NOTAS.

Nota 1.ª (*pag.* 5).

Multiplicando os dous termos do segundo membro de (c) por $1.2.3\ldots(m-p)$, e designando a differença $m-p$ por n: este segundo membro se tornará na expressão equivalente

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3\ldots p\times 1.2.3\ldots n}, \ldots \text{(C)}$$

a qual vamos mostrar, *a priori*, que é inteira. Para isso bastará provar, como faz Mr. Cirodde, que no numerador de (C) se encontram todos os factores primos, em que o denominador se póde decompor, elevados a uma potencia pelo menos egual, áquella a que se acham elevados no mesmo denominador.

Seja a um *numero primo* não maior que m; divida-se m por a; e chame-se m' o inteiro do quociente, sendo assim $m'a$ egual, quando muito, a m. Todos os multiplos $a, 2a, 3a, \ldots m'a$, de a, se encontrarão entre os factores de $1.2.3\ldots m$; e por conseguinte será este producto divisivel por $a.\,2a.\,3a\ldots m'a = 1.2.3\ldots m'a^{m'}$. Onde se vê, que a potencia mais alta de a, que divide $1.2.3\ldots m$, é o producto de $a^{m'}$ pela potencia mais alta de a, que divide o producto $1.2.3\ldots m'$.

Designando por m'' o inteiro do quociente de a dividido por m', ver-se-ha do mesmo modo, que a potencia mais alta de a, que divide $1.2.3\ldots m'$, é o producto de $a^{m''}$ pela potencia mais alta, que divide $1.2.3.m''$.

Designando por m''' o inteiro do quociente de a dividido por m'', a potencia mais alta de a que divide $1.2.3...m''$, será similhantemente o producto de $a^{m'''}$ pela potencia mais alta de a, que divide $1.2.3...m'''$. E assim por diante.

Mas, por este theor, havemos de chegar por fim a um quociente $<a$. Suppondo, para fixar as idêas, que este quociente é m''', o producto $1.2.3.m'''$ já não conterá o divisor a um numero inteiro de vezes; e por conseguinte a potencia mais alta de a, que divide $1.2.3...m$, será $a^{m+m'+m''+m'''}$.

Posto isto, e dando, respectivamente, a p', p'', p''',... relativamente a p, e a n', n'', n''',... relativamente a n, as mesmas significações que démos a m', m'', m''',... relativamente a m: teremos, que as potencias mais altas de a que dividem respectivamente $1.2.3....p$, e $1.2.3...n$, são $a^{p'+p''+p'''+...}$ e $a^{n'+n''+n'''+...}$ A potencia mais alta de a, contida no producto $1.2.3...p\times1.2.3...n$, será portanto

$$a^{p'+p''+p'''+...+n'+n''+n'''+...}$$

Mas por ser
$$m=p+n,$$

temos
$$\frac{m}{a}=\frac{p}{a}+\frac{n}{a};$$

e por conseguinte
$$m'=\text{ou}>p'+n',$$

$$m''=\text{ou}>p''+n'',$$

$$m'''=\text{ou}>p'''+n''',$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots:$$

logo
$$m'+m''+m'''+....=\text{ou}>p'+p''+p'''+...+n'+n''+n'''+...,$$

isto é, o expoente da potencia mais alta do *factor primo* a no numerador de (C), egual pelo menos, ou maior, que a potencia mais elevada do mesmo *factor primo* no denominador d'aquella mesma expressão. E como se póde mostrar o mesmo a respeito de qualquer outro *factor primo* menor que m, fica demonstrada a proposição.

Nota 2.ª (pag. 23).

1. Cumpre advertir que, segundo os theoremas I e III dos n.ᵒˢ 141 e 143, sómente serão convergentes, e poderão ser approveitadas, as series representadas por x e y no n.º 10, pag. 20, quando os valores de z ficarem comprehendidos entre $+1$ e -1. E tambem só entre estes mesmos limites será convergente a serie resultante da multiplicação d'aquellas duas, representada alli por xy. Para o fazer ver, consideremos duas series ordenadas segundo as potencias ascendentes d'uma variavel z:

$$(1) \ldots . a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots .$$

$$(2) \ldots . b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots .$$

Seja s_t a somma dos t primeiros termos de (1), e s'_t a somma dos t primeiros termos de (2); ou

$$s_t = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots . + a_{t-1} z^{t-1},$$

$$s'_t = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots . + b_{t-1} z^{t-1};$$

e supponhamos que se multiplicaram uma pela outra estas duas expressões. Sommando os termos do producto em que o expoente de z é menor que t, e designando esta somma por s''_t: virá

$$(3) \ldots . s''_t = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)\, z + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)\, z^2$$

$$+ \ldots . + (a_{t-1} b_0 + a_{t-2} b_1 + \ldots a_1 b_{t-2} + a_0 b_{t-1})\, z^{t-1}.$$

Os termos que compõe a somma s''_t podem considerar-se como os t primeiros termos d'uma serie, cujo termo geral terá por expressão

$$(4) \ldots\ldots [a_t b_0 + a_{t-1} b_1 + \ldots\ldots a_1 b_{t-1} + a_0 b_t] z^t.$$

