Nous avons
$$\varphi = x_1 y_1 z_1 - x_2 y_2 z_2.$$
La relation
$$\varphi = 0,$$
est donc évidente: elle marque simplesment que nous devons prendre les rayons concourants.

Il en résulte que les rayons des trois faisceaux qui, par leurs intersections, engentrent la cubique satisfont aux deux relations
$$f = 0, \ \varphi = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

Toute cubique peut être engendrée par les intersections des rayons homologues d'une H_1^3.

Ce théorème va nous être utile.

Supposons que l'on ait une seconde cubique ayant trois points communs avec une cubique donnée. Nous prendrons le triangle formé par ces trois points comme triangle de référence, et alors, les formes trilinéaires correspondant aux deux cubiques seront
$$f + \lambda\varphi = 0, \ f_1 + \mu\varphi = 0.$$

Or nous avons vu que
$$f = 0, \ f_1 = 0, \ \varphi = 0,$$
ont six ternes communs.

Donc

Deux cubiques se coupent en neuf points.

Si l'on se donne huit points d'une cubique, l'on peut déterminer les coefficients de f à l'exception d'un seul.

La forme trilinéaire correspondante sera donc
$$F + \mu F_1 + \lambda\varphi = 0.$$

Or, il existe un sixième terne commun à
$$F = 0, \ F_1 = 0, \ \varphi = 0.$$

En conséquence

Toutes les cubiques qui passent par huit points passent par un même neuvième.

L'équation

$$f+\lambda\varphi=0,$$

nous conduit encore à d'autres résultats.

Pour chaque valeur de λ, nous pourrons déterminer le discriminant

$$D_\lambda=\lambda^4+6\lambda^2 D''+4\lambda\Delta'+\Delta \ (*)$$

et les covariants

$$(S_i)_\lambda.$$

A l'aide de ceux-ci, et tant que D_λ sera différent de zéro, on pourra mettre $f+\lambda\varphi$ sous la forme

$$u_1v_1w_1+ku_2v_2w_2=0.$$

Ceci revient à mettre l'équation de la courbe sous la forme

$$\alpha\beta\gamma+k\,.\,\alpha''\beta''\gamma''=0.$$

Nous rapportons ainsi la courbe à deux trilatères conjugués.

En choisissant convenablement λ, on peut faire on sorte que les covariants $(S_i)_\lambda$, égalés à zéro, aient des racines réelles.

De cette manière, on aura des trilatères réels.

Si $D_\lambda=0$, on n'a plus, comme il est facile de le voir, des trilatères conjugués, mais un triangle inscrit à la cubique.

Donc

Par trois points pris sur une cubique, on peut faire passer les côtés de quatre triangles inscrits à la courbe.

Rappelons encore quelques résultats relatifs à une H_1^3.

Cette homographie possède trois groupes de points de ramifications représentés par

$$l_x^4=0,\ m_y^4=0,\ n_z^4=0.$$

(*) V. p. 40 et ss.

Ces éléments de ramification correspondent aux tangentes menées des sommets du triangle $\alpha\beta\gamma$.

En conséquence

Par un point situé sur la courbe, on peut, en général, mener à celle-ci quatre tangentes.

Les trois covariants ayant mêmes invariants (v. p. 40), on en déduit:

Le rapport anharmonique des tangentes issues d'un point de la courbe est constant.

Les éléments doubles forment six groupes dont les formes biquadratiques correspondantes ont les mêmes invariants.

On en conclut: *Si* A *et* B *sont des points d'une cubique, les rayons menés par* A *aux points de contact des tangentes issues de* B *ont même rapport anharmonique que les rayons menés par* B *aux points de contact des tangentes issues de* A.

Enfin, si l'on se rappelle la forme de ces covariants (p. 41), en peut énoncer ce théorème (*):

Les faisceaux de rayons menés d'un point de la cubique aux points de contact des tangentes issues de tous les autres points de la courbe appartiennent à une involution biquadratique du premier rang. De plus, les tangentes issues du point donné font partie de cette involution.

L'équation d'involution étant de la forme

$$f + kh = 0,$$

on a en réalité trois involutions quadratiques.

Nous allons déduire de tout ceci quelques théorèmes connus. Soit A le point donné et P son point tangentiel. Toute droite passant par A rencontre la cubique en des couples de points B, C dont les points tangentiels Q, R sont en ligne droite avec P.

Tandisque PQR tourne autour de P, BC passe par A. Si Q et R coïncident, PQR est une tangente issue de P.

Soient A_1, A_2, A_3 les trois autres points de contact des tangentes menées par P.

Si par A_1, nous menons les tangentes A_1M, A_1M_1, A_1M_2, A_1M_3,

(*) Sitzungsberichte der kön. böhn. Gesells. der Wissenschaften, 9 juin 1882.

le théorème précédent fait voir que les droites MM_1, M_2M_3 se couperont au point A. Pour la même raison MM_2, M_1M_3 se couperont en A_2, MM_3, M_1M_2 en A_3.

Les tangentes menées par A_1, A_2, A_3 donnent lieu, par suite, à six rayons menés par A et représentant le covariant T de la forme biquadratique qui est elle même représentée par les tangentes issues de A.

Nous avons ce théorème, connu s'ailleurs:

Les couples de rayons qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes issues de A_1, A_2, A_3, *au point* A, *sont les rayons doubles des trois involutions quadratiques formées par les quatre tangentes menées par* A.

Ce même théorème permet d'arriver à une notion plus importante. Par A, on peut mener une infinité de groupes de quatre rayons, en I_1^4, correspondant à tous les points B de la courbe.

Cherchons combien de fois AB pourra faire partie de ces groupes. Si nous considérons un rayon $AB_0B'_0$, ce rayon détermine un groupe unique de I_1^4. Mais nous aurons deux points tangentiels P_0, P'_0, $P_0P'_0$ rencontre la cubique en un point O, en général différent de A. Donc AP_0, AP'_0 sont deux rayons distincts.

Si nous menons par A une droite ABB', B et B' déterminent, chacun un groupe de l'involution.

En conséquence, *à tout rayon* AB_0, *correspondent deux rayons* AB, *et, à chaque rayon* AB, *huit rayons* AB_0.

Entre ces deux rayons, il existe une correspondance (2,8). Nous aurons donc *dix* coïncidences.

Si O est le point tangentiel de A, il est visible que O donne une de ces coïncidences.

Pour les neuf autres, il faut que B coïncide avec son point tangentiel, c'est-à-dire que nous ayons en B une tangente osculatrice ou un point d'inflexion.

Donc, en général, *une cubique possède neuf points d'inflexion.*

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce sujet: nous avons fait voir ailleurs (*) comment on en peut déduire les propriétés connues sur l'arrangement des points d'inflexion, l'influence des points singuliers sur le nombre de ces points, sur la classe de la courbe, etc.

(*) Bulletins de l'Acad. roy. de Belg., 3^{me} série, t. IV, octobre, 1882.

Nous avons aussi montré, dans un autre endroit, comment la théorie des homographies conduit á déterminer les conditions d'existence des points singuliers, de la décomposition de la courbe, du genre de celle-ci, etc. (*).

Nous ne pourrions exposer tous ces points sans dépasser les bornes que nous devons forcément nous imposer: ce que nous avons dit suffira pour permettre au lecteur de refaire toute la théorie des cubiques planes.

Une autre théorie que les involutions permettent d'aborder aisément est celle des courbes rationnelles.

Nous en citerons un exemple particulier emprunté aux cubiques planes à point double.

Toutes les droites du plan rencontrent la courbe en des ternes de points dont chacun est déterminé par deux de ces points. Nous avons donc une I_2^3.

L'involution I_2^3 possède trois points triples: donc la cubique à point double possède trois tangentes d'inflexion; les trois points triples d'une I_2^3 forment un groupe de l'involution.

Par suite les points d'inflexion sont en ligne droite.

Nous pourrions multiplier ces applications et nous occuper, par exemple, des quartiques à trois points doubles. Les droites du plan marquent, sur celles-ci, une involution I_2^4.

Nous pouvons, de même, étudier les courbes rationnelles gauches.

Nous avons déjà fait observer que la théorie des cubiques gauches peut se déduire, tout entière, de celle des involutions du troisième ordre.

Ainsi, tous les plans d'une gerbe G marquent sur la cubique gauche R_3 des ternes en I_2^3. L'existence des points neutres nous fait voir que par le point G, on ne peut mener qu'une sécante à la courbe.

Les éléments triples nous donnent les trois plans osculateurs issus de G et nous apprennent que les points de contact sont situés dans un plan passant par G.

(*) C. R. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1 août et 26 septembre, 1881. Mém. de l'Acad. roy. de Belg., t. XLV, 1882.

De là nous tirons toute la théorie du système polaire (*null-system*).

Les plans d'un faisceau l donnent, sur R_3, une I_1^3. L'involution conjuguée conduit à la détermination de la droite l'.

Nous en tirons aussi qu'une droite l_1 qui s'appuie sur l et l' détermine une involution qui est sa propre conjuguée. La droite l_1 se correspond donc à elle-même dans le système polaire.

De là découlent aisément les propriétés du complexe linéaire formé par les droites l_1.

Si, au lieu d'une I_2^3, nous considérons une I_2^4 représentée sur une R_3, nous aurons un système de tétraèdres inscrits à R_3 et circonscrits à une surface du second ordre. (Surface d'involution, V. plus haut.)

Nous pouvons donc dire que les douze faces de trois tétraèdres inscrits à une R_3 sont douze plans tangents d'une surface de la seconde classe Σ_2 et qu'il existe une infinité d'autres tétraèdres inscrits à R_3 et circonscrits à Σ_2.

L'existence des couples neutres nous apprend que Σ_2 a trois génératrices qui sont bisécantes de R_3.

On voit avec quelle facilité on arrive par ces considérations à exposer les propriétés des cubiques gauches.

Les courbes gauches rationnelles du quatrième ordre pourront être étudiées de la même manière.

Il est un autre point qui peut être étudié de la même manière: c'est la representation conforme des courbes rationnelles les unes sur les autres: nous renverrons, pour cela, aux nombreux mémoires que notre savant ami Mr. Emile Weyr a publiés sur ces questions (*).

Nous allons maintenant reprendre quelques considérations déjà exposés précédemment (voir plus haut p. 45 et ss.) pour les compléter.

Le problème fondamental qui se présente dans une H_2^3 est le suivant:

Etant donnés sept ternes d'éléments, compléter un huitième terne dont on se donne deux éléments.

(*) *Sitzb. der K. Akadsmie in Wien*, années 1875 et suiv.

Nous pouvons supposer que les sept ternes soient représentés, sur trois droites x, y, z, par sept points $X_0X_1...X_6$, $Y_0Y_1...Y_6$, $Z_0Z_1...Z_6$.

Menons le plan $X_0Y_0Z_0$ dans lequel nous traçons trois droites x', y', z' formant un triangle ABC. Les jonctions de x', y', z' respectivement aux points X_i, Y_i, Z_i $(i=1, 2, ... 6)$ donnent six groupes de trois plans et, par suite, six points $A_1A_2...A_6$.

Si par les neuf points $ABCA_1A_2...A_6$ nous faisons passer une surface du second ordre, tout point de cette surface, joint à x', y', z', donnera un terne de plans qui marquera, sur x, y, z, un nouveau groupe de l'homographie.

Si donc on se donne deux éléments X_8, Y_8, il suffira de mener les plans $x'X_8$, $y'Y_8$ dont l'intersection rencontrera la surface en un point I. Le plan $z'I$ coupe z au point cherché Z_8.

Tout ceci résulte de ce qui a été dit plus haut.

Mais pour achever les constructions, il est avantageux de tirer parti d'une remarque que nous avons faite et qui nous permet de remplacer, les trois séries en H_2^3 par trois séries situées sur un même support et symétriques, c'est-à-dire en I_2^3.

Pour cela, il suffit de construire la droite que nous avons désignée par l (p. 46).

Nous y arriverons en construisant le pôle P du plan ABC par rapport à la surface du second ordre; puis la section faite dans cette surface par le plan ABC.

Les tangentes, à cette section, menées par A, B, C, forment un nouveau triangle $A'B'C'$, homologique avec le premier. Soit P' le centre d'homologie — qu'on appelle aussi le pôle du triangle ABC —, la droite PP' est la droite cherchée l.

Nous ne développerons pas ces constructions que nous avons exposées ailleurs (*).

Maintenant, sur la droite l, les plans qui joignent x', y', z' à tous les points de la surface marquent des séries en I_2^3.

De nouveaux ternes de cette I_2^3 se déterminent aisément et permettent de construire de nouveaux points de la surface.

Si l'on a, sur l, un terne $X_kY_kZ_k$ de l'involution, on peut join-

(*) *Essais de Géom. Sup.*, etc., p. 120.

dre ces points à x', y', z' de six manières distinctes et l'on obtient ainsi *six* points de la surface.

Nous avons fait voir que ces six points sont situés dans un plan et sur une conique (*); par conséquent chaque terne de l'involution conduit à une section plane de la surface.

La détermination des éléments neutres de l'homographie dépend évidemment de celle du couple neutre de l'involution; il suffit, pour s'en convaincre de se rappeler ce que nous avons dit plus haut.

Le problème que nous nous étions posé est donc entièrement résolu et nous a permis, en outre, de résoudre cette autre question:

Construire une surface du second ordre dont on connaît neuf points.

Nous pouvons faire observer, en passant, que la question traitée donne une solution nouvelle de ce problème, déjà traité par M.M. de Jonquières et Kortum (**):

Etant donnés neuf points p, q, 1, 2, ... 7 *et une série de sept éléments* α_1 α_2 ... α_7, *trouver deux points* x, y, *tels que les sept coniques*

$$(pqyy)\,1.2.3\ldots7$$

soient projectives avec α_1 α_2 ... α_7.

Cette question importante se présente dans la détermination des courbes du quatrième ordre.

Nous pouvons considérer en même temps comme résolu le problème suivant:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît trois droites et sept points.

Cela ressort de ce que nous avons dit précédemment. (V. p. 45).

Le théorème énoncé à cet endroit peut prendre la forme suivante qui nous paraît assez élégante:

Si un tétraèdre se déforme de telle façon que trois de ses faces tournent autour de trois droites fixes x, y, z, *ne se coupant pas deux à deux tandis que la quatrième reste tangente à une surface de la seconde classe* Σ_2, *et que les trois arêtes, appartenant à cette*

(*) Bulletins de l'Acad. de Belgique, 3.e série, t. v, mai 1883.

(**) De Jonquières, *Mém. des savants etrangers*, t. XVI. — Kortum, *Ueber geometrische aufgaben dritten und vierten Grades*, p. 50.

face, s'appuient sur les trois arètes d'un trièdre P *tangent à* Σ_2, *le sommet opposé du tétraèdre décrit une surface du troisième ordre, qui passe par* x, y, z *et par* P.

Il rappelle, comme l'on voit, le théorème de Maclaurin sur les coniques.

Considérons, pour un instant, un plan tangent à Σ_2; ce plan, en tournant autour d'une génératrice de la surface ne cesse pas d'être tangent à celle-ci. Mais, dans ce mouvement, le sommet du tétraèdre décrira, d'après un théorème connu, une cubique gauche. Cette cubique est d'ailleurs tout entière sur la surface et passe par le sommet P.

Nous voyons qu'à chaque génératrice de Σ_2 correspond, sur la surface S_3 une cubique gauche.

Les génératrices de Σ_2 se divisent en deux systèmes auxquels correspondent également, sur S_3, deux systèmes de cubiques gauches. Deux cubiques gauches d'un même système se coupent au point P; deux cubiques gauches de systèmes différents ont, en outre, un second point commun; c'est celui que correspond, sur S_3 au plan tangent de Σ_2 donné par les deux génératrices de cette surface qui sont les homologues de deux cubiques gauches.

Nous étudierons donc, fort aisément, à l'aide de cette méthode, les cubiques tracées sur S_3.

On en déduit de même l'existence des vingt-sept droites de la surface, étude faite d'ailleurs par M. August dans le mémoire que nous avons eu l'occasion de citer.

Le trièdre P étant tangent à Σ_2, les trois faces coupent Σ_2 suivant trois coniques décomposables formant un hexagone gauche $X_1Y_2Z_1X_2Y_1Z_2X_1$.

Or, tous les plans menés par X_1Y_2 par exemple, étant tangents à Σ_2, le plan correspondant dans la serie des z est indéterminé.

Par suite la droite d'intersection des plans xX_1, yY_2 appartient tout entière à la surface S_3. Il en sera de même de la droite donnés par le deux plans xX_2, yY_1.

Nous aurons ainsi six droites de la surface différentes de x, y, z.

Ces droites forment, avec x, y, z, les neuf intersections de deux trièdres conjugués à la surface, et nous voyons que nous obtenons ainsi six plans tritangents à S_3. Ces plans représentent les covariants s de la forme trilinéaire.

Mais nous pouvons aller plus loin,

A chaque plan du faisceau x correspondent des couples de plans de y et z, formant une H_1^2 et se coupant, par suite, suivant un hyperboloïde. La section de cet hyperboloïde par le plan choisi du faisceau x appartient à S_3; or, si cette section est composée de deux droites, les deux droites seront sur la surface.

Mais à chaque plan de x correspond un hyperboloïde et par suite deux plans tangents, menés par x.

A chaque plan tangent, correspondent trois surfaces passant par y, z, puisque toutes ces surfaces forment un faisceau.

Entre les plans tangents menés par x et les plans du faisceau x existe donc une correspondance (2,3). Nous aurons donc cinq coïncidences.

Mais nous devons observer que parmi les cinq plans du faisceau x qui coupent leur surface (yz) suivant deux droites, il n'y en a que trois qui touchent la surface.

En effet, appelons x', y', z' les arètes de P.

Un plan quelconque de x marque, sur x', un point X, sommet d'un cône circonscrit à Σ_2 et qui donne naissance à une surface (yz) non décomposable. Mais si nous prenons le plan X_1x, on ne peut, par X_1, mener qu'un plan tangent à Σ_2, qui est $X_2Y_1Z_2$.

La surface correspondante est donc formée des deux plans (yY_2), (zZ_2).

De même, au plan X_2x, correspond la surface décomposable (yY_1, zZ_1).

Ces deux surfaces comptent parmi les cinq qui sont coupées par le plan correspondant suivant deux droites.

Il en résulte que, entre les plans singuliers des faisceaux x, y, z, il y a, pour chaque faisceau, trois plans qui coupent la surface S_3 suivant un triangle.

Chaque droite x, y, z est rencontrée par dix de ces droites.

Cela est évident pour x.

Pour y, nous avons les quatre droites (xX_1, yY_2), (xX_2, yY_1), (yY_1, zZ_2), (yY_2, zZ_1); ensuite les trois plans tangents menés par x aux surfaces correspondantes donnent six génératrices des modes différents; trois de ces génératrices rencontrent y; il y en aura trois également provenant de z.

Il est visible qu'il y a trois droites qui rencontrent à la fois x, y, z.

Mais ces trois droites appartiennent à l'hyperboloïde qui a pour directrices x, y, z.

On retrouve ainsi ce théorème de Steiner:

Lorsqu'une surface du second ordre rencontre une surface du troisième ordre suivant trois droites d'un mode, elle la coupe encore suivant trois droites de l'autre système.

Ce théorème peut encore se démontrer autrement et la démonstration donne le moyen de construire les plans de faisceaux x, y, z tangents à leurs surfaces correspondantes.

Nons verrons plus loin comment on peut construire la section de S_3 par un plan.

Or considérons l'hyperboloïde (x, y, z) et S_3. Un plan coupe ces deux surfaces respectivement suivant une conique et une cubique, qui ont, en commun, les traces sur le plan de x, y, z. Les deux courbes se coupent en trois autres points, faciles à construire comme nous l'avons vu. Par ces trois points passent trois génératrices du second mode qui, ayant chacune quatre points communs avec S_3, y sont contenues toute entières.

Nous arrivons ainsi à la construction des vingt sept droites de la surface.

En effet, nous pouvons disposer les trois axes x, y, z et les six droites données par les plans singuliers de la manière suivante:

x	y	z
012	201	120
021	102	210,

de telle façon que trois droites situées dans une même colonne ou une même ligne horizontale ne se rencontrent pas deux à deux.

Alors chacune de ces lignes donne naissance à un hyperboloïde et, par suite, á trois nouvelles droites de la surface.

Nous avons ainsi le système:

x	y	z	a_1	a_2	a_3
012	201	120	b_1	b_2	b_3
021	102	210	c_1	c_2	c_3
a'_1	b'_1	c'_1			
a'_2	b'_2	c'_2			
a'_3	b'_3	c'_3			

*

Nous avons en tout vingt-sept droites.

Nous ne poursuirons pas plus loin cette étude; il nous suffit d'avoir montré comment à l'aide des trois droites x, y, z connues à priori, on peut construire les vingt-quatre autres.

Le lecteur pourra d'ailleurs aisément déduire de ce qui précède tout ce qui est relatif à la disposition des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre.

Les constructions précèdentes exigeaient, on l'a vu, que l'on sût déterminer la section faite par un plan dans une surface S_3 dont on connaît trois droites et sept points.

Or, les droites x, y, z, marquent, sur ce plan, trois points X, Y, Z qui appartiennent à la section.

Un plan du faisceau x donne une droite XM. A ce plan correspondent deux faisceaux y, et z en H_1^2, dont on sait construire autant de couples que l'on veut, puis que nous savons résoudre le problème fondamental des homographies H_2^3. Ces faisceaux donnent, dans le plan, deux faisceaux homographiques dont les intersections déterminent une conique. Cette conique coupe XM en deux points réels ou imaginaires. Nous avons donc la méthode de Chasles pour la génération de la cubique, à moins que nous ne préférions employer le procédé que nous avons exposé plus haut.

Nous pouvons, à l'aide de ce qui précède, résoudre cette question intéressante:

Construire une surface du troisième ordre dont on se donne dix-neuf points.

Nous exposerons pour cela une des deux méthodes que nous avons fait connaître ailleurs (*).

En effet, nous savons construire la section, par un plan quelconque, d'une surface définie par trois droites et sept points. Or, nous avons montré ci-dessus comment on peut construire le plan α qui coupe une cubique gauche R_3 aux trois points correspondant à ceux où une droite quelconque l rencontre la cubique.

Par suite, se l'on veut construire les intersections d'une droite l avec la surface du troisième ordre, il suffira, par cette droite, de mener un plan ϖ et d'appliquer le problême qui vient d'être mentionné.

(*) Comptes-Rendus, 2 et 16 juillet 1883. *Acta Mathematica,* t. III, p. 181-200.

Supposons maintenant que *la surface Σ_3 soit définie par une droite, trois groupes de trois points situés en ligne droite et six autres points.*

Soit l_1 la droite donnée,

$$\begin{array}{llllllll} PP'P'', & \text{trois} & \text{points} & \text{situés} & \text{sur} & \text{une} & \text{droite} & l_2 \\ QQ'Q'', & » & » & » & » & » & » & l_3 \\ RR'R'', & » & » & » & » & » & » & l_4 \end{array}$$

et ABCDEF les six points donnés.

Nous pourrons considérer les surfaces S_3, S'_3, S''_3 définies respectivement par les éléments

$$l_1 l_2 l_3;\quad RR'R''ABCD;$$
$$l_1 l_3 l_4;\quad PP'P''ABCD;$$
$$l_1 l_4 l_2;\quad QQ'Q''ABCD.$$

Les trois surfaces S_3, S'_3, S''_3 marquent, sur une droite arbitraire, une I_2^3, à la quelle correspond une gerbe G dont les plans coupent la cubique gauche R_3, correspondant à l, suivant l'involution I_2^3 correspondante.

