fase φ_A entre o vector \mathfrak{I}_S (corrente de fase) e o vector \mathfrak{E}_1 (tensão de fase) correspondentes. Conhecida assim a posição de \mathfrak{I}_S relativa a \mathfrak{E}_1 , basta agora determinar a sua grandeza. Esta é dada pela relação (76) em que a grandeza E_{10} é obtida a partir do valor de L_{SS_A} que por sua vez foi determinado, para uma certa pulsação ω , com auxílio da expressão (68) e a grandeza Z_{A0} se obtém segundo a expressão (75) a partir do diagrama de impedância.

No caso particular (d), funcionando o gerador com tensão constante nos terminais, o diagrama de impedância é uma circunferência determinada pelas expressões (92). Atendendo à equação vectorial (73) conclui-se que sendo \mathfrak{E}_1 constante o diagrama de corrente é também, neste caso, uma circunferência que se determina a partir do respectivo diagrama de impedância.

(Continua)

CARLOS FERRER MONCADA

A heterogeneidade da variação A análise da variância

Quando se estuda qualquer carácter duma população dispersa numa área geográfica extensa reconhece-se imediatamente que as constantes (médias, desvios padrões, coeficientes de correlação, etc.) que caracterizam os vários grupos locais, ou as classes, em que a repartimos, manifestam, em regra, valores diferentes.

O conhecimento da significação estatística destas diferenças é indispensável para a formulação de qualquer juízo sobre a homogeneidade ou heterogeneidade da população considerada, pois se muitas delas podem ser atribuíveis a causas de ordem genética ou paracínética, outras há que resultam de circunstâncias fortuitas, dependentes da forma como se constituíram as séries.

Já tivemos ocasião de expor alguns métodos adequados à resolução deste problema⁽¹⁾. Tais métodos são porém um tanto laboriosos e estão sujeitos a certas restrições, muito particularmente os que se baseiam na noção de contingência.

Com efeito a equação fundamental da distribuição dos valores de χ^2 não se pode utilizar quando a respectiva táboa de contingência, nalguns dos *loci*, contiver poucas observações, pois, nestes casos, não é possível determinar com segurança as probabilidades de ocorrência fortuita de valores de χ^2 iguais ou superiores aos obtidos, isto é, não é possível apreciar a significância das diferenças observadas.

⁽¹⁾ A pigmentação dos portugueses. *Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra*, vol. vi, pág. 119.

1. **Graus de liberdade** — A *análise da variância* fornece um método elegante e cómodo para o estudo da variabilidade que, além disso, não é trabalhoso nem enferma das restrições apontadas.

Por variância de qualquer carácter duma população entende-se o valor de σ^2 , isto é, o quadrado do respectivo desvio padrão. É evidente, por ser praticamente impossível atingir a população na sua totalidade, que as nossas determinações da variância são meras *estimativas estatísticas*, como lhes chama o Prof. R. A. Fisher, que se afastam, mais ou menos, do valor exacto ou *parâmetro* da população respectiva. Para diferentes amostras de qualquer população obtemos geralmente variâncias diferentes, números que oscilam em torno do valor paramétrico.

Devemos ter sempre presente esta distinção entre os *parâmetros* duma população, que são absolutamente fixos, e as *estimativas* correspondentes, que são meras *estatísticas* cujo valor está dependente da constituição das séries de que nos servimos para a sua determinação.

O grau de confiança que merecem as nossas *estatísticas* depende obviamente do número dos casos incluídos nas séries que utilizamos para o seu cômputo. As diferentes *estimativas* do mesmo *parâmetro* duma população fazem parte duma distribuição de frequências cuja forma depende, até certo ponto, do número de indivíduos incluídos nas respectivas séries.

De facto, o que influi não é propriamente o número dos indivíduos, mas antes o número das *selecções fortuitas independentes* que, para formarmos as séries, se podem realizar na população.

Se uma caixa contiver duzentas esferas e com elas quisermos formar quatro lotes é evidente que, de cada vez, apenas três deles podem ser arbitrariamente constituídos. Em cada caso, a constituição do quarto lote está de antemão fixada pelo número total das esferas.

Semelhantemente uma amostra de n variantes, ou indivíduos, duma população nem sempre se pode considerar representativa de n *selecções fortuitas e independentes*, utilizáveis para a *estimativa* de qualquer *parâmetro*, pois uma delas, pelo menos, pode ser dependente da constituição própria da amostra, isto é, dos pontos fixos, determinados em função dos valores das

variantes incluídas na amostra, em referência aos quais fazemos a estimativa desse parâmetro.

Este facto tem importância pois reduz o número dos *graus de liberdade* disponíveis para a estimativa dos parâmetros.

Consideremos, por exemplo, o cálculo da variância dum carácter qualquer x numa amostra de grandeza n duma população, e seja m o valor médio exacto, ou paramétrico, desse carácter.

A melhor estimativa s do desvio padrão terá evidentemente a expressão

$$s = \sqrt{\sum (x - m)^2 / n},$$

onde o somatório abrange todos os valores individuais do carácter incluídos na amostra.

Praticamente, porém, como desconhecemos m (valor exacto da média da população geral), substituímo-lo por \bar{x} , isto é, pela média dos valores individuais do carácter na amostra escolhida.

Mas este valor \bar{x} é determinado pela constituição própria da amostra, e a sua escolha para ponto fixo, a partir do qual se calculam os desvios das variantes, reduz dum unidade o número dos graus de liberdade disponíveis para o cômputo de s , pois se demonstra facilmente que, nesta hipótese, o melhor valor de s será dado pela expressão

$$s = \sqrt{\sum (x - \bar{x})^2 / (n - 1)}.$$

Com efeito:

Sejam x_1, x_2, \dots, x_n a série dos valores do carácter x ; f_1, f_2, \dots, f_n as freqüências respectivas numa amostra qualquer de grandeza n ; e representemos por \bar{x}_0 a média do carácter na amostra considerada.

Será evidentemente

$$\bar{x}_0 = \frac{\sum f_i x_i}{n},$$

para todos os valores de i de 1 até n .

Seja, além disso, m a média exacta do carácter x na população infinita a que pertence a amostra considerada; represen-

temos por $\varepsilon = m - \bar{x}_0$ o erro da nossa estimativa da média, por δ_i o desvio duma classe qualquer x_i do carácter relativamente à média exacta m ; e por d_i o desvio da mesma classe relativamente à média estimada \bar{x}_0 .

Podemos escrever

$$\delta_i = m - x_i,$$

e

$$d_i = \bar{x}_0 - x_i,$$

e, por conseguinte,

$$\delta_i = \varepsilon + d_i. \quad (1)$$

O desvio de qualquer classe x_i relativamente à média exacta é, pois, igual ao seu desvio relativamente à média estimada somado com o erro dessa média.

Elevando ao quadrado a expressão (1), temos

$$\delta_i^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon d_i + d_i^2,$$

e, somando para tôdas as classes, será

$$\begin{aligned} \sum f_i \delta_i^2 &= \varepsilon^2 \sum f_i + 2\varepsilon \sum f_i d_i + \sum f_i d_i^2 \\ &= n\varepsilon^2 + \sum f_i d_i^2 \end{aligned} \quad (2)$$

por ser, evidentemente, $\sum f_i = n$ e $\sum f_i d_i = 0$.

O primeiro membro da igualdade (2) é a soma dos quadrados dos desvios em relação à média exacta; o primeiro termo do segundo membro é igual a n vezes o quadrado do erro da média estimada, e o segundo termo é a soma dos quadrados dos desvios relativamente a essa média.

Como não conhecemos o valor da média exacta, m , não sabemos qual seja o valor do erro (ε) da média estimada, mas podemos substituí-lo pela sua melhor estimativa, isto é, pelo *erro médio da média* cuja expressão, como se sabe, é

$$\varepsilon_m = s / \sqrt{n},$$

onde s representa a estimativa do desvio padrão.

A igualdade (2) fornece assim a seguinte aproximação:

$$ns^2 \longrightarrow s^2 + \sum f_i d_i^2,$$

ou

$$(n-1)s^2 \longrightarrow \sum f_i d_i^2; \quad (3)$$

e, portanto

$$s^2 \longrightarrow \frac{\sum f_i d_i^2}{(n-1)},$$

q. e. d.

Quando n é grande torna-se praticamente indiferente dividir a soma dos quadrados dos desvios por n ou por $(n-1)$, mas quando n é pequeno as diferenças podem ser consideráveis e ter influência na apreciação dos resultados.

2. Propriedade aditiva da variância — A utilização da variância para o estudo da variabilidade das populações funda-se na sua propriedade aditiva.

Demonstra-se, com efeito, que se um caracter qualquer está sujeito à operação de várias causas independentes, cada uma das quais contribui com uma certa variância, a variância total é igual à soma das variâncias parciais (Cf. TIPPETT — *The methods of Statistics*, pág. 89).

Por conseguinte, representando por σ_x^2 a variância total do caracter x , sujeito à influência dos factores A e B, independentes, cada um dos quais determina, respectivamente, as variâncias σ_a^2 e σ_b^2 , será

$$\sigma_x^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_r^2,$$

onde σ_r^2 representa a variância devida aos erros fortuitos.

3. Análise da variância — Consideremos uma população geral de grandeza N (número total dos indivíduos observados) que, a respeito dum carácter qualquer x , se acha repartida por m grupos de grandeza n ; será evidentemente $N = nm$.

Representemos por $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ e \bar{x} as médias do carácter nos grupos correspondentes e na população geral.

É evidente que, em cada grupo, o desvio de qualquer valor de x , relativamente à média geral da população, é igual ao seu

desvio a respeito da média do grupo a que pertence somado com o desvio da média desse grupo em referência à média geral.

Com efeito, para qualquer indivíduo do grupo i , a expressão

$$(x - \bar{x}) = (x - \bar{x}_i) + (\bar{x}_i - \bar{x})$$

é uma identidade.

Elevando ao quadrado, teremos

$$(x - \bar{x})^2 = (x - \bar{x}_i)^2 + (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + 2(x - \bar{x}_i)(\bar{x}_i - \bar{x}).$$

E a soma destes quadrados, extensiva a todos os indivíduos do grupo, será

$$\begin{aligned} \sum (x - \bar{x})^2 &= \sum (x - \bar{x}_i)^2 + \sum (\bar{x}_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x}_i - \bar{x}) \cdot \sum (x - \bar{x}_i) \\ &= \sum (x - \bar{x}_i)^2 + n(\bar{x}_i - \bar{x})^2, \end{aligned}$$

por, em qualquer grupo, $(\bar{x}_i - \bar{x})^2$ ser constante para todos os indivíduos e o somatório incluir n parcelas, e o terceiro termo do segundo membro ser nulo visto a soma dos desvios individuais relativamente à média do grupo respectivo, $\sum (x - \bar{x}_i)$, ser igual a zero.

Somando membro a membro as expressões semelhantes correspondentes aos vários grupos, temos

$$\sum_i \sum (x - \bar{x})^2 = \sum_i \sum (x - \bar{x}_i)^2 + n \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2, \quad (4)$$

para todos os valores de i de 1 até m .

E assim conseguimos dividir a soma total dos quadrados dos desvios em relação à média geral (primeiro membro da expressão (4)) em duas partes: *a)* soma dos quadrados dos desvios das observações individuais relativamente as médias dos grupos respectivos — *1.º termo do segundo membro*; *b)* n vezes a soma dos quadrados dos desvios das médias dos grupos relativamente à média geral da população — *2.º termo do segundo membro*.

Para podermos calcular as variâncias resta apenas determinar o número dos respectivos graus de liberdade.

Para a variância média total, como determinamos apenas a média \bar{x} , esse número será $N - 1 = nm - 1$; para a *variância média dos grupos*, ou variância residual, como para cada grupo se determinou a média \bar{x}_i , e os grupos são m de grandeza n , será $m(n - 1) = N - m$ ⁽¹⁾; para a *variância média entre os grupos*, será $m - 1$ por se terem calculado m desvios relativamente à média geral \bar{x} .

4. Cômputo da variância — Quando se procede ao cálculo da variância de dados reunidos em séries ordenadas é conveniente, para achar os valores em referência à média, quadrar primeiramente os desvios relativamente a uma origem arbitrária e efectuar depois a correcção dos resultados.

Para qualquer valor x duma série, o quadrado do desvio em relação à média \bar{x} é dada pela expressão

$$(x - \bar{x})^2 = x^2 - 2\bar{x} \cdot x + \bar{x}^2.$$

⁽¹⁾ Sejam x_1, x_2, \dots, x_n as variantes do carácter x numa população de grandeza N que se dividiu em m grupos de grandeza n_1, n_2, \dots, n_m . Seja $f_i^{j'}$ a frequência da variante x_i , no grupo j e s_j^2 a variância correspondente.

Pelas considerações feitas a pág. 451 as melhores estimativas das variâncias s_j^2 dos grupos tem as seguintes expressões.

$$s_1^2 = \frac{\sum f_i^{1'} d_i'^2}{n_1 - 1}, \quad s_2^2 = \frac{\sum f_i^{2'} d_i'^2}{n_2 - 1} \dots \quad s_m^2 = \frac{\sum f_i^{m'} d_i'^2}{n_m - 1},$$

e o seu valor médio pesado será evidentemente

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1) s_1^2 + (n_2 - 1) s_2^2 + \dots + (n_m - 1) s_m^2}{n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_m - 1} =$$

$$= \frac{\sum f_i^{1'} d_i'^2 + \sum f_i^{2'} d_i'^2 + \dots + \sum f_i^{m'} d_i'^2}{N - m},$$

por ser $n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$.

A soma destes quadrados, extensiva a todos os valores individuais da série, será portanto

$$\begin{aligned}\sum (x - \bar{x})^2 &= \sum (x^2) - 2\bar{x} \cdot \sum (x) + n\bar{x}^2 \\ &= \sum (x^2) - n\bar{x}^2,\end{aligned}$$

por ser, por definição da média,

$$\sum (x) = n \cdot \bar{x}.$$

A soma dos quadrados dos desvios duma série de valores em relação à média é pois igual à diferença entre a soma dos quadrados dos valores individuais e n vezes o quadrado da média.

Mas, como os valores individuais se podem considerar desvios da variável em relação à origem das coordenadas, a média dos valores individuais será evidentemente igual ao desvio médio em relação a essa origem, e, por isso:

A soma dos quadrados dos desvios em relação à média é igual à soma dos quadrados dos desvios em relação a qualquer origem arbitrária menos n vezes o quadrado do desvio médio referido à mesma origem.

Representando por x' os desvios em relação a uma origem arbitrária e por \bar{x}'_i o desvio médio de qualquer grupo i em referência à mesma origem, temos para o cálculo dos termos da expressão (4) as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\sum_i \sum (x - \bar{x}_i)^2 &= \sum_i \sum (x'^2) - n \sum_i (\bar{x}'_i)^2, \\ n \sum_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 &= n \left[\sum_i (\bar{x}'_i)^2 - m \bar{x}'^2 \right] \\ &= n \sum_i (\bar{x}'_i)^2 - N \bar{x}'^2;\end{aligned}\tag{5}$$

e, portanto

$$\sum_i \sum (x - \bar{x})^2 = \sum_i (x'^2) - N \bar{x}'^2.$$

O trabalho de cálculo ainda se simplifica muito se, em vez de determinarmos directamente o desvio médio \bar{x}' , quadrarmos primeiramente o total $\sum (x')$ e dividirmos o resultado pelo número correspondente.

TABELA I

		Designação dos clans																Totais
		Pantera (N'go)	Gafanhoto (Nsenene)	Bufalo (Mbogo)	Vaca sem cauda (Ente ya kikugu)	Dipnoico (Mamba Bakerekere)	Carneiro (Endiga)	Macaco cinzento (Nkima)	Oribi — Antiope (Mpewo)	Sementes — contas (Katinvum)	Pássaro (Nyonyis)	Rato (Musu)	Inhame (Kobe)	Cabrito montês (Ngabi)	Gineto (Kasimba)	Corações (Mutima)	Corvo (Namungona)	
Largura nasal em m/m. Centros das classes	36							1										1
	37							1		1								3
	38					1		—		1				1				3
	39			1	1	1		—	1	—	—		2	2				8
	40	1		—	1	—	1	—	—	—		2	—	—	1			6
	41	2	1	1	1	1	1	1	—	1	2	—	2	1	2	3		22
	42	—	1	—	3	—	1	—	1	2	2	—	1	—	2	4	1	21
	43	—	1	4	2	1	6	1	4	4	2	—	3	—	—	2	2	33
	44	1	2	2	3	3	2	1	2	2	1	4	2	2	3	1	3	37
	45	1	1	2	2	2	1	—	2	1	1	4	—	1	2	—	2	23
	46	2	3			2		2	1	2	3	1		1	4	1	4	31
	47	3	1	1	1	—	3	—	2	2	1	1	1	2	2	1	—	23
	48	1	2	3	—	1	—	—	1	1	1	3	2	3	1	1	1	21
	49	—	1	—	—	—	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	4
	50	2	—	—	—	2	—	—	—	—	2	—	—	—	1	1	—	8
	51	—	2	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	2	5
	52	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
	53	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
54	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
55	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	
56	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
57	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	
Totais	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	255
$\Sigma (x')$	+ 9	+ 1	-14	-32	-15	-26	-39	-31	-21	-38	- 8	-21	-34	-24	-24	-38	- 6	- 361
$\Sigma (x'^2)$	247	127	214	312	233	116	189	279	125	234	142	231	212	218	154	162	102	3297
$n \bar{x}'^2$	5.4000	0.0667	13.0667	68.2667	15.0000	45.0667	101.4000	64.0667	29.4000	96.2667	4.2667	29.4000	77.0667	38.4000	38.4000	96.2667	2.4000	511.0621
$\Sigma (x'^2) - n \bar{x}'^2$	241.6000	126.9333	200.9333	243.7333	218.0000	70.9333	87.6000	214.9333	95.6000	137.7333	137.7333	201.6000	134.9333	179.6000	115.6000	65.7333	99.6000	2785.9379

Com efeito, por ser

$$\bar{x}' = \frac{\sum (x')}{N},$$

será evidentemente

$$\left[\sum (x') \right]^2 / N = N \cdot \bar{x}'^2.$$

5. Exemplo I. — Sobre os diferentes clans dos *Baganda* estão publicadas algumas séries de dados antropométricos ⁽¹⁾.

O número de indivíduos observados em cada clan é muito pequeno, 15 em regra, de modo que os valores médios e as variabilidades que se podem determinar para os diferentes caracteres considerados não oferecem grande confiança e não se podem aproveitar para fins comparativos.