Posto isto, passâmos a demonstrar o theorema seguinte: *Se para um valor particular de z, as series* (1) *e* (2), *compostas de termos todos positivos, forem convergentes, e tiverem* s *e* s' *por sommas respectivas, a serie, cujo termo geral tiver por expressão* (4), *será tambem convergente, e terá por somma* $s \times s'$. *Esta mesma propriedade terá ainda logar, quando não forem aquellas series compostas de termos todos positivos, se cada uma d'ellas se conservar ainda convergente, quando os termos negativos se mudarem para positivos.*

a) *Se todos os termos das series* (1) *e* (2) *são positivos*, vê-se logo que é

$$s''_t < s_t s'_t.$$

Mas, se designarmos por q o inteiro $\frac{1}{2}(t-1)$ ou $\frac{1}{2}(t-2)$, conforme t for numero impar, ou numero par: o producto das duas sommas s_{q+1}, e s'_{q+1}, só póde dar termos em que z entre com um expoente menor que t; de maneira que todos estes termos se acharão comprehendidos na expressão de s''_t: e portanto será

$$s''_t > s_{q+1} \times s'_{q+1}.$$

Concebendo agora que t cresce indefinidamente, tambem q crescerá do mesmo modo, e as sommas s_t e s_{q+1} convergirão ambas para o limite s, ao mesmo tempo que as sommas s'_t e s'_{q+1} convergirão para o limite s'. D'onde se segue, que a somma s''_t, que está comprehendida entre os dous productos $s_t s'_t$ e $s_q s'_{q+1}$, convergirá para o limite $s \times s'$.

b) *Se todos, ou alguns dos termos das series* (1) *e* (2) *forem negativos*, segue-se, do que acabâmos de demonstrar, que a differença $s_t s'_t - s''_t$ convergirá para zero, quando t crescer indefinidamente, e todos os termos das duas series forem positivos. Ora esta differença compõe-se de todos os termos do producto $s_t s'_t$, em que entra z com expoente maior que $t-1$; de maneira que será

$$s_t s'_t - s''_t = a_{t-1} b_{t-1} z^{2t-2} + (a_{t-1} b_{t-2} + a_{t-2} b_{t-1}) z^{2t-3} + \ldots\ldots$$

$$+ (a_{t-1} b_1 + a_{t-2} b_2 + \ldots\ldots + a_2 b_{t-2} + a_1 b_{t-1}) z^t.$$

Logo, se, para valores crescentes de t, a differença $s_t s'_t - s''_t$ converge para zero, quando todos os termos que a compõe são positivos, o mesmo acontecerá, e com mais forte razão, se todos, ou alguns d'elles, mudarem de signal, conservando os mesmos valores numericos. D'onde se segue que, ainda 'neste caso, a serie, cujo termo geral é (4), será convergente, e terá por somma $s \times s'$.

2. Da advertencia feita no n.° precedente devemos concluir, que a demonstração dada no citado n.° 10, para demonstrar que o desinvolvimento do binomio $(1 \pm z)^m$ ainda tem logar, quando m é negativo, fraccionario, irracional ou transcendente, só tem applicação quando z fica comprehendido entre $+1$ e -1.

3. E posto que nos parece rigoroso todo o raciocinio empregado 'naquella demonstração, e especialmente na parte em que se quer fazer ver que *a serie representada por* xy *é composta com* m + n *da mesma maneira que as series* x *e* y *o são respectivamente com* m *e com* n: comtudo aqui appresentâmos outra demonstração, talvez mais clara, a qual tirámos da Algebra de Mayer e Choquet.

Muliplicando a serie x do n.° 10 pela serie y, o termo geral da serie xy, será:

$$(5)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-t+1)}{1.\ \ 2\ldots\ldots\ \ t}+\dfrac{m(m-1)\ldots\ldots(m-t+2)}{1.\ \ 2\ldots\ldots\ \ (t-1)}\cdot\dfrac{n}{1}+\ldots\\[2ex] +\dfrac{n(n-1)\ldots\ldots(n-t+2)}{1.\ \ 2\ldots\ldots\ \ (t-1)}\cdot\dfrac{m}{1}+\dfrac{n(n-1)\ldots\ldots(n-t+1)}{1\ \ 2\ldots\ldots\ \ t}\end{array}\right\}z^t.$$

Supponhamos agora que m e n são inteiros positivos. As series x e y são finitas, e tem por sommas respectivas $(1+z)^m$ e $(1+z)^n$; e por conseguinte tambem a serie xy será finita, e terá por somma $(1+z)^{m+n}$. Logo, para todos os valores inteiros e positivos de m e n, será

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-t+1)}{1.\ \ 2.\ \ t}+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-t+2)}{1.\ \ 2.\ \ (t-1)}\cdot\frac{n}{1}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-t+2)}{1.\ \ 2.\ \ (t-1)}\cdot\frac{m}{1}+\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-t+1)}{1.2.\ \ t}$$

$$=\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots\ldots(m+n-t+1)}{1.\ \ 2.\ \ t}.$$

Ora, como esta equação deve verificar-se para todos os valores inteiros e positivos de m e n, é necessario que os seus dous membros sejam identicos. Com effeito, sendo ambos funcções inteiras de m e n, do gráu t, se effectuarmos as operações indicadas, e ordenarmos cada um dos membros em ordem a n, virá uma equação da fórma

$$A_0 + A_1 n + A_2 n^2 + \ldots = B_0 + B_1 n + B_2 n^2 + \ldots$$

na qual os coefficientes A_0, A_1, ... B_0, B_1, ... são funcções inteiras de m, e a maior potencia de n é inferior a $t+1$.

