Nas equações

$$x^3-(3y-6)\,x^2+(3y^2-12y+8)\,x-y^3+6y^2-8y=0\,,$$

$$x^2+(2y+2)\,x+y^2+2y=0\,,$$

obtem-se pela 1.ª divisão o resto $3xy(y-1)+y^3+3y^2-4y$, que tem os factores y e $y-1$, e por isso faremos primeiro $y=0$, e $y=1$; d'onde resultam os valores $x=0$ e $x=-2$ correspondentes a $y=0$; e $x=-1$ e $x=-3$ correspondentes a $y=1$. Supprimidos os factores, o resto que passa a divisor, torna-se em $3x+y+4$; e feito o cálculo acha-se a equação final $y^2-y-2=0$, que dá os valores $y=2$ e $y=1$ correspondentes a $x=-2$ e $x=-1$. Por onde se vê que o problema dá seis soluções.

4.° Finalmente, se existir um factor commum D entre Z e T, $Z=P\times D$, $T=Q\times D$, como $D=0$ torna estes productos nullos, esta equação dará uma das incognitas, tomando a outra arbitrariamente. Por conseguinte *neste caso o problema é indeterminado, admittindo uma infinidade de soluções.*

As soluções das equações $P=0$ e $Q=0$, que são em numero limitado, satisfazem tambem á questão.

Assim nas equações

$$(y-4)\,x^2-y+4=0\,,\ x^3-x^2-xy+y=0\,,$$

que tem o factor commum $x-1$, o valor $x=1$ reduz a proposta a zero, qualquer que seja y. De mais os quocientes da divisão por $x-1$

são $$(y-4)(x+1)=0\,,\ x^2-y=0\,,$$

as quaes, além das infinitas soluções, que acabâmos de obter, dão ainda $y=1$ e $y=4$ correspondentes a $x=-1$, $x=\pm 2$.

54. Para desembaraçar $Y=0$ das raizes extranhas bastará dividir Y pelos factores M, M′, M″, ..., por isso que ellas tornam nullos alguns d'estes factores, que sómente encerram y. (*) Consulte-se, para

(*) Ha uma excepção accidental, quando $y=\lambda$ raiz da equação $M=0$ reduz T a um valor numerico, por quanto nenhum valor de x póde tornar nulmaior desenvolvimento, uma memoria de M. Cirodde sôbre a *theoria da eliminação* entre duas equações de um gráo qualquer entre duas incognitas.

55. Quando da combinação das equações $Z=0$, $T=0$, se puder obter um resultado mais simples, deve empregar-se este com preferencia a $Z=0$.

Sommando as equações do 1.° ex.° de pag. 89, e resolvendo-as em ordem a y, que na somma chega apenas ao 1.° gráo, obtem-se as soluções immediatamente.

Tambem póde algumas vezes tornar-se mais commodo o processo de eliminação ordenando Z e T relativamente a y.

Quando Z e T são do mesmo gráo m, eliminando x^m, como se fosse uma simples incognita abaixa-se uma das equações ao gráo $m-1$.

56. Sôbre a regra dada a pag. 86 cumpre fazer as seguintes advertencias, relativas aos casos em que Y e D se reduzem a zero, ou tem um valor numerico.

1.ª *Quando o resto* Y *se reduz a zero.* Então D é factor commum de Z e T, caso que já examinámos no n.° 53, 4.° *O problema é indeterminado.*

2.ª *Quando* Y *é um numero.* Neste caso V e D não podem tornar-se nullos ao mesmo tempo (eq. 2); logo nenhum dos valores de x e y póde satisfazer ás propostas, que exprimem então condições contradictorias e por isso *o prablema é absurdo.* É o que se verifica nas equações

$$3x^2-6xy+3y^2-1=0\,,\ 2x^2-4xy+2y^2+1=0.$$

Se em duas equações, cuja coexistencia é impossivel, e em que entra uma só incognita, taes como

$$3z^2-1=0\,,\ 2z^2+1=0\,,$$

fizermos $z=x+y$, ou $z=y$, ou z egual a quaesquer outras funcções de

---

los ao mesmo tempo M e T; logo nem $y-\lambda$, nem por conseguinte M, póde dividir Y; o factor M não introduziu a raiz estranha $y=\lambda$. O mesmo diremos de M' relativamente a R, de M'' a R' etc. Este caso é facil de reconhecer, quando por acaso se achar, que Y não é divisivel por M, ou M', etc.

x e y, é evidente que as equações resultantes serão tambem incompativeis.

3.ª *Quando o divisor* D *se torna nullo para uma raiz* $y=\lambda$ *da equação* $Y=0$. Então $y-\lambda$ é factor de D; e já se viu que é necessario supprimir este factor, e tractal-o separadamente (pag. 92.).

Se no último ex.º do n.º 53, 3.º deixassemos de supprimir os factores y e $y-1$ do 1.º resto, chegar-se-hia á equação final

$$y^6-3y^5+y^4+3y^3-2y^2=0,$$

cujas raizes são $y=0$, $y=1$, $y=1$, $y=-1$, $y=2$. As tres primeiras dariam logar á circunstancia de que estâmos tractando.

4.ª *Quando o último divisor* D *se torna em um numero* δ, *para* $y=\lambda$. Dividindo D por $y-\lambda$, e sendo K o quociente e L o resto, temos

$$D=(y-\lambda)K+L.$$

Como $y=\lambda$ dá um valor numerico δ a D, x não entra em L; e por que deve ser ao mesmo tempo $D=0$, $Y=0$, o valor $y=\lambda$ corresponde a x infinito, unica maneira de tornar D nullo.

Assim as equações

$$y^3x^3+xy^3(y-1)-1=0,\ y^2x^2+y^3-y^2-1=0,$$

tem por valor final $y^2(y-1)=0$, e por último divisor $xy-1=0$; vindo $y=1$ a corresponder a $x=1$, e $y=0$ a $x=\infty$.

57. Se tivessemos tres equações entre as tres incognitas x, y e z, para se obter *a equação final* em x, isto é, a equação que admitisse todos os valores da incognita x, susceptiveis de satisfazerem ás tres equações propostas conjunctamente com certos valores de y e z: deveriamos, considerando uma d'ellas, x por exemplo, como conhecida, eliminar primeiro y entre as tres equações duas a duas, pelo methodo precedente; o que nos levaria a duas equações entre x e z, ás quaes se applicaria o mesmo methodo para eliminar z.

O mesmo raciocinio empregaremos para 4 equações a 4 incognitas, etc. Sendo por ex.° as tres equações

$$x^4 + z^2 - 2y = 0\,,\ x^2 + y^2 = 2\,,\ z^2x = 1.$$

Eliminando y entre estas equações duas a duas, vem por a fim a equação

$$z^4 + 2xz^2 + 5x^2 = 8\,,\ z^2x = 1.$$

Eliminando depois z d'estas equações, vem a equação final em x

$$5x^4 - 6x^2 + 1 = 0,$$

que dá $x = \pm 1$, e $x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$. Com estas quatro raizes de x, obteremos as de z por meio da equação $z^2x = 1$; e depois as de y por qualquer das 1.as duas propostas.

Sôbre a existencia das Raizes.

58. Consideremos a funcção

$$fx = px^n + qx^{n-1} + \ldots\ldots + u,$$

na qual é p um coefficiente positivo. Construindo (fig. 1), sôbre os eixos rectangulares Ax, Ay, a curva MM′M″.... cuja equação é $y = fx$; a cada uma das abscissas corresponderá uma unica coordenada, e por conseguinte: *qualquer parallela ao eixo* Ay *corta a curva n'um ponto unico; a curva é um traço continuo, que se extende ao infinito, tanto para a direita como para a esquerda, sem nós, nem ramos duplos, podendo ter differentes inflexões.* Dá-se-lhe o nome de curva parabolica, pela analogia que tem com a parabola, cuja equação é $y = ax^2$.

Quando a curva corta o eixo dos x em algum ponto k, a abscissa Ak d'este ponto corresponde a $y = 0$, e é por conseguinte raiz da equação $fx = 0$. As raizes positivas dão as abscissas dos pontos de secção collocados á direita da origem A; as negativas dão as que ficam á esquerda. Uma ordenada positiva PM marca um ponto M da curva situado para a parte de cima do eixo Ax; uma negativa P'M' marca um ponto M' para a parte debaixo.

Para que a uma abscissa Ak raiz da equação $fx=0$, se succeda outra Ak', é necessario que o arco, inflectindo-se, se approxime do eixo Ax, o que produz as ondulações que se notam na fig. 1; ás inflexões que não chegam ao eixo, não podem ser produzidas pelas raizes reaes.

Como a fórma da curva determina as raizes, e como nos diversos pontos a direcção do arco é a mesma da tangente, busquemos as inclinações das tangentes sôbre o eixo dos x.

Sejam BMM' (fig. 2) um arco da curva, cuja equação é $y=fx$; M e M' dous pontos d'este arco; x e y as coordenadas de M; $x+h$, $y+k$ as de M'; A$p=x$, PM$=y$, PP'$=h$, QM'$=k$.

Substituindo em $y=fx$, x por $x+h$, teremos (n.° 31)

$$y+k=fx+hf'x+\tfrac{1}{2}h^2f''x+\tfrac{1}{6}h^3f'''x+\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

d'onde

$$\frac{k}{h}=f'x+\tfrac{1}{2}hf''x+\tfrac{1}{6}h^2f'''+\dots\dots \quad (2)$$

Ora, se resolvermos o triangulo rectangulo QMM', e designarmos por S o angulo que a secante M'MS faz com o eixo Ax, teremos

$$\text{tang S}=\frac{\text{QM}'}{\text{QM}}=\frac{k}{h};$$

logo a expressão (2) é o valor de tang S. Porém quanto mais h diminue, mais se approxima esta expressão de $f'x$, e ao mesmo tempo tende S a tornar-se no angulo T, que a tangente tirada pelo ponto M faz com Ax.

Será pois, no limite,

$$\text{tang T}=f'x=\textit{derivada do polynomio } fx.$$

Por tanto, se fizermos passar x por todos os gráos de grandeza comprehendidos entre AP e AP' (fig. 1), os differentes valores de $f'x$ exprimirão os das tangentes de todos os angulos T, que formam com os eixos dos x as tangentes successivas do arco MM'. Estes angulos são agudos (do lado direito) quando $f'x$ tem o signal + (como no arco BM, fig. 2.); e obtusos quando $f'x$ tem o signal — (como em OM fig. 1). A tangente é parallela ao eixo dos x em O, o', O', O'', quando é $f'x=0$. As inflexões da curva resultam das variações do signal que experimenta $f'x$.

Como pela natureza de fx nenhum valor de x póde tornar este polynomio infinito, em nenhum ponto póde a tangente ser perpendicular ao eixo dos x; nem por conseguinte póde ter logar na curva uma *reversão* como na fig. 3.

59. Como o triangulo rectangulo HMQ (fig. 2.) dá $HQ=hf'x$, será a ordenada do ponto H da tangente, que tem $x+h$ por abscissa,

$$P'H=fx+hf'x.$$

Substituindo este valor na expressão (1), que dá a ordenada do ponto M da curva, vem

$$P'M'=y+k=P'H+\tfrac{1}{2}h^2f''x+\tfrac{1}{6}h^3f'''x+\text{etc.};$$

e como h póde tornar-se tão pequeno como se quizer, o signal da quantidade, que no último membro tem de ajunctar-se a P'H, vem a depender do signal de $\frac{1}{2}h^2f''x$, ou antes do signal de $f''x$, por ser h^2 essencialmente positivo.

Por conseguinte, nos pontos vizinhos de M, será a ordenada P'M' da curva maior ou menor que a ordenada P'H da tangente, conforme $f''x$ for positiva ou negativa; e isto tanto para a direita como para a esquerda do ponto M, por isso que o signal de h nada influe.

Logo: *a curva, nos pontos vizinhos de um logar determinado por um valor dado a* x, *terá voltada para cima a sua concavidade ou a sua convexidade, isto é, terá as ordenadas dos mesmos pontos, para uma e outra parte, maiores ou menores que as ordenadas correspondentes da tangente, naquelle logar, conforme* f''x *tiver o signal + ou —.*

Tudo quanto acaba de dizer-se convém igualmente ao caso em que o arco fica situado para a parte debaixo do eixo dos x, o que se demonstra por um raciocinio identico. E de mais, se mudarmos y em $y_{\prime}-i$, a equação $y=fx$ tornar-se-ha em $y_{\prime}=fx+i$, a qual só terá differença da primeira no último termo que, em vez de u, será $u+i$, conservando por isso os mesmos valores para as derivadas $f'x$, $f''x$, ...: ora, como esta transformação equival a fazer descer o eixo dos x parallelamente a si mesmo a uma distancia arbitrária i, podemos sempre suppor, que por este modo todas as ondulações da curva passaram para cima do novo eixo dos x; e então applica-se a todas o theorema enunciado.

Querendo comparar o arco da curva com eixo dos x, é facil de ver, que o theorema precedente se reduz ao seguinte:

O arco volta a sua concavidade para o eixo quando fx *e* $f''x$ *são de signaes contrarios, e a sua convexidade quando os signaes são os mesmos.*

60. O ponto I (fig. 5.) em que um arco convexo se une com um arco concavo chama-se *ponto de inflexão.* A abscissa x d'este ponto devendo ficar na passagem de $f''x$ de positiva para negativa, deve ser raiz de $f''x=0$. Com effeito, no ponto I de inflexão, a tangente fica entre os dous arcos que ella corta e toca n'este ponto I; suppondo pois $f''x=0$, ou nullo o 3.° termo de (1), vem

$$y+k=fx+hf'x+\tfrac{1}{6}h^3f'''x+\tfrac{1}{24}h^4f^{\mathrm{IV}}x+\ldots$$

$$=\mathrm{P'H}+\tfrac{1}{6}h^3f'''x+\tfrac{1}{24}h^4f^{\mathrm{IV}}x+\ldots;$$

e como h se póde tornar tam pequeno como se quizer, o signal da quantidade que tem de ajunctar-se a P'H, é o do seu 1.° termo $\frac{1}{6}h^3f'''x$, o qual muda com o de h. Por tanto, segundo se tomar o ponto vizinho de M para a direita ou para a esquerda, assim a ordenada da tangente será maior ou menor que a da curva, ficando por este modo o arco situado para a parte de cima da tangente do lado do ponto M de contacto, e para baixo do outro lado: caracter proprio da inflexão, que não teria logar, se não fosse $f''x=0$.

Logo para obter as abscissas dos pontos de inflexão, bastará resolver a equação $f''x=0$, cujas raizes determinam estes pontos que são os de separação das inflexões. Os valores de $f'x$ correspondentes a estas raizes, determinarão as inclinações das tangentes n'estes pontos.

61. Em cada ondulação da curva ha um ponto O, O', ... fig. (1) em que a tangente fica parallela ao eixo dos x, e em que a ordenada é *maxima* ou *minima*, isto é, maior ou menor do que as que lhe ficam

y/

vizinhas de ambos os lados. As raizes das equações $f'x=0$ são as abscissas d'estes pontos.

Para distinguir o *maximo do minimo* advertiremos, que devendo a ordenada maxima, positiva ou negativa, pertencer a um arco concavo para o eixo dos x, nesse caso serão differentes os signaes de fx e $f''x$; e serão, pelo contrario, estes signaes os mesmos no caso do minimo, em que a ordenada corresponde a um arco convexo.

E com effeito, sendo $f'x=0$, fica a serie (1) privada do seu 2.º termo, e a ordenada PM′ (fig. 2) da curva se reduz a

$$\mathrm{PM}'=fx+\tfrac{1}{2}h^2f''x+\text{etc.}=\text{á ordenada PM}+\tfrac{1}{2}h^2f''x+\text{etc.}\ldots \quad (3)$$

Porém se h é muito pequeno, esta serie toma o signal de $f''x$, quer h seja positivo quer negativo: assim quando fx e $f''x$ tem o mesmo signal, as ordenadas, á direita e á esquerda de PM, são maiores que esta ordenada, e succede o contrario quando os signaes são differentes.

Logo: *tanto no caso do maximo positivo, como do negativo, são* fx *e* f″x *de signaes contrarios; no caso do minimo, os signaes são os mesmos.*

Appliquemos esta theoria á equação

$$y=fx=x^4-\tfrac{16}{3}x^3+\tfrac{19}{2}x^2-6x+\tfrac{5}{6};$$

da qual se deduz

$$f'x=4x^3-16x^2+19x-6,\ f''x=12x^2-32x+19.$$

Fazendo $f'x=0$, resulta $x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$, $x=2$; e applicando estas raizes sôbre o eixo Ax (fig. 4) de A para P, P′, e P″, obteremos as coordenadas, correspondentes aos maximos e minimos,

$$\mathrm{PO}=-\tfrac{13}{48},\ \mathrm{P'O'}=+\tfrac{13}{48},\ \mathrm{P''O''}=+\tfrac{1}{6}.$$

Como $x=0$ dá $\mathrm{AB}=\frac{5}{6}$, a curva passa em BOO′O″...... Resolvendo a equação $f''x=0$, obtem-se para abscissas dos pontos I e I′ de inflexão, AQ = 0,89, AQ′ = 1,77. E como os valores de x menores que 0,89 dão $f''x$ positiva, será $f''x$ negativa para todos os pontos da curva desde I até I'; positiva para todos os outros. Haverá pois um maximo negativo em O, e um positivo em O', por isso que, para esses pontos, fx e $f''x$ tem signaes contrarios; e um minimo positivo em O'', para o qual estas expressões tem os mesmos signaes.

As duas raizes reaes, da equação $fx=0$, AD$=1$ e AC, determinam os dois pontos C e D de secção com o eixo; as outras duas são imaginarias.

62. As raizes da equação $f'x=0$ são as abscissas dos pontos da curva em que a tangente é horizontal, e acabámos de ver que esses pontos tem a sua ordenada maxima ou minima conforme os signaes de fx e $f''x$. Mas se, além disto, alguma d'estas raizes tornar $f''x=0$, não haverá então maximo nem minimo, porém uma inflexão horizontal como na fig. 5. Com effeito, sendo nesse caso a parte do desenvolvimento, que tem de ajunctar-se á ordenada PM, $\frac{1}{6}h^3f'''x+\ldots.$, e mudando o 1.° termo de signal com o de h, o arco é concavo de um lado do ponto M de contacto, e convexo do outro. E por que este valor de x dá ao mesmo tempo $f'x=0$, $f''x=0$, a 1.ª d'estas equações tem duas raizes eguaes; e assim corresponde este caso á circunstancia de se fundirem duas ondulações successivas n'uma só, em consequencia do desvanecimento do arco que liga um maximo ao seguinte, e pela coincidencia de um com outro, bem como das suas tangentes.

Tambem poderia acontecer que $f'''x$ fosse nulla; então a parte additiva a PM na expressão (3) sería $\frac{1}{12}h^4fx^{\text{IV}}+\ldots.$, a qual, conservando o mesmo signal de ambos os lados do contacto, daria um maximo ou minimo, conforme o signal — ou + de $f^{\text{IV}}x$. N'este caso tres ondulações da curva se fundiriam n'uma só.

Em geral para ter um maximo ou um minimo, correspondentes á tangente horizontal, é necessario, que a 1.ª derivada, que se não torna nulla com a raiz de $f'x=0$, seja de ordem par; e pelo signal d'esta derivada se distingue o maximo do minimo. E para que a raiz de $f''x=0$ indique uma inflexão, é necessario que a 1.ª derivada de $f''x$, que se não torna nulla com a mesma raiz, seja de ordem impar.

Da natureza da curva parabolica segue-se: que uma convexidade deve succeder a uma concavidade, e reciprocamente; um maximo positivo a um maximo negativo, quando o arco corta o eixo dos x, ou a um minimo positivo, quando o não corta; um minimo negativo, ou um maximo positivo, a um maximo negativo. Isto porém não tem logar, quando a curva tiver uma tangente horizontal ao ponto mesmo de infle-

f'''

$f^{\text{IV}}x$

xão (fig. 5), o que acontece quando forem conjunctamente $f'x=0$ e $f''x=0$, por que então este *ponto singular* partecipa ao mesmo tempo da propriedade de maximo e de minimo. E se além disto for tambem $f'''x=0$, concluir-se-ha que o ponto equival a tres fundidos n'um só. E assim por diante.

Se a tangente é obliqua ao eixo dos x, $f'x$ não é nulla; e se então for $f''x=0$ haverá, como já vimos, uma inflexão: porém esta inflexão desapparece quando a mesma raiz d'esta equação torna $f'''x=0$, o que indica que duas onduleções se fundiram n'uma só. E se $f^{\text{IV}}x=0$, torna a apparecer a inflexão, etc. N'uma palavra todas as circumstancias enunciadas no caso da tangente horizontal, podem ainda realisar-se, quando é obliqua, pelo desvanecimento de algumas ondulações.

63. Do que temos exposto segue-se, que se duas abscissas AP, AP' (fig. 1) derem para fx dous resultados de signaes contrarios PM, P'M', como os pontos M e M' estão um para cima, e outro para baixo do eixo $x'x$, e o arco deve caminhar d'um d'estes pontos para o outro por um traço continuo, é forçoso que a curva corte o eixo em um ponto k intermedio. E póde tambem acontecer, que n'este intervallo PP' tenha a curva ondulações, e forme 3, 5, 7...... intersecções com eixo, como se vê no arco pontoado das fig. 8 e 9, no qual a curva passa de m para M, cortando o eixo um numero impar de vezes.

Quando duas abscissas AP, AP'' (fig. 1.) dão para fx resultados do mesmo signal PM, P''M'', indicam que os dous pontos M e M'' da curva estão situados da mesma parte do eixo $x'x$, e que, por conseguinte, o arco que une estes dous pontos não corta o eixo; excepto se o arco for ondulado, por que então póde cortal-o tambem em 2, 4, 6, ... pontos, como no arco pontoado de m para M (fig. 6 e 7).

Não se deve considerar como excepção do numero par ou impar de intersecções da curva com eixo $x'x$, o caso em que ella só tocasse este eixo (fig. 10.); por que então o valor $x=a$ da abscissa do ponto k de contacto, tornaria conjunctamente $fx=0$ e $f'x=0$, e por conseguinte $fx=0$ teria uma raiz a dupla, e o factor $(x-a)^2$; de sórte que viriam a ser dous pontos de secção do arco MkM' que se achariam reunidos n'um só, devendo este ponto de contacto k contar-se por duas intersecções. E se $x=a$ tornasse além disso $f''x=0$, o ponto unico de secção e de contacto corresponderia a uma raiz tripla de $fx=0$, a uma inflexão de MkM', e se contaria por tres em consequencia do factor $(x-a)^3$. Em geral, se fx tivesse o factor $(x-a)^m$, o ponto correspondente á raiz $x=a$ deveria contar-se por m pontos de secção, por que todas as derivadas até $f^{m-1}x$ seriam nullas, e a curva teria realmente m intersecções reunidas n'uma só.

Logo: *Se dous valores substituidos por* x *em* fx *derem resultados de signaes contrários, a equação* $fx = 0$ *terá, entre estes valores, raizes em numero impar, e pelo menos sempre uma raiz intermedia: se os resultados tiverem o mesmo signal, positivo ou negativo, os valores substituidos não comprehenderão nenhuma raiz, ou comprehenderão um numero d'ellas par.*

64. Posto isto, examinemos os dous casos do grão par e impar.

I. *Quando a equação* fx *for do grão par* n, se tomarmos por x o limite AP (fig. 6 e 7) das raizes positivas, sendo então o 1.º termo kx^n, do polynomio fx, positivo e maior que a somma dos termos negativos, fx, ou a ordenada PM, será positiva. As derivadas $f'x$ e $f''x$ tambem serão evidentemente positivas; e por conseguinte a tangente aos pontos da curva desde M até ao infinito fará um angulo agudo MTP com o eixo Ax, e será concava para cima, desviando-se cada vez mais d'este eixo. Se tomarmos porém por x o limite Ap das raizes negativas, tambem n'este caso fx e $f''x$ serão positivas, por que os expoentes n e $n - 2$ do 1.º termo d'estes polynomios são pares; logo a curva tambem será concava até ao infinito, desviando-se continuamente para a parte de cima do eixo Ax. Porém $f'x$ será negativa, por que $n - 1$ é impar; e a tangente, aos pontos da curva desde m até ao infinito, fará por isso um angulo obtuso MtP com Ax.

Ora, *se o ultimo termo de* fx *for negativo*, $-u$, fazendo $x = 0$, y tornar-se-ha em $-u$, quantidade que se construirá applicando o comprimento $AB = -u$ (fig. 6.) para a parte debaixo da origem A. Assim a curva passará pelos tres pontos m, B e M, e cortará o eixo ao menos uma vez em k' á esquerda, e uma vez em k á direita; ou poderá, cortar tambem o eixo em 3, 5, 7...... pontos de cada lado, como se representa na linha pontoada.

Logo: *toda a equação de grão par, cujo ultimo termo for negativo, terá um numero impar de raizes positivas e outro numero impar d'ellas negativas, sendo pelo menos uma raiz positiva e outra negativa.*

Se porém *o ultimo termo de* fx *for positivo*, $+u$, fazendo $x = 0$, y tornar-se-ha em $+u$, quantidade que se construirá applicando $AB = u$ (fig. 7.) para a parte de cima da origem A. A curva passará pelos tres pontos m, B e M, situados para a parte de cima do eixo $x'x$, podendo ter logar ou ondulações que não cheguem a encontrar eixo, ou intersecções, as quaes serão sempre em numero par, tanto pera a direita como para a esquerda, como se vê na linha pontoada.

Logo: *toda a equação de grão par, cujo ultimo termo for positivo, ou não terá raiz alguma real, ou as terá em numero par, tanto positivas, como negativas.*

II. *Quando* fx *for do grão impar* n, ainda tem logar o que se disse a respeito da fórma da curva do lado dos x positivos; desde o ponto M (fig. 8 e 9) ella continuará a ser concava, desviando-se sempre do eixo Ax até ao infinito, e fazendo as tangentes angulos agudos com o mesmo eixo. Mas se tomarmos por x o limite Ap das raizes negativas, como o expoente n do 1.° termo de fx, e o expoente $n-2$ do 1.° termo de $f''x$, são impares, estes primeiros termos serão negativos, resultando por isso uma ordenada negativa pm, e um arco convexo para a parte de cima. Além disto no ponto m situado para baixo, a tangente fará um angulo agudo com os x, por que o expoente $n-1$ do 1.° termo de $f'x$ é par.

Se o último termo de fx for negativo, $-u$, $x=0$ dá $y=-u$, que se construe applicando $AB=-u$ (fig. 8) para a parte debaixo da origem A; a curva caminhará pois de m para B, depois para M. Donde se vê que póde não cortar o eixo $x'x$ no espaço Ax', e que ao menos o cortará uma vez entre A e P. As intersecções que resultarem das ondulações serão em numero par de x' para A, e impar de A para P.

Logo: *toda a equação de grão impar, cujo último termo for negativo terá sempre um numero impar de raizes positivas (uma pelo menos); e ou não terá raizes negativas, ou as terá em numero par.*

Se porém o último termo de fx for positivo, $+u$, deverá tomar-se $AB=u$ (fig. 9) para cima da origem; a curva caminhará pois de m para B e para M; cortará o eixo entre A e p em um numero impar de pontos; poderá não encontrar este eixo desde A até P, e se o encontrar, será em um numero par de pontos.