En employant, au lieu de ABCD, les éléments ABCE, ABCF, nous obtenons deux autres gerbes G_1, G_2 et le plan GG_1G_2, rencontre R_3 aux points, images de ceux où l rencontre Σ_3.

Il est facile de voir comment cette solution doit être modifié quand on connaît, à priori, une ou deux des intersections de l avec Σ_3.

La détermination du plan $GG_1G_2 \equiv \alpha$ suffit pour aborder le problême suivant:

Construire une surface du troisième ordre dont on connaît une droite, trois points en ligne droite et douze autres points.

Soit l_1 la droite donnée, $PP'P''$ situés sur une droite l_2, et ABCDEFGHIKLM les douze points donnés.

Les droites l_1, l_2, $AB \equiv l_3$, $CD \equiv l_4$ et les six points EFGHIK déterminent, par le problême précédent, une surface S_3.

En employant les autres couples de côtés opposés du tétraèdre ABCD, on obtient deux autres surfaces S'_3, S''_3.

Ces trois surfaces caractérisent, sur une droite l, une I_2^3, et, par suite, une gerbe G.

La substitution des points L et M à K, nous donne deux autres gerbes G_1, G_2, et le plan $G\,G_1\,G_2$ donnera les intersections de l avec la surface à construire Σ_3.

Si les éléments caractéristiques de la surface étaient composés de trois points $R\,R'\,R''$ situés sur une droite l_1 et de seize points ABCDEFGHIKLMNOPQR, nous considérerions l_1 comme un droite de la surface, $AB \equiv l_2$ comme une seconde droite, et CDEFGHILMNO comme douze points.

Nous obtiendrons ainsi une surface S_3 déterminée par ces éléments.

D'autres combinaisons des mêmes éléments nous conduiraient à des surfaces S'_3, S''_3, qui marqueraient une I_2^3 sur une droite quelconque l.

En remplaçant successivement O par P et Q, on obtiendrait, sur l, deux autres I_2^3 et l'application des raisonnements dejà employés, nous donnerait l'intersection de l avec la surface Σ_3 à construire.

Le problême général n'offre plus maintenant de difficulté, car nous venons en réalité de résoudre cette question:

Par dix-huit points donnés faire passer une surface du troisième ordre.

On plutôt cette autre, équivalente:

Déterminer les intersections d'une droite l *avec une des surfaces, en nombre infini, qui passent par dix-huit points.*

Si donc par un dix-neuvième points P nous menons, dans un plan ϖ, des droites l, nous pourrons, sur chacune d'elles, déterminer les groupes de trois points en I_1^3 où elle est rencontrée par les surfaces passant par les dix-huit autres.

Si, dans cette I_1^3, nous achevons le groupe qui correspond à P, nous avons les trois points où l est rencontrée par la surface cherchée Σ_3.

La répétition de ce même procédé nous conduit à déterminer tous les éléments nécessaires pour la construction de la section de Σ_3 par ϖ.

En faisant varier ϖ, nous obtenons toute la surface.

On reconnaîtra d'ailleurs, avec un peu d'attention, que toutes les constructions employées sont linéaires. Le lecteur qui voudrait s'en convaincre pourrait recourir aux travaux que nous avons mentionnés ci-dessus.

Nous terminerons ici cet exposé de quelques applications des homographies et des involutions supérieures: nous avons dù laisser de côté bien des questions importantes.

Nous n'aurions pu d'ailleurs, sans excéder les limites que nous nous étions assignées, aborder toutes ces théories en détail. Notre but était plus modeste: nous voulions faire connaître aux lecteurs de ce Journal les principaux problèmes que ces méthodes permettent de traiter; nous serions heureux si notre mémoire, malgré ses nombreuses imperfections, contribuait à répandre en Portugal l'emploi de ces procédés élégants et souvent féconds que fournissent les involutions d'ordres supérieurs.

Nous ne finirons pas cette trop longue étude sans remercier notre savant ami, Mr. Gomes Teixeira, de la gracieuse obligeance avec laquelle il nous a permis de disposer de son Journal.

BIBLIOGRAPHIA

A. F. da Costa Lima. — *Estudo sobre a theoria mathematica da elasticidade. Membranas vibrantes.* — *Lisboa, 1883.*

Eis o assumpto dos diversos capitulos d'este trabalho, apresentado pelo auctor ao professorado da Escola Polytechnica de Lisboa, para o concurso a um logar de professor:

No capitulo I deduz as equações do equilibrio de um corpo elastico qualquer, decompondo-o em parallelipipedes, e o residuo que fica á superficie em tetraedros e procurando as equações d'equilibrio d'estes corpos. Depois procura a expressão das componentes da força elastica que actúa sobre um elemento plano em funcção do deslocamento d'este elemento. Finalmente acha as equações que dão as deformações de um meio homogeneo e de elasticidade constante, e acha as equações do movimento vibratorio d'este meio.

No capitulo II applica os principios do capitulo anterior á membrana vibrante. Como casos particulares considera a membrana rectangular e a membrana circular, determinando as equações differenciaes do movimento vibratorio, e integrando estas equações por meio das series periodicas.

No capitulo III occupa-se das coordenadas curvilineas, das quaes faz uso no capitulo IV para estudar a membrana elliptica.

F. A. de Brito Limpo. — *Instrucções para o exercicio dos nivelamentos geometricos de precisão.* — *Lisboa, 1883.*

N'este opusculo o sr. Brito Limpo dá instrucções sobre as linhas, atravessando Portugal, ao longo das quaes se deve fazer um nivelamento; sobre o pessoal e material para esse nivelamento;

e sobre as marcas a usar. Descreve depois os instrumentos que se devem empregar e suas rectificações. Finalmente tracta dos meios de fazer o nivelamento, e das reducções a fazer aos resultados.

G. Paxton Young. — Principles of the Solution of Equations of the Higher de degrees. — Baltimore, 1883.

—— *Resolution of Solvable Equations of the Fifth Degree. — Baltimore, 1883.*

Na primeira das precedentes memorias o sr. Young, professor em Toronto (Canadá), apresenta uma serie de propriedades das equações soluveis algebricamente e das expressões algebricas que são raizes d'essas equações. Limitamo'-nos a citar esta memoria, que é muito rica em resultados importantes, para que se possa resumir em curto espaço.

Na segunda memoria faz o auctor applicação dos principios expostos na primeira á equação do quinto gráo, procurando o criterio de solubilidade e tractando depois d'essa resolução.

Tanto uma como outra foram publicadas no *American Journal of Mathematics*.

A. Marre. — Huit lettres inédites du P. Claude Jaquemet. — Roma, 1883.

No principio d'este opusculo vem uma noticia escripta pelo illustre sr. Marre, a respeito d'estas cartas, encontradas nos archivos do Oratorio de Paris, e a respeito de Reynou e de Prestot, que foram, como Jaquemet, Padres do Oratorio, e que floreceram no seculo XVII.

Em seguida vêem as cartas, as quaes são relativas á theoria dos numeros, á geometria geral das curvas, etc.

Este artigo foi publicado no *Bolletino* do principe Boncompagni.

H. Narducci.— Sur un manuscript du Vatican.— Paris, 1883.

Contém este opusculo uma carta dirigida pelo sr. Narducci ao sr. A. Marre, em que aquelle auctor descreve um Tratado intitulado: *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam*, encontrado entre os manuscriptos da bibliotheca do Vaticano.

J. A. Serrasqueiro.— Tratado elementar de Arithmetica.— Coimbra, 1882, 2.ª ed.

—— Tratado de Geometria elementar.— Coimbra, 1882, 2.ª ed.

—— Tratado de Algebra elementar.— Coimbra, 1883, 2.ª ed.

—— Tratado elementar de Trigonometria rectilinea.— Coimbra, 1882, 5.ª ed.

Votado com dedicação, ha muitos annos, ao ensino das mathematicas elementares, poucas pessoas egualam o illustre professor do Lyceu de Coimbra em competencia para redigir os compendios para o ensino d'estas sciencias. O modo como estes livros tem sido recebidos no paiz prova bem isto, pois tem sido adoptados pela maior dos professores para texto das suas lições.

Estão escriptas com muita clareza e as materias dispostas em boa ordem. Na escolha das materias de que se occupa seguiu os programmas officiaes; deixaremos por isso para um artigo, que sobre estes programmas publicaremos, algumas observações que teriamos a fazer a este respeito na parte que se refere aos imaginarios, ao desenvolvimento do binomio de Newton quando o expoente é negativo ou fraccionario, etc.

Observações feitas no Observatorio astronomico da Universidade de Coimbra.— Coimbra, 1882.

Este volume contém as observações das passagens d'estrellas pelo primeiro vertical, feitas pelo empregado do Observatorio o sr. José Lucas, desde julho de 1879 até julho 1882. Contém em seguida os valores da colatitude do Observatorio que resultam d'estas observações. Finalmente contém as observações do grande cometa de setembro de 1882, e as observações da passagem de Venus, que teve logar em 6 de dezembro de 1882.

H. Barros. — Esboço da theoria thermo-dynamica. — Lisboa, 1883.

Contém este opusculo em primeiro logar uma Introducção, onde o sr. Barros escreve um resumo da historia da doutrina que faz parte do opusculo. Na primeira parte occupa-se o auctor do calor nas suas relações com o trabalho mecanico, e ahi expõe as equações fundamentaes da thermo-dynamica, os principios de Mayer e Clausius, etc. Na segunda parte considera o calor como um modo particular de movimento das moleculas do corpo e do ether, e procura as consequencias que d'esta hypothese vem para a theoria de que se occupa. Finalmente n'uma nota faz applicação da Thermo-dynamica a um problema d'Astronomia — conservação da energia solar, e a um problema de Mecanica — movimento permanente d'um gaz perfeito que sae por um orificio.

A. d'Arzilla Fonseca. — Principios elementares do calculo de quaterniões. — Coimbra, 1884.

O calculo dos quaterniões, cuja descoberta data de 1884, tem sido objecto de muitas memorias e mesmo livros especiaes publicados nas differentes linguas da Europa. Em Portugal pessoa alguma se havia occupado d'elle, e por isso o sr. Arzilla fez um bom serviço tomando-o para assumpto de sua Dissertação inaugural. N'ella apresenta a parte elementar d'esta doutrina, isto é, a composição dos vectores, a multiplicação e divisão dos vectores, a resolução das equações do primeiro gráo de quaterniões, a differenciação de quarterniões, etc.

J. Bruno de Cabedo.— Integração das equações canonicas do movimento. — Coimbra, 1884.

No primeiro capitulo tracta o auctor de reduzir á fórma canonica as equações differenciaes do movimento de um systema de pontos, considerando primeiro o movimento absoluto, e em seguida o movimento relativo, sem se limitar neste caso, como Bour, ao caso em que tem logar o principio de forças vivas.

Nos capitulos segundo, terceiro e quarto expõe os theoremas de Lagrange, Liouville e Poisson, e os methodos de Jacobi, Bertrand e Bour para integrar as equações da Dynamica.

Finalmente no capitulo quinto expõe os methodos de approximação de Hamilton e Poisson para fazer esta integração.

H. Teixeira Bastos. — Unidades electricas. — Coimbra, 1884.

A questão da escolha do systema de unidades electricas tem occupado nos ultimos tempos a attenção dos physicos, e por isso o sr. Bastos a escolheu para assumpto de sua Dissertação inaugural. Expõe o systema de unidades adoptadas pelo Congresso de Paris e as considerações que levaram a adoptar este systema, a comparação d'estas unidades com uma unidade arbitraria, e finalmente a sua representação material.

DETERMINAÇÃO GEOMETRICA DOS MOMENTOS DE INERCIA DOS SOLIDOS DE REVOLUÇÃO

POR

GUILHERME CARLOS LOPES BANHOS

Capitão d'artilheria

I

Considerações geraes

O momento de inercia de um solido em ordem a uma recta dada é egual á somma dos productos que se obteem multiplicando a massa de cada um dos elementos materiaes pelo quadrado da sua distancia á referida recta.

Sendo *dm* o elemento differencial da massa M do solido, *r* a distancia do elemento *dm* ao eixo fixo, e K o raio de geração, o momento de inercia de um solido qualquer será expresso analyticamente pela fórmula geral

$$MK^2 = \iiint r^2\, dm.$$

Na generalidade dos casos os calculos relativos á determinação dos momentos de inercia são bastante complexos, e os valores numericos que d'elles resultam são apenas simples approximações.

O grão de exactidão e a facilidade da determinação dos referidos valores dependem principalmente da fórma que affecta o solido, e do modo como se acha distribuida a sua massa.

Sendo os solidos homogeneos e apresentando uma fórma geometrica conhecida, ou suppondo-os formados pela reunião de diversos corpos de modo que cada um d'elles constitua um solido nas condições indicadas, o seu momento de inercia é susceptivel de uma solução rigorosa. A fóra estes casos, a determinação do referido elemento só se obtem por meios mais ou menos approximados, e n'estas circumstancias, sempre que as expressões analyticas envolverem integraes cujas funcções possam ser traduzidas geometricamente, convem traçar as curvas representativas das dictas funcções, e avaliar pelos methodos de quadratura conhecidos em geometria, ou por meio dos planimetros, as areas que as figuras derivadas contornam.

O processo geral para determinar o momento de inercia de qualquer solido, consiste em referil-o a tres eixos coordenados rectangulares, suppondo-o formado de parallelipipedos infinitamente pequenos de arestas parallelas aos eixos, e calcular por meio de integrações a somma dos momentos de inercia dos parallelipipedos elementares, entre os limites determinados pela superficie dos solidos.

Uma das difficuldades que apresenta este processo consiste na determinação dos limites entre os quaes se devem effectuar as integrações, o que não é geralmente possivel senão quando a superficie do solido é susceptivel de ser expressa por uma equação.

As mesmas difficuldades se offerecem ainda no caso dos solidos serem de revolução, pela impossibilidade de se poder sempre traduzir algebricamente as suas curvas meridianas; no emtanto, substituindo as dictas curvas por cordas que defiram dos arcos subtensos de quantidades pequenas, a superficie total do solido ficará dividida em superficies cylindricas e conicas, e n'estas condições o seu momento de inercia poderá ser expresso por approximação por uma fórmula algebrica em funcção dos raios das bases e alturas dos cylindros e pyramides conicas a que correspondem os troncos de cone inscriptos no solido.

Este processo, sendo excessivamente trabalhoso, quando se pretendesse obter o momento de inercia com muita approximação, seria pouco commodo para ser empregado practicamente.

O processo geometrico que passamos a expor, applicavel aos solidos de revolução em geral, é preferivel na practica ao processo anterior, não só por ser de extrema facilidade na sua execução, como tambem por offerecer resultados sufficientemente rigorosos.

Reduz-se principalmente ao traçado das curvas relativas ás funcções que encerram os integraes, e á quadratura das superficies planas definidas pelas dictas curvas.

O rigor dos resultados, como facilmente se reconhece, depende do traçado exacto das transformadas, da escala graphica adoptada e dos methodos practicos empregados na avaliação das areas.

II

Estabelecimento das fórmulas

Sendo M a massa de um solido, K o seu raio de giração em ordem a um eixo qualquer passando pelo centro de gravidade, e I o seu momento de inercia relativamente á parallela tirada á distancia a do referido eixo, teremos segundo a theoria dos momentos de inercia

$$I = MK^2 + Ma^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Esta equação mostra que para uma certa posição do eixo dos momentos o valor de I está dependente de M, e de MK^2, cujo valor tambem depende de M. O valor de MK^2, dependendo além d'isso do conhecimento do ellipsoide central de inercia, obter-se-ha procedendo-se á determinação previa do centro de gravidade do solido e á dos momentos de inercia principaes em ordem áquelle ponto.

Para se determinar o ellipsoide central, isto é, o ellipsoide de inercia relativamente ao centro de gravidade, torna-se necessario conhecer a grandeza dos tres eixos principaes.

Como nos solidos de revolução dois dos eixos principaes de inercia relativamente a um ponto qualquer do eixo de figura são eguaes, e portanto eguaes todos os que passando pelo mesmo ponto existirem no plano dos dictos eixos, basta construir a ellipse meridiana do ellipsoide central, para se obterem os diversos momentos de inercia do solido em ordem a quaesquer rectas passando pelo centro de gravidade.

Portanto, para se calcular o valor de I da equação (1), dever-se-ha determinar positivamente:

1.º a massa do solido;
2.º o centro de gravidade;
3.º o momento de inercia em ordem ao eixo de revolução; e
4.º o momento de inercia em ordem á perpendicular aquelle eixo, conduzida pelo centro de gravidade.

Seja $a'b'aba'$ (fig. 1) a curva meridiana de um solido de revolução situada no plano dos xy, e ox e oy os dois eixos coordenados aos quaes ella se acha referida.

Tome-se para eixo de revolução o eixo das abscissas, e determinem-se sobre este e o dos y as coordenadas limites $oa_1=x'$, $ea'_1=x''$, $ob_1=y'$ e $ob'_1=y''$, conduzindo parallelamente a cada um d'elles as tangentes a_1a, a'_1a', b_1b e b'_1b' á curva dada.

Representando por C uma constante equivalente ao producto da densidade especifica do solido por π, por $y=f(x)$ e $x=\mathrm{F}(y)$ as equações das curvas correspondentes aos arcos exteriores ($a'b'a$, $b'ab'$) e por $y_1=f_1(x)$ e $x_1=\mathrm{F}_1(y)$ as que se referem aos arcos interiores ($a'ba$ e bab'), teremos para os quatro elementos indicados as seguintes expressões analyticas:

Massa . . . . .
$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{M}=\mathrm{C}\int_{x'}^{x''}(y^2-y_1^2)\,dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)\\ &\mathrm{M}=2\mathrm{C}\int_{y'}^{y''}y\,(x-x_1)\,dy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)\end{aligned}\right.$$

Abscissa do centro de gravidade . . .
$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{X}_y=\frac{\int_{x'}^{x''}(y^2-y^2_1)\,x\,dx}{\int_{x'}^{x''}(y^2-y^2_1)\,dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)\\ &\mathrm{X}_y=\frac{1}{2}\,\frac{\int_{y'}^{y''}(x^2-x^2_1)\,y\,dy}{\int_{y'}^{y''}(x-x_1)\,y\,dy} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)\end{aligned}\right.$$

Momento de inercia em ordem ao eixo de figura . . .

$$\left\{\begin{array}{l} I_x = \frac{C}{2}\int_{x'}^{x''} (y^4 - y^4_1)\, dx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6) \\ I_x = 2C\int_{y'}^{y''} y^3 (x - x^2_1)\, dy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7) \end{array}\right.$$

Momento de inercia em ordem á recta perpendicular ao eixo da figura . . . . . .

$$\left\{\begin{array}{l} I_y = \frac{1}{2} I_x + C\int_{x'}^{x''} x^2 (y^2 - {y_1}^2)\, dx \ldots\ldots\ldots (8) \\ I_y = \frac{1}{2} I_x + \frac{2}{3} C\int_{y'}^{y''} y (x^3 - x^3_1)\, dy \ldots\ldots\ldots (9) \end{array}\right.$$

As fórmulas analyticas fornecem pois duas soluções para cada elemento, e a questão, como das mesmas fórmulas se deprehende, acha-se apenas reduzida á determinação graphica do integral da fórma $\int y^n x^m dx$, visto que, pela mudança reciproca das duas variaveis x e y, se obtem o integral geral correspondente ás segundas soluções.

III

Construcção graphica do integral $\int y^n x^m dx$, sendo conhecida geometricamente a curva expressa pela equação $y = f(x)$

1.° Processo. — *Traçado das transformadas por meio das auxiliares parabolicas.* — Seja (fig. 2.ª) A_1B_1 a curva meridiana de um solido de revolução, expressa pela equação $y = f(x)$, *ox* e *oy* os dois eixos coordenados orthogonaes aos quaes ella se acha referida, e $MM_1 = y$ a ordenada de um ponto M_1 da curva.

Pretende-se representar geometricamente o integral $\int y^n x^m dx$, isto é, traçar a curva expressa pela equação

$$f(x)^n x^m = y^n x^m = Y,$$

sendo dada a funcção $y = f(x)$.

Por um ponto qualquer V do eixo dos xx conduza-se parallelamente a oy a recta NVR, e, em relação a esta recta e a ox como eixos principaes, descrevam-se com o parametro $VU=1$ as parabolas VC_1S e VC_nR, expressas pelas equações

$$y^2=x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$y'=x^{\frac{n}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Pela eliminação de x entre estas duas equações, resulta

$$y'=y^n. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

D'onde se deduz que para determinar os pontos M_2, M_3, $M_4 \ldots M_n$ das transformadas da curva proposta A_1B_1, para as diversas potencias de $y=MM_1$, basta conduzir do ponto dado M_1 uma parallela ao eixo dos xx até encontrar a primeira parabola; do ponto de intersecção C_1 tirar as perpendiculares C_1C_2, C_1C_3, $C_1C_4 \ldots C_1C_n$ até encontrarem a segunda parabola, e transportar depois por meio de parallelas ao eixo dos xx, sobre o prolongamento da ordenada do ponto dado, os segmentos CC_2, CC_3, $CC_4 \ldots CC_n$, comprehendidos entre o referido eixo e as transformadas auxiliares VC_2R, VC_3R, $VC_4R \ldots VC_nR$.

Repetindo a construcção para diversos outros pontos da curva A_1B_1, e unindo por um traço continuo os pontos assim determinados, acharemos as transformadas A_2B_2, A_3B_3, $A_4B_4 \ldots A_nB_n$, as quaes, conjunctamente com as ordenadas extremas, definem as areas correspondentes ás expressões analyticas

$$A\,B\,A_2\,B_2=\int_{x_0}^{x_1} y^2\,dx,$$

$$A\,B\,A_3\,B_3=\int_{x_0}^{x_1} y^3\,dx,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A\,B\,A_n\,B_n=\int_{x_0}^{x^1} y^n\,dx.$$

Os limites dos integraes correspondem ás abscissas $x_1 = 0A$ e $x_0 = 0B$.

Convém observar que é muito util na practica executar as construcções no papel millimetrico, e adoptar para unidade graphica quaesquer das unidades metricas n'elle já traçadas; isto com o fim de evitar a multiplicidade de linhas de construcção, e de simplificar o traçado das curvas auxiliares.

Construidas as parabolas, os pontos das transformadas que se procuram, sendo determinados pelo simples cruzamento de rectas dispostas em angulo recto, em direcção parallela aos eixos coordenados, obter-se-hão apenas com o auxilio das linhas já traçadas no papel quadriculado.

A representação graphica do integral $\int y^n dx$ ainda se póde obter por meio da linha $V's'$, e pela transformação auxiliar $V'c'_nR'$, expressas pelas equações

$$y = x \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (13)$$

$$y' = x^n \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (14)$$

visto que pela eliminação de x, entre estas duas equações, se obtem a equação (12).

A determinação das transformadas auxiliares parabolicas dadas pelas equações (11) e (14) é facil de obter, marcando sobre um certo numero de ordenadas comprimentos eguaes ás potencias n e $\frac{n}{2}$ das abscissas correspondentes; no emtanto vejamos como se obteem geometricamente as grandezas das ordenadas expressas pelas dictas equações, para os valores particulares de $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$.

A expressão (10), e a (11) depois de n'ella se substituirem os valores indicados, fornecem os tres systemas de equações

$$y^2 = x, \qquad y^2 = x, \qquad y^2 = x.$$

$$y' = x, \qquad y' = x^{\frac{3}{2}}, \qquad y' = x^2.$$

A primeira equação em cada um dos systemas corresponde na figura á parabola ordinaria VC_1S, e as restantes dizem respeito respectivamente á recta VC_2R inclinada de 45°, e ás parabolas VC_3R e VC_4R.