Se dermos arbitrariamente a m um determinado valor, deve a equação precedente ter logar para todos os valores positivos de n, e deve ser forçosamente $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, etc.: porque, se assim não fosse, passando todos os termos para um membro, viria uma equação do gráo t com uma só incognita n, a qual não admittiria mais de t raizes para n, o que é contra o supposto. E como esta conclusão deva subsistir para qualquer valor de m, podemos applicar ás egualdades $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, etc. um raciocinio similhante, por onde se concluiria que estas equações se verificam para qualquer valor de m.

D'aqui se deduz facilmente o theorema indicado; e, se representarmos a somma da serie x por $\varphi(m)$, e a da serie y por $\varphi(n)$, a somma da serie xy deverá ser representada por $\varphi(m+n)$; e como esta somma é tambem egual a $\varphi(m) \times \varphi(n)$, teremos

$$\varphi(m) \times \varphi(n) = \varphi(m+n).$$

Pondo 'nesta equação $n+p$ por n, vem

$$\varphi(m) \times \varphi(n) \times \varphi(p) = \varphi(m+n+p).$$

E em geral teremos

$$\varphi(m) \times \varphi(n) \times \varphi(p) \times \varphi(q) \times \ldots = \varphi(m+n+p+q+\ldots).$$

4. O nosso celebre Mathematico, o Sr. Dr. José Anastacio da Cunha, acha pela maneira seguinte o desinvolvimento da serie do binomio:

Sabemos que em muitos casos a expressão $(1+x)^n$ é susceptivel da fórma $1+nx+Ax^2+Bx^3+Cx^4+$ etc. Se este desinvolvimento for possivel em todos os casos, o que o calculo nos dirá a final, teremos

$$(1+2x+x^2)^n=1+2nx+nx^2$$

$$+4Ax^2+4Ax^3+Ax^4+\text{etc.}$$

$$+8Bx^3+12Bx^4+\text{etc.}$$

$$+16Cx^4+\text{etc.};$$

substituindo em $1+nx+Ax^2+Bx^3+$ etc., em logar de x, $2x+x^2$, por isso que o x de $(1+x)^n$ se tornou em $2x+x^2$.

Mas

$$(1+2x+x^2)^n=[(1+x)^n]^2=(1+nx+Ax^2+Bx^3+\text{etc.})^2$$

$$=1+2nx+2Ax^2+2Bx^3+2Cx^4+\text{etc.}$$

$$+n^2x^2+2nAx^3+2nBx^4+\text{etc.}$$

$$+A^2x^4+\text{etc.};$$

logo

$$2A+n^2=n+4A,\ 2B+2nA=4A+8B,\ 2C+2nB+A^2=A+12B+16C,\ \text{etc.}$$

e por conseguinte

$$A=\frac{n^2-n}{2}=n.\frac{n-1}{2};\ B=n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3};\ \text{etc.}$$

Nota 3.ª (pag. 256).

No *Curso de Analyse* de Mr. Cauchy vem demonstradas as duas proposições seguintes por meio das quaes se consegue muitas vezes resolver a questão da convergencia, quando $L=1$.

Quando na serie proposta cada um dos termos é menor que o seu antecedente, esta serie e a seguinte

$$(1)\ \ldots . u_0+2u_1+4u_3+8u_7+16u_{15}+\ldots .,$$

são conjunctamente ou convergentes, ou divergentes.

Supponhamos em primeiro logar que a serie proposta é convergente, e designemos a sua somma por s. Teremos

$$u_0=u_0$$

$$2u_1=2u_1$$

$$4u_3<2u_2+2u_3$$

$$8u_7<2u_4+2u_5+2u_6+2u_7$$

etc.;

e por conseguinte, a somma dos termos da serie (1), levada até onde se quizer. será inferior a

$$u_0+2u_1+2u_2+2u_3+2u_4+\ldots .=2s-u_0.$$

Vê-se pois que 'neste caso a serie (1) será tambem convergente

Se suppuzermos agora que a serie proposta é divergente, a somma dos termos, tomados em grande numero, acabará sempre por exceder qualquer limite assignado; e commo temos então

$$u_0 = u_0$$

$$2u_1 > u_1 + u_2$$

$$4u_3 > u_3 + u_4 + u_5 + u_6,$$

$$8u_7 > u_7 + u_8 + u_9 + \ldots + u_{14},$$

etc.;

concluiremos, que a somma das quantidades

$$u_0,\ 2u_1,\ 4u_3,\ 8u_7,\ \text{etc.}$$

tomadas em grande numero, acaba tambem por se tornar superior a qualquer quantidade assignada. E 'neste caso a serie (1) será tambem divergente, conforme o theorema enunciado.