Logo: *toda a equação de grão impar cujo ultimo termo for positivo, terá um numero impar de raizes negativas (uma pelo menos); e ou não terá raizes positivas, ou as terá em numero par.*

O caso de ser a curva tangente ao eixo dos x não faz excepção, por que já se viu que então a equação $fx=0$ tem raizes eguaes, e que se devem contar estas raizes como correspondentes a um egual numero de pontos communs á curva e ao eixo.

Se dividirmos por x^i a equação

$$kx^n+\ldots qx^i-rx^{i-1}-sx^{i-2}-\ldots-u=0,$$

obteremos

$$kx^{n-i}+\ldots+q=\frac{r}{x}+\frac{s}{x^2}+\ldots+\frac{u}{x^i}.$$

Ora, sendo negativo o último termo da proposta, esta terá uma raiz positiva $x = \alpha$, que tornará eguaes os dous membros da última equação. Se dermos a x um valor maior ou menor que α, a egualdade dos dous membros tornar-se-ha impossivel, por que um d'elles augmentará, diminuindo o outro.

Logo: *Quando uma equação, depois de ordenada, constar de termos positivos, seguidos d'outros termos todos negativos, não terá mais do que uma raiz positiva, e as outras raizes serão negativas ou imaginarias.*

65. Vimos no n.° precedente, que sendo par o gráo de uma equação, deve ella ter as suas raizes reaes em numero par, ou não ter nenhuma; e que sendo o gráo impar, as raizes reaes devem ser em numero impar. Por conseguinte, *as raizes imaginarias de uma equação são sempre em numero par; e uma equação que não tem raiz real, é necessariamente do gráo par, e tem o último termo positivo.*

Se todas as raizes da equação $f'x = 0$ forem reaes, a curva terá $n-1$ tangentes horizontaes e $n-1$ ondulações. Se cada um d'estes arcos cortar o eixo dos x, as n raizes da equação $fx = 0$ tambem serão reaes; e como então não ha senão maximos alternadamente positivos e negativos, todas as raizes de $f'x = 0$ darão signaes differentes a fx e $f''x$, e o producto d'estas funcções será negativo.

Porém as raizes reaes de $fx = 0$ serão substituidas por outras imaginarias aos pares, quando não houver estas ondulações duplas, i. é, quando os maximos forem substituidos por minimos, e a ondulação não chegar a tocar o eixo.

E quando a equação $f'x = 0$ tiver raizes imaginarias, que sempre serão em numero par, a curva cuja equação é $y = fx$ perderá outras tantas ondulações, e $fx = 0$ outros tantos pares de raizes reaes.

Logo, em geral: *a equação* $fx = 0$ *terá tantas raizes imaginarias quantas* $f'x = 0$, *ou um numero ainda maior, isto é, tantas quantas tiver* $f'x = 0$, *e além d'estas quantas forem as raizes reaes d'esta ultima equação, que tornem* fx *e* $f''x$ *do mesmo signal*; por que havendo minimo n'estes casos, faltarão aos pares as intersecções da curva com o eixo dos x.

Se a equação $fx = 0$ tiver todas as suas raizes reaes, as equações $f'x = 0$, $f''x = 0$, tambem as terão da mesma especie; a reciproca d'esta proposição não é verdadeira.

66. Da analyse de uma equação $fx = 0$, facilmente, se podem deduzir as formas que tomará a curva cuja equação é $y = fx$:

1.° Se a equação do 3.° gráo é da forma $y = kx^3 + px^2 + qx + r$, os ramos da curva que ella representa, extendem-se indefinidamente, e tomam a disposição indicada nas fig. 8 e 9.

Se as raizes da equação $f'x=0$, que n'este caso é do 2.° gráo, são reaes, a curva tem duas tangentes horizontaes e duas ondulações. Se o eixo xx' (fig. 11) cortar estas duas ondulações, a equação $fx=0$ terá as suas tres raizes reaes; porém se este eixo, como AA' ou BB' por ex.°, as não cortar, a equação só terá real uma raiz, a qual será positiva ou negativa conforme o último termo r tiver o signal — ou +. Entre estes dous casos comprehende-se o de ser o eixo xx' tangente a uma das ondulações, e então $fx=0$, $f'x=0$ terão uma raiz commum α, e $(x-\alpha)^2$ será factor de fx. Se for $fx=(x-\alpha)^3$ as duas ondulações se fundirão em uma só, a curva terá a fórma MkM'' da fig. 10, e será tangente ao eixo no ponto de inflexão k.

Se porém a equação $f'x=0$ tiver ambas as raizes imaginarias, a curva não terá ondulações e tomará a fórma da fig. 12. A equação proposta só terá real uma raiz, de signal contrario ao do último termo r.

2.° Se a equação for do 4.° gráo $y=kx^4+\ldots\ldots\ldots$, a derivada $f'x=0$ será do 3.°; e se as suas tres raizes forem reaes, a curva terá tres ondulações (fig. 13.). O eixo dos x póde cortal-as todas, e então a equação $fx=0$ terá reaes todas as suas 4 raizes; ou cortar só uma, como AO', e terá só duas reaes; ou finalmente não cortar nenhuma, como BB', e não terá nenhuma real. A curva terá dous pontos de inflexão dados pelas raizes reaes da equação $f''x=0$.

Se a equação $f'x=0$ tiver só real uma raiz, e a equação $f''x=0$ as não tiver d'esta especie, a curva não terá inflexão, e sómente terá uma ondulação (fig. 6), a qual ou cortará o eixo só em dous pontos, ou não o encontrará, e assim terá duas raizes reaes, ou quatro imaginárias.

3.° Se a equação for do 5.° gráo, a curva tomará a fórma da fig. 14, se $f'x=0$ tiver as 4 raizes reaes; a da fig. 11, se tiver sómente duas; ou finalmente a da fig. 12, se todas as 4 raizes forem imaginarias.

Finalmente, proseguindo n'esta analyse a respeito das equações de gráos mais elevados, convencer-nos-hemos, sem nos servirmos do theorema do n.° 28, que toda a equação tem pelo menos uma raiz real, excepto o caso de ser de gráo par e ter o último termo positivo. Mais adiante provaremos, que, ainda mesmo n'este caso, existe *um symbolo algebrico*, *uma funcção dos coefficientes*, que substituido por x deve reduzir fx a zero; e por este modo ficaremos certos de que toda a equação tem uma raiz real ou imaginaria, e por conseguinte, pelo n.° 28, que sendo do gráo n terá precisamente n raizes.

67. Sejam $a, b, \ldots\ldots -a', -b', \ldots\ldots$ as raizes reaes de uma equação $fx=T(x-a)(x-b)\ldots\ldots(x+a')(x+b')\ldots\ldots=0$, na

qual suppomos, que $T=0$ não tem raizes reaes, e que por conseguinte o polynomio T é de gráo par, e tem o seu último termo positivo. Como o último termo de $fx=0$ é o producto do de T por $-a, -b, \ldots +a', +b', \ldots$, o seu signal depende de ser par ou impar o numero dos factores negativos. Logo o último termo de uma equação é positivo ou negativo, conforme fôr par ou impar o numero das raizes positivas, seja qualquer que for, por outra parte, o numero das negativas e das imaginarias.

68. Supponhamos, que tendo resolvido a equação $f'x=0$, chegámos a distinguir os maximos dos minimos na curva representada por $y=fx$, por meio da comparação dos signaes de fx e $f''x$, relativos aos valores de x que são raizes de $f'x=0$; e que estas raizes correspondem a M maximos e m minimos.

Posto isto, imaginemos que um ponto movel partindo do infinito negativo, descreve a curva caminhando para o infinito positivo. Durante um immenso intervallo d'este transito, o movel não encontrará o eixo, por que só nas proximidades da origem, é que principiarão as ondulações. Passado um maximo, o ponto caminhará para o eixo, e chegará a cortal-o, excepto se, curvando-se, a linha der logar a um minimo, por que então cada minimo destruirá uma intersecção indicada pelo maximo vizinho. Disto se conclue que a expressão $M-m+1$ representa o numero das intersecções, isto é, o das raizes reaes da equação $fx=0$; e accrescentâmos o termo $+1$, por que no movimento do movel não mettemos em conta a intersecção que precede ao 1.° maximo, ou a que succede ao último. Se for $M=m$, isto é, se houver tantos maximos como minimos, a equação terá só uma raiz real, e será por conseguinte de gráo impar. Se não houver minimo, póde acontecer que não haja senão um maximo; e a equação terá então só duas raizes reaes, será do gráo par, e o maximo será negativo. Finalmente se não houver maximo, não poderá haver mais do que um minimo, nem raiz alguma real; a equação é do gráo par, e o minimo é positivo.

Raizes incommensuraveis.

69. *Methodo de Newton.* Depois de havermos desembaraçado a proposta $fx=0$ das suas raizes tanto eguaes, como commensuraveis, vejamos como se podem achar as raizes irracionaes. Supponhamos que se chegou a obter um valor approximado γ d'uma d'estas raizes, comprehendida entre os valores α e θ; fazendo $x=\gamma$ em fx, pelo signal do re-

sultado (n.° 63.) se reconhecerá se a raiz está comprehendida entre α e γ, ou entre γ e θ. Dêmos que está entre α e γ; tomando $x=\beta$, numero comprehendido entre os dous últimos, tambem viremos a saber pelo signal do resultado, se a raiz está entre α e β, ou entre β e γ. Por este estilo vamos estreitando cada vez mais os limites, e approximando-nos indefinidamente do valor da raiz.

Este processo laborioso torna-se impraticavel, quando se exigem grandes approximações; e sómente se emprega *para se obter um numero* α, *que diffira do valor de* x *menos de* $\frac{1}{10}$.

Designando o erro por y, será $x=\alpha+y$, e substituindo em $fx=0$, virá (n.° 31)

$$f(\alpha+y)=f\alpha+yf'\alpha+\frac{y^2}{1.2}f''\alpha+\ldots\ldots+ky^m=0.$$

Mas como y se suppõe $<\frac{1}{10}$, e α não entra como denominador em nenhuma d'estas funcções, que são os valores de fx e das suas derivadas quando se põe $x=\alpha$: a regra de Newton consiste em considerar y^2, y^3,.. como quantidades muito pequenas, que se podem desprezar; o que reduz a transformada aos termos $f\alpha+yf'\alpha$, e dá

$$y=\frac{-f\alpha}{f'\alpha}=-\frac{k\alpha^n+p\alpha^{n-1}+\ldots\ldots.t\alpha+u}{nk\alpha^{n-1}+p(n-1)\alpha^{n-2}+\ldots.t}.$$

Chamando s a esta fracção, ou antes ao seu valor approximado, $y=s$ dá $x=\alpha+s$ para 2.ª approximação. Fazendo $\alpha+s=\alpha_{,}$, e designando por $y_{,}$ a nova correcção, esta será dada por uma expressão identica á de y, só com a differença de se dever substituir $\alpha_{,}$ em vez de α, o que dá $x=\alpha+s+y_{,}$. E assim successivamente.

Por ex., se na equação

$$x^3-2x-5=0,$$

fizermos $x=2$ e $x=3$, pelos resultados -1 e $+16$ viremos no conhecimento da existencia de uma raiz entre 2 e 3, que mais se approxima de 2 do que de 3. Se fizermos depois $x=2{,}1$ virá o resultado 0,061, o qual mostra que 2,1 é maior que x e mais vizinho da raiz que o numero 2. Pondo $\alpha=2{,}1$, a correcção é

$$s = \frac{\alpha^3 - 2\alpha - 5}{3\alpha^2 - 2} = -\frac{0,061}{11,23} = -0,0054.$$

Contentando-nos pois com a 1.ª approximação até ás decimas-millionesimas, será $x = 2,0946$. Tomando por α este último valor de x, virá

$$s = -\frac{0,000541550536}{11,16204748} = -0,00004851.$$

Já d'aqui se vê que a 4.ª decimal do valor de x na 1.ª approximação está errada, e que é $x = 2,09455149$. Por este processo conseguiremos corrigir successivamente as últimas decimaes, e obter maiores approximações.

Conservando o termo y^2 no desenvolvimento, virá

$$y = \frac{-f\alpha}{f'\alpha + \frac{1}{2}yf''\alpha};$$

expressão de que se fará uso, substituindo, pelo y que entra no denominador do 2.° membro, a 1.ª correcção s; e assim se obterá um valor mais approximado. No exemplo de cima substituindo por y o valor $s = -0,0054$ em $\frac{1}{2}yf''\alpha$, acha-se $-0,034$; e por denominador da fracção $11,196$: d'onde se conclue $y = 0,0054483$, quantidade que só tem errada a última decimal.

Tomemos para 2.° exemplo a equação

$$x^3 - x^2 + 2x = 3,$$

que tem uma raiz comprehendida entre os numeros 1,2 e 1,3, os quaes substituidos dão os resultados $-0,312$ e $+0,107$. Tomando $\alpha = 1,3$, vem $y = -\frac{0,107}{4,47} = -0,02$, e $x = 1,28$. E porque é $\frac{1}{2}yf''\alpha = (3\alpha - 1)y = 2,9\ y = -0,058$, o denominador torna-se em $4,47 - 0,058 = 4,412$; logo $y = -0,0242$ e $x = 1,2758$. Toma-se depois $\alpha = 1,276$, e continua-se com a approximação.

70. Cumpre advertir, que, em certos casos, não póde ter logar

o methodo de Newton, porque nos levaria a resultados menos exactos.

Com effeito construindo, como no n.º 58, a curva parabolica (fig. 1.) cuja equação é $y=fx$, as raizes da equação $fx=0$ serão representadas pelas abscissas dos ponto $k, k', \ldots\ldots$ de intersecção d'esta curva com o eixo Ax. Seja $x=AP=\alpha$ um valor approximado da raiz $Ak=a$ (fig. 15 e 16): será a ordenada $PM=f\alpha$, e a tangente do angulo T, que faz com Ax a tangente ao ponto M, será $=f'\alpha$ (n.º 58) Resolvendo o triangulo TPM, e designando por s à *subtangente* TP, vem

$$\text{TP tang T}=\text{PM}=f\alpha,\ s=\frac{f\alpha}{f'\alpha};\ \text{e finalmente AT}=\alpha-\frac{f\alpha}{f'\alpha}.$$

É este o novo valor approximado de $AK=a$, seguindo o methodo de Newton, o qual como acaba de ver-se, se reduz a substituir pelo arco Mk a sua tangente MT, na indagação do ponto de secção k com o eixo. Obtida esta 2.ª approximação AT, busca-se por meio d'ella outra tangente $M'T'$, da qual se deduz um novo valor AT' mais approximado. E assim por diante.

Porém se os pontos $T, T', \ldots\ldots$ obtidos d'esta maneira não se approximarem continuadamente do ponto k, o methodo não deve ser empregado. Assim, se tomassemos por valor aproximado α a abscissa Ap (fig. 15.) correspondente ao ponto m vizinho do maximo, é claro que a tangente mt tirada por esse ponto, longe de conduzir a um valor mais approximado de Ak, poderia dar uma subtangente quasi infinita. Se tomassemos por α a abscissa Ap' correspondente ao ponto m', tambem vizinho do ponto O, mas para o outro lado, a subtangente sería dirigida em sentido contrário. D'aqui se vê pois que a fórma e posição do arco mM, relativamente ao eixo, podem fazer com que falhe o methodo, o qual por isso, e para ser abonado nos seus resultados, deve ser sujeito ás seguintes condições.

1.ª *É necessario que entre os limites α e β não esteja comprehendida mais do que uma raiz.* Por que, se houvessem muitas raizes entre α e β a curva, cortando o eixo em muitos pontos intermedios entre estes limites, faria ondulações, e não teriamos meio de saber, se o ponto da curva correspondente á abscissa α que substituimos por x, sería ou não proprio para conduzir a um valor mais approximado de a. É isto o que se acha representado na fig. 1, na qual os limites Ap, Ap' não nos dão a conhecer se é ou não possivel approximar de Ak e Ak'.

2.ª *Devem rejeitar-se os valores de* x *entre α e β, que tornam* *nullas as derivadas $f'x$ e $f''x$.* Por que então haveria n'este intervallo um maximo ou um minimo, ou alguma inflexão (n.os 60 e 61.) em cujas circumstancias o methodo de Newton é evidentemente defeituoso.

Adiante ensinaremos o processo para achar os limites α e β, e o meio de reconhecer se n'elles se dá esta segunda condição.

3.ª *Achados os dous limites α e β, para progredir na approximação só se deve lançar mão d'aquelle que tornar fx e $f''x$ do mesmo signal.* As fig. 15, 16, 17 e 18 representam as differentes posições que póde tomar o arco, conforme voltar para cima a sua convexidade ou a sua concavidade. A raiz é $Ak=a$; AP e Ap são os limites α e β entre os quaes só ella esta comprehendida; a subtangente PT é a correcção s, que dá o methodo, relativa ao limite $AP=\alpha$. É evidente porém, que, para se applicar o methodo com segurança, é necessario, que o pé T da tangente se ache entre o da ordenada P e o ponto k da secção com o eixo: logo a curva deve ser convexa d'esde k até M, ou (n.° 59.) por outra, deve o signal da ordenada fx ser o mesmo que o de $f''x$, para a abscissa $AP=x=\alpha$; e é este o limite que devemos preferir nas approximações subsequentes.

Da inspecção das fig. 15 e 18 se vê, que depois de preferido, pela consideração dos signaes entre os dous limites, o limite $\alpha>a$, todas as approximações successivas serão sempre $>a$: descendo continuadamente para esta raiz a. Se pelo contrario tivessemos preferido o limite $\alpha<a$ (fig. 16 e 17), subir-se-hia para o valor de a por uma serie de approximações todas $<a$.

71. Posto isto, eis em summa o caminho que devemos seguir: 1.° *buscar dois limites α e β entre os quaes não haja mais do que uma raiz:* 2.° *estreitar estes limites, até nos certificarmos, que não comprehendem nenhuma das raizes das equações $f'x=0$, $f''x=0$:* 3.° *tomar por fim, para primeira approximação, aquelles dos dous limites α ou β, que substituido por x em em fx e $f''x$, der resultados com o mesmo signal.*

Seguindo depois o processo indicado, chegaremos a obter o valor s, ou a correcção que deve junctar-se, com o seu signal, a α para se obter a 2.ª approximação $\alpha+s$. Ésta, tomada para novo valor de α, servirá para acharmos a 3.ª; e assim por diante.

É evidente que podemos prescindir de tomar o valor de s, tal qual o dá o cálculo, e que podemos substituir-lhe outro menos complicado, *com tanto que corresponda a um ponto* T *comprehendido entre* P *e* k. Tendo-o pois reduzido a dizima, basta conservar as letras que se julgarem necessarias para a raiz, afim de não complicar inutilmente os cálculos seguintes. Para isto torna-se indispensavel *o conhecimento dos gráos de approximação de cada correcção.*

Ora, se pelo ponto m, correspondente ao 2.° limite $Ap=\beta$, se tirar uma parallela mq á tangente MT, o limite Aq ficará na parte concava da curva, e o ponto k estará visivelmente entre os pés T e q. Mas o triangulo mpq dá $pq = \frac{pm}{\tang q} = -\frac{f\beta}{f'\alpha}$, com o signal —, por que $f\beta$ é negativa; logo $Aq = \beta - \frac{f\beta}{f'\alpha}$. Temos assim dous limites conhecidos, entre os quaes cahe a raiz pedida, a saber

$$\alpha' = \alpha - \frac{f\alpha}{f'\alpha},\ \beta' = \beta - \frac{f\beta}{f'\alpha}.$$

No valor de α' devemos conservar sómente as letras de dizima communs com as de β', e obteremos assim as letras exactas da 2.ª approximação. É preciso tambem ter cuidado em affectar as differentes quantidades que entram n'estas expressões com os signaes competentes. A approximação, lenta ao principio, torna-se muito convergente para a, logo que se chegam a obter 3 ou 4 letras de dizima para a raiz. Fourier demonstrou a lei d'esta approximação na sua *Analyse das equações determinadas.*

Sirva-nos outra vez de exemplo a equação $x^3 - 2x - 5 = 0$, que dá $f'x = 3x^2 - 2$, e $f''x = 6x$. Já vimos, que a raiz está entre os limites 2 e 2,1. As raizes da equação $f'x = 0$ não estão comprehendidas entre estes limites. Finalmente $x = \alpha = 2,1$ torna do mesmo signal, e positivas, as expressões fx e $f''x$. Devemos pois preferir o limite$> a$. Temos tambem

$$f\alpha = +0,061,\ f'\alpha = +11,23,\ \text{e}\ s = -0,00543;$$

logo $\alpha' = 2,09457$. Tomando $\beta = 2,09$ por ser $2,09 < a$, como se reconhece vendo, que este valor dá $f\beta = -0,050671$: virá $\frac{f\beta}{f'\alpha} = -0,00451$, $\beta' = 2,09451$. Concluiremos pois que as quatro primeiras decimaes estão exactas, e que é $x = 2,0945$.

Com este novo valor de α acharemos

$$f\alpha = +0,00054155,\ f'\alpha = +11,16204748,\ \text{e}\ s = -0,000048517;$$

logo $\alpha' = 2,094551483$. E tomando $\beta = 2,0945$ por ser $2,0945 < a$, como se reconhece, vendo que este valor dá

$$f\beta = -0{,}00057459: \text{virá}\ \frac{f\beta}{f'\alpha} = -0{,}0005148,\ \beta' = 2{,}09455148.$$

Por este modo temos obtido já oito letras de dizima exactas.

Á medida que o numero vae tendo mais letras, tambem o cálculo se torna mais longo; póde porém abbreviar-se da maneira seguinte. O valor approximado de x da-nos fx, $f'x$, e $s = -\frac{fx}{f'x}$. Para levar o cálculo mais longe, deve por x substituir-se $x_1 = x + s$ em fx, $f'x$, $f''x$, d'onde resulta o seguinte desenvolvimento que, em razão da pequenez do numero s, se reduziu aos primeiros termos:

$$fx' = fx + sf'x + \tfrac{1}{2}s^2 f''x,\ f'x_1 = f'x + sf''x.$$

Temos pois um meio facil de concluir o cálculo, como passâmos a mostrar servindo-nos do exemplo de cima. Pondo $\alpha = 2{,}1$ achámos $f\alpha = 0{,}061$, $f'\alpha = 11{,}23$, $f''\alpha = 12{,}6$, e $s = 0{,}0054$; para levar approximação mais adiante bastará fazer $\alpha_1 = \alpha - 0{,}0054$, o que dá

$$f\alpha_1 = 0{,}061 - 0{,}0054 \times 11{,}23 + (0{,}0054)^2 \times 6{,}3 = 0{,}0005417,$$

$$f'\alpha_1 = 11{,}23 - 0{,}0054 \times 12{,}6 = 11{,}16196,$$

$$s' = -\frac{f\alpha_1}{f'\alpha_1} = -0{,}00004853.$$

72. *Methodo de Lagrange.* A verdadeira difficuldade, e aquillo que, primeiro que tudo, importa conhecer para achar as raizes de uma equação, é o *logar das raizes*, isto é, uma serie de numeros taes, que entre dous d'elles tomados consecutivamente não possa existir mais do que uma d'estas raizes.

Quando por x se substitue uma serie de numeros $p, q, r, s, t, \ldots$ e se acham tantos resultados successivos de signaes contrários, quantas são as n unidades do grão da raiz, todas as raizes são reaes, e o logar de cada uma d'ellas fica determinado. Porém, fóra d'este caso, não se póde saber ao certo o numero das raizes reaes e os seus limites, sendo possivel que, entre os numeros que substituidos por x deram resultados de signaes contrários, se comprehendam 3, 5, 7, raizes, e que entre os que deram resultados dos mesmos signaes, se comprehendam 2, 4, 6,...... (n.° 63) É necessario pois escolher uma serie de substituições tam proximas, que entre duas successivas não possa haver mais do que uma raiz intermedia, para ficarmos na certeza de que *existe uma só raiz entre os numeros consecutivos, que substituidos dão resultados de signaes contrários; e que, pelo contrário, não existe nenhuma entre os numeros consecutivos que dão resultados do mesmo signal.*

Sejam a e b duas raizes comprehendidas entre os limites α e λ, e supponhamos, que estes quatro numeros, escriptos pela ordem de grandeza crescente, são α, a, b, λ: teremos evidentemente $\lambda-\alpha>b-a$, e será esta a condição necessária para que a e b estejam comprehendidos entre α e λ. Por tanto, se a differença entre os dous limites não for maior que a differença entre as raizes, só uma d'ellas, quando muito, poderá ficar entre os mesmos limites. D'onde se segue, que *se for δ menor que a menor differença entre as raizes, e se partindo do limite inferior* l', *substituirmos por* x *os numeros* l', $l'+\delta$, $l'+2\delta$, ... *até ao limite superior* l, *obteremos tantos resultados de signaes contrarios, quantas são as raizes reaes.* Cada mudança de signal nos resultados mostra, que existe uma só raiz entre os numeros substituidos; e a permanencia de signal mostra, que não existe nenhuma.

Para obter δ formaremos uma equação, da qual sejam raizes as differenças entre as raizes da proposta tomadas duas a duas. Para isso, *designando por* y *a differença de uma raiz* x *a outra qualquer da proposta*, e mudando x em $x+y$, teremos

$$fx+yf'x+\tfrac{1}{2}y^2f''x+\ldots\ldots\ldots=0,$$

equação que, por ser $fx=0$, se parte, dividindo a segunda por y, nas duas

$$fx=0,\ f'x+\tfrac{1}{2}yf''x+\tfrac{1}{6}y^2f'''x+\ldots\ldots\ ky^{n-1}=0.$$

Eliminando x entre estas duas equações a duas incognitas x e y (n.° 52.), virá uma equação $Fy=0$ a qual se chama *equação ás differenças*, por que n'ella y representa a differença entre uma raiz qualquer x e as outras da proposta. O gráo d'esta equação é $n(n-1)$, por que é este o numero de arranjos 2 a 2 das n raizes de x.

Sendo $a, b, c, \ldots\ldots$ as raizes da proposta, as differenças entre ellas, $a-b, b-a, b-c, c-b, \ldots\ldots$ são eguaes duas a duas e de signaes contrarios; de sorte que designando uma d'ellas por x, teremos $y=\pm x$, e qualquer d'estes dous valores de y tornará $Fy=0$. Disto se segue, que Fy *deve conter sómente potencias pares de* y; e que por consequencia se póde decompor em factores da fórma

$$(y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)\ldots\ldots(y^2-\lambda^2).$$

Suppondo pois $y^2=z$, teremos assim a equação *do quadrado das differenças*, $\varphi z=0$, na qual a incognita z é o quadrado de todas as differenças entre as raizes de x.

73. Como já sabemos (n.° 38.) achar um numero i menor que qualquer das raizes positivas z de $\varphi z=0$, isto é, $i<z=y^2$ ou $\sqrt{i}<y$: podemos tomar para differença δ, entre os numeros que temos de substituir por x, $\sqrt{i}$ ou qualquer numero positivo menor. E por que as funcções Fy, φz tem os mesmos coefficientes, i é tambem o limite inferior de y, e será $i<y$; de maneira que podemos tomar $\delta=i$. Attendendo porém a que é necessario fazer tantas mais substituições desde l' até l, quanto δ for mais pequeno, devemos, para brevidade do cálculo, tomar δ o maior possivel. Assim quando for $i>1$, tomar-se-ha $\delta=i$, e, se quizermos, poderemos substituir os numeros naturaes $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ Porém quando for $i<1$, deve tomar-se $\delta=\sqrt{i}$.

