JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Escola Polytechnica do Porto,
Antigo Professor na Universidade de Coimbra,
Socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOLUME VI

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1885

SUR UNE TRANSFORMATION POLAIRE DES COURBES PLANES

PAR

M. Maurice d'Ocagne

Ingénieur des ponts et chaussées, à Paris

1. ρ et ω étant les coordonnées polaires du point M, appellons M_1 le point dont les coordonnées ρ_1 et ω_1 sont liées à ρ et ω par les relations

$$\omega_1 = m\omega, \quad \rho_1 = K\rho^m.$$

Si nous déterminons ainsi les points M_1 qui correspondent aux divers points M d'une courbe (M), nous obtenons une courbe (M_1) que nous appellerons *transformée d'indice m* de la courbe C.

Ce mode de transformation proposé par Chasles (*) a fait l'objet d'études de M.M. Roberts (**) et Faure (***). Tous ces géomètres ont remarqué la propriété capitale de ce mode de transformation, à savoir la *conservation des angles;* nous étions nous-même arrivé directement à cette propriété par une démonstration fort simple que l'on trouvera plus loin. Mais l'objet de la présente Note est de faire connaître quelques remarques nouvelles au sujet de cette importante méthode de transformation qui comprend comme cas particulier, pour $m = -1$, la transformation par rayons vecteurs réciproques.

(*) Note XXI de *l'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.*

(**) *Journal de Liouville*, t. XIII, p. 209.

(***) *Mémoires de l'Académie de Montpellier*, 1854, p. 463.

2. *La transformation conserve les angles.*

Appelons V et V_1 les angles que font, avec les vecteurs OM et OM_1, les tangentes aux courbes (M) et (M_1) aux points correspondants M et M_1. Nous avons

$$d\rho = \rho \cot g V \, d\omega,$$

$$d\rho_1 = \rho_1 \cot g V_1 \, d\omega_1.$$

Comme, d'ailleurs, $d\rho_1 = mK\rho^{m-1}d\rho$ et $d\omega_1 = md\omega$, la seconde égalité peut s'écrire

$$mK\rho^{m-1}d\rho = K\rho^m \cot g V_1 \, md\omega,$$

ou

$$d\rho = \rho \cot g V_1 \, d\omega.$$

Comparant avec la première égalité on voit que $V = V_1$, et le théorème est établi.

Il est à peine besoin de dire que ce théorème ne s'applique pas aux droites passant par le pôle; si deux telles droites font entre elles l'angle α, leurs transformées font l'angle $m\alpha$.

3. Corollaire. — *L'enveloppe de la transformée d'une courbe variable est la transformée de l'enveloppe de cette courbe variable.*

4. Le théorème précédent n'est qu'un cas particulier d'une propriété générale bien connue.

En effet, si le point M représente la quantité complexe

$$x + y\sqrt{-1},$$

le point M_1 représente la quantité complexe

$$x_1 + y_1\sqrt{-1} = K(x + y\sqrt{-1})^m.$$

Or, d'une manière générale, si

$$x_1 + y_1\sqrt{-1} = \varphi(x + y\sqrt{-1}),$$

φ représentant une *fonction qui possède une dérivée*, la transformation qui consiste à prendre le point (x_1, y_1) pour transformé du point (x, y) conserve les angles (*).

5. *Si* ON *et* ON_1 *sont les sous-normales qui correspondent aux points* M *et* M_1, *la droite* NN_1 *est perpendiculaire à* MM_1.

En effet, les angles MON et M_1ON_1 étant droits, et les angles OMN et OM_1N_1 étant égaux entre eux, on a

$$\widehat{MOM_1} = \widehat{NON_1}$$

et

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{ON}{ON_1}.$$

Les triangles MOM_1, NON_1 sont donc semblables, et comme les côtés homologues OM et ON d'une part, OM_1 et ON_1 de l'autre, sont perpendiculaires, il en est de même des troisièmes côtés MM_1 et NN_1, ce qui démontre le théorème.

6. Nous allons maintenant faire voir comment, connaissant le centre de courbure C de la courbe (M) au point M, on peut déterminer le centre de courbure C_1 de la courbe (M_1) au point M_1.

On a

$$dV = dV_1,$$

ou, en appliquant la formule (6) de notre Mémoire *sur les transformations centrales des courbes planes* (**),

$$\left(\frac{M_1N_1}{M_1C_1} - 1\right) d\omega_1 = \left(\frac{MN}{MC} - 1\right) d\omega;$$

remplaçant $d\omega_1$ par $md\omega$, et divisant par $d\omega_1$, nous avons

$$m\frac{M_1N_1}{M_1C_1} = \frac{MN}{MC} + m - 1.$$

(*) Voir, Briot et Bouquet, *Traité des fonctions elliptiques* (2.ᵉ édition, p. 3).

(**) *Mathésis*, t. IV, 1884, p. 73 et 97.

Soit E le point qui divise la normale M_1N_1 comme C divise la normale MN; alors, l'égalité précédente peut s'écrire

$$m\frac{M_1N_1}{M_1C_1}=\frac{M_1N_1}{M_1E}+m-1$$

ou

$$\frac{m}{M_1C_1}=\frac{1}{M_1E}+\frac{m-1}{M_1N_1}.$$

Le point C_1 se trouve ainsi parfaitement déterminé.

7. Dans le cas où $m=2$, sur lequel nous insistons plus loin, on a

$$\frac{2}{M_1C_1}=\frac{1}{M_1E}+\frac{1}{M_1N_1},$$

ce qui montre que *le centre de courbure* C_1 *est conjugué harmonique du point* M_1 *par rapport aux points* E *et* N_1.

Dans le cas où $m=-1$ (transformation par rayons vecteurs réciproques) on a

$$\frac{2}{M_1N_1}=\frac{1}{M_1E}+\frac{1}{M_1C_1},$$

c'est-à-dire que *le centre de courbure* C_1 *est conjugué harmonique du point* E *par rapport aux points* M_1 *et* N_1.

Dans le cas où $m=\frac{1}{2}$, spécialement envisagé par M.M. Roberts et Faure (*loc. cit.*), on a

$$\frac{2}{M_1E}=\frac{1}{M_1C_1}+\frac{1}{M_1N_1},$$

c'est-à-dire que *le centre de courbure* C_1 *est conjugué harmonique du point* N_1 *par rapport aux points* M_1 *et* E.

8. Nous avons déjà dit que pour $m=-1$ on tombe sur la transformation par rayons vecteurs réciproques; la transformée d'indice -1 d'une courbe est en effet inverse de la symétrique de cette courbe par rapport à l'axe polaire. Pour le cas où $m=\frac{1}{2}$ nous renvoyons au Mémoire très intéressant de M. Roberts (*).

Nous ferons ici quelques remarques au sujet du cas où $m=2$. Nous écrirons dans ce cas les formules de transformation

$$\omega_1=2\omega,\quad \rho_1=\frac{\rho^2}{a}.$$

9. On voit d'abord immédiatement que *la transformée d'une droite est une parabole ayant son foyer au point* O, car l'équation d'une droite quelconque étant

$$\rho=\frac{h}{\cos(\omega-\alpha)},$$

on trouve bien facilement que sa transformée a pour équation

$$\rho_1=\frac{\frac{2h^2}{a}}{1+\cos(\omega_1-2\alpha)}$$

parabole ayant son foyer à l'origine, dont l'axe fait avec l'axe polaire l'angle 2α, et qui a pour paramètre $\frac{2h^2}{a}$.

10. Chasles, qui avait donné le théorème précédent, a remarqué aussi que la transformée d'un cercle est un ovale de Descartes; mais n'ayant pas jugé à propos d'approfondir la question, il ne s'est pas aperçu que cet ovale n'est pas quelconque; cet ovale a un foyer double; c'est un limaçon de Pascal.

Cette remarque a déjà été faite par M.M. Cayley et Genocchi; au surplus on peut la rendre presque évidente.

En effet, si le point M figure la quantité complexe $x+y\sqrt{-1}$, et le point M_1 la quantité complexe $x_1+y_1\sqrt{-1}$, on a

$$z^2=az.$$

(*) Il faut remarquer en effet que ce que M. Roberts désigne par n est l'inverse de ce que nous appelons m.