Diz Roscoe que o tipo físico dos *Bangada* varia consideravelmente; contudo a prática continuada da exogamia deve tender a distribuir uniformemente os factores genéticos por toda a população. Será portanto interessante averiguar se, estatisticamente, os números registados por Roscoe estabelecem qualquer distinção efectiva entre os clans, ou se as diferenças observadas se podem atribuir às flutuações do acaso. Nesta última hipótese poderiam juntar-se tôdas as observações numa única série, cujos parâmetros se poderiam considerar representativos da população geral.

Na exemplificação do emprêgo do método da análise da variância limitar-nos-hemos ao estudo da *largura nasal*.

Os valores individuais da largura nasal observados em 17 clans constam da Tabela I.

Na primeira coluna estão registados as classes do carácter com intervalos de 1 m/m, e na última a série total resultante da reunião das observações feitas nos diferentes clans.

Tomou-se para origem arbitraria a variante 46 e as quatro últimas linhas dão os valores de $\sum (x')$, $\sum (x'^2)$, $n \cdot \bar{x}'^2$ e $\sum (x'^2) - n \bar{x}'^2$, para os diferentes clans e para a série total.

(1) JOHN ROSCOE. — The Baganda. — *Their customs and beliefs* — Mac Millan & C., 1911.

As somas dos quadrados dos desvios em relação à média, os graus de liberdade e as variâncias médias vão indicados na Tabela II.

A soma dos quadrados dos desvios e a dos graus de liberdade das partes devem dar os valores correspondentes à série total; e as somas dos quadrados dos desvios divididas pelos graus de liberdade dão as estimativas das variâncias médias.

A variância média total é a variância ordinária da série constituída pelo conjunto de todas as observações individuais.

A variância média «*nos grupos*» é, neste exemplo, uma estimativa da verdadeira variância, σ_r^2 , baseada em 238 graus de liberdade.

TABELA II

Origem da variação	Soma dos quadrados dos desvios	Graus de liberdade	Variâncias médias
Entre os grupos	213.1382	16	13.3211
Nos grupos	2572.7997	238	10.8101
Total	2785.9379	254	10.9683

A variância média *entre os grupos* é uma estimativa, baseada 16 graus de liberdade, de n vezes a variância σ_i^2 das médias dos grupos, como facilmente se verifica pelo exame da expressão (4).

Este valor σ_i^2 é o parâmetro correspondente a uma população infinita, isto é, representa a variância das médias dos grupos na hipótese dum número infinitamente grande de grupos cada um constituído por um número indefinidamente grande de indivíduos.

Como, porém, na prática o número (m) dos grupos é finito, bem como o (n) dos indivíduos que os constituem, as médias dos grupos estão sujeitas a erros fortuitos, resultantes da sua formação, que farão crescer a sua variância.

Como representamos por σ_r^2 a variância real «*nos grupos*», o erro médio das médias — que mais não é do que o desvio padrão da sua distribuição fortuita, ou a raiz quadrada da variância correspondente — terá o valor σ_r/\sqrt{n} , e, por isso, a variância total

das médias dos grupos, pela propriedade aditiva da variância, será igual a

$$\sigma_i^2 + \sigma_r^2/n.$$

Representando por v_i^2 e v_r^2 as variâncias médias «entre os grupos» e «nos grupos» determinadas a partir dos dados, obtêm-se as relações

$$\begin{aligned} v_i^2 &\longrightarrow n \sigma_i^2 + \sigma_r^2; \\ v_r^2 &\longrightarrow \sigma_r^2 \end{aligned} \quad (6)$$

que nos permitem apreciar a homogeneidade da variação na população considerada.

Com efeito, se a variação entre os grupos é relativamente importante, σ_i^2 é grande, comparada com σ_r^2 , e as duas estimativas v_i^2 e v_r^2 serão muito diferentes. Se, pelo contrário a variação entre os grupos é nula, será $\sigma_i^2 = 0$ e por conseguinte v_i^2 tenderá para σ_r^2 .

Neste caso, v_i^2 e v_r^2 representam duas estimativas independente da mesma variância σ_r^2 , que estão sujeitas a erros fortuitos como tôdas as estimativas da variância, e a significação das suas diferenças poderá apreciar-se por meio de testes adequados.

Introduzindo nas relações (6) os valores registados na Tabela II, temos

$$\begin{aligned} 13,3211 &\longrightarrow 15 \sigma_i^2 + \sigma_r^2 \\ 10,8101 &\longrightarrow \sigma_r^2. \end{aligned}$$

Por conseguinte

$$\begin{aligned} 2,5110 &\longrightarrow 15 \sigma_i^2 \\ e \\ 0,1674 &\longrightarrow \sigma_i^2. \end{aligned}$$

Vê-se pois que a variância «entre os grupos» é muito menor que a variância «nos grupos» e possivelmente não existem, a respeito do carácter em questão, quaisquer diferenças significativas entre os clans.

6. **Testes de significância** — Quando se consideram amostras diferentes da mesma população e se fazem estimativas de qualquer dos seus parâmetros obtem-se, em regra, para cada um dêles, uma série de valores diferentes. Para interpretar estas diferenças torna-se portanto indispensável o emprêgo de critérios que nos permitam ajuizar da probabilidade da sua ocorrência fortuita.

Consideremos o caso simples duma população infinita cujos caracteres variam normalmente, isto é, oscilam em tórno das respectivas médias de harmonia com a *lei dos erros*.

Se desta população infinita extrairmos uma série de amostras de igual grandeza (n) e para cada uma estimarmos a média de qualquer dos seus caracteres, obteremos uma série de valores que, à medida que aumenta o número das amostras e se reduz o valor do intervalo das classes, se distribuem segundo um diagrama que tende para uma curva de tipo gaussiano, cujo desvio padrão se demonstra facilmente ser igual a σ/\sqrt{n} , e σ fôr o desvio padrão do carácter na população infinita.

Este desvio padrão (σ/\sqrt{n}) da distribuição das médias da série das amostras da população infinita é o que se denomina *erro médio da média*.

No caso de $n=1$, o erro médio da média coincide com o desvio padrão da distribuição dos valores individuais do carácter, como é óbvio, e por conseguinte a designação «erro» não tem nestes casos a significação usual, pois o erro médio, como se vê, mais não é do que uma constante descritiva da distribuição dos valores da média, que nos permite determinar as probabilidades da ocorrência fortuita de desvios iguais ou maiores que qualquer valor dado.

Sabendo que a curva de distribuição das médias é uma curva normal, fácil se torna determinar as probabilidades de, numa amostra fortuita da mesma população, obtermos uma estimativa que difira da média verdadeira tanto ou mais que uma certa quantidade.

Basta, com efeito, marcar sôbre o eixo dos x da respectiva distribuição, para um e para o outro lado da ordenada central, distâncias iguais ao desvio considerado, levantar pelos pontos respectivos as ordenadas correspondentes e calcular a fracção da área limitada pela curva, para além dessas ordenadas.

Se essas superficies representarem uma fracção muito pequena

da área total limitada pela curva, também serão muito pequenas as probabilidades da ocorrência fortuita de desvios iguais ou maiores que o observado e, por isso, a diferença entre a média verdadeira e a estimada deve considerar-se *estatisticamente significativa*.

Como, se costuma adoptar, embora arbitrariamente, o valor de $P=0.05$ para limite ou *nível da significância*, considera-se real qualquer desvio da média cujas probabilidades de ocorrência fortuita sejam menores que 5%.

Esta probabilidade, $P=0.05$, corresponde aproximadamente a um desvio igual a duas vezes o desvio padrão, ou erro médio, pois numa distribuição normal, como a da média, as porções da área limitada pela curva que ficam para além das ordenadas levantadas pelos pontos $\pm x/\sigma=2$ são iguais a 0.0227, e a sua soma é, por isso, aproximadamente igual a 0.05 da área total.

Não se deve confundir o nível da significância $P=0.05$, com o desvio correspondente que é definido pelo ponto 0.025, em referência à área total. Se porém nos referimos apenas à área correspondente aos desvios positivos, ou negativos, o nível da significância de 5% corresponderá, como é óbvio, ao ponto 0.05.

Quando as distribuições são assimétricas, como sucede com as da maior parte das constantes estatísticas, a ordenada que passa pela média não divide a área limitada pela curva em duas partes iguais. Contudo o critério para o estabelecimento do nível da significância de 5% pode ainda estender-se a tais casos, considerando situados nesse nível os desvios que marcam ordenadas interceptando de cada lado da média áreas caudais iguais a 2,5% da área total.

Neste caso, como é óbvio, os dois desvios — positivo e negativo — não são iguais. Pode, porém, por uma conveniente mudança de variável reduzir-se sempre a curva à forma normal. A transformação altera as posições relativas da média e da moda mas não influe nos desvios definidos pelas relações em que dividem a área limitada pela curva, de modo que os valores da variável x' correspondentes aos pontos 2,5% permanecem valores da variável x , correspondentes aos mesmos pontos da distribuição assimétrica.

Portanto, transformando a curva, podemos facilmente deter-

minar o desvio correspondente ao nível de significância de 5 0/0 em obediência à normalidade da distribuição dos desvios.

7. Significação das diferenças entre variâncias — Consideremos duas amostras da mesma população de grandezas N_1 e N_2 e sejam s_1 e s_2 as estimativas dos respectivos desvios padrões de qualquer dos seus caracteres.

A apreciação da diferença ($s_1 - s_2$) entre os desvios padrões das duas amostras costuma fazer-se supondo que a forma da distribuição de tais diferenças é normal e que o seu erro médio é

$$\sqrt{\frac{\sigma^2}{2N_1} + \frac{\sigma^2}{2N_2}},$$

onde σ representa o desvio padrão da população infinita que forneceu as amostras que, por nos ser desconhecido, substituímos por s_1 e s_2 .

Quando as amostras são pequenas, isto é, pouco numerosos os indivíduos constituintes, os erros resultante desta suposição podem ser grandes, e, por isso, R. A. Fisher introduziu, para a interpretação das diferenças, outro critério definido pela equação

$$z = \frac{1}{2} \left[\log_e s_1^2 - \log_e s_2^2 \right] = \log_e \frac{s_1}{s_2}.$$

onde s_1 e s_2 são as variâncias calculadas na base dos correspondentes graus de liberdade.

Fisher demonstrou também que a forma da distribuição dos valores de z é dada pela equação

$$df = k \frac{e^{n_1 z}}{(n_1 e^{2z} + n_2)^{\frac{1}{2}(n_1 + n_2)}} dz,$$

onde k é uma constante e $n_1 = N_1 - 1$ e $n_2 = N_2 - 1$ são os graus de liberdade.

Esta equação que encerra apenas as variáveis z , n_1 e n_2 é independente do desvio padrão σ da população e, por conseguinte, utilizável no caso de pequenas amostras.

A grandeza z , que oscila entre $\mp \infty$, é negativa quando

$s_1/s_2 < 1$, positiva se $s_1/s_2 > 1$, e a distribuição dos seus valores é assimétrica a não ser que $n_1 = n_2$.

Como porém, para qualquer combinação dos graus de liberdade, a parte positiva da curva, correspondente aos valores de s_1/s_2 , é igual à parte negativa correspondente aos valores s_2/s_1 , basta considerar os valores do integral das probabilidades relativos aos desvios positivos, pois os restantes se podem obter trocando n_1 por n_2 .

Mas, por ser mais prático trabalhar com valores positivos de z , tomando n_1 como número dos graus de liberdade correspondente à variância maior, a diferença dos logaritmos será sempre positiva.

Fisher elaborou para diferentes combinações de n_1 e n_2 uma táboa dos valores de z correspondentes às ordenadas limitantes de áreas caudais com 5% e 1% da área total da curva.

A distribuição dos valores de z , em regra, é assimétrica e por isso, empregando o critério definido a pág. 459, consideram-se situados no nível da significância os valores de z cujas ordenadas separam áreas caudais que representam cada uma 0.025 da área total. Por conseguinte o nível de significância de 5% ficará situado entre os pontos 5% e 1% da Táboa de Fisher.

No nosso exemplo, a variância da média dos grupos é muito pequena, como vimos (cfr. pág. 457); trata-se agora de saber se contudo é significativamente diferente de zero, ou se podemos considerar os grupos, quanto à variabilidade da largura nasal, amostras fortuitas da mesma população.

Os dados são :

$$\begin{array}{ll} z_1 = 13.3211, & n_1 = 16, \\ z_2 = 10.8101, & n_2 = 238; \end{array}$$

e, por conseguinte

$$z = \frac{1}{2} \left[\log_e 13.3211 - \log_e 10.8101 \right] = 0.1044.$$

A Táboa de Fisher dá, para esta combinação de graus de liberdade, como correspondente ao nível 5% da significância,

o valor de $z = 0.2573$, que excede mais duas vezes e meia o valor encontrado ⁽¹⁾.

Não se pode por isso considerar significativa a diferença das variâncias e os diversos clans, quanto aos valores registados para a largura nasal, podem tomar-se como amostras fortuitas da mesma população.

8. Exemplo II. — No exemplo I os diferentes grupos são constituídos por igual número de indivíduos. A análise da variância pode todavia efectuar-se semelhantemente ainda que os grupos sejam numéricamente desiguais.

Com efeito, se os diferentes grupos foram constituídos por n_1, n_2, \dots, n_m indivíduos, respectivamente, a expressão (4) toma a forma

$$\sum_i \sum (x - \bar{x})^2 = \sum_i \sum (x - \bar{x}_i)^2 + \sum_i n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2,$$

e nas equações (5) em vez de

$$n \sum_i (\bar{x}_i^2),$$

temos de escrever

$$\sum_i n_i \bar{x}_i^2.$$

Vê-se assim que, no caso geral, o cômputo das somas dos quadrados dos desvios se pode efectuar da seguinte maneira:

- 1) A «total» é a soma dos quadrados dos valores individuais menos N vezes o quadrado da média geral;
- 2) A «entre os grupos» é igual à soma, extensiva a todos os grupos, dos produtos do quadrado da média de cada grupo pela frequência (n_i) correspondente, menos N vezes o quadrado da média geral;
- 3) A «nos grupos» é a diferença entre 1) e 2).

⁽¹⁾ A Tábua de Fisher dá os valores de z correspondentes aos pontos 5% e 1% para $n_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 24, \infty$, e $n_2 = 1, 2, \dots, 30, 60, \infty$. Para outros valores de n_1 e n_2 é necessário fazer interpolações, podendo empregar-se o método indicado por C. H. GOULDEN — *Methods of statistical analysis*, págs. 77.

Os desvios são calculados em relação a uma origem arbitrária qualquer e N é o número total dos indivíduos.

Neste caso, não são válidas as relações (6) porque, quando se calculam os quadrados dos desvios das médias dos grupos em relação à média geral, se dá a cada grupo um peso n_i diferente.

Em todo o caso, se a variância verdadeira entre os grupos (σ_i^2) fôr nula, v_i^2 ainda tenderá para v_r^2 , e o teste de homogeneidade consistirá também em verificar se v_i^2 e v_r^2 são significativamente diferentes.

Na Tabela III estão registados os valores da largura nasal numa série de tribus da África oriental. Os números foram extraídos do estudo de NORMAN M. LEYS e T. A. JOYCE — *Note on a series of physical measurements from East Africa — The Journal of the Royal Anthropological Institute of Great Britain and Ireland.* — Vol. XLIII, pág. 195 e seg.