As substituições dos numeros fraccionarios e irracionaes podem evitar-se de maneira seguinte:

1.° Sabemos (*Arith.* n.° 63) achar um numero que diffira de $\sqrt{i}$ menos que uma dada fracção, $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$ por ex.°. Tomaremos pois uma fracção $\frac{g}{h}$ que diffira de $\sqrt{i}$, para menos, do $\frac{1}{h}$, e far-se-ha $\delta=\frac{g}{h}$. Para h deve escolher-se um numero que não torne δ muito differente de $\sqrt{i}$, e que não seja muito grande, a fim de não complicar os cálculos.

2.° Em logar de substituirmos $0, \frac{g}{h}, \frac{2g}{h}, \ldots\ldots$ em vez de x, podemos tornar tanto as raizes, como as suas differenças, h vezes maiores (n.° 30, 1.°) pondo $x=\frac{t}{h}$; em vez de t teremos de substituir na transformada $0, g, 2g, 3g, \ldots\ldots$, ou antes os numeros $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ Por este modo *sabemos transformar as equações em outras, nas quaes não ha mais do que uma raiz, comprehendida entre dous inteiros successivos.*

Note-se, que i se deduz de Fy, e que é escusado formar φz. De mais, como fazendo desapparecer o 2.° termo de $fx = 0$ (n.° 33.), todas as raizes ficam augmentadas da mesma quantidade, e conservam entre si as mesmas differenças, será melhor deduzir Fy d'esta transformada.

74. Ex.° 1.° Na equação $x^3 - 2x = 5$, apenas conhecemos uma das raizes (pag. 112). Para ver se as outras duas são reaes, mudemos x em $x + y$, e virá $3x^2 - 2 + 3xy + y^2 = 0$. Eliminando x entre as duas equações, vem $y^6 - 12y^4 + 36y^2 + 643 = 0$.

Para achar o limite inferior de y, faça-se $y^2 = \dfrac{1}{v}$, e virá

$643v^3 + 36v^2 - 12v + 1 = 0$, d'onde $v < 1 + \frac{17}{679}$, e por conseguinte $v < 1$, e $y > 1 = \delta$. Fazendo $x = -4, = -3, = -2, = -1, = 0, = 1, = 2, = 3, = 4$ entre os limites de x, vem os resultados -61, $-26, -9, -4, -5, -6, -1, +16, +51$, os quaes mostram que as outras duas raizes são imaginarias, e que ha só real, a que já tinhamos achado, e que está comprehendida entre 2 e 3.

Ex.° 2.° A equação $x^3 - 12x^2 + 41x - 29 = 0$ dá

$$3x^2 - 24x + 41 + (3x - 12)\, y + y^2 = 0;$$

das quaes eliminando x, vem $y^6 - 42y^4 + 441y^2 = 49$. Fazendo depois $y^2 = \dfrac{1}{v}$, acha-se

$$49v^3 - 441v^2 + 42v - 1 = 0,$$

d'onde $v < 10$, $y > \sqrt{\frac{1}{10}} > \frac{1}{4} = \delta$. Pondo $x = \dfrac{t}{4}$ resulta

$$t^3 - 48t^2 + 656t = 1856,$$

equação, que entre dous inteiros successivos não tem mais do que uma raiz. Fazendo $t=0, 1, 2, \ldots\ldots$ ver-se-ha que t está entre 3 e 4, entre 21 e 22, entre 22 e 23; logo x está entre $\frac{3}{4}$ e 1, $\frac{21}{4}$ e $\frac{22}{4}$, $\frac{22}{4}$ e $\frac{23}{4}$, existindo assim duas raizes entre 5 e 6, que não se teriam reconhecido sem este cálculo.

Ex.º 3.º Finalmente na equação x^3-x^2-2x+1, como $x=0$, $=1, =2, \ldots$ dá os resultados $+1, -1, +1$, e pela mudança de x em $-x$, os numeros 1 e 2 dão resultados de signaes contrarios, fica conhecido o logar das tres raizes, escusando-se a equação ás differenças. Todavia esta equação é $y^6-14y^4+49y^2-49=0$, e d'ellas se deduziria $y>1$ e $\delta=1$, pelo processo seguido.

Esta theoria, aliás completa, clara e sem excepção, tem o inconveniente de exigir cálculos excessivamente longos, tornando-se por isso as operações quasi impraticaveis. Lagrange deu outro methodo mais facil, que adiante expenderemos, por meio do qual se leva a approximação mais longe.

75. *Regra de Descartes.* N'uma equação $fx=0$, depois de ordenada, chamaremos *permanencia* a successão de dous signaes similhantes, e *variação* a de dous signaes differentes. N'esta intelligencia, a regra de Descartes, por meio da qual se póde conhecer o maior numero das raizes *positivas*, e o maior numero das raizes *negativas*, que a equação póde conter, enuncia-se da seguinte maneira:

Toda a equação completa tem QUANDO MUITO *tantas raizes positivas, quantas são as variações, e tantas negativas, quantas as permanencias.*

Com effeito, toda a equação $fx=0$ póde considerar-se como resultando do producto da multiplicação de um polynomio Fx, formado de todos os factores binomios imaginarios da equação, pelos factores $x-a$, $x-b$, $x-c$, ... $x+a'$, $x+b'$, $x+c'$, ... correspondentes ás raizes reaes a, b, c, ... $-a'$, $-b'$, $-c'$, ... Vejamos pois, por que modo estes factores binomios reaes introduzem tanto as variações, como as permanencias.

E como esta analyse deve ser independente dos valores numericos dos coefficientes, sómente attenderemos aos signaes dos termos do polynomio, os quaes, para fixar as idêas, supporemos que se succedem na ordem

$$+--+---+-+++++-+-+.$$

1.º Passando á multiplicação por $x-a$, para introduzir uma raiz positiva a, devemos multiplicar primeiro por x; e depois por $-a$;

e sommar os productos parciaes, os quaes tem signaes contrarios, recuando o segundo um logar para a direita, a fim de ordenar a equação: isto é,

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
+ & - & - & + & - & - & - & + & - & + & + & + & + & - & + & - & + & \\
  & - & + & + & - & + & + & + & - & + & - & - & - & - & + & - & + & - \\
\hline
+ & - & i & + & - & i & i & + & - & + & i & i & i & - & + & - & + & -
\end{array}$$

Quando os dous signaes correspondentes são os mesmos, conservam-se taes no producto; no caso contrario, como o signal é *incerto* em quanto não entrar em consideração a grandeza dos coefficientes, assenta-se, para indicar esta circunstancia, a letra i.

Como os dous productos parciaes tem signaes contrarios, a letra i accusa sempre uma permanencia no multiplicando; e como toda a permanencia deve terminar n'uma variação, qualquer numero dos i, par ou impar, deve ter a fórma

$$\pm i\, i\, i \ldots\ldots\ldots i \mp \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Para que estes i dessem o maior numero de permanencias, sería necessario suppor, que todos elles tinham, ou o signal $+$, ou o signal $-$; e em ambos estes casos, que são os mais desfavoraveis, se vê que a introducção de uma raiz positiva real, traz, pelo menos, uma variação de mais no producto.

Fica por este modo provada a primeira parte da regra enunciada, a saber, que *toda a equação completa tem, quando muito, tantas raizes positivas, quantas são as variações.* Com effeito, bástava que tivesse uma só d'estas raizes de mais do que o numero das variações, para haver pelo menos uma raiz positiva real, que não teria introduzido variação, o que não póde ser, pelo que acabâmos de mostrar.

E cumpre advertir que esta primeira parte de regra tem logar, ainda que a equação seja *incompleta.* Na verdade, a equação póde ser incompleta, ou por que o multiplicando o é, e nesse caso subsiste ainda a demonstração; ou por que a somma dos termos dos productos parciaes, á qual correspondem alguns dos i, se torna nulla, e estes i devem então supprimir-se. Mas d'esta supressão o que, n'este caso, póde resultar, é a diminuição do maior numero de permanenças, o que não influe na regra.

2.° Multipliquemos agora o polynomio Fx por $x+a'$, para introduzir uma raiz negativa a'. Teremos o typo seguinte

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
+ & - & - & + & - & - & - & + & - & + & + & + & + & - & + & - & + & \\
 & + & - & - & + & - & - & - & + & - & + & + & + & + & - & + & - & + \\
\hline
+ & i & - & i & i & - & - & i & i & i & + & + & + & i & i & i & i & +
\end{array}
$$

no qual se recuou tambem o 2.° producto parcial um logar para a direita, a fim de ordenar a equação.

Como os dous productos parciaes são compostos dos mesmos signaes, a letra i accusa sempre uma variação no multiplicando; e como um numero par de variações tem os mesmos signaes extremos, e um numero impar de variações tem signaes differentes, segue-se: que, qualquer numero de i successivos estará entre os mesmos signaes, se este numero for par; e entre signaes differentes, se o mesmo numero for impar.

a) Seja, em um dado logar, o numero dos i par, e representado por $2n$. Estes i estarão escriptos como se segue,

$$\pm i\; i\; i \ldots\ldots\ldots\ldots i\; i \pm \ldots\ldots\ldots \quad (\beta).$$

Ora o numero dos signaes em β é $2n+2$, os quaes darão um numero total $2n+1$ de variações e permanencias; mas como os signaes extremos são os mesmos, o numero das variações será par, e por consequencia ou será $2n$, ou $2n-2$, $2n-4$, ... 0, que são os numeros pares contidos em $2n+1$. Logo:

Um numero par de i *successivos póde dar, quando muito, tantas variações quantos são os* i, *ou então duas, quatro, ... de menos.*

b) Seja agora, n'outro logar, o numero dos i impar, e representado por $2n+1$. Estes i estarão escriptos como se segue,

$$\pm i\; i\; i \ldots\ldots\ldots i \mp \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta')$$

Ora o numero dos signaes em (β') é $2n+3$, os quaes darão um numero total $2n+2$ de variações e permanencias; mas como os signaes extremos são differentes, o numero das variações será impar, e por consequencia ou será $2n+1$, ou $2n-1$, $2n-3$, ... 1, que são os numeros impares contidos em $2n+2$. Logo:

Um numero impar de i *successivos póde dar, quando muito, tantas variações, quantos são* i, *ou então duas, quatro, ... de menos.*

Quer o numero dos i seja par, quer seja impar, vê-se por tanto, que a introducção de uma raiz negativa real não dá mais variações que o numero dos i, isto é, mais variações dos que as que existiam no polynomio Fx. Ora, como por outra parte, o producto tem mais um termo do que o polynomio, conclue-se que *a raiz negativa produz, pelo menos, mais uma permanencia.*

Fica assim provada a 2.ª parte da regra enunciada, a saber, que *toda a equação completa, tem, quando muito, tantas raizes negativas quantas são as premanencias.* Com effeito bastava que tivesse uma só d'estas raizes de mais do que o numero das permanencias, para haver, pelo menos, uma raiz negativa real, que não teria introduzido permanencia, o que não póde ser, como acaba de mostrar-se.

Se a equação for incompleta, póde esta última proposição não ter logar; por quanto, podendo esta circunstancia provir, como já dissemos, de ser nulla a somma dos termos dos productos parciaes correspondente a alguns dos i, que tem então de supprimir-se, póde por esse motivo acontecer, que a raiz negativa, longe de introduzir alguma permanencia, diminua pelo contrario as que havia em Fx. N'este caso, para que a regra se possa applicar, é necessario, afim de completar a equação, restabelecer os termos que faltam, affectando as potencias de x correspondentes com o coefficiente ± 0.

Por exemplo na equação incompleta

$$x^4 - 5x^2 + 8x - 6 = 0,$$

que tem duas raizes, uma *positiva*, outra *negativa*, como não ha senão variações de signal, pareceria que não deveria haver *nenhuma* raiz negativa. Restabelecendo porém o termo em x^3, vem

$$x^4 \pm 0x^3 - 5x^2 + 8x - 6 = 0,$$

equação que encerra uma permanencia, quer se tome o coefficiente 0 com o signal $+$, quer se tome com o signal $-$.

76. Designando por P o numero das raizes positivas, por p o das permanencias, e por v o das variações, fica demonstrado que é

$$1.^\circ \quad P = \text{ou} < v, \quad 2.^\circ \quad N = \text{ou} < p,$$

sendo N o numero das raizes negativas. Ora sendo todas as raizes reaes, teremos, por isso que a proposta é do grão n e tem ao todo $n+1$ termos,

$$P + N = n, \; n = p + v, \; P + N = v + p.$$

Comparando P com v, consideremos as tres circunstancias, P>, ou<, ou $=v$. A 1.ª já se viu (1.°) que não podia ter logar; a 2.ª poderia dar-se, se fosse por compensação $N > p$, o que tambem não póde ser (2.°); por conseguinte

$$P = v, \text{ e } N = p.$$

Logo, *n'uma equação cujas raizes são todas reaes, ha precisamente tantas raizes positivas quantas variações, e tantas negativas quantas permanencias.*

77. A regra de Descartes serve, em muitos casos, para reconhecer se uma equação tem raizes imaginarias, poupando-nos aos longos calculos da equação ás differenças.

1.° Quando na equação $fx = 0$ faltar um dos termos correspondentes á pontencia i de x, completar-se-ha, como dissemos, accrescentando o termo $\pm 0 . x^i$; e contar-se-hão as variações e permanencias nos dous casos de ser o coefficiente $+0$ e -0. Se os termos em x^{i-1} e x^{i-2} tiverem signaes contrarios, o numero das variações e permanencias será o mesmo em ambos os casos, e por isso póde assignar-se qual é o maior numero possivel de raizes positivas e negativas: se porém tiverem os mesmos signaes, a contradicção a que dão logar os dous resultados differentes, attesta a existencia de raizes imaginárias. Assim na equação incompleta $x^3 + 2x - 5 = 0$, que se completa escrevendo $x^3 \pm 0 . x^2 + 2x - 5 = 0$, temos n'um caso 2 permanencias e uma variação, e n'outra 3 variações; o que é contradictorio.

Logo, *quando falta um termo entre dous do mesmo signal, a proposta tem raizes imaginarias.*

2.° *Uma equação em que faltam muitos termos successivos não póde ter as suas raizes reaes.* Deduz-se do theorema precedente.

3.° Se, multiplicando o 1.° membro da proposta $fx = 0$ por

$(x+a)$, pudermos determinar a de maneira, que o numero das variações do producto exceda em mais de uma unidade o das variações de fx, ou que este producto tenha menos variações do que fx: a equação proposta terá raizes imaginarias. Por que, se todas as raizes de $fx=0$ fossem reaes, esta equação teria tantas raizes positivas quantas variações, e por conseguinte a transformada $fx(x+a)=0$, deveria ter só uma variação mais do que a proposta, se a fosse positivo, e tantas variações como ella, se fosse negativo.

Na equação $x^3-3x^2+12x-4=0$ as tres variações fazem presumir a existencia de tres raizes positivas. Multiplicando por $x+a$, resulta

$$x^4+(a-3)\,x^3+(12-3a)\,x^2+(12a-4)\,x-4a=0.$$

Pondo $a=3\frac{1}{2}$, os quatro primeiros termos ficam positivos, e por conseguinte a proposta terá duas raizes imaginarias.

4.° Mudando x em $y+h$, e $y'+h'$, $fx=0$ transformar-se-ha em $Fy=0$, e $\Phi y'=0$. Supponhamos que $\varphi y'$ tem de menos uma variação que Fy. Para que isto aconteça, quando forem reaes todos os valores de x, é necessario que $Fy=0$ tenha positiva uma das suas raizes α, a qual corresponda a outra negativa, ou $-\alpha'$, em $\varphi y'=0$; e será então

$$x=\alpha+h=-\alpha'+h'.$$

Logo x terá uma raiz entre h e h'. Como isto acontece a respeito de todas as variações que houver de menos em $\varphi y'$, x terá outras tantas raizes entre h e h'; e por conseguinte, se pela theoria dos limites, se achar que não existem todas estas raizes de x, concluiremos que a equação tem raizes imaginarias.

Por exemplo, pondo $x=y+2$ e $y'+3$, em $x^3-4x^2-2x+17=0$, vem as duas

$$y^3+2y^2-6y+5=0\,,\ y'^3+5y'^2+y'+2=0\,;$$

e como a 2.ª tem de menos duas variações, póde presumir-se que ha na proposta dous valores de x entre 2 e 3. Mas por uma parte, o limite inferior de y (n.° 38) dá $y>\frac{5}{11}$; e por outra fazendo $y=-y''$, o limite inferior de y'', dá $y''>\frac{2}{3}$, ou por ser $y=y'+1=-y''+1$, $y<\frac{1}{3}$. E como os dous limites de y são incompativeis, conclue-se que x tem duas raizes imaginárias. Se os limites não fossem contradictorios, ainda que se ficava na incerteza a respeito da existencia das duas raizes entre 2 e 3, tinha-se ao menos conseguido estreitar os seus limites.

5.° Se todas as raizes da equação $fx=0$ são reaes, os quadrados das suas differenças são todos positivos, logo:

Para que uma equação $fx=0$ *tenha todas as raizes reaes, é necessario, que na equação correspondente ao quadrado das differenças não haja permanencias.*

78. *Methodo de Fourier.* Dada uma equação $fx=0$ do grão n, tomem-se as suas derivadas successivas, e escrevam-se na ordem inversa $f^{(n)}, f^{(n-1)}, \ldots\ldots f'', f', f$. Se em cada um d'estes polynomios substituirmos por x um numero a arbitrario, positivo ou negativo, obter-se-ha um resultado numerico com o signal + ou —. Escrevam-se consecutivamente, e por sua ordem, os signaes assim obtidos debaixo das funcções correspondentes, formando-se por este modo uma linha de signaes que designaremos por A.

Tomando depois $x=b>a$, forme-se, pelo mesmo theor, outra linha de signaes, que se escreverão debaixo dos precedentes, e cuja totalidade designaremos por B. E assim por diante.

Tracta-se de comparar as *variações* de signaes n'estas diversas series.

Designemos por φx um polynomio d'estes qualquer. Tomem-se por x tres valores muito vizinhos $a-\delta$, a, $a+\delta$; ter-se-ha

$$\left.\begin{aligned}\varphi(a-\delta)&=\varphi a-\delta\varphi' a+\tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a-\tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a\ldots\\ \varphi a&=\varphi a\\ \varphi(a+\delta)&=\varphi a+\delta\varphi' a+\tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a+\tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a\ldots\end{aligned}\right\}(1)$$

Analysemos os seguintes casos:

1.° Suppondo que φa não é nullo, como δ se póde tornar tam pequeno como se quizer, poderemos tomal-o tal, que os tres resultados tenham todos o signal de φa, visto que o 1.° termo se póde tomar maior que a somma dos seguintes, que tem signal contrário. Logo, *poderemos dar a x valores crescentes, que vão entre si differindo tam pouco, que cada uma das funcções* $f^{(n)}, \ldots f'', f', f$ *conserve o seu primeiro signal, em quanto se não tornar nulla.*

2.° Se φa for nullo, isto é, se a for uma das raizes da equação

$\varphi x = 0$, será nullo o 1.° termo das series (1), e os resultados terão os signaes do termo seguinte $\mp \delta\varphi' a$. Por conseguinte, em quanto for $x<a$, o signal de φx é o mesmo do producto $-\delta\times\varphi' a$, isto é, contrário ao de $\varphi' a$; as avessas, quando for $x>a$, o signal é o de $\varphi' a$; vindo por este modo os dous resultados a ter signaes differentes. Logo, *se alguma d'estas funcções vier a passar por zero, mudará immediatamente de signal o resultado subsequente, que lhe é respectivo.*

Se pois nas funcções $f^{(n)}, \ldots\ldots f'', f', f$, formos substituindo por x valores crescentes muito vizinhos, os signaes de cada uma permanecerão os mesmos, até se chegar a um valor $x = a$, que torne nulla alguma d'estas funcções, que designaremos por φx; por que então, sómente para esta última, haverá mudança de signal. N'este estado teremos uma d'estas duas disposições

	$f^{(n)} \ldots\ldots\ldots \varphi' \; \varphi \ldots\ldots\ldots$	ou	$f^{(n)} \ldots\ldots \varphi' \; \varphi \ldots\ldots\ldots\ldots$
$x<a$	$\ldots\ldots\ldots\ldots + - + \ldots\ldots$		$\ldots\ldots + - - \ldots\ldots$
$x=a$	$\ldots\ldots\ldots\ldots + \; 0 + \ldots\ldots$		$\ldots\ldots + \; 0 - \ldots\ldots$
$x>a$	$\ldots\ldots\ldots\ldots + + + \ldots\ldots$		$\ldots\ldots + + - \ldots\ldots$

pelas quaes se vê, que *se* φx *passar por zero*, a variação *que existia, correspondente a* φ' *e* φ, *é substituida por uma* permanencia. Os outros signaes, correspondentes ás outras funcções, ficam os mesmos antes e depois de $x = a$.

Se os signaes da columna que fica á direita de φ, forem os mesmos que os de φ', a serie que resulta de $x<a$, tem uma segunda variação, ao passo que a que provém de $x>a$ tem uma permanencia; por conseguinte, *n'este caso, desapparecerão simultaneamente duas variações.*

Porém se os signaes da mesma columna, que fica á direita de φ, forem contrários aos de φ', terá a 1.ª serie uma variação e uma permanencia, e a 3.ª uma permanencia e uma variação; por onde se vê, que *n'este caso não desapparecerá variação alguma, e sómente a variação mudará um logar para a esquerda.*

Se $x = a$ for uma raiz de $fx = 0$, o que acabâmos de dizer só em parte se applica á funcção fx, por isso que ella não tem columna á direita. *Então, na passagem de* fx *por zero, somente desapparecerá uma variação.*

Se passado o valor $x = a$, continuarmos a dar a x valores crescentes muito proximos, conservar-se-ha a nova serie de signaes, até apparecer alguma funcção que se torne nulla. E assim por diante.

3.° Se φa e $\varphi' a$ forem conjunctamente nullos, isto é, se a for raiz das equações $\varphi x = 0$ e $\varphi' x = 0$, então as series (1) tornam-se em

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a-\delta) &= \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a - \tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a + \text{etc.} \\ \varphi a &= 0 \\ \varphi(a+\delta) &= \tfrac{1}{2}\delta^2\varphi'' a + \tfrac{1}{6}\delta^3\varphi''' a + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Como os resultados tem os signaes do 1.° termo dos desenvolvimentos, isto é, os mesmos signaes que $\varphi'' a$ tanto para $x<a$, como para $x>a$; e como a φa corresponde zero: vem n'este caso a depender tudo do signal de $\varphi'' a$. Porém φ' e φ'' estão nas mesmas circunstancias que φ e φ' no caso antecedente; por quanto, sendo

$$\varphi'(a \mp \delta) = \varphi' a \mp \delta\varphi'' a + \ldots\ldots = \mp \delta\varphi'' a + \ldots\ldots,$$

por ser $\varphi' a = 0$, terá φ' um signal contrário ao de φ'', quando for $x<a$; e terá φ' o mesmo signal que φ'', quando for $x>a$. Resultam por isso as duas disposições seguintes:

	$f^{(n)} \ldots\ldots \varphi''\ \varphi'\ \varphi \ldots$ ou	$f^{(n)} \ldots\ldots \varphi''\ \varphi'\ \varphi \ldots\ldots$
$x<a$	$+ - + +$	$+ - + -$
$x=a$	$+\ 0\ 0\ +$	$+\ 0\ 0\ -$
$x>a$	$+ + + +$	$+ + + -$

pelas quaes se vê, que as duas variações que havia no 1.° caso se tornam no último em permanencias; e que por isso, *quando* φx *e* $\varphi' x$ *passam conjunctamente por zero, perdem-se duas variações.*

Aqui não é necessario examinar quaes são os signaes das columnas á direita de φ, por quanto quer sejam positivos, quer negativos, não alteram, nos dous casos, a mudança do numero das variações ou das permanencias.

Tam pouco póde ter logar a hypothese de ser $fx = 0$; porque, devendo então ser tambem $f'x = 0$, teria fx raizes eguaes, o que não é possivel, por termos suposto fx já desembaraçada dos seus factores eguaes (n.° 50).

4.° Se tres funcções successivas φ, φ', φ'' forem nullas quando

$x=a$, prova-se por um raciocinio identico, que, se for $x<a$, haverá 4 ou 3 variações, conforme o signal da columna seguinte: e, se for $x>a$, haverá ou uma só, ou nenhuma variação: de sórte que *desapparecerão 4 ou 2 variações.*

$$
\begin{array}{llll}
 & f^{(n)} \ldots\ldots \varphi''' \; \varphi'' \; \varphi' \; \varphi \ldots & \text{ou } f^{(n)} \ldots\ldots \varphi''' \; \varphi'' \; \varphi' \; \varphi \ldots & \\
x<a \ldots\ldots\ldots\ldots & + \; - \; + \; - \; - & \ldots\ldots\ldots\ldots + \; - \; + \; - \; + & \ldots\ldots \\
x=a \ldots\ldots\ldots\ldots & + \; 0 \; 0 \; 0 \; - & \ldots\ldots\ldots\ldots + \; 0 \; 0 \; 0 \; + & \ldots\ldots \\
x>a \ldots\ldots\ldots\ldots & + \; + \; + \; + \; - & \ldots\ldots\ldots\ldots + \; + \; + \; + \; + & \ldots\ldots
\end{array}
$$

5.° Finalmente se o valor $x=a$ tornar nullas 4, 5, ... funcções, os desenvolvimentos (1) perderão outros tantos termos iniciaes, e o 1.° termo será affectado do signal $+$ quando o numero dos zeros for par; e dos signaes $\mp$ quando o numero dos zeros for impar. Cada zero corresponderá a uma variação, quando for $x<a$; e a uma permannecia, quando for $x>a$: de sórte que *as variações desapparecerão sempre aos pares.* Por conseguinte, se for par o numero z de zeros consecutivos, desapparecerão z variações; e se for z impar, desaparecerão $z\pm 1$, devendo escrever-se $+$, quando o signal que precede estes zeros é o mesmo que o que se lhes segue, e $-$ no caso contrário.

Suppondo dada, no seguinte exemplo, a serie media correspondente a $x=a$, obtem-se as outras duas pelo processo seguinte, a que Fourier deu o nome de *regra do signal duplo.* A primeira fórma-se assentando, por cima de cada zero, um signal contrario ao que lhe fica á esquerda; e a terceira, assentando por baixo de cada zero o mesmo signal, que lhe fica tambem á esquerda. Por este modo apparecem tantas variações para $x<a$, quantas permanencias para $x>a$. Nas columnas onde não entrám zeros, conservam-se os signaes da serie media.

$$
\begin{array}{l}
x<a + + - + - + - - + - + + + \;\; 8 \; var. \\
x=a + + \;\; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; - \; - \; 0 \; 0 \; 0 \; + + \\
x>a + + + + + + - - - - - + + \;\; 2 \; var.
\end{array}
$$

N'este exemplo, na passagem por $x=a$, desapparecem 6 variações.