Si le point M décrit une courbe unicursale (M), c'est-à-dire si l'on a

$$z = f(t) + \sqrt{-1}\,\varphi(t),$$

f et φ étant des fonctions rationnelles du paramètre t, le point M_1 décrit une courbe (M_1) définie par

$$\sqrt{az_1} = f(t) + \sqrt{-1}\,\varphi(t)$$

ou

$$az_1 = [f(t)^2 - \varphi(t)^2] + \sqrt{-1}\,.\,2f(t)\,\varphi(t),$$

et cette courbe est encore unicursale.

Donc, si la courbe (M) est un cercle, la courbe (M_1) sera un *ovale de Descartes unicursal*, c'est-à-dire, d'après M. Darboux, un *limaçon de Pascal*.

11. Nous avons trouvé un théorème qui, non-seulement fait connaître l'existence du foyer double, mais encore montre comment ce foyer est déterminé.

Nous avons communiqué à l'Académie des sciences de Paris (*) l'énoncé de ce théorème, que voici:

La transformée d'un cercle (M) *de centre* C *est un limaçon de Pascal ayant pour foyer simple l'origine* O *et pour foyer double le transformé commun des deux points où le cercle de centre* O *qui est orthogonal au cercle* (M) *coupe la droite* OC.

Voici maintenant la démonstration.

Soient R le rayon du cercle (M), d la longueur OC.

L'équation du cercle (M) est

$$R^2 = \rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos(\omega - \alpha).$$

Par suite, celle de sa transformée sera

$$R^2 = a\rho_1 + d^2 - 2d\sqrt{a\rho_1}\cos\left(\frac{\omega_1}{2} - \alpha\right),$$

puisque $\rho^2 = a\rho_1$ et $\omega_1 = 2\omega$.

(*) Voir *Comptes-rendus*, t. XCVII, p. 1424.

Posons, pour simplifier

$$R^2 = rd, \quad a = \mu d;$$

l'équation devient

$$r = \mu\rho_1 + d - 2\sqrt{a\rho_1}\cos\frac{\omega_1 - 2\alpha}{2},$$

ou

$$r - \mu\rho_1 - d = -2\sqrt{a\rho_1}\cos\frac{\omega_1 - 2\alpha}{2},$$

ou encore

$$(r - \mu\rho_1 - d)^2 = 4a\rho_1\cos^2\frac{\omega_1 - 2\alpha}{2}.$$

Développant, remplaçant $2\cos^2\frac{\omega_1 - 2\alpha}{2}$ par $1 + \cos(\omega_1 - 2\alpha)$, et simplifiant, nous avons

$$(1) \qquad \mu^2\rho^2{}_1 - 2\mu r\rho_1 + (r - d)^2 = 2\mu d\rho_1\cos(\omega_1 - 2\alpha).$$

Sous cette forme on reconnaît l'équation d'un ovale de Descartes ayant un foyer à l'origine, et dont l'axe fait l'angle 2α avec l'axe polaire. Soit maintenant F un foyer de la courbe, autre que le point O; ce point, étant sur l'axe de la courbe, on a, en appelant c la longueur OF, δ la distance du point F à un point quelconque (ρ_1, ω_1) de la courbe,

$$(2) \qquad \delta^2 = c^2 + \rho^2{}_1 - 2c_1\rho\cos(\omega_1 - 2\alpha).$$

Eliminons $\cos(\omega_1 - 2\alpha)$ entre les équations (1) et (2); cela nous donne

$$\delta^2 = c^2 + \rho^2{}_1 - \frac{c}{\mu d}[\mu^2\rho^2{}_1 - 2\mu r\rho_1 + (r - d)^2],$$

ou

$$\delta^2 = \left(1 - \frac{\mu c}{d}\right)\rho^2{}_1 + 2\frac{cr}{d}\rho_1 + c^2 - \frac{c(r - d)^2}{\mu d}.$$

Cette expression est de la forme

$$\delta^2 = A\rho^2_1 + 2B\rho_1 + C;$$

mais le point F est un foyer et l'équation en coordonnées bipolaires de la courbe rapportée à ses foyers O et F, est

$$\delta = m\rho_1 + n;$$

on doit donc avoir

$$B^2 - AC = 0.$$

Cela donne

$$\frac{c^2r^2}{d^2} - \left(1 - \frac{\mu c}{d}\right)\left(c^2 - \frac{c(r-d)^2}{\mu d}\right) = 0,$$

équation du 3^e degré qui détermine les distances c des divers foyers à l'origine O. Divisons par c ce qui supprime la solution connue $c = 0$, effectuons et réduisons; il vient

$$\frac{\mu c^2}{d} - 2c + \frac{2rc}{d} + \frac{r^2}{\mu d} - \frac{2r}{\mu} + \frac{d}{\mu} = 0,$$

ou, en multipliant par $\frac{d}{\mu}$,

$$c^2 + \frac{2(r-d)}{\mu}c + \frac{(r-d)^2}{\mu^2} = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\left(c + \frac{r-d}{\mu}\right)^2 = 0;$$

l'équation a une racine double; les deux foyers autres que le point O sont confondus au même point F.

Effectuant, nous avons

$$c=\frac{d-r}{\mu}$$

$$=\frac{1}{\mu}\left(d-\frac{R^2}{d}\right)$$

$$=\frac{d^2-R^2}{\mu d}$$

$$=\frac{k^2}{a},$$

k étant la puissance du pôle O par rapport au cercle (M).

Considérons le cercle de centre O, orthogonal au cercle (M); il coupe la droite OC aux points $(\rho=k,\ \omega=\alpha)$ et $(\rho=k,\ \omega=\alpha+\pi)$; ces deux points ont pour transformé commun le point $\left(\rho_1=\frac{k^2}{a},\ \omega_1=2\alpha\right)$, c'est-à-dire le point F, et le théorème se trouve ainsi démontré.

12. On sait que le foyer double d'un limaçon de Pascal est un point double de cette courbe. On le vérifie aisément dans le mode de génération précédent.

En effet, le cercle (M) coupe la perpendiculaire élevée en O à OC aux points

$$\left(\rho=k\sqrt{-1},\ \omega=\alpha-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\rho=k\sqrt{-1},\ \omega=\alpha+\frac{\pi}{2}\right);$$

ces points ont pour transformé commun le point

$$\left(\rho_1=-\frac{k^2}{a},\ \omega_1=\alpha+\pi\right)$$

qui n'est autre que le point F.

En résumé, on pourra transformer par la méthode précédente une propriété quelconque de droites et de cercles en une propriété de paraboles de même foyer et de limaçons de Pascal ayant pour foyer simple le foyer commun à toutes les paraboles. On pourrait en donner des exemples en très grand nombre, mais cela est inutile; le lecteur y suppléera bien aisément.

SOBRE UMA CURVA DO TERCEIRO GRÁO

POR

JOÃO D'ALMEIDA LIMA

Primeiro tenente de artilheria

I

Definição geometrica

Consideremos o angulo XOY; do vertice O, como centro, com um raio qualquer, descreva-se um arco de circulo ASS′S″; dos pontos S e S′, e com raios eguaes a SS′, descrevam-se arcos que cortarão ASS′S″ nos pontos A e S″.

Tirem-se pelos pontos S e S′ rectas parallelas á bissectriz do angulo dado; descrevam-se, com centro em O, arcos de quaesquer raios, e dos pontos T e T′, V e V′, em que cortam as rectas SZ e S′Z′, descrevam-se com o mesmo raio egual a SS′ arcos que cortarão BTT′, CVV′, . . . nos pontos B, C, D, . . .; o logar geometrico de todos estes pontos será uma curva AL. Esta curva gosa da propriedade seguinte: o arco II′, determinado pelos pontos de intersecção da curva com OX e OY, ficará dividido por meio da corda SS′ em tres partes eguaes.