Se pela serie proposta tomarmos a seguinte

$$(2) \ldots . 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \ldots,$$

designando por k uma quantidade qualquer, a serie (1) tornar-se-ha em

$$1 + 2^{1-k} + 4^{1-k} + 8^{1-k} + \text{etc.}$$

Esta ultima serie é uma progressão geometrica, convergente quando $k > 1$, e divergente no caso contrario. Por conseguinte a serie (2) será tambem conver-

gente se for $k>1$, e divergente se for $k=1$ ou $k<1$. Por exemplo das tres series

$$(3)\ldots\ldots 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{etc.}$$

$$(4)\ldots\ldots 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

$$(5)\ldots\ldots 1+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}+\ldots\ldots$$

a primeira será convergente, e as outras duas divergentes.

Nota 4.ª (pag. 279).

O Sr. J. A. da Cunha acha o desinvolvimento de log $(1+y)$ da seguinte maneira.

Se em todos os casos pudér ter logar o desinvolvimento de $l(1+y)$ debaixo da fórma

$$l(1+y)=Ay+By^2+Cy^3+Dy^4+\text{etc.}$$

será $$l(1+2y+y^2)=2Ay+Ay^2+4By^2+By^4+\text{etc.}$$
$$+4By^3+8Cy^3+12Cy^4+\text{etc.}$$
$$+16Dy^4+\text{etc.}$$

mas $$l(1+2y+y^2)=l[(1+y)^2]=2l(1+y);$$

logo $$2Ay+(A+4B)y^2+\text{etc.}=2Ay+2By^2+\text{etc.}$$

$$A+4B=2B;\ 4B+8C=2C;\ B+12C+16D=2D,\ \text{etc.},$$

$$B=-\tfrac{1}{2}A;\ C=\tfrac{1}{3}A;\ D=-\tfrac{1}{4}A;\ E=\tfrac{1}{5}A,\ \text{etc.};$$

e por conseguinte

$$l(1+y)=A\left(y-\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{4}y^4+\tfrac{1}{5}y^5-\text{etc.}\right)$$

Como a quantidade A apparece arbitrária, segue-se que o numero de systemas de logarithmos que podemos adoptar é tambem arbitrário. Se fizermos $1+y=$ base a, será

$$A=\frac{\log.\ a}{a-1-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{3}(a-1)^3-\text{etc.}}=\text{Modulo}=\text{Log.}\ e.$$

Nota 5.ª (*pag.* 317).

A construcção empregada para demonstrar o theorema fundamental (3) [fig. 40] deixa de ser a mesma quando não são menores de 90° os lados b' e c'; porque se um d'estes lados é $>90°$, a secante respectiva não encontra a tangente, mas sim o seu prolongamento; e se um dos mesmos lados é $=90°$, a secante respectiva é parallela á tangente.

No entretanto, sem fazermos construcção, póde mostrar-se que, ainda nos casos mencionados, tem logar o theorema (3).

I. Se $b'<90°$; a construcção dá, como dissemos, no triangulo ABC a formula (3).

II. Se $b'<90$, $c'>90°$; produzam-se BA e BC até completar em B′ o fuso espherico BB′. No triangulo B′AC, serão:

$$B'A=180°-c',\ B'AC=180-a,\ B'C=180-a';$$

e a formula (3) que tem logar para o angulo B'AC d'este triangulo, dá

$$\cos B'AC = \frac{\cos B'C - \cos AB' \cos AC}{\operatorname{sen} AB' \operatorname{sen} AC},$$

ou (3).

III. Se $b' > 90°$, $c' > 90°$; o triangulo B'AC, relativamente ao angulo B'AC, está no caso precedente (II); e por isso ainda tem logar a mesma demonstração.

Ou tambem; produzindo os lados BA e AC até encontrarem em B' e C' o arco BC produzido, será no triangulo C'AB':

$$B'AC' = a,\ AB' = 180 - c',\ AC' = 180 - b',\ C'B' = a';$$

e applicando-lhe o theorema, virá a formula (3).

IV. Se $b' = 90°$, $c' = 90°$, a formula (3) dá

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{para o angulo } a, & \cos a = \cos a',\ a = a' \\ \text{para os angulos } b \text{ ou } c, & \cos b = 0,\ b = 90°;\ \cos c = 0,\ c = 90° \end{array}\right\}$$

o que concorda com as propriedades conhecidas dos polos.