As parabolas ordinarias VC_1S e VC_4R construem-se por qualquer dos processos conhecidos em geometria; comtudo, executando-se o desenho no papel quadriculado, convem adoptar aquelle que permitta utilisar, das linhas já traçadas, as que mais convierem á construcção.

Depois de traçada a parabola VC_1S e a recta VC_2R, a construcção da parabola VC_3R não offerece difficuldade. Para este fim basta determinar os pontos de intersecção G e E da parabola e da recta com a parallela GE ao eixo dos YY, conduzida por um ponto qualquer Y do eixo dos XX; tomar sobre este eixo a distancia $IF=IG$; unir F com E e tirar do ponto G a parallela GH a EF. Esta linha determinará sobre OX o segmento IH, que, sendo transportado para IG por meio do arco de circulo HI, dará um ponto I da parabola pedida. Esta construcção applicada a quaesquer outros pontos, tomados sobre o eixo dos XX, conduz-nos ao traçado da parabola VC_3R, expressa pela equação

$$y' = x^{\frac{3}{2}}.$$

Para os valores de $n=2$, $n=3$ e $n=4$ fornecem, similhantemente, as expressões (13) e (14) os tres grupos de equações

$$y = x, \qquad y = x, \qquad y = x.$$

$$y' = x^2, \qquad y' = x^3, \qquad y' = x^4.$$

Na figura a equação $y=x$ corresponde á linha V′S inclinada de 45°, e as equações $y'=x^2$, $y'=x^3$ e $y'=x^4$ correspondem ás parabolas $V'C'_2R'$, $V'C'_3R'$ e $V'C'_4R'$, construidas com o parametro $VU'=1$.

Os pontos da parabola relativa á equação $y'=x^3$ obteem-se por um processo analogo ao empregado para a parabola VC_3R, como se observa pela construcção indicada na figura para o ponto

I′; a parabola VC_4R', expressa pela equação $y = x^4$, obtem-se determinando para cada ponto da recta $V'R'$ o vertice Q do rectangulo formado sobre os segmentos PL e PT parallelos aos eixos coordenados, e comprehendidos entre a dicta recta e a parabola $V'C'_2R'$.

Posto isto, represente-se por $A'B'$ a transformada relativa á potencia n das ordenadas de uma curva qualquer, expressa pela equação $y = f(x)$, e supponhamol-a referida aos eixos VX e VR. Determinando o ponto de intersecção e da parabola do 2.º grau VC_4R com a ordenada do ponto dado M', ou com o seu prolongamento, e o ponto de intersecção d do eixo das abscissas com a circumferencia de raio mM', descripta do pé m da mesma ordenada como centro, e, conduzindo parallelamente á linha que une a origem V com o ponto e a recta dm', obteremos, sobre o prolongamento da referida ordenada, o segmento mm', cujo valor é equivalente ao producto das coordenadas do ponto dado.

Portanto, teremos

$$mm' = \frac{me \times mM'}{Vm} = xy^n.$$

Se substituirmos a parabola ordinaria VC_4R pela parabola expressa pela equação $y' = x^{m+1}$, e se repetirmos a construcção indicada para a mesma ordenada, acharemos a egualdade

$$mm' = x^m y^n = Y.$$

Procedendo-se semelhantemente com relação aos mais pontos da curva proposta $A'B'$, comprehendidos entre A' e B', e unindo entre si os pontos da nova transformada $a'b'$, ficará definida a area plana $aa'b'b$ representativa do integral que se pretendia construir, isto é, será, designando Va por x_0 e Vb por x_1,

$$a\,a'\,b'\,a = \int_{x_0}^{x_1} y^n x^m \,dx.$$

2.° Processo. — *Traçado das transformadas por meio da logarithmica.* — O integral $\int y^n x^m dx$ ainda póde ser representado graphicamente, empregando para curva auxiliar a *logarithmica.*

Esta curva, que tem por equação $y = B^x$, corta o eixo dos YY a uma distancia da origem egual á unidade, e tem por assymptota o eizo dos XX.

Construe-se portanto fazendo variar as abscissas entre $-\infty$ e $+\infty$.

No traçado da referida curva segue-se geralmente o seguinte processo:

Sobre uma recta indefinida X'X' (fig. 3.ª) applique-se um certo numero de vezes o comprimento $O_1 O_b$ egual á unidade graphica, e pelos pontos de divisão O_1, O_b, $O_{b^2} \ldots O_{b_n}$ e $O_{\frac{1}{b}}$, $O_{\frac{1}{b^2}} \ldots O_{\frac{1}{b^n}}$ levantem-se perpendiculares á mesma recta.

N'uma d'estas perpendiculares, por ex.: $O_1 Y'$, tome-se o comprimento $O_1 O'_1$ egual a uma divisão de X'X' e marque-se sobre as restantes, para a direita, grandezas eguaes a B, $B^2 \ldots B^n$, e para a esquerda grandezas eguaes a $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B^2}$, $\frac{1}{B^3} \cdots \frac{1}{B^n}$.

Suppondo a curva referida aos eixos Y'Y' e X'X', vê-se, pela construcção que acabamos de indicar, que os pontos extremos O'_1, $O'_2 \ldots O'_n$ e $O'_{\frac{1}{b}}$, $O'_{\frac{1}{b^2}} \ldots O'_{\frac{1}{b^n}}$ das perpendiculares levantadas a X'X', satisfazem á equação $y = B^x$, e portanto pertencerão á logarithmica que se procura.

Das ordenadas $O_1 O'_1 = 1$ e $O_b O'_b = B$ se deduzem graphicamente os valores das diversas potencias de B e $\frac{1}{B}$, construindo para um e outro lado da origem terceiras proporcionaes ás grandezas das referidas ordenadas, e ás que se forem obtendo por meio de construcções successivos.

Assim, achadas as grandezas B^n e B^{n+1}, ou as suas reciprocas $\frac{1}{B^n}$ e $\frac{1}{B^{n+1}}$, deduzir-se-hão os valores de B^{n+2} e $\frac{1}{B^{n+2}}$, construindo terceiras proporcionaes a B^n e B^{n+1} e a $\frac{1}{B^n}$ e $\frac{1}{B^{n+1}}$.

Os pontos intermedios da curva acham-se construindo, a meio do intervallo comprehendido entre quaesquer duas ordenadas conhecidas, meias proporcionaes ás grandezas das mesmas ordenadas.

Assim, se na equação

$$y = B^x$$

se faz

$$x = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

obtem-se para y os seguintes valores:

$$y' = B^n \sqrt{B} = \sqrt{B^n B^{n+1}}$$

e

$$y' = \frac{1}{B^n}\sqrt{\frac{1}{B}} = \sqrt{\frac{1}{B^n} \times \frac{1}{B^{n+1}}},$$

os quaes, como se vê, são effectivamente as medias geometricas entre os valores das ordenadas expressos por B^n e B^{n+1} e por $\frac{1}{B^n}$ e $\frac{1}{B^{n+1}}$.

Nem todas as logarithmicas podem vantajosamente servir para a determinação geometrica das transformadas, nem a construcção indicada precedentemente convem adoptar no traçado da logarithmica, quando se desejar obter esta com alguma exactidão.

A logarithmica decimal, expressa pela equação $y = 10^x$, é uma das mais faceis de construir, e obtem-se com sufficiente rigor, quando o seu traçado se executa no papel millimetrico; e n'estas condições convem então seguir na determinação das ordenadas um processo mais simples, e que offerece maior garantia de exactidão, como aquelle que passamos a expôr.

Suppondo que se toma para unidade graphica o decimetro, determinem-se em relação a dois eixos coordenados quaesquer $y'y'$ e $x'x'$ (fig. 3.ª) os pontos relativos ás coordenadas seguintes, deduzidas da equação

$$x = \lg y$$

$x = O_1 O_1 = 0$	$y = O_1 O'_1 = 1^\delta$
$x = O_1 a = -0^\delta,1$	$y = a a' = 0,7944$
$x = O_1 b = -0,2$	$y = b b' = 0,6310$
$x = O_1 c = -0,3$	$y = c c' = 0,5012$
$x = O_1 d = -0,4$	$y = d d' = 0,3982$
$x = O_1 e = -0,5$	$y = e e' = 0,3163$
$x = O_1 f = -0,6$	$y = f f' = 0,2512$
$x = O_1 g = -0,7$	$y = g g' = 0,1996$
$x = O_1 h = -0,8$	$y = h h' = 0,1585$
$x = O_1 i = -0,9$	$y = i i' = 0,1259$
$x = O_1 b_{\overline{\frac{1}{b}}} = -1$	$y = O_{\overline{\frac{1}{b}}} O_{\overline{\frac{1}{b}}} = 0,1$

Unindo por um traço continuo os pontos O'_1, a', b' ... h', i' e $O'_{\overline{\frac{1}{b}}}$ assim determinados, obteremos, entre as ordenadas $y = 1$ e $y = 0^\delta,1$, a logarithmica $O'_1 O'_{\overline{\frac{1}{b}}}$ expressa pela equação $y = 10^x$.

Como a razão geometrica entre as referidas ordenadas é 10, tambem todas as que guardarem entre si uma distancia egual á unidade devem variar egualmente na mesma razão, e portanto basta multiplicar ou dividir por 10, 100, 1000, etc., os valores de y a cima calculados, para se determinarem todas as mais ordenadas da curva, correspondentes ás abscissas, deduzidas da fórmula geral $x = \pm n \times 0^\delta,1$.

Pretendendo-se traçar a curva com maior approximação, proceder-se-ha ao calculo das ordenadas entre O_1 e $O_{\overline{\frac{1}{b}}}$, fazendo variar as abscissas n'uma razão inferior a $O_1 b - O_1 a = 0^\delta,1$.

Vê-se, pois, como pelo processo que acabamos de indicar se obteem d'um modo rapido e simples os diversos pontos da logarithmica decimal.

Construida a logarithmica, vejamos agora como por meio d'ella se acham os productos das potencias m e n das coordenadas x e y dos diversos pontos de uma curva dada $A_1 B_1$, expressa pela equação $y = f(x)$.

Por um ponto qualquer de $x' x'$, conduza-se parallelamente a

$y'y'$ a recta yy, e, em relação a esta linha e a ox como eixos coordenados, supponha-se referida a curva A_1B_1.

Sejam OM e MM_1 as coordenadas de um ponto qualquer M_1 d'esta curva; OS, O_1S_1 e O^1S_1 as bissectrizes dos angulos IOB, $I'O_1O$ e $I'O_1O_b$, e O_1R, O_1R', O_1T e O_1T' rectas, partindo da origem O_1 e formando com o eixo $y'y'$ os angulos

$$R_1Oy' = R'O_1y' = \alpha \quad e \quad TO_1y' = TO_1y' = \beta$$

expressos trigonometricamente pelas relações

$$\operatorname{tg}\alpha = m \quad e \quad \operatorname{tg}\beta = n.$$

Posto isto, examinemos agora como por meio dos dados estabelecidos se representam graphicamente os valores de $m\lg x$ e $n\lg y$, e como d'estas grandezas se deduz o valor de $y^n x^m$.

Do ponto de intersecção m da bissetriz OS com a ordenada MM_1, e do ponto dado M_1, conduzam-se ao eixo das abscissas as parallelas mm_1 e M_1m até encontrarem a logarithmica; dos pontos de encontro m_1 e m'_1 levantem-se ás dictas rectas as perpendiculares m_1m_2 e $m'_1m'_2$ até á bissetriz OS_1; de m_2 e m'_2 tirem-se parallelamente ao referido eixo as rectas m_2m_3 e $m'_2m'_3$ até se obterem sobre as linhas OR e OT os pontos m_3 e m'_3; e dos extremos m_3 e m'_3 d'aquellas rectas levantem-se as perpendiculares m_3m_4 e m'_3m_6.

A primeira d'estas perpendiculares, encontrando a bissetriz O_1S_1 no ponto m_4, determinará a parallela m_4m_5 a $x'x'$, que interceptará a segunda perpendicular no ponto m'_5, para o qual, como evidentemente se reconhece pela simples inspecção da figura, se verificam as seguintes relações:

$$x' = O_1\, m_6 = n\lg y,$$

$$y' = n_6\, m_5 = m\lg x.$$

Se agora, a partir de m_6, marcarmos sobre $x'x'$ a distancia m_6m_7 egual a m_6m_5 e do extremo m_7 tirarmos a ordenada m_7m_8

da logarithmica e a transportarmos para a ordenada do ponto dado por meio da parallela m_8M' ao eixo dos xx, obteremos o segmento MM′ correspondente á seguinte expressão

$$MM' = m_8 m_7 = 10^{(n \lg y + m \lg x)}.$$

D'onde se deduz

$$\lg MM' = n \lg y + m \lg x$$

ou

$$MM' = y^n x^m.$$

Repetindo a mesma construcção para os mais pontos da curva comprehendidos entre A_1 e B_1, teremos achada a area AA′B′B, relativa ao integral que se procura, entre os limites $x_0 = 0A$ e $x_1 = 0B$

$$AA'B'B = \int_{x_0}^{x_1} y^n x^m \, dx.$$

Quando as ordenadas MM_1 e Mm são superiores á unidade graphica, as parallelas ao eixo das abscissas, conduzidas pelos pontos M_1 e m, encontram a logarithmica acima do ponto O'_1, e n'este caso a determinação dos pontos das transformadas é feita com o auxilio das linhas O_1S', O_1R' e O_1T' symetricas de O_1S_1, O_1R e OT.

Com as mesmas linhas O_1R, O_1R', O_1T e O_1T' póde egualmente obter-se o integral da fórma $\int y^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{m}} dx$. Para este fim deverá proceder-se como se segue:

Dos pontos m_1 e m'_1 da logarithmica, determinados como se disse anteriormente, conduzem-se parallelamente ao eixo $y'y'$ as rectas m_1m_7 e $m'_1m'_4$ até encontrarem as linhas O_1R e O_1T, e dos pontos extremos m_7 e m'_4 d'aquellas rectas levantem-se as perpendiculares $m'_7m'_6$ e $m'_4m'_5$.

A primeira perpendicular, encontrando a bissetriz O_1S_1 no ponto m'_6, determinará a parallela $m'_8m'_5$ a $y'y'$, que interceptará a segunda perpendicular no ponto m'_5, para o qual se verificarão similhantemente as seguintes relações:

$$m'_8 m'_5 = \frac{1}{n} \lg y,$$

$$O_1 m'_8 = \frac{1}{m} \lg x.$$

Portanto, se marcarmos sobre Ox' a distancia $m'_8 m'_9$ egual a $m'_8 m'_5$, e se do ponto m'_9 tirarmos a ordenada $m'_9 m_9$ da logarithmica e a transportarmos para a ordenada do ponto dado, acharemos como precedentemente

$$MM'' = y^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{m}}$$

e

$$AA''B''B = \int_{x_0}^{x^1} y^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{m}} dx.$$

Determinado, pois, o valor numerico do integral da fórma $\int y^n x^m dx$ para os valores particulares de m e n das fórmulas (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8) e (9), pela quadratura da area plana que lhe corresponde, teremos tambem determinada numericamente a massa, a abscissa do centro de gravidade, e os momentos de inercia principaes de qualquer solido de revolução, sendo conhecida geometricamente a sua curva meridiana.

Calculados aquelles elementos, facil é traduzir graphicamente os diversos valores de MK^2, e portanto os de I da equação (1).

IV

Determinação geometrica do momento de inercia de um solido qualquer em ordem a uma recta dada, sendo conhecidos os valores de M, X_y, I_x e I_y

Tracem-se (fig. 4.ª) dois eixos coordenados XX e YY, e, em relação a elles, descreva-se a hyperbole equilatera expressa pela equação

$$xy = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Esta hyperbole terá por assymptotas os dois eixos coordenados, e os seus eixos principaes achar-se-hão situados segundo as bissetrizes dos angulos formados pelos referidos eixos.

Tomando sobre a bissetriz OD, a partir da origem O, as duas duas distancias OC e OE, a primeira egual á diagonal do quadrado construido sobre a unidade linear oa, e a segunda egual ao dobro d'esta ultima grandeza, acharemos os pontos C e e, que corresponderão ao vertice e foco da hyperbole.

Tome-se sobre OX a distancia OG egual a 4M, quadruplo do valor da massa do solido, e no extremo g tire-se a ordenada gf; marque-se sobre OY a distancia of_1 egual a gf, e, em relação ao ponto f_1 como foco e ao ponto O como vertice, descreva-se a parabola OE.

Representando por x' e y' as coordenadas da parabola, teremos a equação

$$Mx'^2 = y' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Sendo a equação (15) satisfeita para $x = k$ (raio de giração) e $y = \frac{1}{k}$, e a (16) para $x' = x = k$ e $y' = Mk^2$, concluiremos que, se as abscissas representarem os valores do raio de giração, as ordenadas da hyperbole darão os valores reciprocos d'esses raios, e as ordenadas da parabola darão os dos momentos de inercia, e reciprocamente.

Posto isto, designe-se por k_x e k_y os raios de giração relativos aos momentos de inercia principaes I_x e I_y, e sejam respectivamente op e oq as grandezas lineares correspondentes aos valores d'estes momentos.

Tirem-se dos pontos p e q, parallelamente a OX, as rectas pp_1 e qq_1, até ao seu encontro com a parabola, e, determinando por meio das parallelas a OY, conduzidas pelos extremos p_1 e q_1, as ordenadas p_2p_3 e q_2q_3 da hyperbole, construa-se sobre estas duas grandezas, como semi-eixos, transportados para oq_1 e op_1, a semi-ellipse rp_1q_1.

Suppondo que o centro de gravidade do solido coincide com a origem das coordenadas, e que o eixo de revolução está situado segundo OX, teremos, segundo a theoria dos momentos de inercia, que os raios que partem do centro do ellipsoide, gerado pela revolução da semi-ellipse $p_1q_1r_1$ em volta de OX, não só determinarão a posição dos eixos dos momentos passando pelo centro de gravidade, como tambem darão os diversos valores reciprocos dos raios de giração para cada um dos referidos eixos.

Do que deixâmos expendido se conclue que, achando-se traçadas as tres curvas do 2.º grau pela fórma prescripta, e pretendendo-se determinar por meio d'ellas o valor do momento de inercia de um solido em ordem a uma recta qualquer, conduzida pelo centro de gravidade, com uma determinada inclinação α, sobre o eixo de revolução, proceder-se-ha do modo seguinte:

Construa-se sobre ox o angulo $\widehat{hop_1}$ egual a α, e com o centro em o e o raio egual ao semi-diametro oh descreva-se o arco de circulo hh_1; do ponto h_1, onde este arco corta o eixo dos y, tire-se parallelamente a ox a recta h_1h_3 até encontrar a hyperbole, e do ponto de intersecção k_1 conduza-se a parallela h_3h_1 a oy até encontrar a parabola.

A ordenada h_2h_1 da parabola dará o momento de inercia do solido, e a abscissa oh_2 o raio de giração.

Se a recta em ordem á qual se pretende determinar o momento de inercia não passa pelo centro de gravidade, mas está á distancia a d'este ponto, então, depois de se ter construido como precedentemente o raio de giração $h_1h_3 = k_1$ e marcado sobre oy a distancia $ol_1 = a$, conduzir-se-hão dos pontos h_3 e l_1

as parallelas $h_3 l_3$ e $l_4 l_3$ aos eixos coordenados até se obter o seu ponto de intersecção l_3, descrever-se-ha do ponto o como centro e com o raio egual a ol_3 o arco de circulo $l_3 l_2$ e tirar-se-ha parallelamente do ponto de intersecção l_2, determinado sobre ox, a ordenada $l_2 l_1$ da parabola.

Esta grandeza dará o momento de inercia que se procura, e a abscissa da parabola o raio de giração.

Suppondo que pelo eixo de revolução passam dois planos orthogonaes, e que o eixo dos momentos é dado pelas suas projecções sobre os referidos planos, o valor do angulo α e o da distancia a serão determinados pelos processos graphicos da geometria descriptiva.

Da applicação das theorias expostas ás peças de bronze estriadas de praça de calibre 12 centimentros, suppondo a densidade especifica do bronze $=8,7$, resultaram os seguintes valores numericos:

$M = 167$...... massa.
$V = 0^{mc},189$.. volume.
$P = 1640^{kilogr.}$.. peso.
$X_c = 0^{m},2$..... distancia do centro de gravidade ao plano, passando pela aresta do segundo reforço.
$I_x = 2,6$...... momento de inercia em ordem ao eixo da alma.
$I_y = 109,267$.. momento de inercia em ordem ao eixo perpendicular, passando pelo centro de gravidade.
$K_m = 0,813$.... raio de giração em ordem ao eixo dos munhões.
$I_m = 110$...... momento de inercia em ordem ao mesmo eixo.
$I = 97$....... momento de inercia em ordem á recta, inclinada de um angulo $\alpha = 37°$ e distanciada de $a = 0^{m},55$.

RECHERCHES RELATIVES AU CERCLE VARIABLE QUI COUPE DEUX CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES DONNÉS (*)

PAR

A. SCHIAPPA MONTEIRO

(Professeur à l'Ecole Polytechnique de Lisbonne)

Introduction

1. La publication de la suite de ces recherches ayant été retardée par des causes morales et matérielles fort justifiables, nous nous sommes fait un devoir de présenter prémièrement un résumé ou récapitulation de la partie qui se trouve insérée dans le t. II (1879) de ce Journal (pp. 50, 150 et 174).

Il est bon d'observer que ces recherches se basant sur des objets depuis si longtemps connus, nous ne pouvons naturellement prétendre au mérite de l'invention.

D'ailleurs ce n'est pas en soi un ouvrage achevé, où l'on fait disparaître toutes les aspérités; mais à peine un ensemble de principes qui nous serviront à la suite pour rédiger convenablement un *mémoire sur les propriétés des coniques sous le point de vue de leur génération* cycloïdale; ce qui entraîne une manière analogue de faire l'étude des surfaces du second ordre, que nous présenterons plus tard.

Nous avons aussi adopté des termes que nous jugeons propres á abréger le langage géométrique, et lesquels nous soumettons à l'appréciation du lecteur.

(*) Voir *Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas*, tome II.

2. Lorsque nous avons présenté, dans ce journal, la *solution générale purement synthétique et élémentaire* du problème qui a pour objet de *trouver une circonférence de cercle* (x), *qui coupe deux autres circonférences données* (E) *et* (I) *sous des angles également donnés* e *et* i (*): problème proposé par l'illustre mathématicien M. Pedro Amorim Vianna, dans ce même Journal (dans le cas tout particulier où les circonférences données sont concentriques) (**), nous y avons dit, que, plus tard, nous étudierions les diverses propriétés remarquables, qui se déduisaient de la figure, soit dans le cas particulier, soit dans le cas général.

Ce problème est la base de la présente étude tant synthétique que analytique, que nous pourrions naturellement faire en partant du cas général pour en dériver ensuite tous les différents cas qui peuvent se présenter; mais comme l'étude *purement synthétique* est sans doute plus importante que *l'analytique*, et elle devient plus simple et plus élémentaire en partant du cas où les circonférences sont concentriques, noùs considérerons d'abord ce cas et ensuit le cas général.

En tout cas nous jugeons aussi convenable de présenter ici la solution synthétique qu'alors nous avons donné de ce problème.

Soient donc (fig. 1) (E) et (I) les circonférences données, et (x) la circonférence demandée.

