110. *Theorema de Descartes.* — Sejam a_1, a_2, .. a_m todas as raizes positivas da proposta; no producto

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m) \cdot \varphi(x)$$

o factor $\varphi(x)$ é formado unicamente com as raizes negativas e imaginárias da equação $f(x) = 0$.

Designando por v e v_1 os numeros de variações de $f(x)$ e $\varphi(x)$, a multiplicação de $\varphi(x)$ por cada um d'aquelles factores binomios introduz no producto um numero impar de variações; portanto será

$$\begin{aligned} v &= v_1 + (1 + 2k_1) + (1 + 2k_2) + \cdots + (1 + 2k_m) \\ &= v_1 + m + 2k \, . \end{aligned}$$

Mas a equação $\varphi(x) = 0$ não tem raizes positivas, e por isso o seu último termo será positivo *(n.º 104)*, como o 1.º; donde resulta que o numero v_1 é par, e a expressão precedente toma a forma

$$v = m + 2l \, ,$$

sende l inteiro e positivo ou zero.

Mudando x em $-x$ e designando por v' e m' os numeros de variações e de raizes positivas da transformada, estas raizes são raizes negativas da proposta e teremos do mesmo modo $v' = m' + 2l'$. Logo:

A equação $f(x) = 0$ *não tem mais raizes positivas do que as variações que ha no seu 1.º membro, nem mais raizes negativas do que as variações da transformada em* $-x$.

O numero das raizes reaes, $m + m'$, é quando muito egual á somma $v + v'$ e a differença, havendo-a, é um numero par. O numero das raizes imaginárias não é inferior á differença $n - (v + v')$.

Se a equação fôr completa, o theorema de Descartes pode enunciar-se nos termos seguintes:

A equação completa não tem mais raizes positivas do que variações nem mais raizes negativas do que permanencias.

Cor. 1. Sendo positivos todos os termos, é $v=0$ e $m=0$. Sendo todas as raizes reaes e positivas, é $m=n=v$ e $l=0$; a equação é completa, e só tem variações. Sendo $v=1$, é $l=0$ e $m=1$; a equação, que tem só uma variação, tem uma raiz real positiva e só uma. Sendo $v'=1$, é $l'=0$ e $m'=1$; a equação tem uma raiz real negativa.

Cor. 2. Sendo reaes todas as raizes, é $m+m'=n=v+v'-2(l+l')$; e pois que $v+v'$ não pode ser superior a n, será $l=l'=0$, $v=m$ e $v'=m'$.

111. Havendo na equação faltas de termos consecutivos, ou *lacunas*, será em geral $v+v'<n$; neste caso será com mais razão $m+m'<n$, e a proposta tem raizes imaginárias.

Se faltam $2k$ termos entre os dois

$$px^l\ ,\quad qx^{l-2k-1}\ ,$$

o polynomio

$$F(x)=px^l+q_1x^{l-1}+q_2x^{l-2}+\cdots+qx^{l-2k-1}\ ,$$

onde q_1, q_2, etc. são quaesquer, é completo e tem $2k+2$ termos; de modo que haverá $2k+1$ variações em $F(x)$ e $F(-x)$. Por outra parte, os graus dos termos extremos são de differente paridade, e estes termos dão só uma variação para a proposta $f(x)=0$ e para a transformada em $-x$; portanto a falta dos termos intermédios faz perder $2k$ variações, e a equação $fx=0$ tem só por este facto, $2k$ raizes imaginárias.

Se faltam $2k+1$ termos entre os dois

$$px^l\ ,\quad qx^{l-2k-2}\ ,$$

o polynomio completo

$$F(x) = px^t + q_1x^{t-1} + \cdots + qx^{t-2k-2}$$

tem $2k+3$ termos, e haverá $2k+2$ variações em $F(x)$ e $F(-x)$. Por outra parte os graus dos termos extremos são da mesma paridade, e estes termos podem ter o mesmo ou differente signal em $f(x)$. No primeiro caso não dão variações na proposta e na transformada em $-x$, e estas equações perdem $2k+2$ variações pela falta d'aquelles termos intermédios. No segundo caso os termos extremos de $F(x)$ dão duas variações em $f(x)$ e $f(-x)$, e estes polynomios veem a perder só $2k$ variações. A proposta tem num caso $2k+2$ raizes imaginárias e no outro $2k$, provenientes só da lacuna considerada; e como pode ser $k=0$, se na equação faltar um termo só entre dois de signaes contrários, será $v+v'=n$, como na equação completa, e a proposta pode ter todas as raizes reaes.

112. *Theorema de Budan.* — Substitua-se x successivamente por α e por $\beta > \alpha$ em $f(x)$ e em todas as suas derivadas; por baixo das funcções

$$f(x)\,,\quad f'(x)\,,\quad f''(x)\quad \ldots\quad f^n(x) \qquad (i)$$

assentem-se os signaes dos resultados correspondentes em duas linhas (α) e (β). As variações da linha (β) só podem ser differentes das variações da linha (α), quando alguma das funcções (i) passa por zero no intervallo considerado *(n.º 104)*.

Supponhamos, em primeiro logar, que uma d'estas funcções, $f^p(x)$ por exemplo, passa por zero, sem que succeda o mesmo á antecedente nem á seguinte. Designando por h um numero positivo, teremos (31)

$$f^p(x-h) = f^p(x) - hf^{p+1}(x) + \cdots\,,$$
$$f^p(x+h) = f^p(x) + hf^{p+1}(x) + \cdots\,;$$

10

por onde se vê que para $f^p(x)=0$

$$f^p(x-h) \text{ e } f^{p+1}(x)$$

teem signaes contrários, emquanto que

$$f^p(x+h) \quad \text{e} \quad f^{p+1}(x)$$

teem o mesmo signal, suppondo h tão pequeno que cada um d'aquelles desenvolvimentos tenha o signal do seu primeiro termo significativo (*n.º 72*), e que entre $x-h$ e $x+h$ não haja raiz alguma das equações $f^{p-1}(x)=0$, $f^{p+1}(x)=0$.

D'aqui resulta que as tres funcções

$$f^{p-1}(x)\,,\quad f^p(x)\,,\quad f^{p+1}(x)$$

perdem uma variação nas duas últimas, quando só $f^p(x)$ passa por zero e podem ganhar ou perder outra variação nas duas primeiras; de modo que ao todo perdem duas ou nenhuma. A disposição dos signaes, immediatamente antes e depois do valor $x=a$ que torna $f^p(a)=0$, será alguma das seguintes:

$$\begin{array}{cccc} -+-\,, & ++-\,, & +-+\,, & --+ \\ --- & +-- & +++ & -++\,. \end{array}$$

Quando é $f(x)$ que passa por zero perde se sempre uma variação, porque não ha outra funcção antes d'esta. Logo:

As funcções (i) *perdem pelo menos uma variação na passagem de* x *por uma raiz da equação* f(x) = 0; *e se perderem mais, o excesso é um numero par.*

Supponhamos, em segundo logar, que para o mesmo valor de $x=a$, se annullam algumas funcções consecutivas (*i*) desde $f^m(x)$, até $f^p(x)$ exclusivamente. Designando uma d'ellas por $f^k(x)$ teremos para esta funcção e para a seguinte, que é a sua derivada,

$$f^k(x+h)=\frac{h^p}{p!}f^p(x)+\cdots$$

$$f^{k+1}(x+h)=\frac{h^{p-1}}{(p-1)!}f^p(x)+\cdots ;$$

e suppondo h tão pequeno que o signal d'estes desenvolvimentos seja o do 1.º termo respectivo, as expressões precedentes mostram que, em geral, uma funcção, que se annulla para $x=a$ tem signal contrário ao da sua derivada para $x=a-h$ e o mesmo signal d'ella para $x=a+h$.

Por conseguinte as funcções

$$f^m(x)\ ,\quad f^{m+1}(x)\ ,\quad \ldots\ ,\quad f^p(x)$$

dão só variações antes de passarem por zero e só permanencias depois; por forma que ainda neste caso haverá perda de variações, quando se passa por algum valor que annulla uma ou mais funcções (i). Se são as primeiras p funcções que se annullam para $x=a$, perdem-se p variações neste logar e a proposta tem p raizes eguaes a a *(n.º 98)*. O principio precedente é, pois, verdadeiro em todos os casos, e

A equação $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ *não tem entre* α *e* β *mais raizes reaes do que são as variações perdidas pelas funcções* (i) *quando se passa de* $\mathrm{x}=\alpha$ *para* $\mathrm{x}=\beta$.

Cor. 1. A linha $(-\infty)$ de signaes só tem variações, porque as funcções (i) são alternadamente de graus pares e impares. A linha (0) reproduz os signaes do 1.º membro da proposta. A linha $(+8)$ só tem permanencias, porque o 1.º termo de cada uma d'aquellas funcções é positivo. Nisto consiste precisamente o theorema de Descartes, que assim se encontra como caso particular do de Budan.

Cor. 2. Substituindo x por um numero l, para o qual a linha (l) só tenha permanencias, não haverá raizes entre l e ∞; assim l é um limite superior das raizes positivas da proposta, e o theorema de Newton acha-se contido no de Budan.

*

Cor. 3. Se $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ teem signaes contrários e todas as outras funcções (i) conservam os seus signaes para $x=\alpha$ e $x=\beta$, entre α e β *ha só uma da raiz da proposta*. Com effeito, entre estes limites haverá neste caso um numero impar de raizes (*n.º 104*); mas agora ha *uma só*, porque só se perde uma variação. Diz-se então que a raiz está *separada* por α e β; mas a separação das raizes não pode realisar-se sempre por este processo, porque algumas funcções (i) podem annullar-se simultaneamente com $f(x)$, perdendo-se ao mesmo tempo mais d'uma variação. D'este objecto se tratará adeante.

Cor. 4. Pelas linhas de signaes (α) e (β) das funcções (i) pode determinar-se um limite superior do numero de raizes reaes comprehendidas entre α e β; mas não se pode affirmar que as haja imaginárias.

Cor. 5. Representando por $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ uma funcção inteira e a sua derivada, se fôr $\varphi(a)=0$ será tambem $\dfrac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}=0$, pois que o grau do binomio $x-a$ em $\varphi(x)$ excede uma unidade (*n.º 98*) o grau do mesmo binomio em $\varphi'(x)$. Mas aquella fracção, annullando-se, passa sempre de negativa para positiva.

Exemplo: Seja dada a equação

$$x^3-2^2-x+2=0\ ;$$

pelo theorema de Descartes esta equação tem duas raizes positivas ou nenhuma, porque no seu 1.º membro ha duas variações, e uma raiz negativa, porque na transformada em $-x$ ha uma variação.

Formando as funcções (i) e substituindo x successivamente por -2, 0 e 3, acham-se as linhas de signaes

$$\begin{array}{lll}
(-2) & .. & -+-+ \\
(0) & .. & +--+ \\
(3) & .. & ++++\,.
\end{array}$$

Pelo theorema de Budan as raizes positivas, havendo-as, estam entre 0 e 3; a negativa fica entre -2 e 0.

113. *Theorema de Rolle.* — *Duas raizes consecutivas da equação* $f(x)=0$ *comprehendem um numero impar de raizes da equação derivada* $f'(x)=0$.

Supponha-se a proposta desembaraçada de raizes eguaes, e sejam a, b, c, .. l as suas raizes reaes, por ordem ascendente de grandeza. Acabamos de ver que $f(x)$ e $f'(x)$ teem o mesmo signal *logo depois* de um valor de x que é raiz da proposta, e signaes contrários *immediatamente antes*; ou que

$$f(a+h)\ ,\quad f'(a+h)$$

teem o mesmo signal, emquanto que

$$f(b-h)\ ,\quad f'(b-h)$$

teem signaes contrários. Mas $f(a+h)$ e $f(b-h)$ teem o mesmo signal, porque entre os limites $a+h$ e $b-h$ não existe raiz alguma da proposta; logo $f'(a+h)$ e $f'(b-h)$ teem signaes contrários, donde resulta que a equação $f'(x)=0$ tem um numero impar de raizes, uma pelo menos, comprehendidas entre $a+h$ e $b-h$ ou, no limite, comprehendidas entre a e b.

A equação $f'(x)=0$ pode ter raizes inferiores a a, mas em numero par; ou superiores a l, mas tambem estas em numero par. Com effeito, $f(l+h)$ e $f(\infty)$ são do mesmo signal, e ambas positivas porque a segunda o é; ora $f'(l+h)$ tem o mesmo signal de $f(l+h)$, e portanto $f'(l+h)$ e $f'(\infty)$ teem o mesmo signal. Do mesmo modo $f(a-h)$ e $f(-\infty)$ teem o mesmo signal, porque entre estes limites não ha raiz alguma da proposta; $f(a-h)$ e $f'(a-h)$ são de signaes contrários, bem como $f(-\infty)$ e $f'(-\infty)$ cujos graus são de differente paridade: logo $f'(a-h)$ e $f'(-\infty)$ teem o mesmo signal.

Cor. I. Se todas as raizes forem reaes, haverá entre ellas $n-1$ intervallos e a equação derivada tem tambem todas as raizes reaes. Estas últimas ficam *separadas* pelas primeiras.

Cor. 2. Duas raizes da equação derivada não podem comprehender mais de uma da proposta. Se entre as raizes b' e c' da primeira equação houvesse duas b e c da segunda, entre estas últimas não existiria raiz alguma da equação derivada, contra o que se demonstrou. Designando por a', b', . . l' as raizes reaes da equação $f'(x)=0$, em ordem crescente de grandezas, os numeros

$$-\infty\,,\quad a'\,,\quad b'\,,\quad \ldots\,,\quad l'\,,\quad +\infty$$

são chamados *numeros de Rolle*. Dois d'elles consecutivos não comprehendem raiz alguma da equação $f(x)=0$, ou comprehendem uma só.

Cor. 3. Sendo q as raizes distinctas da equação derivada, os numeros de Rolle apresentam $q+1$ intervallos e a proposta não pode ter mais de $q+1$ raizes reaes. Para que sejam reaes todas as raizes d'esta equação é necessário que a derivada tenha $n-1$ raizes differentes; mas a recíproca não é verdadeira. Se em cada um dos n intervallos dos numeros de Rolle houver uma raiz da proposta, estas raizes são todas reaes e ficam separadas por aquelles numeros.

Cor. 4. Entre duas raizes reaes da equação $f(x)=0$ o polynomio $f(x)$ tem um numero impar de máximos e mínimos *(n.º 107)*.

114. Fazendo

$$f(x+h)-f(x)=h.\mathrm{K}\ ,$$
$$y=f(x+z)-f(x)-z\mathrm{K}\ ,$$

derivemos a funcção y em ordem á variavel z; a derivada será

$$y'=f'(x+z)-\mathrm{K}\ .$$

Ora sendo $y=0$ para $z=h$ e para $z=0$, será $y'=0$ *(n.º 113)* para um valor de z comprehendido entre 0 e h: ou para $z=\theta h$, sendo θ positivo e menor que 1. Da última expressão tira-se, pois, $f'(x+\theta h)-\mathrm{K}=0$ ou $\mathrm{K}=f'(x+\theta h)$; por onde teremos finalmente

$$f(x+h)=f(x)+h\,f'(x+\theta h)\ .$$

Do mesmo modo, fazendo

$$f(x+h)-f(x)-hf'(x)=\frac{h^2}{2}\cdot\mathrm{K}\ ,$$

$$y=f(x+z)-f(x)-zf'(x)-\frac{z^2}{2}\mathrm{K}\ ,$$

as duas primeiras derivadas de y serão

$$y'=f'(x+z)-f'(x)-z\mathrm{K}\ ,$$
$$y''=f''(x+z)-\mathrm{K}$$

Ora é $y=0$ para $z=h$ e para $z=0$, donde resulta $y'=0$ para $z=\theta h$; mas é tambem $y'=0$ para $z=0$, e portanto será $y''=0$ para um valor de $z=\theta_1 h$, comprehendido entre 0 e θh. Teremos por conseguinte $\mathrm{K}=f''(x+\theta_1)h$ e

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x+\theta_1 h)\ ,$$

com θ_1 positivo e menor que 1. Em geral será

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^p}{p!}f^p(x+\theta h)\ .$$

115. *Theorema de Sturm.* — Sejam: $f(x) = 0$ uma equação sem raizes eguaes; $R_1, R_2, \ldots R$ os restos, *com os signaes trocados*, das divisões successivas de $f(x)$ por $f'(x)$ de $f'(x)$ por R_1, etc.; Q_1, Q_2, etc. os quocientes d'estas operações. Os polynomios

$$f(x)\,,\quad f'(x)\,,\quad R_1\,,\quad \ldots\quad R$$

chamam-se *funcções de Sturm*, são de graus decrescentes e o último é um numero differente de zero, pois que a proposta não tem raizes eguaes *(n.º 99)*. Além disto, os mesmos polynomios verificam as duas condições seguintes:

1.ª *Dois d'elles consecutivos não podem annullar-se para o mesmo valor* a *de* x. Os dois primeiros, pela mesma condição de não haver raizes eguaes; dois intermédios R_{p-1} e R_p porque, sendo por definição

$$R_{p-1} = R_p \,.\, Q_{p+1} - R_{p+1}\,,$$

se para $x = a$ fosse $R_{p-1} = 0$ e $R_p = 0$, seria tambem $R_{p+1} = 0$ e depois $R_{p+2} = 0$ e assim por deante até $R = 0$, contra a hypóthese.

2.ª *Se uma funcção intermédia se annulla para* $x = a$, *a anterior e a seguinte teem signaes contrários para o mesmo valor de* x. Para $R_p = 0$, tira-se da relação precedente $R_{p-1} = -R_{p+1}$.

Posto isto, dando a x valores crescentes, desde $x = \alpha$ até $x = \beta > \alpha$, e assentando por baixo de cada funcção o signal do resultado correspondente, a linha d'estes signaes não perde variação alguma quando uma das funcções intermédias R_p passa por zero. Neste instante ha de verificar-se uma das disposições $+\ 0\ -$, ou $-\ 0\ +$; á primeira corresponderia, para um valor de x immediatamente anterior ao valor a que annullou R_p, um dos casos

$$++-\,,\quad \text{ou}\quad +--\,,$$

e respectivamente, para um valor de x immediatamente superior a a,

$$+--, \quad \text{ou} \quad ++-,$$

visto que R_{p-1} e R_{p+1} não mudam de signal. Do mesmo modo se provaria para $-\ 0\ +$ que depois da passagem de R_p por zero os tres signaes apresentam a mesma variação que apresentavam antes, a qual se desloca mas não se perde.

Por outra parte, a última funcção R é um numero, e não se annulla para qualquer valor de x. Quanto á primeira, se fôr $f(a)=0$, $f(x)$ e $f'(x)$ teem signaes contrários para valores de x immediatamente inferiores a a, e teem o mesmo signal logo que x se torna maior que a *(n.º 112)*; neste caso perde-se uma variação nos dois primeiros termos da linha dos signaes.

Continuando a dar valores crescentes a x, até chegar a outra raiz $x=b$ da proposta, $f'(x)$ mudará de signal no intervallo de a a b, em que *(n.º 115)* se comprehende um numero impar de raizes da equação $f'(x)=0$, sem que esta mudança altere o numero de variações que havia entre a e b. Depois de $x=b$, perde-se outra variação, e assim por deante; logo,

Se nas funcções de Sturm fizermos successivamente $x=\alpha$ *e* $x=\beta>\alpha$, *o numero das variações perdidas na passagem da primeira linha de signaes para a segunda é egual ao numero de raizes reaes da proposta comprehendidas entre* α *e* β.

Estes resultados ainda teem logar quando se multiplica ou divide alguma das funcções de Sturm por um numero *positivo*, a fim de evitar o apparecimento de coefficientes fraccionários na divisão respectiva; mas agora não podemos empregar factores *negativos*, como quando se tratava simplesmente da indagação do maior divisor commum entre $f(x)$ e a sua derivada.

Cor. 1. Substituindo x por $-\infty$ e $+\infty$, a differença entre os numeros correspondentes de variações é o numero de raizes reaes da proposta.

Cor. 2. Sendo completo o grupo das funcções de Sturm, se os primeiros termos d'estas $n+1$ funcções apresentarem k variações a proposta tem $2k$ raizes imaginárias. Com effeito, para $x=+\infty$ as funcções tomam respectivamente os signaes dos seus primeiros termos, com o numero de variações

$$v_{+\infty}=k\ ;$$

para $x=-\infty$ as permanencias tornam-se em variações e

$$v_{-\infty}=n-k\ ,$$

donde resulta finalmente

$$v_{-\infty}-v_{+\infty}=n-2k\ .$$

Para serem todas as raizes reaes, ou $k=0$, é necessário que o grupo das funcções de Sturm seja completo, e que os primeiros termos respectivos tenham o mesmo signal; isto é, que sejam todos positivos como o de $f(x)$.

Cor. 3. O theorema é applicavel ao caso de haver raizes eguaes. Sendo então R uma funcção de x, que divide todas as funcções de Sturm, effectuem-se estas divisões cujos quocientes representaremos por

$$F(x)\ ,\quad R'\ ,\quad R'_1\ ,\quad \ldots\ ,\quad 1\ .$$

A equação $F(x)=0$ contém todas as raizes da proposta, cada uma d'ellas só uma vez; as novas funcções verificam as condições em que se funda o theorema de Sturm, o qual por isso lhes pode ser applicado.

Cor. 4. Fazendo $x=-\infty$ e $x=0$ nas funcções de Sturm, $v_{-\infty}-v_0$ é o numero de raizes negativas da proposta. Do mesmo modo v_0-v_∞ é o numero das raizes positivas.

116. *Exemplo.* — Seja dada a equação $f(x)\equiv x^6+3x^4-4x^3+6x^2+12x-18=0$, donde

$$\frac{1}{6}f'(x)=x^5+2x^3-2x^2+2x+2\ ;$$

dividindo $f(x)$ por este polynomio, acha-se o quociente $Q_1 = x$ e o resto $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 10x - 18$. Trocando os signaes, vem

$$R_1 = -x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 10x + 18 ;$$

e dividindo por R_1 o divisor antecedente, resulta o quociente $Q_2 = -x - 2$ e e o resto $x^3 - 10\,x^2 + 19$. Será, pois,

$$R_2 = -x^3 + 10x^2 - 19 ;$$

e dividindo R_1 por R_2 vem o quociente $Q_3 = x + 8$ e o resto $-84\,x^2 + 9\,x + 170$, donde

$$R_3 = 84x^2 - 9x - 170 .$$

Dividindo finalmente R_2 por R_3, acha-se $Q_4 = x + 283$, depois de multiplicar R_2 e o primeiro resto por 84; e o resto d'esta divisão é $-2267x + 2402$, que dá

$$R_4 = 2267\,x - 2402 .$$

A divisão seguinte daria o resto R_5 independente de x.

Fazendo nas funcções

$$f(x)\,,\quad f'(x)\,,\quad R_1\,,\quad R_2\,,\quad R_3\,,\quad R_4\,,\quad R_5$$

x successivamente egual a $-\infty$, 0 e $+\infty$, acham-se as linhas de signaes

$$\begin{array}{c} + - - + + - + \\ - + + - - - + \\ + + - - + + + \,. \end{array}$$

Na segunda linha perde-se uma variação, e a proposta tem uma raiz negativa. Da segunda linha para a terceira perde-se outra variação, e a proposta tem uma raiz positiva. Da primeira linha para a última perdem-se duas variações, a proposta tem duas raizes reaes e quatro imaginárias.

Pode notar-se que estes resultados são conformes com os princípios demonstrados no n.° 105, 2.°.

CAPÍTULO IX.

Equações reciprocas. Equações binomias.

117. A equação $f(x)=0$ diz-se *reciproca* quando tem as mesmas raizes que a equação $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$; de modo que o 1.° membro da segunda, depois de desembaraçada de denominadores, só poderá distinguir-se de $f(x)$ por algum factor constante δ. Será, pois,

$$x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=\delta \cdot f(x)\ ;$$

ou, dando a $f(x)$ a forma mais geral do polynomio inteiro de grau n,

$$\begin{aligned} &p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \\ &= \delta p_0 x^n + \delta p_1 x^{n-1} + \cdots + \delta p_{n-1} x + \delta p_n\ . \end{aligned}$$

D'esta identidade deduzem-se as relações

$$p_n = \delta p_0\ , \quad p_{n-1} = \delta p_1\ , \quad \ldots \quad p_1 = \delta p_{n-1}\ , \quad p_0 = \delta p_n\ ;$$

multiplicando as duas extremas uma pela outra, acha-se

$$\delta^2 = 1 \,, \quad \delta = \pm 1 \,,$$

e portanto

$$p_n = \pm p_0 \,, \quad p_{n-1} = \pm p_1 \,, \quad \text{etc.}$$

Se fosse $n = 2k$, haveria em $f(x)$ um termo médio cujo coefficiente designaremos por p_k, e entre as relações precedentes se encontraria a seguinte: $p_k = \pm p_k$. Mas esta egualdade só pode subsistir com o signal inferior quando é $p_k = 0$; e portanto:

A equação recíproca tem os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos eguaes e do mesmo signal; ou numericamente eguaes e de signaes contrários, faltando neste caso o termo médio quando o grau da equação é par.

118. A equação recíproca de grau impar tem a raiz -1, quando os termos equidistantes dos extremos são do mesmo signal, e $+1$ quando elles são de signaes contrários; porque em ambos os casos os termos se reduzem dois a dois, dando aquelles valores a x.

A equação recíproca de grau par tem, pela mesma razão, as duas raizes ± 1, quando é $p_n = -p_0$, pois que neste caso lhe falta o termo médio.

Da relação $z^2 = 1$ ou $z = \pm 1$ tira-se $z = \frac{1}{z}$; por onde se vê que as raizes $+1$ e -1 são recíprocas de si mesmas e os casos precedentes estam incluídos na definição das equações recíprocas. É facil reconhecer directamente a existencia d'aquellas raizes, substituindo x por ± 1; bem como a ordem de multiplicidade de cada uma d'ellas, que se determinaria dividindo $f(x)$ por $x \mp 1$ quantas vezes fosse possivel. Tendo effectuado estas divisões, o quociente $\varphi(x)$ será de grau par $2m$, porque as raizes da equação $\varphi(x) = 0$ são, duas a duas, recíprocas umas das outras.

Por outra parte, em $\varphi(x)$ os termos equidistantes dos extremos terão o mesmo signal. Com effeito, para $x = \pm 1$ a relação

$$x^{2m} \cdot \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \delta \cdot \varphi(x)$$

torna-se em

$$\varphi(\pm 1) = \delta \cdot \varphi(\pm 1),$$

donde se tira $\delta = 1$ por ser $\varphi(\pm 1)$ differente de zero.

Por conseguinte a resolução das equações recíprocas vem a depender d'uma da forma

$$p_0 x^{2m} + p_1 x^{2m-1} + \cdots + p_1 x + p_0 = 0,$$

com os coefficientes dos termos equidistantes dos extremos eguaes e do mesmo signal.

Dividindo por x^m e reduzindo os termos do mesmo coefficiente, esta equação torna-se em

$$p_0\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + p_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \cdots + p_m = 0.$$

Mas da relação

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}\right) + \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

tira-se, pondo $x + \frac{1}{x} = y$,

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) y - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right);$$

e fazendo successivamente $k = 1, 2, 3, 4$, etc., acham-se as expressões

$$x+\frac{1}{x}=y\,,$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2\,,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y\,, \qquad (i)$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2\,,$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=y^5-5y^3+5y\,,$$

e assim por deante. Substituindo estas expressões na equação precedente, resulta a transformada em y, de grau m; da primeira d'ellas tira-se

$$x^2-yx+1=0\,, \qquad (40)$$

e substituindo y nesta equação por cada uma das raizes da transformada, teremos as duas raizes correspondentes da proposta. Logo,

As equações reciprocas são susceptiveis de abaixamento. A reciproca de grau par, com os termos equidistantes dos extremos do mesmo signal, abaixa-se ao grau sub-duplo.