Com effeito, se considerarmos que os angulos BOT″, COV″ indicam as diversas grandezas do angulo AOA″, que tende a confundir-se com o angulo dado, e como os arcos AS′S″, BTT″. . . são por construcção divididas pela corda SS′ em tres partes eguaes, quando o angulo variavel se confundir com o angulo dado, ou quando a curva AL cortar os lados d'esse angulo, tambem aquella corda dividirá em tres partes eguaes o arco II′.

É evidente que para a determinação do ponto de intersecção da curva com o lado OX, basta construil-a entre limites bastante curtos.

Note-se que a curva AL tende a transformar-se n'uma recta parallela á bissectriz do angulo, e que a sua curvatura se torna quasi insensivel, quando o raio vector tirado de O se torne bastante grande; d'aqui se conclue que determinados dois pontos H e L, bastante proximos um a baixo outro a cima de OX, bastará reunil-os por meio de uma recta para determinar o ponto de intersecção da curva; practicamente a curva HL não se póde distinguir de uma linha recta.

Temos assim uma solução practica do problema da trisecção do angulo, quando HL for sufficientemente pequena.

II

Equação da curva

Vamos agora procurar a equação da curva AL (fig. 1) e as coordenadas da sua intersecção com a recta OX.

Para determinar a equação da curva, note-se que sendo o angulo

$$\widehat{SOR} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{SOS'} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOS},$$

será

$$SOR = \frac{1}{3} \cdot AOR.$$

Fazendo

$$AOR = \theta,$$

e

$$AO = SO = \rho,$$

teremos no triangulo SOL

$$SL = \rho \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{3};$$

e pondo

$$SS' = b,$$

resulta

$$\frac{1}{2} \cdot b = \rho \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{3} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Fazendo n'esta equação $\theta = \frac{\alpha}{2}$, sendo α o angulo dado, obteremos o valor de ρ, que resolve o problema.

Querendo exprimir a equação da curva em coordenadas rectangulares, tendo a origem em O, e para eixo dos xx a bissectriz do angulo dado, notemos que, sendo pela trignometria

$$\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen} 2a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \cos 2a$$

$$= 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos^2 a + \operatorname{sen} a (1 - 2 \operatorname{sen}^2 a),$$

resulta

$$\operatorname{sen} \theta = 3 \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta}{3} - 4 \cdot \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{3}.$$

Mas do triangulo AOR deduz-se

$$AR = y = \rho \cdot \operatorname{sen} \theta,$$

e da equação (1)

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{3} = \frac{b}{2\rho};$$

logo

$$\frac{y}{\rho} = \frac{3b}{2\rho} - \frac{4b^3}{8\rho^3}$$

ou

$$2\rho^2 \cdot y = 3b\rho^2 - b^3.$$

Ora do triangulo AOR deduz-se tambem

$$x^2 + y^2 = \rho^2,$$

por consequencia, substituindo, vem

$$(2y-3b)(x^2+y^2)+b^3=0, \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

que é a equação da curva considerada.

A equação da recta OX é

$$y=x \,.\, \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

logo o systema das equações (2) e (3) dá as coordenadas do ponto de intersecção.

Eliminando pois a variavel y resulta a equação

$$\left(2x \,.\, \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}-3b\right)\left(1+\mathrm{tang}^2 \,.\, \frac{\alpha}{2}\right) . \, x^2+b^3=0$$

ou

$$\left(2x \,.\, \mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}-3b\right) . \, \frac{x^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}+b^3=0,$$

logo

$$x^3-\frac{3}{2} \,.\, \frac{b}{\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}} \,.\, x^2+b^3 \,.\, \frac{\cos^2 . \frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2}}=0$$

é a equação do problema da trisecção.

REMARQUES ARITHMÉTIQUES

PAR

ERNESTO CESARO

Étudiant à Rome

I

Sur la série de Fibonacci

D'après Lamé, on sait que les nombres de k chiffres, appartenant à la série de Fibonacci

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots$$

sont *quatre* ou *cinq*. Désignons par p la probabilité qu'ils soient plutôt quatre que cinq. Ayant réuni en un groupe les termes qui ont un même nombre de chiffres, on sait aussi que tout groupe de quatre termes est suivi par *trois* ou *quatre* groupes de cinq termes. Appelons q la probabilité qu'un groupe de quatre termes soit suivi par trois, plutôt que par quatre groupes de cinq termes. Cela posé, considérons les k premiers groupes, comprenant une totalité de n termes, n et k étant indéfiniment grands. De ces k groupes, il y en a kp de *quatre* termes, et $k(1-p)$ de *cinq*. Par suite

$$4kp + 5k(1-p) = n,$$

d'où

$$p = 5 - \frac{n}{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

De même, parmi les kp groupes de quatre termes, kpq sont suivis par *trois* groupes de cinq termes, et $kp(1-q)$ par *quatre* groupes de cinq termes. On a donc, en négligeant un nombre *fini* de groupes,

$$3kpq+4kp(1-q)=k(1-p),$$

d'où

$$q=5-\frac{1}{p}\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Si l'on pose

$$\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\quad \varepsilon=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1},$$

on a par hypothèse, en se rappelant l'expression du terme général de la série,

$$\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}(1\pm\varepsilon^{n+1})<10^k \lesseqgtr \frac{\alpha^{n+2}}{\sqrt{5}}(1\mp\varepsilon^{n+2}).$$

Donc, pour n indéfiniment croissant, on peut écrire $k=n\log\alpha$; puis:

$$p=5-\frac{1}{\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}}=0{,}2150\dots$$

Conséquemment:

«Il y a 73 à parier, contre 20 environ, que les nombres de k *chiffres, appartenant à la série de Fibonacci, sont plutôt cinq que quatre.»*

De même, la formule (2) donne

$$q=5-\frac{1}{5-\frac{1}{\log\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}=0{,}3493\dots$$

Remarquons, pour finir, que le rapport $\frac{k}{n}$ représente la probabilité qu'un terme soit le dernier d'un groupe. Par conséquent:

«*Ayant pris, au hasard, un terme de la série de Fibonacci, la probabilité que le terme suivant admette un chiffre de plus est*

$$\log \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 0{,}2089\ldots.»$$

II

Sur une identité générale

Soient

$$A(x) = \Sigma\, \alpha_n x^n, \quad B(x) = \Sigma\, \beta_n x^n,$$

n variant de 1 à $+\infty$, par valeurs *entières*. Il est aisé de démontrer que

$$\Sigma\, \beta_n A(x^n) = \Sigma\, \alpha_n B(x^n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Représentons par $C(x)$ le premier membre, et évaluons, dans le développement de $C(x)$ suivant les puissances croissantes de x, le coefficient γ_n de x^n. Soient, dans ce but, $a, b, c, \ldots$ *tous les diviseurs* de n, et observons que x^n se rencontre seulement dans les sommes $A(x^a)$, $A(x^b)$, $A(x^c)$, ... Son coefficient est donc

$$\gamma_n = \beta_a \alpha_{\frac{n}{a}} + \beta_b \alpha_{\frac{n}{b}} + \beta_c \alpha_{\frac{n}{c}} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Or, les nombres $a, b, c, \ldots$ ne diffèrent pas, abstraction faite de l'ordre, des nombres $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}, \ldots$. Il en résulte que l'on peut, dans l'égalité (2), échanger entre elles les lettres α et β, ce qui prouve bien que, dans le second membre de (1), le coefficient de x^n est aussi γ_n. En conséquence, l'identité (1) se trouve établie. Par exemple, pour $\alpha_n = 1$, $\beta_n = n$, cette identité devient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x}{1-x} + \frac{2x^2}{1-x^2} + \frac{3x^3}{1-x^3} + \dots \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{x^3}{(1-x^3)^2} + \dots \end{aligned}\right\} \dots\dots (3)$$

On voit, en outre, d'après (2), que le coefficient de x^n, dans le développement de chaque membre, représente la *somme des diviseurs* de n. L'identité (3) a été proposé par M. Catalan aux lecteurs de *Mathesis* (t. II, p. 47).