79. Do que fica dito no n.° precedente segue-se pois, que se dermos a x um valor α, d'onde resulte uma certa serie de signaes, e fizer-

mos depois crescer x por gradações successivas: os resultados conservarão os mesmos signaes, em quanto se não chegar a um valor $x=a$, que torne nulla alguma das funcções $f^{(n)}, \ldots . f'', f', f$. Se a funcção que se torna nulla for fx, o valor correspondente de x fará desapparecer uma só variação. Porém se, em vez d'ella, for nulla alguma das suas derivadas, ou desapparecerão duas variações, ou pelo menos uma passará um logar para a esquerda. Poderiam desapparecer 2, 4, 6, ... variações conjunctamente no caso de haver mais derivadas successivas tambem nullas conjunctamente. Todas as vezes que x passar pelos valores r, r', r'', ... das raizes de $fx=0$, as variações desapparecerão uma a uma, ao passo que as raizes das equações $f'x=0$, $f''x=0$, ... as deixam subsistir, ou as fazem desapparecer 2 a 2. Em todo o caso, *se uma vez se perder uma variação, não poderá tornar a apparecer nas series resultantes de valores crescentes dados a* x.

Nenhuma d'estas funcções φ póde passar por zero, sem que, substituindo n'ella, e na funcção precedente φ', um numero pouco menor que a raiz de $\varphi x=0$, appareçam resultados com signaes contrarios, por modo que esta variação se possa mudar n'uma permanencia logo depois de passada esta raiz.

Como os 1.^os^ termos dos polynomios $f^{(n)}, \ldots . f'', f', f$ são alternadamente do gráo par e impar, se fizermos $x=-\infty$ ou simplesmente $x=$ ao limite $-l'$ das raizes negativas de $fx=0$, $f'=0$, ... obteremos resultados com signaes alternadamente positivos e negativos, ou n variações, por isso que em cada polynomio o 1.° termo será maior que a somma de todos os termos de signaes contrarios.

Se fizermos porém $x=\infty$, ou simplesmente $x=$ ao limite l das raizes positivas, todos os resultados virão com os signaes positivos, e só haverá permanencias. Portanto, se dermos a x valores crescentes desde $-l'$ até l, desapparecerão todas as variações.

Reciprocamente se houver dous numeros $-l'$ e l, d'um dos quaes resultem sómente variações e do outro permanencias, poderemos concluir que estes numeros são os limites de todas as raizes das equações $fx=0$, $f'x=0$, ... Porque, devendo qualquer raiz d'estas equações introduzir permanencias, ou pelo menos mudar o logar das variações, nenhum numero que não estiver entre $-l'$ e l póde produzir este effeito. E aqui se nos offerece uma nova prova de que todo o numero l que tornar positivos os polynomios $f, f', f'', \ldots \ldots f^{(n)}$ é limite superior das raizes da equação $fx=0$, vindo assim o theorema do pag. 71. a obter uma demonstração nova e mais extensa.

Representando por $2i$ o numero das raizes imaginarias de $fx=0$, será $n-2i$ o das reaes que estão comprehendidas entre $-l'$ e l. Se dermos a x valores crescentes muito vizinhos, entre estes limites, as n variações da 1.ª serie de signaes irão desapparecendo até á última. E como as raizes reaes $r, r', r'', \ldots\ldots$ fazem desapparecer as variações uma a uma, desapparecerão aos pares as outras $2i$ variações, em consequencia de se tornarem nullas as diversas derivadas $f, f', f'', \ldots\ldots$ Por meio d'estas substituições successivas vimos pois no conhecimento da existencia das raizes reaes e do seu numero.

80. Do que fica dito póde deduzir-se, e com mais extensão, a *Regra dos signaes de Descartes*. Com effeito, fazendo $x=0$, a linha dos signaes *será a mesma dos signaes successivos de* fx; porque então cada uma das funcções fica reduzida ao seu último termo, a qual, segundo já se viu, é o producto por 1. 2. 3...... dos coefficientes respectivos de fx tomados em ordem retrograda. Esta serie de signaes resultantes de $x=0$ terá pois as mesmas variações e permanencias que fx. Seja v o numero das primeiras, $n-v$ o das segundas. Passando de $x=0$ para $x=l$, a 1.ª serie perderá as suas v variações; e se a equação $fx=0$ tiver todas as raizes reaes, v d'ellas serão positivas. Do mesmo modo passando de $x=-l'$ para $x=0$, perder-se-hão $n-v$ variações, por isso que a $x=-l'$ correspondem n variações; e haverá por tanto $n-v$ raizes negativas, isto é, tantas quantas são as permanencias que ha em fx. Se a proposta tiver porém raizes imaginarias, as variações, que as indicam, desapparecerão aos pares. Logo:

Toda a equação que tiver todas as suas raizes reaes, terá precisamente tantas variações quantas são as raizes positivas; e tantas permanencias quantas são as raizes negativas (*). *E se tiver raizes imaginarias, terá* $v-2i$ *raizes positivas, e* $p-2i'$ *raizes negativas, sendo* v *o numero das variações, e* p *o das permanencias do polynomio,* i *e* i' *numeros inteiros.*

(*) *Se em uma equação* $fx=0$ *faltar algum dos seus termos, e os dous termos entre os quaes elle falta, tiverem os mesmos signaes, a equação terá raizes imaginarias.* Porque se em fx houver dous termos seguidos $qx^{h}+sx^{h-2}$, e fizermos $x=0$ em todas as derivadas, a serie dos termos consecutivos conterá $+\,0\,+$, que dá os signaes $+\ \overset{-}{\underset{+}{0}}\ +$, caracter por onde se reconhece a existencia das raizes imaginarias.

81. Por este theor fica demonstrado que, se por x substituirmos a e b em todas as funcções, e escrevermos os signaes dos resultados em duas series correspondentes A e B, sendo $a < b$:

1.° Não haverá nunca mais variações em B do que em A.

2.° Se o numero das variações for o mesmo em A e B, a proposta não terá raizes entre a e b.

3.° Se houver em B duas variações de menos do que em A, a proposta ou tem duas raizes reaes entre a e b; ou em vez d'ellas, tem duas imaginarias. No 1.° caso poderemos separar as raizes substituindo numeros intermedios que façam desapparecer as variações uma a uma, o que no 2.° caso se torna impraticavel.

5.° Se na serie B houver tres variações de menos que em A, ou existirão 3 raizes reaes entre a e b, ou haverá uma só, sendo as outras duas imaginárias. Empregar-se-hão processos especiaes para reconhecer estas circunstancias.

E assim por diante.

6.° O valor de x que, posto não seja raiz da equação $fx = 0$, faz perder duas variações, passando por augmentos continuos de a para b, indica a existencia de raizes imaginárias; torna nullas algumas derivadas, quando os signaes da precedente e da seguinte são os mesmos; e póde tambem anniquilar conjunctamente duas d'estas funcções successivas. A equação $fx = 0$ terá dous pares de raizes imaginárias, quando desapparecerem 4 variações, por serem nullas 3 ou 4 derivadas consecutivas. Finalmente, *suppondo sempre que as substituições se fazem por augmentos continuos*, haverá na equação tantos pares de raizes imaginárias, quantas forem as vezes que se perderem duas variações.

82. Como a substituição de numeros rigorosamente continuos não é realisavel, practicaremos como se segue:

1.° Substituir-se-hão arbitrariamente quaesquer numeros tomados entre um numero l', d'onde resultem sómente variações, e entre outro l, d'onde só resultem permanencias: estes numeros l' e l, como já dissemos, serão os limites entre os quaes estão comprehendidas as raizes. Apezar de se tomarem grandes intervallos, acontece muitas vezes que entre os numeros assim substituidos arbitrariamente não existem raizes, e é então necessario tomar intervallos ainda maiores, empregando tentativas que nos dispensem de cálculos inuteis.

2.° Quando o valor $x = a$ der na serie A dos signaes um ou muitos zeros successivos, formar-se-hão as series correspondentes a $a - \delta$, e a $a + \delta$, pela regra dos signaes duplos (pag. 126); comparar-se-ha a 1.ª com a serie que precede A a fim de achar as raizes $< a$; e a 2.ª com a que se segue a A, a fim de achar as raizes $> a$; finalmente comparar-se-hão as duas series correspondentes a $a-\delta$ e $a+\delta$, a fim de achar as raizes imaginárias, que são indicadas pelo numero par de variações, que desapparecem na passagem d'uma para outra.

Ex.° 1.° Da equação $fx = x^5 + x + 1 = 0$, que dá $f' = 5x^4 + 1$, $f'' = 20x^3$, ... resulta o seguinte quadro, no qual se fez uso da regra do signal duplo relativamente aos termos nullos da serie correspondente a $x = 0$:

$$\begin{array}{llcccccccl}
 & & f^{\text{V}} & f^{\text{IV}} & f''' & f'' & f' & f & \\
x = -1 & \ldots & + & - & + & - & + & - & 5 \; \textit{vari.} \\
x = \;\; 0 & \ldots & + & \overset{-}{\underset{+}{0}} & \overset{+}{\underset{+}{0}} & \overset{-}{\underset{+}{0}} & + & + & 4 \text{ ou } 0 \; \textit{vari.}
\end{array}$$

Vê-se por este quadro, que existe uma raiz real entre -1 e 0, e que as 4 variações que desappareceram desde $x < 0$ até $x > 0$ indicam a existencia de 4 raizes imaginárias. A curva que representa a equação $y = fx$ é a de fig. 12.

Ex.° 2.° Da equação $fx = x^4 - 4x^3 - 3x + 23 = 0$, que dá

$$f'x = 4x^3 - 12x^2 - 3,\; f'' = 12x^2 - 24x, \ldots\ldots$$

resulta o quadro

$$\begin{array}{llcccccl}
 & & f^{\text{IV}} & f''' & f'' & f' & f & \\
x = 0 & \ldots\ldots\ldots & + & - & \overset{+}{\underset{-}{0}} & - & + & 2 \text{ ou } 4 \; \textit{vari.} \\
x = 1 & \ldots\ldots\ldots & + & \overset{-}{\underset{+}{0}} & - & - & + & 2 \; \textit{vari.} \\
x = 2 & \ldots\ldots\ldots & + & + & \overset{-}{\underset{+}{0}} & - & + & 2 \; \textit{vari.} \\
x = 3 & \ldots\ldots\ldots & + & + & + & - & - & 1 \; \textit{vari.} \\
x = 4 & \ldots\ldots\ldots & + & + & + & + & + & 0 \; \textit{vari.}
\end{array}$$

As duas variações que desapparecem desde $x<0$ até $x>0$ indicam a existencia de 2 raizes imaginárias; os zeros que se encontram nas series correspondentes a $x=1$, e $x=2$ não fazem desapparecer nenhuma variação, porque *cada um dos zeros fica entre dous signaes differentes.* Além disto ha uma raiz entre 2 e 3, e outra entre 3 e 4, ás quaes applicaremos os methodos de approximação. A curva correspondente a esta equação $y=fx$ é representada na fig. 20 por MOM'.

83. Se entre os dous numeros a e b existir apenas uma raiz, havendo por conseguinte a perda de uma só variação de A para B, podemos applicar a esta raiz o methodo de approximação de Newton; tendo porém cuidado de satisfazer primeiro ás condições prescriptas naquelle methodo (pag. 110.), de que f' e f'' não mudem da signal de a até b, o que equival a ser a última variação perdida precisamente na última columna f. Então todos os signaes de A e B são os mesmos, excepto o último. No ex.° precedente tem isto logar entre 2 e 3.

Se a variação desapparecer porém antes do último termo das series, f' e f'' não satisfarão á condição exigida; e então será necessario substituir numeros intermedios entre a e b, para que, estreitado o espaço que contém a raiz, não haja n'elle nem inflexão nem tangente horizontal á curva $y=fx$, e recaiâmos no 1.° caso.

Assim no último exemplo, querendo approximar-nos da raiz que fica entre 3 e 4, como ha mudança de signal em f'; e como resolvendo a equação $f'x=0$, se vê que ella tem só real uma raiz entre 3 e 3,1: devemos estreitar os limites de $fx=0$ entre 3.1 e 4. Fazendo depois $x=4$, valor que dá os mesmos signaes a f' e f'', obteremos $f'''=61$, $f=11$, $s=-0{,}02$, e $x=3{,}8$ na primeira approximação. Fazendo depois $x=3{,}8$, vem $f'=43{,}208$, $f=0{,}6256$, $s=-0{,}01448$. d'onde finalmente resulta o novo valor mais approximado $x=3{,}78552$; E assim por diante, sendo s a correcção dada pelo methodo de Newton.

84. No caso de se perderem duas variações de A até B, cumpre ainda indagar, se ha com effeito duas raizes entre a e b. Esta discussão abranje tres casos.

Se, comparando da direita para a esquerda os signaes correspondentes das duas series, depararmos com dous signaes contrarios debaixo da mesma funcção, ahi será uma variação substituida logo por uma permanencia, devendo mais adiante perder-se a segunda variação. Se esta perda tiver logar nos últimos signaes, poderão dar-se os dous 1.^{os} casos seguintes, n'um dos quaes ambas as variações se perdem nos tres últimos signaes; e no outro perde-se a 1.ª antes de f';

	1.° CASO (*) .. $f'' \; f' \; f$	2.° CASO ... $f''' f'' f' f$
$x=a$....	$++-$ .... $+-+$	$++$ .... $+--+$
$x=b$....	$++-$ .... $+++$	$++$ .... $++++$

O 3.° caso será aquelle em que ambas as variações se perdem antes dos últimos signaes.

Consideremos estes tres casos na curva parabolica MOM′ (fig. 19 e 20), cuja equação é $y=fx$, e que está comprehendida entre as abscissas $AP=a$, $AP'=b$.

1.° CASO. Como $f'a$ e $f'b$ tem signaes contrários, e estas derivadas representam os valores das tangentes dos angulos T e T′ que fazem com o eixo dos x as rectas MT e M′T′, que tocam a curva nos pontos M e M′, cujas abscissas são a e b, vê-se que um d'estes angulos é agudo para o eixo e o outro obtuso. E como $f'x$ não perde senão uma variação, $f'x=0$ apenas terá uma raiz entre a e b, isto é, a curva $y=fx$ terá n'om ponto intermedio O uma só tangente parallela aos x. Por outra parte $f''x$ não perde variação, e conserva n'este intervallo o signal positivo; o que indica que a curva é concava para a parte superior (n.° 59.) As fig. 19 e 20 representam a forma d'esta porção do arco, sendo O o ponto em que $f'x$ passa por zero, do positivo ao negativo.

Se a curva cortar o eixo no intervallo PP′ (fig. 20) terá duas raizes reaes Ak e Ak': no caso contrário (fig. 19) estas raizes serão imaginárias, e as tangentes aos diversos pontos do arco MOM′ se inclinarão então cada vez mais sôbre o eixo de M para O, ponto em que se dá o parallelis-
/e mo, levantando-sa depois em sentido opposto para M′. A natureza concava do arco, faz com que elle fique comprehendido no angulo formado pelas suas tangentes em M e M′. Ve-se pois que se o vertice B (fig. 19) d'este angulo ficar para a parte de cima do eixo, a curva não poderá cortal-o; e as raizes entre P e P′ serão com certeza imaginárias.

Mas as subtangentes em M e M′ são

$$PP = S_1 = -\frac{fa}{f'a},\; P'T' = S_2 = -\frac{fb}{f'b};\; \ldots (1)$$

(*) Póde acontecer que os signaes de fa e fb sejam conjunctamente negativos, isto é, contrarios áquelles que aqui indicâmos: este caso porém não exige um exame especial, bastará fazer girar a fig. 19 e 20 de maneira que estas figuras fiquem, por meio de uma revolução em volta do eixo dos x, para a parte debaixo, e então tudo é similhante ao que fica exposto no texto.

das quaes a 1.ª é positiva porque $f'a$ tem o signal —, e a 2.ª negativa. Logo, abstrahindo dos signaes, *se uma das subtangentes, ou a somma das duas, egualar, ou exceder, o intervallo* b — a, *as duas raizes presumidas serão imaginárias.*

Não tendo logar esta circunstancia, haverá incerteza a respeito da natureza das raizes, que então poderão ser reaes ou imaginárias, por isso que a curva, entre P e P', póde ou cortar o eixo, ou não o encontrar; e nesse caso practicaremos de uma das seguintes maneiras.

Consideraremos os limites a e b como muito desviados para a solução da questão, e tomando por isso em vez de x um numero qualquer intermedio a', veremos se a serie dos signaes, comparada com A e B, faz desapparecer as variações uma a uma; porque então haverá duas raizes reaes, uma entre a e a', e a outra entre a' e b. E se as duas variações se perderem ainda entre a e a', calcularemos a subtangente correspondente a $x = a'$, a fim de verificarmos se a regra precedente tem logar.

Ou então practicaremos, como se já estivesse decidido que as raizes intermedias são reaes, e quizessemos approximal-as cada vez mais pelo methodo de Newton; por que nesse caso viriamos a obter duas novas subtangentes, cuja somma poderia exceder $b - a$.

E como ao passo que nos approximâmos do minimo correspondente ao ponto O, as tangentes tendem a tornar-se parallelas ao eixo, e começam as subtangentes a ser muito grandes, podemos por meio d'esta circunstancia verificar a regra de cima. Se as raizes forem imaginárias, depressa se virá nesse conhecimento pelo valor das subtangentes $> b - a$.

Pelo contrário, se as raizes são reaes, as tangentes não augmentam indefinidamente, os valores de x começam a convergir para dous termos que são as raizes pedidas Ak e Ak'; e com facilidade se achará um valor medio, que, substituido por x, separe estas duas raizes.

2.º caso. Como fa e $f''a$ tem signaes contrarios, e $f''x$ perde uma variação, a equação $f''x = 0$ terá uma raiz entre a e b. Sendo então $f''x$ e $f''b$ de signaes contrários, e passando $f''x$ por zero n'este intervallo, o arco será convexo para a parte superior em m (fig. 19) no 1.º limite A$p = a$, e concavo no 2.º AP$' = b$, havendo no mesmo intervallo um ponto d'inflexão I, cuja abscissa Aq é a raiz de $f''x = 0$. Por meio das tangentes não podemos resolver a difficuldade, porque a tangente mt não póde satisfazer ás condições prescriptas. Cumpre por isso estreitar primeiro o intervallo, a fim de que a inflexão não fique n'elle comprehendida; o que se consegue substituindo por x outro valor intermedio a', conducente ao fim proposto. Feito isto a questão fica reduzida á do 1.º caso.

Se a curva tivesse a figura MIM (fig. 5), na qual a inflexão está precisamente no ponto em que a tangente é horizontal, não seria possivel estreitar o intervallo de modo, que se evitasse, que as derivadas f'' não tivessem signaes contrários. Porém como então f' e f'' são conjunctamente nullos, as equações $f'x=0$ e $f''x=0$ teriam uma raiz commum; e estariamos em um dos casos das raizes eguaes. As raizes procuradas seriam imaginárias, excepto se o ponto I de inflexão coincidisse com o da secção da curva com o eixo, caso em que sería tambem $fx=0$, e em que a proposta tería por conseguinte raizes eguaes.

3.° Caso. Se a comparação das series A e B manifestar a perda das duas variações, antes de chegar á última columna, e se a variação desapparecer, por ex.°, desde f''', devemos tractar a equação $f'''x=0$, e indagar se tem duas raizes entre a e b. Se as não tiver, a equação $f'''x=0$, terá tambem duas raizes imaginárias indicadas pelas duas variações perdidas; por quanto, não podendo a tangente ao arco da curva, cuja equação é $y=f''x$, tornar-se horizontal entre a e b por não ser $f'''x$ nulla, o arco não terá maximo n'este intervallo. Do mesmo modo se reconhece, que as equações $f'x=0$ e $fx=0$ tem duas raizes tambem imaginárias correspondentes.

Porém se $f''x=0$ tiver duas raizes reaes entre a e b, a curva $y=f''x$ terá neste intervallo duas tangentes horizontaes, e tomará a fórma da fig. 21, appresentando duas ondulações, com um maximo e um minimo. O intervallo de a e b é então muito grande, e deve diminuir-se, até que as inflexões não sejam n'elle comprehendidas, e haja só um minimo. Examinar-se-ha então se a equação $f'''x=0$ tem duas raizes reaes entre os novos limítes, mais estreitos, a e b. Indagar-se-ha depois se a curva cuja equação é $y=f'x$ tem ou não duas secções com eixo; e o mesmo a respeito da curva $y=fx$. Basta que as duas raizes procuradas sejam imaginárias para uma das equações.... $f'''x=0$, $f''x=0$, $f'x=0$, para o serem tambem para as seguintes.

N'esta theoria suppomos sempre que a equação de que se tracta, está desembaraçada das suas raizes eguaes, e por isso devemos primeiro, que tudo verificar se a equação $f''x=0$ tem ou não raizes d'esta especie. Como porém a indagação das raizes eguaes demande um cálculo extenso (n.° 50), convem evital-o, e não o empregar sem que se torne necessario. É esta uma das vantagens do methodo de Fourier, por que sendo o caso das raizes eguaes excepcional, sómente se entra na sua indagação, quando accidentalmente se torna indispensavel.

85. Só nos resta agora vêr, o que se deve practicar nos casos de desapparecerem mais de duas variações de a até b. Facilmente se comprehende que, estreitando estes limites, as variações desapparecerão ou uma

a uma, ou duas a duas, e assim voltaremos aos casos já tractados. Poderia porém acontecer que para um valor de x entre a e b, muitas derivadàs se tornassem nullas, e viriamos então a achar muitos zeros successivos na serie dos signaes correspondentes a um numero intermedio a', como no caso da pag. 133; e então desappareceriam 4, 6, ... variações ao mesmo tempo, as quaes indicariam a existencia de outras tantas raizes imaginárias. Facilmente se reconhece este caso, porque estas derivadas tem então factores communs, os quaes, egualados a zero, dão o valor de x que produz estes zeros successivos, e torna evidente a existencia das raizes imaginárias.

86. Passemos a applicar estes principios a differentes exemplos.

I. $fx = x^3 - 5x + 3,\ f' = 3x^2 - 5,\ f'' = 6x,\ f''' = 6.$

$$
\begin{array}{rl}
 & f'''\ f''\ f'\ f \\
x = -3 \ldots & + - + - \ 3\ \textit{vari.} \\
-2 \ldots & + - + + \ 2\ \textit{vari.} \\
0 \ldots & + \begin{matrix} - \\ 0 \\ + \end{matrix} - + \ 2\ \textit{vari.} \\
+1 \ldots & + + - - \ 1\ \textit{vari.} \\
+2 \ldots & + + + + \ 0\ \textit{vari.}
\end{array}
$$

A equação proposta tem tres raizes reaes entre -3 e -2; 0 e 1; 1 e 2. A curva é representada pela fig. 11.

II. $fx = x^3 - x^2 + 2x - 3,\ f' = 3x^2 - 2x + 2$, etc.

$$
\begin{array}{rl}
 & '''\ \ ''\ \ ' \\
x = 0 \ldots & + - + - \ 3\ \textit{vari.} \\
1 \ldots & + + + - \ 1\ \textit{vari.} \\
2 \ldots & + + + + \ 0\ \textit{vari.}
\end{array}
$$

A proposta tem uma raiz entre 1 e 2; procurando as que ficam entre 0 e 1 vê-se que são imaginárias; porque as duas variações perdem-se desde f', e a equação $f'x = 0$ não tem raizes reaes. A curva é representada na fig. 12,

III. $fx = x^4 - 6x^3 + 40x^3 + 60x^2 - x - 1.$

$x = -1 \ldots + - + - + - + \; 6$ *vari.*

$-0{,}5 \ldots + - + + + - + \; 4$ *vari.*

$0 \ldots + - 0 + + - - \; 3$ *vari.*

$1 \ldots + 0 - 0 + + + \; 2$ *vari.*

$2 \ldots + + 0 - + + + \; 2$ *vari.*

$3 \ldots + + + + + + + \; 0$ *vari.*

Se omittissimos $x = -\frac{1}{2}$, desapparecerião 3 variações de -1 até 0, o que mostra ser necessario tomar este intermedio.

Como os resultados zero ficam entre signaes contrarios, nada nos dizem sôbre a existencia das raizes imaginárias (pag. 129.). Ha uma raiz entre $-\frac{1}{2}$ e 0, e outra entre 0 e 1; que são $x = -0{,}13$ e $x = +0{,}12$.. Passemos ás outras quatro que se presumem entre -1 e $\frac{1}{2}$, e entre 2 e 3. As duas variações perdem-se desde f'', e por isso devemos fazer $f''x = 0$: porém antes de tudo é necessario averiguar se esta equação tem raizes eguaes, como na verdade tem, por quanto

$$f'' = 30(x^2 - 2x - 2)^2, \; f''' = 120(x-1)(x^2 - 2x - 2).$$

A curva cuja equação é $y = f'''x$ toca o eixo no ponto que tem por abscissas as raizes da equação $x^2 - 2x - 2 = 0$, a saber, $x = 1 \pm \sqrt{3}$ (v. fig. 22), por causa das raizes duplas. Se empregassemos pois estes valores de x para deduzirmos a serie de signaes d'estas funcções, achariamos dous zeros successivos, e por conseguinte pela regra dos signaes duplos se veria que haviam de desapparecer duas variações, por mais vizinhos das raizes que se tomassem os dous limites, os quaes não sendo communs com $f'x = 0$, provam que esta última equação não tem raizes reaes entre -1 e $-0{,}5$, nem entre 2 e 3: logo a equação proposta está no mesmo caso.

IV. Para $x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$, $f' = 4x^3 - 12x^2$ etc.

$x = -1 \ldots + - + - + \; 4$ *vari.*

$0 \ldots + - + + + \; 2$ *vari.*

$1 \ldots + 0 - 0 + \; 2$ *vari.*

$2 \ldots + + + - + \; 2$ *vari.*

$3 \ldots + + + + + \; 0$ *vari.*

Ha razão para crer que as raizes entram aos pares entre 0 e -1, e entre 2 e 3. Procurando estas últimas, acha-se $S_1 = \frac{2}{6}$ e $S_2 = -\frac{2}{12}$, cuja somma é $\frac{1}{2}<1$, e fica duvidosa a existencia das duas raizes intermedias; as raizes approximadas são $x=2,4$ e $2,8$. Substituindo acha-se:

$$x=2,4 \ldots\ldots + + + -3,024 + 0,0416$$
$$2,8 \ldots\ldots + + + + 5,328 + 0,2976.$$

Logo $S_1 = 0,01$, $S_2 = -0,06$, $x=2,41$ e $x=2,94$. Como as subtangentes longe de augmentarem, decrescem, approximando-se do minimo, vê-se que as raizes são reaes. Para separal-as, tome-se uma media tal, como

$$x=2,5 \ldots\ldots + + + - -$$

ficando assim postas em evidencia as duas raizes, ás quaes applicaremos o methodo de approximação. As raizes entre 0 e -1 tambem são reaes, As raizes da equação proposta são

$$x=1 \pm \sqrt{2} = 1 \pm 1,41421 \ldots, \text{ e } x = 1 \pm \sqrt{3} = 1 \pm 1,73205 \ldots$$

A curva $y=fx$ tem pouco mais ou menos a fórma da fig. 13.