Supposons le problème résolut: soit b l'un des points où la circonférence (x) coupe la circonférence (E); et b' celui où elle coupe la circonférence (I). Si nous menons les tangentes tb et tb' aux points b et b' de la circonférence (x), et désignons par a le second point où tb coupe (E), et par d' le second point d'intersection de $t'b'$ avec (I), il est clair que, étant $tb=tb'$, la solution du problème proposé se trouve ramenée à la solution très-simple et générale du problème suivant:

Étant donnée une circonférence (E) *et une de ses cordes* ab, *trouver dans une autre circonférence également donnée* (I) *une corde* b'd' *de grandeur connue, telle que le point de concours* t *de ces deux cordes détermine sur l'une* ab *de celles-ci un segment* tb *égal à l'un des deux segments* tb', td', *qu'il forme sur l'autre corde* b'd'.

D'après cela, menons par d' une droite parallèle à bb'; repré-

(*) Voir p. 174 e suiv. du vol. I.
(**) Voir p. 160 du vol. I.

sentons par d le point où elle coupe la corde ab; et par m et m' respectivement les points milieux du segment bd e de la corde $b'd'$, qui forment les côtés du trapèse isoscèle $bdd'b'$.

La solution du problème *auxiliaire* se réduit alors à déterminer la circonférence (y), touchant ce segment et cette corde aux points milieux, ou touchant ce segment au point milieu et une circonférence (I'), enveloppe des différentes positions de la corde $b'd'$ de la circonférence (I).

Ainsi étant e et i les angles sous lesquels la circonférence (x) doit couper respectivement les circonférences données (E) et (I), nous tracerons dans la circonférence (E) une corde ab, qui la coupe sous l'angle e, et dans la circonférence (I) la corde $b'_1d'_1$, qui la coupe sous l'angle i; et si, après cela, sur la corde ab, par exemple, nous marquons le segment bd égal à la corde $b'_1d'_1$, et à son point milieu m lui élévons une perpendiculaire, sur laquelle nous prenons le segment mc égal au rayon de la circonférence (I'), et unissons son centre C_0 au point c, la perpendiculaire élevée au point milieu n de C_0c coupera mc en un point O, qui sera évidemment le centre de la circonférence (y), et coupera ab au point t, par lequel doit passer la corde demandée $b'd'$: par suite le centre o de la circonférence (x) sera l'intersection de nt avec la perpendiculaire bo élevée à l'extrémité b de la corde ab.

3. *Discussion*. Puisque le segment mc peut être pris soit à la partie supérieure, soit à la partie inférieure de ab, il s'ensuit qu'il y a deux circonférences (x) et (x') correspondantes à cette position de la corde, lesquelles, passant par le point b de (E), donnent la solution du problème proposé, tant pour le segment bd situé à droite que à gauche de ce point, comme on reconnait tout de suite.

Si nous considérons l'autre corde ba_1, qui, passant par le même point b, coupe (E) sous l'angle e, nous auront deux autres circonférences (x_1) et (x'_1) égales aux circonférences (x) et (x'), et symétriquement placées par rapport à celles-ci.

Quand nous prendrons arbitrairement un point b'_1 de la circonférence (I), nous trouverons analoguement quatre circonférences (z), (z') et (z_1), (z'_1) égales et symétriques deux à deux; mais qui, comme nous savons, ne seront point distinctes de celles des deux groupes, que nous avons trouvé pour chaque point de (E).

Étant (E) la circonférence extérieure et (I) la circonférence intérieure, les circonférences (x) et (x') se trouveront de même côté et les circonférences (z) et (z') de côtés différents.

On voit, donc, que à chaque point des circonférences données répondent en général quatre solutions égales et symétriques deux à deux.

Si les angles e et i sont égaux, la solution devient très-simple: car, le segment bb', étant égal à la somme ou différence de deux rayons C_0b et C_0b' de deux circonférences données, le centre o du cercle demandé sera l'intersection de bo avec la perpendiculaire élevée au point milieu de ce segment.

Remarque. — Comme on vient de le voir la méthode suivie est générale et par conséquent également applicable au cas où les circonférences (E) et (I) (fig. 2) ne sont pas concentriques.

En ce cas, il est évident que les quatre cercles passant par chaque point des circonférences données ne seront toujours égales ni symétriques deux à deux, que pour des positions spéciales de ces points, comme on le verra.

Lorsqu'on a $e=i$ la corde bb' (fig. 2) coupant aussi les cercles donnés (E) et (I) sous même angle, passera toujours par un de leurs centres *de similitude,* ou *d'homothétie*, ce qui donne le moyen facile de trouver alors le centre o du cercle demandé (x), analoguement au cas précédent où les centres des circonférences et leurs centres de similitudes se confondent.

4. En passant nous allons encore présenter une autre solution générale, également synthétique et élémentaire du même problème, attendu que nous reviendrons sur elle à la suite.

Soient, donc, C et C_0 les centres des circonférences données (E) et (I) (fig. 2 *bis*). Supposons de même le problème résolut; étant b, b_1 et b', b'_2 les couples de points où la circonférence demandée (x) coupe respectivement chacune de ces circonférences.

Representons par $\underset{o}{E_s}$ le rencontre des droites bb' et $b_1b'_2$, et par d_0 et d leurs seconds points d'intersection avec la circonférence (I). Désignons par b'' et d'' les points d'intersection des prolongements des rayons ob' et ob'_2 de (x) avec (I); et par d'_1 et i_1 l'extrémité du diametre $d_0C_0d'_1$ de ce cercle et du point de rencontre de ce diamètre avec le prolongement du rayon ob.

D'après cela l'angle $C_0b'b''$ (égal à l'angle donné i ou à son supplément) sera aussi égal à la somme des angles $C_0b'd_0$ et

$d_0b'b'''$ ou $bb'o$; mais les triangles $C_0b'd_0$ et obb' étant isoscèles, donnent

$$\sphericalangle\, C_0b'd_0 = bd_0i_1$$

et

$$\sphericalangle\, d_0b'b''' = i_1bd_0$$

d'où

$$\sphericalangle\, C_0b'b''' = bd_0i_1 + i_1bd_0,$$

donc, l'angle $C_0b'b'''$ est égal à l'angle extérieur bid'_1 du triangle i_1bd_0.

De là cette construction:

Comme le problème est indéterminé on prend sur la circonférence (E), par exemple, un point quelconque b, par lequel on mène une droite bi_1, formant l'angle donné e avec le rayon Cb, et dans la circonférence (I) on tire un diamètre $d_0C_cd'_1$, coupant la droite bi_1 sous l'angle donné i; alors la droite d_0b, que unit l'une des extrémités d_0 de ce diamètre au point b, coupera (I) en un second point, appartenant au cercle demandé (x); et puisque le segment bb' est corde de cette circonférence, son centre sera l'intersection o de bi_1 avec la perpendiculaire p_xo élevée au point milieu p_x de ce segment.

5. *Discussion.* — Si on tire la droite bd'_1, unissant le point b à l'autre extrémité d'_1 du diamètre $d_0d'_1$ de la circonférence (I), et on désigne par b''_1 le second point d'intersection de cette droite-là avec cette circonférence, la perpendiculaire p'_xo' au point milieu du segment bb''_1, coupera la droite bi_1 au point o', qui sera le centre d'une autre circonférence (x'), satisfaisant au problème; étant b'' et b'_1 respectivement les seconds points d'intersection de cette circonférence avec celle-là, et avec la circonférence (E): ce qu'on peut prouver directement. En effet, étant β''_1 et β''_2 respectivement deux points du prolongement de $o'b''_1$ et bb''_1, pris vers le côté de b''_1, l'angle $C_0b''_1\beta''_1$ [égal à $(180-i)$ ou à i] sera aussi égal à la somme des angles $C_0b''_1\beta''_2$ et $\beta''_2b''_1\beta''_1$ ou bb''_1o', et par suite, les triangles $C_0b''_1d'_1$ et $o'bb''_1$ étant isoscèles, on a

$$\sphericalangle\, C_0b''_1\beta''_2 = bd'_1i_1$$

et

$$\sphericalangle\, \beta''_2b''_1\beta''_1 = i_1bd'_1$$

d'où

$$\sphericalangle C_0b''_1 \beta''_1 = bd'_1 i_1 + i_1 bd'_1$$

ce qui montre que l'angle $C_0b''_1\beta''_1$ est égal à l'angle extérieur bid_0 du triangle $i_1bd'_1$.

Si, dans la circonférence (I), on tire le second diamètre $d'_0C_0d_1$, coupant au point i'_1 la droite bo sous l'angle donné i, les segments bb'_2 et bb'' des droites bd'_0 et bd_1 seront encore cordes des cercles (x) et (x'), et par conséquent aux deux diamètres $d_0d'_1$ et d'_0d_1 répondront mêmes deux solutions.

En considérant la seconde droite $b\overset{1}{o}\overset{1}{o}'$, qui forme avec le rayon Cb l'angle donné e, on aura deux autres cercles $(\overset{1}{o})$ et $(\overset{1}{o}')$ passant par b.

Ainsi par ce procédé nous obtiendrons aussi facilement les quatre solutions du problème relatives à chaque point de la circonférence (E) ou (I).

Remarque. — Dans le cas où l'on considére seulement l'angle $C_0b'b'''$ égal à i, et non pas à son supplément, l'angle i pourra être égal à l'un angle extérieur ou intérieur du triangle ibd_0.

Il en sera de même de l'angle e, quand on prendra arbitrairement un point de la circonférence (I).

6. Il est inutile d'observer que les deux solutions présentées (n.os 2 et 4) sont également applicables aux cas où quelqu'une des circonférences données a le *rayon nul* ou *infini*, c'est-à-dire quand cette circonférence se réduit à un *point* ou à *deux droites parallèles, l'un à distance finie* et *l'autre à l'infini*.

Quand les circonférences données ont toutes deux les rayons infinis, ou se réduisent à quatre droites étant deux à distance finie et les autres parallèles à celles-ci à l'infini, la solution du problème s'obtient à peu près de même manière, puisque quelque difficulté, qui se présente, à cause des points et des lignes qui alors passent à l'infini, sont à peine apparentes, comme on va le voir.

Dans ce cas les circonférences enveloppes (E') et (I') (fig. 1) des différentes positions des cordes ba et $b'd'$ seront remplacées par ces mêmes cordes, que nous représentons par (E'_∞) et (I'_∞), et par deux autres droites à l'infini parallèles à celles-ci, et le segment C_0c passant aussi à l'infini, il n'est pas possible d'élever directement à son point milieu la perpendiculaire to, dont l'intersection avec bo donne le centre de la circonférence demandée (x); mais comme elle se confond évidemment avec la bissectrice de l'angle btb', nous avons ainsi un moyen très-facile de l'obtenir.

Soient donc (E_∞) et (I_∞) (fig. 2 *tris*) les deux droites, qui représentent les circonférences données de rayons infinis.

Par les points arbitraires b de la droite (E_∞), et b'_1 de la droite (I_∞) menons respectivement les droites (E'_∞) et (I'_∞), faisant avec celles-ci les angles donnés e et i, et dont le point d'intersection nous désignons par t_1.

Cela étant, tirons la droite bp_xb', parallèle à la bissectrice de l'angle supplémentaire de l'angle $bt_1b'_1$, qui coupera (I_∞) au point b', par le quel passera le cercle demandé (x), et dont le centre sera évidemment l'intersection de la perpendiculaire bo au point b de (E_∞) avec la perpendiculaire tp_xo au point milieu p_x du segment bb'.

Si au point t où la perpendiculaire tp_xo coupe la droite (E_∞) on mène la droite tb'' coupant aussi (I_∞) sous l'angle i au point b'', ou répondant à l'une seconde position de (I'_∞), la perpendiculaire tp'''_xo' au point milieu du segment bb'', ou la bissectrice de l'angle btb'' coupera bo au point o', qui sera le centre d'une seconde circonférence (x') satisfaisant au problème.

En prenant l'autre position de la droite (E'_∞) où elle coupe encore (E_∞) au point b sous l'angle e, nous aurons les deux autres circonférences passant par ce point; et, par suite, nous obtiendrons ainsi les quatre solutions correspondantes.

Observation.—La seconde manière de résoudre le problème (n.° 4) est également applicable à ce cas particulier en la modifiant d'une manière analogue, et le chemin à suivre est tellement simple qu'il serait inutile de s'en occuper.

7. Nous résolvons aussi ensuite synthétiquement le problème, qui a pour objet de *tracer un cercle qui coupe sous des angles égaux* ou *inégaux trois cercles donnés* (x), (x_1), (x_3) (*).

Comme on le verra, il peut exister, en général, dans le premier cas *huit* solutions, et dans le second *quarante-huit.*

Dans ces humbles recherches nous nous sommes spécialement servis des beaux travaux de géométrie de MM. Poncelet, Chasles, Serret, Clebsch, Salmon, Briot, Bouquet, Carnoy, etc.

(*) Nous avons déjà annoncé la solution de ce problème dans le t. IV (1882) de ce Journal (p. 106).

Nous avons aussi eu fréquemment recours aux intéressants et supérieurs ouvrages de M. Bellavitis sur la méthode des équipollences, dont, les principes remarquables et féconds, nous avons adopté quelquefois.

Nous nous sommes aussi livrés à l'étude de ses divers travaux sous le point de vue de leur extension à l'espace, en consultant spécialement les ouvrages notables de MM. Argant, Scheffler, Hamilton, Grassman, Sibeck, Dillner, Tait, Briot, Bouquet, Hoüel, etc.

Enfin nous devons observer que, les présentes recherches, ayant été rédigées de manière à dispenser de se présenter les figures, le lecteur est prié de faire les figures respectives.

I

Cas des cercles concentriques

§ 1

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE (*)

8. Soient R et r les grandeurs des rayons des cercles (E) et (I) (fig. 1); et traçons sur ces cercles respectivement les cordes ba et $b'_1d'_1$, qui les coupent sous les angles e et i, et dont les points milieux sont réprésentés par m_1 et m'_1.

Comme le problème est indéterminé, si nous prenons le point arbitraire b du cercle (E), et voulons obtenir l'un (x) des cercles, qui, passant par ce point, coupe les deux cercles donnés, sous les angles également donnés, nous savons (**) que *nous avons à prendre sur la corde* ba *un segment* bm_d *égal à la moitié de la corde* $\mathrm{b'_1d'_1}$, *lui élever au point* m_d *la perpendiculaire* $\mathrm{c_i m_d c_s}$, *en marquant sur celle-ci le segment* $\mathrm{m_d c_s}$ *égal au rayon* r' *du cercle* (I'), *enveloppe de la corde* $\mathrm{b'_1d'_1}$ *du cercle* (I); *puis unir le point* c_s *avec*

(*) Ce paragraphe contient le resumé des pag. 54 à 58 du tome II.

(**) Voy. notre première solution pag. 147.

le centre C *de ce même cercle* (I), *et alors la corde* ba'_1 *perpendiculaire en* b *à la corde* ba, *sera coupée par la perpendiculaire* $on_s t$, *élevée sur le milieu* n_s *de* Cc_s, *au point* o, *centre de l'un* (x) *des cercles demandés.*

Quand nous considérons, sur la perpendiculaire $c_i m_d c_s$, le segment $m_d c_i = c_s m_d$, la perpendiculaire $o'n_i t$, sur le milieu n_i de $C_0 c_i$, coupera ba'_1 au point o', qui sera le centre d'un second cercle demandé (x').

9. Si nous marquons sur la corde ba le segment $bm_e = m_d b$, et en m_e lui élevons la perpendiculaire $c'_s m_e c'_i$, en prenant sur celles-ci les segments $m_e c'_s$ et $c'_i m_e$, égaux au rayon r', nous trouverons mêmes cercles (x) et (x'): car il est facile de reconnaître que les perpendiculaires $on'_s t$ et $o'n'_i t'$, élevées aux points milieux n'_s et n'_i de $C_0 c'_s$ et $C_0 c'_i$ coupent ba'_1 respectivement aux mêmes points o et o', où cette droite est rencontrée par les perpendiculaires $on_s t$ et $o'n_i t$.

10. En considérant l'autre extrémité a'_1 de la corde ba'_1, si on trace la corde $a'_1 b_3$, parallèle à ba et on fait des constructions analogues aux précédentes, nous trouverons deux points o_1 et o'_1, représentant les centres de deux cercles (x_1) et (x'_1) respectivement égaux à (x) et (x'), et symétriquement placés à l'égard de ceux-ci.

11. Les centres t et t' des cercles (x_c) et (x'_c), qui coupent (E) et (I) sous les angles *complémentaires* des angles donnés sont déterminés respectivement par les droites $n_s ot$ et $n'_s ot'$, ou $n_i o't$ et $n'_i o't'$.

12. En considérant aussi la corde ab_3, parallèle à ba'_1, nous trouvons des cercles égaux aux cercles (x), (x'); (x_1), (x'_1); (x_c), (x'_c), et symétriques de ceux-ci.

13. La seconde corde ba_1, qui coupe le cercle (E) au point b, sous l'angle e, donnera aussi deux cercles (x_2), (x'_2) égaux aux cercles (x), (x') et symétriquement placés par rapport à ceux-ci.

14. Étant b', b'_2 les points où le cercle (x) coupe le cercle (I), et b'', b''_1 ses points de rencontre avec le cercle (x'): les tangentes $b't$ et $b'_2 t$, au cercle (x), aux points b' et b'_2, coupent évidemment ba sur les points t et t'; et les tangentes $b''t$ et $b''_1 t$ au cercle (x') aux points b'' et b''_1, passeront respectivement par ces points-là: toutes ces droites étant également tangentes au cercle (I'). Semblablement les tangentes $b'o$ et $b''o'$ au cercle (x_c)

coupent ba'_1, aux points o et o', par lesquels passent respectivement aussi les tangentes b'_2o et b''_1o' aux points b'_2 et b''_1 du cercle (x'_c): toutes ces droites étant évidemment aussi tangentes au cercle (I''), enveloppe de la corde $b'_1d'_2$ perpendiculaire à la corde $b'_1d'_1$; et dont le rayon est représenté par r''.

Le cercle (x_c) passera donc par les points b', b''; et le cercle (x'_c) par les points b'_2, b''_1.

15. Les *lieux géométriques* des centre o, o_1, ..., de la suite de cercles (x), (x_1), ...; et des centres o', o', ..., de la suites (x'), (x'_1), ..., sont deux cercles (X) et (X′) complètement déterminés.

16. *Observation.*—Ces deux cercles se transforment en deux autres coniques (Σ) et (Σ'), lorsque les cercles (E) et (I) laissent d'être concentriques.

17. Les *centres des cercles* (x_0) et (x'_0), qui passeront par C_0 et par les extrémités des cotés $c_sc'_s$ et $c_ic'_i$ du *rectangle auxiliaire* $c_sc_ic'_ic'_s$, auront pour *lieux géométriques* les cercles (X) et (X′).

Il en sera de même des lieux géométriques des centres des cercles (x_c) et (x'_c) et de ceux qui passeront par C_0 et par les extrémités des côtés c_sc_i et $c'_sc'_i$.

18. Plusieurs autres propriétés dérivent immédiatement de la simple inspection de la figure; mais elles sont de peu de valeur pour être présentées.

19. *Discussion.*—Étant (E′) et (E″) les cercles enveloppes des cordes *complémentaires* ou *orthogonales* ba et ba'_1 du cercle (E); et R′ et R″ leurs rayons; si on considère soit les *cercles auxiliaires* (y) et (y'), qui touchent (I′) aux points m' et m'', et la corde ba au point m_d, soit le rectangle auxiliare $c_sc_sc_ic_i$, en supposant toujours qu'on prend *arbitrairement* les points de (E), par lesquels passent les circonférences demandées, on a:

1.° Étant $R' > r'$ les cercles (x) et (x') se trouvent de méme côté de ba.

2.° Si on a $R' < r'$, il résulte que les cercles (x) et (x') se trouvent de côtés différents de ba.

3.° Dans le cas où $R' = r'$ l'un (x') des cercles demandés aura le rayon infini, et par suite le cercle correspondant (X′) passera tout á fait à l'infini.

4.° Étant $R' = 0$, ou $R'' = R$, ou bien $e = 90°$ les cercles (x) et (x') sont égaux et se trouvent de côtés différents de ba; d'où il résulte que les cercles (X) et (X′) se confondent en un cercle unique.

5.° Quand on a $r' = 0$, ou $r'' = r$, ou bien $i = 90°$ ou encore $r = 0$, les cercles (x) et (x') se confondent, et il en sera de même des cercles (X) et (X′).

6.° Étant en même temps $R' = 0$ et $r' = 0$, ou $R'' = R$ et $r'' = r$, les cercles (x) et (x'), se confondant, auront des rayons infinis ou se réduiront à l'un des diamètres des cercles donnés, et à l'une droite parallèle à celui-ci située à l'infini.

Il en sera de même pour $R' = 0$ et $r = 0$ ou $R'' = R$ et $r = 0$. Le cercle (X) et (X′) passeront donc à l'infini.

Ainsi, dans les trois premiers cas, pour chaque point arbitraire b, ..., du cercle (E), il y aura toujours quatre solutions égales et symétriques deux à deux.

Dans le quatrième et cinquième cas il y aura seulement deux solutions égales et symétriques.

Pour le sixième cas nous n'aurons qu'une solution.

Quand on aura $e = i$, il vient

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \frac{R''}{r''}.$$

Enfin, on pourrait considérer d'autres cas qu'il serait inutile de s'en occuper, en égard à leur simplicité.

20. Si les centres des cercles demandés devaient se trouver sur une ligne donnée (L) le problème laisserait d'être indéterminé, et les centres des cercles demandés seraient les points d'intersection (*réels* ou *imaginaires*) de (X) et (X′) avec (L).

§ 2

ÉTUDE ANALYTIQUE (*)

21. Voyons maintenant comment nous pourrons trouver l'expression du rayon d'un quelconque des cercles demandés.

(*) Ce § contient le résumé des pag. 59 à 64 du tome II.

En considérant le cercle (x) (fig. 1), soit m'_2 le point milieu de la corde $b'b'''$ du cercle (I), menée par o et tangente à (I''); et soit m_2 le point milieu de ba'_1, qui contient ce même point o.

Les triangles rectangles C_0m_2o et $C_0m'_2o$ donnent

$$\overline{C_0o}^2 - \overline{C_0m}^2_2 = \overline{m_2o}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

et

$$\overline{C_0o}^2 - \overline{C_0m'}^2_2 = \overline{m'_2o}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

d'où

$$\overline{C_0m}^2_2 - \overline{C_0m'}^2_2 = \overline{m'_2o} - \overline{m_2o}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

et si nous faisons *tourner la droite* m'₂o *autour de* o, jusqu'à ce que le point b' *coïncide* avec b, et prenons ce point pour *origine des segments*, que nous considérons *positifs*, quand ils seront *comptés de* b *vers* m_2, cette formule donnera

$$bo = \frac{\overline{bC_0}^2 - \overline{b'C_0}^2}{2\,(bm_2 - b'm'_2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

En tenant compte du *signe* du segment $b'm'_2$, et en représentant par r_x les rayons bo et bo' des cercles (x) et (x'), l'expression générale, qui donne ces *rayons en grandeur* et *en direction*, sera

$$r_x = \frac{R^2 - r^2}{2(R' \pm r')} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Observation. — Nous pouvons aussi déduire l'expression de r_x, en considérant dans le cercle (E) la corde ba'_1, et la corde B'B''', déterminée par le prolongement de corde $b'b'''$ du cercle (I).

22. Étant évidemment

$$R = R.\cos.e, \quad \text{et} \quad r' = r.\cos.i$$

la formule (8) devient

$$r_x = \frac{R^2 - r^2}{2(R.\cos.e \pm r.\cos.i)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Nous pouvons de même arriver à cette formule qui donne r_x en fonction de R, r et e, i, d'une manière directe en considérant les triangles obC_0 et $ob'C_0$.