119. Qualquer das equações

$$x^n \pm A=0$$

se chama *binomia;* nenhuma d'ellas tem raizes eguaes, porque entre $x^n \pm A$ e a sua derivada não ha divisor commum senão a unidade.

O numero A pode ser real ou imaginário, e em geral faremos

$$A = R(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) ;$$

este numero tem, pois, n raizes *distinctas* do grau n. Designando uma d'ellas por a, será $a^n = A$; e fazendo $x = ay$, a transformada da equação binomia, dividida por a^n, será

$$y^n \pm 1 = 0 .$$

A resolução da equação $y^n + 1 = 0$ pode fazer-se depender de outra ou de outras da forma

$$y^n - 1 = 0 , \qquad (41)$$

e só esta importa considerar. Com effeito, se n é impar mudando y em $-y$ na primeira equação, resulta logo a segunda. Sendo n par e k o expoente da maior potencia de 2 que se contém em n, será $n = 2^k . r$ e r impar; fazendo $2^k = s$ e $y^s = z$, a equação $y^n + 1 = 0$ torna-se em $z^r + 1 = 0$, que está no caso anterior. A equação $y^s = z$ faz-se depender de uma equação da forma $t^s - 1 = 0$, do mesmo modo que da equação $x^n - A = 0$ se passou para $y^n - 1 = 0$.

Teriamos as raizes da equação (41), ou as *raizes da unidade*, dando a k na fórmula (28) todos os valores inteiros desde 1 até n; mas as respectivas expressões viriam complicadas com funcções trigonométricas.

As raizes da unidade gosam de propriedades notaveis, que vamos dar a conhecer.

120. *As raizes communs ás equações*

$$y^m - 1 = 0 , \quad y^n - 1 = 0$$

são raizes da equação

$$y^d - 1 = 0 ,$$

em que d *é o maior divisor commum de* m *e* n.

Com effeito, pelo processo das divisões successivas facilmente se reconhece que $y^d - 1$ é o maior divisor commum de $y^m - 1$ e $y^n - 1$.

Pelo theorema de Descartes, a equação (41) tem só uma raiz real se n é impar, só duas se n é par; aquella raiz é $+1$, e estas são ∓ 1.

Uma raiz da equação (41) diz-se *primitiva* quando não é raiz de outra equação da mesma forma e de grau inferior. A raiz $+1$ nunca é primitiva; para $n = 2k$ a raiz -1 tambem o não é, excepto se fôr $n = 2$.

Cor. 1. Se m e n forem primos entre si, as equações $y^m - 1 = 0$ e $y^n - 1 = 0$ só teem a raiz commum $+1$.

Cor. 2. Se n fôr numero primo, qualquer raiz imaginária da equação $y^n - 1 = 0$ é primitiva.

121. *Qualquer potencia de uma raiz da equação* (41) *é tambem raiz d'esta equação.*

Porque, designando aquella raiz por α, teremos $(\alpha^n)^t = (\alpha^t)^n = 1$.

122. *Se* α *fôr uma raiz primitiva da equação* (41), *as potencias de* α *desde 1 até* n *darão todas as raizes da mesma equação.*

Em primeiro logar, na série de todas as potencias inteiras, positivas e negativas, de α

$$\ldots \alpha^{-3}, \ \alpha^{-2}, \ \alpha^0, \ \alpha^1, \ \alpha^2, \ \ldots$$

não ha mais de n termos differentes. Com effeito, a qualquer inteiro t, positivo ou negativo, pode dar-se a forma

$$t = nq + r ,$$

com r positivo e menor que n; d'onde virá

$$\alpha^t = \alpha^r,$$

por ser $\alpha^{nq} = (\alpha^n)^q = 1$.

Por outra parte, sendo α raiz primitiva da equação $y^n - 1 = 0$, se entre os numeros

$$\alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^n$$

houver dois eguaes, $\alpha^h = \alpha^k$ por exemplo, d'esta relação tirava-se, suppondo $k > h$ e fazendo $k - h = m < n$,

$$\alpha^{k-h} = \alpha^m = 1,$$

e α seria raiz da equação $y^m - 1 = 0$, contra a hypóthese.

123. *A equação* (41) *tem sempre raizes primitivas.*

Com effeito, se n é primo, todas as raizes differentes da unidade são primitivas, como já se disse. No caso contrário, a proposta terá tantas raizes primitivas, quantos forem os inteiros inferiores a n e primos com este numero.

124. *Se* n *é o producto de dois factores primos simples,* $n = rs$, *obteem-se todas as raizes da equação* $y^n - 1 = 0$ *multiplicando todas as raizes de* $y^r - 1 = 0$ *por todas as de* $y^s - 1 = 0$.

Neste caso a proposta tem a forma $y^{rs} - 1 = 0$, e as raizes das equações

$$y^r - 1 = 0, \quad y^s - 1 = 0$$

satisfazem á primeira e não são raizes primitivas d'ella. Mas estas raizes, contando a unidade só uma vez, são em numero de $r + s - 1$;

logo o numero de raizes primitivas da equação (41) será agora

$$rs-r-s+1=(r-1)(s-1)$$
$$=n\left(1-\frac{1}{r}\right)\left(1-\frac{1}{s}\right).$$

Se β e γ forem respectivamente raizes primitivas das equações $y^r-1=0$, e $y^s-1=0$, o producto $\beta\gamma=\alpha$ será raiz primitiva da proposta. Com effeito, de $\beta^r=1$ e $\gamma^s=1$ deduz-se

$$\beta^{rs}=1,\ \gamma^{rs}=1,\ (\beta\gamma)^{rs}=\alpha^n=1,$$

por onde se vê que α é raiz da equação (41). E é raiz primitiva, porque no caso contrario só poderia ser raiz de alguma das equações $y^r-1=0$ ou $y^s-1=0$. Ora, se α fosse raiz da primeira, seria $(\beta\gamma)^r=1$, donde $\gamma^r=1$ por ser $\beta^r=1$, e γ seria raiz de ambas as equações $y^r-1=0$ e $y^s-1=0$, cujos graus são primos entre si; o que não pode ter logar. Do mesmo modo se veria que α não póde ser raiz da equação $y^s-1=0$.

Na formação das potencias

$$(\beta\gamma),\quad (\beta\gamma)^2,\ldots(\beta\gamma)^n$$

que dariam todas as raizes da proposta, pode sempre abaixar-se o expoente de cada factor de modo que o de β não exceda r e o de γ não exceda s; por conseguinte, formando as linhas

$$\beta^1,\ \beta^2,\ldots\beta^r,$$
$$\gamma^1,\ \gamma^2,\ldots\gamma^s,$$

das raizes das equações $y^r-1=0$ e $y^s-1=0$, e multiplicando cada termo da primeira linha por todos da segunda, resultarão todas as raizes da equação $y^n-1=0$.

*

Do mesmo modo se o grau da equação (42) fôsse o producto de tres factores primos, $n = rst$, as raizes das equações

$$\begin{array}{l} y^r - 1 = 0\,, \quad y^s - 1 = 0\,, \quad y^t - 1 = 0\,, \\ y^{rs} - 1 = 0\,, \quad y^{rt} - 1 = 0\,, \quad y^{st} - 1 = 0 \end{array} \qquad (ii)$$

verificariam a proposta e não seriam raizes primitivas d'ella. Ora, não contando a unidade, o numero das raizes das tres últimas equações é

$$rs + rt + st - 3\,;$$

mas este numero encerra duas vezes o das raizes das tres primeiras, pelo que devemos subtrahir da expressão precedente a somma

$$r - 1 + s - 1 + t - 1\,.$$

Juntando uma unidade á differença, pois que não se attendeu á raiz 1, acharemos o numero

$$rs + rt + st - r - s - t + 1$$

das raizes não primitivas; e portanto o numero das raizes primitivas da proposta será a differença do anterior para $n = rst$ ou

$$(r-1)\,(s-1)\,(t-1) = n\left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{s}\right)\left(1 - \frac{1}{t}\right).$$

Se β, γ e δ forem raizes primitivas das equações

$$y^r - 1 = 0\,,\; y^s - 1 = 0\,,\; y^t - 1 = 0\,,$$

o producto $\beta\gamma\delta = \alpha$ será raiz da proposta; porque das identidades

$$\beta^r = 1, \quad \gamma^s = 1, \quad \delta^t = 1$$

se deduz

$$(\beta\gamma\delta)^{rst} = \alpha^n = 1 .$$

E α é raiz primitiva, porque não pode ser raiz de nenhuma das seis equações binomias (ii), únicas cujos graus são inferiores a n e não são primos com n.

Facilmente se generalisariam estes resultados para o caso de n ser formado pelo producto de mais de tres factores primos simples.

125. *A equação*

$$y^{r^p} - 1 = 0 ,$$

em que r *é numero primo, pode resolver-se por meio da equação* $y^r - 1 = 0$.

As raizes não primitivas da equação proposta satisfazem uma equação da mesma forma cujo grau divida r^p. Qualquer numero que satisfaz a esta condição, além do mesmo r^p, divide r^{p-1}; portanto todas as raizes não primitivas da proposta satisfazem a equação

$$y^{r^{p-1}} - 1 = 0 ,$$

e todas as raizes d'esta última equação satisfazem evidentemente a primeira. Logo o numero das raizes primitivas é agora

$$r^p - r^{p-1} = n\left(1 - \frac{1}{r}\right).$$

Se fôr β uma raiz primitiva de $y^r - 1 = 0$, o numero

$$\alpha = \sqrt[r^{p-1}]{\beta}$$

é raiz da proposta por ser $\alpha^{r^p}=\beta^r=1$; e é raiz primitiva, porque no caso contrario seria raiz da equação $y^{r^{p-1}}-1=0$ e portanto

$$\alpha^{r^{p-1}}=\beta=1,$$

contra a hypóthese.

Se a decomposição de n em factores primos mostrar que o grau da equação (41) tem a forma

$$n=r^p.s^q.t^u,$$

veriamos como nos n.^os precedentes que a resolução da proposta vem a depender das tres

$$y^{r^p}-1=0, \quad y^{s^q}-1=0, \quad y^{t^u}-1=0;$$

e estas podem ainda fazer-se depender de $y^r-1=0$, $y^s-1=0$, $y^t-1=0$. Por conseguinte o problema fundamental das equações binomias consiste na resolução da equação da forma (41) e de grau primo.

Os resultados obtidos n'este n.º e no anterior concordam com o que se disse no n.º 123, pois que, se $r, s, \ldots, u$ são os factores primos de n, o numero dos inteiros inferiores a n e primos com n é dado pela expressão

$$n\left(1-\frac{1}{r}\right).\left(1-\frac{1}{s}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{u}\right).$$

126. Sendo n primo, á equação recíproca (41) é applicavel o processo do n.º 118.

Divida-se, pois, a proposta pelo binomio $y-1$, correspondente á raiz real $+1$; teremos no quociente a equação

$$y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1=0,$$

de grau par e com os termos todos positivos.

Fazendo

$$y+\frac{1}{y}=z,$$

a transformada de grau sub duplo em z terá todas as raizes reaes. Com effeito, designando por φ um dos argumentos da expressão (28), será

$$y=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi,\ \frac{1}{y}=\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi,$$

por ser (25) o producto $(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)(\cos\varphi-i\operatorname{sen}\varphi)=1$. D'aquellas duas expressões resulta $z=2\cos\varphi$, e portanto z é um numero real.

Se soubermos resolver a transformada, cada uma das suas raizes se substituirá por z na equação $y^2-zy+1=0$, ou

$$y^2-2y\cos\varphi+1=0; \tag{42}$$

por onde finalmente se obterão os dois valores correspondentes de y.

127. *Exemplo:* Dada a equação

$$y^{12}-1=0,$$

começaremos por decompor o seu grau em factores primos, e acharemos $12=2^2\times3$; teremos pois de resolver as equações

$$y^{2^2}-1=0,\quad y^3-1=0.$$

A primeira depende da equação $y^2-1=0$, cuja raiz primitiva é -1; portanto a raiz primitiva d'aquella equação é $\beta=\sqrt{-1}$. Quanto a $y^3-1=0$, dividindo por $y-1$ vem $y^2+y+1=0$, que sabemos resolver por ser do 2.° grau; e assim se acha $\gamma=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$ para raiz primitiva de $y^3-1=0$. A quantidade

$$\alpha=\beta\gamma=-\frac{1}{2}(\sqrt{-1}-\sqrt{3})$$

é raiz primitiva da proposta, e elevando α a todas as potencias, desde 1 até 12, teremos

$$\alpha=-\frac{1}{2}(\sqrt{-1}-\sqrt{3}),\ \alpha^2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3}),\ \alpha^3=-\sqrt{-1},\ \text{etc.}$$

D'este modo se acharia finalmente que

$$y=\pm 1,\ \pm\sqrt{-1},\ \mp\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3}),\ \pm\frac{1}{2}(\sqrt{-1}\pm\sqrt{3})$$

são todas as raizes da equação $y^{12}-1=0$.

128. *Theorema de Cotes.* — Da equação (42) tira-se

$$y=\cos\varphi\pm i\operatorname{sen}\varphi\,,$$

e d'esta expressão resulta por (26) $y^n=\cos n\varphi\pm i\operatorname{sen} n\varphi$. Estes dois valores de y^n são as raizes da equação do 2.° grau

$$y^{2n}-2y^n\cos n\varphi+1=0\,, \tag{43}$$

na qual o coefficiente do 2.° termo, com signal contrario, é a somma d'aquelles valores e o último termo é o producto d'elles.

Sendo conhecidos cos φ e cos $n\varphi$, as equações (42) e (43) terão a raiz commum $y=\alpha$; e como são recíprocas, concluiremos que ellas tambem teem a raiz commum $y=\frac{1}{\alpha}$. Assim, havendo entre aquellas equações duas raizes communs, a primeira será divisor da segunda.

Faça-se $n\varphi=k\pi$, sendo k um inteiro qualquer; será cos $n\varphi=\pm 1$, conforme k fôr par ou impar. D'este modo o trinomio (43) torna-se em $(y^n \mp 1)^2$ e (42) é agora

$$y^2-2y\cos\frac{k\pi}{n}+1\ ;$$

logo, este trinomio divide $y^n \pm 1$, advertindo que, se elle fôr um quadrado, se tomará para divisor a sua raiz.

Esta proposição foi enunciada pela primeira vez por Cotes, que a achou debaixo de uma forma geométrica.

Imagine-se que do centro O, com o raio OA $=1$, se descreve uma circumferencia e que M é um ponto do prolongamento de OA; faça-se OM $=y$ e, a partir de A, divida-se a circumferencia em $2n$ partes, cada uma egual a $\frac{\pi}{n}$. Se se tirar o vector MC para um d'estes pontos de divisão C, e se abaixarmos de C sobre OA a perpendicular que torna a encontrar a circumferencia em L e corta OM em P, do triangulo CMP deduz-se, suppondo COA $=\alpha$,

$$\mathrm{CP}=\operatorname{sen}\alpha\ ,\quad \mathrm{OP}=\cos\alpha\ ,\quad \mathrm{PM}=y-\cos\alpha\ ,$$
$$\mathrm{MC}^2=\mathrm{CP}^2+\mathrm{PM}^2=$$
$$=y^2-2y\cos\alpha+1=\mathrm{MC}\times\mathrm{ML}\ .$$

Se o arco AC contiver k divisões, será $\alpha=\frac{k\pi}{n}$; e sendo a expressão de MC^2 factor de $y^n \mp 1$, conforme k fôr par ou impar, vê-se que os raios vectores tirados num caso para as divisões pares e no outro para as impares, constituem os factores da equação $y^n \mp 1 = 0$.

Designando por H a outra extremidade do diametro que passa por A, os vectores $MA = y - 1$ e $MH = y + 1$ correspondem aos factores reaes do 1.º grau. Sendo n par, as divisões zero e H conveem á equação $y^n - 1 = 0$; sendo n impar, só convém a esta equação o vector $MA = y - 1$.

É tão simples a construcção, que não pareceu necessario dar aqui a figura respectiva.

129. *Equações trinomias.* — Dá-se este nome ás equações da forma

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = 0 ;$$

donde, fazendo $x^n = z$, resulta a transformada

$$Az^2 + Bz + C = 0 .$$

1.º Se as duas raizes d'esta equação são reaes, designando-as por a e b teremos de resolver as duas equações trinomias $x^n = a$, $x^n = b$ para achar as raizes da proposta.

2.º Se as mesmas raizes são eguaes, será $B^2 - 4AC = 0$, o 1.º membro da proposta é um quadrado $(px^n + q)^2$ e extraindo a raiz quadrada, recáe-se na equação binomia $px^n + q = 0$.

3.º Se as raizes da transformada são imaginarias, ou $B^2 - 4AC < 0$, faremos $Ax^{2n} = Cy^{2n}$ e a proposta transforma-se em

$$y^{2n} + \frac{B}{\sqrt{AC}} y^n + 1 = 0 ,$$

onde o coefficiente de y^n é menor que 2 por ser $B^2 < 4AC$. Podemos pois fazer

$$-\frac{B}{2\sqrt{AC}} = \cos\varphi ,$$

e a última equação, que se torna em

$$y^{2n}-2y^{n}\cos\varphi+1=0\ ,$$

será divisivel por $y^2-2y\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)+1=0$, tomando por φ todos os angulos determinados por aquelle valor do coseno.

Assim na equação $x^6-2x^3+1=0$ é $A=C=1$, $B=-2$ e $n=3$; donde $\cos\varphi=1$, $\varphi=0, 360°, 720°$ e $\frac{\varphi}{3}=0, 120°, 240°$. Os trinomios que dão as 6 raizes são $(x-1)^2$ e $(x^2+x+1)^2$, por ser $\cos 120°=\cos 240°=-\frac{1}{2}$.

Exercícios.

56. Resolver a equação $y^5-1=0$.

57. Resolver a equação $y^6-1=0$. [Raiz primitiva $\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$].

58. Resolver a equação $y^k+1=0$. (k impar).

59. Resolver a equação $y^6+1=0$.

60. Resolver a equação $y^8-1=0$. [$y^8-1=(y^4+1)(y^4-1)$].

61. Resolver a equação $y^9-1=0$.

62. Resolver a equação $y^9+1=0$.

63. Resolver a equação $x^6-133x^3+1000=0$.

64. Resolver a equação $\left(\frac{2x}{3}\right)^4+\left(\frac{3}{2x}\right)^4=2$.

65. Resolver a equação $x^4+x^2+25=0$.

CAPÍTULO X.

Funcções symétricas das raizes.

130. *Funcção symetrica* de muitas quantidades é a expressão que não se altera quando essas quantidades se permutam de todas as maneiras possiveis.

Assim os coefficientes de uma equação são funcções symétricas (39) das raizes da mesma equação.

Não tractaremos senão das funcções symétricas racionaes das raizes de uma equação, e veremos que é sempre possivel exprimi-las nos coefficientes da proposta, sem a resolver.

Representaremos por S_k a somma das potencias do grau k das raizes, ou

$$S_k = a^k + b^k + c^k + \cdots + l^k,$$

sendo $a, b, c, \ldots l$ as mesmas raizes; e por $[a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots]$ a funcção que tem um termo da fórma $a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma \ldots$, e na qual se obteem os outros termos mudando cada uma das letras $a, b \ldots$ em todas as outras successivamente: chama-se *dupla* a funcção $[a^\alpha\, b^\beta]$, *tripla* a funcção $[a^\alpha\, b^\beta\, c^\gamma]$, etc.

131. O ponto de partida das *fórmulas de Newton*, que traduzem as relações entre os coefficientes e as funcções S das raizes de uma equação, é a egualdade

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x-a} + \frac{f(x)}{x-b} + \frac{f(x)}{x-c} + \cdots + \frac{f(x)}{x-l}, \qquad (1)$$

que se deduz da expressão de $f'(x)$ dada no n.° 98, fazendo

$s=t=\cdots=v=1$. Supporemos a equação proposta reduzida á fórma

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p^n=0\,.$$

Pela regra do n.º 66, o primeiro membro da identidade (i) é

$$nx^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}+\cdots+2p_{n-2}x+p_{n-1}\,;$$

para o segundo membro a divisão dá immediatamente

$$\frac{f(x)}{x-a}=\begin{array}{l|l|r} x^{n-1}+a & x^{n-2}+a^2 & x^{n-3}+\cdots+a^{n-1} \\ \quad\;\; +p_1 & \quad\;\; +p_1a & +p_1\,a^{n-2} \\ & \quad\;\; +p_2 & +p_2\,a^{n-3} \\ & & \cdots\cdots \\ & & +p_{n-1} \end{array}\,,$$

sem resto porque a é raiz da equação. Mudando a em $b, c, \ldots l$ achariamos os outros termos; e sommando viria, conforme a notação anterior,

$$\begin{aligned} nx^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}+\cdots 2p_{n-2}x+p_{n-1} \\ =nx^{n-1}+(S_1+np_1)x^{n-2}+(S_2+p_1S_1+np_2)x^{n-3}+\cdots \\ +(S_{n-1}+p_1S_{n-2}+\cdots+np_{n-1})\,. \end{aligned}$$

Por ser identica esta expressão, serão eguaes os coefficientes das mesmas potencias de x nos dois membros; e assim se acham as fórmulas de Newton

$$
\begin{aligned}
S_0 &= n, \\
S_1 + np_1 &= (n-1)p_1 , \\
S_2 + p_1 S_1 + np_2 &= (n-2)p_2 , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{n-1} + p_1 S_{n-2} + \cdots + p_{n-2} S_1 + np_{n-1} &= p_{n-1} ,
\end{aligned}
$$

ou, fazendo as reducções,

$$
\begin{aligned}
S_0 &= n , \\
S_1 + p_1 &= 0 , \\
S_2 + p_1 S_1 + 2p_2 &= 0 , \qquad (44) \\
S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1 + 3p_3 &= 0 , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
S_{n-1} + p_1 S_{n-2} + \cdots + p_{n-2} S_1 + (n-1)p_{n-1} &= 0 .
\end{aligned}
$$

A primeira é evidente, e a segunda já se achou *(n.° 82)*.

Por meio d'estas fórmulas podemos exprimir successivamente S_0, S_1, $S_2, \ldots S_{n-1}$ em funcção dos coefficientes $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$, e reciprocamente. Observemos que os valores das funcções S não terão denominadores, suppondo inteiros os coefficientes da proposta.

Podemos egualmente obter a expressão de qualquer funcção S_r, sendo r positivo e maior do que $n-1$. Sendo a uma raiz da equação proposta e multiplicando por a^m a identidade

$$a^n + p_1 a^{n-1} + p_2 a^{n-2} + \cdots + p_n \equiv 0 ,$$

resulta, suppondo m positivo,

$$a^{n+m} + p_1 a^{n+m-1} + p_2 a^{n+m-2} + \cdots + p_n a^m = 0 .$$

Para as outras raizes achavam-se expressões analogas; sommando-as membro a membro e fazendo $n+m=r$, vem segundo a definição de S_k,

$$S_r + p_1 S_{r-1} + p_2 S_{r-2} + \cdots + p_{n-1} S_{r-n+1} + p_n S_{r-n} = 0 .$$

Para $r=n$ é $m=0$, e

$$S_n + p_1 S_{n-1} + \cdots + p_{n-1} S_1 + p_n S_0 = 0 ;$$

para $r=n+1$, $r=n+2$, etc., vem do mesmo modo

$$S_{n+1} + p_1 S_n + \cdots + p_{n-1} S_2 + p_n S_1 = 0 ,$$
$$S_{n+2} + p_1 S_{n+1} + \cdots + p_{n-1} S_3 + p_n S_2 = 0,$$

e assim por deante. A primeira das tres ultimas egualdades está ainda comprehendida no typo das fórmulas de Newton, notando que é $S_0 = n$.

Para determinar a somma das potencias negativas das raizes, suppondo que todas são differentes de zero, o meio mais simples é mudar na proposta x em $\frac{1}{x}$ e procurar depois pelas fórmulas precedentes as sommas das potencias positivas das raizes da transformada.

132. Procuremos agora a expressão de uma *funcção múltipla*. Temos por definição

$$S_\alpha = a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha + \cdots + k^\alpha + l^\alpha ,$$
$$S_\beta = a^\beta + b^\beta + c^\beta + \cdots + k^\beta + l^\beta ;$$

e o producto d'estas duas sommas conterá termos de duas especies: 1.° a somma das potencias $\alpha+\beta$ de todas as raizes; 2.° a somma de todos os productos que se formam combinando a potencia α de uma raiz qualquer com a potencia β de outra raiz. Segundo as notações adoptadas, teremos pois

$$S_\alpha \,.\, S_\beta = S_{\alpha+\beta} + [a^\alpha\, b^\beta]\,.$$

Ora S_α, S_β, $S_{\alpha+\beta}$ podem determinar-se em funcção dos coefficientes da proposta; e o mesmo succederá com a funcção dupla

$$[a^\alpha\, b^\beta] = S_\alpha\, S_\beta - S_{\alpha+\beta}\,. \qquad (45)$$

Deve modificar-se a fórmula precedente quando fôr $\alpha=\beta$. Neste caso, ao termo $a^\alpha\, b^\beta$ corresponde outro $a^\beta\, b^\alpha$ que lhe é egual; e como succederá o mesmo com os termos restantes, tomados dois a dois, será

$$\left[a^\alpha\, b^\alpha\right] = \frac{1}{2}\left[S_\alpha^2 - S_{2\alpha}\right].$$

Para achar a *funcção tripla*, multipliquemos a expressão precedente do producto $S_\alpha\, S_\beta$ por S_γ. O termo $S_{\alpha+\beta}$ dá para o producto termos com uma das duas fórmas

$$a^{\alpha+\beta+\gamma}, \quad a^{\alpha+\beta}\, b^\gamma\,;$$

o termo $[a^\alpha\, b^\beta]$, ou

$$a^\alpha\, b^\beta + a^\alpha\, c^\beta + \cdots + a^\alpha\, l^\beta + b^\alpha\, a^\beta + \cdots + b^\alpha\, l^\beta + \cdots + k^\alpha\, l^\beta\,,$$

dá para o producto termos com uma das tres formas

$$a^{\alpha+\gamma} b^{\beta}, \quad a^{\beta+\gamma} b^{\alpha}, \quad a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}.$$

Temos, pois,

$$S_\alpha S_\beta S_\gamma = S_{\alpha+\beta+\gamma} + [a^{\alpha+\beta} b^{\gamma}] + [a^{\alpha+\gamma} b^{\beta}] + [a^{\beta+\gamma} b^{\alpha}] + [a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}];$$

mas a fórmula (45) dá

$$[a^{\alpha+\beta} b^{\gamma}] = S_{\alpha+\beta} S_\gamma - S_{\alpha+\beta+\gamma},$$
$$[a^{\alpha+\gamma} b^{\beta}] = S_{\alpha+\gamma} S^{\beta} - S_{\alpha+\beta+\gamma},$$
$$[a^{\beta+\gamma} b^{\alpha}] = S_{\beta+\gamma} S^{\alpha} - S_{\alpha+\beta+\gamma},$$

e substituindo estes valores na equação precedente tira-se d'ella a expressão da funcção tripla

$$[a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}] = S_\alpha S_\beta S_\gamma - S_{\alpha+\beta} S_\gamma - S_{\alpha+\gamma} . S_\beta - S_{\beta+\gamma} . S_\alpha + 2S_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Esta fórmula terá de ser modificada se forem eguaes dois dos expoentes α, β, γ, ou todos tres.