V. Se é sómente $c' = 90°$: produza-se, ou corte-se AC, até que seja $AD = 90°$.

1.° Se não é $BD = 90°$; o theorema será applicavel ao angulo D no triangulo CBD; e dará

$$\cos D = \frac{\cos a' - \cos B \cos CD}{\operatorname{sen} BD \operatorname{sen} CD},$$

que, por ser $\cos D = 0$, se reduz a

$$\cos a' = \cos BD \cos CD = \cos a \operatorname{sen} b':$$

e como a fórmula (3) applicada ao angulo a no triangulo ABC dá tambem $\cos a = \frac{\cos a'}{\operatorname{sen} b'}$, ou $\cos a' = \cos a \operatorname{sen} b'$, segue-se que aquella fórmula é ainda verdadeira 'neste caso.

2.° Se é $BD = 90°$; como tambem é $AB = 90°$, será B pólo de AC, e conseguintemente $a' = 90$; logo (IV) o theorema é ainda verdadeiro no caso de que se tracta.

(Vejam-se os *Apontamentos de Trigon. Esph.*, que se encontram tambem no vol. 3.° do jornal de Coimbra o *Instituto*).

Nota 6.ª (*pag.* 341).

1. No triangulo ABC (fig. 41) produzam-se os seus lados, até se encontrarem dous a dous, e formarem os tres fusos esphericos $A\,A'$, $B\,B'$, $C\,C'$. O circulo $ACA'C'A$ será a base do hemispherio $ACBA'C'$; e este compor-se-ha dos triangulos m, n, p, q.

Chamando pois $S = 2\pi r^2$ a superficie do hemispherio, e observando que, por serem

$$AB' = 180° - AB = A'B,\ CB' = 180° - CB = BC',\ B = B',$$

são eguaes os triangulos $AB'C$, $A'BC'$: teremos

$$S = m + n + p + q = m + n + m + p + m + q - 2m$$

$$= AA' + BB' + CC' - 2m.$$

E como os fusos esphericos são proporcionaes aos seus angulos, isto é,

$$AA' = \frac{a}{180°}.\,S,\qquad BB' = \frac{b}{180°}.\,S,\qquad CC' = \frac{c}{180°}.\,S,$$

teremos
$$AA' + BB' + CC' = \frac{a + b + c}{180°}.\,S,$$

e conseguintemente

$$m = \frac{a + b + c - 180°}{360°}.\,S.$$

Se quizermos tomar por unidade de superficie a superficie do triangulo trirectangulo, que é a quarta parte do hemispherio, e por unidade d'angulo o angulo recto, a expressão de m tomará a fórma

$$m = a + b + c - 2.$$

2. A superficie do triangulo vem assim expressa nos seus tres angulos: mas quando os angulos não forem dados, poderemos exprimil-os nas partes que forem dadas, e substituir depois essas expressões na da superficie, ou d'uma funcção trigonometrica d'ella.

Por exemplo, se forem dados os lados a' e c' com o angulo comprehendido b: tomando o triangulo trirectangulo por unidade de superficie, e o angulo recto por unidade d'angulo, teremos

$$\cot\left(\frac{1}{2}m\right) = -\operatorname{tang}\left(\frac{a+c}{2} + \frac{b}{2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\frac{a+c}{2} + \operatorname{tang}\frac{b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{a+c}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2} - 1};$$

ou, em virtude da primeira analogia de Neper, e fazendo $\operatorname{tang}\frac{a'}{2}\operatorname{tang}\frac{c'}{2} = t$,

$$\cot\left(\frac{1}{2}m\right) = \frac{\cot\frac{b}{2}\cos\frac{a'-c'}{2} + \operatorname{tang}\frac{b}{2}\cos\frac{a'+c'}{2}}{\cos\frac{a'-c'}{2} - \cos\frac{a'+c'}{2}}$$

$$= \frac{\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{c'}{2} + \operatorname{sen}\frac{a'}{2}\operatorname{sen}\frac{c'}{2}\left(\cos^2\frac{b}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{b}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\operatorname{sen}\frac{c'}{2} \times \operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tang}\frac{a'}{2}\operatorname{tang}\frac{c'}{2}\cos b}{\operatorname{tang}\frac{a'}{2}\operatorname{tang}\frac{c'}{2}\operatorname{sen} b} = \frac{1 + t\cos b}{t\operatorname{sen} b},$$

Desinvolvendo em fim $\frac{1}{2}m$ em serie ordenada segundo as potencias de t, será

$$\frac{1}{2}m = t \operatorname{sen} b - \frac{1}{2}t^2 \operatorname{sen} 2b \ldots\ldots,$$

ou, se desprezarmos as quantidades da quarta ordem relativamente a a' e c',

$$m = \frac{1}{2}a' \; c' \operatorname{sen} b.$$

E porque é da segunda ordem a differença entre os senos do angulo b do triangulo espherico, e do angulo correspondente do triangulo rectilineo, que tem os mesmos lados que o espherico, vê-se que, desprezando os termos da quarta ordem, a superficie do triangulo espherico é egual á do rectilineo.