Remarquons, en passant, que, si les fonctions A et B jouissent de la propriété

$$\psi(x)\,\psi(y) = \psi(xy), \dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

l'identité (1) revient à écrire

$$B[A(x)] = A[B(x)].$$

Cette remarque nous sera utile ailleurs. — Il serait aisé d'obtenir un grand nombre d'identités analogues à (3). Nous nous bornerons à signaler la généralisation de la *série de Lambert*, que l'on obtient en imaginant deux fonctions f, F, liées entre elles par l'égalité

$$f(a) + f(b) + f(c) + \dots = F(n). \dots\dots\dots (5)$$

Si la fonction ψ jouit de la propriété (4), on peut prendre

$$\alpha_n = \psi(n), \quad \beta_n = \psi(n)\,f(n), \quad \gamma_n = \psi(n)\,F(n),$$

et l'on a

$$\Sigma\,\psi(n)\,f(n)\,\Psi(x^n) = \Sigma\,\psi(n)\,F(n).x^n, \dots\dots\dots (6)$$

pourvu que l'on pose

$$\Psi(x) = x\psi(1) + x^2\psi(2) + x^3\psi(3) + \dots.$$

Par exemple, pour $f(x)=\varphi(x)$, et, par suite, $F(x)=x$, la relation (6) devient

$$\Sigma\,\psi(n)\,\varphi(n)\,\Psi(x^n)=\Sigma\,n\psi(n).x^n.$$

En particulier, pour $\psi(x)=1$, on trouve la formule

$$\frac{x\varphi(1)}{1-x}+\frac{x^2\varphi(2)}{1-x^2}+\frac{x^3\varphi(3)}{1-x^3}+\ldots=\frac{x}{(1-x)^2},$$

dûe à Liouville. De même, por $\psi(x)=\sin\frac{\pi x}{2}$, on obtient

$$\frac{x\varphi(1)}{1+x^2}-\frac{x^3\varphi(3)}{1+x^6}+\frac{x^5\varphi(5)}{1+x^{10}}-\ldots=\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2},$$

etc., etc. Ces séries sont susceptibles de transformations remarquables. Indiquons seulement celle qui se rapporte au cas de $\psi(x)=1$. Dans cette hypothèse, la formule (6) devient

$$\Sigma\,\frac{x^n f(n)}{1-x^n}=\Sigma\,x^n\,F(n). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

De la même manière on démontrerait les formules

$$\Sigma\,\frac{x^{n^2} f(n)}{1-x^n}=\Sigma\,x^n\,F_1(n), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\Sigma\,\frac{x^{n(n+1)} f(n)}{1-x^n}=\Sigma\,x^n\,F_1(n)-\Sigma\,x^{n^2} f(n), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

la fonction F_1 étant définie par l'égalité (5), dans laquelle on supprime les diviseurs supérieurs à $\sqrt{n}$. En ajoutant membre à membre les égalités (8) et (9), on obtient

$$\Sigma\,\frac{1+x^n}{1-x^n}\,x^{n^2} f(n)=2\,\Sigma\,x^n\,F_1(n)-\Sigma\,x^{n^2} f(n). \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Dans le cas particulier de $f(x)=1$, il est clair que $2F_1(n)-F(n)$ est 1 ou 0, suivant que n est ou n'est pas carré. Il en résulte

$$\Sigma x^{n^2} = 2\,\Sigma x^n F_1(n) - \Sigma x^n F(n).$$

Par substitution dans (10), et comparaison avec (7), on obtient la *formule de Clausen*

$$\Sigma \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{1+x}{1-x}x + \frac{1+x^2}{1-x^2}x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3} + x^9 \ldots$$

Soit encore $f(x)=x$. Faisons aussi $f(x)=\frac{1}{x}$, et désignons par $G_1(x)$ la valeur correspondante de $F_1(x)$. Il est évident que l'excès de $F_1(n)+nG_1(n)$ sur $F(n)$ est $\sqrt{n}$ ou 0, suivant que n est ou n'est pas carré. Il en résulte

$$\Sigma n x^{n^2} = \Sigma[F_1(n)+nG_1(n)]\,x^n - \Sigma x^n F(n). \ldots\ldots (11)$$

Or, l'égalité (8) donne

$$\Sigma \frac{n x^{n^2}}{1-x^n} = \Sigma x^n F_1(n), \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

De la même manière on démontrerait les formules

$$\Sigma \frac{1}{n} \cdot \frac{x^{n^2}}{1+x^n} = \Sigma x^n G_1(n) \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

La formule (13) devient, par dérivation,

$$\Sigma \frac{n x^{n^2}}{1-x^n} + \Sigma \frac{x^{n(n+1)}}{(1-x^n)^2} = \Sigma n x^n G_1(n) \ldots\ldots\ldots (14)$$

Les égalités (12) et (14) ajoutées membre à membre donnent, en tenant compte de (11),

$$\Sigma n \frac{1+x^n}{1-x^n} x^{n^2} + \Sigma \frac{x^{n(n+1)}}{(1-x^n)^2} = \Sigma x^n F(n),$$

ou bien, en vertu de (7),

$$\Sigma\frac{nx^n}{1-x^n}=\frac{1+x}{1-x}x+2\frac{1+x^2}{1-x^2}x^4+3\frac{1+x^3}{1-x^3}x^9+\ldots$$

$$+\frac{x^2}{(1-x)^2}+\frac{x^6}{(1-x^2)^2}+\frac{x^{12}}{(1-x^3)^2}+\frac{x^{20}}{(1-x^4)^2}+\ldots;$$

etc., etc. Dans un autre article, nous montrerons comment l'on peut appliquer ces formules à l'évaluation asymptotique des principales fonctions, que l'on rencontre dans la Théorie des Nombres.

SOBRE A MUDANÇA DA VARIAVEL INDEPENDENTE

POR

RAYMUNDO FERREIRA DOS SANCTOS

Vamos n'esta nota dar a expressão da derivada da ordem n de y relativamente a x em funcção das derivadas d'estas variaveis relativamente a uma nova variavel independente qualquer.

Temos primeiro

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}, \quad y''' = \frac{d\left(\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}\right)}{dx}, \quad \text{etc.}$$

Pondo

$$dy = u, \quad \frac{1}{dx} = v,$$

vem

$$y' = \frac{dy}{dx} = uv, \quad y'' = vd\,(uv), \quad y''' = vd\,[vd\,(uv)], \text{ etc.},$$

por onde se vê que cada derivada se fórma da anterior substituindo u por $d\,(uv)$. Por outra parte, a fórmula de Leibnitz dá

$$d\,(uv) = \sum \frac{1}{h_1\,!\,(1-h_1)\,!}\, d^{h_1} v d^{1-h_1} u,$$

e portanto será

$$y'' = v \sum \frac{1}{h_1\,!\,(1-h_1)\,!}\, d^{h_1} v d^{1-h_1} u.$$

Substituindo n'esta fórmula u por $d(uv)$ e notando que é

$$d^{1-h_1}d(uv) = d^{2-h_1}(uv)$$

vem

$$y''' = v\sum \frac{1}{h_1!\,(1-h_1)!}\,d^{h_1}vd^{2-h_1}(uv),$$

mas temos

$$d^{2-h_1}(uv) = \sum \frac{(2-h_1)!}{h_2!\,(2-h_1-h_2)!}\,d^{h_2}vd^{2-h_1-h_2}u,$$

logo

$$y''' = v\sum \frac{1}{h_1!\,(1-h_1)!} \times \frac{(2-h_1)!}{h_2!\,(2-h_1-h_2)!}\,d^{h_1}vd^{h_2}vd^{2-h_1-h_2}u$$

$$= v\sum \frac{2-h_1}{h_1!\,h_2!\,(2-h_1-h_2)!}\,d^{h_1}vd^{h_2}vd^{2-h_1-h_2}u.$$

Substituindo n'esta ultima fórmula u por $d(uv)$ e notando que é

$$d^{2-h_1-h_2}d(uv) = d^{3-h_1-h_2}(uv),$$

cujo termo geral é

$$\frac{(3-h_1-h_2)!}{h_3!\,(3-h_1-h_2-h_3)!}\,d^{h_3}vd^{3-h_1-h_2-h_3}u,$$

temos

$$y^{(4)} = v\sum \frac{(2-h_1)(3-h_1-h_2)}{h_1!h_2!h_3!(3-h_1-h_2-h_3)!}\,d^{h_1}vd^{h_2}vd^{h_3}vd^{3-h_1-h_2-h_3}u.$$

Do mesmo modo se acha $y^{(5)}$, $y^{(6)}$, etc.