1.° $\alpha = \beta$. Os dois primeiros termos do 2.° membro tornam-se em

$$\left[S_\alpha^2 - S_{2\alpha}\right] S_\gamma = 2\left[a^{\alpha} b^{\alpha}\right] S_\gamma;$$

e os restantes são

$$-2\,[S_{\alpha+\gamma} S_\beta - S_{\alpha+\beta+\gamma}] = -2\,[a^{\alpha+\gamma} b^{\beta}].$$

Por onde, supprimindo o factor 2, se chega á relação

$$[a^{\alpha} b^{\alpha} c^{\gamma}] = [a^{\alpha} b^{\alpha}]\, S_\gamma - [a^{\alpha+\gamma} b^{\alpha}].$$

2.° $\alpha=\beta=\gamma$. Ha na funcção tantos termos eguaes a $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ quantas são as permutações possiveis das letras a, b, c, isto é, 6; logo, para ter sómente a somma dos termos differentes é preciso dividir as fórmulas geraes por 6.

133. Appliquemos os principios expostos á indagação da equação ao quadrado das differenças.

Supponhamos que á equação $f(x)=0$, cujas raizes são $a, b, c, \ldots$, corresponde a equação ao quadrado das differenças

$$Fz=z^m+Pz^{m-1}+Qz^{m-2}+\cdots+U=0,$$

cujos coefficientes pretendemos determinar.

Para qualquer das raizes temos

$$(x-a)^l=x^l-lax^{l-1}+\frac{l(l-1)}{2}a^2x^{l-2}\ldots\pm a^l;$$

sommando o segundo membro d'esta egualdade com os segundos membros das egualdades similhantes que se formariam com as outras raizes da proposta, o resultado será

$$nx^l-lS_1x^{l-1}+\frac{l(l-1)}{2}S_2x^{l-2}-\frac{l(l-1)(l-2)}{3!}S_3x^{l-3}+\cdots\pm S_l.$$

Mudando successivamente x em a, b, c, ... virão as sommas totaes respectivas

$$(a-b)^l+(a-c)^l+\cdots=na^l-lS_1a^{l-1}+\frac{l(l-1)}{2}S_2a^{l-2}+\cdots\pm S_l,$$

$$(b-a)^l+(b-c)^l+\cdots=nb^l-lS_1b^{l-1}+\frac{l(l-1)}{2}S_2b^{l-2}+\cdots\pm S_l,$$

etc.

Sommemos estas últimas equações. A somma dos primeiros membros torna-se na somma das potencias l das differenças de todas as raizes, subtrahidas duas a duas; a somma dos segundos torna-se em

$$nS_l - lS_1 S_{l-1} + \frac{l(l-1)}{2} S_2 S_{l-2} \ldots \pm nS_l .$$

Se l for impar nada se póde deduzir d'esta fórmula, porque no primeiro membro as differenças são eguaes duas a duas com signaes contrários, e as suas potencias impares destroem-se reciprocamente. No segundo membro os termos equidistantes dos extremos teem os mesmos coefficientes, os mesmos índices de S e signaes contrários. Assim aquella expressão reduz-se a $0 = 0$.

Porém se l for par, as potencias das differenças são eguaes duas a duas, com os mesmos signaes; o mesmo succederá no segundo membro aos termos equidistantes dos extremos, ficando isolado o termo medio. Podemos pois dividir toda a equação por 2, depois de reduzida; os termos simplificam-se, e só o do meio no segundo membro terá o factor $\frac{1}{2}$.

Assim, suppondo $l = 2i$ e designando por $2i$, A′, A″,... os coefficientes do binomio para este expoente, teremos, representando por Σ_i a somma das potencias i dos quadrados das differenças,

$$\Sigma_i = nS_{2i} - 2iS_1 S_{2i-1} + A' S_2 S_{2i-2} - A'' S_3 S_{2i-3}$$
$$+ \cdots \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{2i(2i-1)\ldots(i+1)}{i!} (S_i)^2 .$$

Os coefficientes são os numeros da linha $2i$ do triangulo de Pascal, devendo parar-se no termo do meio e tomar-lhe metade.

*

D'onde se conclue

$$\begin{aligned}
&\Sigma_1 = nS_2 - S_1^2\\
&\Sigma_2 = nS_4 - 4S_1 S_3 + 3S_2^2\\
&\Sigma_3 = nS_6 - 6S_1 S_5 + 15S_2 S_4 - 10S_3^2\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Posto isto, achada a serie dos S, da equação precedente tiramos, para $i=1$, os valores de $(a-b)^2+(a-c^2)..$; e assim obteremos a somma das primeiras potencias das raizes de $F(z)$, ou $-P$ *(n.º 82)*. Finalmente as equações (44) dão os coefficientes da equação ao quadrado das differenças

$$\begin{aligned}
P + \Sigma_1 &= 0\ ,\\
2Q + P\Sigma_1 + \Sigma_2 &= 0\ ,\\
3R + Q\Sigma_1 + P\Sigma_2 + \Sigma_3 &= 0\ ,\\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

O grau da equação será $m = \frac{1}{2}n(n-1)$, numero das combinações que se podem fazer com as n raizes da proposta, tomadas duas a duas. O numero dos coefficientes será m; e portanto é tambem m o índice do último Σ e $2m$ o do último S.

Seja, por exemplo, a equação

$$x^3 + qx + r = 0\ ;$$

as funcções S são

$$[3],\quad [0],\quad [-2q],\quad [-3r],\quad [2q^2],\quad [5qr],\quad [-2q^3+3r^2]\ ,$$

e do mesmo modo teremos para os Σ

$$[-6q], \quad [18q^2], \quad [-66q^3-81r^2] .$$

Logo será

$$P=6q, \quad Q=9q^2, \quad R=27r^2+4q^3 ,$$

e

$$z^3+6qz^2+9q^2z+27r^2+4q^3=0$$

é a equação aos quadrados das differenças das raizes da proposta.

CAPÍTULO XI.

Eliminação.

134. A fórma mais geral da equação algébrica e inteira do grau n a duas variaveis x e y, ordenada segundo as potencias decrescentes de x, é

$$f(x,y) \equiv p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots+p_{n-1}x+p_n=0 ,$$

sendo p_k funcção só de y e de grau k.

Em geral, a determinação de todas as soluções $x=\alpha$ com $y=\beta$ de um systema de duas equações, $f(x,y)=0$, $F(x,y)=0$, faz-se depender de outra equação que só contém uma das incógnitas e que se chama *equação final*. Esta equação obtem-se por processos de *eliminação* da outra incógnita, dos quaes vamos expôr os principaes.

Em alguns casos a eliminação pode fazer-se por processos particulares. Sejam, por exemplo, as equações

$$x^2+Px+Q=0, \quad x^2+px+q=0\ ;$$

subtrahindo uma da outra, da equação resultante $(P-p)x+Q-q=0$ tira-se o valor de x, e substituindo este valor numa das propostas resulta immediatamente a equação final $(Q-q)^2+q(P-p)^2=p(Q-q)(P-p)$.

135. Supponhamos que $x=\alpha$ e $y=\beta$ é uma solução do systema

$$f(x,y)=0, \quad F(x,y)=0\ ;$$

substituindo x por α, as equações

$$f(\alpha,y)=0, \quad F(\alpha,y)=0$$

serão satisfeitas pela raiz $y=\beta$ e terão por conseguinte um divisor commum. Assim, a equação final do systema corresponderá á condição de existencia de um divisor commum entre $f(x,y)$ e $F(x,y)$.

Ordenem-se estes polynomios segundo as potencias decrescentes de uma das variaveis x Operando sobre elles por meio de divisões successivas, como na indagação do seu maior divisor commum, ha de chegar-se a um resto R independente de x; e $R=0$ será a equação final procurada.

Pode acontecer que R seja um numero. Neste caso a equação $R=0$ é impossivel, e as propostas são incompativeis.

Tambem pode ser R identicamente nullo. Então o divisor correspondente D é divisor commum das equações dadas, que terão a forma

$$f(x,y) \equiv A \times D = 0 \ , \quad F(x,y) \equiv B \times D = 0 \ ;$$

e as raizes da equação $D = 0$ resolvem o problema, além d'aquellas que são dadas pelo systema $A = 0$ com $B = 0$.

Em D pode haver algum factor X que seja só funcção de x, ou algum factor Y que seja só funcção de y. Em geral será

$$D \equiv X \times Y \times \varphi(x,y) \ ,$$

e a equação $D = 0$ parte-se nas tres

$$X = 0 \ , \quad Y = 0 \ , \quad \varphi(x,y) = 0 \ .$$

As duas primeiras determinam certos valores de uma das incógnitas, deixando a outra arbitrária; pela última determinam-se os valores de uma das incógnitas correspondentes aos valores dados arbitrariamente á outra.

Pondo de parte as soluções indeterminadas, devidas á equação $D = 0$, só tratamos da eliminação entre as equações $A = 0$ e $B = 0$ cujos 1.^{os} membros são os quocientes da divisão das propostas por D.

No processo do maior divisor commum se funda o primeiro méthodo de eliminação que vamos expôr. Mas convém demonstrar primeiro uma proposição, a que teremos de recorrer no desenvolvimento d'este objecto.

136. *Lemma. — Sejam* A *e* B *dois polynomios inteiros em* x *e* y*, ordenados segundo as potencias de* x*, e supponhamos que em cada um d'elles os coefficientes das differentes potencias de* x *não admittem divisor commum; se fôr* c *funcção inteira de* y *sómente e* Q *funcção, tambem inteira, de ambas as variaveis ou de uma só, e se, por outra parte, fôr* $BQ = cA$*, será o factor* Q *divisivel por* c.

Seja $y-\alpha$ um dos factores lineares de c. Por hypóthese, B não é divisivel por $y-\alpha$, aliás os coefficientes dos termos de B teriam este divisor commum; portanto, dividindo B por $y-\alpha$ e representando por L e K o quociente e o resto, na identidade

$$B \equiv (y-\alpha)L + K$$

será K independente de y e differente de zero. Substituindo em $cA = BQ$, vem

$$cA \equiv (y-\alpha)LQ + KQ ,$$

e KQ será divisivel por $y-\alpha$, porque o 1.º membro d'esta identidade tambem o é.

Ora dividindo Q por $y-\alpha$, virá

$$Q \equiv (y-\alpha)L' + K' ,$$

com K' independente de y, e teremos

$$KQ \equiv (y-\alpha)KL' + KK' :$$

portanto KK' será, como KQ, divisivel por $y-\alpha$, se não fôr $KK' = 0$. O primeiro caso não se verifica, porque K e K' são independentes de y; mas é tambem K differente de 0, e portanto será finalmente $K' = 0$ e Q divisivel por $y-\alpha$.

Do mesmo modo se veria que Q é divisivel por cada um dos factores lineares de c; por conseguinte será tambem Q divisivel por c, como queriamos demonstrar.

137. *Méthodo de Labatie.* — Supponhamos os polynomios A e B ordenados segundo as potencias de x e que, relativamente a esta incógnita, o grau de B não excede o de A. Designando por Q e R o quociente e o resto da divisão de A por B, teremos

$$A = BQ + R\,.$$

Se em Q não ha coefficientes fraccionarios, com denominadores que contenham y e possam annullar-se para valores particulares d'esta incógnita, a identidade precedente mostra que os systemas $A = 0$ com $B = 0$ e $B = 0$ com $R = 0$ teem as mesmas soluções; o que podemos exprimir pela relação

$$\left.\begin{matrix} A = 0 \\ B = 0 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} B = 0 \\ R = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Ora, não póde estabelecer-se esta equivalencia, senão quando Q é funcção inteira de y. Mas evita-se o apparecimento de fracções no quociente, multiplicando o dividendo por um factor que dependerá do coefficiente do 1.° termo do divisor *(n.° 81)*; representaremos este factor por c.

Além d'isto o primeiro resto será ainda, em geral, funcção de x e y, e passa para divisor na segunda divisão. Nesta operação o dividendo tem de multiplicar-se, como anteriormente, por um factor c_1, que depende do coefficiente do 1.° termo de R, a fim de evitar o apparecimento de coefficientes fraccionarios. Convém pois simplificar os coefficientes de R, dividindo-os pelo seu maior divisor commum r, que é funcção só de y; e assim por deante.

Supponhamos que o resto da terceira divisão já é independente de x, o que não prejudica a generalidade dos resultados; pelo que se acaba de ver, o quadro das operações effectuadas será

$$\begin{aligned} cA &= BQ + r.R\,, \\ c_1B &= RQ_1 + r_1.R_1\,, \\ c_2R &= R_1Q_2 + r_2\,, \end{aligned} \qquad (i)$$

sendo r_2 funcção de y sómente.

Da primeira d'estas identidades resulta a equivalencia dos systemas

$$\left.\begin{array}{r} cA=0 \\ B=0 \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{r} B=0 \\ r.R=0 \end{array}\right\}.$$

que se dividem nos quatro

$$\left.\begin{array}{r} A=0 \\ B=0 \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} c=0 \\ B=0 \end{array}\right\} = \left.\begin{array}{r} B=0 \\ R=0 \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} B=0 \\ r=0 \end{array}\right\};$$

e designaremos estes systemas respectivamente por 1, 2, 3 e 4.

Quando o systema proposto 1 se substitue por 3, introduzem-se as soluções extranhas do systema 2 e supprimem-se as que pertencem a 4. Ora, se c e r tiverem um divisor commum d, podemos supprimil-o porque este factor é introduzido na multiplicação por c, mas desapparece na divisão por r; em outros termos, as raizes da equação $d=0$ pertencem a $c=0$ e a $r=0$, e reduzem-se num e noutro membro da equivalencia anterior. Dividindo por d, a primeira identidade (i) torna-se em

$$\frac{c}{d}A = \frac{Q}{d}B + \frac{r}{d}R\,; \qquad (ii)$$

e o factor que multiplica B é inteiro porque, sendo inteiros $\frac{c}{d}$ e $\frac{r}{d}$, QB será divisivel por d e pelo lemma *(n.° 136)* d dividirá Q.

Pela identidade (ii) o systema primitivo fica substituido pelos dois

$$\left.\begin{array}{r} B=0 \\ \frac{r}{d}=0 \end{array}\right\} + \left.\begin{array}{r} B=0 \\ R=0 \end{array}\right\}; \qquad (iii)$$

e no segundo d'estes systemas ainda podem comprehender-se raizes extranhas, que tenham provindo da multiplicação de A pelo factor $\frac{c}{d}$.

Passando para a segunda identidade (i), veriamos do mesmo modo que o factor c_1 pode introduzir raizes extranhas; supprimem-se estas, e as que ainda possa haver no último systema (iii), pelo processo seguinte.

Multipliquem-se ambos os membros de (ii) por c_1, e depois substitua-se c_1B pela segunda identidade (i); teremos

$$\frac{cc_1}{d}A = \frac{c_1 r + QQ_1}{d}R + \frac{Q}{d}r_1 R_1 .$$

O factor que multiplica R é inteiro *(n.° 136)*, porque d divide cc_1 e Q, e não divide R; representando aquelle factor por M e $\frac{Q}{d}$ por N, a identidade precedente torna-se em

$$\frac{cc_1}{d}A = MR + Nr_1 R_1 .$$

Multiplique-se a segunda identidade (i) por $\frac{c}{d}$, e representem-se por M′ e N′ os multiplicadores inteiros de R e $r_1 R_1$; teremos

$$\frac{cc_1}{d}B = M'R + N'r_1 R_1 .$$

As duas últimas identidades mostram a equivalencia dos systemas

$$\left.\begin{matrix} R = 0 \\ r_1 R_1 = 0 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \frac{cc_1}{d}A = 0 \\ \frac{cc_1}{d}B = 0 \end{matrix}\right\},$$

onde são extranhas ao problema as soluções da equação

$$\frac{cc_1}{d}=0 .$$

Mas se o 1.° membro d'esta equação tiver um divisor commum com r_1, que representaremos por d_1, podemos supprimil-o como anteriormente, e aquellas identidades tornam-se em

$$\frac{cc_1}{dd_1}A=\frac{M}{d_1}R+N\frac{r_1}{d_1}R_1 ,$$

$$\frac{cc_1}{dd_1}B=\frac{M'}{d_1}R+N'\frac{r_1}{d_1}R_1 .$$

Nestas expressões $\frac{M}{d_1}$ e $\frac{M'}{d_1}$ são inteiros, e podiamos continuar com o mesmo raciocinio nas operações seguintes. Ora a equação final será o producto de todas as funcções de y que, egualadas a zero, traduzem condições de existencia de um maior divisor commum entre A e B, sem representarem outras condições extranhas a esta. Designando por d_2 o maior divisor commum de r_2 e $\frac{cc_1c_2}{dd_1}$, a equação final é pois

$$\frac{r}{d}\cdot\frac{r_1}{d_1}\cdot\frac{r_2}{d_2}=0 ,$$

porque a condição necessaria e sufficiente para se verificar esta equação é que um dos respectivos factores seja zero.

138. *Methodo de Euler.* — Sejam as equações

$$f_1(x) \equiv a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m = 0 ,$$
$$f_2(x) \equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0 ,$$

e admittamos que ellas teem a raiz commum $x = r$. Se esta raiz fôr única, os quocientes

$$\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1} ,$$
$$\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} ,$$

da divisão dos dois polynomios f_1 e f_2 por $x - r$ não terão divisor commum; de modo que a fracção

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1}}{\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1}}$$

não pode ser indeterminada nem é susceptivel de forma mais simples. Desembaraçando de denominadores resulta a egualdade

$$\begin{aligned} & f_1(x) . (\beta_0 x^{n-1} + \beta_1 x^{n-2} + \cdots + \beta_{n-1}) \\ & \quad - f_2(x) . (\alpha_0 x^{m-1} + \alpha_1 x^{m-2} + \cdots \alpha_{m-1}) \equiv 0 , \end{aligned}$$

conhecida pelo nome de *identidade de Euler*.

O primeiro membro d'esta egualdade é do grau $m + n - 1$ e, em geral, tem $m + n$ termos, cujos coefficientes, pela condição de identidade, devem ser zero: o que leva ao estabelecimento de $m + n$ equações lineares entre as $m + n$ quantidades $\alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_{m-1}$, $\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_{n-1}$, de que esses coefficientes são funcções.

Os coefficientes α não podem ser todos nullos, nem todos os β; logo aquellas $m + n$ equações, que são homogeneas, deverão ter soluções differentes do zero. É pois necessario que o seu eliminante Δ seja egual a zero, sem que os seus primeiros menores sejam todos nullos. O eliminante Δ é funcção dos coefficientes das propostas; a equação $\Delta = 0$ que exprime a existencia da raiz commum, é a *resultante* do systema e dá as razões de $m+n-1$ d'aquellas quantidades para a restante, de $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \beta_{n-1}$ para α_0 por exemplo.

Supponhamos agora que $s > 1$ é o numero de *todas* as raizes communs das equações dadas. Dividindo cada uma d'estas equações pelos factores binomios correspondentes áquellas raizes, os quocientes são respectivamente dos graus $m-s$ e $n-s$, não podem ser simultaneamente nullos, nem admittem já raiz commum. O primeiro d'estes polynomios tem $m-s+1$ termos e o segundo $n-s+1$; os dois comprehendem ao todo $m+n-2s+2$ coefficientes, que dependem dos coefficientes das propostas. A identidade de Euler toma então a forma

$$f_1(x)(\beta_{s-1}x^{n-s} + \cdots + \beta_{n-1})$$
$$- f_2(x) \cdot (\alpha_{s-1}x^{m-s} + \cdots + \alpha_{m-1}) = 0\ ;$$

dividindo-a por um dos coefficientes, α_{s-1} por exemplo, esta egualdade envolve as $m+n-2s+1$ fracções

$$\frac{\beta_{s-1}}{\alpha_{s-1}},\quad \frac{\beta_s}{\alpha_{s-1}},\quad \cdots,\quad \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_{s-1}},$$

que devem ter valores determinados.

Por outra parte, egualando a zero os coefficientes das diversas potencias de x na identidade precedente, de grau $m+n-s$, resultam $m+n-s+1$ equações; se entre ellas puzermos de parte $m+n-2s+1$ e por meio d'estas acharmos os valores d'aquellas fracções, as s equações restantes serão satisfeitas por estes valores e assim teremos s relações entre os coefficientes do systema, as quaes traduzem as condições necessarias e sufficientes para que as equações d'este systema tenham s raizes communs. Finalmente, a equação de grau s

$$\frac{f_1(x)}{\alpha_{s-1}x^{m-s}+\cdots+\alpha_{m-1}}=0$$

dará estas raizes.

Como applicação do méthodo, resolvamos as equações

$$3y^2+4xy+3x^2-9y-15x=0\,,$$
$$y^2-2xy+x^2+2y-10x=0\,.$$

Ordenando segundo a incognita x, vem

$$3x^2+(4y-15)x+3y^2-9y=0\,,$$
$$x^2-(2y+10)x+y^2+2y=0\,;$$

e a identidade fundamental é

$$[3x^2+(4y-15)x+3y^2-9y](\beta_0x+\beta_1)$$
$$-[x^2-(2y+10)x+y^2+2y](\alpha_0x+\alpha_1)=0\,.$$

Ordenando ainda pelas potencias de x, e egualando a zero os coefficientes de cada termo, temos as equações:

$$\begin{aligned}
3\beta_0 \qquad\qquad\qquad & -\alpha_0 = 0\,,\\
(4y-15)\beta_0 + 3\beta_1 + (10+2y)\alpha_0 \qquad & -\alpha_1 = 0\,,\\
(3y^2-9y)\beta_0+(4y-15)\beta_1-(y^2+2y)\alpha_0+(10+2y)\alpha_1 &= 0\,,\\
(3y^2-9y)\beta_1 \qquad\qquad -(y^2+2y)\alpha_1 &= 0\,.
\end{aligned}$$

A resultante do systema proposto é o determinante d'estas equações cgualado a zero, ou

$$\begin{vmatrix} 3 & & 1 & \\ 4y-15 & 3 & -(10+2y) & 1 \\ 3y^2-9y & 4y-15 & y^2+2y) & -(10+2y) \\ & 3y^2-9y & & y^2+2y \end{vmatrix} = 0 ,$$

onde, por brevidade, não escrevemos os elementos zero. Para desenvolver este determinante, troquemos a 2.ª e 3.ª columna, d'onde resulta

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & & \\ 4y-15 & -(10+2y) & 3 & 1 \\ 3y^2-9y & y^2+2y & 4y-15 & -(10+2y) \\ & & 3y^2-9y & y^2+2y \end{vmatrix} = 0 .$$

Desenvolvendo segundo os menores de 2.ª ordem contidos nas duas primeiras columnas, vem

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4y-15 & -(10+2y) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 4y-15 & -(10+2y) \\ 3y^2-9y & y^2+2y \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3y^2-9y & y^2+2y \end{vmatrix}^2 = 0 ;$$

nos outros termos um dos factores é zero, por ter uma linha de zeros. Desenvolvendo, e supprimindo o factor numérico, acha-se a resultante do systema

$$y(y^3+2y^2-9y-28)=0 ,$$

de grau 2×2; para $y=0$, a primeira das equações propostas daria $x=0$, $x=5$.

139. *Méthodo dialytico.* (Sylvester).—Considerando o mesmo systema $f_1(x)=0$ e $f_2(x)=0$ (*n.° 138*), multipliquemos $f_1(x)$ pelas potencias $x^0, x^1, \ldots, x^{n-1}$ e $f_2(x)$ por $x^0, x^1, \ldots, x^{m-1}$. Se as equações propostas teem a raiz commum r, esta raiz satisfará a todas as equações do systema seguinte, chamadas ***equações de Sylvester*** :

$$f_1=0\,,\quad xf_1=0\,,\quad x^2 f_1=0\,,\quad \ldots\,,\quad x^{n-1} f_1=0\,,$$
$$f_2=0\,,\quad xf_2=0\,,\quad x^2 f_2=0\,,\quad \ldots\,,\quad x^{m-1} f_2=0\,;$$

e tomando para incógnitas as $m+n-1$ primeiras potencias de x, recahimos no caso de $m+n$ equações lineares com $m+n-1$ incógnitas. Para que estas equações tenham uma solução commum, o determinante de todos os coefficientes dos primeiros membros deve ser zero, como se viu no n.° 56; a solução commum será uma só, quando em um grupo de $m+n-1$ equações do systema o determinante dos coefficientes das incógnitas fôr differente de zero.

Sejam por exemplo

$$f_1 \equiv a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0\,,$$
$$f_2 \equiv b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0\,.$$

As equações de Sylvester, ordenadamente dispostas, são:

$$a_5x^2 + a_4x^3 + a_3x^4 + a_2x^5 + a_1x^6 + a_0x^7 = 0\,,$$
$$a_5x + a_4x^2 + a_3x^3 + a_2x^4 + a_1x^5 + a_0x^6 = 0\,,$$
$$a_5 + a_4x + a_3x^2 + a_2x^3 + a_1x^4 + a_0x^5 = 0\,,$$
$$b_3 + b_2x + b_1x^2 + b_0x^3 = 0\,,$$
$$b_3x + b_2x^2 + b_1x^3 + b_0x^4 = 0\,,$$
$$b_3x^2 + b_2x^3 + b_1x^4 + b_0x^5 = 0\,,$$
$$b_3x^3 + b_2x^4 + b_1x^5 + b_0x^6 = 0\,,$$
$$b_3x^4 + b_2x^5 + b_1x^6 + b_0x^7 = 0\,.$$

Na segunda d'estas equações deve subentender-se que os termos em x^0 e x^7 teem por coefficiente zero; o mesmo se dirá das outras, com relação ás potencias de x que faltam em cada uma, desde x^0 até x^7.

Não escrevendo os coefficientes zero, a resultante das equações precedentes é

$$R = \begin{vmatrix} & & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0 ;$$

e R chama-se o *eliminante de Sylvester*. A resultante $R = 0$ exprime a condição *necessaria* para que as equações dadas tenham uma raiz commum; esta condição é *sufficiente*. Com effeito fazendo nas equações *de Sylvester* $m = 5$ e $n = 3$, multiplicando-as respectivamente pelos primeiros menores $A_1, A_2 .. A_8$ de R relativos aos elementos de qualquer columna, da primeira por exemplo, e suppondo que nem todos estes factores são nullos, resulta, sommando os productos,

$$(A_1 x^2 + A_2 x + A_3) f_1$$
$$+ (A_4 + A_5 x + A_6 x^2 + A_7 x^3 + A_8 x^4) f_2 = 0 .$$

Esta expressão é identica; porquanto, pondo por f_1 e f_2 as suas expressões, effectuando as multiplicações e ordenando, o coefficiente de cada potencia de x é a somma dos productos d'aquelles menores pelos elementos de uma columna de R; e pelas duas propriedades dos menores essas sommas são nullas, visto que é $R=0$. Posto isto, se naquella identidade um dos menores A_1, A_2, A_3 fôr differente de zero, tambem um dos restantes o será, e reciprocamente: aliás, ou $f_1=0$ ou $f_2=0$ seria uma identidade. Portanto nenhum dos quatro factores da expressão precedente é identicamente nullo e f_2, que é do terceiro grau, divide $(A_1 x^2+A_2 x+A_3)f_1$; isto é, f_2 tem com f_1 um factor commum que será, pelo menos, do primeiro grau.

Se as equações propostas teem outra raiz commum r', esta raiz convirá ao systema

$$\frac{f_1}{x-r}=f_3=0\ ,\quad \frac{f_2}{x-r}=f_4=0\ ,$$

sendo os quocientes f_3 e f_4 polynomios do 4.° e 2.° grau que podemos representar por

$$f_3\equiv c_0 x^4+c_1 x^3+c_2 x^2+c_3 x+c_4$$

$$f_4\equiv d_0 x^2+d_1 x+d_2\ ,$$

Os novos coefficientes c e d estão ligados com os antigos a e b pelas relações

$$a_0=c_0,\ a_1=c_1-rc_0,\ a_2=c_2-rc_1,\ a_3=c_3-rc_2$$

$$a_4=c_4-rc_3,\ a_5=-rc_4$$

$$b_0=d_0,\ b_1=d_1-rd_0,\ b_2=d_2-rd_1,\ b_3=-rd_2$$

formadas segundo o princípio do n.° 65; notando que é nullo o resto de cada divisão.