87. *Theorema de M. Sturm.* Procede-se, pelo methodo do divisor commum, á investigação dos factores eguaes de fx (n.° 47) tendo o cuidado de *mudar o signal dos restos consecutivos* antes de se tomarem para divisores; isto é, divide-se fx por $f'x$; depois $f'x$ pelo primeiro resto com o signal trocado; e assim por diante. Por este modo obter-se-ha uma serie de polynomios de gráos decrescentes, cada um dos quaes é alternadamente dividendo e divisor, taes como (*)

(*) O mais longo de todos estes calculos é o que dá o resto da divisão de fx por $f'x$; porém a nota da pag. 85 dá uma regra, pela qual se abbrevia muito esta operação.

$$fx, f'x, \ldots\ldots Fx, \varphi x, \psi x, \ldots\ldots V \ldots\ldots \text{(M)}.$$

Cada um d'estes termos é o resto, com o signal trocado, que resulta da divisão entre os dous termos que lhe ficam á esquerda; e o último V é um numero, que sempre será differente de zero, se suppuzermos a equação $fx = 0$ desembaraçada das suas raizes eguaes (n.° 49.).

Substitua-se em todos estes polynomios por x um numero a qualquer, e escrevam-se em linha os signaes successivos dos resultados que se obtiverem; faça-se o mesmo com outro numero b, e assentem-se os signaes dos resultados em correspondencia com os primeiros. Posto isto, o theorema, que se pertende demonstrar, enuncia-se assim:

Se for $b > a$ *a segunda serie de signaes terá de menos tantas variações, quantas são as raizes reaes da equação* $fx = 0$, *comprehendidas entre* a *e* b. *Se as duas series tiverem um numero egual de variações, não haverá raiz alguma real entre estes dous numeros.*

1.° Já se demonstrou (pag. 123), que se fizermos crescer x por augmentos successivos de a até b, qualquer dos polynomios φx dará resultados do mesmo signal em quanto se não tornar nullo; porém que se $x = \alpha$ tornar $\varphi\alpha = 0$, φx mudará de signal; e que o signal de φx será contrário ao de $\varphi' x$ em quanto for $x < \alpha$, e será o mesmo quando for $x > \alpha$.

2.° *Dous polynomios successivos* (M) *não podem ser conjunctamente nullos.* Porque das tres funcções successivas Fx, φx, ψx, uma é dividendo, outra divisor, e a última resto com signal trocado, sendo por isso

$$Fx = Q \times \varphi x - \psi x.$$

Se houvesse pois um valor $x = \alpha$ que tornasse $\varphi a = \psi a = 0$, tambem sería $F\alpha = 0$, isto é, tambem sería nullo o polynomio Fx que precede φx, e assim a respeito dos outros successivamente até $f'x$ e fx: d'onde se seguiria que fx teria factores eguaes, o que é contra a nossa hypothese. Do mesmo modo se vê, que $F\alpha = \varphi\alpha = 0$, daria $\psi a = 0$, e todas as funcções seguintes seriam por conseguinte nullas, incluindo V, o que tambem não póde ser.

3.° *Todo o polynomio, que se tornar nullo, fica entre dous resultados de signaes contrarios.* Porque se for $\varphi\alpha = 0$, será $F\alpha = -\psi\alpha$, e os tres polynomios terão os signaes $+ 0 -$, ou $- 0 +$. Se fizermos pois crescer x de a até b por augmentos contínuos, a passagem por zero de qualquer d'estes polynomios não alterará o numero das variações, porque comparando as duas series antes e depois de $x = \alpha$, vê-se que dão

$$+ - -, \text{ e } + + -; \text{ ou } - - +, \text{ e } - + +.$$

Vejamos porém o que a contece no último e no 1.º polynomio, os quaes não ficam, como os outros, entre dous signaes. Em quanto a V, que é um numero, não muda nunca de signal. Em quanto a fx, já sabemos que se for $f\alpha = 0$, o signal de fx que era contrário ao de $f'x$ quando $x < \alpha$, se torna no de $f'x$, quando $x > \alpha$, e que por este modo uma variação se muda n'uma permanencia.

Continuando a dar successivamente valores crescentes a δx, poderá $f'x$ vir tambem a passar por zero e mudar de signal, sem que por isso se altere o numero das variações, como já se demonstrou. Tornando pois fx e $f'x$ a ter signaes contrarios, poderá fx passar de novo por zero, e fazer desapparecer uma nova variação. E assim por diante.

Fica portanto demonstrado o theorema, visto que o desapparecimento das variações, de uma serie para outra, só póde provir de se tornar $fx = 0$, em consequencia de valores successivos dados a x desde a até b.

Cumpre advertir, que podemos, sem alterar estas consequencias, *multiplicar ou dividir* qualquer dos polynomios *por um numero positivo*, evitando assim por meio d'estes factores os coefficientes fraccionarios.

88. Passemos agora á applicação do theorema. Faça-se $x = 0$ em todos os polynomios (M), a fim de se obter para cada funcção o signal do seu último termo, e formar assim a serie correspondente. Faça-se depois $x =$ ao limite superior l das raizes positivas, o qual, como se sabe, dá aos polynomios o signal do seu 1.º termo, como se se fizesse $x = \infty$. Faça-se depois $x =$ ao limite $-l'$ das raizes negativas, o qual dará os mesmos signaes que $x = -\infty$.

Contem-se depois as variações de cada uma das tres series resultantes; e se vier algum resultado zero, substitua-se indefferentemente por um dos signaes $+$ ou $-$, ou não se attenda a elle, visto que um zero cahe sempre entre signaes contrários. D'aqui se concluirá que a proposta $fx = 0$ tem tantas raizes negativas, quantas são as variações perdidas na passagem de $-l'$ para 0; e tantas positivas quantas são as variações perdidas desde 0 até l.

Para separar estas raizes umas das outras, substituiremos os numeros intermedios, que se irão approximando até que as variações desappareçam uma a uma; e para se proceder com mais ordem, substitua-se por x primeiro zero, e depois numeros crescentes, tanto positivos como negativos, até se chegar ás series de signaes que coincidem com as correspondentes a $+\infty$ e $-\infty$; por que assim se manifestarão por si mesmos os dous limites das raizes.

Ex.° I. $fx = x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x + 5 = 0$, dá

$$f' = 4x^3 - 3x^2 + 4x - 6, -13x^2 + 68x - 74,$$
$$-792x + 1141 \quad , +1892293,$$
$$x = 0 \ldots\ldots + - - + + \; 2 \text{ vari.}$$
$$1 \ldots\ldots + - - + + \; 2 \text{ vari.}$$
$$2 \ldots\ldots + + + - + \; 2 \text{ vari.}$$
$$4 \ldots\ldots + + - - + \; 2 \text{ vari.}$$

Não ha raiz nenhuma negativa, nem>4: e como em todo este intervallo se não perde nenhuma variação, as quatro raizes são imaginárias.

II. Ex.° $fx = x^5 + x^3 + 2x^2 + 2 = 0$, dá $f' = 5x^4 + 3x^2 + 4x$,

$$-x^3 - 3x^2 - 5, -16x^2 + 7x - 25, -3x - 19 + 6400.$$
$$x = -4 \ldots\ldots - + + - + + \; 3 \text{ vari.}$$
$$-2 \ldots\ldots - + - - - + \; 3 \text{ vari.}$$
$$-1 \ldots\ldots + + - - - + \; 2 \text{ vari.}$$
$$-0 \ldots\ldots + 0 - - - + \; 2 \text{ vari.}$$
$$+1 \ldots\ldots + + - - - + \; 2 \text{ vari.}$$

Não podem haver raizes senão entre -4 e $+1$, e como só se perde uma variação, ha apenas uma raiz real, que fica entre -1 e -2.

III. Ex.° $fx = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2$, dá

$$2x^2 - 6x^3 + x + 3, 5x^2 - 10x - 7, x - 1, +12$$
$$x = -1 \ldots\ldots + - + - + \; 4 \text{ vari.}$$
$$0 \ldots\ldots + + - - + \; 2 \text{ vari.}$$
$$1 \ldots\ldots + 0 - 0 + \; 2 \text{ vari.}$$
$$2 \ldots\ldots + - - + + \; 2 \text{ vari.}$$
$$3 \ldots\ldots + + + + + \; 0 \text{ vari.}$$

Ha duas raizes entre 0 e -1, e duas entre 2 e 3.

Este theorema de M. Sturm é muito notavel e merece figurar nos Elementos d'Algebra. É evidente a analogia que tem com o de Fourier, e o proprio auctor confessa que se serviu d'aquelle nas suas investigações. Comtudo este methodo é incompleto, porque não nos indica o meio de separar uma das outras as raizes que não se acham isoladas entre os numeros substituidos, sendo ainda necessario para isso recorrer a novas substituições; nem tão pouco nos ensina a achar raizes cada vez mais approximadas.

89. *Methodo de M. Budan.* Se na equação $fx=0$ fizermos $x=a+y$, a transformada, que facilmente se obtem pelo processo de pag. 59, terá por incognita $y=x-a$. Do mesmo modo obteremos outras transformadas, cujas incognitas serão $z=x-b$, $t=x-c$, sendo a, b, c.... quaesquer numeros crescentes. Estas transformadas podem facilmente deduzir-se umas das outras, pondo $b=a+\alpha$, $c=b+\beta$, ...; e substituindo, na 1.ª transformada em $y=x-a$, por y a expressão

$$y-\alpha=x-(a+\alpha)=x-b=z;$$

depois n'esta última por z a expressão

$$z-\beta=x-(b+\beta)=x-c=t;$$

e assim por diante.

Feito isto, admittamos por um pouco que todas as raizes de $fx=0$ são reaes. Então, tanto n'esta equação, como nas transformadas, o numero das raizes positivas será egual ao das variações (n.° 76). Se em $fx=0$ houver porém raizes entre 0 e a, estas tornar-se-hão negativas na transformada em $y=x-a$, e em consequencia disto perder-se-hão tantas variações na última quantas forem as raizes, que ha na proposta, entre 0 e a. Assim, se a proposta e a transformada em $x-a$ tiverem o mesmo numero de variações, não haverá raiz alguma entre 0 e a; haverá uma só, se a transformada perder uma variação; 2, 3, 4, ... raizes, se desapparecerem 2, 3, 4.... variações. Pela mesma razão, na transformada em $z=y-\alpha$, quantas forem as variações perdidas na passagem da tranformada em y para a transformoda em z, tantas raizes y haverá entre 0 e α, isto é, tantas raizes quantas são as de $fx=0$ entre a e b, porque $b=a+\alpha$. E assim consecutivamente. Para obter o numero das raizes negativas, mudar-se-ha x em $-x$ em $fx=0$, e investigar-se-ha o numero das raizes positivas da transformada.

Mas se a proposta tiver raizes imaginárias, estas consequencias não tem logar; e por isso quando desapparecem duas variações póde entrar em dúvida se esta perda é devida á existencia de duas raizes intermedias, ou se essas raizes são substituidas por duas imaginárias. A perda de tres variações põe em dúvida se são tres, ou só uma, as raizes reaes; etc.

Segundo M. Budan, é necessario neste caso introduzir fracções que estreitem os intervallos, por modo que se possam separar as duas raizes intermedias, quando existam; o que se reconhece pela perda das variações uma a uma. Se estas raizes forem muito proximas, de modo que, por ex.°, só diffiram na 2.ª decimal, sómente haverá certeza de as haver separado, quando o intervallo entre os numeros $0, a, b, c, \ldots$ for de uma centesima. Porém, não fallando no trabalho que dão estes cálculos, como a separação das raizes é impossivel, quando não existem, póde levar-se muito longe, e debalde, a approximação, sem haver um indicio da não existencia das mesmas raizes. Não é possivel destruir esta objecção contra o methodo, exceptuando alguns casos particulares em que M. Budan resolve a difficuldade, a qual fica em pé para todos os outros casos; razão porque este methodo não satisfaz geralmente.

Eis aqui como o seu auctor o applica á approximação das raizes. Tiram-se, successivamente da equação $fx = 0$ pelo processo da pag. 59, todas as transformadas em $x-1$, $x-2$, $x-3$, ... até se chegar a uma equação que tenha sómente signaes positivos; pelo número das variações perdidas sabe-se quantas raizes *podem existir* entre os numeros $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ d'onde se deduz o inteiro contido em cada uma d'ellas. Se a transformada em $x-a$ tiver zero por último termo, $x-a$ será factor de fx (n.° 27); e quando muitos dos últimos termos das transformadas forem nullos conjunctamente, a raiz a será multipla; vindo por este modo a reconhecer-se todas as raizes inteiras eguaes e desiguaes. Quando existirem estas raizes, dividir-se-ha fx por $x-a$ tantas vezes, quantos forem os últimos termos nullos, e depois se applicará o methodo ao quociente, a fim de obter as raizes fraccionarias.

Designemos por (0), (1), (2), ... as transformadas em $x-0$, $x-1$, $x-2$, etc.

Então na equação $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 24x + 16 = 0$, teremos

$$\begin{array}{ll} (0)\ldots\ldots & 1 - 6 + 16 - 24 + 16 \\ (1)\ldots\ldots & 1 - 2 + \ 4 - \ 6 + \ 3 \\ (2)\ldots\ldots & 1 + 2 + \ 4 \quad\ 0 \quad\ \ 0 \end{array}$$

Por onde se vê, que fx é divisivel por $(x-2)^2$; e como o quociente é $(x-1)^2+2(x-1)+4=0$, equação cujas raizes são imaginárias, vê-se que a proposta só tem duas raizes eguaes, e as outras imaginárias.

Na equaçao $x^4-8x^2-16x-2=0$, limitando-nos ás transformadas em que se perdem variações, que são as que basta tractar, teremos

	(0)....	1	0	— 8	— 16	— 12	1 *vari.*
	(3)....	1	+ 12	+ 46	+ 44	— 51	1 *vari.*
	(4)....	1	+ 16	+ 88	+ 176	+ 52	0 *vari.*
Mudando x em $-x$	(0)....	1	0	— 8	+ 16	— 12	3 *vari.*
	(1)....	1	+ 4	— 2	+ 4	— 3	3 *vari.*
	(2)....	1	+ 8	+ 16	+ 16	+ 4	0 *vari.*

Onde se vê que ha uma raiz entre 3 e 4; e que entre -1 e -2 podem haver 3, ou talvez uma só real e duas imaginárias.

Conhecido o inteiro a de cada raiz, para achar o algarismo a' das decimas, a'' das centesimas, etc.: supponhâmos

$$x-a=\tfrac{1}{10}x',\ x'-a'=\tfrac{1}{10}x'',\ x''-a''=\tfrac{1}{10}x''',\ \text{etc.},$$

o que dará

$$x=a+\tfrac{1}{10}a'+\tfrac{1}{1000}a''+\text{etc.}$$

Ora, sendo a o maior inteiro contido em x, é $x-a<1$ e $x'<10$; sendo tambem a' o maior inteiro contido em x', é $x'-a'<1$, e $x''<10$; e assim por diante. Logo todos os inteiros $a', a'', a''', \ldots\ldots$ contidos em $x', x'', x''', \ldots.$ são <10, e formam as letras successivas de dizima no valor de x.

Depois de achar a transformada em $x-a$, que perde uma variação, e faz conhecer o inteiro a da raiz, passar-se-ha á composição da transformada em x', a qual se obtem, segundo se deduz da equação $x-a=\frac{1}{10}x'$, multiplicando por $10^0, 10^1, 10^2, \ldots.$ os respectivos coefficientes da equação em $x-a$. D'esta equação em x', se deduzirão as transformadas em $x'-1$, $x'-2$, ..., das quaes aquella $x'-a'$, que perder uma variação, dará o algarismo $a'<10$ das decimas. Multiplicando de novo os coefficientes successivos da transformada em $x' - a'$ por $10^0, 10^1, 10^2, \ldots\ldots$ passaremos para a transformada em x'', d'onde se deduzirão as transformadas em $x'' - 1$, $x'' - 2 \ldots\ldots$ das quaes aquella $x'' - a''$ que perder uma variação dará o algarismos $a'' < 10$ das centesimas. E assim para as decimaes subsequentes.

Advirta-se que se, em vez de pararmos com o cálculo na transformada que dá uma variação de menos, o continuassemos até á transformada em $x' - 10 = 10[x - (a+1)]$, os coefficientes d'esta equação seriam os productos por $10^0, 10^1, 10^2, \ldots\ldots$ dos coefficientes da transformada em $x - (a+1)$; e podemos por isso servir-nos deste meio para prova da exactidão dos cálculos.

No ex.° precedente, supprimindo as transformadas inuteis, teremos para a raiz entre 3 e 4

eq. em x'	(0)	1	$+120$	$+4600$	$+44090$	-510000
	(6)	1	$+144$	$+6976$	$+113024$	-53184
	(7)	1	$+148$	$+7414$	$+127412$	$+66961$
	(10)	1	$+160$	$+8800$	$+176000$	$+520000$

D'aqui se conclue que x' está entre 6 e 7, logo $x = 3{,}6$. A equação (10) sendo o mesmo que a equação (4) de cima, multiplicados os seus coefficientes por $10^0, 10^1, 10^2, \ldots\ldots$, serve de prova aos calculos. Para achar as centesimas das raizes, empregar-se-hia outra vez a equação (6), multiplicando os seus coefficientes por aquelles factores, e viría a transformada em x'' etc.

Por este processo se acharia $x = 3{,}64575$.

Do mesmo modo se acharia a raiz comprehendida entre -1 e -2. As outras duas raizes são imaginárias.

Este methodo de approximação, posto que geral, é longo e menos commodo que os outros, que por isso são preferiveis. Emprega-se com vantagem para separar as raizes, quando se acham muitas comprehendidas entre dous inteiros successivos: porque então as variações que se perdiam ao mesmo tempo na passagem de uma transformada para a seguinte, começam a não desapparecer senão uma depois d'outra, logo que se chega á primeira letra de dizima que não é commum a estas raizes. Isto se vê no ex.° seguinte etc.

$$x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$$

	(0)....	$1-4+$	$1+$	$6+2$			2 *vari.*
	(1)....	1	$0-$	5	$0+6$		2 *vari.*
	(2)....	$1+4+$	$1-$	$6+2$			2 *vari.*
	(3)....	$1+8+$	$19+$	$12+2$			0 *vari.*
Mudando x em $-x$	(0)....	$1+4+$	$1-$	$6+2$			2 *vari.*
	(1)....	$1+8+$	$19+$	$12+2$			0 *vari.*

Podem haver duas raizes entre 2 e 3, e outras duas entre 0 e -1. Para verificar e approximar os seus valores, far-se-ha $x-2=\frac{1}{10}x'$, para achar as raizes entre 2 e 3: e resultará

(0)....	$1+40+$	$100-$	$6000+$	20000	2 *vari.*
(4)....	$1+56+$	$676-$	$3024+$	416	2 *vari.*
(5)....	$1+60+$	$850-$	$1500-$	1875	1 *vari.*
(7)....	$1+68+$	$1234-$	$2152-$	979	1 *vari.*
(8)....	$1+72+$	$1444+$	$5328+$	2976	0 *vari.*

Existem por tanto duas raizes de x entre 2 e 3, a saber $x=2{,}4..$ e $x=2{,}7$. Levaremos a approximação mais longe, partindo das equações (4) e (7); e buscando primeiro as centesimas, depois as millesimas.... acharemos $x=2{,}414..$ e $2{,}732$.

Em quanto ás raizes que se presume existirem entre 0 e -1, tomaremos a equação (0) depois de haver mudado x em $-x$, e como accidentalmente esta equação é a mesma que (3), e conduz ás transformadas acima, a dizima é a mesma, e $x=-0{,}414..$ e $x=0{,}732....$

Veja-se a nota que termina a Algebra de *M. Bourdon.*

Raizes Imaginárias.

90. Sujeitando, por convenção, os symbolos da fórma $a+b\sqrt{-1}$, em que a e b designam quantidades reaes, ás operações algebricas, *vamos mostrar que os resultados podem sempre reduzir-se á forma* $a+b\sqrt{-1}$. Com effeito:

$$[1] \quad (a+b\sqrt{-1})+(a'+b'\sqrt{-1})=(a+a')+(b+b')\sqrt{-1};$$

$$[2] \quad (a+b\sqrt{-1})-(a'+b'\sqrt{-1})=(a-a')+(b-b')\sqrt{-1};$$

$$[3] \quad (a+b\sqrt{-1})\times(a'+b'\sqrt{-1})=(aa'-bb')+(ab'+a'b)\sqrt{-1};$$

$$[4] \quad \frac{a+b\sqrt{-1}}{a'+b'\sqrt{-1}}=\frac{(a+b\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}{(a'+b'\sqrt{-1})(a'-b'\sqrt{-1})}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}$$
$$+\frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}\sqrt{-1}.$$

O desenvolvimento da $(a+b\sqrt{-1})^n$, obtem-se pela fórmula do binomio, que dá

$$(a+b\sqrt{-1})^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^n=a^n\left[1+\frac{n}{1}\ \frac{b}{a}\sqrt{-1}\right.$$

$$-\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\frac{b^2}{a^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2\ .\ 3}\ \frac{b^3}{a^3}\sqrt{-1}$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\ \frac{b^4}{a^4}+\text{etc.}\right];$$

e reunindo os termos affectos de $\sqrt{-1}$,

$$(a+b\sqrt{-1})^n$$

$$=a^n\left[1-\frac{n(n-1)}{1\ .\ 2}\ \frac{b^2}{a^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2\ .\ 3\ .\ 4}\ \frac{b^4}{a^4}-\text{etc.}\right]$$

$$+a^n\left[\frac{n}{1}\ \frac{b}{a}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2\ .\ 3}\ \frac{b^3}{a^3}+\text{etc.}\right]\sqrt{-1}$$

Para obter o desenvolvimento de $(a - b\sqrt{-1})^n$ bastará mudar b em $-b$ no resultado precedente; vindo sómente por este motivo a haver mudança no signal do coefficiente de $a^n\sqrt{-1}$, em cujos termos entra b elevado a potencias impares. Se fizermos pois

$$p = 1 - \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{b^4}{a^4} - \text{etc.},$$

$$q = \frac{n}{1}\frac{b}{a} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{b^3}{a^3} + \text{etc.},$$

será

$$[5] \ldots\ldots\ldots\ldots (a+b\sqrt{-1})^n = p + q\sqrt{-1},$$

$$[6] \ldots\ldots\ldots\ldots (a-b\sqrt{-1})^n = p - q\sqrt{-1}.$$

Se nestas últimas fórmulas for n inteiro positivo, as series representadas por p e q serão limitadas, e p e q quantidades finitas. Se n for porém negativo ou fraccionario, as series serão illimitadas.

Para reduzir a expressão radical

$$\sqrt[n]{a \pm b\sqrt{-1}}$$

á fórma $p \pm q\sqrt{-1}$, substituil-a-hemos pela potencia fraccionaria $(a \pm b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$, que se desenvolve do modo que acabâmos de dizer. A Algebra não fornece outro methodo geral para esta transformação; e só quando n for potencia de 2, se póde effectuar sem socorro das series.

Consideremos primeiro os dous radicaes do 2.º grão

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} \text{ e } \sqrt{a-b\sqrt{-1}}.$$

Pondo $$k = \sqrt{a+b\sqrt{-1}} + \sqrt{a-b\sqrt{-1}}, \ldots\ldots\ldots (a)$$

$$l = \sqrt{a+b\sqrt{-1}} - \sqrt{a-b\sqrt{-1}}, \ldots\ldots\ldots (b)$$

teremos, elevando estas quantidades ao quadrado,

$$k^2 = 2a + 2\sqrt{a^2+b^2},$$

$$l^2 = 2a - 2\sqrt{a^2+b^2}.$$

Qualquer que seja o signal de a, o valor de k^2 é positivo; pelo contrário o de l^2 é sempre negativo. D'estas egualdades tira-se

$$k = \sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}},\ l = \sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1} \ldots\ldots (c)$$

Ora as equações (a) e (b) dão

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} = \frac{k+l}{2},\ \sqrt{a-b\sqrt{-1}} = \frac{k-l}{2};$$

substituindo pois por k e l os valores (c), vem finalmente

[7] $$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}$$

[8] $$\sqrt{a-b\sqrt{-1}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}$$

Se considerarmos agora as expressões radicaes

$$\sqrt[4]{a\pm b\sqrt{-1}},\ \sqrt[8]{a\pm b\sqrt{-1}},\ \sqrt[16]{a\pm b\sqrt{-1}},\ \text{etc.},$$

nas quaes os indices das raizes são potencias de 2: reconhecer-se-ha, que a extracção de cada uma d'estas raizes póde ser substituida por extracções successivas da raiz quadrada; e por consequencia as fórmulas [7] e [8], sendo-lhes applicadas repetidamente, reduzirão por fim estas espressões á fórma $p \pm q\sqrt{-1}$.

Se no polynomio $kz^n + px^{n-1} + \ldots$ fizermos $x = a \pm b\sqrt{-1}$, cada um dos termos desenvolvido terá a fórma $p \pm q\sqrt{-1}$, e por conseguinte tambem o polynomio terá a mesma fórma.

Effectuando a multiplicação de 3, 4, 5.... factores imaginários da fórma $a \pm b\sqrt{-1}$, obteremos tambem um producto das mesma fórma.

91. Supponhâmos que $x = a + b\sqrt{-1}$ é uma das raizes da equação $fx = 0$. Substituindo por x este valor na proposta, virá, pelo que se acaba de ver, uma expressão da fórma $P + Q\sqrt{-1} = 0$, a qual só póde ser satisfeita pondo $P = 0$, $Q = 0$, visto que a parte real não se póde destruir com a imaginária. Se tivessemos posto $x = a - b\sqrt{-1}$, fx tornar-se-hia em $P - Q\sqrt{-1}$; pois, segundo já dissemos, só haveria mudança no valor Q, em que entram as potencias impares de b, e que por isso mudaria de signal. Mas como P e Q são nullos, a substituição d'este 2.° valor de x tornaria $fx = 0$; e por isso os *valores conjugados* $a \pm b\sqrt{-1}$ são ambos raizes da proposta, e fx é divisivel por $(x-a)^2 + b^2$, producto dos dous factores do 1.° grão. Logo:

Se $a + b\sqrt{-1}$ *for uma das raizes de* $fx = 0$, *tambem* $a - b\sqrt{-1}$ *o será, e a proposta terá um factor do 2.° grão da fórma* $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$.

92. *Uma equação de qualquer grão, com coefficientes reaes ou imaginários da fórma* $a + b\sqrt{-1}$, *tem sempre pelo menos uma raiz real ou imaginária d'esta forma.*

A demonstração que deu Legendre d'este theorema (*Theorie des Nombres*, I. pag. 175) é com pouca differença a seguinte.

I. Comecemos por mostrar a verdade do theorema a respeito das equações binomias

$$x^m \pm 1 = 0, \; x^m \pm \sqrt{-1} = 0.$$

1.° Qualquer que seja m, a equação $x^m - 1 = 0$ é evidentemente satisfeita pelo valor $x = 1$.

Se m é impar, $x^m + 1 = 0$ sel-o-ha por $x = -1$.