3. Chamando r o raio da esphera, e exprimindo as linhas trigonometricas do segundo membro da equação (3) nos comprimentos dos arcos respectivos, facilmente se mostra (Trigon. de Legendre, appendice §. V) que os angulos a, b, c, d'um triangulo espherico de lados muito pequenos teem, desprezando os termos da quarta ordem, com os correspondentes a_i, b_i, c_i, do triangulo rectilineo, cujos lados são tambem a', b', c', as seguintes relações

$$a = a_i + \frac{1}{3}\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''}, \; b = b_i + \frac{1}{3}\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''}, \; c = c_i + \frac{1}{3}\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''},$$

sendo m a superficie do triangulo rectilineo, que segundo o n.º precedente é egual á do espherico.

O que reduz a resolução do triangulo espherico proposto á do triangulo rectilineo, cujos lados são a', b', c', e cujos angulos são a_i, b_i, c_i.

O numero de segundos $\frac{m}{r^2 \operatorname{sen} 1''}$ é o *excesso espherico*, que se reparte assim egualmente pelos tres angulos do triangulo.

4. Suppondo o raio da esphera infinito, e os comprimentos dos arcos finitos, ou suas graduacões infinitesimas, o triangulo espherico torna-se rectilineo; e porisso podemos, fazendo aquellas hypotheses, passar dos theoremas da trigonometria espherica para os correspondentes da trigonometria rectilinea.

Quando nos theoremas da trigonometria espherica entra mais de um lado, passando d'elles para os triangulos rectilineos, podem apparecer razões entre as graduações dos lados; e porque estas razões podem ter um limite de grandeza finita, quando se tornam infinitesimas as graduações entre as quaes ellas teem logar, póde apparecer um theorema correspondente da trigonometria rectilinea na qual entrem lados. Mas quando nos theoremas da trigonometria espherica entra só um lado, a hypothese de ser este infinitesimo necessariamente o faz desapparecer; e o theorema reduz-se para a trigonometria rectilinea a uma relação entre angulos.

Assim, 'nestas hypotheses, a formula (3)

$$\cos a = \frac{\cos a' - \cos b' \cos c'}{\operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c'} = \frac{-2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} a' + 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b' - 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c' - 4\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c'}{\operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c'},$$

dá

$$\cos a = \frac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{2b'c'}.$$

E proseguindo, pelo mesmo modo, achariamos que os quatro theoremas fundamentaes de trigonometria espherica, e as quatro analogias de Neper, correspondem aos quatro theoremas principaes da trigonometria rectilinea. (Vejam-se os já citados *Appontamentos de Trigon. Esph.*)

FIM DO 3.º VOLUME.

TABOA DAS MATERIAS.

ALGEBRA SUPERIOR.

I. DAS COMBINAÇÕES E POTENCIAS.

II. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES.

III. RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES PARTICULARES.

IV. FUNCÇÕES SYMETRICAS.

V. FRACÇÕES CONTÍNUAS.

VI. METHODO DOS COEFFICIENTES INDETERMINADOS.

GEOMETRIA ANALYTICA NO ESPAÇO.

I. TRIGONOMETRIA ESPHERICA.

II. SUPERFICIES E CURVAS NO ESPAÇO.

NOTAS.

ERRATAS.

Pag.	*Lin.*	*Erros*	*Emendas*
16	18	$(2b^3 - 5c^3)^2 (2b^3 - 5c^3)^2$ etc. $=$	$(2b^3 - 5c^3)^2$.
25	18	$h^{m-1} - 1 = (h^q - 1) = (h^q + 1)$,	$h^{m-1} = (h^q - 1) \times (h^q + 1)$,
34	19	(fig. 1)	(fig. 23)
38	23	$+ad$	$+bd$
—	28	$+bdd$	$+add$
41	6	$\mathrm{F} a b^{n'} c^{n''}$	$\mathrm{F} a^n b^{n'} c^{n''}$
64	9	satisfaz ambas	satisfaz a ambas
—	15	attendo	attendendo.
—	17	*dominador*	*denominador*
97	19	$+\frac{1}{6} hf''x$	$+\frac{1}{2} hf''x$
99	3	$x = fx$	$y = fx$
101	16	$\frac{1}{4} h^3 f''x$	$\frac{1}{6} h^3 f^{IV}x$
—	25	fx^{IV}	$f^{IV}x$
113	14	$s = 0{,}0054$	$s = -0{,}0054$
120	3	*são* i	*são os* i
129	8	3.° Se houver	3.° Se na serie B houver de menos uma variação do que em A, haverá só uma raiz entre a e b. 4.° Se houver. . . . .

Pag.	*Lin.*	*Erros*	*Emendas*
150	8	$x+1$	x^m+1
164	29	$b\ e\ o$	$b\ e\ c$
165	30	$y-1$	y^I-1
167	3	$m,\ S_m$	$m.\ S_m$
170	10	y^m+	y^m+1
189	8	$\cos\frac{1}{8}\varphi$	$\cos\frac{1}{3}\varphi$
256	5	$+n_2+\ldots$	$+u_2+\ldots$
263	16	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}x^3$
—	19	$\frac{1}{2}x^3$	$\frac{1}{2}x^2$
321	21	$\left.\begin{matrix}\text{a hypothenusa}\\ a\end{matrix}\right\}$ um lado B	$\left.\begin{matrix}\text{a hypothenusa}\\ a\end{matrix}\right\}$ um angulo B
360	2	(n.º 198)	(n.º 200)
—	3	$y+y'$	$y-y'$
—	8	$=\mathrm{A}(x-x')\ \mathrm{B}(y-y')$	$=\mathrm{A}(x-x')+\mathrm{B}(y-y')$
368	18	(n.º 204, 3.º)	(n.º 204, 2.º)
376	14	$=(ctr-a)$	$2c(r-a)$
—	18	$\dfrac{c-a\,\mathrm{tang}\,\theta}{a-c\,\mathrm{tang}\,\theta}$	$\dfrac{c-a\,\mathrm{tang}\,\theta}{a+c\,\mathrm{tang}\,\theta}$
—	20	$\dfrac{c}{zr-a}$	$\dfrac{c}{2r-a}$