23. En représentant par r_{x_c} les rayons bt, bt' des cercles (x_c), (x'_c), *complémentaires* de (x), (x'), ou qui les coupent *orthogonalement*, nous trouverons analoguement les expressions

$$r_{x_c} = \frac{R^2 - r^2}{2(R'' \pm r'')} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

et

$$r_{x_c} = \frac{R^2 - r^2}{2(R.\mathrm{sen}.e \pm r.\mathrm{sen}.i)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

24. Considéront les formules (8) et (14), dont la construction peut se réduire à la détermination d'une troisième ou quatrième proportionelle.

Si nous considérons r_x comme une troisième proportionelle, nous menons par b une tangente $b\beta$ au cercle (I), et marquons sur ba le segment $b\beta'$ égal au longueur $b\beta$ de cette tangente; puis il ne s'agira plus que de prendre sur ba'_1 les segments $b\alpha$ et $b\alpha'$ égaux au double de $R' + r'$ et de $R' - r'$, ou au double de $R.\cos.e + r.\cos.i$ et de $R.\cos.e - r.\cos.i$ (pris dans la direction due), joindre le point β' à α et α', et élever les perpendiculaires $\beta'o$ et $\beta'o'$ à $\beta'\alpha$ et $\beta'\alpha'$ au point β' lesquelles détermineront sur ba'_1 les centres o et o' des cercles demandés (x) et (x').

D'une manière analogue on construira les expressions (15) et (16).

25. La discussion de ces formules est tellement facile qu'il serait inutile de s'en occuper.

26. En variant l'angle e autour du point b, le lieu géométrique décrit par le point o, centre du cercle (x) sera une *conique* (*),

(*) Voy. la seconde partie.

dont le *point fixe b* est un des *foyers:* car, la formule (14) peut prendre la forme générale

$$r_x = \frac{p}{1 + f.\cos.e} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (17)$$

équation polaire d'une conique, rapportée aux foyers.

Il en sera de même pour les points t et t', centres des cercles (x_c) et (x'_c).

27. La relation entre les rayons des cercles complémentaires considérés, sera évidemment

$$\frac{r_x}{r_{x_c}} = \frac{R'' \pm r''}{R' \pm r'} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (18)$$

ou

$$\frac{r_x}{r_{x_c}} = \frac{R.\mathrm{sen}.e \pm r.\mathrm{sen}.i}{R.\cos.e \pm r.\cos.i} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (19)$$

28. Pour déterminer l'équation polaire des lieux géométriques (X) et (X') des centres o, o_1, ...; et o', o'_1, ...; des cercles (x) et (x'), nous pouvons, ou recourir directement aux formules (1) et (2), ou substituer, dans une quelconque de celles-ci, la valeur du rayon des cercles (x) et (x').

Ainsi, en faisant $C_0 o = \rho_0$, nous aurons

$$\rho^2_o = R''^2 + \left[\frac{R''^2 - r''^2}{2(R' \pm r')} - \frac{1}{2}(R' \pm r')\right]^2 \quad \dots\dots \quad (23)$$

ou

$$\rho^2_o = r''^2 + \left[\frac{R''^2 - r''^2}{2(R' \pm r')} + \frac{1}{2}(R' \pm r')\right]^2 \quad \dots\dots \quad (24)$$

ou

$$\rho^2_o = \frac{(R''^2 - r''^2)^2}{4(R' \pm r')^2} + \frac{2(R''^2 + r''^2) + (R' \pm r')^2}{4} \quad \dots\dots \quad (25)$$

Si nous voulons tenir ρ_o en fonction de R, r et de e, i, ces expressions deviennent

$$\rho^2_o = R^2 . \operatorname{sen}^2 . e + \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R . \cos . e \pm r . \cos . i)} - R . \cos . e \right]^2 \ldots \quad (29)$$

$$\rho^2_o = r^2 . \operatorname{sen}^2 . i + \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R . \cos . e \pm r . \cos . i)} \pm r . \cos . i \right]^2 \ldots \quad (30)$$

$$\rho^2_o = \left[\frac{R^2 . \operatorname{sen}^2 . e - r^2 . \operatorname{sen}^2 . i}{2(R . \cos . e \pm r . \cos . i)} \right]^2$$

$$+ \frac{1}{4} [2(R^2 + r^2) - (R . \cos . e \mp r . \cos . i)^2] \ldots . \quad (31)$$

29. Il en sera de même pour les lieux géométriques des centres des cercles (x_c) et (x'_c).

30. Quant aux constructions de ρ_o, elles sont une conséquence de celles de r_x; d'ailleurs elles peuvent dériver directement des expressions respectives en considérant ρ_o comme l'hypoténuse de triangles dont la grandeur des cathètes sera la racine carrée de chacun des deux termes du second membre de ces mêmes expressions.

31. *Observation.*—Nous jougeons inutile d'ajouter rien de plus, en vue de l'étude générale, dont nous passons à nous occuper.

II

Cas de cercles non concentriques

§ 1

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE

32. En considérant, dans le cas précédent (fig. 1), les constructions relatives à chaque point b, b_1, ..., du cercle (E), il est évident que, quand nous donnerons à l'autre cercle (I) *un mouvement de translation quelconque*, le premier cercle restant fixe, *tous les points et tous les lignes de la figure prendront leurs positions relatives correspondantes à la solution du problème dans le cas général*, que nous allons étudier.

Désignons, donc, par C_0 la position finale du centre du cercle (I) (fig. 2), et par C le centre du cercle (E), dans lequel nous considérons les deux points b et a'_1 correspondants à sa corde ba'_1.

Pendant le mouvement du cercle (I) les rayons C_0c_s et $C_0c'_s$ tourneront autour des sommets c_s et c'_s du rectangle auxiliaire $c_sc'_sc_ic'_i$, et les perpendiculaires n_so et n'_so élevées sur les points milieux n_s et n'_s de ces rayons se coupant constamment sur la corde ba'_1, leur point d'intersection o sera le centre du cercle (x), qui passe par b; et il en sera de même quand nous considérerons le déplacement des rayons, qui déterminent le centre o_1 du cercle (x_1), lequel passe par l'autre extrémité a'_1 de la corde considérée.

Il en résulte que le cercle (X) (fig. 1) se transformera en *une courbe* (Σ) (fig. 2), que continuera à couper la droite ba'_1 *en deux points* o *et* o_1, et par conséquent cette courbe sera *une conique*. La *transformée* du cercle (X′) sera de même *une autre conique* (Σ').

Lorsque le cercle (I) se réduit au centre C_0 les coniques (Σ) et (Σ') se confondront en *une seule et même conique* (σ).

De là ce théorème:

Théorème I. — *Une section conique quelconque* (Σ) *peut être considérée comme la courbe parcourue par le centre* o *d'un cercle* (x) *variable de grandeur, assujetti à couper continuellement sous des angles donnés* e *et* i, *deux cercles également donnés* (E) et (I); *ou à passer par un point donné* C_0 *et à couper, sous un angle donné* e, *un cercle également donné* (E).

En faisant $(90^\circ - e) = e'$ et $(90 - i) = i'$, ce théorème se transformera dans le suivant

Théorème II. — *Une section conique quelconque* (Σ) *peut être considérée comme la courbe parcourue par le point d'intersection* o *de deux cordes* ba'_1, *et* $b'b'''$, *appartenant respectivement à deux cercles donnés* (E) et (I), *et les coupant continuellement sous des angles également donnés* e′ *et* i′, *de manière que le point d'intersection considéré se trouve équidistant de deux extrémités* b *et* b′ *de ces cordes; ou cette conique peut être considérée comme la courbe* *parcourue par le point* o *de la corde* ba'_1 *d'un cercle donné* (E), *coupé par celle-ci sous un angle également donné* e' *de manière que ce point se trouve équidistant d'un point donné* C_o, *et d'une des extrémités* b *de cette corde.*

33. En consididérant les tangentes om_2 et om'_2 aux circonférences enveloppes (E'') et (I'') de ces cordes, *la somme algébrique de ces tangentes sera constante,* ou *égale à la somme* ou *à la différence des segments* bm_2 *et* $b'm'_2$, ou *des demi-cordes des cercles* (E) *et* (I), *égales aux rayons* R' *et* r' *des cercles enveloppes* (E') et (I') *des cordes* ba *et* b'd' (perp. à ces demi-cordes), en tenant toujours compte du signe des segments respetifs.

Si nous représentons par M_1 et M'_1 les points milieux des côtes $c_s c'_s$ et $c_i c'_i$ du rectangle auxiliaire, le segment $b'm'_2$ étant égal à bM_1 ou à bM'_1, sera constamment positif ou constamment negatif, selon que le point o décrira l'une ou l'autre des coniques (Σ), (Σ'). Ainsi, en représentant par τ et τ' les segments variables om_2 et om'_2, on aura pour l'une (Σ) des coniques:

$$\tau \pm \tau' = R' + r' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

et pour l'autre conique (Σ')

$$\tau \pm \tau' = R' - r' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Donc:

Théorème III. — *Étant donnés deux cercles* (E'') et (I''), *si deux tangentes à ceux-ci se déplacent de manière que la somme algébrique des distances* τ *et* τ' *des points de contact au point d'intersection* o *de ces tangentes soit une grandeur constante, le lieu géométrique décrit par ce point d'intersection sera une conique* (Σ) *donnée de forme et de position.*

Dans le cas où le cercle directeur (I) se réduit à son centre C_o, on a $r' = o$, et la tangente respective se confondra avec le vecteur $C_o o = \rho'$, il vient

$$\tau \pm \rho' = R' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Ainsi les deux coniques se confondront en une seule conique (σ), et le point C_o sera l'un des foyers.

Donc:

Théorème IV. — *Étant donné un cercle* (E'') *et un point* C_0, *si l'une tangente à ce cercle et un rayon vecteur, partant de ce point, se déplacent de manière que la somme algébrique des distances* τ *et* ρ', *du point de contact et du point donné à celui de l'intersection* o *de ces droites variables, soit une grandeur constante, le lieu géométrique décrit par ce point d'intersection sera une conique* (σ) *donnée de forme et de position.*

34. D'après cela, nous pouvons donner aux cercles enveloppes (E'') et (I'') le nom de *cercles focaux* ou *foyers tangentiels*, et à leurs tangentes τ et τ' le nom de *vecteurs tangentiels* ou *roulants*.

Dans le cas où ces cercles se réduisent à leurs centres, ils peuvent recevoir le nom de *points focaux* ou *foyers rayonnants* et les vecteurs correspondants le nom de *vecteurs pivatants* ou *rayonnants*: en réservant la dénomination ordinaire de *foyers* et de *vecteurs* pour exprimer les foyers et les vecteurs, quels qu'ils soient.

Si plusieurs coniques ont un même *cercle focal*, nous les appelons *monocyclomofocales* ou *monocycloconfocales*.

Quand les coniques auront un même *point focal*, elles seront nommées *monostigmoconfocales*.

Les coniques ayant les deux mêmes *cercles focaux* nous les appellerons *cyclomofocales* ou *cycloconfocales;* et nous donnerons aux coniques le nom de *stigmoconfocales*, quand elles auront les deux mêmes *points focaux*.

Enfin, ces courbes seront dites *monomofocales* et *homofocales* ou *confocales* suivant qu'elles aient un ou deux mêmes foyers, quels qu'ils soient.

35. *Tracé de la tangente en un point quelconque.* — Il résulte de l'application de la méthode de Roberval que, si, sur les deux couples de vecteurs tangentiels m_2o, $m^{\text{IV}}{}_2o$ et m'_2o, m'''_2o, nous marquons respectivement les deux couples de segments égaux ob, ob_1 et ob', ob'_2, les segments $bb_1 \simeq bo - b_1o$ (*) et $b'b'_2 \simeq b'o - b'_2o$, se coupant en f, nous donneront la tangente of.

Comme on le voit, le point f est le centre radical des cercles (E), (I) et (o).

(*) Cette notation de la *somme géométrique* des segments est celle que M. Bellavitis adopte dans sa méthode des équipollences, dont les principes seront quelquefois employés dans cette étude.

36. Nous pouvons aussi arriver directement à cette construction en regardant le point o comme appartenant successivement à chacun des vecteurs tangentiels m_2o, $m^{\text{IV}}{}_2o$ et m'_2o, m'''_2o.

37. Le point M_1, situé sur le vecteur m_2o, étant *symétrique* des extrémités m'_2 et m'''_2 des vecteurs m'_2o et m'''_2o, par rapport aux bissectrices des angles m'_2oM_1 et m'''_2oM_1, décrit évidemment un cercle (CM_1) ayant le centre en C et le rayon égal au segment $CM_1 \triangleq Cm_2 - M_1m_2$.

De même si nous marquons sur le vecteur m'_2o le segment $m'_2\overset{1}{M}$ égal à m_2M_1, ou à la somme $om_2 - om'_2$, le point $\overset{1}{M}$ sera le symétrique de m_2 et $m^{\text{IV}}{}_2$, par rapport aux bissectrices des angles $m_2o\overset{1}{M}$ et $m^{\text{IV}}{}_2o\overset{1}{M}$, et décrira un cercle dont le centre sera C_0 et le rayon $C_0\overset{1}{M}$.

En considérant l'autre conique (Σ'), nous arrivons à des résultats tout à fait analogues.

Nous pouvons donner au cercle (CM_1) le nom de *cercle directeur relatif au foyer* (I').

La conique (Σ) a deux cercles directeurs relatifs à ses deux foyers; et il en sera de même de sa confocale (Σ').

38. Lorsque (fig. 2) les rayons C_0c_s et $C_0c'_s$ tournent autour de C_0, leurs points milieux n_s et n'_s décrivent deux cercles (σ_0n_s) et $(\sigma_0n'_s)$, dont le centre σ_0 sera le point milieu du segment CC_0; et les perpendiculaires n_so et n'_so envelopperont deux *coniques stigmoconfocales* (ε) et (ε'), ayant pour points focaux les points C et C_0.

Les points N_s et N'_s où les rayons Cc_s et Cc'_s des cercles (Cc_s) et (Cc'_s) rencontrent les perpendiculaires n_so et n'_so sont les points de contact de celles-ci avec leurs enveloppes (ε) et (ε').

D'après cela nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème V. — *Une section conique quelconque* (Σ) *peut être considérée comme la courbe parcourue par le point de rencontre* o *de deux tangentes* N_so *et* N'_so *à deux coniques stigmoconfocales* (ε) *et* (ε'), *dont les points de contact* N_s *et* N'_s *soient vus de l'un* C *des points focaux sous un angle vecteur constant* $N_sCN'_s$: *les points focaux* C *et* C_0 *des coniques directrices étant les centres de cercles focaux de la conique engendrée.*

39. Le point o se trouvant, par construction, équidistant des points C_0, c_s et c'_s, on a ce théorème:

Théorème VI. — *Une conique quelconque* (Σ) *peut être considérée* *comme la courbe parcourue par le centre* o *d'un cercle* (oC_0) *assujetti à passer continuellement par un point donné* C_0 *et par deux autres points* c_s *et* c'_s *de deux cercles concentriques* (Cc_s) *et* (Cc'_s) *également donnés, la distance* $c_sc'_s$ *entre ces derniers points étant constante.*

40. Quand, sans la distance $c_sc'_s = 2r''$ être nulle, les cercles (Cc_s) et (Cc'_s) se confondront, il en sera de même des coniques (Σ) et (Σ'), et nous aurons les deux théorèmes suivants, comme cas particuliers des théorèmes V et VI:

Théorème VII. — *Si, autour de l'un des points focaux d'une conique* (ε_0), *on fait tourner un angle vecteur de grandeur constante, et que par les points où ses côtés rencontrent la conique on mène deux tangentes á la courbe, le point d'intersection* o *de ces deux tangentes aura pour lieu géométrique une seconde conique* (σ), *donnée de forme et de position* (*).

Théorème VIII. — *Une conique quelconque* (σ) *peut être considérée comme la courbe parcourue par le centre* o *d'un cercle* (oC_0) *assujetti à passer continuellement par un point donné* C_0 *et à couper un cercle également donné suivant une corde* $c_sc'_s$ *de grandeur constante.*

41. Les cercles (x) et (x'), et leurs cercles complémentaires (x_c) et (x'_c), passant par un même point b du cercle (E), se coupent deux à deux sur le cercle (I) aux points b', b'', b''_1, b'_2 (comme dans la fig. 1), étant maintenant de même applicable au cas général, ou à la figure transformée (fig. 2), ce que nous avons dit au n.° 9 sur les tangentes à ces cercles dans leurs points d'intersection.

Il est clair que, analoguement à ce que l'on a noté au n.° 6, les droites on_s et $o'n_s$ dans la figure transformée concourent encore en un même point t de la corde ba et les droites on'_s et $o'n'_s$ au point t'; ces points étant les intersections des tangentes $b't$, $b''t$ et b''_1t', b'_2t' aux cercles (x) et (x') aux points b', b'' et b''_1, b'_2, ou les centres des cercles (x_c) et (x'_c), qui décrivent deux autres coniques (Σ_c) et (Σ'_c), en général, distinguées des coniques (Σ) et (Σ') décrites par les centres des deux premiers cercles.

Nous pouvons donner aux coniques (Σ_c) et (Σ'_c) le nom de *com-*

(*) Voy. *Traité des propriétés projectives des figures*, par M. Poncelet, 2.ᵉ édition, t. I, n.° 480.

plémentaires des coniques (Σ) et (Σ'), attendu la denomination adoptée pour leurs cercles générateurs.

42. Considérons (fig. 3) les deux cercles générateurs (x_3) et (x'_3) des coniques (Σ) et (Σ'), lesquels touchent à l'extrémité a la corde ba du cercle (E), et désignons par o_3 et o'_3 leurs centres évidemment situés sur la corde ab_3 de ce même cercle, équipollente à la corde ba'_1, sur laquelle se trouvent les centres o et o' des cercles générateurs (x) et (x').

Les droites oo_3 et $o'o'_3$ se couperont évidemment en un même point T de la corde ba, et les perpendiculaires m_1PE et m_1P′E′, abaissées du point milieu m_1 de cette corde sur ces droites, qui les rencontrent en P et P′, étant E et E′ leurs points de rencontre sur CC_0, seront *les sécantes* (réelles ou idéales) *communes aux deux couples de cercles générateurs* (x), (x_3) *et* (x′), (x'_3), ou *leurs axes radicaux;* et à ces cercles, de chaque couple ainsi déterminés, nous donnerons le nom de *cercles générateurs correspondants.*

43. *Les cordes* m_1PE *et* m_1P′E′ *communes aux deux couples de cercles générateurs correspondants* (x), (x_3) *et* (x′), (x'_3) *passent par les extrémités* n_{s_0} *et* n_{i_0} *du diamètre* $n_{s_0}C_0n_{i_0}$ *du cercle* (I′), *perpendiculaire à la corde* ba *du cercle* (E) (tangente commune á ces cercles-là).

Quand la corde ba *du cercle* (E) *tournera autour de* C *simultanément avec les lignes qui lui sont invariablement reliées, les droites* $m_1En_{i_0}$ *et* $m_1n_{s_0}E'$ *tourneront aussi autour des points* E *et* E′, *qui,* comme on sait, *divisent harmoniquement la distance* CC_0, *entre les centres des cercles donnés, et représentent les points de concours des tangentes* (réelles ou imaginaires) *communes aux cercles enveloppes* (E′) *et* (I′), *ou leurs centres d'homothétie.*

En considérant deux quelconques des couples de cercles (x), (x_3) et (x_1), (x_4), appartenant à la première suite de cercles, qui coupent les cercles fixes (E) et (I) sous les angles constants e et i, on reconnaîtra que *les axes radicaux de ces quatre cercles, pris deux à deux, se coupent aussi au point fixe* E, *et, par suite, ce point sera le centre radical de trois cercles quelconques de la série considérée.*

De même *les axes radicaux de la seconde série de cercles générateurs* (x′), (x'_1), (x'_3), (x'_4), ..., *pris deux à deux, passent par le point fixe* E′, *qui sera donc le centre radical de trois cercles quelconques de cette série.*

*

Cela étant on a ce théorème:

THÉORÈME IX. — *Étant donnés deux cercles* (E) *et* (I), *chacune des deux séries de cercles* (x), (x_1), (x_3), (x_4), ..., *et* (x'), (x'_1), (x'_3), (x'_4), ..., *qui les coupent sous les angles constants* e *et* i, *étant pris trois par trois, ont respectivement pour centres radicaux les centres d'homothétie* E *et* E' *des cercles enveloppes* (E') *et* (I') *des cordes, qui coupent les cercles donnés sous ces mêmes angles.*

44. En faisant varier les rectangles *auxiliaires*, ou les cercles (I) et (I') de manière que les rayons R'' et r'' des cercles (E'') et (I'') deviennent égaux (fig. 3), les coniques cyclomofocales (Σ), (Σ'), et les stigmoconfocales (ε_1), (ε'_1), engendrées par les points o, o', et par les points d'intersection N'_s, N'_i des vecteurs Cc_s, Cc_i avec les droites on'_s, $o'n'_i$, perpendiculaires aux points milieux n'_s, n'_i des vecteurs $C_0c'_s$, $C_0c'_i$, seront respectivement remplacées par les cyclomofocales (Ω), (Ω'), et les stigmoconfocales (Ω_0), (Ω'_0), décrites par les centres des deux cercles générateurs (ω), (ω') (fig. 3 *a*), qui remplacent (x), (x'), et des deux cercles (μ''), (μ''') qui touchent les cercles enveloppes (E') et (I').

Ainsi (fig. 3 *a* et 4) les droites $\theta\omega\omega_3$ et $\theta\omega'\omega'_3$, qui unissent les centres des deux couples de cercles générateurs correspondants (ω), (ω_3) et (ω'), (ω'_3) des coniques (Ω), (Ω') toucheront les coniques (Ω_0), (Ω'_0) aux points μ'', μ''', lesquelles seront aussi *les transformées* des premières, quand on aura $R = R'$ et $r = r'$, et par suite *ces transformées auront pour cercles générateurs les* cercles doubles (μ''), (μ'''), *tangents au cercle* (E') *au point* m_1 *et au cercle* (I') *aux points* n'_{i_0} *et* n''_{s_0}, *évidemment situés sur les axes radicaux* m_1E *et* m_1E', ou *sécantes communes à ces deux couples de cercles générateurs.*

Les points de contact n'_{i_0} et n''_{s_0} entre ces cercles doubles et le cercle enveloppe (I') étant les points de ce cercle *anti-homologues* du point m_1 du cercle (E'), par rapport aux centres d'homothétie E et E', le point θ sera le centre d'un cercle (θm_1), qui coupera orthogonalement les cercles (E') et (I'); et par suite *ce point, pendant la rotation de la corde* ab, *décrira l'axe radical* $\theta\Omega_{m_0}$ *de ces cercles*, ou *leur sécante commune située à distance finie.*

Considérons le rectangle auxiliaire $MM'M'_0M_0$ (fig. 4) dans le quel se transforme le rectangle auxiliaire $c'_sc'_ic_ic_s$ (fig. 3), quand le côté considéré constant $c'_sc'_i$ vient coïncider avec le segment MM' du rayon Cm_1, ou quand les rayons R'' et r'' des cercles (E'') et (I'') sont égaux; et soit $M_0M'_0$ (fig. 4) la position correspondante de l'autre côté constant parallèle $c_s c_i$; étant M_1 et M'_1 les intersections de ba'_1 avec les autres côtés MM_0 et $M'M'_0$.