D'esta maneira deduz-se por inducção a lei seguinte:

$$y^{(n)}=v\sum\frac{(2-h_1)(3-h_1-h_2)\ldots(n-1-h_1-h_2-\ldots-h_{n-2})}{h_1!h_2!\ldots h_{n-1}!(n-1-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1})!}\times$$

$$\times d^{h_1}vd^{h_2}v\ldots d^{h_{n-1}}vd^{n-1-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1}}u.$$

Para a demonstrar supponhamos que é verdadeira para a ordem n, e vamos provar que é verdadeira n'este caso tambem para a ordem $n+1$.

Para isso substituamos u por $d\,(uv)$.

Será

$$d^{n-1-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1}}d\,(uv)=d^{n-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1}}(uv)$$

e a fórmula de Leibnitz dará

$$d^{n-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1}}(uv)=$$

$$=\sum\frac{(n-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1})!}{h_n!\,(n-h_1-h_2-\ldots-h_n)!}d^{h_n}vd^{n-h_1-h_2-\ldots-h_n}u,$$

e substituindo em $y^{(n)}$, obteremos

$$y^{(n+1)}=v\sum\frac{(2-h_1)\ldots(n-h_1-h_2-\ldots-h_{n-1})}{h_1!\,h_2!\ldots h_n!\,(n-h_1-h_2-\ldots-h_n)!}\times$$

$$\times d^{h_1}vd^{h_2}v\ldots d^{h_n}vd^{n-h_1-h_2-\ldots-h_n}u.$$

Por outra parte a fórmula conhecida

$$(1)\quad y^{(n)}=\sum\frac{n!\,m(m-1)\ldots(m-i+1)(\varphi'x)^{\alpha}(\varphi''x)^{\beta}\ldots(\varphi^{(n)}x)^{\lambda}}{\alpha!\beta!\ldots\lambda!\,(2)^{\beta}(3!)^{\gamma}\ldots(n!)^{\lambda}}[\varphi(x)]^{m-i},$$

que dá a derivada da ordem n da funcção $y=[\varphi(x)]^m$, dá as differenciaes da ordem $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$ de

$$v=\frac{1}{dx}=(dx)^{-1}:$$

. . . .

$$d^{h_1}v=\sum(-1)^{i_1}\frac{h_1!\,i_1!\,(d^2x)^{\alpha_1}(d^3x)^{\beta_1}\ldots(d^{h_1+1}x)^{\lambda_1}}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!\,(2)^{\beta_1}(3!)^{\gamma_1}\ldots(h_1!)^{\lambda_1}}dx^{-1-i_1},$$

$$d^{h_2}v=\sum(-1)^{i_2}\frac{h_2!\,i_2!\,(d^2x)^{\alpha_2}(d^3x)^{\beta_2}\ldots(d^{h_2+1}x)^{\lambda_2}}{\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!\,(2)^{\beta_2}(3!)^{\gamma_2}\ldots(h_2!)^{\lambda_2}}dx^{-1-i_2},$$

. . . .

onde $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_2, \beta_2, \ldots$ representam todas as soluções inteiras e positivas das equações

$$\alpha_1+\beta_1+\ldots+\lambda_1=i_1,\quad \alpha_2+\beta_2+\ldots+\lambda_2=i_2,\quad \ldots$$
$$\alpha_1+2\beta_1+\ldots+h_1\lambda_1=h_1,\quad \alpha_2+2\beta_2+\ldots+h_2\lambda_2=h_2,\quad \ldots$$

Effectuando o producto d'estas differenciaes, vem

$$d^{h_1}v\,d^{h_2}v\ldots d^{h_{n-1}}v=\sum(-1)^{i_1+i_2+\cdots}\times$$

$$\times\frac{h_1!\,h_2!\ldots h_{n-1}!\,i_1!\,i_2!\ldots(d^2x)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots}(d^3x)^{\beta_1+\beta_2+\cdots}\ldots}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!\,\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!\ldots(2!)^{\beta_1+\beta_2+\cdots}(3!)^{\gamma_1+\gamma_2+\cdots}\ldots}dx^{-n-i_1-\cdots}.$$

Substituindo este valor em (1), teremos

$$y^{(n)}=\sum(-1)^{i_1+i_2+\cdots}\frac{(2-h_1)(3-h_1-h_2)\ldots(n-1-h_1-h_2-\ldots-h_{n-2})}{\alpha_1!\,\beta_1!\ldots\lambda_1!\,\alpha_2!\,\beta_2!\ldots\lambda_2!\ldots}\times$$

$$\times\frac{(d^2x)^{\alpha_1+\alpha_2+\cdots}(d^3x)^{\beta_1+\beta_2+\cdots}\ldots i_1!\,i_2!\ldots d^{n-h_1-\cdots-h_{n-1}}S}{(2!)^{\beta_1+\beta_2+\cdots}(3!)^{\gamma_1+\gamma_2+\cdots}\ldots(n-1-h_1-\ldots-h_{n-1})!}\times$$

$$\times(dx)^{-(n+i_1+\cdots+i_{n-1})},$$

onde $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_2, \beta_2, \ldots$ representam as soluções inteiras e positivas das equações

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\beta_1 + \ldots + h_1 \lambda_1 &= h_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-1} + 2\beta_{n-1} + \ldots + h_{n-1}\lambda_{n-1} &= h_{n-1} \end{aligned}$$

e $i_1, i_2, \ldots$ são dados pelas egualdades

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \lambda_1 &= i_1 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} &= i_{n-1}. \end{aligned}$$

Devemos observar que $h_1, h_2, \ldots$ devem ter todos os valores inteiros e positivos, o primeiro até um, o segundo até dois, etc.

BIBLIOGRAPHIA

O. Verger.— Introduzione all Algebra.— Torino.

Occupa-se o sr. Verger, professor no Instituto technico de Roma, no seu excellente livro da maior parte das doutrinas relativas á Algebra que entre nós fazem parte do curso dos lyceus. Damos noticia d'elle para chamar a attenção sobre o modo como o auctor distribue as materias, que, apezar de ter a seu favor a grande auctoridade de Euler, não tem sido adoptado entre nós pelos que se occupam da Algebra Elementar.

Consta de duas partes o livro do sr. Verger. Na primeira tracta das operações algebricas, considerando primeiro as operações sobre monomios e em seguida as operações sobre polynomios. Esta separação entre as operações sobre monomios e as operações sobre polynomios parece-me preferivel a considerar ao mesmo tempo os monomios e polynomios, por se graduarem assim melhor as difficuldades e por se apreciarem melhor as propriedades caracteristicas das mesmas operações.

Nas operações sobre monomios considera primeiro as operações directas: somma, multiplicação e elevação a potencias; e em seguida as operações inversas: subtracção, divisão, extracção de raizes e logarithmos, considerando a indagação do logarithmo como segunda operação inversa da elevação a potencias. N'esta primeira parte vem exposta de uma maneira notavelmente clara a theoria das quantidades negativas, a dos expoentes negativos, e a dos expoentes fraccionarios.

Depois das operações sobre monomios vêm as operações sobre polynomios, dispostas pela mesma ordem que as operações sobre monomios. D'este modo a lei do binomio de Newton toma o logar que naturalmente lhe pertence, isto é, quando se tracta da elevação a potencias. Para evitar considerações extranhas, esta fórmula é demonstrada directamente sem o auxilio da theoria das combinações.

Na segunda parte tracta o auctor de applicar os principios postos na primeira á resolução das equações do primeiro e segundo grão, e á theoria das progressões, e em seguida vem a theoria dos logarithmos considerados como termos de uma progressão arithmetica. Termina pela resolução dos problemas de juros compostos e annuidades.

A analyse minuciosa do livro do sr. Verger não póde ser aqui feita; diremos só que pela sua leitura se vê que o auctor attendeu cuidadosamente não só á organisação geral do livro, mas tambem á exposição de cada doutrina; n'uma palavra, que é um livro extremamente recommendavel.