Os autores, na apreciação do grau de semelhança física entre as tribus consideradas duas a duas, empregaram um critério a que chamaram *índice diferencial*, cuja expressão analítica é

$$\sum \Delta = \sum \left[(M_1 - M_2) / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right],$$

onde M_1 e M_2 são as médias correspondentes a cada carácter, σ_1^2 e σ_2^2 as estimativas dos desvios padrões respectivos, e o somatório \sum abrange os vários caracteres estudados.

O grau de divergência entre as tribus, apreciado por este critério, é considerado tanto maior quanto mais elevado fôr o valor do índice diferencial.

Na Tabela 9 do citado estudo (cf. pág. 211), estão ordenadas as tribus duas a duas consoante os valores de $\sum \Delta$; por ela se vê que os Akamba, Akikuyu, Embu, Suk e Kachamega estão interrelacionados por índices diferenciais cujo valor é inferior a 2. Os autores afirmam que, por isso, os devemos considerar constituindo «um grupo, no qual as tribus de Kenia estão em relações mais estreitas entre si do que as restantes» (*Op. cit.*, pág. 200).

TABELA III

		Designação das tribus					Totais
		Akikoyu	Embu	Kachamega	Akamba	Suk	
Largura nasal em m/m. Centros das classes	28	1					1
	29						—
	30						—
	31						—
	32	1			1		2
	33	1			1		2
	34	4			—		4
	35	8	2	1	1	2	14
	36	13	3	1	5	—	22
	37	16	7	7	4	1	35
	38	41	6	15	3	2	67
	39	37	14	18	13	1	83
	40	36	16	16	6	2	76
	41	45	17	15	7	1	85
	42	26	12	7	5	1	51
	43	18	9	11	3	3	44
	44	12	4	3	3	1	23
	45	7	2	2	3	—	14
	46	5	3	3		1	12
	47	—	3	—			3
48	1	—	—			1	
49	1	1	1			3	
50	1	1				2	
Totais		274	100	100	55	15	544
$\Sigma (x')$		+ 255	+ 183	+ 133	+ 37	+ 19	+ 627
$\Sigma (x')^2$		2493	1161	777	475	175	5081
$n_s \bar{x}'^2$		273.3175	334.8900	176.8900	24.8909	24.0667	722.6636
$\Sigma (x'^2, -n_s \bar{x}'^2)$		2219.6825	826.1100	600.1100	450.1091	150.9333	4358.3364

Na Tabela IV estão registadas as somas dos quadrados, os graus de liberdade e as variâncias médias respeitantes à largura nasal, calculadas a partir das observações do Leys e Joyce.

O valor de z , calculado pela fórmula a pág. 461 é 0.6312.

TABELA IV

	Somas dos quadrados	Graus de liberdade	Variâncias médias
Entre os grupos	111 3915	4	27.8479
Nos grupos	4246.9449	539	7.8702
Total	4358 3364	543	—

Pela Táboa de Fisher, para $n_1 = 4$ e $n_2 = 539$, os valores de z correspondentes aos pontos de 5% e 1% são respectivamente .4667 e .6052. O valor achado é maior e, por isso, quanto à largura nasal, a heterogeneidade da população geral constituída pelas referidas tribus, deve considerar-se real.

DR. EUSÉBIO TAMAGNINI.

Cálculo Simbólico

(CONTINUAÇÃO)

CAPÍTULO VI

SISTEMAS DE EQUAÇÕES SIMBÓLICAS

A 1.^a das equações (31) dá, pois, as k equações (32) a que tem de obedecer as constantes arbitrárias obtidas pela integração com as variáveis separadas. Cada uma das outras equações (31) dará outras tantas equações da forma (32) e agrupando-as, obtemos os seguintes sistemas a que tôdas as constantes $A_i^{(j)}$ têm de obedecer:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_i(a) A_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \psi_i(a) A_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) A_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} D \sum_{i=1}^n \varphi_i(a) A_i &= 0 \\ D \sum_{i=1}^n \psi_i(a) A_i &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ D \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) A_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} D^{k-1} \sum_{i=1}^n \varphi_i(a) A_i &= 0 \\ D^{k-1} \sum_{i=1}^n \psi_i(a) A_i &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ D^{k-1} \sum_{i=1}^n \lambda_i(a) A_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

324. O determinante do sistema (33) é $\Delta(a)$ e como, por hipótese, $\Phi_1(a) \neq 0$, poderemos pôr

$$\frac{A_1}{\Phi_1(a)} = \frac{A_2}{\Phi_2(a)} = \dots = \frac{A_n}{\Phi_n(a)} = \alpha$$

o que dá, dum modo geral,

$$A_i = \alpha \Phi_i(a). \quad (36)$$

sendo α uma constante arbitrária. Vamos ver que este valor de A_i satisfaz não só à primeira das equações (33), mas também às primeiras equações de todos os sistemas seguintes, se puzermos

$$A_i^{(j)} = D^j [\alpha \Phi_i(a)] \quad (37)$$

onde fazemos, como de costume, $D^0 \alpha = \alpha$, $D\alpha = \alpha'$, $D^2 \alpha = \alpha''$, ...

Com efeito, qualquer dessas equações tem a forma

$$D^h \sum \varphi_i(a) A_i = 0.$$

Substituindo A_i pelo valor suposto, virá

$$\begin{aligned} D^h \sum_{i=1}^n \varphi_i(a) \alpha \Phi_i(a) &= D^h \left[\alpha \sum_{i=1}^n \varphi_i(a) \Phi_i(a) \right] \\ &= D^h [\alpha \Delta(a)] \\ &= \sum_{j=1}^h \binom{h}{j} \alpha^{(j)} \Delta^{(h-j)}(a). \end{aligned}$$

Mas como a é raiz de $\Delta(a)$ de grau de multiplicidade k , será

$$\Delta(a) = \Delta'(a) = \dots = \Delta^{(h-j)}(a) = \dots = \Delta^{(k-1)}(a) = 0.$$

Logo, os valores dados por (37) satisfazem à primeira equação de todos os sistemas considerados. E agora é fácil de ver que também satisfazem às outras.

Com efeito:

$$\begin{aligned} D^h \sum_{i=1}^n \psi_i(a) \alpha \Phi_i(a) &\equiv D^h \left[\alpha \sum_{i=1}^n \psi_i(a) \Phi_i(a) \right] \\ &\equiv D^h [\alpha \cdot 0] \equiv 0, \end{aligned}$$

podendo repetir-se o mesmo raciocínio para as restantes equações.

325. A u_i podemos, pois, dar a forma

$$u_i = e^{ax} (x + D)^{k-1} [\alpha \Phi_i(a)] \quad (38)$$

onde o D significa derivada em ordem a x ; e α é suposta função de a .

326. Por (27), pode dar-se a (38) a forma

$$\begin{aligned} u_i &= e^{ax} \Phi_i \left(a + \frac{d}{dx} \right) (x + D)^{k-1} \alpha \\ &= e^{ax} \Phi_i \left(a + \frac{d}{dx} \right) P_{k-1}(x) \end{aligned} \quad (39)$$

327. É fácil de ver que este valor de u_i satisfaz às equações propostas (31). Com efeito:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \varphi_i \left(\frac{d}{dx} \right) u_i &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \left(\frac{d}{dx} \right) e^{ax} \Phi_i \left(a + \frac{d}{dx} \right) P_{k-1}(x) \\ &= e^{ax} \sum_{i=1}^n \varphi_i \left(a + \frac{d}{dx} \right) \Phi_i \left(a + \frac{d}{dx} \right) P_{k-1}(x) \\ &= e^{ax} \left[\sum_{i=1}^n \varphi_i \left(a + \frac{d}{dx} \right) \Phi_i \left(a + \frac{d}{dx} \right) \right] P_{k-1}(x) \\ &= e^{ax} \Delta \left(a + \frac{d}{dx} \right) P_{k-1}(x) = 0, \end{aligned}$$

por a ser raiz de grau k de $\Delta(a)$ e o grau de $P_{k-1}(x)$ ser $k-1$.

328: A (39) ainda se pode dar a forma, por (29),

$$u_i = e^{ax} P_{k-1} \left(x + \frac{d}{da} \right) \Phi_i(a); \quad (40)$$

ou ainda,

$$u_i = P_{k-1} \left(\frac{d}{da} \right) e^{ax} \Phi_i(a) \quad (41)$$

329. Também a (39) se pode dar a forma

$$u_i = \Phi_i \left(\frac{d}{dx} \right) e^{ax} P_{k-1}(x) \quad (42)$$

330. É fácil de verificar que as formas de u_i dadas por (40), (41) e (42), satisfazem ao sistema (31).

331. Sendo $e^{ax} P_{k-1}(x)$ o integral particular da equação (12) do n.º 311, correspondente à raiz a de grau de multiplicidade k , é claro que ao integral geral se pode dar a forma $u = \sum e^{ax} P_{k-1}(x)$, sendo o somatório estendido aos integrais correspondentes a tôdas as raízes da equação característica. A este integral geral de (12) correspondem para o sistema (31) os integrais gerais [por (43)]:

$$u_i = \Phi_i \left(\frac{d}{dx} \right) \sum e^{ax} P_{k-1}(x) \quad (93)$$

para

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

332. Exemplo — Calcular o integral geral do sistema do n.º 307 suposto homogêneo.

A equação característica da equação diferencial

$$\Delta(\rho) u = \begin{vmatrix} \rho & r & -q \\ -r & \rho & p \\ q & -p & \rho \end{vmatrix} u = 0$$

tem as raízes 0 , ωi e $-\omega i$. Logo: o integral geral desta equação é

$$u = A' + B' e^{\omega i t} + C' e^{-\omega i t}$$

ou ainda, desembaraçando dos imaginários,

$$u = A + B \operatorname{sen}(\omega t + c),$$

sendo A , B e c , constantes arbitrárias.

Por outro lado,

$$\Phi_1(\rho) = \rho^2 + p^2; \quad \Phi_2(\rho) = pq + r\rho; \quad \Phi_3(\rho) = pr - q\rho$$

CAPÍTULO VII

OPERADORES COMPLEXOS

334. No capítulo I, os operadores podem ser quaisquer, contanto que satisfaçam às condições dos enunciados que exigem apenas, em geral, que êsses operadores sejam bem definidos, aditivos e permutáveis com os números. A natureza dos operadores fica completamente arbitrária. Que os operadores sejam simples, ou sejam funções de outros operadores, isso nada importa à verdade da doutrina exposta no mencionado capítulo.

É importante o estudo dos polinómios inteiros de operadores diferentes, bem definidos, aditivos e permutáveis entre si e com os números.

335. Sejam $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$, operadores nas condições supracitadas, e seja $P(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$ um polinómio inteiro dêstes operadores. Tôdas as vezes que o polinómio $P(X_1, X_2, \dots, X_k)$ se possa decompor em factores, o mesmo sucederá ao polinómio proposto. Por exemplo, se

$$P(X_1, X_2, \dots, X_k) = P_1(X_1, X_2, \dots, X_k) \cdot P_2(X_1, X_2, \dots, X_k),$$

sendo P_1 e P_2 também polinómios inteiros, será do mesmo modo

$$P(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k) = P_1(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k) \cdot P_2(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$$

pelas razões apresentadas em os n.ºs 50 e 51.

336. Assim, por exemplo, se $P(\rho_1, \rho_2)$ fôr um polinómio homogénio de grau n em ρ_1 e ρ_2 , poder-se-lhe há dar a forma

$$P(\rho_1, \rho_2) = p_0(\rho_1 - a_1 \rho_2)^{\alpha_1} (\rho_1 - a_2 \rho_2)^{\alpha_2} \dots (\rho_1 - a_k \rho_2)^{\alpha_k}$$

sendo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n.$$

337. Se $P(\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ fôr uma forma quadrática ternária de discriminante nulo, será;

$$P(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = (A\rho_1 + B\rho_2 + C\rho_3)(A'\rho_1 + B'\rho_2 + C'\rho_3)$$

sendo A, A', B, B', C, C' , constantes.

338. Assim, por exemplo, a equação de derivadas parciais de 2.^a ordem, de coeficientes constantes,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

que simbolicamente se pode escrever

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] u = 0,$$

ou ainda,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 0,$$

desdobra-se, pelos n.ºs 94 e 95, em duas equações de primeira ordem,

$$\frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Os integrais destas duas equações, serão integrais da proposta e a sua soma também (n.º 96).

339. Por vezes é possível reduzir uma equação à forma simbólica

$$P(\pi)u = X,$$

em que π é um operador complexo, e P um polinómio inteiro. Neste caso, o 1.º membro da equação é susceptível de ser decomposto em factores binómios (caso π seja bem definido, aditivo e permutável com os números) e a esta equação poderá aplicar-se a doutrina do n.º 109.

340. Seja dada a equação

$$F(x)y + F'(x)y' + F''(x)y'' + \dots = X$$

sendo $F(x)$ um polinómio inteiro em x ; X uma função de x conhecida; e y , uma função de x desconhecida. Calculando a função

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} \right)^2} F(x)$$

que é também um polinómio inteiro em x , como é evidente, teremos (n.º 132),

$$f\left(x + \frac{d}{dx}\right)y = F(x)y + F'(x)y' + \dots$$

e, conseqüentemente,

$$f\left(x + \frac{d}{dx}\right)y = X$$

ou ainda,

$$f(\pi)y = X$$

sendo

$$\pi = x + \frac{d}{dx}.$$

A esta equação applica-se a doutrina do n.º 109.

341. A decomposição em factores que acabamos de considerar, tem força demonstrativa, como se disse no capítulo I, mas os coeficientes dos polinómios tem de ser números. Porém, se tivermos em vista apenas obter resultados, como succede no cálculo das soluções duma equação dada, então podemos levar mais longe a decomposição em factores, introduzindo nestes, coeficientes simbólicos. Quando estes coeficientes simbólicos, considerados como números, nos permitirem chegar a resultados susceptíveis de serem interpretados, poderemos tirar d'êste artifício conseqüências proveitosas.

342. Seja, por exemplo, a equação

$$\frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

a que chegamos em o n.º 338.

Escrevendo esta equação debaixo da forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0$$

e considerando $a \frac{\partial}{\partial y}$ como um número, podemos escrever (n.º 158

$$u = Ae^{x \cdot a \frac{\partial}{\partial y}}$$

em que A é uma constante em ordem a x e, portanto, na sua forma mais geral, é função arbitrária de y . Logo,

$$u = e^{ax} \frac{\partial}{\partial y} A(y)$$

ou ainda (n.º 42)

$$u = A(y + ax)$$

em que A é uma função arbitrária.

343. Do mesmo modo se tira, de

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

a solução

$$u = B(y - ax)$$

sendo B uma função arbitrária. É fácil de ver directamente que A e B são soluções da proposta. A sua soma também o será

$$u = A(y + ax) + B(y - ax);$$

e será o integral geral por conter duas funções arbitrárias.

344. NOTA: A razão porque se consideram as constantes arbitrárias em ordem a uma variável, como funções arbitrárias das outras variáveis, é obter os resultados mais gerais possíveis. Pela mesma razão de generalidade se tomam essas funções para *operando*, nos resultados. Se assim não procedessemos, ainda chegaríamos a uma solução da equação proposta, mas não chegaríamos aos resultados mais gerais.

No caso presente, por exemplo, obteríamos as soluções $u = A$ e $u = B$, sendo A e B constantes. Aliás, como os resultados a que se chega, ficam sujeitos a verificação ou demonstração directa, este modo de proceder é sempre legítimo.

345. Consideram-se por vezes operadores que affectam apenas uma parte do operando. Por exemplo, se o operando é um produto de dois factores u e v , pode considerar-se um operador que significa a derivada de $u \cdot v$, supondo v constante, ou a derivada da mesma função, supondo u constante.

346. Assim, por exemplo, supondo u e v funções de x e representando por d a derivada em ordem a x de $u.v$; e por d_1 , a derivada da mesma função considerando v constante; e por d_2 , a derivada da mesma função considerando constante o factor v , teremos

$$d(uv) = (d_1 + d_2)(uv)$$

ou seja

$$d = d_1 + d_2.$$

Por outro lado, é fácil de ver que todos estes operadores são aditivos, permutáveis entre si e com os números, e susceptíveis de serem aplicados ao operando uv tantas vezes quantas se queiram. Conseqüentemente (n.º 51), teremos:

$$d^n = (d_1 + d_2)^n = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} d_1^h d_2^{n-h}$$

ou seja

$$(uv)^{(n)} = \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} u^{(h)} v^{(n-h)}$$

que é a bem conhecida regra de Leibnitz para o cálculo da derivada de ordem n dum produto.

347. É imediata a generalização para um produto de mais factores:

$$d^n = (d_1 + d_2 + \dots + d_k)^n.$$

CAPÍTULO VIII

OPERADORES DA FORMA $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, x, y, \dots\right)$

348. Se um operador contiver diversos operadores mais simples, opera-se com eles segundo as regras atrás estabelecidas, seja qual fôr a sua natureza e o seu número. Pode dar-se o caso de o operando ser uma função de diversas variáveis e haver de operar sobre ele com operadores diversos, cada um dos quais só seja aplicável a uma parte das variáveis, por ventura a uma só. Claro que neste caso é preciso ter êsse facto em atenção e

aplicar cada um dos operadores componentes apenas às variáveis a que diz respeito.