Posto isto, a resultante de Sylvester para as equações $f_3=0$ e

$f_4=0$ é

$$R_1=\begin{vmatrix} & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \\ d_2 & d_1 & d_0 & & & \\ & d_2 & d_1 & d_0 & & \\ & & d_2 & d_1 & d_0 & \\ & & & d_2 & d_1 & d_0 \end{vmatrix}=0\ ;$$

subtrahindo respectivamente as columnas 2, 3, 4, 5 e 6, multiplicadas por r, das columnas 1, 2, 3, 4 e 5, e attendendo ás relações precedentes, resulta

$$R_1=\begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}=0\ .$$

Comparando R_1 com o eliminante R de f_1 e f_2, reconhece-se que o quadro precedente se obtém apagando as duas columnas extremas de R; e R_1 chama-se o *primeiro menor principal* de R.

O primeiro menor principal de R_1 seria

$$R_2=\begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 & & \\ b_2 & b_1 & b_0 & \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}\ ;$$

e discorrendo como precedentemente, chegariamos á seguinte proposição: *As condições necessarias e sufficientes para que* $\mathfrak{f}_1=0$ *e* $\mathfrak{f}_2=0$ *tenham uma só raiz commum, são* $R=0$, $R_1 \lessgtr 0$; *para que tenham duas, são* $R=0$, $R_1=0$, $R^2 \lessgtr 0$; *para que tenham tres, são* $R=0$, $R_1=0$, $R_2=0$, $R_3 \lessgtr 0$; *etc.*

Supponhamos que se verifica o primeiro caso, $R=0$ e $R_1 \gtrless 0$. Sabe-se *(n.° 57)* que a unidade e os valores das incógnitas são proporcionaes aos menores de R relativos aos elementos de uma linha, da primeira por exemplo. Assim, podemos escrever

$$\frac{1}{A_1}=\frac{-x}{B_1},$$

sendo

$$A_1=\begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ b_2 & b_1 & b_0 & & & & \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = b_0 \begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix},$$

$$B_1=\begin{vmatrix} & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ a_5 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ b_3 & b_1 & b_0 & & & & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = b_0 \begin{vmatrix} & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ b_3 & b_1 & b_0 & & & \\ & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix}.$$

Da relação precedente tira-se

$$A_1 x + B_1 = 0 ;$$

pondo por A_1 e B_1 as suas expressões, supprimindo o factor commum b_0, effectuando a multiplicação de A_1 por x (*n.° 50, II*) e sommando os dois determinantes $A_1 x$ e B_1 (*VI*), vem

$$A_1 x + B_1 = \begin{vmatrix} a_5 x & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ a_5 + a_4 x & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ b_3 + b_2 x & b_1 & b_0 & & & \\ b_3 x & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Juntando á 1.ª columna d'este determinante as seguintes, respectivamente multiplicadas por x^2, x^3, x^4, x^5 e x^6, teremos finalmente a equação

$$\begin{vmatrix} x f_1 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ f_1 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ f_2 & b_1 & b_0 & & & \\ x f_2 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ x^2 f_2 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ x^3 f_2 & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0 ;$$

que dará a raiz r commum ás duas equações do systema proposto

Com effeito, esta egualdade não é identica, porque resulta de $\frac{A_1}{b_0}x + \frac{B_1}{b_0} = 0$, onde o coefficiente de x é precisamente o primeiro menor principal do eliminante R e supposemos este menor differente de zero; além d'isto, a equação precedente é satisfeita pela raiz r, porque todos os elementos da primeira columna do determinante se annullam para $x = r$.

140. *Méthodo de Cauchy.* — Supponhamos que são dadas duas equações do mesmo grau

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 ,$$
$$b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \cdots + b_n = 0 ;$$

transportando $n - i + 1$ termos para o segundo membro de cada uma, as propostas seriam

$$a_0x^n + \cdots + a_{i-1}x^{n-i+1} = -(a_ix^{n-i} + \cdots + a_n) ,$$
$$b_0x^n + \cdots + b_{i-1}x^{n-i+1} = -(b_ix^{n-i} + \cdots + b_n) .$$

Dando a i todos os valores desde 1 até n, obteem-se outros tantos systemas como este último, e cada um d'elles conduz a uma equação da fórma

$$(a_0x^n + \cdots + a_{i-1}x^{n-i+1})(b_ix^{n-i} + \cdots + b_n)$$
$$= (b_0x^n + \cdots + b_{i-1}x^{n-i+1})(a_ix^{n-i} + \cdots + a_n) ;$$

ou, supprimindo o factor commum x^{n-i+1}, transpondo, reduzindo e ordenando,

$$(a_0 b_i - a_i b_0)\, x^{n-1}$$
$$+[(a_0 b_{i+1} - a_{i+1} b_0) + (a_1 b_i - a_i b_1)]\, x^{n-2} + \cdots = 0 \,.$$

D'este modo se obteem n equações, chamadas *de Cauchy*, e todas ellas serão satisfeitas pela raiz commum das propostas; considerando neste systema x, $x^2, \cdots x^{n-1}$ como outras tantas incógnitas recahimos no caso de n equações lineares com $n-1$ incógnitas, cujo eliminante é o determinante de todos os coefficientes.

Tomando as $n-1$ primeiras equações e representando por Δ o determinante dos coefficientes das differentes potencias das incógnitas e por Δ_1 o valor de Δ quando os coefficientes da primeira potencia de x se mudam nos termos independentes das equações respectivas, a raiz commum será dada por

$$\Delta x + \Delta_1 = 0 \,.$$

Se as equações fossem de graus differentes, escreveriamos os termos que faltam na equação de grau inferior, dando zero por coefficiente a cada um.

Pelo que se vê, este méthodo tem vantagem sobre o dialytico para duas equações do mesmo grau n; porque então o eliminante de Sylvester é um determinante de grau $2n$, emquanto que o de Cauchy é só de grau n.

Quando na successão dos valores 1, 2, 3 . . ., dados a i, algum dos determinantes de 2.ª ordem, que se encontram nas equações de Cauchy, envolver um índice superior ao grau das equações dadas, esse termo não se aproveita.

Sejam dadas, por exemplo, as equações

$$x^2 - (2y+5)\,x + y^2 + 5y + 6 = 0 \,, \quad x^2 - 4yx + 4y^2 - 1 = 0 \,.$$

Neste caso é $n=2$, e aquellas equações para $i=1$ e $i=2$ tornam-se em

$$(a_0 b_1) x + [(a_0 b_2) + (a_1 b_1)] = (a_0 b_1) x + (a_0 b_2) = 0 ,$$

$$(a_0 b_2) x + [(a_0 b_3) + (a_1 b_2)] = (a_0 b_2) x + (a_1 b_2) = 0 ,$$

pois que é o determinante $(a_1\ b_1) = 0$.

Ora

$$(a_0 b_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -(2y+5) & -4y \end{vmatrix} = -2y + 5 ,$$

e do mesmo modo teriamos os outros coefficientes; feitos os cálculos, achariamos as equações

$$(-2y+5) x + (3y^2 - 5y - 7) = 0 ,$$

$$(3y^2 - 5y - 7) x + (-4y^3 + 26y + 5) = 0 ,$$

cuja resultante é

$$\begin{vmatrix} -2y+5 & 3y^2-5y-7 \\ 3y^2-5y-7 & -4y^3+26y+5 \end{vmatrix}$$

$$= -y^4 + 10y^3 - 35y^2 + 50y - 24 = 0 .$$

A primeira equação de Cauchy daria depois os valores de x conjugados com cada um dos valores de y dados por esta resultante.

141. *Funcções symétricas.* — A equação $f_1(x,y) = 0$, do grau n em x, daria n raizes $x_1, x_2, \cdots x_n$ expressas em y, se a soubessemos resolver. Por conseguinte ao systema $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$ podem substituir-se os seguintes

$$\left.\begin{array}{r} x-x_1=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} x-x_2=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{array}\right\}, \ldots, \quad \left.\begin{array}{r} x-x_n=0 \\ f_2(x,y)=0 \end{array}\right\}:$$

e se em cada um d'estes pusessemos na segunda equação o valor de x dado pela primeira, teriamos a equação final correspondente.

A equação final do systema proposto será o producto das equações finaes d'estes systemas particulares, ou

$$f_2(x_1)\times f_2(x_2)\times\cdots\times f_2(x_n)=0\ ,$$

pois que esta equação é satisfeita quando se annulla um dos factores do seu 1.º membro, e só neste caso.

Ora $x_1, x_2, \ldots x_n$ são funcções desconhecidas de y. Mas o 1.º membro da equação precedente é funcção racional e symétrica d'estas raizes, e por isso pode exprimir-se em funcção racional dos coefficientes de $f_1(x)$, depois de dividida esta equação pelo coefficiente do 1.º termo. Esta divisão não offerece dúvida, porque aquelle coefficiente não contém as incógnitas.

142. *Eliminante.* — Consideremos novamente as equações do *n.º 138*.

$$f_1(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ ,$$
$$f_2(x)\equiv b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m=0\ .$$

O seu eliminante é a funcção dos coefficientes que, egualada a zero, traduz a condição necessaria e sufficiente para que estas equações tenham uma raiz commum.

Representemos por $x_1, x_2, \ldots x_n$ as raizes da primeira equação e por $t_1, t_2, \ldots t_m$ as da segunda; será

$$f_1(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

$$f_2(x) = b_0 (x - t_1)(x - t_2) \ldots (x - t_m).$$

Substituindo as raizes da segunda equação em f_1 e multiplicando os resultados, substituindo depois as raizes da primeira equação em f_2 e multiplicando tambem os resultados, façamos

$$R_1 = f_1(t_1) \times f_1(t_2) \ldots f_1(t_m) = a_0^m (t_1 - x_1)(t_1 - x_2) \ldots (t_m - x_n)$$

$$R_2 = f_2(x_1) \times f_2(x_2) \ldots f_2(x_n) = b_0^n (x_1 - t_1)(x_1 - t_2) \ldots (x_n - t_m).$$

Se uma raiz da equação $f_2 = 0$ convém a $f_1 = 0$, um pelo menos dos factores de R_1 é zero e portanto será tambem $R_1 = 0$; e reciprocamente. O mesmo diriamos de R_2; de modo que qualquer das equações $R_1 = 0$ ou $R_2 = 0$ é a resultante das propostas, expressa em funcção das raizes. Assim: *o eliminante é o producto dos resultados que se obteem substituindo em uma das equações todas as raizes da outra*, ou é *o producto de todas as differenças entre as raizes das duas equações*. Não é necessario attender aos coefficientes a_0 ou b_0, que suppomos differentes de zero.

Sendo homogeneas as duas equações $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$, será

$$f_1(x, y) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2$$
$$+ \cdots + a_{n-2} x^2 y^{n-2} + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n = 0,$$

$$f_2(x, y) \equiv b_0 x^m + b_1 x^{m-1} y + b_2 x^{m-2} y^2$$
$$+ \cdots + b_{m-2} x^2 y^{m-2} + b_{m-1} x y^{m-1} + b_m y^m = 0,$$

Representemos as raizes da primeira por (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots$ e as da segunda por $(\alpha_1\, \beta_1)$, $(\alpha_2\, \beta_2) \ldots$; o eliminante das duas equações será, pela definição anterior,

$$R = f_1(\alpha_1, \beta_1) \cdot f_1(\alpha_2, \beta_2) \ldots f_1(\alpha_m, \beta_m)$$
$$= f_2(x_1, y_1) \cdot f_2(x_2, y_2) \ldots f_2(x_n, y_n),$$

A primeira d'estas expressões mostra que R é uma funcção homogenea de grau m dos coefficientes de f_1, porque cada um dos factores é funcção linear homogenea d'estes coefficientes e os valores $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m)$ só dependem dos coefficientes de f_2. Do mesmo modo se vê que R é funcção homogenea de grau n dos coefficientes de f_2.

Por outra parte, mudando y em ky, as duas equações homogeneas transformam-se em

$$f_1(x, ky) = a_0 x^n + a_1 k x^{n-1} y + a_2 k^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n k^n y^n = 0,$$
$$f_2(x, ky) = b_0 x^m + b_1 k x^{m-1} y + b_2 k^2 x^{m-2} y^2 + \cdots + b_m k^m y^m = 0,$$

com as raizes k vezes maiores do que as das propostas *(n.º 85)* e portanto representadas respectivamente por

$$(kx_1, y_1), (kx_2, y_2) \ldots (kx_n, y_n),$$
$$(k\alpha_1, \beta_1), (k\alpha_2, \beta_2) \ldots (k\alpha_m, \beta_m).$$

Por onde se vê que a resultante das equações transformadas será

$$R' = f_1(k\alpha_1, k\beta_1) \cdot f_1(k\alpha_2, k\beta_2) \ldots f_1(k\alpha_m, k\beta_m)$$
$$= k^{mn} \cdot f_1(\alpha_1\, \beta_1) \cdot f_1(\alpha_2\, \beta_2) \ldots f_1(\alpha_m, \beta_m) = k^{mn} R.$$

Ora naquellas equações o factor k entra em cada termo com expoente egual ao índice do coefficiente respectivo, a ou b. Portanto em cada termo de R′ o expoente de k será egual á somma dos índices dos a e b, que houver nesse termo. Mas esse expoente é mn, como se viu; logo, representando por i a somma dos índices dos factores a e por i' a somma dos índices dos factores b, será sempre

$$i+i'=mn:$$

o numero $i+i'$ chama-se o *peso* da resultante.

Assim pois: *o eliminante de duas equações de graus* n *e* m *é uma funcção homogenea dos coefficientes das mesmas equações, a qual é de grau* m *em ordem aos da primeira e de grau* n *em ordem aos da segunda; a somma dos indices dos coefficientes em cada termo é constante, e egual ao producto dos graus das duas equações.*

143. Consideremos duas equações do mesmo grau n e duas expressões lineares d'estas equações: a resultante, como vamos vêr, é a mesma nos dois systemas, abstrahindo de um factor que só depende dos coefficientes da transformação linear.

Sejam as propostas $f_1=0$ e $f_2=0$, e as relações lineares $pf_1+qf_2=0$ e $p'f_1+q'f_2=0$; seja R o eliminante do primeiro systema, e R′ o do segundo. Sabemos que é

$$R=f_1(t_1)\cdot f_1(t_2)\cdot\cdot\cdot f_1(t_n);$$

e o eliminante do primeiro systema não se altera quando a uma das funcções se junta o producto da outra por um factor constante. Com effeito, se t_1 é raiz da equação $f_2=0$, o primeiro factor do eliminante de

$$f_1+rf_2=0\,,\quad f_2=0$$

é $f_1(t_1)$, visto que $f_2(t_1)$ é identicamente nullo; o mesmo diriamos dos outros factores. Se uma das funcções fôr multiplicada por um factor r, o eliminante vem multiplicado por r^n, como resultaria da expressão precedente de R.

Com estes princípios podemos eliminar uma das funcções, por exemplo f_2, entre os dois grupos do segundo systema considerado, de modo que tal funcção desappareça de um d'esses grupos. Para isso, multiplicamos o primeiro grupo por q', factor de f_2 no segundo, e pelo que fica dito $q'^n R'$ será o eliminante de

$$q'(pf_1+qf_2)=0\,,\quad p'f_1+q'f_2=0\,;$$

á primeira d'estas equações podemos juntar a segunda multiplicada por $-q$, e aquelle systema torna-se em

$$(q'p-qp')\,f_1=0\,,\quad p'f_1+q'f_2=0\,.$$

A presença do factor $q'p-qp'$ mostra que o eliminante d'estas equações é

$$q'^n\,R'=(q'p-qp')^n\,R''\,,$$

sendo R'' o eliminante do systema

$$f_1=0,\quad p'f_1+q'f_2=0\,.$$

Mas $R''=q'^n R$, por causa do factor de f_2; logo

$$q'^n\,R'=(q'p-qp')^n\,q'^n\,R\,,$$

ou

$$R'=(q'p-qp')^n\,R\,,$$

como queriamos demonstrar.

144. *Discriminante.* — As derivadas parciaes da funcção homogenea

$$f(x, y) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$$

em ordem a x e a y são

$$\begin{aligned} f'_x &= na_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} y \\ &\quad + (n-2) a_2 x^{n-3} y^2 + \cdots + a_{n-1} y^{n-1} , \\ f'_y &= a_1 x^{n-1} + 2a_2 x^{n-2} y + \cdots \\ &\quad + (n-1) a_{n-1} xy^{n-2} + na_n y^{n-1} ; \end{aligned}$$

multiplicando a primeira por x e a segunda por y, e sommando os productos, resulta

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y) . \qquad (46)$$

Discriminante da funcção $f(x, y)$ é o eliminante das equações derivadas

$$f'_x(x, y) = 0 , \quad f'_y(x, y) = 0 .$$

Ambas estas equações, de grau $n-1$, conteem os coefficientes da proposta; o grau do discriminante em ordem a estes coefficientes, será *(n.º 142)*

$$n - 1 + (n-1) = 2(n-1) ,$$

que é o numero das equações de Sylvester neste caso.

Assim, para a equação do 2.º grau

$$a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 = 0 ,$$

as equações derivadas são, dividindo-as por 2,

$$a_0 x + a_1 y = 0 \,, \quad a_1 x + a_2 y = 0 \,,$$

e o discriminante da proposta é

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_0 a_2 - (a_1)^2 \,,$$

do 2.º grau relativamente aos coefficientes a.

Em geral convirá multiplicar os coefficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ respectivamente pelos coefficientes numericos do desenvolvimento da potencia n do binomio; e assim teremos a equação homogenea de grau n

$$f(x, y) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} y$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n = 0 \,.$$

As derivadas de primeira ordem de $f(x, y)$, divididas por n e egualadas a zero, dão as equações

$$a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} y + \cdots + a_{n-1} y^{n-1} = 0 \,,$$
$$a_1 x^{n-1} + (n-1) a_2 x^{n-2} y + \cdots + a_{n-1} y^n = 0 \,.$$

O discriminante δ de $f(x, y)$ é, por definição, o eliminante d'estas equações cujos primeiros membros representaremos por A e B. Assim, será *(n.º 142)*

$$\delta = B_1 . B_2 \ldots B_{n-1} \,,$$

designando por $B_1, B_2 \ldots B_{n-1}$ os valores de B quando as incógnitas se substituem pelas raizes $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \ldots (\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$ da equação $A = 0$.

Por outra parte é (46)

$$f(x, y) = Ax + By .$$

O eliminante R de $f(x, y)$ e $f'_x(x, y)$ obtém-se substituindo no segundo membro d'esta relação as raizes (α_1, β_1), (α_2, β_2), etc., e multiplicando os resultados; mas para cada uma d'estas raizes é identicamente $A = 0$: logo será

$$\begin{aligned} R &= B_1 \beta_1 . B_2 \beta_2 \ldots B_{n-1} \beta_{n-1} \\ &= \delta \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1} . \end{aligned}$$

Ora da equação homogenea $A = 0$ resulta

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1}} = \pm \frac{a_{n-1}}{a_0} ,$$

ou

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} = \pm a_{n-1} , \quad \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1} = a_0 ;$$

e a expressão precedente torna-se em

$$R = \delta a_0 .$$

Podemos exprimir o discriminante em funcção das raizes da proposta, formando o eliminante R pela substituição d'estas raizes em f'_x. Representando-as por (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$, será

$$f(x, y) = (x y_1 - y x_1)(x y_2 - y x_2) \ldots (x y_n - y x_n) ,$$

e teremos, como anteriormente,

$$a_0 = y_1 y_2 \ldots y_n, \quad \pm a_n = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Derivando $f(x, y)$ em ordem a x, acha-se

$$\begin{aligned} f'_x = {} & y_1 (x y_2 - y x_2) \ldots (x y_n - y x_n) \\ & + y_2 (x y_1 - y x_1) \ldots (x y_n - y x_n) + \text{etc.}; \end{aligned}$$

e a substituição de uma das raizes de $f(x, y) = 0$, de (x_2, y_2) por exemplo, annulla todos os termos do segundo membro d'esta derivada, com excepção de

$$y_2 (x_2 y_1 - y_2 x_1) \ldots (x_2 y_n - y_2 x_n).$$

O producto dos resultados, que se obteem pela substituição successiva de todas aquellas raizes, será pois

$$\begin{aligned} R = {} & y_1 (x_1 y_2 - y_1 x_2) \ldots (x_1 y_n - y_1 x_n) \\ & \times y_2 (x_2 y_1 - y_2 x_1) \ldots (x_2 y_n - y_2 x_n) \\ & \times \text{etc.} \\ = {} & y_1 y_2 \ldots y_n (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \ldots (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)^2 \\ = {} & \pm a_0 (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \ldots (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)^2; \end{aligned}$$

donde finalmente

$$\delta = \pm (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \ldots (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)^2$$

Substituindo os y pela unidade, vem

$$\delta = \pm (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2;$$

a proposta é então

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 ,$$

e o seu discriminante é *o producto dos quadrados das differenças das raizes*. Se houver raizes eguaes, é $\delta = 0$.

145. *Theorema de Bezout.*—A equação final obtida pelo processo do n.° 141 é de grau mn, sendo m e n os graus das equações dadas.

O mesmo resultaria do que se disse no n.° 142. Suppondo que os coefficientes das equações consideradas neste n.° são funcções de uma nova incógnita y e que o grau de cada uma d'estas funcções é o índice respectivo, pela eliminação de x chegaremos a uma equação do grau mn em y, porque mn é o pezo da resultante.

Se as equações dadas forem completas e se todos os termos tiverem coefficientes quaesquer e independentes uns dos outros, o grau da equação final será mn.

Quando o grau d'esta equação é inferior a mn, as raizes que faltam são infinitas.

CAPÍTULO XII.

Theorema de Dalembert.

146. Podemos agora dar uma nova demonstração do princípio fundamental da theoria das equações.

O enunciado do theorema é o seguinte: *Toda a equação algébrica, racional e inteira, de coefficientes reaes ou imaginarios, tem pelo menos uma raiz, real ou imaginaria.*

Seja a proposta $f(x) = 0$; podemos sempre reduzi-la á forma

$$P + Qi = 0 ,$$

sendo P e Q polynomios racionaes de coefficientes reaes. Ora a equação

$$(P+Qi)\,(P-Qi)=P^2+Q^2=0$$

tem os coefficientes reaes, e se fôr satisfeita por uma raiz da forma $a+bi$, a proposta admittirá tambem uma raiz. Com effeito, fazendo $x=a+bi$ se o primeiro membro d'aquella equação se reduz a zero, um dos seus factores é zero. Ou este factor é $P+Qi$, e a proposição está demonstrada; ou é $P-Qi$, e então $a-bi$ reduzirá $P+Qi$ a zero. Basta pois demonstrar o theorema de Dalembert para o caso das equações de coefficientes reaes.

147. Supponhamos que a equação

$$f(x)\equiv x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m=0$$

é de grau par e coefficientes reaes, com o coefficiente 1 no 1.º termo; mudando x em $y+z$, vem

$$f(y+z)=f(y)+\frac{z^2}{2}f''(y)+\frac{z^4}{4!}f^{\text{IV}}(y)+\cdots+z^m$$

$$+z\left[f'(y)+\frac{z^2}{3!}f'''(y)+\cdots+\frac{z^{m-2}}{(m-1)!}f^{m-1}(y)\right].$$

Fazendo $z^2=t$ e $m=2k$, procuremos o termo com a mais alta potencia de y na resultante dos dois polynomios

$$f(y)+\frac{t}{2}f''(y)+\frac{t^2}{4!}f^{\text{IV}}(y)+\cdots+t^k,$$

$$f'(y)+\frac{t}{3!}f'''(y)+\frac{t^2}{5!}f^{\text{V}}(y)+\cdots+\frac{t^{k-1}}{(2k-1)!}f^{2k-1}(y).$$

Bastará considerar sómente nos coefficientes de $t^0, t^1, t^2, \ldots$ a mais alta potencia de y que se encontra em cada um d'elles, o que se reduz a substituir nestas expressões $f(y)$ pelo seu 1.º termo y^m; teremos assim os polynomios

$$y^m + m_2 t y^{m-2} + m_4 t^2 y^{m-4} + \cdots t^k,$$

$$m y^{m-1} + m_3 t y^{m-3} + m_5 t^2 y^{m-5} + \cdots + m t^{k-1},$$

em que $m_2, m_3, \ldots$ são os coefficientes numéricos da fórmula do binomio, do 3.º termo por deante. O eliminante R d'estes polynomios é *(n.º 139)*

$$R = \left| \begin{array}{cccccc} . & . & . & . & m_2 y^2 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ & y^m & m_2 y^{m-2} & . & . & . \\ y^m & m_2 y^{m-2} & m_4 y^{m-4} & . & . & . \\ m y^{m-1} & m_3 y^{m-3} & m_5 y^{m-5} & . & . & . \\ & m y^{m-1} & m_3 y^{m-3} & . & . & . \\ & . & . & . & . & . \\ & . & . & . & . & m y \end{array} \right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}.\\.\\.\\.\end{array}}\right\} \left(\frac{m}{2}-1\right) \textit{linhas} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}.\\.\\.\\.\end{array}}\right\} \frac{m}{2} \textit{ linhas.} \end{array}$$

Multipliquemos respectivamente as $\frac{m}{2} - 1$ primeiras linhas de R por as successivas potencias impares $2k-1$ de y, a partir da primeira y. Como k designa a ordem natural d'aquelle numero impar, a ultima d'estas potencias será $2\left(\frac{m}{2}-1\right)-1 = m-3$.

Multipliquemos depois as $\frac{m}{2}$ linhas restantes, a partir da ultima, por as successivas potencias pares de y, desde y^0. Como a ordem de cada numero par significativo $2k$ é indicada por k, o de ordem $\frac{m}{2}-1$ será $2\left(\frac{m}{2}-1\right)=m-2$. Esta é a potencia de y porque virá a multiplicar-se a linha $\frac{m}{2}$ de R.

Assim o determinante R foi multiplicado successivamente pelas potencias $1, 2, 3, \ldots m-2$ de y, o que equivale a multiplica-lo por uma potencia d'esta variavel designada por

$$1+2+3+\cdots+(m-2)=\frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Dividamos por outra parte as $m-1$ columnas de R pelas potencias impares successivas de y, até á primeira; a mais alta d'estas potencias, pela qual se dividirá a primeira columna, é o numero impar $2k-1$ que occupa na ordem natural o logar $m-1$, isto é, o numero impar $2(m-1)-1=2m-3$. Esta nova operação equivale a dividir o determinante por uma potencia de y representada por

$$1+3+5+\cdots+(2m-3)=\frac{2m-2}{2}(m-1)=(m-1)^2.$$

Representando por R' o resultado de todas as operações effectuadas, reconhece-se que é

$$R=R'y^{\frac{m}{2}(m-1)},$$

de modo que, em geral, o grau de R é $\frac{m}{2}(m-1)$.

Ora, sendo $m=2k$, R' é tambem o eliminante dos polynomios.

$$\theta_1=1+m_2w^2+m_4w^4+\cdots+w^m,$$
$$\theta_2=m+m_3w^3+m_5w^5+\cdots+mw^{m-2};$$

por outra parte θ_1 e θ_2 são primos entre si, pois que um divisor commum a estes polynomios seria tambem divisor commum de

$$\theta_1 + w\theta_2 = (1+w)^m, \quad \theta_1 - w\theta_2 = (1-w)^m$$

e portanto de $1+w$ e $1-w$, o que não pode ter logar. Logo R' é differente de zero, e R será *irreductivelmente* de grau $\frac{m}{2}(m-1)$ em y.

148. Mostrou-se (*n.º* 72) que a equação de grau impar e de coefficientes reaes tem sempre, pelo menos, uma raiz real; de modo que para esta classe de equações está demonstrado o theorema de Dalembert. Consideremos pois as equações de grau par, como a do n.º anterior, e supponhamos que esse grau é *simplesmente* multiplo de 2; ou que é $m = 2k$, com k impar.