M. d'Ocagne. — Coordonnées parallèles et axiales. — Paris (Gauthiers-Villars), 1885.

O objecto da importante memoria de que vamos dar noticia, é o estudo de dois systemas de coordenadas que, como mais simples, o sr. d'Ocagne escolheu entre os numerosos systemas de coordenadas tangenciaes para estudar desenvolvidamente, e que correspondem o primeiro ás coordenadas rectilineas ordinarias e o segundo ás coordenadas polares ordinarias.

No primeiro d'estes systemas, que o auctor chama *coordenadas parallelas*, referem-se os pontos e as linhas a dois pontos fixos (*origens das coordenadas*) pelos quaes se fazem passar duas rectas parallelas (*eixos de coordenadas*). Uma linha recta é determinada pelos segmentos u e v dos eixos comprehendidos entre as origens de coordenadas e as intersecções d'estas parallelas com os eixos. Um ponto é determinado por uma equação do primeiro grão em u e v, etc.

Os §§ I, II, III, IV, V são destinados ao esboço de uma Geometria analytica fundada n'este systema de coordenadas, e ahi considera os principaes problemas relativos ao ponto e á linha recta, e em seguida as curvas em geral, e, em especial, as curvas representadas por uma equação do segundo grão.

Ao outro systema de coordenadas chama o sr d'Ocagne *coordenadas axiaes*, e n'elle os pontos e linhas referem-se a uma recta fixa (*eixo*) e a um ponto d'esta recta (*polo*). Uma recta qualquer é determinada pela sua inclinação sobre o eixo, e pela distancia da sua intersecção com este eixo ao polo. O estudo d'este systema de coordenadas e a sua applicação á determinação de alguns logares geometricos faz objecto dos §§ VI, VII, VIII.

Os §§ IX e X põem fóra de duvida a grande importancia dos systemas estudados pelo auctor. A comparação de uma equação em coordenadas rectilineas ordinarias com a mesma equação em coordenadas parallelas, leva-o a um methodo pelo qual acha um theorema correlativo a cada theorema que resulte de uma equação em coordenadas ordinarias. Applicações numerosas fazem vêr a importancia d'este methodo de transformação geometrica.

A memoria de que estamos dando noticia não é só recommendavel aos geometras, é tambem recommendavel aos engenheiros. Sabe-se que estes empregam muitas vezes os methodos graphicos para effectuar certos calculos; e, em especial, para resolver a equação

$$z^n + pz + q = 0$$

deve-se um methodo graphico ao sr. Lalanne. Fundado no emprego das coordenadas parallelas, o sr. d'Ocagne dá um methodo graphico para resolver esta equação, mais exacto do que o do sr. Lalanne.

E. Cesàro. — *Intorno a taluna funzioni isobarique.*
—— *Dérivées des fonctions de fonctions.*
—— *Notes sur le Calcul isobarique.*

N'esta serie de artigos, publicados o primeiro no *Jornal de Battaglini* (1884) e os outros nos *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1884 e 1885), o sr. Cesàro faz o estudo d'um algorithmo importante, que comprehende como caso particular as funcções *aleph* de Wronski, e que elle designa pelo nome de *algorithmo isobarico*. Este algorithmo consiste na somma de todos os productos, analogos a

$$f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_m),$$

onde $x_1, x_2, \ldots x_m$ representam todas as soluções em numeros inteiros da equação

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = p.$$

Na primeira memoria citada o auctor expõe as propriedades d'este algorithmo, e nas outras faz d'elle applicações a muitas questões de analyse. Citaremos as applicações á determinação das sommas das potencias de quantidades dadas, ao estudo das series recorrentes, á theoria dos numeros de Bernoulli, á determinação das derivadas de funcções de funcções, á Analyse partitiva, etc., para se avaliar a importancia do algorithmo estudado pelo joven geometra italiano.

J. M. Rodrigues.—Desenvolvimento de funcções algebricas (*Revista scientifica do Porto*, tomo I, 1885).

N'este artigo o sr. Rodrigues faz applicação da sua fórmula, publicada a pag. 137 do tomo IV d'este jornal, ao desenvolvimento das funcções algebricas implicitas em serie ordenada segundo as potencias decrescentes da variavel independente. Depois applica os resultados a que chega á determinação das assymptotas de diversas ordens das curvas algebricas.

A. Schiappa Monteiro.—Solution d'un problème de géométrie élémentaire (*Revista scientifica do Porto*, tomo I, 1885).

O problema que o sr. Schiappa resolve é o seguinte:

Traçar por um ponto dado n'um plano d'um circulo uma transversal tal, que as distancias d'este ponto aos pontos de intersecção com o circulo estejam n'uma razão dada.

G. T.

INTRODUCÇÃO A' THEORIA DAS FUNCÇÕES

POR

F. Gomes Teixeira

CAPITULO I

THEORIA DOS IMAGINARIOS E REGRAS PARA O SEU CALCULO

I

Caracteres das operações da Arithmetica e da Algebra

1. — Sabe-se desde a Algebra elementar que o calculo dos imaginarios se faz seguindo as regras do calculo das quantidades reaes. Torna-se porém necessario demonstrar que são verdadeiros todos os resultados reaes a que se chega por este meio. Daremos duas demonstrações d'esta proposição, uma analytica e outra geometrica, porque cada uma d'ellas tem sua importancia propria e dão ambas muita luz sobre os principios geraes do Calculo das operações (*) que vamos aqui recordar rapidamente por d'elles termos de usar n'estas demonstrações.

2. — O fim da Arithmetica é definir as *combinações* que se pódem fazer com numeros, isto é as *operações numericas;* em seguida transformar estas operações umas nas outras ; e emfim procurar as *propriedades* dos numeros relativas a estas operações. Principia-se pelas operações relativas aos numeros inteiros, e em seguida generalisa-se as definições das

(*) Vid. para um estudo mais completo do Calculo das operações o *Cours de Calcul infinitésimal par J. Hoüel,* tomo I.

operações de modo que sejam applicaveis aos numeros fraccionarios e incommensuraveis.

A Arithmetica não introduz quantidades negativas nem *à fortiori* imaginarias.

Em logar de combinar numeros, podemos combinar lettras que representem numeros ou objectos; e então, se definirmos estas operações de modo que os seus principios caracteristicos contenham os principios caracteristicos das combinações numericas, forma-se uma sciencia que tem a Arithmetica como caso particular. Esta sciencia é a Algebra que se occupa pois de definir estas *combinações* que se pódem fazer com lettras, isto é as *operações algebricas*, e de transformal-as umas nas outras.

As *definições* das operações algebricas e os seus *principios caracteristicos* são os seguintes:

1.° — *Somma* das lettras a e b é a combinação d'estas lettras, cujos principios caracteristicos são:

$$1)\quad a+b=b+a,$$

$$2)\quad (a+b)+c=(a+c)+b.$$

$$3)\quad a+o=a.$$

2.° — *Subtracção* das lettras a e b é a operação inversa da somma.

3.° — *Multiplicação* é a combinação das lettras a e b caracterisada pelos principios seguintes:

$$1)\quad a\,b=b\,a,$$

$$2)\quad (a\,b)\,c=(a\,c)\,b,$$

$$3)\quad (a+b)\,c=a\,c+b\,c,$$

$$4)\quad (+a)\,(+b)=+a\,b,\ (+a)\,(-b)=-a\,b,$$
$$(-a)\,(-b)=+a\,b,$$

$$5)\quad a\times 0=0,\ a\times 1=a.$$

4.° — *Divisão* é a operação inversa da multiplicação.

5.° — *Elevação a potencias* é a combinação caracterisada pela propriedade:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

6.° — *Extracção das raizes* é a operação inversa da elevação a potencias.

Examinando um tractado qualquer de Algebra, é facil de vêr que a transformação das operações algebricas umas nas outras é fundada unicamente sobre os principios que vimos de enunciar; e como estes principios subsistem para os numeros, a Algebra contem como caso particular a Arithmetica.