349. Assim, por exemplo, o operador $\frac{\partial}{\partial x}$ representa a derivada parcial duma função de diversas variáveis em ordem a x .

O operador $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$, aplicado a $f(x, y, \dots)$, dá:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x, y, \dots) = f'_x(x, y, \dots) + f'_y(x, y, \dots),$$

etc., etc.

350. Os operadores desta natureza podem também ser, ou não, aditivos, permutáveis, etc.

351. Teorema — Se $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$ forem desenvolvíveis em série dupla de Maclaurin, será

$$\left[\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x, y)\right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \left[\psi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x, y)\right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

Com efeito:

$$\varphi(x, y) = \sum A_{i,j} x^i y^j$$

$$\psi(x, y) = \sum B_{i,j} x^i y^j$$

e

$$\left[\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(x, y)\right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \left[\sum_{i,j} A_{i,j} \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \sum_{\alpha,\beta} B_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta\right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} =$$

$$= \left[\sum_{i,j} A_{i,j} \cdot i! j! B_{i,j}\right]$$

$$= \left[\psi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x, y)\right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$x=0$

$y=0$

c. d. d.

352. Teorema — Os operadores $e^{h \frac{\partial}{\partial x}}$ e $e^{k \frac{\partial}{\partial y}}$, são permutáveis.

Com efeito:

$$\begin{aligned} e^{h \frac{\partial}{\partial x}} e^{k \frac{\partial}{\partial y}} f(x, y, z, \dots) &= e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x, y + x, z \dots) \\ &= f(x + h, y + x, z \dots) \\ &= e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x, y + x, z \dots) \\ &= e^{k \frac{\partial}{\partial y}} e^{h \frac{\partial}{\partial x}} f(x, y, z \dots). \end{aligned}$$

Logo:

$$e^{h \frac{\partial}{\partial x}} \cdot e^{k \frac{\partial}{\partial y}} = e^{k \frac{\partial}{\partial y}} \cdot e^{h \frac{\partial}{\partial x}}$$

c. d. d.

353. Teorema — Os operadores $e^{h \frac{\partial}{\partial x}}$ e $e^{k \frac{\partial}{\partial y}}$ podem multiplicar-se segundo as regras da multiplicação de potências. Com efeito:

$$\begin{aligned} e^{h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}} &= 1 + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \\ &+ \dots + \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n + \dots \end{aligned}$$

por definição (n.º 63).

Mas este desenvolvimento, como se sabe da teoria das séries, representa o produto das séries que definem $e^{h \frac{\partial}{\partial x}}$ e $e^{k \frac{\partial}{\partial y}}$.

Logo: quando estes desenvolvimentos tiverem sentido, é

$$e^{h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}} = e^{h \frac{\partial}{\partial x}} \cdot e^{k \frac{\partial}{\partial y}}$$

c. d. d.

354. Este teorema é por vezes útil na integração de certas equações de derivadas parciais.

Inversão de operadores complexos

355. O problema da inversão dos operadores complexos é ainda mais difícil, como é manifesto. Um processo por vezes muito útil consiste em fazer a inversão em ordem a um dos operadores simples, considerando os símbolos que representam os outros, como constantes. Se se chegar a um resultado *interpretável*, podemos obter assim integrais para a equação proposta. É preciso, porém, verificar as soluções, visto que este processo não tem força demonstrativa.

356. Exemplo -- Integrar a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi(x, y)$$

Simbolicamente podemos escrever :

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \left(a \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right] u = \varphi(x, y);$$

e

$$\begin{aligned} u &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \left(a \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \right]^{-1} \varphi(x, y) \\ &= \left(2 a \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} \left[\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y}} - \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}} \right] \varphi(x, y) \end{aligned}$$

Considerando agora $a \frac{\partial}{\partial y}$ como uma constante e aplicando a doutrina do n.º 157, vem :

$$\begin{aligned} u &= \left(2 a \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - a \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} - \left(\frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} \right] \varphi(x, y) \\ &= \left(2 a \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-1} \left[e^{ax} \frac{\partial}{\partial y} \int e^{-ax} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) dx - \right. \\ &\quad \left. - e^{-ax} \frac{\partial}{\partial y} \int e^{ax} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x, y) dx \right] \end{aligned}$$

$$= \left(2a \frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} \left[e^{ax \frac{\partial}{\partial y}} \int \varphi(x, y - ax) dx - e^{-ax \frac{\partial}{\partial y}} \int \varphi(x, y + ax) dx \right].$$

Em pondo

$$\int \varphi(x, y - ax) dx = \Phi_1(x, y)$$

$$\int \varphi(x, y + ax) dx = \Phi_2(x, y),$$

vem :

$$\begin{aligned} u &= \left(2a \frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} \left[e^{ax \frac{\partial}{\partial y}} \Phi_1(x, y) - e^{-ax \frac{\partial}{\partial y}} \Phi_2(x, y) \right] \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} [\Phi_1(x, y + ax) - \Phi_2(x, y - ax)] \\ &= \frac{1}{2a} \int [\Phi_1(x, y + ax) - \Phi_2(x, y - ax)] dx \end{aligned}$$

357. Se $\varphi(x, y) = 0$, vem :

$$\begin{aligned} u &= \left(2a \frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1} \left[e^{ax \frac{\partial}{\partial y}} \theta_1(y) - e^{-ax \frac{\partial}{\partial y}} \theta_2(y) \right] \\ &= \frac{1}{2a} \int [\theta_1(y + ax) - \theta_2(y - ax)] dy \\ &= \psi_1(y + ax) + \psi_2(y - ax) \end{aligned}$$

sendo ψ_1 e ψ_2 funções arbitrárias.

Continua.

DOUTOR PACHECO DE AMORIM

Contribuição para o estudo da teoria das funções

CAPÍTULO VII

ALGUMAS NOÇÕES SÔBRE CONJUNTOS DE ELEMENTOS DUM ESPAÇOÍDE

(CONTINUAÇÃO)

III

INTERIOR, EXTERIOR E ESTREMA DUM CONJUNTO

76. Interior e exterior dum conjunto. — Generalizemos para um subconjunto qualquer A dum dado espaçoíde P algumas definições já enunciadas no caso particular de A representar um esferóide contido em P [v. iv, p. 26, l. 3].

Seja C o conjunto complementar de A ⁽¹⁾. Damos os nomes de *interior* I e *exterior* E do conjunto A respectivamente aos complementares dos lugares de C e de A :

$$I \mid P - [C] \quad , \quad E \mid P - [A] \quad (2).$$

Mostram estas definições que o interior e o exterior dum conjunto coincidem respectivamente com o exterior e o interior do seu complementar.

(1) Chamamos *complementar* dum conjunto A em relação a um conjunto B no qual o primeiro se encontra compreendido, ao conjunto C dos elementos de B que não são juxtapostos a elementos de A .

Quando dizemos simplesmente *complementar dum conjunto* A , sem mais indicação, entendemos que se trata do complementar de A em relação ao espaçoíde a que pertence. É claro que, se o complementar de A é C , o complementar de C é constituído por todos os elementos que se juxtapõem a elementos de A .

(2) Quando não existe complementar dum conjunto, o interior considera-se constituído por todos os elementos do espaçoíde a que pertence.

É manifesto que o interior dum conjunto pertence ao lugar do mesmo conjunto e que o exterior pertence ao lugar do complementar; basta notar que é $[A] + [C] \mid P$.

Logo os interiores de dois ou mais conjuntos separados são igualmente conjuntos separados.

Diremos que um conjunto (um elemento, em particular) é interior ou exterior a um outro conjunto dado conforme pertencer ao interior ou ao exterior deste conjunto.

Um conjunto fechado I_1 interior a A caracteriza-se pela condição $I_1 C > 0$ sempre que um dos conjuntos I_1 ou C é limitado.

Esta condição, com efeito, é necessária e suficiente para que I_1 não contenha elemento algum de $[C]$ [v. IV, p. 89, l. 18]. Em particular, um elemento i interior a A caracteriza-se pela condição $i C > 0$. Existe, pois, um esferóide de centro em i constituído apenas por elementos que se juxtapõem a elementos de A . Reciprocamente, um elemento que satisfaça a tal condição é interior a A ⁽¹⁾.

É evidente que um elemento interior a um conjunto só é limite de elementos interiores ao mesmo conjunto.

Um conjunto fechado E_1 exterior a A caracteriza-se pela condição $E_1 A > 0$ quando um dos conjuntos E_1 ou A é limitado.

Se o elemento e , em particular, é exterior a A , temos $e A > 0$ e reciprocamente. De centro no elemento e existe então um esferóide constituído unicamente por elementos do complementar de A , sendo esta condição também suficiente para que e seja exterior a A .

Um elemento exterior a um conjunto só é limite de elementos exteriores ao mesmo conjunto.

Das definições de interior e exterior resultam directamente as seguintes proposições:

Um conjunto admite o mesmo exterior que o respectivo lugar. Conjuntos juxtapostos admitem o mesmo exterior e reciprocamente.

(1) Pode acontecer que um elemento interior a um conjunto lhe não pertença, mas necessariamente se juxtapõe a um dos seus elementos. Um conjunto totalmente fechado, por exemplo, contém todos os elementos que lhe são interiores.

Conjuntos de complementares juxtapostos admitem o mesmo interior e reciprocamente.

Se dois conjuntos são separados o lugar de cada um é exterior ao outro.

Se F é um conjunto fechado exterior a A , também o lugar $[A]$ é exterior a F .

Nessas condições, com efeito, o lugar $[F]$ é exterior a A , nenhum elemento de $[A]$ pertence a $[F]$ e $[A]$ é exterior a F .

Se F é um conjunto fechado exterior ao conjunto A e se um deles é limitado, os mesmos conjuntos são separados.

Efectivamente, se em tais condições fôsse $FA = 0$, os conjuntos F e $[A]$ possuiriam um elemento comum, que seria um elemento de F não exterior a A . O conjunto A é também exterior a F [*prop. prec.*].

Se o limite totalmente fechado duma sucessão convergente de conjuntos de soma limitada é interior a um dado conjunto, os termos da sucessão a partir de certa ordem são interiores ao mesmo conjunto.

Suponhamos que o limite totalmente fechado A duma sucessão convergente de conjuntos de soma limitada é interior a um dado conjunto B . Os termos a partir de certa ordem também lhe são interiores, porque, no caso contrário, a sucessão proposta admitiria uma subsucessão formada por termos não interiores ao conjunto B , da qual poderíamos extrair uma sucessão de elementos não interiores ao mesmo conjunto, e o limite integral desta sucessão, que pertenceria a A , não seria interior a B .

77. Estrema entre dois conjuntos. Estrema dum conjunto. Casos de existência da extrema. — Dizemos que dois conjuntos são *contíguos* quando, sendo ligados, nenhum elemento de qualquer deles é interior ao outro. Também podemos dizer que dois conjuntos ligados são contíguos quando nenhum elemento do lugar de qualquer deles é interior ao outro.

Um conjunto e o seu complementar, quando ligados, são contíguos. Dois conjuntos ligados que não admitam interiores são contíguos.

Chamemos *estrema* entre dois conjuntos contíguos **A** e **B** ao produto **T** dos lugares dos mesmos conjuntos:

$$\mathbf{T} \mid [\mathbf{A}] \times [\mathbf{B}].$$

Em virtude da definição de conjuntos contíguos nenhum elemento de **T** é interior a algum dos conjuntos **A** ou **B**.

Diremos que um conjunto (um elemento, em particular) é extremo entre dois conjuntos contíguos **A** e **B** quando fizer parte da estrema entre **A** e **B**.

Um conjunto \mathbf{T}_1 extremo entre **A** e **B** caracteriza-se pelas condições $\mathbf{T}_1 \vec{\mathbf{A}} = 0$ e $\mathbf{T}_1 \vec{\mathbf{B}} = 0$.

Na verdade, estas condições, que podem escrever-se $\mathbf{T}_1 \vec{\mathbf{A}} = 0$ e $\mathbf{T}_1 \vec{\mathbf{B}} = 0$, são necessárias e suficientes para que o conjunto \mathbf{T}_1 pertença a **A** e a **B** [v. iv, p. 98, l. 1]. Em particular um elemento **t** da estrema entre **A** e **B** caracteriza-se pelas condições $\mathbf{t}\mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{t}\mathbf{B} = 0$. Qualquer que seja o esferóide de centro **t** nele se encontra um elemento de **A** e um de **B**; reciprocamente, um elemento que satisfaça a esta condição pertence à estrema entre **A** e **B**.

A estrema entre dois conjuntos contíguos é totalmente fechada.

Na verdade, a estrema entre dois conjuntos contíguos é, pela definição, um produto de conjuntos totalmente fechados [v. iv, p. 25, l. 17].

*A estrema **T** entre dois conjuntos contíguos, um dos quais, pelo menos, seja fechado, não admite elemento algum interior a **T**.*

Seja, com efeito, **T** a estrema entre os conjuntos contíguos **A** e **B**, e suponhamos que **A**, por exemplo, é fechado. Um elemento interior a **T**, se existisse, seria interior a **A**, e portanto a **A** porque este é fechado, o que é absurdo.

Damos o nome de estrema dum conjunto **A**⁽¹⁾, sem mais referência, à estrema $\mathbf{T} \mid [\mathbf{A}] \times [\mathbf{C}]$ entre o conjunto **A** e o seu complementar **C**.

(1) A denominação de *estrema* foi introduzida por PACHECO D'AMORIM.

Dizemos que um conjunto é extremo de **A** quando faz parte da estrema de **A**.

Um conjunto **T**₁ extremo de **A** caracteriza-se pelas condições $\vec{T}_1 \mathbf{A} = 0$ e $\vec{T}_1 \mathbf{C} = 0$.

Em particular, se um elemento **t** é extremo de **A**, temos $\vec{t} \mathbf{A} = 0$ e $\vec{t} \mathbf{C} = 0$, e reciprocamente. Seja qual fôr o esferóide de centro \vec{t} nele existe sempre um elemento de **A** e outro do complementar, sendo esta condição também suficiente para que o elemento **t** seja extremo de **A**.

Representando por **P** o espaçóide a que pertencem todos os conjuntos que estamos considerando, são evidentes as relações

$$\mathbf{P} \mid \mathbf{A} - \mathbf{T} + \mathbf{C} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} \mid \mathbf{C} - \mathbf{T} + \mathbf{A},$$

que podem escrever-se

$$\mathbf{P} - \mathbf{C} \mid \mathbf{A} - \mathbf{T} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} - \mathbf{A} \mid \mathbf{C} - \mathbf{T},$$

ou ainda, designando por **I** o interior e por **E** o exterior do conjunto **A**,

$$\mathbf{I} \mid \mathbf{A} - \mathbf{T} \quad \text{e} \quad \mathbf{E} \mid \mathbf{C} - \mathbf{T}.$$

O lugar dum conjunto é a soma do interior com a estrema; o lugar do complementar é a soma do exterior com a estrema.

As estremas de dois ou mais conjuntos separados são igualmente conjuntos separados.

A estrema da soma dum número finito de conjuntos pertence à soma das estremas dos mesmos conjuntos, como resulta imediatamente da definição de estrema.

A estrema dum conjunto contém a do respectivo interior.

Designemos por **I** e **C** o interior e o complementar do conjunto **A**. O complementar de **I** é **C** como se conclui directamente da definição de interior, e a relação evidente

$$\mathbf{A} \times \mathbf{C} \mid > \mathbf{I} \times \mathbf{C}$$

mostra que a estrema de **A** contém a de **I**.

Sejam I e I' os interiores, T e T' as extremas de dois conjuntos A e A' . Uma qualquer das condições

$$A \parallel A', \quad I \parallel I', \quad T \parallel T',$$

é uma consequência das outras duas.

Na verdade, como da juxtaposição $A \parallel A'$ se deduz $[A] \mid [A']$ ou $I + T \mid I' + T'$ e reciprocamente, é claro que de duas quaisquer das condições a que se refere o enunciado resulta a terceira.

A extrema entre dois conjuntos contíguos é a parte comum às extremas dos mesmos conjuntos.

Porque, sendo A e B conjuntos contíguos, um elemento qualquer do produto $[A] \times [B]$ não é interior a A nem a B , sendo por isso extremo de A e de B .

Reciprocamente, um elemento extremo comum de A e de B é elemento comum aos lugares destes conjuntos, e portanto extremo entre A e B .

A extrema dum conjunto é totalmente fechada [p. 483, l. 19].

A extrema T dum conjunto fechado não admite elemento algum que seja interior a T [p. 483, l. 23].

Para que exista a extrema T entre dois conjuntos contíguos é necessário e suficiente que o lugar de um deles admita um subconjunto limitado que seja ligado ao outro. Qualquer subconjunto em tais condições é também ligado a T .

A condição é necessária porque, se t é um elemento extremo entre dois conjuntos contíguos A e B , a parte comum a um qualquer deles e a um esferóide de centro t é um subconjunto limitado e ligado ao outro.