Posto isto, fazendo $z^2 = t$, a transformada da proposta em $y + z$ póde tomar a forma

$$f_1(y, t) + z f_2(y, t) = 0;$$

e os valores de y e t que satisfizerem conjunctamente ás equações

$$f_1(y, t) = 0, \quad f_2(y, t) = 0,$$

darão as raizes da proposta.

Ora viu-se no n.º anterior que a resultante d'estas equações, de coefficientes reaes, é de grau $\frac{m}{2}(m-1)$ em y, isto é, de grau impar, visto que m é simplesmente par. Logo, aquella resultante tem uma raiz real y_0; e as duas equações

$$f_1(y_0, t) = 0, \quad f_2(y_0, t) = 0$$

admittem um factor commum, ou uma d'ellas é uma identidade.

Examinemos estes dois casos.

1.° Se uma das equações consideradas é uma identidade, não pode ser a primeira porque f_1 contém o termo $t^{\frac{m}{2}}$, irreductivel com qualquer outro e cujo coefficiente é a unidade, como suppozemos no 1.° termo de $f(x)$. Será então a segunda; mas neste caso a transformada reduz-se ao primeiro termo

$$f_1(y_0, t) = 0\ ;$$

e esta última equação, cujo grau $\frac{m}{2} = k$ é impar, tem uma raiz t_0, pelo menos. Portanto será $z_0 = \pm\sqrt{t_0}$; e então $x_0 = y_0 \pm \sqrt{t_0}$ é uma raiz da proposta.

2.° Se aquellas equações teem um factor commum, que designaremos por $\varphi\ (t, y_0)$, teremos

$$f(y_0 + z) = f_1\ (y_0, t) + z f_2\ (y_0, t) = \varphi\ (y_0, t) \times \psi\ (y_0, t)\ ,$$

ou antes

$$f(x) = \varphi\ [y_0, (x - y_0)^2] \times \psi\ [y_0, (x - y_0)^2] = \varphi\ (x) \times \psi\ (x)\ ;$$

e *a equação primitiva, de grau* m, *fica decomposta em duas de graus inferiores a* m.

Se m' e m'' forem os graus de $\varphi\ (x)$ e $\psi\ (x)$, será $m' + m'' = m$. Ora m' e m'' são da mesma paridade, visto que m é par; se ambos são impares, cada uma das equações $\varphi\ (x) = 0$ e $\psi\ (x) = 0$ tem uma raiz, e portanto tambem a proposta; se ambos são pares, um d'elles é simplesmente par, porque, se ambos contivessem uma potencia de 2 superior á primeira, o mesmo succederia a m, contra a hypóthese. Podemos pois applicar os mesmos raciocinios a uma das duas equações $\varphi\ (x) = 0$, $\psi\ (x) = 0$; e continuando pelo mesmo processo, chegariamos a uma equação do primeiro grau, se não tivessemos encontrado, antes d'isto, uma equação de grau impar.

Logo em todos os casos a proposta tem uma raiz, se o seu grau fôr simplesmente par.

149. Supponhamos agora que a mais alta potencia de 2 que se contém no grau m é 2^r, ou que é $m = 2^r(2k+1)$. Então $\frac{m}{2}$ é de paridade $(r-1)$, bem como $\frac{m}{2}(m-1)$, por ser $\frac{m}{2} = 2^{r-1}(2k+1)$ e k um inteiro.

Admittamos que o theorema está demonstrado para as equações cujo grau é de paridade inferior a r; vamos demonstrar que tambem é verdadeiro para o grau de paridade r. A proposição ficará assim estabelecida com toda a generalidade.

Seja como precedentemente

$$f(x) = f_1(y, t) + zf_2(y, t) = 0 .$$

A resultante em y das equações $f_1(y, t) = 0$ e $f_2(y, t) = 0$ é do grau $\frac{m(m-1)}{2}$, cuja paridade é $r-1$, e por isso admitte, conforme a hypóthese, uma raiz real ou imaginária y_0; e as equações $f_1(y_0, t)$ e $f_2(y_0, t)$ teem uma raiz commum.

1.° Se $f_2(y_0, t) = 0$ é uma identidade, a equação $f_1(y_0, t) = 0$, cujo grau $\frac{m}{2}$ é de paridade $r-1$, admitte um divisor $t - t_0 = z^2 - t_0 = (x - y_0)^2 - t_0$. Portanto neste caso a proposta tem as raizes $x = y_0 \pm \sqrt{t_0}$

2.° Se $f_2(y_0, t) = 0$ não é uma identidade, via-se como no n.° anterior que $f(x)$ é o producto de dois polynomios inteiros

$$f(x) = \varphi(x) \times \psi(x) = 0 .$$

Considerando só o caso de serem pares os graus m' e m'' dos dois factores, ou

$$m' = 2^{r'}(2k' + 1) , \quad m'' = 2^{r''}(k'' + 1) ,$$

não serão conjunctamente r' e r'' maiores que r; porque então a paridade de $m = m' + m''$ seria superior a r, contra a hypóthese. Se fôr

$$r' = r \ , \quad r'' = r + s \ ,$$

teremos

$$2^r(2k' + 1) + 2^r \cdot 2^s(2k'' + 1) = 2^r(2k + 1) \ ,$$

donde

$$2k + 1 = 2k' + 1 + 2^s(2k'' + 1)$$

e $k' < k$; tambem pode ser $r' < r$. Logo o grau m' de um dos factores pode ser, quando muito da mesma paridade que m e será então $m' < m$; ou de paridade inferior á de m. Neste último caso esse factor, $\varphi(x)$ por exemplo, tem uma raiz, pela hypóthese. No primeiro caso, operaremos com $\varphi(x)$ do mesmo modo que operámos com $f(x)$, obtendo assim uma sequencia, evidentemente limitada, de polynomios de graus decrescentes; chegagaremos pois necessariamente a um divisor do primeiro grau de $f(x)$.

Esta bella demonstração foi dada pelo professor Walecki e publicada em 1883.

III

Resolução das equações.

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES.

CAPÍTULO I.

Numeros negativos.

150. A arithmética considera únicamente os numeros *formados pela addição successiva da unidade e de partes da unidade.*

Se a e b são duas grandezas d'esta espécie, *ha sempre* outra grandeza c da mesma espécie, e uma só, tal que seja

$$a+b=c\ ;$$

isto é, a *addição* é uma operação *sempre possivel*, que conduz a um resultado determinado e único. Os seus princípios caracteristicos são

$$a+b=b+a \tag{I}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c\ , \tag{II}$$

$$a+0=a\ ; \tag{III}$$

o primeiro chama-se *commutativo* e o segundo *associativo.*

Esta é a operação fundamental. *Subtracção* é a operação *inversa* da addição: subtrahir um numero b de outro numero a é achar um terceiro numero c que sommado com b reproduza a. Tal numero chama-se *resto* ou *differença*, e escreve-se

$$a - b = c\,;$$

mas no campo da arithmética, o resto só existe quando é a maior que b ou a egual a b. Portanto esta operação é possivel em uns casos, e não o é em outros.

Para conseguir que a subtracção possa considerar-se sempre possivel, introduz-se no cálculo, *por convenção*, um novo numero que se chama *negativo*, como aos outros se dá o nome de *positivos:* esta primeira generalisação assignala a passagem da arithmética para a álgebra.

Representando os numeros por letras, aos negativos antepõe-se o signal — que neste caso não exprime própriamente uma operação e que poderia trocar-se por outro signal gráphico, como um *índice* por exemplo. Os novos numeros são definidos pela relação

$$a + (-a) = 0\,; \tag{47}$$

a sua introducção no cálculo envolve a necessidade de generalisar as definições das operações do modo que vamos indicar, tendo sempre em vista a conservação das propriedades fundamentaes de cada operação, para que as novas definições coincidam com as antigas quando se applicarem aos numeros para que estas foram estabelecidas.

Os numeros a e $-a$ chamam-se *oppostos* ou *contrários*. O numero positivo a, que se pode representar por

$$|a|\,,$$

chama-se o *valor absoluto* dos dois: é o seu módulo *(n.º 59)*.

151. *Addição.*—Vejamos o que deve entender-se por somma de numeros positivos e negativos. Combinando as leis (I), (II) e (III) com a definição (47) dos novos numeros, resulta primeiro

$$a+(-a)=0\ ,$$
$$b+(-b)=0\ ,$$
$$c+(-c)=0\ ,$$
etc.

sommando estas egualdades, temos

$$[a+(-a)]+[b+(-b)]+[c+(-c)]+\cdots$$
$$=(\mathrm{II})\,[a+b+c+\cdots]+[(-a)+(-b)+(-c)+\cdots]=0\ :$$

donde (47) resulta a expressão

$$(-a)+(-b)+(-c)+\cdots=-(a+b+\cdots)\ ,$$

que dá o conceito da somma de numeros negativos.

Assim se vê tambem que a somma de numeros positivos e negativos se reduz á somma de um numero positivo e de um numero negativo

$$a+(-b)\ ,$$

que vamos interpretar.

Se é $b>a$, ou $b=a+|a'|$, teremos pela relação antecedente

$$-b=(-a)+(-|a'|)\ ,$$

e portanto, segundo (47),

$$\begin{aligned} a+(-b) &= a+[(-a)+(-|a'|)] \\ &= (\mathrm{II})\,[a+(-a)]+(-|a'|) \\ &= 0+(-|a'|) \\ &= (\mathrm{III})\,-|a'|\,. \end{aligned}$$

Se é $a=b$, será (47)

$$a+(-b)=0\,.$$

Se é $a>b$ ou $a=b+|a'|$, teremos

$$\begin{aligned} a+(-b) &= (b+|a'|)+(-b) \\ &= (\mathrm{II})\,b+|a'|+(-b) \\ &= (\mathrm{I})\,b+(-b)+|a'| \\ &= (\mathrm{III})\,|a'|\,. \end{aligned}$$

Assim a somma dos numeros positivos e negativos; a que se dá conjunctamente o nome de *racionaes* ou *commensuraveis*, tem uma expressão determinada e única, e é regida pelas mesmas regras da somma dos numeros positivos.

152. *Subtracção.* — É a operação inversa da addição; ora, quaesquer que sejam os numeros positivos a e b, é

$$b+[a+(-b)]=a\;;$$

portanto a differença $a-b$ é sempre expressa pelo numero

$$a+(-b)\,.$$

Podemos designar pela palavra *numero* tanto um numero positivo como um numero negativo, e qualquer d'estas quantidades pode ser representada por uma letra. Por *convenção* $+n$ representa uma quantidade do mesmo valor absoluto e da mesma espécie que n, e $-n$ uma quantidade do mesmo valor absoluto que n e de espécie opposta a n. Representando pelos indices σ e σ' qualquer dos signaes $+$ e $-$, esta convenção traduz-se pela egualdade

$$(n_\sigma)_{\sigma'}=(n_{\sigma'})_\sigma ,$$

que dá logar aos seguintes casos:

$$+(+n)=-(-n)=+n ,$$
$$+(-n)=-(+n)=-n .$$

Nisto consiste a *regra dos signaes*.

Para brevidade da escripta consideram-se equivalentes as expressões

$$\pm a\pm b\pm c\ldots , \quad (\pm a)+(\pm b)+(\pm c)+\cdots ;$$

mas só a segunda é rigorosa.

153. *Multiplicação.* — Todo o numero positivo se pode considerar formado pela addição successiva de uma parte aliquota $\frac{1}{b}$ da unidade; e assim a expressão mais geral do numero racional é

$$\left(\frac{a}{b}\right)_\sigma ,$$

com a e b inteiros e positivos, e o indice equivalente ao signal $+$ ou $-$. Por outra parte, qualquer numero d'esta forma admitte uma parte alíquota

$$\left(\frac{a}{nb}\right)_\sigma,$$

pois que a somma de n parcellas como esta reproduz esse numero, como se viu precedentemente.

Posto isto, para obter o producto do multiplicando p pelo multiplicador q, sendo

$$p=\left(\frac{a}{b}\right)_\sigma, \quad q=\left(\frac{m}{n}\right)_{\sigma'}$$

e qualquer dos índices equivalente ao signal $+$ ou $-$, notemos que o segundo factor se forma

a) tomando a parte alíquota $\frac{1}{n}$ da unidade,

b) sommando m d'estas partes;

c) affectando o resultado com o índice σ'.

Portanto, para obter o producto será necessário:

a) formar a parte alíquota $\left(\frac{a}{nb}\right)_\sigma$ de p;

b) obter a somma $\left(\frac{ma}{nb}\right)_\sigma$ de m d'estas partes;

c) applicar ao resultado o índice σ';

assim aquelle producto será

$$pq=\left(\left(\frac{ma}{nb}\right)_\sigma\right)_{\sigma'}.$$

O producto do multiplicando q pelo multiplicador p seria do mesmo modo

$$qp=\left(\left(\frac{am}{bn}\right)_{\sigma'}\right)_{\sigma};$$

attendendo á regra dos signaes e ao principio

$$am=ma\ ,\quad bn=nb$$

da multiplicação dos numeros positivos, vê-se que é

$$pq=qp\ . \tag{I}$$

Logo:

O producto de dois numeros racionaes não depende da ordem por que se faz a multiplicação; tem por valor absoluto o producto dos valores absolutos dos factores, e por signal o producto dos signaes dos mesmos factores.

Por *producto dos signaes* entende-se a regra do n.º 152; da última parte do enunciado precedente resulta que é

$$p\times 0=0\ ,\quad p\times 1=p\ ; \tag{II}$$

evidentemente é tambem

$$(pq)r=(pr)q\ . \tag{III}$$

Supposemos os factores monomios. Se forem polynomios,

$$p=a+b+c+\cdots\ ,\quad q=a'+b'+c'+\cdots$$

notaremos que o multiplicador q se forma da unidade tomando as partes a', b', c' ... e sommando-as; operando do mesmo modo sobre o multiplicando p, vem o producto

$$pq = a'(a+b+c+\cdots) + b'(a+b+c+\cdots) + \cdots .$$

Invertendo no segundo membro a ordem dos factores, acha-se finalmente o quarto princípio da multiplicação que pode enunciar-se simplesmente pela forma seguinte:

$$(p+q)r = pr + qr , \tag{IV}$$

e se chama *distributivo*.

Aos quatro princípios (I), (II), (III) e (IV) que regem a multiplicação dos numeros positivos, temos pois de juntar para todos os commensuraveis a regra dos signaes

$$\left.\begin{aligned}(+p)\times(+q) = (-p)\times(-q) = +pq ,\\ (+p)\times(-q) = (-p)\times(+q) = -pq ,\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

que resulta de vir o producto affectado com os índices σ e σ' dos dois factores.

154. *Divisão.* — Nesta operação, inversa da multiplicação, procura-se o numero r, *quociente*, que multiplicado pelo *divisor* q produz o *dividendo* p; o que se representa por

$$\frac{p}{q} = r , \quad \text{ou} \quad p = qr .$$

Se fôr $q = 0$ e p differente de zero, não ha numero finito r que convenha á questão; se fôr $p = q = 0$, todos os numeros lhe conveem. Não considerando estes casos de excepção, se fôr

$$p=\left(\frac{a}{b}\right)_\sigma, \quad q=\left(\frac{m}{n}\right)_{\sigma'},$$

o numero procurado é

$$r=\left(\left(\frac{an}{bm}\right)_\sigma\right)_{\sigma'},$$

porque, effectuando o producto de r por q se reproduz o dividendo p.

E não pode haver mais de uma solução; porquanto de

$$qr=p\ , \quad qr'=p\ ,$$

tirava-se

$$q(r-r')=0\ ,$$

donde resultaria $r=r'$.

155. *Potenciação.* — É definida pelo principio

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\ ,$$

que subsiste para m e n positivos ou negativos, mas inteiros.

156. *Transformação das egualdades e desegualdades.* — O cálculo numérico funda-se nas leis das operações e nas leis fundamentaes de transformação das egualdades e desegualdades;

estas últimas são para os numeros positivos

$$a=b \therefore b=a \qquad \text{(I)}$$

$$a=b\,,\quad b=c \therefore a=c \qquad \text{(II)}$$

$$a=b\,,\quad c=d \therefore a+c=b+d\,,\quad ac=bd\,,\quad \text{etc.} \qquad \text{(III)}$$

$$a>b\,,\quad b>c \therefore a>c \qquad \text{(IV)}$$

$$a>b\,,\quad c>d \therefore a+c>b+d\,,\quad a-d>b-c\,. \qquad \text{(V)}$$

A (II) resulta de (I), e as tres primeiras applicam-se evidentemente aos numeros negativos. A quarta resulta de

$$a=b+\delta\,,\quad b=c+\delta' \therefore a=c+\delta'+\delta\,,\quad a>c\,,$$

só com a condição de serem positivos δ e δ'; a mesma lei terá logar para os numeros negativos com tanto que por $a>b$ se entenda sempre que a differença $a-b$ é um numero positivo. Sobre a (V) fariamos observação semelhante.

Fica assim definida a noção algébrica de desegualdade, que subentenderemos em tudo que se seguir. Neste sentido se diz que os numeros positivos são maiores e os negativos menores do que zero; que o numero negativo é tanto mais pequeno quanto maior é o seu valor absoluto, e sempre menor que qualquer numero positivo; finalmente que para m positivo e $a>b$ é

$$ma>mb\,,\quad -ma<-mb\,,$$

de modo que devemos mudar o sentido da desegualdade quando a multiplicamos por um factor negativo.

CAPÍTULO II.

Numeros irracionaes.

157. A determinação arithmética da raiz $\sqrt[r]{a}$ de um numero positivo a nem sempre é possivel; mas nas operações elementares ha meios para formar numeros crescentes

$$u_1\ ,\quad u_2\ ,\quad \ldots\quad u_n\ ,\quad \ldots$$

definidos pela condição de $(u_n)^r$ se approximar indefinidamente de a quando se progride na série, ou quando o indice n augmenta; e numeros decrescentes

$$v_1\ ,\quad v_2\ ,\quad \ldots\quad v_n\ ,\quad \ldots$$

taes que $(v_n)^r$, crescendo n, se approxima tambem indefinidamente do mesmo numero a. Finalmente este numero é superior a qualquer dos da primeira série, e inferior a todos os da segunda. Diz-se então que $\sqrt[r]{a}$ separa o campo dos numeros u_1, $u_2, \ldots, u_n, \ldots, v_n, \ldots, v_2, v_1$ em duas classes: a primeira, composta dos numeros u, é representada abreviadamente por U e chama-se *inferior;* a segunda, composta dos numeros v, é representada por V e chama-se *superior*. Pela definição d'estas classes se vê que é sempre possivel escolher um termo u_n da primeira e outro v_n da segunda por forma que seja

$$v_n - u_n < \delta\ , \qquad (i)$$

sendo δ qualquer quantidade positiva assignavel.

Consideremos, inversamente, duas series, como U e V, a primeira composta de numeros crescentes e a segunda de numeros decrescentes, formados segundo uma lei qualquer e taes que para n superior a um certo limite tenha logar a desegualdade (i), por muito pequeno que seja o numero positivo δ. Na classe U não haverá um termo máximo u_s nem na classe V um minimo v_t, aliás seria

$$v_t - u_s \leqq v_n - u_n ,$$

qualquer que fôsse n: o que é contra a hypóthese. Posto isto, dois casos podem dar-se.

Se houver um numero racional a que, para qualquer valor de n, verifique as desegualdades

$$u_n < a < v_n , \qquad (ii)$$

cada uma das differenças positivas $a - u_n$, $v_n - a$ é menor que $v_n - u_n$ e conseguintemente tende para zero á medida que n augmenta. O numero a determina a separação das classes U e V; e é unico porque, se houvesse outro b nas mesmas condições, seria, por exemplo,

$$u_n < a < b < v_n$$

para qualquer valor de n: donde

$$v_n - u_n > b - a ,$$

contra a hypóthese.

Se não houver numero racional que convenha ás desegualdades (ii), diremos que U e V definem um numero de nova espécie, que chamamos *irracional* ou *incommensuravel* e que separa os numeros da classe U dos numeros da classe V.

Observemos que alguns termos de U ou V podem ser eguaes, o que não influe nos resultados precedentes; mas não pode ser indefinidamente $u_s = u_{s+1} = u_{s+2} = \ldots$ e ao mesmo tempo $v_t = v_{t+1} = v_{t+2} = \ldots$, porque esta hypóthese é incompativel com a condição (i); nem separadamente $u_s = u_{s+1} = \ldots$, ou $v_t = v_{t+1} = \ldots$, pelo mesmo motivo.

Representando por α o numero incommensuravel definido pelas classes U e V, adoptaremos a notação

$$\alpha = (\mathrm{U}, \mathrm{V}) ,$$

escrevendo sempre em primeiro logar a classe inferior; e diremos que é

$$u_n < \alpha < v_n ,$$

isto é, que a relação (ii) subsiste quando se muda a em α, notando que escrevemos *por convenção* aquellas desegualdades e que portanto não podemos applicar-lhes *à priori* as regras do cálculo das desegualdades entre numeros racionaes.

A notação

$$(\mathrm{U}, \mathrm{V})$$

pode tambem representar uma grandeza commensuravel qualquer; os numeros racionaes e irracionaes chamam-se conjunctamente *reaes.*

Estabelecidos os princípios precedentes, occupemo-nos das operações com os numeros incommensuraveis, começando por definir as noções de egualdade e desegualdade.

158. *Egualdade e desegualdade.*—Dado o numero racional a e o irracional $\alpha = (\mathrm{U}, \mathrm{V})$, se a pertence a uma das classes U e V, vimos o que deva entender-se por a menor ou maior que α. Se o numero a se não encontra entre os termos de U ou de V, haverá na classe U algum termo $u_n > a$, ou na classe V algum termo $v_n < a$; porque d'outro modo seria sempre

$$u_n < a < v_n ,$$

e portanto (*ii*)

$$(U,V) = a :$$

de modo que α seria racional, contra a hypóthese. Se para qualquer valor de n fôr $a < u_n$, diremos que é $a < \alpha$; se fôr $a > v_n$, diremos que é $a > \alpha$. Fica assim definido o que se entende por numeros racionaes *menores* ou *maiores* que o irracional α.

Dizemos que dois numeros irracionaes α e α' são eguaes quando qualquer numero racional menor que α é tambem menor que α', e qualquer numero racional maior que α é tambem maior que α'. Sejam

$$\alpha = (U, V) , \quad \alpha' = (U', V') ;$$

por definição, para que seja $\alpha = \alpha'$ é necessario que qualquer termo de U, sempre menor que α, seja tambem menor que α'; e qualquer termo de U', pela mesma razão, seja menor que α. Logo será

$$u_h < v'_s , \quad u'_k < v_t . \qquad (iii)$$

Se houver um numero n' tal que a qualquer valor de $n > n$ corresponda

$$v_n < u'_n ,$$

diremos que α é menor que α' ou α' maior que α, e escreveremos indifferentemente

$$\alpha < \alpha' , \quad \alpha' > \alpha .$$

Se fôr, para $n > n'$,

$$u_n > v'_n ,$$

diremos que α é maior que α', e escreveremos

$$\alpha > \alpha' , \quad \alpha' < \alpha .$$

No primeiro caso u'_n é maior que *todos* os numeros da classe V e no segundo u_n é maior que todos os numeros da classe V'.

Da noção de egualdade resulta que o numero irracional

$$\alpha = (U, V)$$

não se altera: 1.° juntando ou tirando a qualquer das classes U e V termos em numero finito; 2.° supprimindo em U todos os termos menores que um termo dado u_n, ou na classe V todos os maiores que um certo v_n; 3.° inserindo ou supprimindo quaesquer elementos quantos se quizer, em alguma das classes, comtanto que em U fique sempre um *maior* e em V um *menor* do que os accrescentados ou supprimidos. É evidente.

D'aqui resultam os seguintes corollarios: 1.° Se a classe U contém elementos positivos e negativos, podemos supprimir os negativos; a classe V, neste caso, só terá elementos positivos. 2.° Se a classe V tem elementos positivos e negativos, podemos supprimir os primeiros; a classe U, neste caso, só terá elementos negativos. Poderemos obter por esta fórma que nas duas classes só haja elementos positivos ou negativos; diremos que o numero irracional é no primeiro caso *positivo* e no segundo *negativo*.

Poderá, porém, acontecer que a classe U só tenha termos negativos e a classe V só termos positivos. Neste caso será $(U, V) = 0$; e reciprocamente, só o numero zero póde ser definido por duas classes U e V em taes condições. É tambem $(0, V) = 0$, $(-U, 0) = 0$.

159. *Addição.* — Supponhamos que são dadas as parcellas

$$\alpha = (U, V)\ , \quad \alpha' = (U', V')\ ,$$

cuja somma se quer obter.

Representando por $U + U'$ as sommas de cada termo de U com todos os termos de U', dispostas em ordem crescente de grandeza, e por $V + V'$ as sommas dos termos de V e V' dispostas em ordem decrescente, de

$$u_h < v_s\ ,\quad u'_k < v'_t$$

resulta

$$u_h + u'_k < v_s + v'_t\ ;$$

isto é, qualquer elemento de $U + U'$ é menor que qualquer elemento de $V + V'$. Por outra parte, de

$$(v_s + v'_t) - (u_h + u'_k) = (v_s - u_h) + (v'_t - u'_k)$$

conclue-se que o primeiro membro se pode tornar menor que qualquer numero positivo tão pequeno quanto se quizer; logo as duas classes $U + U'$, $V + V'$ definem um numero, racional ou irracional. Se α e α' fôrem commensuraveis este numero será $\alpha + \alpha'$ e

$$(U, V) + (U', V') = (U + U', V + V')\ ;$$

d'aqui se toma *convencionalmente* esta expressão para definir a somma de dois numeros quaesquer. Para maior numero de parcellas seria

$$(U, V) + (U', V') + (U'', V'') + \cdots$$
$$= (U + U' + U'' + \cdots, V + V' + V'' + \cdots).$$

Vê-se que por esta definição a $\alpha = \alpha'$ corresponde $\alpha + \gamma = \alpha' + \gamma$, como nos numeros racionaes. Com effeito, fazendo $\gamma = (W, Z)$, temos, conforme a notação adoptada, $w_m < z_n$, sendo w_m e z_n respectivamente um termo qualquer das classes W e Z. Tambem por ser $\alpha = \alpha'$ é (*iii*) $u_h < v'_s$ e $u'_k < v_t$; logo é

$$u_h + w_m < v'_s + z_n\ ,\quad u'_k + w_m < v_t + z_n$$

e, pela definição de somma e pela noção de egualdade,

$$\alpha+\gamma=\alpha'+\gamma\ .$$

A definição de somma applicada a dois numeros, um commensuravel e outro incommensuravel, conduz á relação

$$a+(\mathrm{U},\ \mathrm{V})=(a+\mathrm{U},\ a+\mathrm{V})\ ;$$

d'esta egualdade resulta

$$0+(\mathrm{U},\ \mathrm{V})=(\mathrm{U},\ \mathrm{V})\ .$$

De ser $u_h+u'_k=u'_k+u_h$ e $v_s+v'_t=v'_t+v_s$ conclue-se que é

$$(\mathrm{U},\ \mathrm{V})+(\mathrm{U}',\ \mathrm{V}')=(\mathrm{U}',\ \mathrm{V}')+(\mathrm{U},\ \mathrm{V})\ ;$$

por onde se verifica o principio commutativo na addição dos incommensuraveis. Similhantemente verificariamos a applicação do principio associativo á somma dos numeros d'esta espécie.

160. *Subtracção.* — Esta operação depende da determinação de um numero $(-\alpha)$ tal que seja

$$\alpha+(-\alpha)=0\ ,$$

como vimos no n.º 151.

Ora, se fôr $\alpha=(\mathrm{U},\ \mathrm{V})$, a expressão $(-\mathrm{V},-\mathrm{U})$, composta com as mesmas duas classes com signaes trocados e invertidas, representa um numero; com effeito a $u_h<v_k$ corresponde $-v_k<-u_h$, e a differença $-u_h-(-v_s)=v_s-u_h$ pode tornar-se menor que qualquer grandeza assignavel.