Cela étant, nous devons observer que les coniques (Ω) et (Ω'), peuvent avoir pour cercles directeurs les cercles (CM_1) et (I''), et pour cercles générateurs les cercles (ωM_1) et $(\omega' M'_1)$, dont les cercles enveloppes respectifs sont le cercle (CM) et le cercle limite C_o, ayant pour axe radical $\tau\Omega_{c_o}$.

De même nous pouvons prendre pour cercles directeurs les cercles (CM'_1) et (I'') et pour cercles générateurs les cercles $(\omega M'_1)$ et $(\omega' M'_1)$, les cercles enveloppes respectifs étant le cercle (CM') et le cercle limite C_c, qui ont pour axe radical $\tau'\Omega'_{c_o}$.

Les cercles enveloppes (E'_i) et (I'_e) des cercles directeurs (E_i) et (I_e), symétriquement égaux aux cercles directeurs (I) et (E), par rapport au point milieu σ_o de C_o, ont pour axe radical $\theta_1\Omega_m\theta_2$; et les cercles enveloppes des deux autres couples de cercles directeurs symétriquement égaux aux deux couples de cercles directeurs (CM_1), (I'') et (CM'_1), (I''), ont pour axes radicaux $\theta_c\Omega_c$ et $\theta'_c\Omega'_c$.

D'ailleurs il est facile de voir que le point d'intersection τ des droites $\tau M_1 M M_2$ et $\tau\vartheta\omega\mu''\omega_3\theta_c$ décrira l'axe radical $\tau\Omega_{c_o}$ du cercle CM et du cercle limite C_o; et que de même le point d'intersection τ' des droites $\tau' M'_1 M' M'_2$ et $\theta\tau'\mu'''\theta'_c\omega'_3\theta_2$ décrira l'axe radical $\tau'\Omega'_{c_o}$ du cercle (CM') et de ce même cercle limite (*).

45. Si nous considérons les tangentes $n_{s_o}\theta'_1$ et $n_{i_o}\theta'_2$ du cercle (I'), aux extrémités de son diamètre $n_{s_o}C_o n_{i_o}$, coupant la droite $\theta\Omega_{m_o}\theta_o$ aux points θ'_1 et θ'_2; et le rayon $C_o\theta_{c_o}$ perpendiculaire à ce diamètre, coupant les droites $\tau\Omega_{c_o}$ et $\tau'\Omega'_{c_o}$ aux points θ_{c_o} et θ'_{c_o}, nous aurons le quadrilatère $\theta_{c_o}\theta'_1\theta'_{c_o}\theta'_2.\theta'\theta'_o$ inversement égal au quadrilatère $\theta_c\theta_1\theta'_c\theta_2.\theta\theta_o$, par rapport au point milieu σ_o du segment CC_o.

On voit donc que l'axe radical $\theta\theta'_1\Omega_{m_o}\theta'_2\theta_o$ des cercles (E') et (I'); et l'axe radical $\theta'\theta_1\Omega_m\theta_2\theta'_o$ des cercles (E'_i) et (I'_e) sont décrits en même temps par les sommets θ_1, θ_2; θ', θ'_o et θ, θ_o; θ'_1, θ'_2 de ces quadrilatères, et sont conjugués harmoniques des axes radicaux $\theta_c\Omega_c$ et $\theta'_c\Omega_c$ relatifs au cercle limite C et à chacun des cercles (C_oM_c) et $(C_oM'_c)$; ainsi qu'ils seront conjugués harmo-

(*) Le résumé de la partie de ce §, publiée dans le t. III de ce Journal, de pag. 130 à 137 et de pag. 174 à 182, termine ici.

niques des axes radicaux $\theta_{c_0}\Omega_{c_0}$ et $\theta'_{c_0}\Omega_{c_0}$, relatifs au cercle limite C_0 et à chacun des cercles (CM) et (CM').

Ainsi étant Ω_c, Ω_m, Ω'_c, Ω'_{c_0}, Ω_{m_0}, et Ω_{c_0} les points d'intersections de la droite C_0C avec les axes radicaux considérés $\theta_c\Omega_c$, $\theta_1\Omega_m$, $\theta'_c\Omega'_c$, $\tau'\Omega'_{c_0}$, $\theta\Omega_{m_0}$ et $\tau\Omega_{c_0}$, nous aurons

$$\frac{\Omega_m\Omega_c}{\Omega_m\Omega'_c}=-\frac{\Omega_{m_0}\Omega_c}{\Omega_{m_0}\Omega'_c}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (40)$$

et

$$\frac{\Omega_m\Omega_{c_0}}{\Omega_m\Omega_{c_0}}=-\frac{\Omega_{m_0}\Omega_{c_0}}{\Omega_{m_0}\Omega'_{c_0}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ (41)$$

et par suite

$$\left(\frac{\Omega_m\Omega_{m_0}}{2}\right)^2=\sigma_0\overline{\Omega_m}^2=\sigma_0\Omega_c\,.\,\sigma_0\Omega'_c=\sigma_0\Omega_{c_0}\,.\,\sigma_0\Omega'_{c_0}\ldots\ (42)$$

46. Les deux tangentes $\theta\beta_0\alpha_0$ et $\theta\beta'_0\alpha'_0$ (fig. 4) communes aux deux couples de cercles générateurs correspondants (ω), (ω_3) et (ω'), (ω'_3), qui concourent dans le point θ, déterminant dans le cercle (I) les cordes $\beta_0\alpha_0$ et $\beta'_0\alpha'_0$ évidemment égales entre elles et à la corde ba du cercle directeur (E), on a

$$\theta\beta_0\,.\,\theta\alpha_0=\theta\beta'_0\,.\,\theta\alpha'_0=\theta b\,.\,\theta a\ \ldots\ldots\ldots\ (43)$$

d'où il résulte que l'axe radical $\theta\Omega_{m_0}$ des deux cercles enveloppes (E') et (I') sera en même temps l'axe radical des cercles directeurs donnés (E) et (I) (*).

On reconnaîtra aussi que la droite $\theta'\Omega_m$ sera en même temps l'axe radical des deux couples de cercles (E'_i), (I'_e) et (E_i), (I_e).

Les deux cercles (CM_1) et (I'') considérés comme cercles direc-

(*) Il est inutile d'observer que, au contraire, les points d'intersection des couples de cercles (E), (I) et (E'), (I') sont distincts, et que, par suite, il en est de même des cordes communes à ces couples de cercles, pouvant être toutes deux *réelles* ou *idéales,* ou l'une *réelle* et l'autre *idéale.*

teurs, les cercles générateurs correspondants (ωM_1) et $(\omega_3 M_2)$, ou qui touchent la corde M_1M_2 du premier cercle directeur à ces extrémités, auront pour points de contact avec leur tangente commune $\tau m^{v}{}_2{}^{\circ}m^{v}{}_2$ les extrémités du diamètre $m^{v}{}_2{}^{\circ}m^{v}{}_2$ du second cercle directeur, et par conséquent étant ce diamètre constamment égal à la corde considérée, nous aurons

$$\tau M_1 . \tau M_2 = \tau m^{v}{}_2 . \tau^{\circ} m^{v}{}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

et alors la droite $\tau\Omega_{c_0}$ étant l'axe radical du cercle limite C_0 et du cercle (CM), enveloppe de la corde M_1M_2 du cercle CM_1, sera aussi l'axe radical de ce cercle et du cercle focal (I'').

De même on reconnaîtra que la droite $\theta_c\Omega_c$ étant l'axe radical du cercle limite C et du cercle enveloppe (C_0M_c) de la corde $M_{c_1}M_{c_2}$ du cercle $(C_0M_{c_1})$ séra aussi l'axe radical de ce cercle et du cercle focal (E'').

D'une manière analogue on verra que l'axe radical $\tau'\theta'_{c_0}$ du cercle limite C_0 et du cercle enveloppe (CM') de la corde $M'_1M'_2$ du cercle (CM'_1) sera de même l'axe radical de ce cercle et du cercle focal (I'').

Finalement nous avons de même que la droite $\theta'_c\Omega'_c$ étant l'axe radical du cercle limite C et du cercle enveloppe $(C_0M'_c)$ de la corde $M'_{c_1}M'_{c_2}$ du cercle $(C_0M'_{c_1})$, sera aussi l'axe radical de ce cercle et du cercle focal (E'').

47. Considérons maintenant deux cercles générateurs correspondants quelconques (ω) et (ω_3) (fig. 4 et 5), qui coupent le cercle directeur (E) respectivement aux deux couples de points b,β et a,α; et le cercle directeur (I) aux deux couples de points β',β_0 et α',α_0. Alors les points de concours φ_1 et φ'_1 des deux couples de cordes $b\beta,\beta'\beta_0$ et $a\alpha,\alpha_0\alpha'$ (fig. 5), lesquelles se trouvent sur la sécante $\theta\Omega_{m_0}\theta_0$, commune aux deux cercles directeurs, détermineront les tangentes $\omega\varphi_1$ et $\omega_3\varphi'_1$ aux points ω et ω_3 de la conique engendrée (Ω) n.° 35.

Dans les cercles (ω) et (ω_3) les cordes βb et αa seront évidemment *anti-homologues* par rapport au centre de similitude θ de ces cercles, ainsi que les cordes $\beta_0\beta'$ et $\alpha_0\alpha'$.

Si les cercles générateurs (ω) et (ω_3) sont cencés fixes ainsi que les points φ_1 et φ'_1, lorsque les deux couples de cordes antihomologues $a\alpha,b\beta$ et $\alpha_0\alpha',\beta_0\beta'$ tourneront autour de ces points, leurs points de concours ε_e et ε_i se trouveront continuellement sur l'axe radical Em_1 de ces cercles, et on aura toujours

$$\theta\alpha.\theta\beta = \theta\alpha'.\theta\beta' = \theta a.\theta b = \theta\alpha_0.\theta\beta_0 = \text{const.} \dots\dots (45)$$

d'où il résulte que les cercles directeurs (E) et (I) varieront, étant remplacés par d'autres cercles (E_1), (E_2), ..., (I_1), (I_2), ..., ayant même corde commune que les deux cercles directeurs donnés, et, par suite, seront coupés par les cercles générateurs (ω), (ω_1), ..., de la conique Ω sous des angles constants. Il en sera de même par rapport aux cercles générateurs (ω'), (ω'_1), ..., de la seconde conique (Ω').

En prenant pour cercles directeurs les cercles (E) et (I_n) de la suite (E), (E_1), ..., (I), (I_1), ..., (I_n), ..., le cercle (ω) de la première suite de cercles générateurs, et le cercle (ω') de la seconde suite de cercles générateurs seront coupés par le dernier cercle directeur sous deux angles inégaux. Alors, si nous faisons varier le cercle générateur (ω') jusqu'à ce que ces angles deviennent égaux, nous aurons un nouveau cercle générateur (ω''), engendrant nne autre conique (Ω''), et jouissant aussi des mêmes propriétés que le cercle (ω); et la figure respective étant analogue au cas général de la fig. 3, nous pouvons énoncer ce théorème:

Théorème X. — *Les deux séries de cercles* (x), (x_1), (x_3), ..., *et* (x'), (x'_1), (x'_3), ..., *qui coupent deux cercles fixes* (E) *et* (I) *sous des angles constants* e *et* i, *couperont aussi sous des angles constants tous les cercles* (E_1), (E_2), ..., (I_1), (I_2), ..., *ayant même corde commune que les deux cercles fixes.*

48. Toutes les fois que des points d'intersection φ_1, φ'_1, ..., (fig. 5) de la corde commune aux cercles (E) et (I) avec les tangentes $\omega\varphi_1$, $\omega_3\varphi'_1$, ..., à la conique (Ω), on peut tirer des tangentes $\varphi_1\psi$, $\varphi_1\psi'$; $\varphi'_1\psi_3$, $\varphi'_1\psi'_3$; ...; aux cercles générateurs (ω), (ω_3), ..., de cette conique, nous aurons dans la suite de cercles directeurs (E), (E_1), ..., (I), (I_1), ..., deux cercles qui toucheront tous ces cercles générateurs. De même il y aura deux autres cercles directeurs, qui toucheront les cercles générateurs (ω'), (ω'_3), ..., de la seconde conique (Ω').

En menant dans le cercle (ω) les rayons $\omega\psi$ et $\omega\psi'$, qui vont aux points de contact ψ et ψ' des tangentes $\varphi_1\psi$ et $\varphi_1\psi'$ à ce cercle, ils couperont la droite CC_0 [qui unit les centres C et C_0 des cercles (E) et (I)] aux points f_1 et f'_1, lesquels seront les centres des cercles (ψf_1) et $(\psi' f'_1)$ tangents à tous les cercles générateurs de la conique (Ω): D'ailleurs ces points f_1 et f'_1 seront évidemment les points faucaux de cette conique, et la droite CC_0 représentera la direction de son *axe focal* ou *principal*.

Les cercles générateurs (ω'), (ω'_3), ..., de la seconde conique (Ω'), étant de même tangents à deux autres cercles de la série (E), (E_1), ..., (I), (I_1), ..., les centres de ces deux cercles seront donc les points focaux de cette conique.

Quand on ne saura tirer les tangentes considérées aux cercles générateurs, ou les points focaux de (Ω) et (Ω') sur CC_0 sont imaginaires, la détermination des points focaux réels situés alors sur l'autre axe est très-facile, comme nous le verrons à la suite.

En prenant, comme précédemment, les cercles (E) et (I_n) pour cercles directeurs et en faisant varier le cercle (ω') jusqu'à ce qu'il coupe ce second cercle directeur sous le même angle que le cercle (ω), la figure respective deviendra tout à fait analogue au cas général de la fig. 3. Donc:

Théorème XI. — *Étant donnés deux cercles* (E) *et* (I), *chacune des deux séries de cercles* (x), (x_1), ..., *et* (x'), (x'_1), ..., *qui les coupent sous des angles constantes* e *et* i, *touchera deux autres cercles* (réels ou imaginaires) *ayant même corde commune que les cercles donnés.*

49. Tirons (fig. 5) dans les cercles générateurs (ω) et (ω_3) les deux couples de cordes anti-homologues bb_e, aa_e et $\beta\beta_e$, $\alpha\alpha_e$, par rapport au centre de similitude θ, et qui concourent au point E. D'après cela les cordes $b_e\beta_e$ et $a_e\alpha_e$ des cercles (ω) et (ω_3), étant aussi anti-homologues se couperont au point ε'_i sur la corde Em_1 commune à ces cercles, et les droites a_eb_e et $\alpha_e\beta_e$ passeront par leur centre de similitude θ, ou seront leurs *vecteurs de similitude*.

Or, étant

$$Ea \times Ea_e = E\alpha \times E\alpha_e = Eb \times Eb_e = E\beta \times E\beta_e$$

les points α_e, a_e, b_e, β_e se trouveront sur un cercle (I_n), ce cercle et le cercle (E) ayant pour un des centres d'homothétie le point E; et, puisque le centre du premier cercle se trouve évidemment sur la droite CE, la sécante commune à ce couple de cercles, passant par θ, sera encore la sécante commune $\theta\Omega_{m_0}$ de la série de cercles directeurs considérés (E), (E_1), ..., (I), (I_1), ... Donc, *dans les deux cercles* (I_n) *et* (E) *les couples de cordes anti-homologues* $a\alpha$, $a_e\alpha_e$ *et* $b\beta$, $b_e\beta_e$, *par rapport au centre d'homothétie* E, *se couperont encore aux points* φ_1 *et* φ'_1; *et le premier cercle appartiendra à cette même série de cercles directeurs.*

Considérons encore dans les cercles (ω) et (ω_3) les deux couples de cordes anti-homologues $\beta_i\beta_o$, $\alpha_i\alpha_o$ et $\beta'_i\beta'$, $\alpha'_i\alpha'$, s'entrecoupant en E. Alors nous reconnaîtrons analoguement que les cordes anti-homologues $\beta_i\beta'_i$ et $\alpha_i\alpha'_i$, se coupant en ε'_e sur la corde Em_1 commune à ces cercles, passeront de même par les points φ_1 et φ'_1 de la corde $\varphi_1\theta\varphi'_1$ commune à la série de cercles directeurs, et que par conséquent elles seront en même temps cordes d'un cercle (E_m) de cette série. Le point E sera donc l'un des centres de similitude du couple de cercles (I) et (E_m); et les droites $\alpha'\beta'$ et $\alpha'_i\beta'_i$ passant par θ seront deux cordes anti-homologues de ce couple de cercles directeurs par rapport à ce centre de similitude.

On voit donc que si les cordes anti-homologues $b\beta$ et αa des cercles (ω) et (ω_3) tournent autour des points φ_1 et φ'_1 décrivant, par suite, la corde Em_1 commune à ces cercles les deux couples de cordes anti-homologues bb_e, aa_e et $\beta\beta_e$, $\alpha\alpha_e$ tourneront autour du point fixe E; les cordes anti-homologues $b_e\beta_e$ et $a_e\alpha_e$ décrivant la corde commune Em_1, tourneront aussi autour des points φ_1 et φ'_1; et le couple de cercles directeurs ($\beta ba\alpha$...) et ($\beta_e b_e \alpha_e a_e$...) auront le point fixe E pour centre d'homothétie ou de similitude.

Il résulte de là que *il y a une série de couples de cercles directeurs qui ont le point fixe* E *pour centre d'homothétie ayant pour cordes anti-homologues deux couples de vecteurs de similitude des cercles générateurs* (ω) *et* (ω_3) *et qui, par suite, passeront par leur centre de similitude* θ.

En considérant les cercles générateurs (ω') et (ω'_3) de la seconde série de cercles générateurs, ainsi qne leur centre radical E', nous arriverons évidemment à des conséquences analogues.

Ainsi deux cercles générateurs quelconques d'une des séries auront toujours un de leurs centres de similitude sur la sécante commune aux cercles directeurs donnés (E) et (I), laquelle sera alors un des quatre axes de similitude de trois quelconques des cercles générateurs de la serie considérée. D'après cela, ces propriétés seront également applicables au cas de la fig. 3, et donc:

Théorème XII. — *Les séries de cercles qui coupent trois cercles fixes* (x), (x_1), (x_4), ..., *sous des angles égaux ont pour sécantes* (réelles ou idéales) *communes, ou pour axes radicaux les axes de similitude de ces trois cercles.*

Comme corollaire on a ce théorème:

Théorème XIII. — *Quand un cercle* (I_n) *variable de grandeur coupe trois cercles fixes* (x), (x_1), (x_4), *sous des angles égaux, le centre de ce cercle variable se trouvera sur quelqu'une des droites passant par le centre radical* E *de ces trois cercles, et coupant orthogonalement leurs axes de similitude.*

50. Comme on sait, lorsqu'on fait varier dans le cercle (ω) (fig. 5) les cordes βb, $\beta_o\beta'$, $\beta_e b_e$, ..., qui passent par le point φ_1, les points d'intersection des cordes $b\beta'$ et $\beta\beta_o$, $b\beta_o$ et $\beta\beta'$, bb_e et $\beta\beta_e$, ..., se trouveront sur la polaire de ce point φ_1, laquelle, par suite, passera par le point fixe E, et on reconnaîtra de même que la polaire du point φ'_1, par rapport au cercle (ω_3), passera aussi par E. Il en résulte que pour la série de cercles générateurs (ω), (ω_1), (ω_3), ..., *les polaires des centres radicaux* φ_1, φ'_1, ..., *de ces cercles directeurs* (E) *et* (I) *et de chaque cercle générateur passera par le centre radical* E *de cette série de cercles générateurs.* Nous serons évidemment entraînés aux mêmes résultats pour la seconde série de cercles générateurs (ω'), (ω'_1), (ω'_3), ...

Or cette propriété étant également applicable à la fig. 3, ou au cas général, nous pouvons énoncer cette proposition:

Théorème XIV. — *Étant donnés deux cercles* (E) *et* (I), *la polaire du centre radical de ces cercles et d'un cercle quelconque d'une des deux séries de cercles, qui les coupent sous des angles constants* e *et* i, *relative à ce dernier cercle, passera par le centre radical de la série considérée.*

51. Prenons encore le couple de cercles directeurs ($\beta b a \alpha$) et ($\beta_e b_e a_e \alpha_e$) ou (E) et (I_n), ayant le point E pour centre de similitude. Or, comme on sait, le vecteur de similitude Eb_eb coupant ces cercles sous un même angle, et le cercle (ω) passant par les points anti-homologues b et b_e, les angles sous lesquels ce cercle coupe les deux autres seront égaux, et par conséquent les cercles de la série de cercles directeurs (E), (E_1), ..., (I), (I_1), ..., seront coupés deux à deux, ou par couples, sous un angle constant par la série de cercles générateurs (ω), (ω_1), (ω_3), ..., dont le centre radical sera en même temps le centre d'homothétie ou de similitude de chacun de ces couples de cercles directeurs. Il en sera de même par rapport à l'autre série de cercles générateurs (ω'), (ω'_1), (ω'_3), ...

D'ailleurs si les centres radicaux E et E' des deux séries de cercles générateurs, ou centres de similitude des couples de cercles directeurs sont extérieurs aux cercles générateurs, ces deux centres seront donc les seuls points du plan d'où l'on puisse mener respectivement à chacune de ces deux séries de cercles générateurs des tangentes égales, d'où il résulte que ces points seront aussi les centres des seuls cercles qui puissent couper *orthogonalement* chacune de ces mêmes séries de cercles.

Ces cercles orthogonaux, répondant á deux couples de cercles directeurs *coïncidents*, seront vraiment *cercles directeurs doubles;* et les cercles enveloppes de chaque série de cercles générateurs seront donc deux couples de *cercles directeurs tangentiels.*

Cela étant on peut évidemment passer, comme précédemment, au cas général de la fig. 3; donc:

THÉORÈME XV. — *Les cercles d'une quelconque des deux séries de cercles, qui coupent un couple de cercles fixes* (E) *et* (I_n) *sous un angle constant, couperont aussi sous un angle constant d'autres couples de cercles ayant même corde commune, que le couple de cercles fixes; et le centre radical de la série de cercles sécants coïncidera avec un des centres de similitude du couple de cercles fixes et de chacun des autres couples de cercles, entre lesquels il y aura un couple de cercles tangentiels* (réels ou imaginaires), *ainsi que un cercle double orthogonal* (réel ou imaginaire).

Comme on voit ce théorème enveloppe les théorèmes X et XI.

Nous pouvons aussi énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME XVI. — *Quand trois cercles fixes* (x), (x_1), (x_3), *sont coupés en même temps par deux cercles variables* (E) *et* (I_n) *sous les mêmes angles, l'axe radical et un des centres de similitude de ce couple de cercles variables coïncideront respectivement avec un quelconque des axes de similitude et avec le centre radical des trois cercles fixes; ce couple pouvant se composer de cercles tangentiels* (réels ou imaginaires), *ou se réduire à l'un cercle double orthogonal* (réel ou imaginaire).

Ce théorème enveloppera donc celui-ci:

THÉORÈME XVII. — *Si deux cercles* (E), (I_n) *sont coupés sous des angles égaux par deux autres cercles* (x), (x_3), *l'axe radical de chacun de ces deux couples de cercles passe par un centre de similitude de l'autre couple.*

52. Comme une conséquence immédiate des principes exposés plus haut on a ce théorème:

THÉORÈME XVIII. — *Les six centres de similitude de trois cercles donnés* (x), (x_1), (x_3), *considérés deux à deux, forment les sommets d'un quadrilatère complet, dont les points de concours des trois diagonales sont les centres de ces cercles.*

53. Considérons actuellement (fig. 6 et 7) trois cercles quelconques (ω), (ω_1), (ω_3), et un de leurs axes de similitude $\theta\theta'$.