Reciprocamente, se o lugar $[A]$ admite um subconjunto limitado A_1 que seja ligado a B , existe o produto $[A_1] \times [B]$ [v. IV, p. 89, l. 27], o qual faz parte da extrema $T \mid [A] \times [B]$ entre A e B .

Como uma parte do lugar $[A_1]$ pertence a T , vem a igualdade $[A_1]T = 0$, ou $A_1T = 0$, isto é, A_1 e T são conjuntos ligados.

Vejamos alguns corolários desta proposição:

Para que exista a extrema dum conjunto A , de complementar C , é necessário e suficiente que o lugar $[A]$ admita um subconjunto

limitado que seja ligado a **C**. Um tal subconjunto é também ligado a **T**.

Por conseguinte, qualquer subconjunto limitado do lugar **A** que seja separado de **T** também é separado de **C**.

Se o conjunto **A** não admite uma extrema, qualquer subconjunto limitado do lugar **A** é necessariamente separado de **C**.

Existe a extrema entre dois conjuntos contíguos sempre que um deles é limitado.

A extrema entre dois conjuntos contíguos mas ilimitados poderá não existir como facilmente se compreende.

*Existe a extrema entre um conjunto **A** e o seu complementar **B** em relação a qualquer conjunto conexo que o admita por subconjunto, supondo que é limitado um dos conjuntos **A** ou **B**.*

Com efeito, tais conjuntos **A** e **B** são ligados [p. 323, l. 17], e, como nenhum elemento de um deles se juxtapõe a um elemento do outro, também são contíguos. Em particular:

Num espaço de continuo qualquer conjunto limitado que admita um complementar, ou qualquer conjunto que admita um complementar limitado, também admite necessariamente uma extrema.

*Para que um elemento pelo menos da extrema entre dois conjuntos contíguos **A** e **B** figure sobre um dado conjunto **K** é necessário e suficiente que exista o produto*

$$(1) \quad K \times [A] \times [B],$$

o qual representa a parte da extrema entre **A** e **B** situada sobre **K**.

Esta proposição resulta por evidência da definição de extrema e dela se deduzem as seguintes consequências:

*Para que um elemento pelo menos da extrema dum conjunto **A**, de complementar **C**, figure sobre um dado conjunto **K** é necessário e suficiente que exista o produto*

$$(2) \quad K \times [A] \times [C],$$

o qual é constituído pela parte da extrema de **A** contida em **K**.

Existe um elemento pelo menos da extrema entre dois conjuntos contíguos A e B sobre qualquer contínuo K contido em $[A] + [B]$ no qual figurem elementos de $[A]$ e de $[B]$, supondo que é limitado um dos produtos $K \times [A]$ ou $K \times [B]$.

Em tais condições, com efeito, existe o produto (1), visto que os factores $K \times [A]$ e $K \times [B]$ constituem uma decomposição de K em duas partes fechadas uma das quais é limitada [p. 325, l. 14].

Existe um elemento pelo menos da extrema dum conjunto A sobre qualquer contínuo K no qual figurem elementos de $[A]$ e do complementar C dêsse conjunto, supondo que é limitado um dos produtos $K \times [A]$ ou $K \times C$.

78. Interior, exterior e extrema dum conjunto composto e do conjunto dos subconjuntos limitados dum conjunto B . — *As projecções do interior dum conjunto A^n de ordem n pertencem aos interiores das correspondentes projecções do mesmo conjunto.*

Consideremos, com efeito, um elemento a^n interior ao conjunto A^n . Tal elemento é centro dum esferóide F^n constituído por elementos juxtapostos a elementos de A^n . Mas sabemos que uma projecção qualquer de F^n é um novo esferóide que tem por centro a correspondente projecção de a^n [v. iv, p. 39, l. 5]. Os elementos dêsse novo esferóide juxtapõem-se a elementos da correspondente projecção de A^n [v. iv, p. 31, l. 15]. Logo qualquer projecção do elemento a^n é interior à correspondente projecção do conjunto A^n .

As projecções da extrema dum conjunto limitado de ordem n contêm as extremas das correspondentes projecções dêsse conjunto.

Seja A^k uma determinada projecção do conjunto limitado A^n . O lugar $[A^n]$, que é a soma do interior com a extrema de A^n , projecta-se segundo o lugar $[A^k]$ [v. iv, p. 41, l. 23], que é a soma do interior com a extrema de A^k . E, como o interior de A^n se projecta segundo um conjunto interior a A^k , segue-se que a projecção da extrema de A^n contém a de A^k .

O interior dum conjunto composto resulta da composição dos interiores dos conjuntos componentes.

Com efeito, os elementos interiores a um conjunto composto A^n resultam necessariamente da composição de elementos inte-

riores aos conjuntos componentes, como há pouco se demonstrou duma maneira geral para qualquer conjunto de ordem n .

Reciprocamente, seja $\mathbf{a}^n | (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ um elemento composto de elementos interiores aos componentes dum dado conjunto composto \mathbf{A}^n . Cada elemento \mathbf{a}_i é centro dum esferóide constituído por elementos juxtapostos a elementos do respectivo conjunto componente. Designemos por ρ o menor dos raios destes esferóides. É sabido que todos os elementos do esferóide de centro \mathbf{a}^n e de raio ρ juxtapõem-se a elementos de \mathbf{A}^n [v. iv, p. 39, l. 5, e p. 31, l. 11]. O elemento \mathbf{a}^n é, pois, interior a \mathbf{A}^n .

A extrema dum conjunto composto é a soma dos conjuntos que se obtêm compondo a extrema de cada conjunto componente com todos os restantes componentes, pela ordem em que estes são dados (1).

A presente proposição é um corolário da anterior. Basta recordar que o lugar dum conjunto composto resulta da composição dos lugares dos componentes [v. iv, p. 42, l. 17] e que o lugar dum conjunto representa a soma do interior com a extrema do mesmo conjunto.

O conjunto (A) dos subconjuntos limitados A dum conjunto B admite por interior o conjunto dos conjuntos limitados e separados do complementar de B.

Consideremos o espaçóide dos subconjuntos limitados dum dado espaçóide \mathbf{P} . Seja \mathbf{B} um conjunto contido em \mathbf{P} , e (A) o dos subconjuntos limitados de \mathbf{B} . Começemos por demonstrar que um conjunto limitado \mathbf{I} separado do complementar \mathbf{C} de \mathbf{B} é necessariamente interior a (A).

Para tanto consideremos uma sucessão qualquer

$$I_1, I_2, \dots, I_i, \dots$$

(1) Com o fim de evitarmos repetições de elementos compostos na soma assim obtida, podemos proceder do seguinte modo na formação da extrema dum conjunto composto: começamos por compor a extrema do primeiro componente com todos os componentes seguintes, depois o interior do primeiro componente com a extrema do segundo e com todos os seguintes, depois o interior do primeiro com o interior do segundo com a extrema do terceiro e com todos os seguintes, e assim sucessivamente; em seguida somamos os conjuntos compostos assim construídos.

de conjuntos de soma limitada que tenda para o limite \mathbf{I} . Temos

$$\lim \mathbf{I}_i \mathbf{C} = \mathbf{I} \mathbf{C} > 0 \quad [v. v, p. 170, l. 17]$$

e, a partir de certa ordem, $\mathbf{I}_i \mathbf{C} > 0$. A partir desta mesma ordem cada conjunto \mathbf{I}_i não contém elemento algum de \mathbf{C} , quer dizer, é constituído por elementos juxtapostos a elementos de \mathbf{B} , e por conseguinte juxtapõe-se a um subconjunto limitado de \mathbf{B} . Logo \mathbf{I} é interior a (\mathbf{A}) , pois só é limite de conjuntos juxtapostos a subconjuntos de \mathbf{B} .

Reciprocamente, qualquer elemento \mathbf{I} interior a (\mathbf{A}) é separado do complementar de \mathbf{B} . Basta demonstrar, com efeito, que um conjunto limitado qualquer \mathbf{J} que seja ligado a \mathbf{C} não é interior a (\mathbf{A}) . Dado o número $\frac{1}{i}$ determinemos um elemento \mathbf{c}_i de \mathbf{C} tal que seja $\mathbf{J} \mathbf{c}_i < \frac{1}{i}$. Dividamos em seguida o conjunto \mathbf{J} num número finito de partes de diâmetros inferiores a $\frac{1}{i}$, tomemos um elemento em cada parte e seja \mathbf{J}_i o conjunto constituído por todos estes elementos e por \mathbf{c}_i . É claro que temos $\overline{\mathbf{J} \mathbf{J}_i} < \frac{1}{i}$ e que \mathbf{J}_i não se juxtapõe a subconjunto algum de \mathbf{B} . Logo, pondo $i = 1, 2, \dots$, o conjunto \mathbf{J} apresenta-se como limite duma sucessão

$$\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_i, \dots$$

de conjuntos não juxtapostos a subconjuntos de \mathbf{B} , motivo porque \mathbf{J} não é interior a (\mathbf{A}) .

Eis alguns corolários da proposição agora mesmo justificada:

Os subconjuntos limitados e fechados do interior dum conjunto \mathbf{B} são necessariamente interiores ao conjunto (\mathbf{A}) dos subconjuntos limitados de \mathbf{B} .

Em virtude da proposição precedente basta recordar que um subconjunto limitado e fechado do interior de \mathbf{B} separa-se do complementar \mathbf{C} d'este conjunto [p. 481, l. 9].

Notemos que um elemento \mathbf{I} interior a (\mathbf{A}) é um conjunto necessariamente interior a \mathbf{B} , porque, sendo $\mathbf{I} \mathbf{C} > 0$, também temos $\mathbf{I} [\mathbf{C}] > 0$.

Se os conjuntos B e B' admitem o mesmo interior, o conjunto dos subconjuntos limitados de um deles e o conjunto dos subconjuntos limitados do outro admitem também o mesmo interior.

Com efeito, se B e B' admitem o mesmo interior, os respectivos complementares são juxtapostos [p. 482, l. 1], e qualquer conjunto separado dum destes complementares também é separado do outro.

Em particular afirmamos que:

Se I é o interior de B , o conjunto dos subconjuntos limitados de B e o dos subconjuntos limitados de I admitem o mesmo interior.

O conjunto (A) dos subconjuntos limitados dum dado conjunto B admite por interior o conjunto dos subconjuntos limitados do lugar $[B]$ e separados da estrema de B .

Na verdade, um conjunto qualquer separado de C pertence ao lugar $[B]$ e é separado da estrema T de B quando esta existe; reciprocamente, qualquer subconjunto limitado do lugar $[B]$ que seja separado de T também é separado de C , como atrás dissemos [p. 486, l. 3].

Quando B não admite uma estrema, o interior do conjunto (A) reduz-se ao conjunto de todos os subconjuntos limitados do lugar $[B]$. Efectivamente, dado o caso de o conjunto B não admitir uma estrema, qualquer subconjunto limitado do lugar $[B]$ é separado de C [p. 486, l. 5].

O conjunto (A) dos subconjuntos limitados dum dado conjunto B admite por estrema o conjunto dos subconjuntos limitados do lugar $[B]$ que são ligados ao complementar de B .

Já demonstrámos que o lugar $[(A)]$, ou seja a soma do interior com a estrema de (A), é o conjunto dos subconjuntos limitados do lugar $[B]$ [v. v, p. 136, n.º 53]. Mas como os separados do complementar C de B são os interiores, segue-se que a estrema de (A) é constituída pelos subconjuntos limitados de $[B]$ que são ligados a C .

Também se pode dizer que:

O conjunto (A) dos subconjuntos limitados dum dado conjunto B admite por estrema o conjunto dos subconjuntos limitados do lugar $[B]$ que são ligados à estrema de B .

Tratando-se dum conjunto fechado B , podemos resumir estes enunciados do seguinte modo:

O interior e a extrema do conjunto (A) dos subconjuntos limitados dum conjunto fechado B, de complementar C, são constituídos respectivamente pelos conjuntos limitados separados de C e pelos contíguos a C.

Basta atender às proposições precedentes e a que, se B é fechado, qualquer subconjunto do lugar $[B]$ que seja ligado a C também é contíguo a C , e qualquer conjunto contíguo a C pertence a $[B]$.

O conjunto (A) dos subconjuntos limitados dum dado conjunto B admite por exterior o conjunto dos conjuntos limitados não contidos no lugar [B].

Com efeito, os conjuntos limitados contidos no lugar $[B]$ constituem, como vimos, o interior e a extrema de (A) ; por conseguinte o exterior é constituído pelos conjuntos limitados não contidos em $[B]$.

O conjunto dos subconjuntos limitados dum conjunto B e o dos que são limitados e fechados admitem o mesmo interior, o mesmo exterior e a mesma extrema.

Seja (A) o primeiro conjunto, (A') o segundo. Demonstrámos já que um elemento qualquer I interior a (A) separa-se do complementar de B ; o mesmo sucede ao lugar $[I]$, que por isso se juxtapõe, elemento a elemento, a um subconjunto fechado A' de B . Logo qualquer elemento I interior a (A) juxtapõe-se a um elemento de (A') . O interior do primeiro conjunto é, pois, interior ao segundo, e, como éste é um subconjunto daquele, os dois conjuntos admitem o mesmo interior.

Da juxtaposição $(A) \parallel (A')$ ⁽¹⁾ resulta que (A) e (A') também

⁽¹⁾ *O conjunto (A) dos subconjuntos limitados dum dado conjunto B e o conjunto (A') dos que são limitados e fechados juxtapõem-se entre si. Quando B é fechado, (A) e (A') juxtapõem-se elemento a elemento.*

Como é $(A') \subset (A)$, para estabelecermos a primeira parte da proposição basta demonstrar que a cada elemento A de (A) corresponde um elemento A' de (A') a uma distância do primeiro menor do que um número positivo dado ε . Ora, se dividirmos A num número finito de partes de diâmetros inferiores a ε e

admitem o mesmo exterior [p. 481, l. 32], e por conseguinte a mesma estrema.

IV

CONJUNTOS DOMINIAIS

79. Conjuntos abertos. Conjuntos dominiais. Domínios. — Dizemos que um conjunto é *aberto* quando só contém elementos que lhe são interiores (1).

O interior e o exterior dum conjunto são conjuntos abertos [p. 481, l. 18 e 27].

É aberto qualquer conjunto que se juxtaponha, elemento a elemento, a um conjunto aberto. Por exemplo, é aberto o produto dum conjunto pelo respectivo interior quando éste existe.

O interior dum conjunto é evidentemente o maior conjunto aberto constituído por elementos juxtapostos a elementos do mesmo conjunto.

Uma soma de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Tratando-se de conjuntos abertos que contenham todos os elementos juxtapostos aos seus próprios elementos, também é evidente que um produto de conjuntos abertos em número finito é um conjunto aberto.

O complementar dum conjunto fechado é aberto; porque, se **F** é um conjunto fechado, o seu complementar **C** coincide com o exterior de **F**:

$$C \mid P - [F].$$

Em geral, é aberto o complementar dum conjunto fechado em relação a um conjunto aberto, como facilmente se reconhece.

se tomarmos um elemento em cada parte, o conjunto **A'** destes elementos será fechado e teremos evidentemente $\overline{A A'} < \varepsilon$.

Se **B** é fechado, um qualquer dos seus subconjuntos **A** juxtapõe-se a um subconjunto fechado; na verdade, cada elemento do lugar [A] juxtapõe-se então a um de **B**, e o conjunto destes últimos elementos é fechado e juxtaposto a **A**.

(1) Pode dar-se o caso de um conjunto não ser aberto nem fechado. Observemos também que os conjuntos desprovidos de estremas são abertos e fechados ao mesmo tempo, ainda que não coincidam com o espaçoide a que pertencem; um espaçoide desconexo contém sempre tais conjuntos.

O complementar dum conjunto aberto é totalmente fechado; com efeito, sendo A aberto, o respectivo complementar C é a soma do exterior com a estrema, ou seja $C \mid [C]$.

Mais geralmente, é fechado o complementar dum conjunto aberto em relação a um conjunto fechado.

Um subconjunto fechado F dum conjunto aberto A é separado do complementar C de A , supondo limitado um dos conjuntos F ou C , porque, sendo A aberto, F é-lhe interior e por isso temos $FC > 0$ [p. 481, l. 9].

As projecções dum conjunto aberto de ordem n são novos conjuntos abertos.

Efectivamente, um conjunto aberto pertence ao respectivo interior, e por isso uma qualquer das suas projecções pertence ao interior da mesma projecção [p. 487, l. 13].

É aberto qualquer conjunto composto de conjuntos abertos.

Com efeito, um tal conjunto A^n é composto de conjuntos interiores aos componentes, sendo portanto interior ao mesmo A^n [p. 487, l. 33]. Reciprocamente, se um conjunto composto é aberto, os seus componentes são necessariamente abertos em virtude da proposição precedente.

É aberto o conjunto dos subconjuntos limitados dum dado conjunto B e separados do respectivo complementar.

Demonstrámos que o interior do conjunto (A) de todos os subconjuntos limitados do conjunto B é constituído pelos conjuntos limitados e separados do complementar C de B . Logo é aberto o conjunto dos subconjuntos limitados de B e separados de C [p. 492, l. 11].