Posto isto, a definição da somma mostra que

$$(U+V)+(-V,-U)=(U-V,V-U)=0\ ,$$

porque $U-V$ só contém termos negativos e $V-U$ só contém termos positivos. Está pois achado o numero $-\alpha$, e temos

$$-\alpha=-(U,V)=(-V,-U)\ .$$

D'esta relação se conclue que a regra da composição dos signaes (*n.° 162*) subsiste a mesma para todos os numeros reaes. Assim, por exemplo,

$$-[-(U,V]=+(U,V)\ ;$$
$$-(U,V)=(-V,-U)\ ,$$

donde

$$-[-(U,V)]=-(-V,-U)=(U,V)\ .$$

D'aqui resulta quaesquer que sejam os numeros reaes α e α' definidos cada um por duas classes, que é sempre

$$\alpha'+[\alpha+(-\alpha')]=\alpha,$$

e $\alpha+(-\alpha')$ representa a differença $\alpha-\alpha'$. Se fôr

$$\alpha=(U,V)\ ,\quad \alpha'=(U',V')\ ,$$

teremos assim

$$\alpha-\alpha'=(U,V)+(-V',-U')=(U-V',V-U')\ .$$

Se fôr $\alpha > \alpha'$, a classe $V-U'$ só tem termos positivos e poderemos fazer com que a classe $U-V'$ tenha tambem só termos d'esta espécie; o numero $\alpha-\alpha'$ é positivo. Se fôr $\alpha < \alpha'$, a classe $U-V'$ só tem termos negativos e poderemos considerar na outra classe termos tambem só d'esta especie; o numero $\alpha-\alpha'$ é negativo. Finalmente se fôr $\alpha=\alpha'$ a classe $U-V'$ só tem termos negativos ou nullos e $V-U'$ termos nullos ou positivos; donde $\alpha-\alpha'=0$.

D'estes principios resulta o seguinte theorema fundamental: *Se a differença entre dois numeros α e α' fôr menor, em valor absoluto, do que qualquer numero positivo differente de zero, será $\alpha=\alpha'$.*

Com effeito, seja $\alpha-\alpha'=\beta$ e β, que podemos suppôr positivo, menor do que qualquer numero racional δ, por mais pequeno que este numero seja. Representemos β pela egualdade

$$\beta=(W, Z),$$

como é sempre possivel; será

$$\delta-\beta=(\delta-Z, \delta-W).$$

Mas, por hypóthese, esta differença será positiva; e portanto nas duas classes $\delta-Z$ e $\delta-W$ haverá termos positivos. Sejam dois d'elles

$$\delta-z_k, \quad \delta-w_l,$$

isto é,

$$z_k<\delta, \quad w_l<\delta.$$

Estas duas desegualdades, onde δ é um numero que se póde tornar tão pequeno quanto se quizer, mostram que os termos das classes W e Z se podem approximar indefinidamente de zero, e portanto é

$$\beta=0 \quad \therefore \alpha=\alpha',$$

como se queria demonstrar.

161. *Multiplicação.* — Para definir esta operação quando os factores α e α' são representados por duas classes

$$\alpha=(U, V), \quad \alpha'=(U', V'),$$

consideraremos as classes, em cada factor, compostas com elementos do mesmo signal, como vimos que é permittido.

Posto isto, e considerando por agora só o caso de serem positivos os dois factores α e α', vamos ver que as classes $U\times U'$, $V\times V'$, formadas respectivamente pela multiplicação dos elementos de U pelos de U' e dos elementos de V pelos de V', definem um numero. Com effeito, sendo

$$u_h < v_k, \quad u'_s < v'_t$$

teremos, visto que todos estes numeros são positivos,

$$u_h \times u'_s < v_k \times v'_t .$$

Por outra parte, de

$$v_k v'_t - u_h u'_s = (v'_t - u'_s) v_k + (v_k - u_h) u'_s ,$$

resulta

$$v_k v'_t - u_h u'_s < (v'_t - u'_s) v_k + (v_k - u_h) v'_t ;$$

e o 2.º membro d'esta desegualdade decresce indefinidamente, porque decrescem as differenças $v'_t - u'_s$ e $v_k - u_h$, assim como os factores que as multiplicam.

O numero (UU', VV') *é por definição*, o producto dos dois factores α e α', ou

$$(U, V)\times(U', V') = (UU', VV') ,$$

quando α e α' são positivos. Os outros casos, que podem dar-se com os signaes dos factores, resolvem-se facilmente; assim, por exemplo, se as classes U e V forem compostas de termos negativos

$$u_n = -w_n\ ,\quad v_n = -z_n\ ,$$

teremos

$$u_n u'_n = -u'_n w_n\ ,\quad v_n v'_n = -v'_n z_n\ ,$$

e as classes UU', VV' definirão o numero $-(U'W, V'Z)$: escreveremos, pois,

$$(U, V)\times(U', V') = -(W, Z)\times(U', V')\ .$$

Assim tambem se vê que fica generalisado o principio (I) do n.° 153, pois que de $UU' = U'U$ e $VV' = V'V$ resulta $\alpha\alpha' = \alpha'\alpha$. O mesmo acontece com o principio (II) evidentemente; e com o principio (III), porque a definição precedente pode generalisar-se para qualquer numero de factores. O mesmo diremos do principio (IV), porque sendo

$$\alpha + \alpha' = (U + U', V + V')\ ,$$

pela definição de multiplicação teremos

$$\begin{aligned}(\alpha + \alpha')\alpha'' &= [(U + U')U'', (V + V')V''] \\ &= [UU'' + U'U'', VV'' + V'V''] \\ &= [UU'', VV''] + [U'U'', V'V''] \\ &= (U, V)(U'', V'') + (U', V')(U'', V'') \\ &= \alpha\alpha'' + \alpha'\alpha''\ .\end{aligned}$$

Finalmente a regra (V) dos signaes fica egualmente justificada.

162. *Divisão.* — É o problema inverso da multiplicação; dados os numeros α e α', procura-se outro q, tal que seja

$$\alpha = \alpha' \times q .$$

Se α' é differente de zero, ha sempre um numero q, e um só, para o qual se verifica a relação precedente; esse numero representa-se por $\frac{\alpha}{\alpha'}$.

Supponhamos que α e α' são positivos, o que é sufficiente como se viu no caso anterior, e seja

$$\alpha = (U, V), \quad \alpha' = (U', V') ;$$

representemos em geral por $\frac{A}{B}$ a classe dos numeros que se formam dividindo qualquer termo da classe A por qualquer termo da classe B. Vamos ver que as classes $\frac{U}{V'}$, $\frac{V}{U'}$ definem um numero.

Sendo positivos os termos u_h, v_k, u'_s, v'_t das classes U, V, U', V', das desegualdades

$$u_h < v_k , \quad u'_s < v'_t$$

deduz-se que é

$$\frac{u_h}{v'_t} < \frac{v_k}{u'_s} :$$

por onde se vê que qualquer termo da classe $\frac{U}{V'}$ é menor do que qualquer termo da classe $\frac{V}{U'}$. Por outra parte, a differença

$$\frac{v_k}{u'_s} - \frac{u_h}{v'_t} = \frac{v_k v'_t - u_h u'_s}{u'_s v'_t} < \frac{v_k v'_t - u_h u'_s}{(u'_s)^2}$$

decresce indefinidamente; porque decresce o numerador, segundo se viu no caso anterior, e augmenta o denominador.

Posto isto, para demonstrar que o quociente procurado é

$$q = \left(\frac{U}{V'}, \frac{V}{U'}\right)$$

vamos ver primeiro que

$$\left(\frac{U'}{V'}, \frac{V'}{U'}\right) = 1 .$$

Ora o 1.° membro d'esta expressão define um numero, visto que a demonstração precedente é geral e tem ainda logar quando U e V se tornam em U' V'; além d'isso, sendo os termos da classe U' menores que os da classe V', os termos de $\frac{U'}{V'}$ serão sempre menores que 1 e os de $\frac{V'}{U'}$ maiores que 1; isto é,

$$\left(\frac{u'}{v'}\right) < 1 < \left(\frac{v'}{u'}\right),$$

o que demonstra a egualdade precedente *(n.° 157)*.

D'aqui resulta que será

$$\left(\frac{U}{V'}, \frac{V}{U'}\right) \times (U', V') = \left(\frac{UU'}{V'}, \frac{VV'}{U'}\right)$$

$$= (U, V) \times \left(\frac{U'}{V'}, \frac{V'}{U'}\right)$$

$$= (U, V),$$

ou $q = \left(\frac{U}{V'}, \frac{V}{U'}\right)$, como se queria demonstrar.

Que não ha outra solução prova-se como no n.° 154.

163. *Potenciação (expoente inteiro e positivo)*. — Consideremos a base positiva, por que a operação com os numeros negativos só teria a particularidade da applicação da regra dos signaes.

Seja pois o numero

$$\alpha = (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \; ;$$

a potencia n de α pode ser definida por duas classes, compostas respectivamente com as potencias n dos termos de U e V. Comecemos pelo quadrado; segundo a definição de producto, as duas classes que representam o numero $\alpha^2 = \alpha \times \alpha$ formam-se multiplicando entre si todos os termos da classe U e todos os da classe V; assim, teriamos as duas classes

$$\begin{array}{l} u_1^2 , u_1 u_2 , u_2^2 , u_1 u_3 , \cdots \\ v_1^2 , v_1 v_2 , v_2^2 , v_1 v_3 , \cdots \end{array} \; ;$$

supprimindo os productos, viriam as novas series

$$\begin{array}{l} u_1^2 , u_2^2 , \cdots u_n^2 , \cdots \\ v_1^2 , v_2^2 , \cdots v_n^2 , \cdots \end{array}$$

O primeiro d'estes systemas define o numero α^2, e o ultimo define um numero x; para que seja $x = \alpha^2$ é necessario que qualquer termo da primeira classe de α^2 seja menor do que qualquer termo da segunda classe de x, e qualquer da primeira classe de x menor do que qualquer da segunda de α^2; ora, por serem os numeros positivos

$$u_h < v_k \; , \quad u_s < v \; ,$$

será

$$u_h^2 < v_k^2 \; , \quad u_h u_s < v_k^2 ,$$

quaesquer que sejam os indices h, k e s; do mesmo modo de

$$u_h < v_k \quad , \quad u_h < v_l$$

resulta

$$u_h^2 < v_k v_l \, .$$

É por tanto $x = \alpha^2$, o que se pode traduzir na relação

$$\alpha^2 = (U^2, V^2) \, ,$$

representando por U^2 e V^2 duas successões de numeros compostas, respectivamente, com os quadrados dos termos das series U e V.

Do quadrado passariamos para o cubo

$$\alpha^3 = (U^2, V^2) \times (U, V) = (U^3, V^3) \; ;$$

e em geral será

$$\alpha^n = (U^n, V^n) \, .$$

Por conseguinte teremos tambem

$$\begin{aligned} \alpha^m \times \alpha^n &= (U^m, V^m) \times (U^n, V^n) \\ &= (U^m \times U^n, V^m \times V^n) = (U^{m+n}, V^{m+n}) \\ &= \alpha^{m+n} \, , \end{aligned}$$

como para os numeros racionaes, sendo os expoentes inteiros e positivos.

164. *Radiciação.*—É o problema inverso do precedente; procura-se o numero *positivo* α que elevado ao expoente *inteiro* e *positivo* r produz um numero positivo dado a, de modo que seja $\alpha^r = a$.

Formando a classe U com todos os numeros racionaes positivos cuja potencia de grau r é menor que a e a classe V com todos aquelles cuja potencia de grau r é maior que a, estas duas classes definem um numero, como já se disse. Vamos agora mostrar que $(U, V)^r = a$, isto é,

$$\alpha = (U, V) ,$$

e que nenhum outro valor de α convém ao problema.

Sabemos que

$$(U, V)^r = (U^r, V^r) ;$$

e como é cada termo de U^r menor e cada termo de V^r maior que a, de

$$(u_n)^r < a < (v_n)^r$$

qualquer que seja n, resulta a primeira parte da proposição. Supponhamos que era possivel outra solução $\alpha = (U', V')$, ou

$$a = (U^r, V^r),\ a = (U'^r, V'^r) ;$$

cada termo $(u'_s)^r$ de U'^r será menor que a e portanto a base u'_s encontra-se entre os termos de U. Do mesmo modo $(v'_t)^r > a$ diz-nos que o termo v'_t de V' se encontram em V; por onde se vê que é

$$u'_s < v_k \quad u_h < v'_t ,$$

e que portanto os numeros (U, V) e (U', V') são eguaes.

165. *Potenciação (expoente qualquer).*—Sendo a um numero commensuravel, do principio definido pela egualdade

$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$

sendo m e n inteiros e positivos, resulta a interpretação dos symbolos

$$a^0, \quad a^{-n}, \quad a^{\frac{m}{n}}$$

que assim ficam tambem regidos por aquella mesma lei.

Do mesmo modo, verificado o mesmo principio para o numero incommensuravel α e expoentes m e n positivos e inteiros, vê-se o que devemos entender por os mesmos symbolos applicados a esta base α. Assim de $\alpha^m \times \alpha^n = \alpha^{m+n}$ resulta

$$\frac{\alpha^p}{\alpha^q} = \alpha^{p-q};$$

generalisando esta expressão para o caso de ser $p-q=r$ ou $q-p=r$, resulta

$$\alpha^{-r} = \frac{1}{\alpha^r};$$

e se fôr $p=q$, acha-se do mesmo modo

$$\alpha^0 = 1.$$

Considerando só bases positivas na interpretação do expoente fraccionario, notemos que

$$(\alpha^n)^p = \alpha^{np}, \quad \sqrt[p]{\alpha^{np}} = \alpha^{\frac{np}{p}};$$

generalisando esta expressão, temos

$$\alpha^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{\alpha^m} .$$

No que fica dito consideramos sómente o expoente racional; antes de examinar o caso do expoente incommensuravel demonstraremos os dois lemmas seguintes:

1.° *As potencias inteiras e positivas de um numero* m *crescem ou decrescem indefinidamente, augmentando o expoente, conforme é* m > *ou* < 1.

Seja $m > 1$; ou $m = 1 + \delta$, com δ positivo. Considerando as potencias crescentes

$$1 , \quad 1+\delta , \quad (1+\delta)^2 , \quad \cdots \quad (1+\delta)^n , \quad (1+\delta)^{n+1} ,$$

a differença de dois termos consecutivos d'esta serie é

$$(1+\delta)^{n+1} - (1+\delta)^n = (1+\delta)^n \times \delta > \delta :$$

d'onde se conclue que a differença entre o termo de ordem n e o primeiro é maior que $n\delta$, ou

$$(1+\delta)^n > 1 + n\delta .$$

D'esta expressão resulta, fazendo $1 + n\delta > A$, que, para todos os valores do expoente que verifiquem a desegualdade

$$n > \left(\frac{A-1}{\delta} = \frac{A-1}{m-1}\right),$$

é $m^n > A$, por maior que seja o numero dado A.

Se fôr $m < 1$, faremos,

$$m = \frac{1}{m'}, \quad m^n = \frac{1}{m'^n},$$

com $m' > 1$: de $m'^n > 1$ resulta $m^n < 1$; de $m'^{n+h} > m'^n$ resulta $m^{n+h} < m^n$; de $m'^n > \mathrm{A}$, $m^n < \frac{1}{\mathrm{A}}$, por muito grande que seja A ou muito pequeno o numero $\frac{1}{\mathrm{A}}$.

2.° *É sempre possivel determinar para o expoente positivo* n *um valor tão pequeno que a differença* $a^n - 1$ *seja menor que a menor quantidade assignavel.*

Se fôr $a > 1$, fazendo

$$(1 + \delta)^n > a,$$

como é possivel por menor que seja o numero positivo δ, temos

$$1 + \delta > a^{\frac{1}{n}}, \quad a^{\frac{1}{n}} - 1 < \delta.$$

Se fôr $a < 1$, de

$$(1 - \delta)^n < a$$

resulta

$$1 - \delta < a^{\frac{1}{n}}, \quad 1 - a^{\frac{1}{n}} < \delta,$$

por mais pequeno que seja δ. Em ambos os casos a potencia $a^{\frac{1}{n}}$ converge para a unidade quando n cresce indefinidamente.

Posto isto, vejamos o que deve entender-se pela potencia a^n, quando o expoente é irracional. Seja $\alpha = (\mathrm{U}, \mathrm{V})$ e u, v dois termos quaesquer das classes U e V, respectivamente; as duas classes formadas com termos taes como a^u, a^v definem um numero. Com effeito, se $a > 1$, $a^u < a^v$, por ser $u < v$, quaesquer que sejam u e v; se $a < 1$, é $a^u > a^v$. Demais a differença $a^v - a^u$ ou $a^u - a^v$ pode tornar-se menor que a menor grandeza assignavel; os expoentes u e v, por serem termos das series U e V, podem approximar-se indefinidamente um do outro. Mas, conforme fôr $a \gtrless 1$, assim teremos uma das expressões

$$a^v - a^u = a^u(a^{v-u} - 1)\,, \quad a^u - a^v = a^u(1 - a^{v-u})\,;$$

e como a^{v-u} converge indefinidamente para 1, á medida que o expoente $v - u$ diminue, qualquer d'estas differenças converge indefinidamente para zero. Fica assim provado que as duas classes

$$a^{u_1}\,,\quad a^{u_2}\,,\ldots$$

$$a^{v_1}\,,\quad a^{v_2}\,,\ldots$$

definem um numero; no caso de ser α racional, este numero é a^α, e por isso damos ainda ao mesmo numero esta significação quando α é irracional. Se fôr $a > 1$, escreveremos

$$a^\alpha = (a^{u_1},\, a^{u_2},\, \ldots;\, a^{v_1},\, a^{v_2},\, \ldots)\,;$$

se fôr $a < 1$, faremos

$$a^\alpha = (a^{v_1},\, a^{v_2},\, \ldots;\, a^{u_1},\, a^{u_2},\, \ldots)\,.$$

Consideremos só as bases maiores que a unidade, porque facilmente se concluiria de modo análogo para potencias de bases menores que 1; e sejam estas bases

$$\alpha = (\mathrm{U},\, \mathrm{V}),\ \alpha' = (\mathrm{U}',\, \mathrm{V}')\,;$$

por definição de potencia temos

$$a^{\alpha} = (a^{u_1}, a^{u_2}, \ldots ; a^{v_1}, a^{v_2}, \ldots) ,$$
$$a^{\alpha'} = (a^{u'_1}, a^{u'_2}, \ldots ; a^{v'_1}, a^{v'_1}, \ldots) ,$$

e pela regra de multiplicação

$$a^{\alpha} \times a^{\alpha'} = (a^{u_1} \times a^{u'_1}, a^{u_1} \times a^{u'_2} \ldots ; \ldots)$$
$$= (a^{u_1+u'_1}, a^{u_1+u'_2} \ldots ; \ldots) ,$$

visto que os expoentes u e v são racionaes. Mas

$$\alpha + \alpha' = (\mathrm{U} + \mathrm{U}', \mathrm{V} + \mathrm{V}')$$
$$= (u_1 + u'_1, u_1 + u'_2, \ldots ; \ldots) ;$$

e portanto

$$a^{\alpha+\alpha'} = (a^{u_1+u'_1}, a^{u_1+u'_2}, \ldots ; \ldots) ;$$

e, comparando com o desenvolvimento precedente, resulta

$$a^{\alpha} \times a^{\alpha'} = a^{\alpha+\alpha'} .$$

D'aqui

$$(a^{\alpha})^2 = a^{\alpha} \times a^{\alpha} = a^{2\alpha} ;$$

e em geral

$$(a^{\alpha})^m = a^{m\alpha} .$$

Esta fórmula subsiste quando o expoente m é fraccionario, porque

$$\left(a^{\frac{m}{n}\alpha}\right)^n = a^{m\alpha} = (a^{\alpha})^m .$$

donde, extrahindo a raiz m a ambos os membros, se tira

$$(a^{\alpha})^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}\alpha},$$

mesmo quando o expoente fraccionario seja negativo.

A fórmula ainda tem logar quando m é irracional. Porquanto, se é $m = \alpha'$ e α' o numero irracional acima considerado, será por definição

$$\begin{aligned}(a^{\alpha})^{\alpha'} &= [(a^{\alpha})^{u'_1}, (a^{\alpha})^{u'_2} \ldots ; \ldots] \\ &= (a^{\alpha u'_1}, a^{\alpha u'_2} \ldots ; \ldots),\end{aligned}$$

por serem racionaes os termos u'_1, u'_2, ...; mas é

$$\alpha\alpha' = (\alpha u'_1, \alpha u'_2, \ldots ; \ldots) :$$

logo será tambem

$$(a^{\alpha})^{\alpha'} = a^{\alpha\alpha'} .$$

166. *Transformação das egualdades e desegualdades.*—Se os numeros irracionaes α e α' forem definidos por classes, será, como se viu, $\alpha = \alpha'$ quando as classes de α forem identicas ás de α'; mas neste caso as classes de α' são indenticas ás de α porque umas e outras se compõem de elementos racionaes, logo será $\alpha' = \alpha$, que é o princípio (I) do n.° 156. Do mesmo modo se verificariam os princípios (II) e (III).

Para as desegualdades temos por definição que, se fôr $\alpha > \alpha'$, haverá na classe inferior de α um elemento u_n maior que um v'_n da classe superior de α'; podemos pois achar dois numeros racionaes a e b que, para valores de n superiores a um certo numero n', convenham ás desegualdades

$$u_n > a > b > v'_n ,$$

donde

$$u_n - v'_n > a - b ;$$

por outra parte, a differença entre dois elementos das duas classes de um terceiro numero k é tal que para todos os valores de $n > n'$

$$t_n - w_n < a - b ,$$

donde

$$u_n - v'_n > t_n - w_n , \quad u_n + w_n > v'_n + t'_n$$

ou $\alpha + k > \alpha' + k$. Portanto de $\alpha > \alpha'$ tira-se

$$\alpha - \alpha' > 0 , \quad \alpha' - \alpha < 0 , \quad -\alpha < -\alpha' , \quad -\alpha' > -\alpha ,$$

como no n.° citado.

Do mesmo modo, se forem dadas as desegualdades $\alpha > \alpha'$, $k > k'$, teremos, com a mesma notação, $u_n > v'_n$, $w_n > t'_n$, donde, por serem racionaes estes numeros,

$$u_n + w_n > v'_n + t'_n ,$$

ou $\alpha + k > \alpha' + k'$, que é o principio (V) do mesmo n.° 156. Analogamente se discorreria para o producto de desegualdades, etc.

CAPÍTULO III.

Raizes commensuraveis.

167. A resolução *algébrica* das equações tem por objecto traduzir os valores das raizes em *fórmulas*, compostas com o grau e os coefficientes da proposta. Assim, as raizes da equação do 2.° grau $ax^2+2bx+c=0$ são dadas pela expressão

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}.$$

A resolução *numérica* consiste na determinação de processos apropriados para obter em cada caso, exactamente ou por approximações successivas, o valor numérico das raizes de uma equação, cujo grau e cujos coefficientes são tambem dados numericamente.

Em geral, é impossivel a resolução algébrica das equações de grau superior ao 4.° A resolução numérica, de que nos vamos occupar primeiro, é sempre realisavel.

As raizes podem ser reaes ou imaginarias, e as reaes dividem-se ainda em commensuraveis e incommensuraveis.

As raizes commensuraveis podem tambem dividir-se em positivas ou negativas, e inteiras ou fraccionarias; a todas estas espécies convém o mesmo processo de cálculo. Com effeito as raizes negativas da proposta $f(x)=0$ são as raizes positivas da transformada em $-x$; e as suas raizes fraccionarias são as raizes inteiras de outra transformada, como vae ver-se.

Reduzindo o primeiro coefficiente á unidade e conservando inteiros os dos outros termos *(n.° 85)*, a equação

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots=0$$

não tem raizes fraccionarias. Com effeito, qualquer fracção irreductivel $\frac{a}{b}$, substituida por x, daria

$$\frac{a^n}{b^n}=-p_1\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}-p_2\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}-\cdots,$$

ou, multiplicando por b^{n-1},

$$\frac{a^n}{b}=-p_1a^{n-1}-p_2ba^{n-2}-\cdots;$$

e esta identidade não poderá subsistir, sendo inteiros os numeros a, b e os coefficientes p, porque o 1.° membro é uma fracção irreductivel.

Dada pois a equação

$$f(x) = p_0 x_n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \cdots + p_n = 0 ,$$

que pode ter raizes fraccionarias, resolveremos a sua transformada em

$$y = p_0 x ,$$

cujas raizes commensuraveis são todas inteiras. Se estas raizes forem

$$y = b_1 , \quad b_2 , \quad \ldots \quad b_r ,$$

onde r não pode ser maior do que n, as da proposta serão

$$a_1 = \frac{b_1}{p_0} , \quad a_2 = \frac{b_2}{p_0} , \quad \ldots \quad a_r = \frac{b_r}{p_0} ,$$

inteiras ou fraccionarias conforme os numeradores forem ou não divisiveis por p_0.

Entretanto os coefficientes d'aquella transformada serão, na maioria dos casos, muito grandes, tornando o cálculo excessivamente laborioso; por isso convirá começar pela indagação directa das raizes inteiras da proposta, pelo processo que ensinaremos no n.° seguinte.

Abaixa-se depois o grau da equação, dividindo-a pelos factores binomios correspondentes ás raizes achadas; e como algumas d'ellas podem ser múltiplas, repetem-se as mesmas operações em quanto fôr possivel fazê-lo.

Tendo reduzido d'este modo o grau da equação em tantas unidades quantas são as suas raizes inteiras, simples e múltiplas, á equação resultante se applicará aquella transformação, a fim de se de determinarem as raizes fraccionarias da proposta.

168. *Raizes inteiras.* — Dada a equação $f(x)=0$, viu-se (*n.° 65*) que, dividindo o 1.° membro por $x-a$, os coefficientes do quociente e o resto são expressos pelas relações

$$q_0=p_0\,,\quad q_1=aq_0+p_1\,,\quad q_2=aq_1+p_2\,,$$
$$\cdots q_{n-1}=aq_{n-2}+p_{n-1}\,,\quad \mathrm{R}=aq_{n-1}+p_n\,.$$

Se os coefficientes $p_0, p_1 \ldots p_n$ e o numero a forem todos inteiros, os coefficientes $q_0, q_1, \ldots q_{n-1}$ serão inteiros; se além d'isto a fôr raiz da equação, será $\mathrm{R}=0$. Nestes princípios se funda o *méthodo dos divisores*, tambem chamado *méthodo de Newton*, que vamos expôr.

Para $\mathrm{R}=0$ as egualdades precedentes dão

$$-q_{n-1}=\frac{p_n}{a}\,,\quad -q_{n-2}=\frac{p_{n-1}-q_{n-1}}{a}\,,\quad \cdots$$

$$-q_1=\frac{p_2-q_2}{a}\,,\quad -q_0=-p_0=\frac{p_1-q_1}{a}\,;$$

e, sendo a raiz inteira da equação, todos estes quocientes serão tambem numeros inteiros. Portanto a divide o ultimo termo da proposta, a somma do quociente d'esta divisão com o coefficiente da 1.ª potencia da incógnita, a somma do quociente d'esta nova divisão com o coefficiente da 2.ª potencia da incógnita e, em geral, a somma de cada um dos coefficientes da equação com o quociente da divisão precedente. O último d'estes quocientes é o coefficiente do primeiro termo de $f(x)$, com o signal trocado.

Reciprocamente, se todas estas condições forem satisfeitas, procurando o quociente da divisão do 1.° membro da proposta por $x-a$ chega-se ao resto zero; e portanto o inteiro a é raiz da equação dada.