2.° Se m é par, terá a fórma $m = 2^n p$, sendo p um numero impar; mas $x^{2^n p} = \left(x^{2^n}\right)^p$; se pudermos pois achar um valor de x, real ou imaginário que satisfaça á equação $x^{2^n} = -1$, este valor verificará necessariamente

$$\left(x^{2^n}\right)^p = -1 \text{, ou } x^m + 1 = 0.$$

Ora da equação $x^{2^n} = -1$ tira-se $x = \sqrt[2^n]{-1}$, valor que, segundo se viu na Arithmetica, se acha extrahindo n raizes quadradas successivas a -1. Mas a primeira raiz é $\pm\sqrt{-1}$; e como a raiz quadrada de uma expressão da forma $a \pm b\sqrt{-1}$ é tambem desta fórma, segue-se, que a raiz do gráo 2^n de -1, ainda terá a mesma fórma; e que a equação $x^m + 1 = 0$ terá uma raiz da fórma $a + b\sqrt{-1}$, quando m for par.

3.° Se m é impar terá a fórma $4n + 1$ ou $4n + 3$. Ora se elevarmos sucessivamente, á 1.ª, 2.ª, 3.ª .... potencia, a expressão $+\sqrt{-1}$, acharemos periodicamente os seguintes valores

$$+\sqrt{-1},\ -1,\ -\sqrt{-1},\ +1,$$

donde se deduzem as quatro fórmulas seguintes:

$$(+\sqrt{-1})^{4n} = +1,\ (+\sqrt{-1})^{4n+1} = +\sqrt{-1},$$

$$(+\sqrt{-1})^{4n+2} = -1,\ (+\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1}.$$

Do mesmo modo se deduzem as quatro seguintes

$$(-\sqrt{-1})^{4n} = +1,\ (-\sqrt{-1})^{4n+1} = -\sqrt{-1},$$

$$(-\sqrt{-1})^{4n+2} = -1,\ (-\sqrt{-1})^{4n+3} = +\sqrt{-1}.$$

Sendo pois

$$(-\sqrt{-1})^{4n+1} = -\sqrt{-1},\ (+\sqrt{-1})^{4n+3} = -\sqrt{-1},$$

vê-se que satisfaremos á proposta $x^m+\sqrt{-1}=0$, pondo $x=-\sqrt{-1}$, ou $x=+\sqrt{-1}$, conforme for m egual a $4n+1$ ou a $4n+3$.

Se m for par, pondo como acima $m=2^n p$, e raciocinando do mesmo modo, acharemos que a equação $x^m+\sqrt{-1}=0$ terá uma raiz da fórma $a+b\sqrt{-1}$, se pudermos obter para x um valor da mesma fórma que satisfaça á equação

$$x^{2^n}=-\sqrt{-1}\text{, ou }=+\sqrt{-1}\text{,}$$

conforme for p egual a $4n+1$ ou $4n+3$. Mas as raizes quadradas de $\pm\sqrt{-1}$ são da fórma $a+b\sqrt{-1}$; logo tambem o será a raiz do gráo 2^n de $\pm\sqrt{-1}$.

4.° Pelo mesmo theor se mostrará que a equação $x^m-\sqrt{-1}=0$ tem uma raiz da fórma $a+b\sqrt{-1}$.

II. Passando agora a um polynomio qualquer $fx=0$, supponhamos que não tem raiz alguma da fórma $x=a+b\sqrt{-1}$. Ponhamos pois $x=a+b\sqrt{-1}+\alpha z$, sendo α uma quantidade susceptivel de se tornar menor que qualquer quantidade assignavel, e z uma indeterminada, de que podemos dispor convenientemente. Para effectuar a substituição d'este valor de x na proposta, mudaremos primeiro x em $x+h$, o que dará (n.° 31)

$$fx+f'(x)h+\frac{f''(x)}{1.2}h^2+\frac{f'''(x)}{1.2.3}h^3+\ldots\ldots\ldots+h^m,$$

e substituiremos depois x por $a+b\sqrt{-1}$, e h por αz. O 1.° termo fx tornar-se-ha, como já vimos, em $c+d\sqrt{-1}$, não podendo c e d tornar-se nullos, visto que $a+b\sqrt{-1}$ se suppõe não ser raiz da proposta; algumas das derivadas de fx podem ser nullas. Suppondo que $f^m(x)$ é a 1.ª derivada que se não anniquila pela substituição de $a+b\sqrt{-1}$ em vez de x, e designando por $c'+d'\sqrt{-1}$ o valor que toma então o quociente d'esta derivada por $1.2.3\ldots\ldots m$; teremos, representando por $P+Q\sqrt{-1}$ aquillo em que se torna fx pela substituição de

$$x=a+b\sqrt{-1}+\alpha z,$$

$$P+Q\sqrt{-1}=c+d\sqrt{-1}+(c'+d'\sqrt{-1})\alpha^m z^m+G\alpha^{m+1}z^{m+1},$$

designando, por simplificação, por $G\alpha^{m+1}z^{m+1}$ a somma de todos os termos, em que αz entre n'uma potencia superior a m.

Como z é indeterminado, podemos dar-lhe, como vimos acima, um valor da fórma $a+b\sqrt{-1}$, tal como $z^m=\pm 1$, e separando conjunctactamente as partes reaes e as imaginárias, virá

$$P=c\pm c'\alpha^m+G'\alpha^{m+1},$$

$$Q=d\pm d'\alpha^m+G''\alpha^{m+1},$$

d'onde se deduz facilmente

$$P^2+Q^2=c^2+d^2\pm 2(cc'+dd')\alpha^m+K\alpha^{m+1},$$

ou antes

$$P^2+Q^2=c^2+d^2+\{\pm 2(cc'+dd')+K\alpha\}\alpha^m.$$

Como α se póde tornar tam pequeno como se quizer, é evidente que podemos dar a $K\alpha$ um valor tal, que o signal da quantidade que está entre os colchetes, tenha o signal do 1.º termo $\pm(cc'+dd')$. Logo tomando aquelle dos signaes $+$ e $-$ que for contrário ao do binomio $cc'+dd'$, o que equival a pôr $z^m=+1$, ou $z^m=-1$, teremos

$$P^2+Q^2<c^2+d^2.$$

Se fosse $cc'+dd'=0$, começariamos o mesmo cálculo, pondo $z^m=\pm\sqrt{-1}$, o que daria

$$P=c\mp d'\alpha^m+G_1\alpha^{m+1}$$

$$Q=d\pm c'\alpha^m+G_2\alpha^{m+1},$$

d'onde

$$P^2+Q^2=c^2+d^2\mp 2(cd'-dc')\alpha^m+K_1\alpha^{m+1},$$

Pondo $z^m = +\sqrt{-1}$ ou $z^m = -\sqrt{-1}$, conforme $cd' - dc'$ fosse negativo ou positivo, poderiamos tomar, como em cima, α tam pequeno, que tornasse negativa a somma de todos os termos que se seguem a $c^2 + d^2$; e teriamos ainda n'este caso

$$P^2 + Q^2 < c^2 + d^2.$$

Por outra parte tambem não poderia ser $cd' - dc'$ nullo, por quanto, como suppômos tambem $cc' + dd' = 0$, resultaria

$$(cc' + dd')^2 + (cd' - dc')^2 = 0,$$

ou

$$c^2c'^2 + d^2d'^2 + c^2d'^2 + d^2c'^2 = (c^2 + d^2)(c'^2 + d'^2) = 0;$$

condição que exige, que seja ao mesmo tempo:

ou $$c = 0,\ d = 0,$$

o que é contra a hypothese;

ou $$c' = 0,\ d' = 0,$$

e então seria $f^m(a + b\sqrt{-1}) = 0$, tambem contra o que suppuzemos.

Fica pois demonstrado, que se um valor $a + b\sqrt{-1}$ de x, que reduz fx a $c + d\sqrt{-1}$, não for raiz da equação $fx = 0$, podemos sempre achar outro valor $x = a + b\sqrt{-1} + \alpha z$, tal, que dê a fx um desenvolvimento da fórma $P + Q\sqrt{-1}$, sendo $P^2 + Q^2 < c^2 + d^2$. Podemos depois dar outro valor a x da mesma fórma, d'onde resulte para fx um desenvolvimento $P' + Q'\sqrt{-1}$, sendo $P'^2 + Q'^2 < P^2 + Q^2$. E assim por diante.

Vê-se pois, que o binomio essencialmente positivo $P^2 + Q^2$ póde ir decrescendo por tal modo, que, chegue ao minimo *zero*; e nesse estado haverá um valor $x = A + B\sqrt{-1}$, que, dando a fx o desenvolvimento $p + q\sqrt{-1}$, e tornando $p^2 + q^2 = 0$ e por conseguinte $p = 0$ e $q = 0$, será por isso raiz da equação $fx = 0$. Logo:

1.° *A equação* $fx = 0$ *terá sempre uma raiz da fórma* $a + b\sqrt{-1}$, *e por conseguinte outra da fórma* $a - b\sqrt{-1}$, *e um factor real do 2.°*

grão da fórma $(x-a)^2+b^2$. *Com tudo se for* $b=0$ *a raiz será real, e não existirá a sua conjugada.*

2.° *Toda a equação de grão par póde sempre ser decomposta em factores reaes do 2.° grão. O mesmo se dirá das equações de grão impar, tendo porém estas demais um factor binomio do 1.° grão.*

3.° *Toda a funcção imaginária póde reduzir-se á fórma* $a \pm b\sqrt{-1}$; por que egualando-a a z, poderemos por meio de transposições e elevações a potencias, eliminar d'esta equação todos os radicaes, e chegar assim a uma equação $fz=0$, cujas raizes da fórma $a \pm b\sqrt{-1}$ serão os valores da funcção proposta.

93. Vejamos agora a maneira de calcular as raizes imaginárias contidas na equação $fx=0$.

1.° Substituindo na proposta por x o valor $a+b\sqrt{-1}$, obteremos uma expressão da fórma $P+Q\sqrt{-1}=0$, da qual se deduz $P=0$ e $Q=0$. Estes polynomios P e Q, obtem-se muito facilmente, como já vimos, desenvolvendo pela fórma de Taylor (n.° 31) a expressão $f(a+b\sqrt{-1})$; d'onde nos resultará, supprimindo o factor commum b de todos os termos de Q,

$$fa-\frac{b^2}{1.2}f''a+\frac{b^4}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}a-\text{etc.}=0,$$

$$f'a-\frac{b^2}{1.2.3}f'''a+\frac{b^4}{1.2.3.4.5}f^{\text{V}}a-\text{etc.}=0.$$

Eliminando b^2 entre estas duas equações, virá uma equação em a, que se tractará pelo processo da pag. 77, e dará todas as raizes commensuraveis. Com estes valores de a acharemos os correspondentes de b^2, e finalmente as raizes imaginárias da fórma $x=a\pm b\sqrt{-1}$.

Por ex.° a equação

$$x^4-3x^2-12x+40=0,$$

dá

$$a^4-3a^2-12a+40-(6a^2-3)\,b^2+b^4=0,$$

$$4a^3-6a-12-4ab^2=0.$$

Eliminando b^2 vem a equação final

$$16a^6 - 24a^4 - 151a^2 - 36 = 0,$$

cujas raizes commensuraveis $a = +2$, $a = -2$, dão $b^2 = 1$, $b^2 = 4$, resultando por conseguinte $x = 2 \pm \sqrt{-1}$ e $x = -2 \pm 2\sqrt{-1}$. Assim a proposta terá a fórma

$$[(x-2)+1][(x+2)^2+4)] = (x^2 - 4x + 5)(x^2 + 4x + 8).$$

2.° Quando a equação final em a não tem raiz commensuravel, esta theoria só dá os valores de a e b por approximação.

N'este caso podemos applicar o *methodo de Newton* (n.° 69) para obter resultados cada vez mais approximados. Assim tendo achado, pela theoria precedente, os valores a e b de quaesquer numeros reaes comprehendidos entre os limites conhecidos das raizes, faremos $x = a + b\sqrt{-1}$, e substituindo este valor em $fx = 0$, apparecerá uma expressão da fórma $c + d\sqrt{-1}$. Tomando depois uma quantidade y tam pequena, que possam desprezar-se sem erro sensivel as potencias superiores á mais baixa; e pondo $x = a + b\sqrt{-1} + y$ em $fx = 0$, virá uma expressão da fórma

$$f(a + b\sqrt{-1} + y) = c + d\sqrt{-1} + y(c' + d'\sqrt{-1}) = 0.$$

Tirando d'esta equação o valor de y, e substituindo-o em $x = a + b\sqrt{-1} + y$, teremos um valor de x mais approximado.

Com este 2.° valor de x procederemos do mesmo modo para obter 2.ª approximação. E assim por diante.

Por ex.°, na equação

$$fx = x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0,$$

tome-se primeiro $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-1})$, e resultará

$$fx=\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{-1}).$$

Pondo depois

$$x=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}+y,$$

vem

$$\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\sqrt{-1}-y(1-\tfrac{7}{2}\sqrt{-1})=0;$$

d'onde se deduz

$$y=0{,}09+0{,}05\sqrt{-1}.$$

Teremos pois na 1.ª approximação

$$x=0{,}59+0{,}55\sqrt{-1}.$$

Pondo agora $\quad x=0{,}59+0{,}55\sqrt{-1}+y,$

resulta

$$-0{,}0009+0{,}056\sqrt{-1}-y(-0{,}5032+4{,}047\sqrt{-1}),$$

ou

$$y=-\frac{0{,}2271-0{,}0245\sqrt{-1}}{16{,}6302}=-0{,}0137+0{,}0015\sqrt{-1},$$

e

$$x=0{,}5763+0{,}5515\sqrt{-1}.$$

E assim por diante.

Se no desenvolvimento de fx a potencia mais baixa de y não for a primeira, deve entender-se a respeito de y^i o que fica dito a respeito de y, sendo i o menor expoente de y. N'este caso será necessario extrahir uma raiz do grão i.

III. Resolução das equações particulares.

Abaixamento das Equações.

94. Supponhamos que duas equações $fx=0$, $\varphi x=0$ tem as raizes communs a, b, c, ... Os factores $x-a$, $x-b$, $x-c$...... tambem lhes serão communs, e o producto d'estes factores será o maior divisor commum entre fx e φx. Para obter pois aquellas raizes, procuraremos o maior divisor commum D entre as duas funcções, e resolvendo a equação $D=0$, as suas raizes serão as pedidas. Dividindo depois fx por D, e designando por $f_{\prime}x$ o quociente, as outras raizes da equação $fx=0$ serão as da equação $f_{\prime}x=0$.

Posto isto, vejamos por que maneira se póde *abaixar o grão de uma equação*

$$fx=0, \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

quando é conhecida a relação $\varphi(\mathrm{x},\mathrm{x}')=0$ *entre duas das suas raizes* x *e* x'.

Como x e x' são raizes da proposta, teremos as tres equações

$$fx=0,\ fx'=0,\ \varphi(x,x')=0.$$

Tirando da última equação o valor de x', e substituindo-o na 2.ª, ficarão as duas em x, que devem coexistir,

$$fx=0,\ \mathrm{F}(x)=0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

As raizes communs das equações (2) são as raizes de (1), que satisfazem á condição dada $\varphi(x,x')=0$. Procuremos pois o maior divisor commum D entre os 1.ºs membros das equações (2); as raizes communs x serão contidas na equação $D=0$; e estas poderão substituir-se em $\varphi(x,x')=0$ para dar as outras da proposta. Dividindo depois fx pelo producto de todos os factores correspondentes ás raizes acima achadas, virá a equação final com o grão abaixado.

Por ex.°, suppondo que entre as duas raizes x e x' de

$$x^3 - 37x - 84 = 0,$$

se dá a relação $1 = x' + 2x$, teremos as tres equações

$$x^3 - 37x - 84 = 0, \quad x'^3 - 37x' - 84 = 0, \quad 1 = x' + 2x,$$

das quaes resultam as duas

$$x^3 - 37x - 84 = 0, \quad 2x^3 - 3x^2 - 17x + 30 = 0,$$

que tem o divisor commum $x + 3$, o qual egualado a zero dá $x = -3$. Esta raiz substituida na relação $1 = x' + 2x$, dá $x' = 7$. Dividindo pois a proposta por $(x+3)(x-7)$, resulta a equação $x + 4 = 0$, que dá a 3.ª raiz $x = -4$.

95. Se em logar da relação $\varphi(x, x') = 0$ entre duas das raizes, fosse dada uma relação entre um numero qualquer de raizes, deviamos tractar cada uma destas como uma incognita distincta; formar as equações resultantes da sua substituição na proposta; junctar estas novas equações ás que exprimem a relação dada; e eliminar depois todas as incognitas excepto uma, que se conservará conjunctamente em duas das equações, as quaes por conseguinte admittirão um divisor commum. Este, segundo o grão de que for, fará conhecer uma ou mais raizes comprehendidas na relação dada.

96. Chamam-se *equações reciprocas*, aquellas cujos termos equidistantes dos extremos tem o mesmo coefficiente, como

$$fx = kx^n + px^{n-1} + qx^{n-2} + \ldots\ldots\ldots qx^2 + px + k = 0 \ldots\ldots (3)$$

Se α for uma raiz d'esta equação, tambem $\frac{1}{\alpha}$ o será, por isso que substituindo os dous valores, e supprimindo os denominadores, apparecem os mesmos resultados. Nestas equações pois *as raizes vem conjugadas aos pares com dous valores reciprocos*, e d'ahi lhes provém o nome com que costumam ser designadas. A propriedade que as caracteriza, exprime-se analyticamente por meio da equação

$$fx = x^n f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Vejamos como n'estas equações se póde abaixar o seu gráo; e consideremos os dous casos de serem ellas do gráo impar ou do gráo par.

1.º CASO. *Gráo impar.* Como o numero $n+1$ dos termos da equação (3) é par, o coefficiente do termo medio se repetirá, e o valor $x=-1$ será manifestamente raiz da equação. N'este caso -1 é a unica das raizes que não vem conjugada com outra reciproca, sendo ella mesma a sua reciproca. Se dividirmos pois $fx=0$ por $x+1$ (pelo processo do n.° 27), e designarmos o quociente por $Fx=0$, esta equação de gráo par será tambem reciproca, por isso que as suas raizes o são. Isto mesmo se demonstra directamente; por que, mudando x em $\frac{1}{x}$ na equação identica $fx=(x+1)\,Fx$, multiplicando por x^n, e attendendo a ser $fx=x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$: virá

$$fx=\left(\frac{1}{x}+1\right)x^n\,F\left(\frac{1}{x}\right)=(x+1)\,x^{n-1}\,F\left(\frac{1}{x}\right):$$

egualando as duas expressões de fx, deduz-se

$$Fx=x^{n-1}\,F\left(\frac{1}{x}\right),$$

que é o caracter proprio das equações reciprocas.

Assim a equação reciproca

$$3x^9-10x^8+2x^7+13x^6-8x^5-8x^4+13x^3+2x^2-10x+3=0,$$

dividida por $(x+1)$, abaixa-se á equação tambem reciproca

$$3x^8-13x^7+15x^6-2x^5-6x^4-2x^3+15x^2-13x+3=0.$$

2.° CASO. *Gráo par.* O coefficiente do termo medio P não se repete. Mudemos n em $2m$ na equação (3), e dividamos por x^m. Reunindo depois os termos de coefficientes eguaes, virá

$$k(x^m+x^{-m})+p(x^{m-1}+x^{-(m-1)})+q(x^{m-2}+x^{-(m-2)})+\ldots\ldots \mathrm{P}=0.$$

Supponhamos $z=x+x^{-1}$; e eliminando x entre esta equação e a proposta, virá a transformada em z; e depois de resolvida, acharemos x por meio da equação

$$x=\tfrac{1}{2}z\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}z^2-1)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Para fazer a eliminação, temos evidentemente

$$(x^{i-1}+x^{-(i-1)})(x+x^{-1})=x^i+x^{-i}+x^{i-2}+x^{-(i-2)},$$

d'onde se tira

$$x^i+x^{-i}=(x^{i-1}+x^{-(i-1)})\,z-(x^{i-2}+x^{-(i-2)}).$$

Fazendo successivamente $i=1, 2, 3, 4,\ldots\ldots$ vem

$$\begin{array}{ll} x^1+x^{-1}=z & x^2+x^{-2}=z^2-2\quad, \\ x^3+x^{-3}=z^3-3z & x^4+x^{-4}=z^4-4z^2+2, \\ x^5+x^{-5}=z^5-5z^3+5z & x^6+x^{-6}=z^6-6z^4+9z^2-2, \\ \text{etc.} & \end{array}$$

Em geral cada uma d'estas expressões é a somma das duas precedentes multiplicadas, a immediata por z, e a outra por -1. Podemos pois deduzir a equação geral

$$x^i+x^{-i}=z^i-iz^{i-2}+\frac{i(i-3)}{2}z^{i-4}-\frac{i(i-4)(i-5)}{2.3}z^{i-6}$$

$$+\frac{i(i-5)(i-6)(i-7)}{2.3.4}z^{i-8}\text{, etc.}\ldots\ldots\ldots (5)$$

Qualquer dos termos T se deduz do precedente S por meio da relação

$$T = -\frac{(i-2h+1)(i-2h+2)}{h(i-h)z^2}S,$$

designando por h o numero dos termos que precedem T. Não nos demoraremos com a demonstração d'esta theoria, que se funda nos mesmos principios que as das series dos senos e cosenos d'arcos multiplos, de que adiante nos occuparemos.

Vê-se pois, que, por este processo, as equações do gráo $2m$ ficam abaixadas ao gráo m.

No ex.° já tractado, em que a proposta do gráo 9.°, depois de abaixada ao 8.°, é

$$3x^8-13x^7+15x^6-2x^5-6x^4-2x^3+15x^2-13x+3=0,$$

temos, que esta equação se muda em

$$3(x^4+x^{-4})-13(x^3+x^{-3})+15(x^2+x^{-2})-2(x+x^{-1})-6=0,$$

a qual se transforma em

$$3z^4-13z^3+3z^2+37z-30=0,$$

cujas raizes são $z=1$, 2, 3, $-\frac{5}{3}$; e d'onde se deduz depois

$$x=1\pm0,\ \tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}),\ \tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{5}),\ -\tfrac{1}{6}(5\pm\sqrt{-11}).$$

Equações binomias. Raizes da Unidade.

97. As equações binomias são todas as que podem reduzir-se á fórma

$$x^m=\pm A,\ \text{ou}\ x^m\mp A=0,$$

sendo A uma quantidade qualquer conhecida e positiva.

Consideremos primeiro as equações da fórma $x^m = A$. Pondo $k = \sqrt[m]{A}$, ou $k^m = A$, vem $x^m - k^m = 0$; e se fizermos $x = ky$, virá $y^m - 1 = 0$. D'onde se vê que para resolver a proposta, bastará resolver a equação $y^m - 1 = 0$, e multiplicar por k as raizes y obtidas. Assim, *para qualquer raiz do grão* m *resultam* m *valores differentes, que se obtém multiplicando a raiz arithmetica* $\sqrt[m]{A}$ *pelas* m *raizes da unidade.*

Por uma operação similhante $x^m = -A$ se reduz a $x^m + k^m = 0$, e depois a $y^m + 1 = 0$.

Como $y = 1$ satisfaz á equação $y^m - 1 = 0$, dividamos esta por $y - 1$. Resultará a seguinte equação reciproca, susceptivel de abaixamento (n.° 96),

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} + \ldots\ldots + y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Se m for impar, como nem $y^m - 1 = 0$, póde ter raizes negativas, nem a equação (1) as póde ter positivas, a proposta não terá mais do que uma raiz real.

Se m for par, $y = \pm 1$ satisfaz á equação $y^m - 1 = 0$, a qual é divisivel por $y^2 - 1$, dando em resultado (n.° 96)

$$y^{m-2} + y^{m-4} + \ldots\ldots + y^2 + 1 = 0.$$

E como esta equação só tem expoentes pares e os termos todos positivos, não terá raizes positivas nem negativas; e por conseguinte a proposta só terá reaes as raizes $y = \pm 1$.

N'este caso, como é $m = 2n$, virá $y^{2n} - 1 = (y^n - 1)(y^n + 1)$, e a proposta partir-se-ha em duas.

Assim $y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0$, dá

$$y = 1,\ y = -\tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3}).$$

A equação $y^4 - 1 = (y^2 - 1)(y^2 + 1) = 0$ dá $y = \pm 1$, $y = \pm\sqrt{-1}$.

98. Se α for uma das raizes da equação $y^m - 1 = 0$, teremos $\alpha^m = 1$, e por conseguinte $\alpha^{mp} = 1$, sendo p um numero qualquer inteiro positivo ou negativo. Temos pois que $y = \alpha^p$ satisfaz tambem á proposta, isto é, que

se α for uma raiz, tambem α^p o será. D'isto resulta que serão raizes da equação $y^m - 1 = 0$ todos os numeros da serie infinita

$$\ldots\ldots \alpha^{-4}, \alpha^{-3}, \alpha^{-2}, \alpha^{-1}, \alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \ldots\ldots \quad (2)$$

1.° Se tomarmos $p > m$, dividindo por m, teremos $p = mq + i$, sendo $i < m$; e será $\alpha^p = \alpha^{mq+i} = \alpha^{mq} \times \alpha^i = \alpha^i$, por ser $\alpha^{mq} = 1$. Por conseguinte, logo que p passar além de m, reproduzir-se-hão os mesmos valores pela mesma ordem; e o periodo reduzir-se-ha a

$$(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\ldots \alpha^m) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

2.° Se p for negativo, será $\alpha^{-p} = \alpha^{m-p} = \alpha^{2m-p} =$ etc., por ser $\alpha^m = 1$ Podemos pois substituir pelo expoente $-p$ a expressão $mk - p$: por onde se vê que os expoentes negativos reproduzem os mesmos numeros que os positivos, e na mesma ordem. Por conseguinte:

Os valores (2) *são taes, que se tomarmos um d'elles qualquer, e os* $m - 1$ *seguintes ou precedentes, formar-se-ha um periodo, que se reproduz indefinidamente nos dous sentidos.* Além d'isto a equação $\alpha^p = \alpha^q$ é satisfeita não só quando $p = q$, mas ainda em alguns casos em que p e q são deseguaes; porque, dividindo por α^q, vem $\alpha^{p-q} - 1 = 0$. Para ser $\alpha^p = \alpha^q$ basta pois que α seja raiz da equação $y^{p-q} - 1 = 0$.

99. Passemos agora a examinar, se os m termos do periodo (3) são com effeito deseguaes; e para isso vejamos se é possivel que seja $\alpha^p = \alpha^q$, sendo p e $q < m$. Para que isto tenha logar é necessario, que α, raiz da equação $y^m - 1 = 0$, tambem o seja de $y^n - 1 = 0$, pondo $p - q = n$; o que importa, em que estas equações tenham um divisor commum, que, egualado a zero, dê $y = \alpha$. Busquemos este factor pelo methodo sabido (*Alg. El.* n.° 109). Divida-se primeiro y^{m-1} por $y^n - 1$, e resultarão os restos

$$y^{m-n} - 1,\ y^{m-2n} - 1,\ \ldots\ldots\ y^i - 1,$$

sendo i o excesso de m sôbre o maior multiplo de n que n'elles se contém. Divida-se depois $y^n - 1$ por este último resto $y^i - 1$, d'onde resultará outro resto $y^l - 1$, sendo l o excesso de n sôbre o maior multiplo de i, que n'elle se contém etc. N'uma palavra, procede-se como se buscassemos o factor commum entre m e n.