A Algebra sendo pois mais geral do que a Arithmetica, póde chegar a resultados que não tenham significação na segunda d'estas sciencias. E' o que acontece com as quantidades negativas e com os imaginarios. Para lhes achar uma significação, é necessario que se dê ás lettras que entram nas combinações algebricas uma significação differente da de numero; ou, se se quer que as lettras continuem a representar numeros, é necessario definir as operações sobre os numeros d'uma maneira mais geral do que na Arithmetica ordinaria, como vamos vêr.

*

II

Theoria analytica dos imaginarios

***3.**—A theoria analytica dos imaginarios é devida a Cauchy. (*) Vamos aqui expol-a com a fórma nova que lhe dêmos na nossa memoria intitulada—*Sur la théorie des imaginaires.* (**)

Consideremos os polynomios $f(i)$ e $f_1(i)$ inteiros relativamente a i, e definamos as operações que se podem fazer com elles.

I—Chamaremos *addicção congrua* a operação que tem por fim procurar o resto da divisão por i^2+1 da somma dos restos dos polynomios dados. Empregaremos para a indicar o signal $+!$. De modo que $f(i) +! f_1(i)$ representa o resto da divisão por i^2+1 da somma ordinaria dos restos de $f(i)$ e $f_1(i)$. Se os polynomios dados são $a+bi$ e $a'+b'i$ a addicção congrua coincide com a somma ordinaria.

E' evidente que a addicção congrua satisfaz a todos os *principios caracteristicos* da addicção (2, 1.°).

II—Chamaremos *subtracção congrua* a operação inversa da addicção congrua. Empregaremos para a indicar o signal $-!$. Assim $f(i) -! f_1(i)$ representa o polynomio inteiro de menor grão cujo resto junto ao de $f_1(i)$ dá o mesmo resto que $f(i)$ dividido por i^2+1; ou, por outras palavras, o polynomio inteiro de menor grão cujo resto da divisão por i^2+1 é igual á differença ordinaria dos restos de $f(i)$ e $f_1(i)$.

Em virtude d'esta definição, a quantidade negativa $-!\,a$ representa um polynomio inteiro relativamente a i cujo resto junto a a dá zero. Este polynomio é $a\,i^2$.

(*) *Cauchy. Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, (tomo IV—pag. 87 a 110).

(**) Esta memoria foi publicada nos *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (tomo VII—1883), foi transcripta no jornal *Mathesis* (tomo III) e foi traduzida em italiano pelo snr. Gastaldi para a *Rivista di matematica* (tomo V).

III — Chamaremos *multiplicação congrua* a operação que tem por fim procurar o resto da divisão por $i^2 + 1$ do producto dos restos das funcções dadas. Represental-a-hemos pelo signal $\times\,!$, de modo que $f(i) \times\,! f_1(i)$ representará o resto da divisão por $i^2 + 1$ do producto dos restos de $f(i)$ e $f_1(i)$.

Por serem $f(i)$ e $f_1(i)$ polynomios inteiros relativamente a i, os restos da sua divisão por $i^2 + 1$ serão da fórma $a + b\,i$ e $a' + b'\,i$. Mas o producto ordinario

$$(a + b\,i)(a' + b'\,i) = a\,a' + (a\,b' + b\,a')\,i + b\,b'\,i^2$$

sendo dividido por $i^2 + 1$ dá de resto

$$a\,a' - b\,b' + (a\,b' + b\,a')\,i,$$

logo será

$$f(i) \times\,! f_1(i) \equiv a\,a' - b\,b' + (a\,b' + b\,a')\,i,$$

empregando o signal $\equiv$ para designar as igualdades quando as operações são definidas como estamos vendo.

A multiplicação, como vimos de a definir, satisfaz a todos os *principios caracteristicos* da multiplicação algebrica (2, 3.º), como vamos agora vêr.

1) Primeiramente a ordem dos factores é evidentemente arbitraria, como na multiplicação ordinaria.

2) E' tambem evidente que o quinto principio subsiste.

3) *Para obter o producto congruo de uma somma congrua por um polynomio inteiro deve-se multiplicar cada termo da somma pelo polynomio, e sommar os resultados.*

Este principio da multiplicação é uma consequencia dos dous theoremas seguintes:

1.º theorema. — O resto da divisão de uma somma por $i^2 + 1$ é igual á somma dos restos da divisão de cada termo pelo mesmo divisor.

Com effeito, se é

$$\varphi(i) = f(i) + f_1(i) + f_2(i) + \ldots$$

e

$$\varphi(i) = \mathrm{D}(i^2 + 1) + \mathrm{R},\ f(i) = d\,(i^2 + 1) + r,$$
$$f_1(i) = d_1(i^2 + 1) + r_1,\ \text{etc.}$$

teremos

$$D(i^2+1)+R=(i^2+1)(d+d_1+\ldots)+r+r_1+\ldots,$$

e por consequencia o resto R é igual ao que provem de dividir por i^2+1 a somma $r+r_1+r_2+\ldots$

2.º theorema, — O resto da divisão d'um producto por i^2+1 é igual ao do producto dos restos da divisão dos factores pelo mesmo divisor.

Com effeito, se é

$$\varphi(i)=f(i)\cdot f_1(i)\cdot f(i)\ldots,$$

ter-se-ha

$$D(i^2+1)+R=[d(i^2+1)+r][d_1(i^2+1)+r_1]\ldots$$

e portanto o resto R é igual ao que provem de dividir por i^2+1 o producto $r\,.\,r_1\,.\,r_2\ldots$

Posto isto, vamos demonstrar o terceiro principio da multiplicação.

Em virtude das definições e dos theoremas precedentes, o producto congruo

$$[f(i)+!f_1(i)+!\ldots]\times!F(i).$$

representa o resto da divisão por i^2+1 do producto ordinario

$$[f(i)+f_1(i)+\ldots]F(i).$$

Mas, este resto é igual ao que provem do producto ordinario

$$f(i)\,.\,F(i)+f_1(i)\,.\,F(i)+\ldots$$

e póde portanto representar-se por

$$f(i)\times!F(i)+!f_1(i)\times!F(i)+!\ldots$$

Logo teremos

$$[f(i)+!f_1(i)+!\ldots]\times!F(i)\equiv f(i)\times!F(i)$$
$$+!f_1(i)\times!F(i)+!\ldots$$

que é o principio que queriamos demonstrar.

4) Vê-se facilmente, applicando o 2.º dos theoremas precedentes, que o segundo principio da multiplicação algebrica subsiste na multiplicação congrua.

5) O quarto principio da multiplicação algebrica subsiste tambem na multiplicação congrua.

Com effeito, se chamarmos $F(i)$ o polynomio inteiro de menor grão que sommado com $f_1(i)$ dá um multiplo de i^2+1, ou se é

$$\mathrm{F}(i) + !\, f_1(i) \equiv 0,$$

teremos

$$f(i) \times ! [-!\, f_1(i)] \equiv f(i) \times ! \,\mathrm{F}_1(i).$$

Mas é

$$f(i) \times ! \,\mathrm{F}(i) + !\, f(i) \times !\, f_1(i) \equiv 0$$

logo

$$f(i) \times ! [-!\, f(i)] \equiv -! [f(i) \times !\, f_1(i)].$$

Vê-se do mesmo modo que é

$$[-!\, f(i)] \times ! [-!\, f_1(i)] \equiv f(i) \times !\, f_1(i)\,.$$

De tudo o que temos dito a respeito da multiplicação congrua conclue-se que ella satisfaz a todos os principios da multiplicação algebrica.

IV — Chama-se *divisão congrua* a operação inversa da multiplicação, isto é a operação que tem por fim procurar um resto, que multiplicado pelo resto da divisão por i^2+1 d'um polynomio $f_1(i)$ dado, dê um producto cujo resto seja igual ao que provem d'um outro polynomio dado $f(i)$. Este resto será representado por $\dfrac{f(i)}{f_1(i)}\,!$.