Do que fica dito resulta que, para achar as raizes inteiras de uma equação, começaremos por formar todos os divisores do seu último termo; e sujeitaremos depois cada um d'estes numeros ás provas precedentes, rejeitando aquelles que conduzirem a algum quociente fraccionario ou a um quociente final differente de $-p_0$.

Advertiremos que:

1.° O processo exposto é applicavel tanto ás raizes inteiras positivas como ás negativas, sem ser necessario obter a transformada em $-x$. O coefficiente p_0 é sempre positivo; os restantes podem ser positivos, negativos ou nullos, e a raiz a póde ser positiva ou negativa; todos estes numeros devem ser tomados com o respectivo valor numérico e signal, na prova das raizes.

2.° Os divisores do último termo podem ser em grande numero; só experimentaremos os que ficarem comprehendidos entre os limites das raizes positivas e negativas, que se determinarão previamente.

3.° Os divisores ± 1 só podém vir a ser excluidos na última prova, pois que satisfazem a todas as outras. Por isso é preferivel, em vez de applicar o méthodo a estes dois numeros, ensaia-los directamente.

4.° Se a fôr raiz da equação $f(x)=0$, a divisão de $f(x)$ por $x-a$ faz-se sem resto e o quociente $\varphi(x)$ é um polynomio de coefficientes inteiros; donde resulta que, se α fôr um numero inteiro, tambem o será $\varphi(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-a}$. O divisor a do ultimo termo de $f(x)$, que não satisfizer a esta condição, não é raiz da proposta; o que poderá servir para excluir alguns d'estes divisores. O numero $\alpha=\pm 1$ é muito proprio para este objecto, por se aproveitarem os numeros $f(+1)$ e $f(-1)$ que já foram obtidos (3.°).

5.° Se estes dois numeros forem respectivamente divisiveis por $1-a$ e por $-1-a$, ou antes por $a-1$ e $a+1$, como a, por hypóthese, divide o último termo $f(0)$ de $f(x)$, as quantidades

$$f(+1)\,,\quad f(0)\,,\quad f(-1)$$

serão respectivamente divisiveis pelos tres numeros $a-1$, a, $a+1$. Ora um d'estes numeros admitte o divisor 3, como succede sempre com tres inteiros consecutivos quaesquer; portanto, se a equação tiver alguma raiz inteira, uma d'aquellas tres quantidades será divisivel por 3. A reciproca pode não ser verdadeira.

6.° Na prova de cada divisor os quocientes successivos são, como se viu, os coefficientes, com signal contrário e em ordem inversa, do quociente da divisão de $f(x)$ pelo binomio linear correspondente áquella raiz.

Seja dada, por exemplo, a equação

$$f(x)=3x^5-2x^4+9x^2-12x+4=0\ ;$$

facilmente se acharia,

$$f(+1)=2\ ,\quad f(0)=4\ ,\quad f(-1)=20\ ,$$

por onde se vê que a proposta não tem raizes inteiras. A transformada em $y=3x$ é *(n.° 85)*

$$F(y)=y^5-2y^4+81y^2-324y+324=0\ ,$$

que poderá ter alguma raiz inteira por ser $F(0)=324$ múltiplo de 3. Não pode ter a raiz 1 nem -1, por serem

$$F(1)=80\ ,\quad F(-1)=726\ .$$

Na determinação dos limites das raizes da equação $F(y)=0$, usaremos do méthodo de Bret para as positivas e do de Lagrange para as negativas. Acham-se assim os numeros

$$5\ ,\quad -10\ .$$

Entre os quinze divisores do ultimo termo $324=2^2\times 3^4$, estam comprehendidos naquelles limites os seguintes

$$2\ ,\quad 3\ ,\quad 4\ ,\quad -2\ ,\quad -3\ ,\quad -4\ ,\quad -6\ ,\quad -9\ ;$$

mas $4-1$, $-2-1$, $-6-1$ não são divisores de $F(1)$, e $3+1$, $-9+1$ não o são de $F(-1)$: d'onde se conclue que só devemos experimentar os numeros 2, -3, -4. Dá-se ao cálculo a seguinte disposição

$$
\begin{array}{rccc}
a= & 2 & -3 & -4 \\
\hline
-q_{n-1}=\dfrac{324}{a}= & 162\,, & -108\,, & -81 \\
-q_{n-2}=\dfrac{p_{n-1}-q_{n-1}}{a}= & -81\,, & +144 & » \\
-q_{n-3}= & 0\,, & -75 & \\
-q_{n-4}= & 0\,, & +25 & \\
-q_{n-5}= & -1 & » &
\end{array}
$$

Sobre um traço horizontal alinham-se os numeros que devemos ensaiar; por baixo de cada um e em columna vertical toma-se nota dos quocientes que se obteem dividindo successivamente por esse numero o termo conhecido, a somma d'este primeiro quociente com o coefficiente da segunda potencia da incógnita, etc. Quando alguma d'estas divisões não dá quociente inteiro, põe-se no logar d'este o signal », e abandona-se o divisor correspondente que não é raiz da equação. Se todas as divisões derem quocientes inteiros, o último ou é o coefficiente do primeiro termo da proposta, com signal contrário, ou é um numero differente; no primeiro caso o divisor correspondente é raiz, no segundo não.

No quadro precedente vê-se que o numero 2 satisfaz a todas as condições e é portanto raiz da equação. Com -3 o último quociente não é inteiro; -4 foi excluido na segunda prova. A resolução da transformada mostra que a proposta só tem a raiz commensuravel $x=\dfrac{2}{3}$.

O quociente da divisão de $F(y)=0$ por $y-2$ é *(n.° 65)*

$$y^4+81y-162=0\;;$$

e mudando novamente y em $3x$, a equação

$$x^4 + 3x - 2 = 0$$

dará as outras raizes da proposta. D'estas, duas são reaes e de signaes contrários, por ser negativo *(n.° 105, 2.°)*: o último termo da equação; duas são imaginarias, como indica a falta de dois termos consecutivos *(n.° 111)*.

169. Se a proposta admittir raizes eguaes, observaremos em primeiro logar que o numero das raizes commensuraveis differentes, que suppomos determinadas pela operação precedente, será inferior ao grau da equação. Dada esta hypóthese, dividiremos o primeiro membro da proposta pelo producto dos factores binomios correspondentes áquellas raizes, e verificaremos depois quaes d'essas mesmas raizes conveem á equação quociente. Procede-se depois com esta equação como se procedeu com a proposta, e assim successivamente.

Seja dada, por exemplo, a equação

$$f(x) = x^6 - x^5 - 15x^4 + 25x^3 + 50x^2 - 132x + 72 = 0 .$$

Os limites das raizes *(méth. de Lagrange)* são

$$+8 , \quad -8 ;$$

e os divisores do último termo, comprehendidos entre estes limites, são

$$2 , \quad 3 , \quad 4 , \quad 6 , \quad -2 , \quad -3 , \quad -4 , \quad -6 .$$

Ora, sendo $f(+1) = 0$ e $f(-1) = 216$, a proposta tem a raiz 1; e como 216 não é divisivel por $4+1$, $6+1$, $-6+1$, só verificaremos os divisores 2, 3, -2, -3, -4. Assim, temos as operações

2	3	− 2	− 3	− 4
36 ,	24 ,	− 36 ,	− 24 ,	− 18
− 48 ,	− 36 ,	+ 84 ,	+ 52	»
+ 1	»	− 67 ,	− 34	
+ 13		+ 21 ,	+ 3	
− 1		− 3 .	+ 4	
− 1		+ 2	− 1 .	

Os divisores 2 e −3 satisfazem a todas as provas das raizes; o divisor −2 dá quocientes inteiros em todas as operações, mas o último d'elles não é o coefficiente do primeiro termo da equação, com signal contrário. Logo a proposta tem as raizes **1**, **2** e −3; dividindo-a por

$$(x-1)(x-2)(x+3) \,,$$

acha-se a equação quociente

$$x^3-x^2-8x+12=0 \,,$$

que não tem já a raiz 1. Experimentemos as outras duas, e comecemos pela raiz 2, com o processo do n.º 64 que é preferivel neste caso:

1	−1	−8	+12
1	+1	−6	0

O resto zero mostra que 2 ainda é raiz; a nova equação quociente é

$$x^2+x-6=0 \,,$$

cujas raizes são

$$x=2\ ,\quad x=-3\ .$$

Assim concluimos que a proposta se decompõe em factores binomios pela seguinte forma

$$(x-1)(x+3)^2(x-2)^3\ ;$$

e tem a raiz simples $+1$, a raiz dupla -3 e a raiz tripla $+2$.

A equação é completa e tem todas as raizes reaes. D'estas, serão quatro positivas porque $f(x)$ tem quatro variações: uma é a unidade e tres são eguaes a 2. As duas restantes, correspondentes ás duas permanencias, são negativas e eguaes a -3.

170. O processo exposto neste capitulo póde servir, salvas as difficuldades do cálculo, para achar os *factores commensuraveis* do segundo grau de uma equação dada.

Representando um d'estes factores por x^2+px+q, a identidade

$$f(x)=(x^2+px+q)(p_0x^{n-2}+r_1x^{n-3}+r_2x^{n-4}+\cdots)$$

dará logar a n equações de condição que se obteem egualando de um e outro lado os coefficientes das mesmas potencias de x. Eliminando os coefficientes r_1, r_2, etc. entre estas equações, ficam duas em p e q; e depois uma só em p ou q, a qual deverá ser do grau $\frac{n(n-1)}{2}$, por ser este o numero de divisores do 2.º grau da proposta (*n.º 83*).

Se a proposta tiver factores commensuraveis do 2.º grau, a última equação terá uma raiz racional, pelo menos; e pondo esse valor do coefficiente, p ou q, na penúltima equação, poderemos conhecer o valor do outro coefficiente do trinomio respectivo.

Seja, por exemplo, a equação

$$x^4+3x-2=0\ .$$

A identidade

$$x^4+3x-2=(x^2+px+q)(x^2+r_1x+r_2)$$

conduz ás seguintes equações de condição:

$$r_1+p=0\ ,\quad r_2+pr_1+q=0\ ,\quad pr_2+qr_1=3\ ,\quad qr_2=-2\ .$$

As duas primeiras dão

$$r_1=-p\ ,\quad r_2=p^2-q;$$

substituindo nas duas últimas, vem

$$p^3-2pq=3\ ,\quad qp^2-q^2=-2\ .$$

Da primeira d'estas equações tira-se

$$q=\frac{p^3-3}{2p}\ ;$$

e substituindo na segunda vem finalmente

$$p^6+8p^2-9=0\ .$$

Esta equação, de grau $6=\frac{4(4-1)}{2}$, tem a raiz 1; e, por envolver só potencias pares de p, tem tambem a raiz -1. Para $p=1$, a expressão $q=\frac{p^3-3}{2p}$ dá $q=-1$; para $p=-1$, vem $q=2$. Assim aquella equação do 4.° grau é o producto dos dois factores correspondentes do 2.º grau, ou

$$x^4+3x-2\equiv(x^2+x-1)(x^2-x+2);$$

e as suas quatro raïzes são

$$x=-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5}),\quad x=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-7}):$$

duas reaes e duas imaginarias, como mostraria a regra de Descartes.

Exercícios.

66. Dada a equação

$$x^5+5x^4+x^3-16x^2-20x-16=0,$$

achar as raizes commensuraveis 2, -2, -4.

67. Dada a equação

$$2x^3-12x^2+13x-15=0,$$

achar a raiz 5.

68. Dada a equação

$$4x^4-11x^2+7x-6=0,$$

achar as raizes $\frac{3}{2}$ e -2.

69. Dada a equação

$$x^6+3x^5-36x^4-45x^3+93x^2+132x+140=0,$$

achar as raizes

$$2\,,\;5\,,\;-2\,,\;-7\,,\;-\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})\,.$$

70. Resolver a equação

$$2x^5+3x^4-31x^3+3x^2-43x+210=0\,;$$

limites, $+7$, -8; raizes, 2, 3, -5, $-\frac{1}{4}(3\pm\sqrt{-47}$.

71. Resolver a equação

$$x^6-12x^5+54x^4-104x^3+45x^2+108x-108=0\,;$$

raizes: -1 (simples), 2 (dupla), 3 (tripla).

72. Achar os factores trinomios commensuraveis da equação

$$x^4-3x^2-12x+5=0\,;$$

solução: $(x^2+3x+5)(x^2-3x+1)$.

CAPÍTULO IV.

Raizes incommensuraveis. Separação.

171. O problema das raizes incommensuraveis envolve duas questões distinctas: a *separação*, e o *cálculo numerico*. Diz-se que as raizes estão separadas quando são conhecidos numeros taes, que dois d'elles consecutivos comprehendem uma raiz da proposta, e só uma: esses numeros dão o *logar* das raizes. Para que a separação fique completa é necessario, no caso de haver raizes eguaes, determinar o grau de multiplicidade de cada uma.

Na resolução d'este problema supporemos a equação de coefficientes reaes. Se tivesse coefficientes imaginarios, ella reduzia-se á forma

$$f_1(x) + i f_2(x) = 0 ,$$

e a sua resolução viria a depender das duas $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$, de coefficientes reaes.

O cálculo das raizes commensuraveis está feito. Por isso consideraremos a equação desembaraçada das raizes d'esta espécie, tanto eguaes como deseguaes; isto é, supporemos o seu grau abaixado, por meio da divisão pelos factores binomios correspondentes áquellas raizes.

Posto isto, designemos por

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$$

numeros comprehendidos entre os limites das raizes da proposta $f(x) = 0$, e dispostos em ordem crescente de grandeza; substituamos successivamente x por cada um d'estes numeros em $f(x)$. Se dois resultados consecutivos, como $f(\gamma)$ e $f(\delta)$, tiverem o mesmo signal, entre γ e δ estará comprehendido um numero par de raizes reaes ou nenhuma; se aquelles resultados tiverem signaes contrarios, entre γ e δ haverá uma ou um numero impar de raizes (*n.º 104*). Podemos subdividir em muitos outros cada um d'estes intervallos, pela substituição de numeros intermédios aos considerados.

Chegaremos assim a determinar um certo numero i de intervallos, em que $f(x)$ muda de signal; mas o problema só ficará resolvido quando por outra parte soubermos que o numero das raizes reaes da proposta é i: por exemplo, quando fôr $i = n$, e n o grau de $f(x)$. Fóra d'este caso não podemos saber se as raizes estão separadas, ou se foram insufficientes as tentativas de separação; o que annulla, quasi, o valor do méthodo, que aliás seria conveniente pela sua simplicidade.

Seja, por exemplo, a equação

$$x^4 - 5x - 1 = 0 ;$$

a falta de dois termos consecutivos mostra que, pelo menos, duas raizes são imaginarias *(n.º 111)*. Os numeros $v=1$ e $v'=1$ de variações na proposta e na transformada em $-x$ mostram que ha duas raizes reaes, uma positiva e outra negativa. Substituindo x pelos numeros inteiros comprehendidos entre os limites -3 e 4, acha-se que a primeira d'essas raizes fica entre 2 e 3 e a segunda entre -1 e -2.

172. *Méthodo de Lagrange.* — O defeito do méthodo elementar das substituições consiste *(n.º 171)* na falta de um criterio por onde se conheça que em cada intervallo não ha raizes quando não ha mudança de signal, ou ha uma só no caso contrário.

Ora, se a_1 e $a_2 > a_1$ forem duas raizes comprehendidas entre os numeros α e $\beta > \alpha$, será $\beta - \alpha > a_2 - a_1$; e portanto, se a differença $\beta - \alpha$ fôr menor que a menor differença $a_2 - a_1$ de duas raizes quaesquer da proposta, entre α e β não poderá existir mais de uma d'estas raizes.

Para determinar um numero inferior áquella menor differença $a_2 - a_1$, Lagrange empregava a equação aos quadrados das differenças das raizes da proposta. Sendo h o limite inferior das raizes positivas d'aquella equação, correspondentes ás raizes reaes da equação dada $f(x) = 0$, e designando por l_1 e l_2 os limites inferior e superior d'estas últimas, os termos da progressão

$$l_1, l_1 + \sqrt{h}, \quad l_1 + 2\sqrt{h}, \text{ etc.}$$

satisfazem á condição de que se trata. Substituindo cada um d'elles em $f(x)$ e conservando unicamente os que produzem mudança de signal, teremos effectuado a separação requerida.

Este méthodo é perfeito, mas exige cálculos muito laboriosos. Cauchy mostrou que se póde dispensar a formação da equação aos quadrados das differenças, e separar as raizes pela substituição unicamente de numeros inteiros, operando do modo seguinte.

Designemos por $a_1, a_2, \ldots a_n$ todas as raizes da proposta

$f(x) = 0$, e por ρ o limite superior dos módulos respectivos; será *(n.º 61)*

$$\text{mod.}\, a_1 < \rho,\ \text{mod.}\, a_2 < \rho,\ \text{mod.}\, (a_2 - a_1) < 2\rho$$

$$\text{mod.}\, (a_2 - a_1)^2 < 4\rho^2$$

O grau da equação aos quadrados das differenças é $\frac{n(n-1)}{2}$; e o último termo da mesma equação, abstrahindo do signal, é o producto

$$K = (a_1 - a_2)^2 . (a_1 - a_3)^2 . . . (a_{n-1} - a_n)^2 ,$$

ou o discriminante de $f(x) = 0$ *(n.º 144)*. Por conseguinte, se a_1 e a_2 são duas raizes para as quaes $(a_2 - a_1)^2$ é uma quantidade positiva, será

$$\text{mod.}\, K < (a_2 - a_1)^2 \times (4\rho^2)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1} ;$$

donde se deduz

$$(a_2 - a_1)^2 > \frac{\text{mod.}\, K}{(4\rho^2)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}} .$$

Basta pois fazer h egual ao 2.º membro d'esta desegualdade.

Se a proposta não tem raizes eguaes, é K differente de zero; esta quantidade é o quadrado do determinante de Vandermonde *(n.º 49)*; e, se os coefficientes de $f(x)$ forem inteiros e o do 1.º termo é a unidade, as funcções symétricas S_α não teem denominadores *(n.º 131)*. Podemos, pois, suppôr $K = 1$ naquella desegualdade, e fazer

$$h = \frac{1}{(4\rho^2)^{\frac{n(n-1)}{2} - 1}} .$$

Se as raizes da proposta forem todas reaes, a equação aos quadrados das differenças respectivas só tem raizes positivas.

A differença $\sqrt{h}$ será em geral, inferior á unidade; mas mudando x em $y\sqrt{h}$ e designando por b_1 e b_2 as raizes da transformada $F(y)=0$ correspondentes ás raizes a_1 e a_2 da proposta, será

$$|b_1-b_2|=\frac{|a_1-a_2|}{\sqrt{h}}>1,$$

por ser $\sqrt{h}<|a_1-a_2|$. Na separação das raizes da transformada bastará então empregar numeros da ordem natural.

Como applicação directa do méthodo de Lagrange, consideremos a equação $x^3-7x+7=0$. O seu discriminante é *(n.º 144)*

$$K=\begin{vmatrix} & 1 & 0 & -7 & 7 \\ 1 & 0 & -7 & 7 & \\ 3 & 0 & -7 & & \\ & 3 & 0 & -7 & \\ & & 3 & 0 & -7 \end{vmatrix},$$

ou, sommando a 1.ª linha com a última,

$$K=\begin{vmatrix} & 1 & 0 & -7 & 7 \\ 1 & 0 & -7 & 7 & \\ 3 & 0 & -7 & & \\ & 3 & 0 & -7 & \\ & 1 & 3 & -7 & \end{vmatrix}.$$

Desenvolvendo este determinante pela última columna, onde todos os elementos são nullos menos o primeiro, e pondo em evidencia o factor 7 da penúlima columna, acha-se

$$K = 49 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -7 & \\ & 3 & 0 & -1 \\ & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 49 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -7 & 1 \\ 3 & 0 & -7 & \\ 1 & 3 & -7 & \\ 1 & 1 & -4 & \end{vmatrix},$$

onde o segundo determinante resulta do primeiro pela somma da 1.ª linha com a 3.ª e com a 4.ª Desenvolvendo do mesmo modo pela última columna, e depois pela 1.ª linha, vem

$$K = -49 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -49(14 - 15) = 49 .$$

Por outra parte o limite superior dos modulos *(n.º 96)* é o menor numero que torna positiva a expressão $\rho^3 - 7\rho - 7$, ou $\frac{7}{2}$, d'onde $2\rho = 7$ e

$$h = \frac{49}{7^4} = \frac{1}{7^2}, \quad \sqrt{h} = \frac{1}{7}.$$

A transformada seria, pois,

$$y^3 - 343y + 2401 = 0 ,$$

onde as raizes ficam separadas pela serie natural dos numeros comprehendidos entre os limites.

173. Os theoremas de Rolle e de Sturm conduzem a outros processos de separação. O primeiro já foi indicado *(n.º 113)*, e sobre elle não são necessarios maiores desenvolvimentos. É perfeito, quando são commensuraveis todas as raizes reaes da equação derivada.

O processo de Sturm nada deixa a desejar sob o ponto de vista especulativo; mas é, como o de Lagrange, extremamente laborioso. No exemplo

$$x^6+x^5-x^4-x^3+x^2-x+1=0\ ,$$

que se encontra no tratado de Serret, as funcções são, além da proposta,

$$6x^5+5x^4-4x^3-3x^2+2x-1\ ,$$

$$17x^4+14x^3-27x^2+32x-35\ ,$$

$$-792x^3+2052x^2-2058x+127\ ,$$

$$\text{etc.}\ ;$$

e a última, embora neste caso não seja necessaria, seria um numero de quarenta e quatro algarismos.

Formadas as funcções de Sturm, a substituição de x por dois numeros α e $\beta>\alpha$ dá duas linhas de resultados com os respectivos signaes; no intervallo de α a β haverá tantas raizes reaes quantas são as perdas de variações na segunda linha, comparada com a primeira. Não se fazem tentativas inuteis; abandona-se o intervallo que não dá perda de variações; naquelle em que se perde só uma variação as raizes estão separadas; nos outros empregam-se substituições intermédias, até completar a separação, que ha de infallivelmente conseguir-se.

Em geral, empregam-se nestas substituições numeros em progressão decimal, para facilitar os cálculos.

174. *Méthodo de Fourier.* — Dada a equação $f(x)=0$ de grau n, e tendo formado as *funcções de Fourier*

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ ..f^m(x),...f^n(x),$$

viu-se *(n.º 112)* que os resultados da substituição de x nestas funcções por $-\infty$, ou pelo limite $-l$ das raizes negativas da proposta, apresentam n variações de signal; os resultados da substituição por $+\infty$, ou pelo limite l das raizes positivas, só dão permanencias. Vejamos como aquellas n variações vão desapparecendo, quando x cresce por valores contínuos.

É claro que nenhuma alteração pode dar-se na successão dos signaes, senão quando alguma das funcções passa por zero *(n.º 104)*: o que dá logar aos casos seguintes.

1.º *Caso: passa por zero unicamente a primeira funcção $f(x)$.* Seja a o valor de x que annulla $f(x)$ e h um numero positivo tão pequeno que entre $a-h$ e $a+h$ não haja numero algum, senão o mesmo a, que annulle alguma das funcções consideradas: o que exprimiremos representando esses dois limites respectivamente por $<a$ e $>a$, como faz Fourier. Vimos *(n.º 112)* que $f(x)$ e $f'(x)$ teem signaes contrarios para $x<a$ e o mesmo signal para $x>a$, o que dá uma d'estas disposições:

$$\begin{array}{ll|ccc|ccc}
 & & f(x), & f'(x) & & & f(x), & f'(x) \\
\multirow{3}{*}{x} & (<a) & + & -\cdots & & & - & +\cdots \\
 & (a) & 0 & -\cdots, & & \text{ou} & 0 & +\cdots \\
 & (>a) & - & -\cdots & & & + & +\cdots
\end{array}$$

Em ambos os casos a última linha tem menos *uma* variação do que a primeira.

2.° *Caso: passa por zero unicamente a funcção intermédia* $f^m(x)$. Conservando a notação precedente, $f^m(x)$ e a sua derivada $f^{m+1}(x)$ teem signaes contrários para $x<a$ e o mesmo signal para $x>a$; $f^{m-1}(a)$ pode ter qualquer signal, e as tres funcções apresentarão alguma das disposições seguintes:

$$
\begin{array}{lllcccl}
 & & & f^{m-1}(x), & f^m(x), & f^{m+1}(x) & \\
\multirow{3}{*}{x} & (<a) & \cdots & + & - & + & \cdots \\
 & (a) & \cdots & + & 0 & + & \cdots \\
 & (>a) & \cdots & + & + & + & \cdots \\
\multirow{3}{*}{x} & (<a) & \cdots & - & - & + & \cdots \\
 & (a) & \cdots & - & 0 & + & \cdots \\
 & (>a) & \cdots & - & + & + & \cdots
\end{array}
$$

ou alguma das duas combinações que se obtem trocando todos os signaes precedentes. Logo, quando se annulla uma só funcção intermédia, desapparecem *duas* variações ou *nenhuma*. No primeiro caso a proposta tem duas raizes imaginárias, além das que podem ser indicadas em outros logares; visto como, por mais que se apertem os limites, se perdem sempre duas variações, que não reapparecem mais, e $f(x)$ não passa por zero. No segundo caso uma variação da linha superior apparece na linha inferior transportada para o logar immediato, á esquerda.

3.° *Caso: passam por zero* p *funcções successivas.* Não podem ser as primeiras por que a proposta, por hypóthese, não tem raizes eguaes; são pois intermédias, porque a última $f^n(x)$ é um numero positivo. Sejam

$$f^m(a)=0\ ,\quad f^{m+1}(a)=0\ldots .f^{m+p-1}(a)=0\ ;$$

isto é, supponhamos que $x=a$ annulla $f^m(x)$ e as suas $p-1$

derivadas consecutivas; a equação $f^m(x)=0$ tem p raizes eguaes a a, e o seu primeiro membro muda ou não de signal, na passagem por $x=a$, conforme p fôr impar ou par *(n.º 104)*; as funcções $f^{m-1}(x)$ e $f^{m+p}(x)$ conservam o mesmo signal desde $x<a$ até $x>a$.

Se p é par, ou $p=2k$, as funcções $f^{m-1}(x)$ e $f^m(x)$ apresentam a mesma combinação de signaes na linha $<a$ e na linha $>a$; o numero de variações perdidas nas funcções

$$f^{m-1}(x),\quad f^m(x),\ldots f^{m+p-1}(x),\quad f^{m+p}(x)$$

é *(n.º 112)* $p=2k$.

Se p fôr impar, ou $p=2k'+1$, as duas funcções $f^{m-1}(x)$ e $f^m(x)$ darão uma variação na linha superior e uma permanencia na inferior, ou vice-versa; o numero de variações perdidas é no primeiro caso $p+1=2k'+2$, e no segundo $p-1=2k'$.

4.º *Caso: passam por zero varios grupos de funcções.* Sommam-se as variações perdidas em cada grupo.

Todos estes resultados melhor se comprehenderão nos exemplos seguintes.

Exemplo 1.º

$(<a)$	$--+-+-+-+$	7 *var.*
(a)	$--0\,0\,0\,0+-+$	
$(>a)$	$--+++++-+$	3 *var.*

A linha média é dada e o último signal é sempre $+$. Para formar a linha superior repetimos os dois primeiros e os tres últimos signaes; sobre o último zero pomos o signal contrário ao que lhe fica á direita; sobre o penultimo zero o signal contrário ao antecedente, e continuamos a alternar assim os signaes sobre os zeros restantes. Para formar a linha inferior repetimos novamente os dois primeiros e os tres últimos signaes; por baixo dos zeros pomos sempre o signal que está á direita do último. Neste exemplo as funcções perdem 4 variações na passagem de x por a, e a equação tem pelo menos 4 raizes imaginárias.

Exemplo 2.º

$(<a)$	$+-+-+-++$	6 *var.*
(a)	$+-000-++$	
$(>a)$	$+------++$	2 *var.*

Na linha média ha um numero impar de zeros, 3, entre signaes eguaes; perdem-se portanto $3+1$ variações, e a proposta tem pelo menos 4 raizes imaginárias.