1.° *Se* m *for numero primo*, o commum divisor entre m e n será a unidade; e o de $y^m - 1$ e $y^n - 1$ é $y - 1$. Por conseguinte só o valor $\alpha = 1$ póde tornar $\alpha^p = \alpha^q$; *todos os termos do periodo são desegua es;* uma só raiz imaginária α dá, pelas suas potencias α^2, α^3, $\alpha^4 \ldots\ldots \alpha^m$ ou 1, todas as outras raizes.

2.° *Se* m *for o producto de dous factores primos* l *e* h, ou $m = lh$: ponhamos $y^l - 1 = 0$, $y^h - 1 = 0$, e sejam β e γ as raizes d'estas equações, differentes de $+1$, isto é, $\beta^l = 1$, $\gamma^h = 1$. Teremos pois

$$\beta^{lh} = \gamma^{lh} = (\beta\gamma)^{lh} = 1, \text{ ou } \beta^m = \gamma^m = (\beta\gamma)^m = 1;$$

e conseguintemente serão β, γ, $\beta\gamma$ raizes de $y^m - 1 = 0$. Por tanto $(\beta^1, \beta^2, \beta^3, \ldots\ldots \beta^l)$ formarão um periodo de l termos distinctos; e as m potencias de β não conterão mais do que l numeros differentes, que em $(\beta, \beta^2, \ldots\ldots \beta^m)$ se repetirão h vezes. Do mesmo modo se prova, que em $(\gamma, \gamma^2, \ldots \gamma^m)$ haverá l periodos com h termos differentes.

Em quanto a $(\beta\gamma, \beta^2\gamma^2, \ldots \beta^m\gamma^m)$, vamos provar que formam um periodo com m termos differentes, que são por conseguinte as m raizes pedidas. Com effeito para que podesse ter logar a egualdade $(\beta\gamma)^p = (\beta\gamma)^q$, ou $(\beta\ )^{p-q} - 1 = 0$, sería necessario que $\beta\gamma$ fosse raiz commum a $y^{p-q} - 1 = 0$ e $y^m - 1 = 0$, equações que não podem ter por factores senão y^{l-1}, ou $y^h - 1$, por ser $m = lh$. Teriamos pois $\beta^l\gamma^l = 1$, e por conseguinte $\gamma^l = 1$, por ser $\beta^l = 1$; e como temos tambem $\gamma^h = 1$, haveria entre l e h outro factor além da unidade, o que é contra a hypothese. Logo se tomarmos $\alpha = \beta\gamma$, o periodo será $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots\ldots \alpha^m)$, e todos os seus m termos serão differentes.

Como temos $\beta^l = \gamma^h = 1$, vê-se que podemos abaixar em $\beta^p\gamma^p$ o expoente p até ser menor do que l relativamente a β, e menor do que h relativamente a γ, tirando de p todos os multiplos de l ou h. D'este modo $\beta^b\gamma^c$ representa o termo geral do periodo das raizes, sendo b e c os restos da divisão de p por l e h.

Logo para obter, no caso de que se tracta, todas as raizes de $y^m - 1 = 0$, buscar-se-ha β e γ, isto é, uma das raizes, differentes de $+1$, das equações $y^l - 1 = 0$ e $y^h - 1 = 0$; depois formar-se-ha $\beta^b\gamma^c$ tomando por b e c todas as combinações dos numeros, de 1 até l para b, e de 1 até h para c.

Quando for $l = 2$, tomar-se-ha $\beta = -1$.

3.° *Se* m *for o producto* l h i *de tres numeros primos*, provar-se-ha do mesmo modo, que devemos pôr $y^l - 1 = 0$, $y^h - 1 = 0$, $y^i - 1 = 0$, e buscar para cada uma d'estas equações uma raiz differente de $+1$. Com o producto $\beta\gamma\delta$ d'estas tres raizes formaremos depois as quantidades $\beta^b\gamma^c\delta^d$, sendo b, c, d as combinações dos numeros 1, 2, 3 ...... até l, h, i.

E assim a respeito de maior numero de factores primos.

4.° *Se o expoente* m *tiver a fórma* h^k, *sendo* h *um numero primo*, raciocinaremos como no seguinte ex.°, em que se pedem as raizes da equação

$$y^{3^4} - 1 = y^{81} - 1 = 0.$$

Ponha-se $y^3 - 1 = 0$, e seja θ uma raiz imaginaria d'esta equação. Extrahindo-lhe as raizes 1.ª, 3.ª, 9ª e 27ª, isto é, formando as expressões θ, $\sqrt[3]{\theta}$, $\sqrt[9]{\theta}$, $\sqrt[27]{\theta}$, teremos obtido outras tantas soluções da proposta, por que é $\theta^3 = 1$, e θ^{81} comprehende todas as potencias de θ^3 até 4.ª ordem. Pela mesma razão o producto $\theta . \sqrt[3]{\theta} . \sqrt[9]{\theta} . \sqrt[27]{\theta} = \alpha$ será raiz de $y^{81} - 1 = 0$. Ora α, α^2, α^3, ... α^{81} são quantidades todas differentes, porque aliás α sería uma raiz commum a $y^{81} - 1 = 0$ e $y^i - 1 = 0$, o que suppõe a existencia de um factor commum entre estas equações, que não póde ser outro senão $y^3 - 1 = 0$; e então, sendo α raiz d'esta última equação, será $\alpha^3 = 1$, ou $\theta^3 . \theta . \sqrt[3]{\theta} . \sqrt[9]{\theta} = 1$. Elevando á 9.ª potencia, viria $\theta = 1$, contra a hypothese. Logo α, α^2, α^3, ... α^{81} são as 81 raizes da proposta.

Em geral para resolver $y^m - 1 = 0$ quando for $m = h^k$, faça-se $y^h - 1 = 0$; e buscando uma raiz θ d'esta equação, differente de $+1$, extráiam-se-lhe as differentes raizes, cujos grãos i sejam determinados por $i = h.^\circ\ h^1\, h^2 \ldots\ldots h^{k-1}$, de modo que se formem os k resultados β, γ, ... designados por $\sqrt[i]{\theta}$. Todos elles serão raizes de $y^m - 1 = 0$, bem como o seu producto $\alpha = \beta\gamma\delta$ ....; e os termos α, α^2, α^3 .... α^m serão as m raizes procuradas.

5.° *Se for* $m = h^k i^l$, teremos de resolver as duas equações $y^h - 1 = 0$, $y - 1 = 0$; depois multiplicar entre si todas as raizes d'estas equações, e egualar o producto a α. Sejam β e γ as raizes, differentes de $+1$, de cada uma das equações; e faça-se

$$\beta' = \sqrt[h]{\beta},\ \beta'' = \sqrt[h]{\beta'},\ \beta''' = \sqrt[h]{\beta''},\ \ldots.\ \gamma' = \sqrt[i]{\gamma},\ \gamma'' = \sqrt[i]{\gamma'},\ \gamma''' = \sqrt[i]{\gamma''},\ \ldots$$

Teremos

$$\alpha = \beta . \beta' . \beta'' \ldots\ldots \times \gamma . \gamma' . \gamma'' \ldots\ldots$$

Ex.° I. Na equação

$$y^6-1=y^{2\times 3}-1=0$$

faça-se $\qquad y^2-1=0,\ y^3-1=0;$

teremos $\qquad \beta=-1,\ \gamma=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3});$

depois $\quad \alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3}),\ \alpha^2=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),\ \alpha^3=-1$, etc.

e $\qquad y=\pm 1,\ \frac{1}{2}(\pm\sqrt{-3}),\ -\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}).$

Ex.° II. Na equação

$$y^{12}-1=y^{4\times 3}-1=0,$$

faça-se $\qquad y^4-1=y^{\overset{2}{2}}-1=0,\ y^3-1=0;$

teremos $\qquad \beta=-1\times\sqrt{-1},\ \gamma=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3});$

d'onde $\quad \alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{-1}-\sqrt{3}),\ \alpha^2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3}),\ \alpha^3=\sqrt{-1}$, etc.

e por conseguinte

$$y=\pm 1,\ \pm\sqrt{-1},\ \pm\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}),\ \pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{-1}\pm\sqrt{3}).$$

100. Como $y=\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3\ldots.$, teremos em virtude da equação (1) do n.° 97.

$$1+\alpha+\alpha^2..+\alpha^{m-1}=0,\ 1+\alpha^2+\alpha^4..+\alpha^{2m-2}=0,\ 1+\alpha^3+\alpha^6+..=0,$$

ou $\qquad S_1=S_2=S_3\ldots\ldots=S_l=0,\ S_m=m,$

designando por S_k a somma das potencias k de todas as raizes, sendo k um inteiro não divisivel por m, S_m é a somma de todas as equações.

101. Temos tractado até aqui de resolver a equação $y^m - 1 = 0$ no caso de ser m numero primo, ou producto de numeros primos. Passaremos agora á resolução completa das equações da fórma $y^m \pm 1 = 0$, servindo-nos das linhas trigonometricas, e remettendo o leitor, para maiores individuações, á nota XIV da *Resol. num. des equat.*

Já vimos (*Geom. An.* n.° 209) que, se fizermos $\cos x = p$, cada um dos cosenos successivos dos arcos $2x$, $3x$, $4x$, ... se obtém multiplicando os dous precedentes por $2p$ e -1, e sommando-os depois. Para tornar mais evidente a lei que seguem os resultados, empreguemos o seguinte artificio.

Faça-se $$2\cos x = y + y^{-1}; \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

da lei indicada segue-se, que, para obter $\cos 2x$, devemos multiplicar $\cos x$, ou $\frac{1}{2}(y+y^{-1})$, por $y+y^{-1} = 2\cos x = 2p$, e subtrahir $\cos 0\,x = 1$. Por este modo, acha-se

$$2\cos 2x = y^2 + y^{-2},$$

e pelo mesmo theor

$$2\cos 3x = y^3 + y^{-3},$$

$$2\cos 4x = y^4 + y^{-4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mostremos que os resultados seguintes procedem na mesma lei, fazendo ver, que se ella se verificar a respeito de dous gráos consecutivos $m-2$, $m-1$, terá logar tambem para o gráo m. Com effeito, sendo

$$2\cos(m-2)x = y^{m-2} + y^{-(m-2)},\quad 2\cos(m-1)x = y^{m-1} + y^{-(m-1)},$$

se multiplicarmos a 2.ª equação por $y + y^{-1}$, e subtrahirmos a 1.ª, virá

$$2\cos mx = y^m + y^{-m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Das equações (1) e (2) deduzem-se respectivamente (*)

$$y^2 - 2y\cos x + 1 = 0\ ,\ y^{2m} - 2y^m \cos mx + 1 = 0 \ldots\ldots \quad (3).$$

Se $\cos x$ for conhecido, teremos, por meio d'estas equações, y e depois $\cos mx$. Podemos pois, usando d'ellas, e sem passar pelos valores intermedios $\cos 3x$, $\cos 4x$, ... achar o termo geral $\cos mx$ da serie dos cosenos; e até poderiamos servir-nos d'estas equações para a construcção das taboas; mas o cálculo viria complicado com imaginarios.

Suppondo formadas as taboas dos senos, se procurarmos n'ellas os valores de $\cos x$ e $\cos mx$, e os substituirmos nas equações (3), só n'ellas entrará a incognita y, devendo ter por isso uma raiz commum $y = \alpha$. E como estas equações são reciprocas, concluiremos tambem, que haverá outra raiz $y = \frac{1}{\alpha}$; e havendo assim entre as mesmas equações duas raizes

---

(*) Resolvendo as equações (3), acha-se

$$y = \cos x \pm \operatorname{sen} x\sqrt{-1}\ ,\ y^m = \cos mx \pm \operatorname{sen} mx\sqrt{-1}\ ;$$

d'onde se deduz

$$(\cos x \pm \operatorname{sen} x\sqrt{-1})^m = \cos mx + \operatorname{sen} mx\sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Se m for negativo, ainda esta fórmula terá logar; porque $(\cos x + \operatorname{sen} x\sqrt{-1})^{-m}$ reduz-se a

$$\frac{1}{(\cos x + \operatorname{sen} x\sqrt{-1})^m} = \frac{1}{\cos mx + \operatorname{sen} mx\sqrt{-1}},$$

ou, multiplicando os dous termos da última fracção por $(\cos mx - \operatorname{sen} mx\sqrt{-1})$

$$(\cos x + \operatorname{sen} x\sqrt{-})1^{-m} = \frac{\cos mx - \operatorname{sen} mx\sqrt{-1}}{\cos^2 mx + \operatorname{sen}^2 mx}$$

$$= \cos(-mx) + \operatorname{sen}(-mx)\sqrt{-1}.$$

communs, a 1.ª será divisor da 2.ª. Logo, suppondo $mx = \varphi$, é necessario, qualquer que seja φ, que

$$y^2 - 2y\cos\left(\frac{\varphi}{m}\right) + 1 \text{ divida } y^{2m} - 2y^m \cos\varphi + 1 \;\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Se m for fraccionario, e da fórma $\frac{n}{m}$, sendo n um inteiro positivo ou negativo: $(\cos x \pm \text{sen } x\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$ reduzir-se-ha a $(\cos nx + \text{sen } nx\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$, expressão que vamos ver se é ou não possivel reduzir á fórma $(\cos z + \text{sen } z\sqrt{-1})$.

Se é possivel, teremos

$$\cos nx + \text{sen } nx\sqrt{-1} = \cos mz + \text{sen } mz\sqrt{-1},$$

de maneira que nx e mz deverão ter o mesmo seno e o mesmo coseno. Isto exige que seja

$$mz - nx = 2k\pi, \text{ ou } z = \frac{nx + 2k\pi}{m};$$

logo

$$(\cos x + \text{sen } x\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{nx + 2k\pi}{m} + \text{sen}\frac{nx + 2k\pi}{m}\sqrt{-1}.$$

Vê-se pois que a fórmula (a) não é verdadeira no caso do expoente fraccionario. Advertindo porém, que é

$$\cos\frac{nx + 2k\pi}{m} + \text{sen}\frac{nx + 2k\pi}{m}\sqrt{-1}$$

$$= \left(\cos\frac{nx}{m} + \text{sen}\frac{nx}{m}\sqrt{-1}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + \text{sen}\frac{2k\pi}{m}\sqrt{-1}\right)$$

concluiremos, que ainda no caso do expoente fraccionario $\frac{n}{m}$, poderemos applicar a fórmula, como se fosse inteiro; mas será necessario multiplicar o resultado, isto é, a determinação arithmetica de $(\cos x + \text{sen } x\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$ pela expressão $\cos\frac{2k\pi}{m} + \text{sen}\frac{2k\pi}{m}\sqrt{-1}$, que, segundo veremos no n.º seguinte, representa as m raizes do gráo m da unidade. Por conseguinte, *n'este ultimo caso, o theorema é ainda verdadeiro, se nos limitarmos só á determinação arithmetica.*

102. Para tornar applicavel este theorema, devido a *Moivre*, á resolução das equações, de que tractâmos, faça-se $\varphi = k\pi$, sendo ainda π a semicircumferencia e k um inteiro qualquer. O valor de $\cos\varphi$ será então $+1$ ou -1, conforme k for par ou impar; e como o 2.° trinomio se torna em

$$y^{2m} \mp 2y^m + 1 = (y^m \mp 1)^2,$$

vê-se, que

$$y^2 - 2y\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) + 1 \text{ divide } y^m \pm 1, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

advertindo que *o inteiro* k *é* par *para* $y^m - 1$, *e* impar *para* $y^m + 1$.

Se o 1.° trinomio for um quadrado, tomar-se-ha para divisor a sua raiz; e como nesse caso é o coseno $= \pm 1$, os valores de k serão $0, m, 2m, \ldots\ldots$; e o factor reduz-se a $y \pm 1$.

As raizes de $y^m \pm 1 = 0$ ficam pois comprehendidas em

$$y = \cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) \pm \text{sen}\left(\frac{k\pi}{m}\right)\sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Se fizermos $y = \dfrac{x}{a}$, veremos que

$$x^2 - 2ax\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) + a^2 \text{ divide } x^m \mp a^m, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

e que as raizes das equações $x^m \mp a^m = 0$ se comprehendem em

$$x = a\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right) \pm a\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{m}\right)\sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Mostremos agora que as equações $y^m \pm 1 = 0$ tem só m raizes differentes.

Em quanto o inteiro k não exceder a m, o arco $\dfrac{k\pi}{m}$ crescerá sem exceder a semicircumferencia; os cosenos d'estes arcos tem todos valores deseguaes, e obtem-se por conseguinte m factores differentes do 2.° gráo (5), que representaremos por A, B, C.... L, M. Seja i um inteiro qualquer $<m$; os numeros $m+i$, $m-i$ serão conjunctamente, ou pares, ou impares. Se fizermos pois $k=m\pm i$, o arco torna-se em $\frac{k\pi}{m}=\pi\pm\frac{i\pi}{m}$, cujos valores pertencem a arcos com o mesmo coseno; e d'aqui resulta, que o factor trinomio (5) tem o mesmo valor para $k=m-i$, e para $k=m+i$. Assim, se tomarmos por k todos os numeros, ou pares, ou impares, até m, acharemos, passado este valor, os mesmos factores do 2.° gráo em ordem retrograda M, L...... C, B, A.

Quando os valores de k excederem $2m$, como então se lhes póde dar a fórma $2qm+i$, o arco $\frac{k\pi}{m}$ torna-se em $2q\pi+\frac{i\pi}{m}$, ao qual corresponde um coseno já achado. Vimos por isso a recaír, segundo a mesma ordem nos factores A, B, ... L, M, M, L, ... B, A.

Logo, *é inutil dar a* k *valores* $>$ m.

Passemos ás considerações sobre m.

1.° *Se* m *é par:* os valores $\frac{1}{2}m\pm i$ são conjunctamente pares ou impares; e $k=\frac{1}{2}m\pm i$ dá os arcos $\frac{k\pi}{m}=\frac{1}{2}\pi\pm\frac{i\pi}{m}$, cujos cosenos são eguaes com signaes contrarios, e têm por valores $\mp$ sen $\frac{i\pi}{m}$. Logo, *quando* m *é par, não se fará* k$>\frac{1}{2}$ m, *porém tomar-se-hão os cosenos com o duplo signal* $\pm$.

2.° *Se* m *é impar:* um dos numeros $m-i$ e i é par, outro impar; e por isso teremos de excluir um d'elles para valor de k, segundo a equação for $y^m+1=0$ ou $y^m-1=0$. Suppondo pois $i<\frac{1}{2}m$, seja $k=m-i$; teremos $\cos\left(\frac{k\pi}{m}\right)=\cos\left(\pi-\frac{i\pi}{m}\right)=-\cos\left(\frac{i\pi}{m}\right)$; d'onde se conclue, que se k exceder $\frac{1}{2}m$, os cosenos do factor trinomio (5) são, com signal contrário, os mesmos que os correspondentes ao valor $k=i=m-(m-i)$, que foi excluido, e que é $<\frac{1}{2}m$. N'este caso devemos por tanto *fazer* $k=0,1,2,3,\ldots\ \frac{1}{2}m$, *e obteremos assim arcos* $<\frac{1}{2}\pi$, *cujos cosenos convirão ao trimonio* (5), *devendo porém mudar, de dous em dous termos, o signal do coseno.*

Exemplos.

Para a equação $y^4+1=0$, k deve ser impar. Fazendo $k=1$, tomos $\cos\left(\frac{1}{4}\pi=45°\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, o qual tomado com os signaes $\pm$, dá

$$y^4+1=(y^2+y\sqrt{2}+1)\cdot(y^2-y\sqrt{2}+1)=0.$$

Do mesmo modo

$$x^4+a^4=(x^2+ax\sqrt{2}+a^2)(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)=0.$$

Para a equação $y^6+1=0$: $k=1$ dá $\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, que se tomará com os signaes $\pm$; $k=3$, dá $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right)=0$. Logo

$$y^6+1=(y^2+y\sqrt{3}+1)(y^2-y\sqrt{3}+1)(y^2+1)=0.$$

Na equação $y^6-1=0$, faça-se $k=0, 2$; os cosenos de zero e de $\frac{1}{3}\pi$ são 1 e $\frac{1}{2}$, que tomados com os signaes $\pm$, dão

$$y^6-1=(y+1)(y-1)(y^2+y+1)(y^2-y+1)=0.$$

$$y^4-1=(y^2-1)(y^2+1)=(y+1)(y-1)(y^2+1)=0.$$

$$y^8-1=(y^4+1)(y^4-1)=(y^2+y\sqrt{2}+1)(y^2-y\sqrt{2}+1)(y^2-1)(y^2+1).$$

Na equação $y^9-1=0$, devemos fazer $k=0, 1, 2, 3, 4$, e tomar os cosenos das ordens pares com signaes contrarios, isto é,

$$1, -\cos 20°, +\cos 40°, -\cos 60°, +\cos 80°.$$

Os factores, além de $y-1$ e y^2+y+1, são

$$(y^2+1{,}879\ldots y+1)(y^2-1{,}532\ldots y+1)(y^2-0{,}347\ldots y+1);$$

e acha-se

$$y^9 - 1 = (y-1)(y^2+y+1)(y^6+y^3+1) = 0.$$

Para a equação $y^9+1=0$, practicaremos do mesmo modo, tomando com signal contrario os cos. das ordens pares, o que equival a mudar na equação de cima os signaes de todos os 2.^{os} termos dos factores; e resultará

$$y^9 + 1 = (y+1)(y^2-y+1)(y^6-y^3+1) = 0.$$

E com effeito é manifesto que basta mudar y em $-y$.

103. Facilmente se póde resolver em ordem a t a equação

$$k\cos mt + p\cos(m-1)t + q\cos(m-2)t + \ldots\ldots + \mathrm{P} = 0.$$

Por quanto suppondo $2\cos t = x + x^{-1}$, temos (n.º 101)

$$k(x^m + x^{-m}) + p(x^{m-1} + x^{-(m-1)}) + \ldots\ldots\ \mathrm{P} = 0,$$

equação de que já nos occupámos a pag. 160. Podiamos tambem desinvolver os cosenos dos arcos multiplos em ordem ás potencias ascendentes dos cos. d'arcos simples, por meio das fórmulas, que adiante demonstraremos.

104. A proposição (5) é conhecida pela denominação do *Theorema de Cotes;* porque foi este sabio quem a descobriu debaixo de uma fórma geometrica.

Com o raio $\mathrm{A}r = a$ (fig. 24, 24 rep.) descreva-se o circulo ACHL, e o diametro AH, passando por um ponto arbitrario O; a contar do ponto A divida-se a circumferencia em $2m$ partes eguaes Aa, aB, Bb, ... sendo cada uma $=\dfrac{\pi}{m}$; tirem-se finalmente raios vectores do ponto O para os pontos de divisão. O raio tirado para um ponto qualquer C fórma, com a perpendicular CP sobre o diametro, o triangulo COP do qual, fazendo o angulo $\mathrm{CRA} = \alpha$, $\mathrm{OR} = x$, se deduz

$$CP = a \text{ sen } \alpha\,,\ RP = a \cos\alpha\,,\ OP = a \cos\alpha - x\,;$$

logo

$$OC^2 = x^2 - 2ax \cos\alpha + a^2 = OC \times OL.$$

Se o arco AC contiver k divisões, teremos $\alpha = \dfrac{k\pi}{m}$; e sendo o trinomio, expressão de OC^2, factor de $x^m \mp a^m$ conforme k for par ou impar, vê-se que os raios vectores tirados n'um caso para as divisões pares, e no outro para as impares, constituem os factores da equação $x^m \mp a^m = 0$. $OA = a - x$, e $OH = a + x$ correspondem aos factores reaes do 1.° grão.

Designemos por Z, Z', Z'',.. os raios tirados para as divisões pares; e por z, z', z'',.... os que vão ter ás impares; será

$$z \,.\, z' \,.\, z'' \ldots = a^m + x^m, \text{ quer O seja interno quer externo.}$$

$$Z \,.\, Z' \,.\, Z'' \ldots = a^m - x^m, \text{ quando O for interno (fig. 24.).}$$

$$Z \,.\, Z' \,.\, Z'' \ldots = x^m - a^m\,, \text{ quando O for externo (fig. 24 rep.)}$$

Equações trinomias.

105. Consideremos as equações da fórma

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = 0\,,$$

nas quaes um dos expoentes de x é duplo do outro. Fazendo $x^n = z$, vem

$$Az^2 + Bz + C = 0.$$

1.° *Se as duas raizes d'esta ultima equação forem reaes*, f *e* g por ex.°, temos de resolver as duas equações binomias $x^n = f$, $x^n = g$.

Querendo, por ex.°, achar dous numeros taes que o seu producto seja 10, e a somma dos cubos 133, temos

$$x^3+\left(\frac{10}{x}\right)^3=133\text{, ou } x^6-133\,x^3+1000=0.$$

Fazendo $x^3=z$, vem

$$z^2-133z+1000=0,$$

que dá $z=8$, $z=125$; d'onde resultam as duas equações binomias

$$x^3=8\text{, } x^3=125.$$

Da primeira resulta (n.° 98) $x=2$, $x=2\alpha$, $x=2\alpha^2$,

e da segunda $\qquad x=5$, $x=5\alpha$, $x=5\alpha^2$,

sendo α uma raiz cubica imaginaria da unidade.

2.° *Se as raizes forem eguaes*, temos $B^2-4AC=0$; e como então a proposta é um quadrado exacto da fórma $(ax^n+b)^2=0$, recáe-se n'uma equação binomia.

Querendo, por ex.°, achar um numero tal, que dividindo o dobro por 3, e 3 pelo dobro, seja a somma das 4.as potencias egual a 2; temos

$$\left(\frac{2x}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{2x}\right)^4=2\text{, ou } (16x^4-81)^2=0;$$

e como as raizes de $y^4-1=0$, são ± 1 e $\sqrt{-1}$, teremos

$$x=\pm\tfrac{3}{2}\text{, } x=\pm\tfrac{3}{2}\sqrt{-1}.$$

3.° Finalmente, *se as raizes forem imaginarias*, ou $B^2-4AC<0$, faremos $Ax^{2n}=Cy^{2n}$, o que torna a proposta em

$$y^{2n}+\frac{B}{\sqrt{(AC)}}y^n+1=0.$$

Esta equação é comparavel com o 2.° trinomio de (4) do n.° 101; porque sendo o coefficiente de $y^n<2$, por ser $B^2<4AC$, póde representar um arco cujo coseno seja ametade d'este factor, e que se determinará por logarithmos por meio da equação

$$\cos\varphi = -\frac{B}{2\sqrt{AC}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Vê-se pois que a transformada é divisivel por $y^2-2y\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+1=0$, tomando por φ todos os arcos cujo coseno é dado pela equação (9), isto é, os arcos $\varphi<\pi$ dados pelas taboas e além d'elles os arcos $\varphi+2\pi$, $\varphi+4\pi,\ldots\ldots\ \varphi+2k\pi$, sendo k um inteiro qualquer. Se fizermos $\psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$, todos os factores, que se buscam, ficarão comprehendidos na fórmula

$$x^2\sqrt[n]{A}-2x\sqrt[2n]{AC}.\cos\psi+\sqrt[n]{C}=0 \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

É inutil tomar $k>n$, porque $k=qn+i$ dá o arco $2q\pi+\frac{\varphi+2i\pi}{n}$, e por isso, supprimindo as circumferencias $2q\pi$, teriamos de tomar o cos. do arco já achado para $k=i<n$, e tornariamos assim a encontrar os mesmos factores.