Soient p_ω, p_{ω_1}, p_{ω_3} respectivement les poles de cet axe, par rapport à ces cercles, lequel coupe aux points δ_ω, δ'_{ω_1}, δ_{ω_3} les diamètres $v'\omega p_\omega v$, $v'_1\omega_1 p_{\omega_1} v_1$, $v'_3\omega_3 p_3 v_3$ passant par ces pôles.

Si l'axe de similitude n'est pas coupé par les cercles (fig. 6), leurs *demi-cordes idéales* $\delta_\omega h_\omega$, $\delta_{\omega_1} h_{\omega_1}$, $\delta_{\omega_3} h_{\omega_3}$, ou les *demi-cordes réelles* de leurs coniques *supplementaires* vh_ω...; $v_1 h_{\omega_1}$...; $v_3 h_{\omega_3}$...; par rapport aux diamètres vv', $v_1 v'_1$, $v_3 v'_3$, seront, comme on sait, égales aux tangentes $\delta_\omega b'$, $\delta_{\omega_1} a''_1$, $\delta_{\omega_3} a'$ à ces cercles, dont les points de contact nous désignons par b', a''_1, a'. Ainsi les droites $p_\omega h_\omega$, $p_{\omega_1} h_{\omega_1}$, $p_{\omega_3} h_{\omega_3}$ représenteront les tangentes aux points h_ω, h_{ω_1}, h_{ω_3} de ces coniques *supplémentaires* ou *hyperboles équilatères.* En considérant les couples de triangles semblables $\theta\omega\delta_\omega$, $\theta\omega_3\delta_{\omega_3}$; $\theta\omega v$, $\theta\omega_3 v_3$; et $\theta'\omega_1\delta_{\omega_1}$, $\theta'\omega_3\delta_{\omega_3}$; $\theta'\omega_1 v_1$, $\theta'_3 v_3$, on a

$$\frac{\omega\delta_\omega}{\omega v} = \frac{\omega_3\delta_{\omega_3}}{\omega_3 v_3} = \frac{\omega_1\delta_{\omega_1}}{\omega_1 v_1}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

d'où

$$\frac{\omega\delta_\omega}{\omega b'} = \frac{\omega_3\delta_{\omega_3}}{\omega_3 a'} = \frac{\omega_1\delta_{\omega_1}}{\omega_1 a''_1} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

D'après cela les triangles rectangles $\omega\delta_\omega b'$, $\omega_1\delta_{\omega_1} a''$, $\omega_3\delta_{\omega_3} a'$, seront semblales et il en sera de même des triangles rectangles $b'\delta_\omega p_\omega$, $a''_1\delta_{\omega_1} p_{\omega_1}$, $a'\delta_{\omega_3} p_{\omega_3}$ et par suite les triangles rectangles $p_\omega h_\omega \delta_\omega$, $p_{\omega_1} h_{\omega_1} \delta_{\omega_1}$, $p_{\omega_3} h_{\omega_3} \delta_{\omega_3}$ seront aussi semblales.

Donc, les angles $p_\omega h_\omega \delta_\omega$, $p_{\omega_1} h_{\omega_1} \delta_{\omega_1}$, $p_{\omega_3} h_{\omega_3} \delta_{\omega_3}$, sans lesquels les hyperboles équilatères vh_ω...; $v_1 h_{\omega_1}$...; $v_3 h_{\omega_3}$...; rencontrent l'axe de similitude considéré, seront égaux. Ces angles pourront être només *idéaux,* et représenteront alors les angles sous lesquels les cercles donnés coupent *idéalement* l'axe de similitude choisi.

Considérons maintenant le cas où l'axe de similitude $\theta\theta'$ coupe réellement les cercles donnés (fig. 7); et représentons par h_ω, h_{ω_1}, h_{ω_3} les points de contact des tangentes $p_\omega h_\omega$, $p_{\omega_1} h_{\omega_1}$, $p_{\omega_3} h_{\omega_3}$. Les points h_ω et h_{ω_3} des cercles (ω) et (ω_3) étant homologues par rapport au centre d'homothétie ou de similitude θ, les rayons ωh_ω et $\omega_3 h_{\omega_3}$ seront parallèles. De même dans les cercles (ω) et (ω_1) les points h_ω et h_{ω_1} étant homologues par rapport au centre de similitude θ' des rayons ωh_ω et $\omega_1 h_{\omega_1}$ seront également parallèles. Donc, ces trois rayons seront parallèles entre eux, ainsi que les tangentes considérées, et par suite les angles $p_\omega h_\omega \delta_\omega$, $p_{\omega_1} h_{\omega_1} \delta_{\omega_1}$, $p_{\omega_3} h_{\omega_3} \delta_{\omega_3}$, sous lesquels les cercles coupent *réellement* l'axe de similitude choisi, seront égaux.

Nous pourrions aussi arriver au même résultat d'une manière analogue à la précédente, en prouvant la similitude des triangles rectangles $h_\omega \delta_\omega p_\omega$, $h_{\omega_1} \delta_{\omega_1} p_{\omega_1}$, $h_{\omega_3} \delta_{\omega_3} p_{\omega_3}$.

D'ailleurs nous pouvons encore considérer ce résultat comme un cas particulier du théorème XII.

Donc:

THÉORÈME XIX. — *Trois cercles quelconques coupent* (réellement ou idéalement) *chacun de leurs axes de similitude sous des angles égaux.*

Et réciproquement:

THÉORÈME XX. — *Les droites qui coupent* (réellement ou idéalement) *sous des angles égaux trois cercles donnés, sont des axes de similitude de ces cercles.*

D'ailleurs, si nous faisons varier le cercle (ω_3) (fig. 6 e 7), les deux couples d'axes de similitude $\theta''\theta$, $\theta''\theta'''$ et $\theta^{\text{IV}}\theta$, $\theta^{\text{IV}}\theta'''$ tourneront respectivement autour des centres de similitude θ'' et θ^{IV}, continuant à couper sous des angles égaux les cercles (ω) et (ω_1) censés fixes, et donc:

THÉORÈME XXI. — *Les droites menées par l'un ou l'autre des centres de similitude de deux cercles sont coupées* (réellement ou idéalement) *sous des angles égaux par ces cercles.*

Et réciproquement:

THÉORÈME XXII. — *Toutes droites coupant* (réellement ou idéalement) *deux cercles sous des angles égaux, passent par l'un ou l'autre des centres de similitude de ces cercles.*

54. Tirons (fig. 3) aux deux couples de cercles générateurs (x), (x_3) et (x'), (x'_3) les tangentes communes Tb_0a_0 et $Tb'_0a'_0$, dont les points de contact nous désignons respectivement par

b_0, a_0 et b'_0, a'_0, et soient ν_{i_0} et ν''_{s_0} les points milieux des segments b_0a_0 et $b'_0a'_0$, ou les points d'intersection des cordes Em_1 et $E'm_1$, communes à chacun de ces couples de cercles, avec les tangentes considérées. Tirons encore les droites $M''\nu_{i_0}\gamma_0$ et $\nu''_{s_0}M'''\gamma'_0$, perpendiculaires à ces tangentes; étant γ_0 et γ'_0 les points de rencontre de ces perpendiculaires avec la droite CC_0, et M'' et M''' les points de rencontre de celles-ci avec la droite Cm_1; et menons par ces points les perpendiculaires $\gamma_0p\mu$ et $\gamma'_0p'\mu'$ aux droites Too_3 et $To'o'_3$, qui les coupent aux points p et p', lesquels seront les points milieux des segments $\gamma_0\mu$ et $\gamma'_0\mu'$ déterminés sur ces perpendiculaires par leurs points d'intersection μ et μ' avec le diamètre m_1m_0 du cercle (E').

Cela étant, faisont coïncider (fig. 3 et 3 a) les séries de cercles (ω), (ω_3), ..., et (ω') (ω'_3), ..., avec les séries de cercles (x), (x_3), ..., et (x'), (x'_3), ... D'après cela, quand les cercles correspondants (ω) et (ω_3) coïncideront avec les cercles correspondants (x) et (x_3), les droites $\theta\omega\omega_3$, $\theta\theta_0$, C_0M, $\theta\beta_0\alpha_0$, ..., et les cercles (I'), $(C_0\beta_0)$ se confondront respectivement avec les droites Too_3, TT_0, $\gamma_0\mu$, Tb_0a_0, ..., et avec les cercles $(\gamma_0\nu_{i_0})$, (γ_0b_0); et alors le côté MM_0 du rectangle auxiliaire $M_0MM'M'_0$ se deplacera parallèlement à lui-même jusqu'à prendre la position $\mu\mathring{\mu}$, où il est coupé au point milieu μ_1 par la corde ba'_1 du cercle (E), étant, comme nous savons,

$$m_1\mu = \gamma_0\nu_{i_0}$$

et

$$\mu_1\mu = \nu_{i_0}b_0.$$

Les cercles correspondants (ω'), (ω'_3) coïncidant avec les cercles (x'), (x'_3), les droites $\theta\omega'\omega'_3$, $\theta\theta_0$, C_0M', $\theta\beta'_0\alpha'_0$, ..., et les cercles (I'), $(C_0\beta'_0)$ se confondront respectivement avec les droites $To'o'_3$, TT_0, $\gamma'_0\mu'$, $Tb'_0a'_0$, ..., et avec les cercles $(\gamma'_0\,''_{s_0})$, $(\gamma'_0b'_0)$, d'où il résnlte que le côté M'_0M' se deplacera parallèlement à lui-même de manière à prendre la position $\mu'\mathring{\mu}'$ où il est coupé au point milieu μ'_1 par la corde ba'_1, étant

$$m_1\mu' = \gamma'_0\nu''_{s_0}$$

et

$$\mu_1\mu = \nu''_{s_0}b'_0.$$

On voit, donc, que *lorsque la corde* ab *du cercle directeur* (E) *tournera autour de* C, *simultanément avec les lignes qui lui sont invariablement reliées, les côtés* $M''\nu_{i_0}$ *et* $M'''\nu_{s_0}$ *des triangles isoscèles* $m_1M''\nu_{i_0}$ *et* $m_1M'''\nu''_{s_0}$ *tourneront autour des deux points* γ_0 *et* γ'_0, *et les sommets* ν_{i_0} *et* ν''_{s_0} *décriront deux cercles* $(\gamma_0\nu_{i_0})$ *et* $(\gamma'_0\nu''_{s_0})$, *enveloppes des tangentes* Tb_0a_0 *et* $Ta'_0b'_0$ *communes aux couples de cercles générateurs correspondants* (x), (x_3); ...; *et* (x'), (x'_3); ...; *ou enveloppes des cordes* b_0a_0 *et* $b'_0a'_0$ *des deux cercles* (γ_0b_0) *et* $(\gamma'_0b'_0)$.

Ces cercles enveloppes, et le cercle enveloppe (E') auront évidemment même axe radical que les cercles directeurs (n.° 46 *note*). Chacun des points fixes E et E' sera encore respectivement un des centres d'homothétie de chacun des cercles $(\gamma_0\nu'_{i_0})$ et $(\gamma'_0\nu''_{s_0})$, par rapport au cercle (E').

Ainsi (fig. 3), les droites $\gamma_0\mu$ et $\gamma'_0\mu'$ tournant autour des centres γ_0 et γ'_0 étant toujours coupées orthogonalement aux points milieux p et p' par les droites Too_3 et $To'o'_3$, *les points milieux* M'' *et* M''' *des cordes correspondantes* oo_3 *et* $o'o'_3$ *des coniques* (Σ) *et* (Σ') *décriront deux coniques* (M'') *et* (M'''), *enveloppes de ces cordes ayant pour point focal commun le centre du cercle directeur donné* (E) *et pour seconds points focaux respectivement les centres* γ_0 *et* γ'_0 *de ces nouveaux cercles directeurs* (γ_0b_0) *et* $(\gamma'_0b'_0)$.

Les points p *et* p' *décriront évidemment deux cercles* (s_0p) *et* (s'_0p'), *dont les centres sont les points milieux* s_0 *et* s'_0 *des distances focales* $C\gamma_0$ *et* $C\gamma'_0$, *ou les centres de ces coniques enveloppes* (M'') *et* (M'''), *dont les axes focaux sont évidemment égaux aux segments* $C\mu$ *et* $C\mu'$, *de grandeur double des rayons* s_0p *et* s'_0p'.

Si du point focal commun C nous abaissons les perpendiculaires sur les droites oo_3 et $o'o'_3$, tangentes à ces coniques, leurs points d'intersection se trouveront de même respectivement sur les deux cercles engendrés (s_0p) et (s'_0p').

D'après cela nous avons démontré incidemment que *le lieu geométrique des projections des points focaux d'une conique sur ses tangentes,* ou *la* podaire *de ces points focaux est un cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre.* Telle est la propriété très-connue à laquelle nous avons recouru au n.° 33.

Les coniques (M'') et (M''') seront, donc, *monostigmoconfocales* et auront les axes focaux *communs en direction.*

Pour abréger nous dirons que les coniques sont *monosynaxoniennes,* lorsqu'elles ont un de leurs axes commun en direction;

et qu'elles sont *disynaxoniennes* s'elles ont les deux axes communs en direction. Nous pouvons aussi adopter seulement le nom de *synaxoniennes*, pour exprimer indifféremment l'un ou l'autre cas.

55. Des points γ_0 et γ'_0 (fig. 3) abaissons les perpendiculaires $\gamma_0 m_\gamma$ et $\gamma'_0 m'_\gamma$ sur les rayons ob_0 et $o'b'_0$ des cercles (x) et (x') ou (o) et (o') et soient respectivement m_γ et m'_γ les points d'intersection de ces droites, étant évidemment

$$Cm_2 = \gamma_0 m_\gamma = \gamma'_0 m'_\gamma.$$

D'après cela les coniques (Σ) et (Σ') auront le cercle (E'') pour cercle focal commun et les cercles $(\gamma_0 m_\gamma)$ et $(\gamma'_0 m'_\gamma)$, égaux au premier, pour seconds cercles focaux.

Ainsi ces coniques, qui étaient cycloconfocales relativement aux cercles directeurs donnés (E) et (I), ou par rapport aux cercles focaux (E'') et (I''), deviendront monocycloconfocales relativement au cercle directeur (E) et à chacun des deux nouveaux cercles directeurs $(\gamma_0 b_0)$ et $(\gamma'_0 b'_0)$ que viennent remplacer le cercle directeur (I), ou par rapport au cercle focal (E'') et à chacun des nouveaux cercles focaux $(\gamma_0 m_\gamma)$ et $(\gamma'_0 m'_\gamma)$ égaux au premier et qui viennent remplacer le cercle focal (I'').

Les cercles (o) et (o') coupant évidemment sous des angles inégaux les nouveaux cercles directeurs $(\gamma_0 b_0)$ et $(\gamma'_0 b'_0)$, si nous considérons la seconde suite de cercles qui rencontrent les cercles (E) et $(\gamma_0 b_0)$ sous les mêmes angles constants que le cercle (o), les centres des cercles de cette suite se trouveront sur une conique (Σ_0) qui, par rapport à ces cercles directeurs, sera cycloconfocale à la conique (Σ), les cercles focaux respectifs étant égaux entre-eux. En considérant de même la seconde suite de cercles qui coupent les cercles (E) et $(\gamma'_0 b'_0)$ sous les mêmes angles constants que le cercle (o'), les centres de ces nouveaux cercles seront sur une conique (Σ'_0) cycloconfocale à la conique (Σ'), par rapport à ces cercles directeurs, les cercles focaux respectifs étant égaux entre-eux.

Les deux couples de coniques (Σ), (Σ_0) et (Σ'), (Σ'_0) se trouveront donc aux mêmes conditions que les conique (Ω) et (Ω') des figures 4 et 5. Cela étant, nous pouvons continuer très-facilement à déduire des cas particuliers relatifs à ces figures toutes propriétés qui ont lieu pour la figure 3.

56. Tirons (fig. 3) la corde b_2b'' du cercle donné (I), laquelle touche le cercle générateur (o) au point b'_2, où ces cercles s'entrecoupent; le cercle générateur correspondant, ou qui touche la corde à l'autre extrémité b''', sera, en général, distinct du cercle (o_3); et cette corde, tangente en m'_1 au cercle enveloppe (I'), deviendra l'une tangente commune à ces cercles générateurs. La seconde tangente commune correspondante (extérieure ou intérieure ainsi que la première) touchera ces cercles aux points qui représentent de même les extrémités de la corde d'un nouveau cercle directeur, le cercle enveloppe de cette corde et le cercle enveloppe (I') ayant aussi même axe radical TT_o, que les trois cercles enveloppes (E') $(\gamma_o v'_{i_o})$ et $(\gamma'_o v''_{s_o})$.

Pour le cercle générateur (o') nous trouverons par rapport au cercle (I) un autre cercle correspondant, en général, distinct de (o'_3); et trouverons de même un nouveau cercle directeur et un nouveau cercle enveloppe. Ces deux nouveaux cercles enveloppes et le cercle enveloppe (I') auront de même TT_o pour axe radical.

On voit donc que, *deux cercles générateurs correspondants* (o) *et* (o_3), *par rapport à l'un cercle directeur* (E) *seuls seront en même temps des cercles correspondants par rapport à l'autre cercle directeur* $(\gamma_o b_o)$, *quand les cordes correspondantes* ba *et* $b_o a_o$ *seront égales, lesquelles représenteront alors les grandeurs des diamètres de cercles focaux égaux des coniques engendrées, qui par rapport à ces cercles focaux pourront être nommées* isocycloconfocales.

Deux cercles directeurs par rapport auxquels deux cercles générateurs sont en même temps correspondants nous les appelons *cercles directeurs correspondants.*

De même, pour abréger, deux cercles directeurs seront dits *isogoniques,* par rapport aux deux suites de cercles générateurs; et, réciproquement, ces cercles générateurs *isogoniques* par rapport aux cercles directeurs, toutes les fois que les angles e et i sur lesquels ils s'entrecoupent, sont égaux.

Dans le cas général, ou d'inégalité des angles e et i, les cercles directeurs et générateurs pourront aussi être nommés *anisogoniques,* les uns par rapport aux autres.

57. Si nous considérons (fig. 5) un cercle générateur quelconque (ω) les tangentes $\beta\mathring{\theta}$ et $\beta'\mathring{\theta}$ aux points β et β' de ce cercle seront aussi tangentes à son cercle correspondant $(_3\omega)$, et par suite l'intersection $\overset{\circ}{\theta}$ de ces tangentes se trouvera sur l'axe radical $\theta\theta_0$ des cercles directeurs (Cb) et $(C_0\beta')$.

Donc, *les couples de tangentes* θb, $\theta\beta_0$ *et* $\theta_0\beta$, $\theta_0\beta'$ *au cercle générateur considéré* (ω) *aux sommets opposés* b, β_0 *et* β, β' *du quadrilatère complet* $\beta b\beta'\beta_0, \varphi_1\varphi_2$ *inscrit dans ce cercle se coupant sur l'axe radical* $\theta\theta_0$ *des cercles directeurs correspondants* (Cb) *et* $(C_0\beta)$, *ce quadrilatère aura deux sommets* φ_1 *et* φ_2 *sur cet axe.*

Soit $\overset{\circ}{\theta}{}'$ le point de concours du couple de tangentes $\alpha\overset{\circ}{\theta}{}'$, $\alpha'\overset{\circ}{\theta}{}'$ au cercle générateur (ω_3) aux sommets α et α' du quadrilatère complet $\alpha a'\alpha\alpha_0, \varphi'_1\varphi'_2$ inscrit dans ce cercle et φ'_1 et φ'_2 deux sommets de ces quadrilatères situés avec le point θ sur l'axe radical $\theta\theta_0$ des cercles directeurs correspondants; et représentons par φ_ω et φ_{ω_3} les points de rencontre des deux couples de diagonales $a\alpha_0$, $\alpha\alpha'$ et $b\beta_0$, $\beta\beta'$ de ce quadrilatère et du quadrilatère $b\beta\beta_0\beta'$, $\varphi_1\varphi_2$.

Les points φ_ω et φ_{ω_3} seront évidemment les *pôles* de l'axe radical $\theta\Omega_{m_0}\theta_0$ relatifs aux cercles générateurs correspondants (ω) et (ω_3), et, par suite, les droites $\omega\varphi_\omega$ et $\omega_3\varphi_{\omega_3}$ couperont cet axe orthogonalement aux points ψ_ω et ψ_{ω_3}.

Par le point μ'' tirons, parallèlement aux droites $\omega\varphi_\omega\psi_\omega$ et $\omega_3\varphi_{\omega_3}\psi_{\omega_3}$, la droite $\mu''\varphi_\mu\psi_\mu$, étant φ_μ et ψ_μ les points où cette droite coupe les droites Em_1 et $\theta\theta_0$. Les triangles $\omega b\beta_0$, $\mu''m_1n_{i_0}$ et $\omega_3a\alpha_0$ étant évidemment homothétiques, les points homologues φ_ω, φ_μ et φ_{ω_3} seront en ligne droite avec le point θ, ou se trouveront sur un des vecteurs d'homothésie $\theta\varphi_\omega\varphi_\mu\varphi_{\omega_3}$; et puisque μ'' est le point milieu du segment $\omega\omega_3$, il en sera de même de φ_μ relativement au segment $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}$.

Représentons par Θ le rencontre des tangentes $\varphi_1\omega$ et $\varphi'_1\omega_3$ à la conique engendrée (Ω), et par Θ_φ et σ les rencontres des couples de droites $\varphi_1\varphi_\omega$, $\varphi'_1\varphi_{\omega_3}$ et $\varphi_2\omega$, $\varphi'_2\omega$ issues des couples de points φ_1, φ'_1 et φ_2, φ'_2; et enfin soit ψ_θ le point où s'entrecoupent les droites $\Theta\Theta_\varphi$ et $\theta\theta_0$. Alors les triangles $\omega\omega_3\sigma$ et $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}E$ étant tels, que leurs côtés se coupent deux à deux ($\omega\omega_3$ et $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}$, $\omega\sigma$ et $\varphi_\omega E$, $\omega_3\sigma$ et $\varphi_{\omega_3}E$) sur la droite $\theta\theta_0$ aux points θ, φ_2 et φ'_2, leurs sommets seront situés deux à deux sur trois droites $\omega\varphi_\omega\psi_\omega$, $\omega_3\varphi_{\omega_3}\psi_{\omega_3}$ et σE *congruentes*, ou concourant en un même point; mais, comme nous avons vu plus haut, les deux premières droites étant parallèles, les points de concours de ces trois droites se

*

trouvera á l'infini dans la direction de la droite CC_0; et, par suite, le sommet σ du triangle $\omega\sigma\omega_3$ se trouvera sur cette droite.