Exemplo 3.º

$(<a)$	$+-+-++-+---+-+$	10 *var.*
(a)	$0-00+000--0+0+$	
$(>a)$	$--+++------++++$	3 *var.*

Na linha média o primeiro zero corresponde á primeira funcção, onde se perde 1 variação; ha depois um grupo de dois zeros, onde se perdem 2 variações; segue-se um grupo de tres zeros entre signaes contrarios, onde se perdem $3-1$ variações; depois um zero onde não se perde nenhuma; finalmente outro zero onde se perdem 2: ao todo, 7 variações perdidas. A equação tem a raiz real a e pelo menos 6 imaginarias; como na linha inferior se encontram 3 variações, haverá ainda pelo menos mais uma raiz real.

175. Pela discussão precedente vê-se que o numero de variações perdidas, quando passam por zero funcções intermédias, é sempre *par*. Quando a proposta passa por zero as variações desapparecem *uma a uma*.

*

entre α e β; a equação $f''(x)=0$ não tem raiz alguma entre estes limites. O signal de $f'''(\alpha)$ será opposto *(n.º 112)* ao de $f'(\alpha)$, egual ao de $f'(\beta)$ e não muda no intervallo; o signal de $f(\alpha)$ será o de $f''(\alpha)$, para que na primeira linha haja duas variações nos tres primeiros signaes, e o mesmo de $f(\beta)$ para que nesta parte da segunda linha haja só permanencias. Teremos assim uma das disposições seguintes

$$\begin{array}{cccc} & f(x), & f'(x), & f''(x) \\ (\alpha) & + & - & + \\ (\beta) & + & + & + \end{array}\Bigg\}, \qquad \begin{array}{ccc} f(x), & f'(x), & f''(x) \\ - & + & - \\ - & - & - \end{array}\Bigg\}.$$

Consideremos a primeira.

A proposta ha de ter duas raizes ou nenhuma entre os limites α e β. Se fosse conhecido o valor *exacto* da raiz γ da equação $f'(x)=0$, a ambiguidade desappareceria *(n.º 113)*: se $f(\alpha)$ e $f(\gamma)$ tivessem signaes contrários, as duas raizes seriam reaes e ficariam separadas nos intervallos $(\alpha\gamma)$ e $(\gamma\beta)$; se $f(\alpha)$, $f(\gamma)$ e $f(\beta)$ tivessem o mesmo signal, as duas raizes faltariam no intervallo $(\alpha\beta)$. Se o valor de γ só fôr conhecido por approximação, aquella indicação não será segura, porque cada uma das raizes pode ser mais próxima de γ do que essa approximação, qualquer que ella seja; procederemos então do modo seguinte.

Se as duas raizes indicadas são reaes, representando-as por x_1 e $x_2>x_1$, a disposição por ordem crescente de grandeza d'estes numeros, dos limites α, β e da raiz γ será *(n.º 113)*

$$\alpha, \quad x_1, \quad \gamma, \quad x_2, \quad \beta.$$

Considerando, como dissemos, o primeiro grupo de signaes, $f(x)$ será positiva e decrescente desde $x=\alpha$ até $x=x_1$; mínima para $x=\gamma$; negativa desde $x=x_1$ até $x=x_2$; novamente positiva, mas agora crescente, desde $x=x_2$ até $x=\beta$ *(n.º 106)*.

Façamos $x_1 - \alpha = h$; será *(n.º 114)*

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + hf'(\alpha + \theta h) = 0 \ ,$$

donde

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha + \theta h)}, \quad x_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha + \theta h)} \ ,$$

sendo θ positivo e <1. Ora é $\alpha + \theta h < \gamma$ e portanto $f'(\alpha + \theta h) < 0$; por outra parte, é $f(\alpha) > 0$ e $f'(\alpha + \theta h) > f'(\alpha)$, por ser a funcção f' crescente no intervallo: logo é

$$x_1 > \alpha + \frac{f(\alpha)}{-f'(\alpha)} \ .$$

Façamos, do mesmo modo, $\beta - x_2 = k$; teremos

$$f(\beta - k) = f(\beta) - kf'(\beta - \theta' k) = 0 \ ,$$

donde

$$k = \frac{f(\beta)}{f'(\beta - \theta' k)}, \quad x_2 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta - \theta' k)} \ ,$$

sendo θ' positivo e <1. Ora é $\beta - \theta' k > \gamma$ e portanto $f'(\beta - \theta' k) > 0$. Por outra parte, é $f(\beta) > 0$ e $f'(\beta - \theta' k) < f'(\beta)$: logo

$$x_2 < \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} \ .$$

Mas é tambem $x_1 < x_2$: por onde finalmente teremos

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} + \frac{f(\alpha)}{-f'(\alpha)} < \beta - \alpha \ .$$

Tomando estes dois quocientes em valor absoluto, se um d'elles ou a sua somma fôr egual ou maior que a differença $\beta-\alpha$ dos limites, concluiremos que neste intervallo faltam as duas raizes presumidas; se essa somma fôr menor que $\beta-\alpha$, estreitaremos o intervallo d'estes limites, que assim se mostra serem muito desviados. Substitue-se pois um numero α' intermédio a α e β, e determina-se pelo signal de $f'(\alpha')$ em qual dos dois novos intervallos $(\alpha\alpha')$ e $(\alpha'\beta)$ se encontra a raiz γ da equação $f'(x)=0$. Nesse intervallo, $(\alpha'\beta)$ por exemplo, verificam-se todas as condições que supposemos no intervallo primitivo; submettemo-lo ás mesmas provas, e abandonamos o outro intervallo $(\alpha\alpha')$. D'este modo é claro que os novos limites se approximam de γ; ao fim de poucas tentativas teremos separado as raizes, se são reaes, ou formado dois coefficientes

$$\frac{f(\alpha')}{-f'(\alpha')},\ \frac{f(\beta)}{f'(\beta)}$$

taes que, approximando-se successivamente de

$$\left|\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}\right|=+\infty,$$

um d'elles ou a sua somma egualará, ou excederá, a differença $\beta-\alpha'$.

Com a segunda disposição dos signaes obteriamos os mesmos resultados, como facilmente se reconhecerá reproduzindo a discussão precedente.

II. Tendo examinado o caso de serem os tres primeiros índices

$$2\,,\quad 1\,,\quad 0\,,$$

vejamos agora como se procede nos outros casos em que é $\Delta=2$, e ainda quando é $\Delta>2$.

Percorrendo a linha dos índices da direita para a esquerda, o primeiro índice 1, correspondente a uma funcção $f^m(x)$, terá á esquerda o índice 2. Por quanto o índice 1 só pode ser precedido: por 1, o que é contra a hypóthese; por 0 e neste caso, como é $\Delta \overline{\gtrless} 2$, haveria para a esquerda outra vez o índice 1, egualmente contra a hypóthese; ou por 2.

Se aquelle índice 1 não for seguido por zero, estreitaremos o intervallo, como acima se disse *(n.º 175)*, de modo que a equação $f^{m+1}(x)=0$ não tenha raiz alguma entre os novos limites α' e β'. Esta operação leva-nos a considerar tres novos intervallos: 1.º $(\alpha\alpha')$ onde a equação $f^m(x)=0$ não pode ter raiz alguma, porque a única raiz que ella tem entre α e β encontra-se entre α' e β'; portanto no intervallo $(\alpha\alpha')$ o índice relativo a $f^m(x)$ é zero e, se no mesmo intervallo se encontra para a esquerda um índice egual a 1, esse índice corresponde a uma funcção menos elevada do que $f^m(x)$. 2.º $(\beta\beta')$, onde chegamos ás mesmas conclusões. 3.º $(\alpha'\beta')$, onde se pode encontrar para a esquerda outro índice 1, relativo a uma funcção menos elevada do que $f^m(x)$, ou não.

Por esta forma conseguimos recuar o primeiro índice egual á unidade para o logar de uma funcção menos elevada do que $f^m(x)$, excepto no intervallo $(\alpha'\beta')$ quando nelle tem logar a disposição seguinte dos índices

$$\begin{array}{ccc} f^{m-1}(x) & f^m(x) & f^{m+1}(x) \\ 2 & 1 & 0 \end{array},$$

que é o caso (I) applicado á equação $f^{m-1}(x)=0$; esta equação pode ter então duas raizes réaes ou nenhuma entre α' e β', o que se reconhecerá pela regra dada. No primeiro caso separaremos as raizes; uma ficará comprehendida entre α' e um certo numero s e a outra entre s e β', e a cada um d'estes intervallos corresponderá uma linha de índices em que o primeiro egual a 1 estará á esquerda de $f^m(x)$ e pelo menos corresponderá a $f^{m-1}(x)$.

Se a equação $f^{m-1}(x)=0$ não tiver raizes reaes entre α' e β', o mesmo acontecerá ás equações $f^{m-2}(x)=0$, $f^{m-3}(x)=0$,

... $f'(x)=0$, $f(x)=0$. Com effeito, as duas raizes indicadas faltam (I) porque a raiz real da equação $f^m(x)=0$, substituida em $f^{m-1}(x)$ e $f^{m+1}(x)$ dá resultados do mesmo signal; isto é, a linha dos signaes perde duas variações na passagem de x por aquelle valor e a cada uma d'aquellas equações faltam duas raizes no intervallo considerado *(n.º 174, 2.º)*. Portanto o índice de cada uma das funcções $f(x)$, $f'(x)$, ... $f^{m-1}(x)$ tem uma parte egual a **2**, que se pode supprimir porque cada índice só representa um limite superior do numero de raizes reaes que a equação correspondente pode ter no intervallo; depois de supprimida esta parte, o índice de $f^{m-1}(x)$ será zero, de modo que o primeiro índice **1** se encontrará para a esquerda d'esta funcção.

Pode tambem acontecer que a equação $f^{m-1}(x)=0$ tenha duas raizes eguaes entre α' e β'. A conclusão é a mesma que no caso das raizes imaginárias; agora seriam as funcções $f^{m-1}(x)$ e $f^m(x)$ que passariam conjunctamente por zero, que é o caso *(n.º 174, 3.º)* de p par e egual a **2**.

177. Seja, por exemplo, a equação

$$x^5-3x^4-24x^3-95x^2-46x-101=0\ ,$$

tratada por Fourier na sua obra *Analyse des équations*. As funcções são

$$\begin{aligned}
f(x)&=x^5-3x^4-24x^3+95x^2-46x-101\\
f'(x)&=5x^4-12x^3-72x^2+190x-46\\
f''(x)&=20x^3-36x^2-144x+190\\
f'''(x)&=60x^2-72x-144\\
f^{\text{iv}}(x)&=120x-72\\
f^{\text{v}}(x)&=120\ ,
\end{aligned}$$

onde substituiremos x por numeros com que se opere facilmente.

Empregando os numeros 0, -1, -10, vê-se que as funcções, para este último limite, dão só variações: logo, -10 é o limite das raizes negativas. Experimentando os numeros 1 e 10, este último só dá permanencias: e portanto 10 é o limite das raizes positivas.

Assim temos

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{\text{IV}}(x)$	$f^{\text{V}}(x)$	
(-10)	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	5 *var.*
(-1)	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4 *var.*
(0)	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	3 *var.*
(1)	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	3 *var.*
(10)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0 *var.*

No intervallo entre -10 e -1 ha uma raiz real; outra entre -1 e 0; entre 1 e 10 estam indicadas tres, que podem ser todas reaes, ou uma real e duas imaginárias.

Os indices entre (1) e (10) são

$$3\,,\ 2\,,\ 2\,,\ 1\,,\ 0\,,\ 0\,;$$

o primeiro egual a 1 corresponde a $f'''(x)$, é seguido por zero e precedido por 2. Applicando a regra do n.° anterior ás funcções correspondentes

$$f''(x)\,,\quad f'''(x)\,,\quad f^{\text{IV}}(x)\,,$$

achamos $f''(1)=30$, $f'''(1)=156$, $f''(10)=15150$, $f'''(10)=5136$, em valores absolutos; e porque é

$$\frac{30}{156}+\frac{15150}{5136}<10-1\,,$$

concluímos que aquelles limites são muito desviados. Antes de substituir numeros intermédios, examinaremos se $f''(x)$ e $f'''(x)$ teem algum divisor commum; verificamos que não.

Substituindo então nas funcções numeros comprehendidos entre 1 e 10, teremos

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{\text{IV}}(x)$	$f^{\text{V}}(x)$	
(1)	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	3 *var.*
(2)	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	3 *var.*
(3)	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	1 *var.*
(10)	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0 *var.*

Entre 1 e 2 não ha raizes; devemos pois procurar as tres raizes entre 2 e 10. Comparando estes dois limites, encontram-se os índices

$$3\,,\quad 2\,,\quad 1\,,\quad 1\,,\quad 0\,,\quad 0\,.$$

O primeiro egual a 1 é precedido por 2, como deve ser; mas não é seguido por 0, e devemos portanto dividir immediatamente o intervallo. Para isso substitue-se o numero 3, que dá duas novas linhas de índices; e entre 3 e 10 os índices são

$$1\,,\quad 1\,,\quad 1\,,\quad 0\,,\quad 0\,,\quad 0\,,$$

por onde sê que neste intervallo ha uma raiz da proposta. Entre 2 e 3 os índices são

$$2\,,\quad 1\,,\quad 0\,,\quad 1\,,\quad 0\,,\quad 0\,;$$

o primeiro egual a 1 é seguido por 0, e devemos applicar a este intervallo a regra do n.° anterior. Ora é

$$f(2)=21\,,\quad f'(2)=30\,,\quad f(3)=32\,,\quad f'(3)=43\,,$$

abstrahindo dos signaes; e sendo

$$\frac{21}{30}+\frac{32}{43}>3-2,$$

concluímos que são imaginárias as duas raizes indicadas entre 2 e 3. A separação está feita.

Exercícios.

73. $x^4-4x^3-3x+23=0$: limites 0 e 10; na passagem por zero perdem-se duas variações (regra do signal duplo); na passagem por $x=1$ não se perde nenhuma; uma raiz entre 2 e 3, outra entre 3 e 10.

74. $x^5+x^4+x^2-25x-36=0$: limites -10 e 10; separam-se as raizes com os numeros -2, -1, 0, 1.

75. $x^6-12x^5+60x^4+123x^2+4567x-89012=0$: limites -10 e 10; separam-se as raizes com os numeros -1, 0, 1.

76. $x^5-10x^3+6x+1=0$: limites -10 e 10. Separar as raizes.

CAPÍTULO V.

Cálculo das raizes incommensuraveis.

178. Seja a proposta $f(x)=0$, desembaraçada de raizes commensuraveis e sem raizes eguaes; supponhamos que são conhecidos dois numeros α e $\beta>\alpha$, entre os quaes está comprehendida uma raiz irracional x_1 d'aquella equação, e representemos por γ um numero $>\alpha$ e $<\beta$. Fazendo $x=\gamma$ em $f(x)$, pelo signal do resultado saberemos se a raiz procurada x_1 fica entre α e γ ou entre γ e β; e o novo intervallo virá substituir o primeiro nas indagações subsequentes. Proseguindo da mesma maneira, iremos estreitando os limites, isto é, obtendo numeros cada vez mais próximos do valor da raiz.

Este processo, muito laborioso, torna-se impraticavel depois das primeiras approximações e não se emprega senão para determinar os primeiros algarismos de dizima. Continua-se depois o cálculo por méthodos mais expeditos, que vamos expôr.

179. *Méthodo de Newton.* — Supponhamos que pelo processo de substituições reconhecemos que a raiz x_1 fica entre dois limites α e $\beta > \alpha$, cuja differença é uma pequena fracção; seja γ um numero $> \alpha$ e $< \beta$ e façamos $x_1 = \gamma + h$. A quantidade h será dada pela equação $f(\gamma + h) = 0$, ou

$$f(\gamma) + hf'(\gamma) + \frac{h^2}{2}f''(\gamma) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(\gamma) = 0 .$$

Ora, por hypóthese, h é menor que a pequena fracção $\beta - \alpha$, e portanto h^2, h^3, ... h^n são quantidades muito pequenas em comparação de h; o mesmo poderá dizer-se dos termos que teem estas quantidades por factores, visto que na equação precedente os denominadores são numeros maiores que 1. Suppondo pois que podemos desprezar estes termos, isto é, contentando-nos em primeira approximação com os algarismos em que elles não influem, teremos, para determinar h, a equação $f(\gamma) + hf'(\gamma) = 0$, donde

$$h = -\frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} .$$

Teremos assim um valor approximado de x_1, que designaremos por

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} ;$$

com este valor obteriamos, pelo mesmo processo, uma segunda approximação,

$$\gamma_1 - \frac{f(\gamma_1)}{f'(\gamma_1)} = \gamma_2 ,$$

e assim por deante.

Estes resultados nem sempre representam uma approximação progressiva, e o méthodo tem de ser cautelosamente empregado. Evidentemente as últimas expressões presumem que $f'(\gamma)$, $f'(\gamma_1)$, etc., são differentes de zero; e estando os numeros γ, γ_1, etc., comprehendidos entre α e β, só podemos assegurar que aquella condição se verifica, quando neste intervallo não se encontra raiz alguma da equação $f'(x) = 0$. Por este motivo devemos previamente estreitar os limites, até chegar a dois taes que entre elles não haja raiz alguma d'aquella equação; e neste caso existirá no intervallo considerado uma só raiz da proposta, segundo o theorema de Rolle.

Applicando este méthodo á equação

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0 ,$$

facilmente se verifica que ella tem uma raiz entre 2 e 2,5; fazendo $x = 2{,}2$, vê-se que a raiz fica entre 2 e 2,2, não podendo differir de 2,1 em mais de 0,1. Façamos então $\gamma = 2{,}1$; teremos

$$\gamma_1 = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = 2{,}1 - \frac{0{,}061}{11{,}23} = 2.0946 ,$$

e a raiz procurada fica entre 2 e γ_1. Na segunda approximação teriamos

$$\gamma_2 = \gamma_1 - \frac{f(\gamma_1)}{f'(\gamma_1)} = \gamma_1 - 0{,}00004852 = 2{,}09455148 .$$

A primeira approximação deu $\gamma_1 = 2,0946$; sabemos que a raiz fica entre 2 e 2,0946, sem sabermos de qual d'estes limites ella se approxima mais. Só a segunda approximação nos mostra que o último algarismo do segundo limite está errado por excesso.

180. O méthodo newtoniano é incompleto. Não pode applicar-se indifferentemente a qualquer dos dois limites, nem determina o grau de approximação de cada resultado. Estas duas questões foram consideradas por Fourier que as resolveu do modo seguinte:

I. Pelo que fica dito no n.° antecedente, devemos começar pela separação das raizes e estreitar cada intervallo até que entre os respectivos limites não haja raiz alguma da equação $f'(x) = 0$.

Depois estreitaremos ainda os limites, se fôr necessário, até que a equação $f''(x) = 0$ não tenha entre elles raiz alguma. É possivel realizar esta condição pelo processo indicado para as raizes da equação $f'(x) = 0$, excepto quando a proposta e $f''(x) = 0$ tiverem uma raiz commum no intervallo considerado; mas neste caso haverá um divisor $\varphi(x)$ commum a $f(x)$ e $f''(x)$, e em vez da equação dada resolveremos as duas mais simples

$$\varphi(x) = 0, \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0:$$

por onde se vê que podemos sempre suppôr que os tres primeiros índices de Fourier, em cada intervallo, são

$$1, \ 0, \ 0.$$

Nestas circumstancias procederemos á approximação sem incertezas, como vamos ver. Para fixar idêas, supponhamos que α e $\beta > \alpha$ são os limites da raiz procurada x_1, e que os primeiros signaes das duas linhas (α) e (β) são

$$\begin{array}{cccc} & f(x) & f'(x) & f''(x) \\ (\alpha) & + & - & + \\ & 1 & 0 & 0 \\ (\beta) & - & - & +. \end{array}$$

Pondo $x_1 = \alpha + h$, viria

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + hf'(\alpha+\theta h) = 0 \ ,$$

donde

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha+\theta h)} \ , \quad x_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha+\theta h)} \ ,$$

com θ positivo e < 1. Ora $f(\alpha)$ e $f'(\alpha)$ teem signaes contrarios, e portanto é $\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha+\theta h)} < 0$, visto que $f'(x)$ não muda de signal em todo o intervallo; mas $f''(x)$ é positiva, e portanto $f'(x)$ é crescente, desde $x = \alpha$ até $x = \beta$: logo será

$$-f'(\alpha+\theta h) < -f'(\alpha)$$

e teremos simultaneamente

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{f(\alpha)}{-f'(\alpha)} > \alpha, \quad \alpha_1 < x_1 \ .$$

Assim o novo limite α_1 é mais próximo de x_1 do que α, e no mesmo sentido; por onde viriam agora as duas linhas de signaes

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
(α_1)	$+$	$-$	$+$
	1	0	0
(β)	$-$	$-$	$+$

exactamente com a disposição anterior. Applicando o mesmo raciocinio aos limites α_1 e β, teriamos na segunda approximação

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{f(\alpha_1)}{-f'(\alpha_1)} > \alpha_1, \quad \alpha_2 < x_1 .$$

Empregando indefinidamente o mesmo processo obteriamos uma successão de numeros

$$\alpha, \alpha_1 \alpha_2, \ldots \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots$$

crescentes e menores do que a raiz procurada.

Se, porém, tivessemos feito $x_1 = \beta - k$, donde

$$f(\beta) - k f'(\beta - \theta' k) = 0, \quad k = \frac{f(\beta)}{f'(\beta - \theta' k)} ,$$

não poderiamos affirmar que

$$\beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\beta)} ,$$

fosse mais proximo de x_1 do que β e no mesmo sentido. Com effeito, é $\beta_1 < \beta$ porque $f(\beta)$ e $f'(\beta)$ teem o mesmo signal; mas, por ser $f''(x)$ positivo, é $f'(x)$ crescente em todo o intervallo, e portanto

$$|f'(\beta)| < |f'(\beta - \theta' k|:$$

logo é $\beta_1 < x_1$, e o novo limite é em sentido contrario do antigo; podendo até ser $\beta_1 < \alpha$.

Porém, se na expressão de k substituirmos o denominador por $f'(\alpha)$, notando que, por ser $f'(x)$ negativa e crescente, é

$$f'(\alpha)| > |f'(\beta - \theta' k)|,$$

teremos

$$\beta_1 = \beta - \frac{f(\beta)}{f'(\alpha)} < \beta, \quad \beta_1 > x_1;$$

com o limite β_1 teremos, pois, as duas linhas de signaes

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
(α_1)	$+$	$-$	$+$
	1	0	0
(β_1)	$-$	$-$	$+$

exactamente com a disposição anterior. Applicando o mesmo raciocinio aos novos limites, teriamos

$$\beta_2 = \beta_1 - \frac{f(\beta_1)}{f'(\alpha_1)} < \beta_1, \quad \beta_2 > x_1;$$

e empregando indefinidamente o mesmo processo formariamos

*

uma successão de numeros

$$\beta,\ \beta_1,\ \beta_2, \ldots\ \beta_m,\ \beta_{m+1}, \ldots$$

decrescentes e maiores do que a raiz procurada. Finalmente as duas series (α) e (β) definem o numero incommensuravel que é raiz da proposta.

Repetindo a mesma discussão nos casos correspondentes ás outras tres disposições possiveis dos signaes, a saber:

$$\left.\begin{matrix} +--\cdots \\ ---\cdots \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} -+-\cdots \\ ++-\cdots \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} -++\cdots \\ +++\cdots \end{matrix}\right\},$$

concluiriamos que a regra de Newton se deve applicar áquelle dos dois limites que, substituido por x em $f(x)$ e $f''(x)$, dá resultados do mesmo signal. A esse numero chamou Fourier *limite exterior*, nome extrahido da representação geométrica do problema; designando-o sempre por a, e o *interior* por b, os numeros

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b' = b - \frac{f(b)}{f'(a)}$$

serão dois novos limites, mais próximos do que os primeiros. Nesta notação b pode ser $>$ ou $< a$.

Pelo mesmo processo calculariamos outros dois limites a'' e b''; se a era o limite exterior da primeira approximação, o limite exterior na segunda será

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(a)},$$

como já dissémos.

II. Seria laborioso calcular os dois limites a' e b'; vamos ver que basta calcular um d'elles, o de Newton, por exemplo.

1.° Subtrahindo membro a membro as expressões de a' e b', fazendo $b-a=d$, $b'-a'=d'$, vem (n.° 114)

$$d'=d-\frac{f(a+d)-f(a)}{f'(a)}=-d^2\frac{f''(a+\theta d)}{2f'(a)}.$$

Como $f''(a+\theta d)$ tem o mesmo signal que $f(a)$, porque a é limite exterior (I), aquella funcção terá signal contrário ao de $f'(a)$ se é $a<b$, e então é tambem $d>0$ e $d'>0$; inversamente, se fôr $a>b$. Para fixar idéas, nesta discussão consideraremos o caso $a<b$, e portanto $a'<b'$, etc. (I); os resultados seriam os mesmos na outra hypóthese, como facilmente se reconhecerá.

2.° Comecemos por estreitar o intervallo primitivo de modo que $f''(x)$ seja crescente ou decrescente entre os limites considerados, como já fizemos para $f'(x)$; então os quatro primeiros índices serão

$$1,\ 0,\ 0,\ 0.$$

Considerando só valores absolutos, representemos por $f''(\mathrm{B})$ o maior dos dois numeros $f''(a)$ e $f''(b)$ e por $f'(\alpha)$ o menor dos dois $f'(a)$ e $f'(b)$; será

$$\left|\frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\alpha)}\right|>\left|\frac{f''(a+\theta d)}{2f'(a)}\right|$$

e, em vez dos limites antecedentes (1.°), poderemos tomar estes

$$a'=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$b'=a'+d^2\left|\frac{f''(\mathrm{B})}{2f'(\alpha)}\right|,$$

sendo $x'<b'$ (1.°).

3.° Para determinar com exactidão o algarismo do quociente, até onde havemos de levar a divisão de $f(a)$ por $f'(a)$, tomemos a unidade decimal immediatamente superior ao valor absoluto do quociente $\frac{f''(B)}{2f'(\alpha)}$, de modo que, se este quociente for 0,023.., essa unidade decimal será 0,1; em geral, seja a sua expressão $\frac{1}{10^k}$, podendo k ser positivo, negativo ou nullo. Seja tambem, segundo a notação adoptada, $d=\frac{1}{10^n}$, donde $d^2=\frac{1}{10^{2n}}$; a differença dos limites a' e b' será menor que

$$\frac{1}{10^{2n+k}}.$$

Por outra parte, sendo por hypóthese $a<b$ e portanto tambem $a<x_1$, é claro que nos afastaremos do valor de x_1 tomando o quociente procurado por defeito; ao contrário, tomando esse quociente por excesso mas com erro inferior a uma unidade da ordem decimal $2n+k$, accrescentamos ao valor exacto de a' uma quantidade que não póde ser maior que $\frac{1}{10^{2n+k}}$ e teremos um novo limite que, por maioria de razão, se afasta da raiz numa quantidade menor que uma unidade decimal d'aquella ordem.

Calcularemos portanto o quociente da divisão de $f(a)$ por $f'(a)$ até o algarismo de ordem $2n+k$ inclusivamente, e juntando uma unidade a este algarismo teremos o novo limite.

4.° O signal do resultado da substituição de x em $f(x)$ pelo numero assim obtido indicará se este numero é maior ou menor que a raiz. No primeiro caso tiramos uma unidade ao seu último algarismo para termos o limite inferior a'' e aquelle mesmo numero será o limite superior b''; no segundo caso elle será o limite inferior a'', e juntando uma unidade ao seu último algarismo teremos o limite superior b''. Em qualquer das hypotheses será

$$b''-a''=\frac{1}{10^{2n+k}};$$