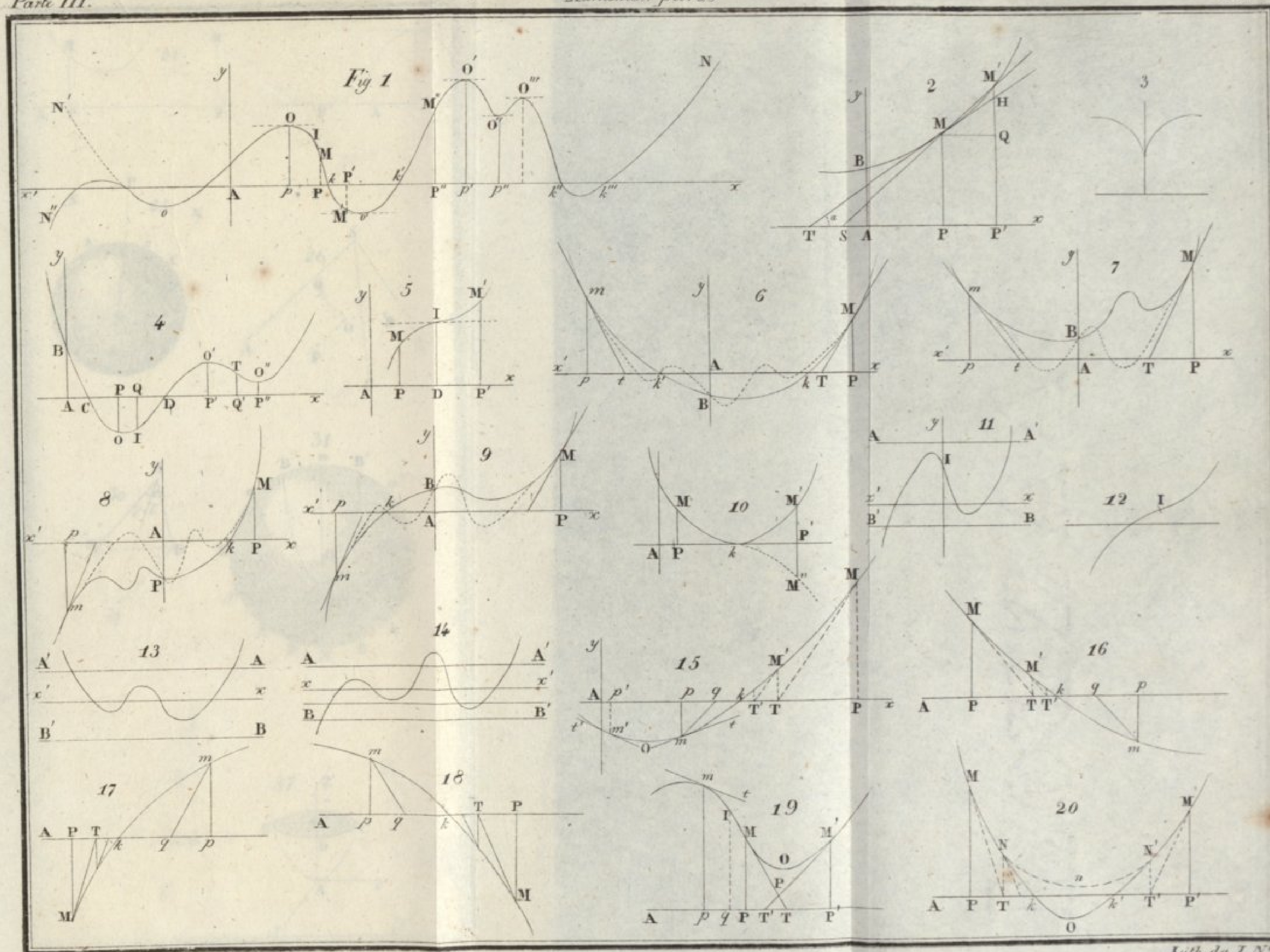
ADDITAMENTO

ÁS ERRATAS DO 2.° VOLUME.