É aberto o conjunto dos subconjuntos limitados e fechados dum dado conjunto B e separados do respectivo complementar.

Demonstra-se esta proposição tal qual como a precedente, visto que os conjuntos (A) e (A') considerados numa e noutra admitem o mesmo interior [p. 491, l. 18].

Como corolário temos que :

É aberto o conjunto dos subconjuntos limitados e fechados dum dado conjunto aberto.

Com efeito, qualquer subconjunto limitado e fechado dum conjunto aberto separa-se do complementar dêste [p. 493, l. 6].

É pois aberto o conjunto dos subconjuntos limitados e fechados do interior dum conjunto.

Dizemos que um conjunto é *dominial* quando se juxtapõe ao respectivo interior. Completando esta definição dizemos também que um conjunto desprovido de interior nunca é dominial.

Os conjuntos dominiais são pois os que não admitem extremas e aquêles em que os elementos extremos neles contidos são limites de elementos interiores.

Imediatamente se conclui que, num conjunto dominial, qualquer elemento extremo — contido ou não no conjunto — é sempre limite de elementos interiores.

Por conseguinte, se um dado conjunto dominial admite extrema, o desvio desta ao interior é nulo; reciprocamente, um conjunto que verifique tal condição é dominial.

Os conjuntos abertos pertencem à classe dos conjuntos dominiais.

Todos os espaçóides são conjuntos dominiais por não admitirem extremas.

É dominial um conjunto que se juxtaponha, elemento a elemento, a um conjunto dominial. Também é dominial um conjunto que admita o mesmo interior e a mesma extrema que um conjunto dominial.

É dominial um conjunto que se juxtaponha a uma parte do respectivo interior.

Com efeito, se um dado conjunto se juxtapõe a uma parte do respectivo interior, qualquer dos seus elementos é limite de elementos interiores.

É dominial qualquer soma de conjuntos dominiais.

Seja S uma soma de conjuntos dominiais e S_1 a soma dos respectivos interiores. O conjunto S_1 é evidentemente interior a S , e, como temos $S \parallel S_1$ [v. v, p. 138, l. 21], a soma S é dominial [*prop. prec.*].

É dominial qualquer conjunto fechado que se juxtaponha a um conjunto dominial.

Seja D um conjunto dominial, I o respectivo interior, F um conjunto fechado juxtaposto ao primeiro. De $I \parallel D$ e $F \parallel D$ resulta $F \parallel I$. Logo I é interior a F , por éste ser fechado, e a mesma juxtaposição $F \parallel I$ mostra que F é dominial.

São corolários desta proposição as duas seguintes :

É dominial um conjunto fechado que se juxtaponha a um aberto.

É dominial o lugar dum conjunto dominial.

Para que um conjunto seja dominial é necessário e suficiente que a sua extrema coincida com a do respectivo interior.

Na verdade, como um conjunto A e o respectivo interior I admitem o mesmo interior, para que seja $A \parallel I$ é necessário e suficiente que êsses conjuntos admitam a mesma extrema [p. 484, l. 18].

Logo dois conjuntos dominiais que admitam o mesmo interior também admitem a mesma extrema.

Para que um conjunto seja dominial é necessário e suficiente que a sua extrema coincida com a do lugar do complementar.

Sejam I e C o interior e o complementar dum conjunto D . O complementar de I é C [p. 480]. Ora, para que D seja um conjunto dominial é necessário e suficiente que a sua extrema coincida com a de I , que é a extrema de C .

Podemos enunciar esta proposição de qualquer das duas formas seguintes :

Para que um conjunto seja dominial é necessário e suficiente que o complementar e o lugar dêste admitam a mesma extrema.

Para que um conjunto seja dominial é necessário e suficiente que o complementar e o lugar dêste admitam o mesmo interior.

Com efeito, se C e C admitem a mesma extrema, também admitem o mesmo interior, e reciprocamente, por se tratar de conjuntos juxtapostos [p. 485, l. 1].

Uma sucessão monótona crescente de conjuntos dominiais tende para um conjunto dominial, soma dos termos da sucessão [v. v, p. 292, l. 30].

As projecções dum conjunto dominial de ordem n são conjuntos dominiais.

Seja D^n um conjunto dominial de ordem n , I^n o seu interior, D^k e I^k duas correspondentes projecções desses conjuntos. Da juxtaposição $D^n \parallel I^n$ resulta $D^k \parallel I^k$ [v. v, p. 138, l. 12]; logo, como I^k é interior a D^k [p. 487, l. 13], segue-se que o conjunto D^k é dominial [p. 494, l. 25].

É dominial um conjunto composto de conjuntos dominiais.

Com efeito, se os conjuntos componentes dum dado conjunto composto D^n se juxtapõem aos respectivos interiores, também D^n se juxtapõe ao conjunto composto dos mesmos interiores ⁽¹⁾, e já sabemos que este é o interior de D^n [p. 487, l. 33].

É dominial o conjunto dos subconjuntos limitados dum conjunto dominial.

Seja D um conjunto dominial, I o respectivo interior. Designemos por (A) o conjunto dos subconjuntos limitados de D , por (A') o dos subconjuntos limitados de I e por (A'') o dos subconjuntos limitados e fechados de I . Da juxtaposição $D \parallel I$ resulta $(A) \parallel (A')$ ⁽²⁾. Mas também temos $(A') \parallel (A'')$ [nota da p. 491], e por conseguinte $(A) \parallel (A'')$. Logo (A) é dominial porque se juxtapõe a um conjunto (A'') que lhe é interior [p. 489, l. 24] ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Recorremos à seguinte proposição que é um corolário da que vem enunciada no v. iv, p. 42, l. 17:

Se num dado conjunto composto substituirmos os componentes por conjuntos que lhes sejam juxtapostos, o novo conjunto composto juxtapor-se-á ao primeiro.

⁽²⁾ Efectivamente, da proposição que se encontra no v. v, p. 137, l. 1, deduz-se que:

Se dois conjuntos são juxtapostos, o conjunto dos subconjuntos limitados de um deles juxtapõe-se ao conjunto dos subconjuntos limitados do outro.

⁽³⁾ Vejamos como a presente proposição se justifica mostrando directamente que a distância de (A) ao respectivo interior é nula. Para isso demonstremos que, dado um número positivo ε e um elemento A de (A) , existe um elemento I interior a (A) tal que seja $\overline{AI} < \varepsilon$. Dividamos A num número finito de partes de diâmetros inferiores a $\frac{\varepsilon}{2}$ e em cada uma tomemos um elemento. A cada um destes elementos façamos corresponder um que seja interior a D e a uma distância do primeiro inferior a $\frac{\varepsilon}{2}$. O conjunto I destes novos elementos é interior a (A) , pois separa-se do complementar de D , e temos manifestamente $\overline{AI} < \varepsilon$.

É dominial o conjunto dos subconjuntos limitados e fechados dum conjunto dominial.

Já demonstrámos que o conjunto de todos os subconjuntos limitados dum dado conjunto e o dos que são limitados e fechados admitem o mesmo interior e a mesma estrema [p. 491, l. 18]; por conseguinte, como o primeiro conjunto é dominial em virtude da proposição precedente, o mesmo acontece ao segundo [p. 494, l. 22].

Uma classe importante de conjuntos dominiais é constituída pelos chamados *domínios*, designação esta que damos aos conjuntos dominiais conexos ⁽¹⁾.

Um conjunto conexo que não admita estrema é sempre um domínio. Os espaçóides conexos, por exemplo, consideram-se domínios.

É evidentemente um domínio qualquer conjunto que admita o mesmo interior e a mesma estrema que um dado domínio.

Combinando algumas proposições enunciadas precedentemente sobre conjuntos dominiais com outras expostas no n.º 75, p. 323, sobre conjuntos conexos, deduzem-se as seguintes:

Uma soma de domínios ligados entre si é um domínio.

Em particular, uma soma de domínios abertos ligados entre si é um domínio aberto.

O interior dum domínio é um domínio aberto.

O interior dum domínio é, com efeito, um conjunto aberto, que, por se juxtapor a um conjunto conexo (o próprio domínio), é também conexo.

É um domínio qualquer conjunto fechado que se juxtaponha a um domínio.

O lugar dum domínio é um domínio.

Por conseguinte o lugar duma soma de domínios ligados entre si é um domínio.

(1) Generalizamos assim a definição habitual de domínio.

Uma sucessão monótona crescente de domínios tende para um domínio, soma dos termos da sucessão.

As projecções dum domínio de ordem n são novos domínios.

Quando o domínio proposto D^n é limitado e fechado, as suas projecções são domínios limitados e fechados [v. iv, p. 41, l. 10]; quando D^n é aberto, as suas projecções são domínios abertos [p. 493, l. 10].

Um conjunto composto de domínios é um domínio.

O domínio composto é fechado ou aberto conforme os domínios componentes são fechados [v. iv, p. 42, l. 3] ou abertos [p. 493, l. 15].

É um domínio o conjunto (A) dos subconjuntos limitados dum domínio D.

Se o domínio D é fechado, o mesmo sucede ao domínio (A) [v. v, p. 137, l. 18].

É um domínio o conjunto (A') dos subconjuntos limitados e fechados dum domínio D.

O conjunto (A') é um domínio porque admite o mesmo interior e a mesma estrema que o domínio (A) considerado na proposição precedente [p. 491, l. 18].

O domínio (A') é fechado quando D é fechado, porque neste caso (A') juxtapõe-se, elemento a elemento, ao domínio fechado (A) [nota da p. 491]. O domínio (A') é aberto quando D é aberto [p. 493, l. 34].

80. Classificação dos conjuntos dominiais. — Começemos por classificar os conjuntos abertos em espécies da maneira seguinte:

Um conjunto aberto pertence à *primeira espécie* quando um dos seus elementos se pode unir a qualquer outro por um contínuo limitado compreendido nesse conjunto. Por conseguinte, num conjunto aberto de primeira espécie dois dos seus elementos, quaisquer que sejam, unem-se sempre por um contínuo limitado compreendido no mesmo conjunto.

Um conjunto aberto de primeira espécie — a que daremos também o nome de *conjunto aberto elementar* — é necessariamente um domínio.

Um conjunto aberto é de *segunda espécie* quando não pertence à primeira, mas se decompõe num número finito de conjuntos abertos de primeira espécie.

Um conjunto aberto é de *terceira espécie* quando não pertence à primeira ou à segunda, mas se decompõe numa infinidade de conjuntos abertos de primeira espécie ⁽¹⁾.

Finalmente um conjunto aberto diz-se de *quarta espécie* quando não pertence a nenhuma das espécies anteriores, isto é; quando não se decompõe em conjuntos abertos elementares.

Conhecida uma classificação dos conjuntos abertos em espécies, os conjuntos dominiais, em geral, classificam-se naturalmente conforme as espécies a que pertencem os seus interiores: um conjunto dominial e o respectivo interior pertencem, por definição, à mesma espécie.

Os domínios, em particular, estão submetidos à mesma classificação.

Um conjunto dominial de primeira espécie é um domínio que também será designado por *domínio elementar*.

Existem espaçóides que admitem domínios de qualquer das quatro espécies. Consideremos, por exemplo, no plano xOy o conjunto dos pontos dos segmentos fechados de recta que se obtém unindo o ponto $(0, 1)$ com cada um dos pontos

$$(0, 0), (1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \dots, \left(\frac{1}{i}, 0\right), \dots$$

Este conjunto, associado à definição habitual de distância entre dois pontos do plano, constitui um espaçóide. À excepção dos pontos do primeiro segmento, os de cada um dos outros ⁽²⁾ constituem um domínio elementar contido nesse espaçóide; os pontos dum número finito dos mesmos segmentos, mas excluindo o primeiro, constituem um domínio de segunda espécie; os pontos de todos os segmentos mas não do primeiro, ou os pontos dos segmentos de ordem ímpar, ou os dos segmentos de

(1) Adiante demonstraremos que um conjunto aberto de terceira espécie se decompõe sempre numa infinidade *numerável* de conjuntos abertos de primeira espécie [n.º 82 e 83].

(2) Em todos os segmentos de recta a que nos referimos neste exemplo podemos incluir ambos os extremos, um só ou nenhum.

ordem par, constituem um domínio de terceira espécie; se suprimirmos do espaçoíde que estamos considerando os pontos do segundo segmento, ou apenas o ponto $(0, 1)$, obteremos um domínio de quarta espécie.

Mas um espaçoíde não contém necessariamente conjuntos dominiais de cada uma das quatro espécies. Um espaço ordinário, por exemplo, só os contém das três primeiras espécies; na verdade, cada elemento interior a um conjunto é centro dum esferóide interior ao mesmo conjunto, e é sabido que o interior dum esferóide situado num espaço ordinário (esfera aberta) constitui um domínio aberto elementar.

Para citar outro exemplo consideremos no plano xOy espaçoíde dos pontos dos segmentos fechados de recta que resultam de unirmos um vértice A dum triângulo ABC com cada um dos pontos dum conjunto perfeito não-denso sobre o lado oposto. Tal espaçoíde contém domínios elementares — o próprio espaçoíde é um deles — e a todos pertence o ponto A . Não contém conjuntos dominiais de segunda nem de terceira espécies, porque, neste espaçoíde, uma soma de domínios abertos elementares ainda é elementar. Contém domínios de quarta espécie: assim, pertence à quarta espécie o domínio que se obtém dum de primeira suprimindo-lhe o ponto A . Este domínio de quarta espécie não admite subconjunto algum que seja um domínio elementar. Qualquer segmento de recta que una um ponto interior ao lado AB com um ponto interior ao lado AC divide o espaçoíde que estudamos em duas partes: uma é um domínio elementar, a outra um conjunto dominial de quarta espécie.

Mas há casos de espaçoídes que só contém conjuntos dominiais da quarta espécie. Serve de exemplo o espaçoíde dos pontos dum feixe de paralelas ao eixo Oy conduzidas pelos pontos dum conjunto perfeito não-denso sobre o eixo Ox . Nenhum conjunto compreendido neste espaçoíde é um domínio.

Seja C o complementar dum conjunto dominial. Se um dos conjuntos C ou $[C]$ é dominial, o mesmo sucede ao outro e são da mesma espécie; quando um deles é um domínio o outro também é um domínio.

Sabemos, com efeito, que o complementar e o lugar do complementar dum conjunto dominial admitem o mesmo interior [p. 495, l. 26].

Seja qual fôr o modo de divisão dum domínio elementar E em duas partes A_1 e A_2 , existe o produto

$$(3) \quad E \times [A_1] \times [A_2].$$

Por outras palavras, seja qual fôr o modo de divisão dum domínio elementar em duas partes, existe um elemento duma delas que é limite de elementos da outra. Com efeito, quando uma das partes A_1 e A_2 , por exemplo a primeira, é constituída apenas por elementos extremos de E , existe evidentemente o produto (3), porque um destes elementos extremos é limite de elementos interiores a E e portanto de elementos de A_2 . Se ambos os conjuntos A_1 e A_2 contêm elementos interiores a E , unamos dois destes elementos, um contido em A_1 e o outro em A_2 , por um contínuo limitado K interior a E . Sabemos que existe o produto

$$(K \times [A_1]) \times (K \times [A_2]) \quad \text{ou} \quad K \times [A_1] \times [A_2]$$

porque os factores $K \times [A_1]$ e $K \times [A_2]$ constituem uma decomposição do contínuo limitado K em duas partes fechadas [p. 325, l. 14]. Logo existe o produto (3).

Existe um elemento pelo menos da extrema entre dois conjuntos contíguos A e B sobre qualquer domínio elementar E contido em $[A] + [B]$ no qual figurem elementos de $[A]$ e de $[B]$.

Em tais condições, com efeito, os conjuntos $E \times [A]$ e $E \times [B]$ determinam uma decomposição de E em duas partes, e, em virtude da proposição precedente, existe o produto

$$E \times [E \times [A]] \times [E \times [B]],$$

ou seja

$$E \times [A] \times [B].$$

Logo sobre E existe um elemento pelo menos da extrema entre A e B [p. 486, l. 20].

Como caso particular vem a proposição seguinte:

Existe um elemento pelo menos da extrema dum conjunto A , de complementar C , sobre qualquer domínio elementar no qual figurem elementos de $[A]$ e de C .

Ou ainda :

Se nenhum elemento extremo dum conjunto A pertencè a um domínio elementar dado, êste domínio ou é interior ou então exterior ao conjunto A.

Para que uma soma de conjuntos dominiais com interiores distintos seja um domínio elementar é necessário que a estrema da soma dêsses domínios não contenha a soma das suas estremas.

Designemos por **I** e **T** o interior e a estrema dum dos conjuntos dominiais propostos **D**, em geral, e por **I'** e **T'** o interior e a estrema da soma de todos êsses conjuntos. É evidente a relação $I \subset I'$ para qualquer **I**, mas a coincidência $I = I'$ só poderá dar-se para um dêstes interiores, pois são todos distintos por hipótese. Seja I_1 um dos conjuntos **I** tal que seja $I_1 \subset I'$. Sobre **I'**, que supomos elementar, existe então um elemento da estrema de I_1 , isto é, da estrema dum dos conjuntos dominiais **D**. Logo a estrema da soma dos conjuntos **D** não contém a soma das suas estremas.