Comme on sait, les deux triangles $\omega\omega_3\sigma$ et $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}E$ sont *homologiques*, la droite $\theta\theta_0$ étant *l'axe de concours* ou *d'homologie* et *le centre* étant à l'infini dans la direction CC_c; et par conséquent on a

$$\frac{\omega\psi_\omega}{\varphi_\omega\psi_\omega}=\frac{\omega_3\psi_{\omega_3}}{\varphi_{\omega_3}\psi_{\omega_3}}=\frac{\mu''\psi_\mu}{\varphi_\mu\psi_\omega}=\frac{\sigma\Omega_{m_0}}{E\Omega_{m_0}},$$

d'où il résulte que le point E étant fixe il en sera de même du point σ, et par suite

$$\frac{\sigma\Omega_{m_0}}{E\Omega_{m_0}}=\text{const.}$$

Donc, *quand la corde* ba *du cercle directeur* (E) *tournera autour de* C *simultanément avec les lignes qui lui sont invariablement reliées les triangles* $\omega\sigma\omega_3$ *et* $\varphi_\omega E\varphi_{\omega_3}$ *tournant autour des sommets* σ *et* E, *les sommets libres* ω, ω_3 *et* φ_ω, φ_{ω_3} *décriront un couple de coniques* (Ω) *et* (Ω_h); *et les côtés* $\omega\omega_3$ *et* $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}$ *envelopperont un autre couple de coniques* (Ω_0) *et* (Ω_{h_0}); *chacun de ces couples de coniques ayant l'axe radical* $\theta\Omega_{m_0}\theta_0$ *des cercles directeurs* (E) *et* (I) *pour sécante* (réelle ou idéale) *commune, ou pour axe d'homologie par rapport auxquel un des centres d'homologie se trouvent à l'infini; et ainsi les droites* $\varphi_1\varphi_\omega$ *et* $\varphi'_1\varphi'_{\omega_3}$ *seront deux tangentes à la conique* (Ω_h) *homologues ou homologiques aux tangentes* $\varphi_1\omega$ *et* $\varphi'_1\omega_3$ *de la conique* (Ω), *les points* φ_ω *et* φ_{ω_3} *étant les points de contact respectifs.*

Dans ce cas les coniques (Ω), (Ω_h) pourront être dites *homologosyngènes*, par rapport à l'axe d'homologie $\theta\Omega_{m_0}\theta$, qui alors sera dit de *syngénie*. Il en sera de même des coniques enveloppes (Ω_0), (Ω_{h_0}), par rapport à ce même axe.

58. Considérons maintenant (fig. 5) les quadrilatères homologiques $\beta b\beta'\beta_0, \varphi_1\varphi_2$ et $\alpha a\alpha'\alpha_0, \varphi'_1\varphi'_2$, dont l'axe et le centre d'homologie sont la droite Em_1 et le point θ.

D'après cela les droites $\varphi_1\varphi_\omega$ et $\varphi'_1\varphi'_{\omega_3}$ étant homologiques se couperont en un même point Θ_φ de cet axe Em_1; et puisque les quadrilatères (simples) $\omega\Theta\omega_3 E$ et $\varphi_\omega\Theta_\varphi\varphi_{\omega_3}\sigma$ sont de même homologiques, ayant pour axe et pour centre d'homologie la droite $\theta\theta_0$ et un point à l'infini, la droite $\sigma\mu''$ passera par le point de rencontre Θ des tangentes $\varphi_1\omega$ et $\varphi'\omega_3$, comme diagonale du premier quadrilatère, et, par conséquent, coupera la diagonale homologique $E\Theta_\varphi$ de l'autre quadrilatère en un point φ_θ de l'axe $\theta\theta_0$, lequel sera ainsi coupé orthogonalement par la droite $\Theta\Theta_\varphi\psi_\theta$.

Quand les droites Em_1 et $\sigma\mu''$ seront parallèles entre elles et par suite parallèles à $\theta\theta_0$ ou perpendiculaires à CC_0, la seconde droite $\sigma\mu''$ deviendra alors la conjuguée harmonique de la tangente $\mu''\theta$ de la conique (Ω_0), par rapport à ses vecteurs $C\mu''$ et $C_0\mu''$; et le point σ étant toujours fixe, comme nous venons de le voir, représentera le point conjugué harmonique de l'infini, par rapport aux points conjugués C et C_0; et, donc, il ne sera que le point σ_0 lui-même, c'est-à-dire il se confondra avec le point milieu de la distance focale CC_0, ou avec le centre de cette conique.

Cela étant la droite CC_0 qui joint les centres des deux cercles directeurs correspondants $(C\beta)$ et $(C_0\beta_0)$ étant l'un des axes communs en direction aux deux coniques (Ω_0) et (Ω); et la droite $\sigma_0\Theta$, coupant alors orthogonalement la corde $\omega\omega_3$ de la conique (Ω) au point milieu μ'', deviendra la direction du second axe de cette courbe.

D'après le n.° 44, nous sommes arrivés au même résultat.

En effet, les coniques (Ω) et (Ω') (fig. 4) pouvant encore être engendrées par les centres des cercles des deux suites de cercles générateurs, qui coupent sous les angles constants e et i les cercles directeurs correspondants (I_e) et (E_i), symétriquement égaux aux cercles directeurs donnés (E) et (I), par rapport au point σ_0, la perpendiculaire $\sigma_0\sigma_1$, en ce point, sur l'axe de symétrie CC_0 de cette figure, sera un autre axe de symétrie de ces coniques, ainsi que des coniques enveloppes (Ω_0) et (Ω'_0).

Donc, *la conique* (Ω) (fig. 5) *et la conique enveloppe* (Ω_0) *sont concentriques ou homocentriques et synaxoniennes; et le point* E *est le centre de la conique* (Ω_h).

Comme on voit, *dans les coniques* (Ω) *et* (Ω_h) *les droites* $\Theta\sigma_0$ *et* $\Theta_\varphi E$ *sont les directions de leurs diamètres respectivement conjugués aux cordes* $\omega\omega_3$ *et* $\varphi_\omega\varphi_{\omega_3}$, *et dont les points* Θ *et* Θ_φ *sont les pôles;* et comme on sait aussi, *les intersections de ces diamètres avec la droite* CC_0 *seront les centres* σ_0 *et* E *de ces mêmes coniques.*

D'ailleurs, *nous pouvons encore obtenir le centre de la conique* (Ω) [quels que soient les cercles directeurs (E) et (I)] *en déterminant le pôle* φ_ω *de la sécante* $\mathfrak{b}\Omega_{m_0}\mathfrak{b}_0$ (commune à ces cercles) *par rapport à l'un cercle générateur quelconque* (ω); *puis tirer la droite* $E\varphi_\omega\varphi_2$, *passant par ce pôle et par le centre radical* E *de la série de cercles générateurs* (ω), (ω_3), ...; *et par le point d'intersection de cette droite avec cette sécante mener la droite* $\varphi_2\omega\sigma_0$, *passant par le centre* ω *du cercle générateur considéré, laquelle coupera la droite* CC_0 *au point demandé.*

Puisque le centre de (Ω) ou (Ω_0) est aussi le point milieu de la distance entre ces centres de deux cercles directeurs correspondants, il en résulte que, *étant donnés deux cercles directeurs quelconques* (E) *et* (I_n), *si par les points d'intersection* b *et* β *d'un* (E) *de ces cercles directeurs avec un cercle générateur* (ω), *et par le pôle* φ_ω *de la sécante* $\mathfrak{b}\Omega_{m_0}\mathfrak{b}_0$ (commune aux cercles directeurs) *par rapport à ce cercle générateur nous tirons ses cordes* $b\beta_0$ *et* $\beta\beta'$, *la perpendiculaire* $\omega\varphi_0 C$ *abaissée du centre* ω *sur la corde* $\beta_0\beta'$ *coupera* CC_0 *au point* C_0, *centre du cercle directeur* $(C_0\beta_0)$ *ou* (I) *correspondant du cercle* (E); *et par conséquent en prenant le point milieu* σ_0 *de la distance* CC_0 *entre les centres de ce couple de cercles correspondants, on a le centre de la conique engendrée* (Ω), *ou de la conique enveloppe* (Ω_0).

Lorsque les cordes $b\beta_0$ et $\beta\beta'$ coïncident avec la polaire $\varphi_1\varphi_\omega$ du point φ_2 (fig. 5), le point σ_0 sera l'intersection de la droite CC_0 avec le rayon de (ω) perpendiculaire à cette droite; et alors nous n'aurons qu'un cercle directeur correspondant, qui représentera deux cercles *coïncidents*, et par suite il sera vraiment un *cercle double*, ayant le même centre que la conique (Ω).

Si nous considérons la conique (Ω') nous aurons un autre *cercle directeur correspondant double.*

Dans le cas où le point φ_2 est intérieur à (ω) (fig. 5 *a*) sa polaire étant extérieure le cercle directeur double deviendra *imaginaire.*

Donc:

A chaque série de cercles générateurs répond un cercle directeur correspondant double (réel ou imaginaire) *dont le centre* σ_0 *est l'intersection de la droite* CC_0, *qui joint les centres des cercles directeurs donnés* (E) *et* (I) *avec le rayon* $\omega\sigma_0$ *d'un quelconque* (ω) *de ces cercles générateurs, perpendiculaire à la droite* $\varphi_1\varphi_\omega$ *menée par le pôle* φ_ω *de l'axe radical des cercles directeurs, relatif au cercle gé-*

nérateur considéré, et par le centre radical φ_1 *de ces trois cercles* (ω), (E), (I).

On reconnaît de même que *la tangente* $\varphi_1\varphi_\omega$ *à la conique* (Ω_h) *au point* φ_ω *coupe orthogonalement en* p_φ *le diamètre* $\omega\sigma_0$ *de sa conique homologique* (Ω) *lequel passe par le point* ω *homologue à ce point* φ_ω*; et,* réciproquement, *la tangente* $\varphi_1\omega$ *à cette conique en* ω *coupe orthogonalement en* p_ω *le diamètre* φ_ωE *de cette conique-là.*

Enfin, dans les coniques enveloppes et homologosyngènes (Ω_0), (Ω_{h_0}), étant respectivement les droites $\sigma\mu''$ et Eφ_μ deux diamètres homologiques, nous aurons analoguement que, *la tangente* $\theta\varphi_\mu$ *en* φ_μ *à* (Ω_{h_0}) *coupe orthogonalement en* π_μ *le premier diamètre; et, réciproquement, la tangente* $\theta\mu''$ *en* μ'' *à* (Ω_0) *coupe orthogonalement en* π *le second diamètre.*

De tout ce qui précède il résulte ce théorème:

Théorème XXIII. — *Étant donnés deux cercles* (E) *et* (I) *le lieu géométrique des pôles de leur axe radical relatifs aux cercles d'une quelconque des deux séries de cercles qui les coupent sous des angles constants* e *et* i *est une conique* (Σ_h), *ayant pour centre le centre radical de cette série de cercles. De plus, l'axe radical des cercles donnés, la tangente en un point quelconque de cette conique, et la droite passant par ce point et par le centre de cette courbe déterminent un triangle* autopolaire *par rapport au cercle sécant respectif, c'est-à-dire un triangle tel, que chaque sommet est le pôle du côté apposé; enfin cet axe radical coïncidera avec une sécante* (réelle ou idéale) *commune à cette même conique et à la conique* (Σ) *engendrée par les centres des cercles sécants et sera l'un axe de concours ou d'homologie de ces courbes, qui, par rapport à cet axe, sont homologosyngènes. D'ailleurs la tangente à l'une de ces coniques coupera orthogonalement dans l'autre conique le diamètre passant par le point homologue du point de contact de cette tangente.*

59. En représentant (fig. 5) par ε_ψ, ε_φ et ε'_φ, ε'_ψ les deux couples de points d'intersection des tangentes $\mathring{\theta}\beta$ et $\mathring{\theta}\beta'$ au cercle (ω) aux points β et β' avec les deux tangentes $\mathring{\theta}b$ et $\theta\beta_0$ aux points b et β_0 nous auront le quadrilatère $\varepsilon_\varphi\varepsilon_\psi\varepsilon'_\varphi\varepsilon'_\psi$, $\theta\theta$ circonscrit à ce cercle, ayant pour diagonale les côtés $\varphi_\omega\varphi_2$, $\varphi_1\varphi_\omega$ et $\theta\theta_0$ du triangle autopolaire $\varphi_1\varphi_\omega\varphi_2$.

D'après cela le théorème mentionné en dernier lieu peut prendre l'énoncé suivant:

THÉORÈME XXIV. — *Étant donnée une série de cercles ayant même axe radical, tout cercle appartenant à l'une des deux séries de cercles qui les coupent sous des angles constants, coupera chaque couple de cercles correspondants de la série de cercles donnée en des points tels, que le quadrilatère complet circonscrit à ce cercle et le touchant à ces points aura cet axe radical pour diagonale, et les deux autres diagonales se couperont sur une conique, ayant l'une de ces diagonales pour tangente, l'autre diagonale passant par le centre de cette conique, ou par le centre radical de la série de cercles sécants.*

En outre, le quadrilatère complet, inscrit dans le cercle sécant, et ayant les points d'intersection considérés pour sommets, aura les deux autres sommets sur l'axe radical de la série de cercles donnés, ou coïncidant avec les points de concours des trois diagonales du quadrilatère circonscrit considéré; et des deux droites qui joignent ces sommets au centre du cercle sécant l'une sera tangente à la conique, lieu géométrique de ce centre, et l'autre passera par le centre de cette conique, ou par le centre du cercle directeur correspondant double (réel ou imaginaire).

(à suivre).

SOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 23

Sommar a serie

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{2^i . x}{e^k . x+1},$$

onde é $k = 2^i$.

Temos primeiramente, decompondo a fracção

$$\frac{2x}{e^{2x}-1} = \frac{2x}{(e^x-1)(e^x+1)},$$

a identidade seguinte:

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{x}{e^x+1} + \frac{2x}{e^{2x}-1}.$$

Do mesmo modo será:

$$\frac{2x}{e^{2x}-1} = \frac{2x}{e^{2x}+1} + \frac{2^2 x}{e^{4x}-1},$$

$$\frac{2^2 x}{e^{4x}-1} = \frac{2^2 x}{e^{4x}+1} - \frac{2^3 x}{e^{8x}-1},$$

$$\frac{2^3 x}{e^{8x}-1} = \frac{2^3 x}{e^{8x}+1} + \frac{2^4 x}{e^{16x}-1},$$

. . . .

Das fórmulas precedentes deduz-se pois

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{e^x+1}+\frac{2x}{e^{2x}+1}+\frac{4x}{e^{4x}+1}+\ldots+$$

$$+\frac{kx}{e^{kx}+1}+\mathrm{R},$$

pondo $k=2^i$ e

$$\mathrm{R}=\frac{2kx}{e^{2kx}-1}.$$

Mas, por ser

$$e^{2kx}=1+2kx+\frac{(2kx)^2}{1.2}+\frac{(2kx)^3}{1.2.3}+\ldots,$$

temos

$$\mathrm{R}=\frac{1}{1+\frac{2kx}{1.2}+\frac{(2kx)^2}{1.2.3}+\ldots},$$

logo será, para $i=\infty$,

$$\lim \mathrm{R}=0,$$

e portanto

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{e^x+1}+\frac{2x}{e^{2x}+1}+\frac{4x}{e^{4x}+1}+\ldots.$$

F. Gomes Teixeira.

BIBLIOGRAPHIA

M. d'Ocagne. — *Sur un algorithme algébrique. (Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3.ª série, t. II).
—— *Théorie élémentaire des séries récurrentes.* (*Item,* t. III).

No primeiro artigo o sr. d'Ocagne faz applicação da theoria das funcções *aleph* ao desenvolvimento da fracção

$$\frac{1}{(z-a_1)\,(z-a_2)\,\ldots\,(z-a_p)}$$

em serie, mostrando que o coefficiente de z^{-p-m} é a funcção $aleph\,(a_1\,a_2\ldots a_p)^{(m)}$, d'onde deduz a funcção generatriz da funcção $aleph\,(a_1\,a_2\ldots a_p)^{(m)}$, e uma relação notavel entre esta funcção e o denominador d'aquella fracção.

No segundo artigo o distincto geometra francez faz applicação das fórmulas obtidas no primeiro artigo ao calculo dos termos das series definidas pela lei de recurrencia

$$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2} + \ldots + lU_{n-p},$$

e ao calculo da somma de um numero qualquer de termos d'estas series.

L. Cordeiro. — *De como navegavam os portuguezes no começo do seculo* XVI. (Boletim da sociedade de geographia de Lisboa, vol. IV, 1883).

Estudo bibliographico a respeito de um livro encontrado na bibliotheca publica de Evora. Mostra o illustre secretario da sociedade de geographia de Lisboa que a primeira parte do livro intitulada *Tratado da Spera do mūdo* não é outra cousa senão a primeira traducção portugueza do Tractado da esphera de Sacrobosto, de que Pedro Nunes deu a segunda.

A segunda parte do livro considerado contem uma serie de regimentos astronomicos, que foram com certeza os usados pelos navegantes portuguezes do principio do seculo XVI, antes das descobertas de Pedro Nunes.

Mostra em seguida o sr. L. Cordeiro que o auctor do livro foi Gaspar Nicolas, natural de Guimarães, que floreceu no seculo XVI; e mostra tambem que provavelmente foi impresso em 1519 ou 1520.

Em seguida vem a transcripção dos regimentos, que são documentos importantes para a historia das sciencias nauticas, e que provam que os navegantes portuguezes não iam á sciencia estrangeira procurar as regras para se dirigirem sobre os mares.

L. Woodhouse. — Da integração das equações differenciaes da Dynamica. — Porto, 1883.

N'este trabalho, o distincto professor da Escola polytechnica do Porto expõe os principaes pontos da doutrina da integração das equações da Dynamica. Deduz as equações de Lagrange e a transformação de Hamilton; os theoremas de Liouville, Donkin e Poisson; o methodo de Jacobi para achar os integraes das equações da Dynamica; finalmente o abaixamento das variaveis effectuado por Bour, que o sr. Woodhouse expõe sem fazer, como este geometra, a restricção de que tem logar o principio das forças vivas.

Roberto Mendes. — Resistencia dos arcos metalicos. — Porto, 1883.

O estudo da resistencia dos arcos metallicos é muito importante em engenheria pela applicação que tem na construcção das pontes metallicas, e por isso o sr. Roberto Mendes escolheu este assumpto para a sua dissertação de concurso a uma cadeira da Escola polytechnica do Porto.

Na primeira parte do seu interessante opusculo estuda o auctor o problema da resistencia dos arcos metallicos com toda a generalidade, determinando as forças interiores desenvolvidas pela acção das forças exteriores, e determinando a deformação produzida por estas forças.

Na segunda parte considera especialmente os arcos circulares.

Tanto na primeira como na segunda parte segue principalmente os trabalhos de Bresse e Albaret.

J. M. Rodrigues.—Memoria sobre a theoria da Balistica (Memorias da academia real das sciencias de Lisboa, 1884).

Tracta o sr. Rodrigues n'esta importante Memoria da integração das equações differenciaes do movimento da translação dos projecteis, suppondo a resistencia do meio uma funcção qualquer da velocidade.

Não podendo integrar estas equações differenciaes, Didion, Saint-Robert e Mayevski procuraram uma solução approximada do problema, substituindo as equações propostas por outras em que se póde fazer a separação das variaveis. O nosso illustre geometra faz notar na *Introducção* que estes auctores não fizeram sentir a verdadeira natureza do erro commettido, e chega por varios processos á conclusão importante de que este erro consiste no desprezo do peso do projectil avaliado segundo a tangente á trajectoria.

Depois, na primeira parte da memoria, por uma analyse elegante, reduz a quadraturas o problema da integração das equações differenciaes do movimento dos projecteis esphericos, e dos resultados a que chega deduz os resultados achados por Mayevski e os erros d'estes resultados expressos por integraes definidos.

Na segunda parte da sua memoria faz o sr. Rodrigues applicação das fórmulas achadas na primeira parte ás leis adoptadas para exprimir a resistencia do ar, considerando as leis de Newton, Euler, e J. Bernouilli.

Na terceira parte estuda, por uma analyse semelhante, o movimento de translação dos projecteis oblongos.

Por esta curta noticia vê-se a importancia do trabalho do sr.

Rodrigues, pois que além de completar os trabalhos de Didion, Saint-Robert e Mayevski, dá uma solução completa do problema difficil da Balistica.

J. A. Albuquerque.— Primeiros principios da theoria dos determinantes.— Paris, 1884.

É muito difficil escrever livros para o ensino. A escolha das materias, a ordem pela qual se distribuem, a fórma porque se expõem exigem tal attenção, que taes livros não devem ter publicidade sem serem maduramente pensados.

O opusculo do sr. Albuquerque satisfaz a todos os requisitos que se exigem em taes livros, e faz-nos desejar vivamente a publicação da Algebra, que promette no prefacio, e da qual o opusculo actual constitue um capitulo.

O seu auctor destina-o ao ensino dos lyceus, entendendo com razão que nos programmas da instrucção secundaria se deveria introduzir os principios da theoria dos determinantes para se poder estudar completamente a resolução das equações do primeiro grão com um numero qualquer d'incognitas.

Eis o assumpto de cada paragrapho:

§ I. Preliminares.

§ II. Definição de determinantes, sua notação e lei de formação.

§ III. Propriedades fundamentaes dos determinantes.

§ IV. Determinantes menores; suas propriedades.

§ V. Propriedades dos determinantes relativos á addição de linhas ou columnas. Decomposição dos determinantes de elementos polynomicos.

§ VI. Applicação á resolução das equações lineares.

No fim de cada paragrapho vem uma bem escolhida collecção de exercicios, correspondendo quasi todos a theoremas importantes na theoria dos determinantes.

Em quanto o estudo dos determinantes se não introduz nos lyceus, o livro do sr. Albuquerque é um excellente texto para se principiar o estudo dos determinantes nas nossas escolas superiores, supprindo o professor verbalmente alguns pontos importantes de que o auctor se não occupou por ter só em vista a parte necessaria na Algebra elementar.

M. A. Gonçalves.—Equilibrio electrico nos conductores.—Porto, 1884.

Foi escripto o presente opusculo para dissertação de concurso a uma cadeira da Escola polytechnica do Porto.

Principia o sr. Gonçalves por expôr a theoria geral do equilibrio electrico. Considera depois o equilibrio electrico no caso de duas espheras concentricas, de dois cylindros circulares com o mesmo eixo, de dois planos parallelos e das superficies de segunda ordem com centro.

Expõe depois o methodo das imagens electricas, do qual faz applicação á distribuição da electricidade sobre duas espheras que se cortam segundo um angulo submultiplo de dois rectos, ao caso de duas espheras que se não cortam, ao caso de duas espheras tangentes e ao caso de dois cylindros que não tem o mesmo eixo, mas cujas generatrizes são parallelas.

Termina pelo estudo do equilibrio electrico, no caso particular em que o potencial é funcção só de duas variaveis.

L. F. Marrecas Ferreira.—Nota sobre uma questão de hydraulica (*Revista de obras publicas*, tomo XV, 1884).

N'este artigo o nosso distincto engenheiro expõe um processo geometrico para determinar o ponto de escoamento nas rodas de cubos, mais simples e mais rigoroso do que o processo graphico habitualmente empregado. Do resultado a que chega deduz as condições para a roda dar um bom rendimento, e chega assim theoricamente ás regras que a practica tem aconselhado.

G. T.

INDICE

Nota sobre a independencia dos zeros da funcção Jacobiana de integraes abelianos normaes de primeira especie, por J. A. Martins da Silva, pag. 3.

Nota sobre um problema de Mecanica Racional, pag. 9.

Sobre os triedros homologicos, por A. F. Rocha Peixoto, pag. 17.

Sobre alguns integraes definidos, por Duarte Leite Pereira da Silva, pag. 21.

Homographies et involutions des ordres supérieurs, par le D.r C. le Paige, pag. 27, 77.

Sobre as equações trinomias, por L. F. Marrecas Ferreira, pag. 50.

Sobre uma fórmula relativa á theoria das funcções ellipticas, por J. A. Martins da Silva, pag. 75.

Determinação geometrica dos momentos de inercia dos solidos de revolução, por G. C. Lopes Banhos, pag. 125.

Recherches relatives au cercle variable qui coupe deux cercles donnés sous des angles donnés, par A Schiappa Monteiro, pag. 143.

Solução da questão proposta n.º 23, por F. Gomes Teixeira, pag. 185.

Bibliographia, pag. 24, 71, 120, 187.