Pag.	*Lin.*	*Erros*	*Emendas*
167	6	<arco AB	<arco AC
175	16	$\frac{c-b}{c+b}\cot\frac{1}{2}A$	$\frac{c-b}{c+b}\cot\frac{1}{2}A \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$
178	5	$2bc\cos\frac{1}{2}A$	$2\sqrt{(bc)}\cos\frac{1}{2}A$
196	4	$-4\cos 3a$	$-4\cos 2a$
239	10	$+ax$	$+\alpha x$
298	7	n.°	n.° 269
302	19	$\cos^2(\beta-\alpha)$	$\cos^2(\beta+\alpha)$

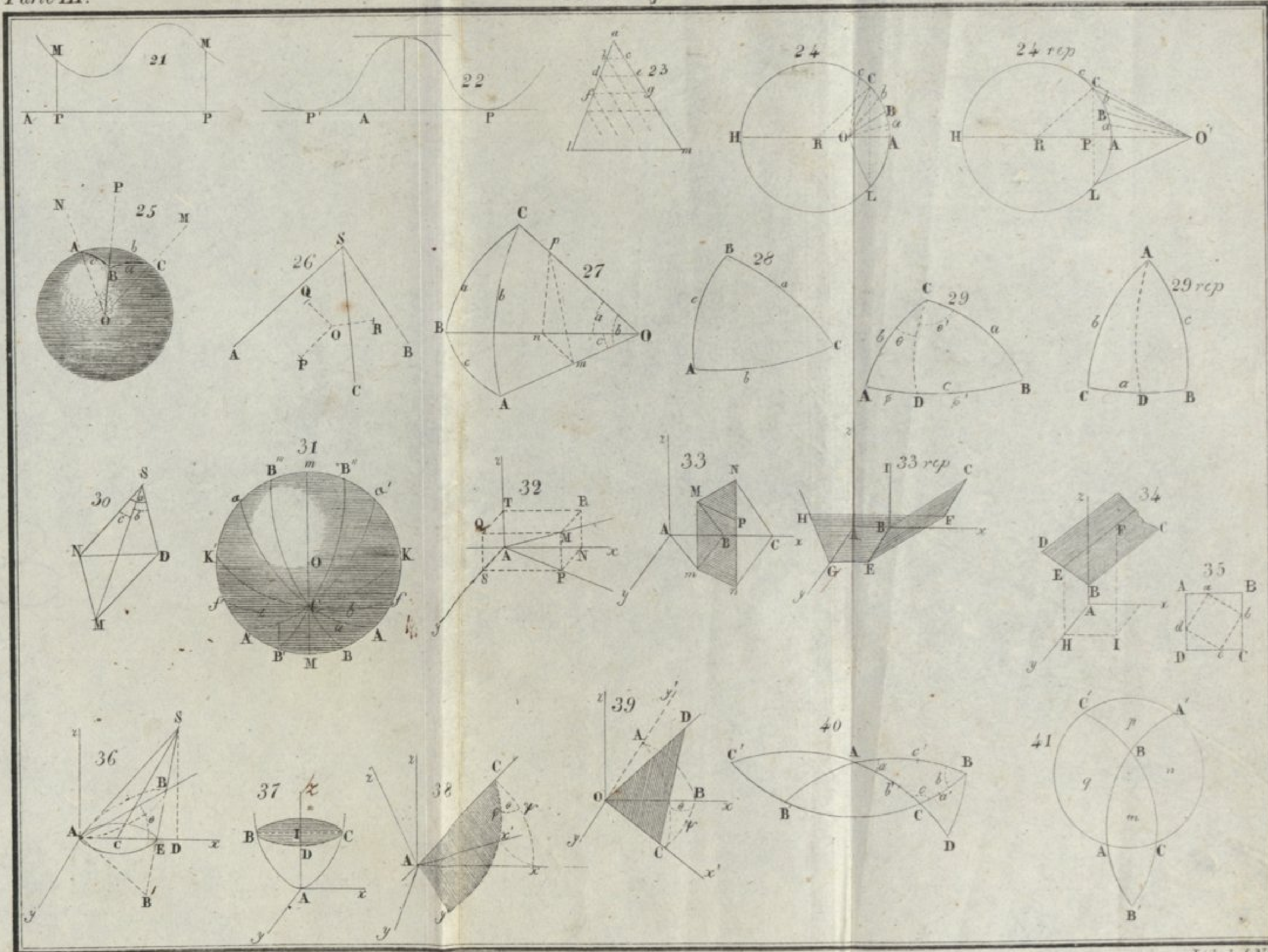
Em logar das ultimas cinco linhas d'esta pagina **302**, *leia-se o seguinte:*

As equações (9), (10), (11), por serem symmetricas relativamente a a' e b', não mudam quando se trocam as denominações dos diametros, isto é, quando se chama a' o que faz com a o angulo β, e b' o que faz com o mesmo eixo o angulo α. Por isso o primeiro factor da equação final da pagina 302, egualado a zero, e combinado com as equações (8), reproduz a equação (11); e o segundo factor, combinado com as equações (8) depois de mudar n'ellas a' em b' e b' em a', reproduz a mesma equação (11).



Valheiras gr.

Lith. da I. N.al



Calheiros, gr.

Lith. da I.N.

1992.09.08

FRANCOEUR

MATHEMATICAS

PURAS

3