Em cada uma das quatro espécies de conjuntos dominiais ainda consideramos as seguintes duas variedades :

Um conjunto dominial pertence à *primeira variedade* quando um qualquer dos seus elementos extremos **t** faz parte dum contínuo⁽¹⁾ cujos elementos, à excepção do elemento **t**, são interiores a êsse conjunto dominial. Qualquer conjunto do plano xOy que admita por estrema uma curva de JORDAN fechada e simples é um domínio elementar da primeira variedade⁽²⁾.

Os conjuntos dominiais da *segunda variedade* são os que não pertencem à primeira. A porção do plano xOy limitada pelas linhas

$$x = 0, \quad x = a, \quad y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \quad y = \operatorname{sen} \frac{1}{x} + b \quad (a, b \neq 0)$$

é exemplo dum domínio elementar da segunda variedade.

(1) Entendemos que êste contínuo não degenera no elemento **t**. Da mesma maneira entendemos que não são nulos os diâmetros dos contínuos que a seguir consideramos.

(2) Tal afirmação só mais tarde será justificada quando nos ocuparmos da demonstração e generalização do teorema de JORDAN relativo a êste assunto.

Num conjunto dominial da primeira variedade qualquer elemento extremo t faz parte dum contínuo limitado (de diâmetro tão pequeno quanto quisermos) cujos elementos, à excepção de t , são interiores a esse conjunto.

Na verdade, depois de considerarmos um contínuo a que pertença t e cujos elementos, à excepção de t , sejam interiores ao conjunto dominial dado, podemos determinar sobre o mesmo contínuo um outro, de diâmetro tão pequeno quanto quisermos, a que pertença ainda o elemento t (1).

(1) Demostremos com efeito a seguinte proposição:

É possível dividir qualquer contínuo em partes contínuas de diâmetros tão pequenos quanto quisermos.

Dado um contínuo K , unamos dois dos seus elementos a e b por uma sucessão dum número finito de elementos de K tais que as distâncias entre cada um e o seguinte sejam inferiores a $\frac{1}{\varepsilon}$. Consideremos um esferóide F de centro a e de diâmetro inferior ao número ε , e seja

$$(2) \quad a, k_1, k_2, \dots, k_j$$

a parte daquela sucessão formada pelos elementos consecutivos desde a até ao primeiro elemento k_j exterior a F . Designemos por A_i o conjunto dos elementos (2) e por A um limite fechado da sucessão

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$$

que se obtém pondo $i = 1, 2, \dots$ [v. v, p. 284, l. 4]. O conjunto A é um contínuo [p. 319, l. 3], e, como todos os seus elementos são juxtapostos a elementos do contínuo dado K [v. v, p. 144, l. 5], podemos supor que esse limite A é constituído apenas por elementos de K e que nele figura o elemento a . O contínuo A não degenera evidentemente apenas em elementos juxtapostos a a , e, como é $A \subset F$, o seu diâmetro não excede o número ε .

Cada elemento a do contínuo K pertence pois a um outro A nele contido e de diâmetro inferior a ε . Por outras palavras, K é uma soma de contínuos de diâmetros inferiores a ε .

Observação — É sabido que dois quaisquer dos contínuos parciais podem unir-se por meio duma sucessão dum número finito dos mesmos contínuos de tal modo que as distâncias reduzidas entre cada um e o imediato sejam tão pequenas quanto se queira [p. 323, l. 17]. Por conseguinte podemos determinar uma tal sucessão de maneira que as distâncias entre cada contínuo e o imediato sejam inferiores a $\frac{\varepsilon}{3}$ [v. iv, p. 105, (4)].

Para que um conjunto dominial pertença à primeira variedade é suficiente que um elemento extremo qualquer t e um determinado elemento extremo t' se unam por um contínuo cujos elementos, à excepção de t e de t' , sejam interiores a esse conjunto.

Com efeito, sobre um contínuo que una nas condições do presente enunciado um elemento extremo t a um determinado elemento extremo t' do conjunto dado, podemos considerar sempre um outro no qual figure t e não t' , como resulta da proposição demonstrada em nota na página precedente.

Uma soma dum número finito de conjuntos dominiais da primeira variedade ainda pertence à primeira variedade.

Sendo os conjuntos dominiais dados em número finito, um elemento extremo qualquer t da respectiva soma é extremo de um deles D . O elemento t pertence a um contínuo cujos elementos, à excepção de t , são interiores a D , e portanto também interiores à soma de todos os conjuntos dados.

O lugar dum conjunto dominial da primeira variedade ainda pertence à primeira variedade.

Basta notar que um elemento extremo do lugar dum conjunto também é elemento extremo d'este mesmo conjunto.

Num domínio elementar da primeira variedade qualquer elemento extremo t pode unir-se a qualquer elemento interior por um contínuo limitado cujos elementos, à excepção de t , são interiores a esse domínio.

Consideremos sobre um domínio elementar E da primeira variedade um elemento extremo t e um elemento interior i , ambos arbitrários. Como atrás dissemos, o elemento t pertence a um contínuo limitado K cujos elementos, à excepção de t , são interiores a E . Tomemos sobre K um elemento i' interior a E e unamo-lo a i por um contínuo limitado K' interior a este domínio. O elemento t une-se então a i pelo contínuo limitado $K + K'$, cujos elementos são interiores a E à excepção de t .

Para que um domínio elementar pertença à primeira variedade é necessário e suficiente que dois elementos extremos quaisquer t e t' se unam por um contínuo limitado cujos elementos, excepto t e t' , sejam interiores a esse domínio.

A condição é necessária porque, se dois elementos extremos quaisquer t e t' dum domínio elementar E da primeira variedade se podem unir a um mesmo elemento interior por meio de contínuos limitados K e K' cujos elementos, excepto t e t' , sejam interiores a E [*prop. prec.*], os mesmos elementos extremos também se unem pelo contínuo limitado $K + K'$ de elementos interiores a E excepto t e t' .

A condição também é suficiente [*p. 504, l. 1*].

Como corolário das duas últimas proposições vem a seguinte:

Para que um dado conjunto A seja um domínio elementar da primeira variedade é necessário e suficiente que dois elementos quaisquer a e b do respectivo lugar se unam por um contínuo limitado de elementos interiores a A , exceptuando possivelmente a e b .

Desta proposição deduzem-se os dois seguintes corolários:

O lugar dum domínio elementar da primeira variedade também é elementar e da primeira variedade.

Seja I o interior dum domínio elementar E da primeira variedade. Qualquer conjunto A juxtaposto a E e para o qual I seja interior, também é um domínio elementar da primeira variedade.

De facto, dois elementos quaisquer a e b do lugar $[A]$ são elementos de $[E]$ e por isso podem unir-se por um contínuo limitado cujos elementos, a excepção possível de a e de b , pertencem a I , sendo portanto interiores a A . Logo este conjunto é um domínio elementar da primeira variedade.

Como aplicação podemos afirmar que:

É elementar e da primeira variedade qualquer soma de domínios elementares juxtapostos entre si, um dos quais, pelo menos, seja da primeira variedade.

Efectivamente, uma tal soma juxtapõe-se a qualquer dos domínios elementares dados, e em particular àquele que supomos pertencer à primeira variedade.

Para que uma soma de vários domínios elementares da primeira variedade seja também elementar é suficiente que dois quaisquer deles possam unir-se por uma sucessão dum número finito dos mesmos domínios de tal modo que a soma de dois quaisquer

consecutivos seja elementar. A soma dos domínios dados será da primeira variedade sempre que a sua extrema pertença à soma das extremas dos mesmos domínios.

Sobre a soma **S** dos domínios dados tomemos dois elementos **a** e **a'** que lhe sejam interiores. Designemos por **E** e **E'** dois dos domínios a que pertençam tais elementos e unamo-los por uma sucessão dum número finito de domínios dados

$$(4) \quad \mathbf{E}, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}'$$

de maneira que seja elementar a soma de quaisquer dois domínios consecutivos nesta sucessão. Sejam

$$\mathbf{i}, \mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}'$$

elementos interiores aos domínios (4) respectivamente. Unamos **a** a **i** por um contínuo limitado **K** cujos elementos distintos de **a** sejam interiores a **E**, depois **i** a **i**₁ por um contínuo limitado **K**₁ interior a **E** + **E**₁, depois **i**₁ a **i**₂ por um contínuo limitado **K**₂ interior a **E**₁ + **E**₂, etc.; unamos finalmente **i'** a **a'** por um contínuo limitado cujos elementos distintos de **a'** sejam interiores a **E'**. O contínuo limitado

$$\mathbf{K} + \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \dots$$

é interior à soma **S** e une os elementos **a** e **a'**.

A própria demonstração mostra que, se **a** e **a'** são elementos extremos quaisquer de dois dos domínios dados, esses elementos podem sempre unir-se por um contínuo cujos elementos distintos de **a** e de **a'** sejam interiores a **S**. Logo a soma **S** será da primeira variedade sempre que a sua extrema pertença à soma das extremas das parcelas.

Dados diversos domínios elementares da primeira variedade, em número finito, se a soma de quaisquer deles nunca é elementar, a extrema da soma dos mesmos domínios coincide com a soma das suas extremas.

A extrema da soma **S** dos domínios dados **E** pertence à soma das extremas dos mesmos domínios porque estes são em número finito. Por outro lado, um elemento qualquer **t** extremo dum dos domínios **E** também é extremo de **S** como se vai demonstrar. Se o elemento **t** fôsse interior a **S**, também **t** seria interior à

soma S' daqueles domínios E para cada um dos quais o elemento t é extremo ou interior, visto que os domínios dados são em número finito. Como estes pertencem à primeira variedade, o elemento t poder-se-ia então unir a qualquer elemento interior ao conjunto S' por meio dum contínuo limitado que lhe fôsse interior. Logo S' seria elementar contra a hipótese.

Para que uma soma de domínios elementares da primeira variedade seja também elementar é suficiente que dois quaisquer deles possam unir-se por uma sucessão dum número finito dos mesmos domínios de tal modo que a extrema da soma de dois domínios quaisquer consecutivos não seja a soma das suas extremas. A soma dos domínios dados será da primeira variedade tôdas as vezes que a respectiva extrema pertença à soma das extremas dos mesmos domínios.

A proposição é verdadeira para o caso particular de se tratar de só dois domínios como se conclui da proposição precedente. Considerando agora mais domínios podemos afirmar, em virtude das condições do presente enunciado e por força da penúltima proposição, que a soma S dos domínios dados é elementar e que, se a respectiva extrema pertence à soma das extremas dos mesmos domínios, ainda S é da primeira variedade.

Uma soma de domínios elementares da primeira variedade, em número finito, ou é elementar ou então da segunda espécie, e sempre da primeira variedade.

Entre os domínios dados poderá haver alguns cuja soma seja um domínio elementar. Substituindo tais domínios pela respectiva soma obtemos uma nova colecção de domínios elementares, ainda da primeira variedade [p. 504, l. 10]. Repitamos, sendo possível, a mesma operação sobre os domínios da nova colecção e assim sucessivamente até obtermos uma colecção de domínios tais que a soma de quaisquer deles nunca seja elementar. Pode suceder que esta colecção se reduza apenas a um domínio elementar. No caso contrário a extrema da soma S de todos os domínios dados coincide com a soma das extremas dos domínios desta última colecção [p. 506, l. 27]. Por conseguinte o interior de S também coincide com a soma dos interiores destes domínios, donde se conclui que o conjunto dominial S é da segunda espécie.

81. Casos de determinação dum domínio elementar pelo conhecimento da estrema. — O conhecimento da estrema dum conjunto dominial não é em todos os casos suficiente para definir o respectivo interior, embora se trate dum espaçóide ilimitado e esse conjunto seja um domínio limitado e elementar. Assim, no espaçóide dos pontos do plano xOy é estrema comum a dois domínios fechados, limitados e elementares, o conjunto dos pontos das curvas que em coordenadas polares têm as equações

$$(5) \quad \rho = \frac{\theta}{\theta + 1}, \quad \rho = \frac{\theta + f(\theta)}{\theta + f(\theta) + 1}, \quad \rho = 1,$$

com θ qualquer positivo ou nulo, onde $f(\theta)$ representa uma função contínua de θ , nula para θ igual a zero, positiva mas inferior a 2π para os outros valores de θ ⁽¹⁾.

Podemos, no entanto, afirmar que:

O interior dum domínio elementar é determinado pelo conhecimento da estrema e de um elemento interior (HAUSDORFF) ⁽²⁾.

Efectivamente, se a é um elemento interior a um domínio elementar de estrema \mathbf{T} , os restantes elementos interiores a tal domínio são caracterizados pela propriedade de se poderem unir a a por contínuos limitados que não contenham elementos de \mathbf{T} [p. 487, l. 8]. Logo, dois domínios elementares que possuam a mesma estrema e um mesmo elemento interior também possuem o mesmo interior. Quando totalmente fechados, estes domínios coincidem.

Desta proposição resulta o seguinte corolário:

O interior dum domínio elementar, ilimitado mas de complementar limitado, é definido pelo conhecimento da sua estrema.

Noutros termos: dois domínios elementares, ilimitados mas de complementares limitados, que possuam a mesma estrema, também possuem o mesmo interior. Basta notar que os elementos exteriores a um esferóide que encerre os complementares dos domínios dados são elementos interiores comuns aos dois domínios. Logo os interiores destes coincidem.

(1) Serve por exemplo a função $f(\theta) = \frac{\theta}{\theta + 1}$.

(2) Veja-se FRÉCHET, *Les Espaces Abstraits*, p. 220, l. 29.

Seja A um conjunto com elementos interiores contido num domínio elementar E . Se nenhum elemento extremo de A é interior a E , estes dois conjuntos admitem o mesmo interior e a mesma estrema.

Sejam I e I' os interiores dos conjuntos A e E respectivamente. É evidente a relação $I \subset I'$. Por outro lado também temos $I' \subset I$, como resulta da proposição da p. 502, l. 2, aplicada aos conjuntos A e I' . Logo os conjuntos A e E admitem o mesmo interior, e, como este último é dominial, também admitem a mesma estrema.

Sejam C e T o complementar e a estrema dum conjunto A . Se A e C são domínios elementares, os únicos conjuntos totalmente fechados com elementos interiores que admitem a estrema T são os domínios elementares A e C .

Designemos por I o interior e por E o exterior do domínio A . Nas condições do enunciado os lugares A e C são ainda domínios elementares [p. 500, l. 33], e admitem a mesma estrema T e os mesmos interiores I e E que os conjuntos A e C respectivamente [p. 495, l. 24 e 26].

Demonstremos que um conjunto B totalmente fechado, com elementos interiores, que admita a estrema T coincide necessariamente ou com A ou com C . Cada um dos conjuntos I e E ou é interior ou então exterior a B [p. 502, l. 2], mas não são ambos interiores nem ambos exteriores a B , porque este conjunto é totalmente fechado e distinto de T [p. 485, l. 17]. Por consequência B admite o mesmo interior e a mesma estrema que um dos lugares A ou C , e, visto ser totalmente fechado, com um destes lugares coincide ⁽¹⁾.

(1) Quando se consideram certos espaçóides, como por exemplo os espaços ordinários, tem lugar a seguinte proposição:

A estrema dum domínio elementar da primeira variedade não é estrema de outro domínio elementar cujo interior seja distinto do interior e do exterior do primeiro.

Esta proposição será demonstrada noutra capituló e dela se deduz o seguinte corolário:

O interior dum domínio limitado, elementar e da primeira variedade, é definido pelo conhecimento da sua estrema.

Tratando-se dum conjunto dominial não necessariamente elementar, o simples conhecimento da estrema e dum elemento interior não é sempre suficiente para determinar o respectivo interior. As curvas atrás consideradas [p. 508] constituem a estrema comum a quatro domínios fechados: os dois limitados e elementares já mencionados e os lugares dos respectivos complementares, lugares estes que são domínios ilimitados de segunda espécie. O conhecimento da estrema e de um ponto interior não basta neste caso para determinar um só dos quatro domínios.

Consideremos ainda no plano xOy uma infinidade (necessariamente numerável) de circunferências

$$C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$$

exteriores umas às outras mas tangentes interiores a uma dada circunferência C . Determinemos as circunferências C_i de tal modo que os pontos de contacto com C formem um conjunto denso sobre ela mesma ⁽¹⁾. As circunferências C e C_i constituem a estrema comum a quatro domínios fechados: dois limitados, sendo um de primeira e o outro de terceira espécies, e dois ilimitados, um de segunda e outro de terceira espécies. O conhecimento da estrema e de um ponto interior determina dois destes domínios.

Seguindo a mesma construção, mas considerando circunferências C_i tangentes exteriores a C em vez de interiores, obtemos um exemplo análogo ao precedente. Estas circunferências servem de estrema a dois domínios limitados de terceira espécie e a dois ilimitados, sendo um destes últimos de primeira espécie e o outro de segunda.