Ex.° I. Na equação

$$x^4-2x^2+1=0,$$

sendo $A=C=1$, $B=-2$, $n=3$, acha-se $\cos\varphi=1$, e os arcos $\psi=0°$, $120°$, $240°$. Temos pois tres factores da fórma

$$x^2-2x\cos\psi+1=0;$$

e como $\cos\psi$ tem por valores 1, $-\operatorname{sen}30°=-\frac{1}{2}$, $-\cos 60°=-\frac{1}{2}$, acham-se para factores

$$x^2 - 2x + 1\,,\; x^2 + x + 1\,,$$

sendo o último factor duplo. Logo

$$x^4 - 2x^3 + 1 = (x-1)^2\,(x^2 + x + 1)^2 = (x^3 - 1)^2 = 0.$$

Ex.° II. Na equação

$$x^4 + x^2 + 25 = 0\,,$$

teremos $A = B = 1$, $C = 25$, $n = 2$, e $\cos\varphi = -\frac{1}{10}$: as taboas dão em consequencia do signal —, $\varphi = 95^\circ\,44'20''$ cuja ametade ψ é $47^\circ 52' 10''$; ajunctando 180°, teremos um arco, cujo coseno é o mesmo que o precedente com signal contrario.

Substituindo no 2.° termo da fórmula geral (10), o cálculo em frente dá -3 por coefficiente d'um dos factores. Logo estes factores são $x^2 \pm 3x + 5$.

$\cos\psi$	$\bar{1}$,8266074
2	0,3010300—
$\sqrt[3]{5}$	0,3494850
3	0,4771224—
	—3

Raizes das expressões complicadas com Radicaes.

106. Supponhamos que $a + \sqrt{b}$ é um quadrado, e busquemos a sua raiz. Esta raiz deve ter em geral a fórma $\sqrt{x} + \sqrt{y}$; mas se for $x = f^2$, tomará a fórma particular $f + \sqrt{y}$. Teremos pois

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \text{ ou } x + y + 2\sqrt{(xy)} = a + \sqrt{b};$$

e por conseguinte, separando a equação em duas como na pag. 149,

$$x + y = a,\; 2\sqrt{(xy)} = \sqrt{b}.$$

Para eliminar x e y d'estas equações, elevem-se ao quadrado, e subtraiam-se uma da outra, o que dará

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = a^2 - b.$$

Para que x e y sejam racionaes, deve $a^2 - b$ ser um quadrado exacto, que designaremos por k^2. Assim $a^2 - b = k^2$, $x - y = k$, e $x + y = a$ resolverão a questão, dando

$$k = \sqrt{a^2 - b},\ x = \tfrac{1}{2}(a+k),\ y = \tfrac{1}{2}(a-k).$$

Por ex.°, querendo achar a raiz quadrada de $4 + 2\sqrt{3}$, temos

$$a = 4,\ b = 12,\ a^2 - b = k^2 = 4,\ k = 2,\ x = 3,\ y = 1,$$

e por conseguinte a raiz pedida é $\pm(1 + \sqrt{3})$.

Do mesmo modo se acha

$$\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})} = \pm(1 - \sqrt{3}).$$

$$\sqrt{(-1 \times 2\sqrt{2})} = \pm(1 + \sqrt{-2}).$$

107. Se $a + \sqrt{b}$ for um cubo, supponha-se

$$\sqrt[3]{(a + \sqrt{b})} = (x + \sqrt{y})\sqrt[3]{z},$$

sendo z uma indeterminada de que podemos dispor convenientemente. Elevando ao cubo, e comparando os termos racionaes, acha-se

$$a = z(x^3 + 3xy),\ \sqrt{b} = z\sqrt{y}(3x^2 + y);$$

quadrando, e subtrahindo depois uma da outra estas equações, teremos

$$a^2 - b = z^2[(x^3 + 3xy)^2 - (3x^2\sqrt{y} + \sqrt{y})^2].$$

Como o factor de z^2 é a differença de dous quadrados, e se reduz a

$$(x+\sqrt{y})^2\times(x-\sqrt{y})^2=(x^2-y)^2,$$

a última equação tomará a fórma

$$\frac{a^2-b}{z^2}=(x^2-y)^3.$$

Para que x e y sejam racionaes, deve o 1.° membro ser cubo exacto; e será sempre facil determinar z de modo que satisfaça a esta condição, quando mais não seja, suppondo $z=(a^2-b)^2$. Se a^2-b for um cubo exacto, far-se-ha $z=1$. Em geral deve decompor-se a^2-b em factores primos, sendo facil distinguir quaes d'elles devem ser aproveitados ou rejeitados, para se obter um cubo exacto. Por este modo a relação entre z e k será dada pela equação

$$k=\sqrt[3]{\frac{a^2-b}{z^2}},\ x^2-y=k,\ a=zx(x^2+3y),$$

das quaes resultam

$$y=x^2-k,\ 4zx^3-3kxz=a.$$

A última equação dá x, aproveitando sómente as raizes racionaes; a outra dá y, e por este modo se obtem a raiz pedida.

Querendo achar a raiz cubica de

$$10+6\sqrt{3},$$

como $a=10$, $b=108$, $a^2-b=8$; será $z=1$, e $k=-2$.

Logo $x=1$, $y=3$, e finalmente $\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})}=1+\sqrt{3}$.

Do mesmo modo se acha

$$\sqrt[3]{(8+4\sqrt{5})}=\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}(1+\sqrt{5}).$$

108. Em geral fazendo

$$\sqrt[n]{(a+\sqrt{b})}=(x+\sqrt{y})\sqrt[n]{z},$$

e empregando os mesmos raciocinios, se determinariam x, y e z no caso de ser $a+\sqrt{b}$ uma potencia do gráo n reductivel á fórma supposta.

109. Quando as expressões complicadas com radicaes tivessem fórma differente, da que temos supposto, não bastaria substituir pelos radicaes, que entram n'ellas, os seus valores approximados, porque então viriamos a desprezar os valores imaginarios, de que os radicaes são susceptiveis. Assim em logar de $\sqrt[n]{A}$, devemos substituir $\alpha\sqrt[n]{A}$, $\alpha^2\sqrt[n]{A}$ ... tomando (n.° 98) $1, \alpha, \alpha^2, \ldots\ldots$ para raizes da equação $y^n-1=0$.

Se for $$x=a\sqrt[n]{g}+b\sqrt[n]{g^2}+c\sqrt[n]{g^3}+\ldots\ldots$$

basta fazer $$y^n=g,\ x=ay+by^2+cy^3+\ldots\ldots$$

e eliminar y entre estas duas equações. Todas as raizes da equação final em x serão os valores pedidos de x. Havendo uma funcção fx complicada com radicaes, taes como $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[n]{B}$......, para se obterem todos os valores de fx, faça-se $y^n=A$, $t^m=B$,...... e em logar dos radicaes introduzam-se os n valores de y, os m de t, ... combinados entre si de todos os modos possiveis.

Para fazer desapparecer os radicaes, funcções de x, que entram n'uma dada funcção, represente-se cada um d'estes radicaes por uma nova incognita, e eliminem-se depois pelos methodos ordinarios.

Assim na equação

$$x-\sqrt[3]{x}-2\sqrt{(x+1)}=0,$$

faça-se $x=z^3$, $x+1=y^2$, e teremos $x-z-2y=0$. Eliminando y, vem

$$4x+4=x^2-2xz+z^2, \text{ e } z^3-x=0.$$

Eliminando depois z, chega-se á equação final

$$x^6-12x^5+34x^4+8x^3-167x^2-192x-64=0,$$

da qual se deduzem logo $x=8$, $x=-1$; e são estas as duas soluções reaes. Pelo que respeita ás 4 raizes que ainda faltam, são ellas o resultado da combinação dos valores das raizes imaginarias dos radicaes quadrados e cubicos da proposta.

Equações do terceiro gráo.

110. Toda a equação do 3.° gráo, a uma só incognita, desembaraçada do 2.° termo e do coefficiente do 1.° (pag. 64.), póde reduzir-se á fórma

$$x^3+px+q=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Pondo $x=y+z$, a proposta se transformará em

$$(3yz+p)(y+z)+y^3+z^3+q=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Como x se póde decompor na somma de dous numeros por infinitas maneiras, podemos assignar, como nos convier, ou o producto d'elles, ou a sua differença, ou a sua razão, etc. Podemos pois tornar nullo o 1.° factor, d'onde resulta

$$yz=-\tfrac{1}{3}p, \quad y^3+z^3=-q.$$

Estas duas equações mostram que a somma de y^3 e z^3 é egual $-q$, e o seu producto egual a $-(\frac{1}{3}p)^3$; isto é, que as incognitas y^3 e z^3 são as raizes t e t' da equação do 2.° gráo *Alg. El.* n.° 145, 3.°)

$$t^2+qt=\tfrac{1}{3}p^2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

á qual se dá o nome de *reduzida*. Achados t e t' teremos $y^3=t$, $z^3=t'$, e sendo 1, α, α^2, as tres raizes cubicas da unidade (n.° 98) virá

$$y=\sqrt[3]{t},\ \alpha\sqrt[3]{t},\ \alpha^2\sqrt[3]{t},\ z=\sqrt[3]{t'},\ \alpha\sqrt[3]{t'},\ \alpha^2\sqrt[3]{t'}.$$

Parece á primeira vista, que estes valores substituidos dous a dous na equação $x=y+z$, darão 9 raizes em vez das 3 que competem á proposta. Advertindo porém, que em vez da equação $yz=-\frac{1}{3}p$ se empregou o seu cubo, e se triplicou por isso o numero das raizes: fica manifesto que só devemos sommar aquelles valores de y e z, cujo producto for $=-\frac{1}{3}p=\sqrt[3]{tt'}$, porque sendo o 2.° membro da equação (3) egual a $-tt'$, é a sua raiz cubica egual a $\frac{1}{3}p$.

Como $\alpha^3=1$, é facil de ver que das 9 combinações só devemos aproveitar

$$x=\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{t'},\ x=\alpha\sqrt[3]{t}+\alpha^2\sqrt[3]{t'},\ x=\alpha^2\sqrt[3]{t}+\alpha\sqrt[3]{t'}.$$

Substituindo por α e α^2 os seus valores $-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$, n.° 97), e fazendo, para abbreviar,

$$s=\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{t'},\ d=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{t'}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

teremos

$$x=s,\ x=-\tfrac{1}{2}(s\pm d\sqrt{-3}) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Logo *para resolver a equação* (1) *do* 3.° *grão, é necessario resolver primeiro a sua reduzida* (2), *e introduzir as raizes* t e t' *d'esta nas fórmulas* (4) *e* (5).

Ex.° I. A equação

$$x^3+6x=7$$

dá $p=6$, $q=-7$; e a reduzida

$$t^2 - 7t = 8\,;$$

d'esta última tira-se $t = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$, $t = 8$, $t' = -1$: logo

$$s = 1,\ d = 3,\ x = 1,\ x = -\tfrac{1}{2}(1 \pm 3\sqrt{-3}).$$

Ex.° II. A equação

$$y^3 - 3y^2 + 12y = 4$$

dá $\quad y = 0{,}362165,\ y = 1{,}318918 \pm 1{,}761176\sqrt{-3}.$

Ex.° III. A equação

$$x^3 - 3x = 18$$

dá $\quad x = 3,\ x = -\tfrac{1}{2}(3 \pm \sqrt{-15}).$

Ex.° IV. A equação

$$x^3 - 27x + 54 = 0,$$

dá $\quad x = -6,\ x = 3,\ x = 3.$

111. As equações do 3.° grão podem resolver-se por meio das taboas dos logarithmos, empregando o processo indicado na P. II. p. 189, a fim de obter as raizes t e t' da reduzida.

Sendo p *positivo*, toma-se $\quad \tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{q}$

d'onde $\quad t = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{3}p)^3 \tan\tfrac{1}{2}\varphi},\quad t' = -\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}{\tan\frac{1}{2}\varphi}$

depois $\sqrt[3]{t} = \sqrt{(\frac{1}{3}p)} \times \sqrt[3]{\text{tang}\, \frac{1}{2}\varphi}$ $\quad \sqrt[3]{t'} = -\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)}}{\sqrt[3]{\text{tang}\, \frac{1}{2}\varphi}}$

Sendo p *negativo* toma-se $\quad \text{sen}\, \varphi = \dfrac{2\sqrt{(-p)}^3}{q}$

$\sin^2\varphi = \dfrac{4p^3}{27q^2}$

d'onde resulta $\sqrt[3]{t} = -\sqrt{(\frac{1}{3}p)} \times \sqrt[3]{\text{tang}\, \frac{1}{2}\varphi}$, $\sqrt[3]{t'} = -\dfrac{\sqrt{(\frac{1}{3}p)}}{\sqrt[3]{\text{tang}\, \frac{1}{2}\varphi}}$.

Achadas as raizes cubicas de t e t', deduzem-se os valores de s e d, e conseguintemente os de x.

Por ex.°, na equação $x^3 + 9x + 6 = 0$, temos $p = 9$, $q = +6$; e como se dá o 1.° caso,

2....	0,3010300				
3....	0,4771213				
$\sqrt{3}$..	0,2385606.....		0,2385606....		0,2385606—
6....	—0,7781513	$\sqrt[3]{\text{tang}}$	$\bar{1}$,9204798....	—	$\bar{1}$,9204798
Tang φ....	0,2385606	1.°....	0,1590404	2.°..	0,3180808—

$\varphi = 60°$, $\varphi = 30.°$ log. tang $= \bar{1},7914394$

1.° termo.... 1,442250

2.° .... —2,080083

$s = x = -0,637833$, $d = 3,522333$

$x = +0,318916 \pm 1,761166\sqrt{-3}$.

Do mesmo modo, na equação $x^3 - 2x - 5 = 0$ temos $p = 2$, $q = -5$. Executado um calculo similhante, com attenção porém a que se dá o 2.° caso, achariamos

$$x = -1,04726 \pm 0,655835\sqrt{-3}.$$

112. *Se as duas raizes* t *e* t' *da reduzida forem reaes*, tambem $\sqrt[3]{t}$ e $\sqrt[3]{t'}$ o serão, bem como s e d; e então das fórmulas (5) se conclue, que *a proposta só tem uma raiz real*. Com tudo se for $t = t'$, teremos $d = 0$, e os tres valores de x reaes, sendo dous eguaes á metade do 3.° com o signal contrário. É o que tem logar no Ex.° IV. pag. 183.

Porém *se as raizes da reduzida forem imaginárias*, como as expressões (5) ficam complicadas com imaginários, parece que nenhuma das raizes é real, contra o que já se demonstrou (n.° 64, II). Esta circunstancia, que se dá precisamente quando *as tres raizes da proposta são reaes*, tem offerecido grandes embaraços aos analystas, que não sabendo achar estas raizes, chamaram a este *caso irreduzivel*. Para que elle tenha logar é necessario, que seja $27q^2 + 4p^3 < 0$, isto é, que p seja negativo, e $-4p^3 > 27q^2$.

Se representarmos os valores de t e t' por $a \pm b\sqrt{-1}$, a raiz cubica, ou a potencia $\frac{1}{3}$, se poderá desenvolver em serie. Sem executar o cálculo, é manifesto que n'estas series só poderão apparecer imaginarios os termos em que $b\sqrt{-1}$ estiver elevado a potencias impares: e como as duas series se deduzem uma da outra mudando b em $-b$, é evidente que ambas se acham comprehendidas na fórma $P \pm Q\sqrt{-1}$, cuja somma é $s = 2P$, e a differença $d = 2Q\sqrt{-1}$. Logo as equações (5) se reduzem ás seguintes expressões reaes

$$x = 2P,\ x = -P \pm Q\sqrt{3} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Temos pois feito ver, que as raizes são reaes, precisamente quando as equações (5) as appresentam debaixo de fórma imaginária. Este caso, realmente singular, provém de que na hypothese d'onde partimos

$$x = y + z,\ yz = -\tfrac{1}{3}p,$$

não ha condição alguma, pela qual se exprima que com effeito y e z são reaes; e do cálculo exposto se deixa ver, que estas quantidades são imaginárias quando as tres raizes são reaes. Para as obter desenvolver-se-ha em serie $(a + b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, e dando ao desenvolvimento a fórma $P + Q\sqrt{-1}$, conheceremos as quantidades P e Q, que se substituirão nas equações (6).

113. Como este methodo não é proprio para nos dar a conhecer as raizes, empregaremos para isso os seguintes que são preferiveis.

1.° Conhecida uma das raizes a, para obter as outras duas dividiremos a proposta por $x - a$; o resto $a^3 + ap + q$ é nullo por hypothese, e o quociente do 2.° gráo x^2+ax+a^2+p, egualado a zero, dá

$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{-p-\tfrac{3}{4}a^2}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Se a 1.ª raiz a for real, para que as outras duas tambem o sejam, é necessario e basta que p seja negativo e $>\frac{3}{4}a^2$. Faça-se pois $-p=p'$, e designe-se por δ a differença positiva $\delta=p'-\frac{3}{4}a^2$. Para discutirmos o caso que nos occupa, eliminemos a entre esta equação e $q=-a^3+ap'$, a fim de tornar a relação entre p' e q independente de a. A equação final póde escrever-se

$$4p'^3-27q^2=4\delta(4\delta-3p')^2;$$

e como δ é positivo, é evidente que as raizes sómente poderão ser reaes sendo p negativo, e $-4p^3>27q^2$, condições que tornam imaginárias as raizes da reduzida, em conformidade do que dissemos.

Para achar as raizes n'este caso, reduza-se primeiro a -1 o coefficiente do 2.° termo da equação (1) $x^3-p'x+q=0$, tomando $x=-z\sqrt{p'}$. Dividindo pela raiz quadrada de p'^3, a transformada muda-se em

$$z^3-z-\frac{q}{\sqrt{p'^3}}=0.$$

Ora na hypothese de ser

$$4p'^3>27q^2,\text{ ou }\frac{4}{27}>\frac{q^2}{p'^3},\text{ ou }\frac{2}{\sqrt{27}}>\frac{q}{\sqrt{p'^3}},$$

prova-se, que se fizermos $z=\sqrt{\frac{4}{3}}$ o resultado será positivo. E como, fazendo $z=1$, apparece um resultado negativo, conclue-se que existe uma raiz entre 1 e $\sqrt{\dfrac{4}{3}}=1,1547$.

Faça-se $z=1+v$, e será $v<0,1547$; n'uma primeira approximação poderemos desprezar v^3, e teremos

$$2v+3v^2=\frac{q}{\sqrt{p'^3}}$$

Tomando a raiz positiva d'esta equação teremos z, e consecutivamente

$$x=-\frac{1}{3}\sqrt{p'}\left(2+\sqrt{1+\frac{3q}{p'\sqrt{p'}}}\right).$$

Semelhantemente para a equação $x^3-p'x-q=0$, tomando $x=z\sqrt{p'}$, acharemos o mesmo valor numerico de x mas com signal contrário.

Teremos pois o valor approximado

$$x=\pm\tfrac{1}{3}\sqrt{p'}\left(2+\sqrt{1+\frac{3q}{p'\sqrt{p'}}}\right),\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

devendo escolher dentre os dous signaes aquelle que for contrário ao do último termo q; e procederemos depois a uma segunda approximação pelos methodos ordinarios.

A expressão (7) equivalente a

$$x=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\delta}$$

dá depois as outras duas raizes.

Assim na equação $x^3-5x+3=0$, temos $x=-z\sqrt{5}$, d'onde resulta

$$z^3-z=\frac{3}{5\sqrt{5}},$$

e por conseguinte

$$x=-\tfrac{1}{3}\sqrt{5}\left(2+\sqrt{1+\frac{9}{5\sqrt{5}}}\right)=-\tfrac{1}{3}\sqrt{5}\,.\,3{,}343=-2{,}492;$$

e por fim

$$x=-2,490862,\ x=1,834245,\ x=0,6566166.$$

2.° Querendo empregar os logarithmos, usaremos com preferencia do methodo seguinte.

Fazendo no theorema (4) n.° 101, $m=3$, temos, suppondo o raio egual á unidade, que

$$y^2-2y\cos\tfrac{1}{3}\varphi+1 \text{ divide } y^6-2y^3\cos\varphi+1.$$

Na equação $x^3-px+q=0$, na qual se dá a p o signal $-$, por que tractâmos o caso de ser $27q^2+4p^3<0$, tome-se

$$x=m(y+y^{-1});$$

virá $$m^3(y^3+y^{-3})+(3m^3-pm)(y+y^{-1})+q=0;$$

e fazendo desapparecer o 2.° termo pela hypothese $m=\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, será

$$y^6+\frac{qy^3}{\sqrt{(\frac{1}{3}p)^3}}+1=0.$$

E como no caso presente t é imaginário na equação (3); sendo $(\frac{1}{2}q)^2<(\frac{1}{3}p)$, podemos achar um arco φ, cujo coseno seja metade do factor de y^3, visto que esta metade é <1; isto é,

$$\cos\varphi=\frac{-q}{2\cdot\frac{1}{3}p\sqrt{(\frac{1}{3}p)}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

A proposta acha-se então reduzida ao 2.° trinomio do theorema, e é divisivel por $y^2-2y\cos\frac{1}{3}\varphi+1=0$. Dividindo por y, temos

$$y+y^{-1}=2\cos\tfrac{1}{3}\varphi\,;$$

e como $x=m(y+y^{-1})$, será

$$x=2\sqrt{(\tfrac{1}{3}p)}\cos\tfrac{1}{3}\varphi\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(10)$$

O arco φ acha-se calculando a equação (9) por meio dos logarithmos. Tomar-se-ha o seu terço, ao qual se ajunctará 120° e 240°, por que além do arco achado nas taboas, podemos tomar os arcos $\varphi+2\pi$, $\varphi+4\pi$, aos quaes corresponde o mesmo coseno. A equação (10), na qual $\cos\frac{1}{8}\varphi$ toma tres valores differentes, determinará as tres raizes reaes. $\frac{1}{3}$

Na equação $x^3-5x-3=0$, é $p=5$, $q=-3$, $\cos\varphi=\dfrac{3}{2\times\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}}$. O cálculo em frente dá $\varphi=45°48'9''$, cujo terço é 15° 16′ 3″. Ajunctaremos 120° e 240°, e tomaremos os seus cosenos, que são os mesmos que

5	0,6989700
3 ..—	04,771213
diff ...	0,2218487
metade.	0.1109243
2	0.3010300
den. —	0,6338030
3 ...+	0,4771213
cos φ ..	$\bar{1}$,8433153

$$\cos 15°\ 16'\ 3'',\ -\text{sen}\ 43°\ 16'\ 3'',\ -\cos 75\ 16'\ 3''$$

Com os dados de cima, temos por fim

$2\sqrt{\frac{5}{3}}$	0.4119543	0,4119543	0,4119543
$\cos\frac{1}{8}\varphi$	$\bar{1}$,9843955	$\bar{1}$,8515032 —	$\bar{1}$,4053576 —
x	0,3963498	0,2634575 —	$\bar{1}$.8173119
$x=$	2,490862	— 1,834245	— 0,6566166

Equações do quarto gráo.

114. As equações do quarto gráo a uma incognita, depois de reduzidas á fórma

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

podem resolver-se por um processo similhante ao que fica exposto para o 3.° gráo. Considerando x decomposto em duas partes y e z, isto é $x=y+z$, teremos

$$\left.\begin{array}{l} y^4+(6z^2+p)\,y^2+(z^4+pz^2+qz+r) \\ +\,4zy^3+(4z^3+2pz+q)\,y \end{array}\right\}=0.$$

Como a relação entre y e z deixa uma d'estas quantidades arbitrárias, podemos egualar a zero a 2.ª linha da equação precedente, na qual só entram as potencias impares de y, e virá

$$y^2=-z^2-\frac{p}{z}-\frac{q}{4z}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Eliminando y^2, a transformada torna-se em

$$z^6+\tfrac{1}{2}pz^4+\tfrac{1}{16}(p^2-4r)\,z^2-\tfrac{1}{64}q^2=0.$$

equação na qual só entram potencias pares de z. Faça-se pois, para simplificar, $z^2=\frac{1}{4}t$; e teremos

$$t^3+2pt^2+(p^2-4r)\,t-q^2=0\ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Esta equação, do terceiro gráo, é n'este caso a *reduzida;* e como deve ter necessariamente uma raiz positiva e real, designando-a por t, teremos

$$z=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{t},$$

expressão em que o signal é arbitrário.

Substituindo este valor de z em $x=y+z$ e em (1), vem

$$x=y\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{t},\ y^2=\tfrac{1}{4}\left(-t-2p\mp\frac{2q}{\sqrt{t}}\right)\ldots\ldots\ldots (2)$$

Acha-se por fim, tendo attenção á correspondencia dos signaes, e eliminando y,

$$\left.\begin{array}{l} x=+\frac{1}{2}\sqrt{t}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-t-2p-\frac{2q}{\sqrt{t}}\right)} \\ x=-\frac{1}{2}\sqrt{t}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-t-2p+\frac{2q}{\sqrt{t}}\right)} \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(B)$$

É necessario pois: *resolver a reduzida* (A); *achar uma raiz positiva* t; *e substituir esta raiz nas fórmulas* (B), *as quaes darão os quatro valores de* x.

Exemplo I. Na equação

$$2x^4-19x^2+24x=\frac{23}{8},$$

a reduzida é $\qquad t^3-19t^2+96t=144;$

uma das raizes $t=3$ dá

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm\sqrt{(4-2\sqrt{3})},\ x=-\frac{1}{2}\sqrt{3}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{(4+2\sqrt{3})};$$

e como (pag. 178) é $\qquad \sqrt{4\pm2\sqrt{3}}=1\pm\sqrt{3},$

será finalmente $\qquad x=1\pm\sqrt{3},\ x=-1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.$

Ex.° II. Na equação

$$x^4-x+1=0,$$

é $\qquad t^3-4t=1;$

logo $t=2,114907\ldots$, d'onde se tira

$$x = -0{,}7271360 \pm 0{,}934099\sqrt{-1},$$

$$x = +0{,}7272360 \pm 0{,}4300139\sqrt{-1}.$$

115. Se nas equações (B) substituissemos por t outra qualquer raiz da reduzida, não se obteriam valores differentes para x, mas prefere-se a raiz positiva t ás outras duas t' e t'' para commodidade dos calculos. E com effeito exprimindo estes valores (B) em funcção das tres raizes teremos

$$t + t' + t'' = -2p, \quad t \, . \, t' \, . \, t'' = q^2.$$

A 1.ª dá $$t' + t'' = -2p - t,$$

e a 2.ª dá $$\pm\sqrt{(t't'')} = \frac{q}{\sqrt{t}}, \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

sendo t, t', t'', independentes do signal de q, por entrar só q^2 na reduzida (A), mas devendo usar-se do signal superior, ou inferior, conforme for q positivo ou negativo.

Logo: para q positivo será

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{t} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}t' + \tfrac{1}{4}t'' - \tfrac{1}{2}\sqrt{t't''}\right)};$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{ou antes} & x = \tfrac{1}{2}(\sqrt{t} \pm \sqrt{t'} \mp \sqrt{t''}); \\ \text{e, do mesmo modo,} & x = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{t} \pm \sqrt{t'} \pm \sqrt{t''}) \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots \quad (4.)$$

E para q negativo será

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{t} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}t' + \tfrac{1}{4}t'' + \tfrac{1}{2}\sqrt{t't''}\right)};$$