Citemos outros exemplos de domínios que não são definidos apenas pelo conhecimento da estrema e de um elemento interior. Partamos dum dos casos já mencionados, por exemplo, do pri-

(1) Podemos supor, por exemplo, que C_1 e C_2 têm o mesmo raio e que os pontos de contacto com C dividem esta circunferência em duas partes iguais, que C_3 e C_4 têm também o mesmo raio e que os pontos de contacto juntamente com os anteriores dividem C em quatro partes iguais, que C_5, C_6, C_7 e C_8 tem o mesmo raio e que os pontos de contacto dividem as quatro partes já obtidas em novas partes iguais, e assim indefinidamente. É claro que os raios destas circunferências tendem para zero.

meiro, e designemos por T_1 o conjunto dos pontos das curvas (5). Seja T_2 o conjunto que se obtém de T_1 aumentando de duas unidades as abscissas dos seus pontos, T_3 o que resulta de T_2 por meio da mesma translação, etc. Imediatamente se reconhece que o conjunto $T_1 + T_2 + \dots + T_k$ é estrema de 2^k domínios limitados e fechados de segunda espécie, e de outros tantos ilimitados.

Notemos também que o conjunto

$$(6) \quad T_1 + T_2 + \dots + T_i + \dots$$

é estrema comum a uma infinidade de domínios fechados de terceira espécie. Esta infinidade tem a potência do contínuo (1).

Com o fim de citarmos novos exemplos tomemos dois pontos a e b sobre o eixo Oy , opostos em relação à origem, um dos quais pode ser impróprio, e consideremos um conjunto X duma infinidade de pontos situados sobre o eixo Ox . Suponhamos que o conjunto X é fechado e que não contém intervalo algum. O ponto $-\infty$ considera-se pertencente a X quando

(1) Para demonstrar que esta infinidade de domínios tem a potência do contínuo designemos por A_i ($i=0, 1$) os dois domínios limitados e fechados de estrema T_1 , por $B_{i'}$ ($i'=0, 1$) os dois domínios limitados e fechados de estrema T_2 , e assim sucessivamente. Os domínios representados em geral por

$$(\alpha) \quad A_i + B_{i'} + C_{i''} + \dots$$

aditem a estrema (6). A cada um deles corresponde uma infinidade numerada de índices

$$(\beta) \quad i, i', i'', \dots$$

iguais a 0 ou a 1, e a estes corresponde o número do intervalo (0,1) que no sistema de numeração de base 2, se representa por

$$0, i, i', i'', \dots$$

Pondo de parte a infinidade numerável de domínios (α) que têm por correspondentes os sistemas de infinitudes de índices (β) que são iguais a 1 a partir de certa ordem, a correspondência assim estabelecida entre os restantes domínios (α) e os números do intervalo (0,1), excluindo o número 1, é biunívoca.

Os restantes domínios fechados que admitem a mesma estrema (6) são os lugares dos complementares dos primeiros, e também constituem uma infinidade com a potência do contínuo.

este conjunto não é limitado inferiormente; o mesmo em relação ao ponto $+\infty$. Unamos por meio de segmentos de recta cada um dos pontos a e b com cada ponto do conjunto X ; designe por T o conjunto dos pontos de todos estes segmentos. Se o conjunto X só admite dois pontos limites, ambos próprios ou não, o conjunto T é estrema comum a quatro domínios fechados de terceira espécie, sendo dois deles limitados quando a e b são próprios e quando X é limitado. Mais geralmente, se o derivado de primeira ordem de X se reduz apenas a um número finito k de pontos, o conjunto T é estrema comum a 2^k domínios fechados de terceira espécie. Se o derivado de primeira ordem de X contém uma infinidade de pontos, já o conjunto X é estrema comum a uma infinidade com a potência do contínuo de domínios fechados de terceira espécie.

Obtemos finalmente exemplos de domínios fechados e distintos que possuem uma mesma estrema e uma mesma parte interior e situados no espaço ordinário de três dimensões, quer considerando os conjuntos gerados pela translação segundo a direcção do eixo Oz dos domínios dum dos exemplos precedentes, quer considerando os conjuntos gerados pela revolução destes domínios em tórno duma recta do seu plano e que não os encontre.

82. *Algumas relações de posição entre conjuntos. Casos de decomposição dum conjunto dominial em domínios elementares.* — Dizemos que dois conjuntos são *penetrantes* quando um elemento dum deles é interior ao outro. É claro que, se um elemento do lugar dum dos conjuntos é interior ao outro, os dois conjuntos são penetrantes, propriedade esta que pode adoptar-se para definição.

Dois conjuntos ligados que não sejam penetrantes foram já denominados *contiguos* [p. 482, l. 28]. Em virtude destas definições, dois conjuntos quaisquer ou são separados, ou contiguos, ou penetrantes.

Em dois conjuntos penetrantes existem necessariamente dois elementos, um de cada conjunto, que se juxtapõem entre si.

Um conjunto e o seu complementar nunca são penetrantes. Dois conjuntos que não admitam interiores não são penetrantes.

Se um elemento extremo dum conjunto é interior a um outro, estes são necessariamente penetrantes.

Generalizando a definição precedente para uma colecção qualquer de conjuntos, em número finito ou infinito, dizemos que estes são penetrantes quando dois quaisquer deles se podem unir por uma sucessão dum número finito dos mesmos conjuntos de tal forma que os pares de conjuntos consecutivos na sucessão sejam penetrantes.

Diversos conjuntos penetrantes, quando são em número finito ou quando constituem uma infinidade numerável, podem dispor-se por uma certa ordem de tal maneira que, repetindo alguns se fôr necessário, os conjuntos consecutivos sejam penetrantes.

Para que diversos conjuntos sejam penetrantes é manifestamente necessário que a soma de quaisquer deles (um em particular) seja penetrante com a soma dos outros.

Se dois conjuntos não são penetrantes, o interior de cada um, quando existe, é exterior ao outro e reciprocamente.

Com efeito, quando dois conjuntos não são penetrantes nenhum elemento interior a um deles pertence ao lugar do outro; por conseguinte o interior de cada um é exterior ao outro. Reciprocamente, dadas estas condições os conjuntos não são penetrantes.

Logo, para que dois conjuntos ligados sejam contíguos é necessário e suficiente que o interior de cada um seja exterior ao outro.

Se dois conjuntos não são penetrantes, cada um pertence ao lugar do complementar do outro e reciprocamente.

Se dois conjuntos não são penetrantes, um elemento de qualquer deles não é interior ao outro, e por isso pertence ao lugar do complementar desse outro conjunto. Reciprocamente, se cada um dos conjuntos pertence ao lugar do complementar do outro, nenhum deles contém um elemento que seja interior ao outro, quer dizer, os dois conjuntos não são penetrantes.

Conjuntos penetrantes de ordem n projectam-se segundo conjuntos penetrantes [p. 487, l. 13].

Conjuntos contíguos projectam-se segundo conjuntos contíguos ou penetrantes.

Se um pelo menos de dois conjuntos dados é aberto, podemos dizer que estes são penetrantes quando um elemento dum dos conjuntos se juxtapõe a um elemento do outro.

Se um de dois conjuntos é dominial, para que sejam penetrantes é necessário e suficiente que o mesmo suceda quando substituirmos o conjunto dominial pelo respectivo interior.

Para que diversos conjuntos dominiais sejam penetrantes é necessário e suficiente que o mesmo aconteça aos respectivos interiores. Em particular, para que dois conjuntos dominiais sejam penetrantes é necessário e suficiente que os interiores conttenham um elemento comum.

Os conjuntos não penetrantes com um dado conjunto dominial são todos os subconjuntos do lugar do respectivo complementar.

Com efeito, os conjuntos não penetrantes com um dado conjunto dominial de interior **I** e de complementar **C** são os conjuntos não penetrantes com **I**, ou os subconjuntos do complementar de **I**, e é evidente que este complementar coincide com **C**.

Para que diversos conjuntos dominiais sejam penetrantes é necessário e suficiente que o mesmo aconteça aos respectivos lugares.

É evidente que, se dois conjuntos são penetrantes, o mesmo acontece aos respectivos lugares. A proposição recíproca é verdadeira quando se trata de conjuntos dominiais como vamos demonstrar.

Consideremos dois conjuntos dominiais **D** e **D'** cujos lugares sejam penetrantes. Um elemento **a** dum dos lugares, suponhamos de **[D]**, é centro dum esferóide constituído unicamente por elementos do outro. Mas, como **a** é limite de elementos interiores a **D**, existe um elemento interior a este conjunto que também é elemento de **[D']**. Logo **D** e **D'** são penetrantes.

A proposição imediatamente se estabelece para qualquer colecção de conjuntos dominiais, e dela se deduz o seguinte corolário:

Se diversos conjuntos dominiais são penetrantes, o mesmo acontece quando substituirmos todos ou parte deles por conjuntos dominiais juxtapostos aos primeiros.

Em particular: se diversos conjuntos dominiais são penetrantes o mesmo acontece aos interiores dos respectivos lugares e reciprocamente [p. 495, l. 7].

Para que duas somas de conjuntos dominiais sejam penetrantes é necessário e suficiente que duas parcelas, uma de cada soma, sejam penetrantes.

Designemos por S_1 e S_2 duas somas penetrantes de conjuntos dominiais. Certo elemento duma destas somas, suponhamos de S_1 , é interior à outra; por outras palavras, certo elemento duma parcela D_1 de S_1 é centro dum esferóide constituído unicamente por elementos juxtapostos a elementos de S_2 . Mas como D_1 é dominial, existe um elemento interior a D_1 contido no mesmo esferóide, que por isso se juxtapõe a um elemento de S_2 , isto é, a um elemento duma parcela D_2 desta soma. Os conjuntos D_1 e D_2 são pois penetrantes.

Reciprocamente, duas somas de conjuntos são penetrantes sempre que existem duas parcelas, uma de cada soma, que sejam penetrantes.

Para que diversos conjuntos dominiais sejam penetrantes é necessário e suficiente que a soma de quaisquer deles (um em particular) seja penetrante com a soma dos outros.

A condição é necessária [p. 513, l. 12]. Demonstramos que é suficiente, e para isso admitamos que os conjuntos dados não são penetrantes. Um deles, que designamos por D , não se pode então unir a qualquer dos outros por meio duma sucessão dum número finito dos mesmos conjuntos de modo que os pares de conjuntos consecutivos sejam penetrantes. Seja S_1 a soma dos que se podem unir a D nessas condições, incluindo D como parcela, e S_2 a soma dos restantes. É claro que duas parcelas quaisquer, uma de cada soma, não são penetrantes, razão porque S_1 e S_2 também não são penetrantes [prop. prec.]. Daqui se conclui que, se a soma de quaisquer conjuntos entre os dados (um em particular) é penetrante com a soma dos outros, os conjuntos dados são penetrantes.

Dada uma colecção de conjuntos abertos, se fôr possível unir dois quaisquer deles por uma sucessão dum número finito dos mesmos conjuntos de tal modo que a extrema da soma de dois conjuntos consecutivos nunca seja a soma das extremas destes, os conjuntos dados são penetrantes.

Começemos por considerar apenas dois conjuntos abertos A e A' . Se a extrema de $A + A'$ não coincide com a soma das

estremas dêstes conjuntos, um elemento da estrema de um deles, por exemplo de A , juxtapõe-se a um elemento de $A + A'$, e portanto a um elemento de A' . Logo os dois conjuntos são penetrantes.

A proposição enunciada torna-se agora evidente para uma colecção qualquer de conjuntos abertos.

Dada uma colecção de conjuntos abertos, se dois quaisquer deles não são penetrantes, a estrema da soma contém a soma das estremas dêsses conjuntos.

Com efeito, se dois quaisquer dos conjuntos abertos dados não são penetrantes, um qualquer deles, A , também não é penetrante com a soma S dos outros [p. 515, l. 1]. Logo a estrema de $A + S$ é a soma das estremas de A e de S , como resulta da proposição precedente no caso particular de só dois conjuntos. A estrema da soma dos conjuntos dados contém, pois, a estrema de qualquer dêsses conjuntos A .

Dada uma colecção dum número finito de conjuntos abertos, se dois quaisquer não são penetrantes, a estrema da soma coincide com a soma das estremas dos conjuntos dados.

Na verdade, tratando-se duma colecção dum número finito de conjuntos, a estrema da soma pertence à soma das estremas dos mesmos conjuntos.

Dada uma colecção de conjuntos abertos, se existir um contínuo limitado contido na soma dêsses conjuntos e no qual figurem elementos de cada um, os mesmos conjuntos são penetrantes.

Designemos por S_1 uma soma de conjuntos escolhidos entre os dados (um em particular) e por S_2 a soma dos restantes. Estas somas são conjuntos ligados porque os seus produtos pelo contínuo considerado, que representamos por K , determinam uma decomposição dêste em duas partes necessariamente ligadas. As mesmas somas são penetrantes, porque, se fôsem contíguas, existiria sobre K um elemento comum às suas estremas [p. 487, l. 1]. elemento êste que deveria pertencer a uma das somas, visto ser $K < S_1 + S_2$; logo um dos conjuntos S_1 ou S_2 não seria aberto.

Sendo S_1 e S_2 conjuntos penetrantes como acabámos de provar, o mesmo sucede aos conjuntos dados [p. 515, l. 16].

Dada uma colecção de conjuntos abertos, se existir um domínio elementar contido na soma desses conjuntos e no qual figurem elementos de cada um, os mesmos conjuntos são penetrantes.

A demonstração pode expor-se como a da proposição precedente; devemos apenas considerar um domínio elementar em vez do contínuo K e ter em vista a proposição da p. 501, l. 19.

No caso particular de a soma dos conjuntos abertos dados coincidir com o domínio elementar a que se refere o enunciado, temos a proposição:

Seja qual fôr o modo de divisão dum domínio aberto elementar em conjuntos abertos quaisquer, estes são necessariamente penetrantes.

Para que diversos domínios elementares com interiores distintos sejam penetrantes é necessário que dois quaisquer deles se unam por uma sucessão dum número finito dos mesmos domínios de tal maneira que a extrema da soma de dois domínios consecutivos quaisquer não seja a soma das suas extremas.

Basta evidentemente considerar o caso particular de só dois domínios elementares E e E' . Sendo distintos os interiores I e I' destes domínios, existe um elemento dum deles, suponhamos de I , que é estranho ao outro, e, como I e I' contêm um elemento comum, pois estamos a supor que E e E' são penetrantes [p. 514, l. 9], sobre I também existe um elemento da extrema de I' [p. 501, l. 31]. Mas os conjuntos E' e I' admitem a mesma extrema [p. 495, l. 8]; logo um elemento da extrema de E' é interior a E . Este elemento não pertence pois à extrema da soma $E + E'$.

São corolários evidentes as duas proposições seguintes:

Para que a extrema da soma de vários domínios elementares com interiores distintos contenha a soma das extremas dos mesmos domínios é necessário que dois quaisquer deles não sejam penetrantes.

Para que diversos domínios elementares abertos com interiores distintos sejam penetrantes é necessário e suficiente que dois quaisquer deles se unam por uma sucessão dum número finito dos mesmos domínios de tal maneira que a extrema da soma de dois

domínios quaisquer consecutivos não seja a soma das suas extremas [p. 515, l. 32].

Para que a extrema da soma de vários domínios elementares abertos com interiores distintos contenha a soma das extremas dos mesmos domínios, é necessário e suficiente que dois quaisquer deles não sejam penetrantes [p. 516, l. 7].

Para que uma soma de vários domínios elementares da primeira variedade seja também elementar é suficiente que esses domínios sejam penetrantes. A soma dos domínios dados será então da primeira variedade se a respectiva extrema pertencer à soma das extremas dos mesmos domínios.

Começemos por substituir cada grupo de domínios dados que admitam o mesmo interior, caso existam, pela respectiva soma. Tais somas ainda são domínios elementares da primeira variedade, porque, em virtude da própria definição de conjunto dominial, as parcelas de cada uma juxtapõem-se entre si [p. 505, l. 26]. Os novos domínios também são penetrantes, como é evidente, razão porque dois quaisquer deles se podem unir por uma sucessão dum número finito dos mesmos de maneira que a extrema da soma de dois domínios consecutivos quaisquer não coincida com a soma das suas extremas [p. 517, l. 13]. Logo a soma S dos domínios dados é elementar [p. 507, l. 7], e, se a respectiva extrema pertence à soma das extremas dos mesmos domínios, ainda S é da primeira variedade.

Para que uma soma de domínios abertos elementares seja também elementar é necessário e suficiente que esses domínios sejam penetrantes.

A condição é necessária [p. 517, l. 10]. A mesma condição é manifestamente suficiente no caso particular de se tratar duma soma de dois domínios abertos elementares, e portanto duma soma dum número finito destes domínios. No caso duma infinidade de parcelas, tomemos dois elementos a e a' da soma, e sejam E e E' duas das parcelas a que pertençam estes elementos respectivamente. Como se trata de conjuntos penetrantes, E e E' unem-se por uma sucessão dum número finito de domínios dados que sejam penetrantes. A soma destes últimos domínios é elementar, sendo por isso possível considerar um contínuo