O resto da divisão por i^2+1 dos polynomios dados sendo $a+b\,i$ e $a'+b'\,i$, e chamando $A+B\,i$ o resto pedido, deve ser $a+b\,i$ igual ao resto que resulta de dividir

$$. \; A\,a' + (A\,b' + B\,a')\,i + B\,b'\,i^2$$

por i^2+1, isto é deve ser

$$a + b\,i = A\,a' - B\,b' + (A\,b' + B\,a')\,i\,,$$

d'onde se deduz

$$a = A\,a' - B\,b'\,,\; b = A\,b' + B\,a'$$

e, por consequencia

$$A = \frac{a\,a' + b\,b'}{a'^2 + b'^2}\,,\; B = \frac{b\,a' - a\,b'}{a'^2 + b'^2}\,;$$

logo será

$$\frac{f\,(i)}{f_1\,(i)}\,! \equiv \frac{a\,a' + b\,b'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b\,a' - a\,b'}{a'^2 + b'^2}\,i.$$

V — Chamaremos *potencia congrua* o producto congruo de factores iguaes. Representaremos a potencia congrua de $F\,(i)$ do grão n por $[\,F\,(i)\,]^{\,!\,n}$

O principio caracteristico da theoria das potencias ordinarias é applicavel tambem ás potencias congruas, isto é, se m e n são numeros inteiros positivos, teremos

$$[\,F\,(i)\,]^{\,!\,m} \times !\,[\,F\,(i)\,]^{\,!\,n} \equiv [\,F\,(i)\,]^{\,!\,m+n}.$$

Com effeito, o resto da divisão por $i^2 + 1$ d'um producto sendo igual ao resto da divisão por $i^2 + 1$ do producto dos restos dos factores, cada um dos membros da igualdade precedente representa o resto da divisão de $[\,F\,(i)\,]^{\,m+n}$ por $i^2 + 1$.

Deduz-se da igualdade precedente

$$\frac{[\,F\,(i)\,]^{\,!\,m+n}}{[\,F\,(i)\,]^{\,!\,n}} = [\,F\,(i)\,]^{\,!\,m}\,,$$

que faz vêr que o expoente do quociente é igual á differença entre o expoente do dividendo e o do divisor, como na divisão ordinaria.

Seria facil de vêr, procedendo como se faz na Algebra para as potencias ordinarias, que se póde escrever

$$[\,F\,(i)\,]^{-\,!\,m} \equiv \frac{1}{[\,F\,(i)\,]^{\,!\,m}}\,!\,,$$

e demonstrar em seguida que o principio fundamental relativo ás potencias congruas tem tambem logar quando os expoentes são negativos.

VI — *A extracção da raiz congrua do indice n* é a operação inversa da elevação a potencias congruas, isto é a operação que tem por fim procurar um resto cuja potencia n sendo dividida por $i^2 + 1$ dê o mesmo resto que o polynomio dado. Assim $!\sqrt{-1}$ indica o resto cujo quadrado sendo dividido por $i^2 + 1$ dá o resto -1, de modo que se póde escrever

$$!\sqrt{-1} \equiv i,$$

e temos assim a significação do imaginario $\sqrt{-1}$.

Vê-se pois que os imaginarios que nada significam quando se considera as operações ordinarias da Arithmetica, tem um sentido bem determinado quando se define as operações como vimos de fazer.

4. — Dissemos já que a Algebra transforma as operações umas nas outras, tomando para base alguns *principios*. Estes principios são aquelles que exposemos no § 2.º, e que, como vimos de vêr, subsistem ainda quando se substitue as definições ordinarias das operações sobre numeros pelas que vimos de dar. Logo todas as formulas de Algebra são ainda applicaveis aos numeros quando os signaes $+$, $-$, $\times$, etc. representam operações congruas, e deve-se então substituir o signal $=$ pelo signal $\equiv$, cuja significação se deu precedentemente.

D'esta doutrina tiram-se as seguintes conclusões importantes:

1.ª — Os resultados reaes a que se chega usando dos imaginarios são verdadeiros arithmeticamente falando. Com effeito, se chegarmos a um resultado de fórma $A \equiv B$, e em A e B só entrarem quantidades reaes, podemos substituir ahi o signal $\equiv$ pelo signal $=$, pois que as expressões $a \pm ! b$, $a \times ! b$, $\frac{a}{b}!$, $!\sqrt[n]{a}$ (a sendo positivo) representam o mesmo que $a \pm b$, $a \times b$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt[n]{a}$.

2.ª — Se o resultado d'um calculo feito para resolver um problema é imaginario, o problema é absurdo, mas nós vamos vêr que este resultado indica a possibilidade d'uma transformação do problema n'outro, que não é absurdo e ao qual este resultado satisfaz.

Com effeito, este resultado adquire um sentido bem determinado se n'elle se fizer a mudança das operações ordinarias nas operações congruas correspondentes; basta pois fazer uma mudança correspondente no enunciado do problema, e portanto na equação que o traduz.

Se n'esta equação realisarmos as divisões congruas e as extracções de raiz congruas, ella não conterá mais que as sommas, as differenças e os productos congruos.

Então vê-se, attendendo ás definições de sommas, differenças e productos congruos, que cada membro representa o resto da divisão por $i^2 + 1$ do resultado que se obtem substituindo as operações congruas pelas operações ordinarias, e porisso o signal $\equiv$ representa agora a igualdade d'estes restos. D'aqui vem a regra seguinte:

Quando a resolução d'um problema conduz a resultados imaginarios, podemos transformal-o n'outro que seja possivel, fazendo no enunciado da questão uma mudança correspondente á mudança das equações ás quaes conduz esta questão, em igualdade dos restos da divisão dos dois membros d'estas equações por $i^2 + 1$.

Se se pede, por exemplo, um numero cujo quadrado seja igual ao dobro do numero menos *5*, teremos

$$x^2 = 2x - 5 .$$

Tira-se d'aqui

$$x = 1 \pm 2\sqrt{-1}$$

logo o problema proposto é absurdo.

Mas se modificarmos o enunciado do problema pedindo um numero cujo quadrado dividido por $i^2 + 1$ dê o mesmo resto que o dobro do numero diminuido de *5* e dividido pelo mesmo divisor, ter-se-ha

$$x^2 \equiv 2x - 5$$

e a solução será

$$x = 1 \pm 2i .$$

A theoria precedente não serve só para modificar problemas que conduzem a imaginarios; serve tambem para resolver directamente problemas da natureza do seguinte:

Qual é a funcção de i de menor grão cujo cubo dividido por i^2+1 dá o resto $+1$?

Teremos, representando esta funcção por x,

$$x^3-1\equiv 0\,.$$

Logo teremos de resolver a equação

$$x^3-1=0,$$

e depois substituir $\sqrt{-1}$ por i, o que dá

$$x=1\,,\; x=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}\,,\; x=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}\,.$$

III

Theoria geometrica dos imaginarios

5. — A theoria geometrica dos imaginarios é principalmente devida a Argand. (*)

Todo o numero póde ser representado por uma linha, e as operações arithmeticas podem ser substituidas por *construcções* ou *operações geometricas* que se ensinam na Geometria elementar.

Aqui vamos vêr que as operações geometricas podem ter definições mais geraes do que as dadas na Geometria elementar, taes porém que se lhes appliquem os *principios* do Calculo das operações expostos no § I.

Considera-se para isso linhas de *grandeza e direcção* determinadas, e é com estas linhas que se opéra. Uma linha cuja grandeza é ρ, que faz o angulo θ com uma linha de direcção fixa representa-se por ρ_θ. Para distinguir este angulo θ, considera-se na linha a extremidade *inicial* que se lê e escreve primeiro, e a extremidade *final*, e refere-se o angulo á parallela ao eixo tirada pela extremidade inicial. O comprimento ρ chama-se *módulo*, o angulo θ chama-se *argumento*.

Chamaremos, com Bellavitis, *equipollentes* duas linhas iguaes, parallelas e dirigidas no mesmo sentido, e *equipollencia* a expressão da relação d'igualdade entre rectas consideradas em grandeza e direcção, e empregaremos o signal $\triangleq$ para designar que duas linhas são equipollentes.

6. — Passemos agora a definir as operações geometricas.

1.° — Se forem dadas quaesquer linhas e as collocarmos umas adiante das outras, sem alterar a sua grandeza e direcção, fazendo que cada uma comece onde a anterior acaba, a recta que liga as extremidades do polygono assim formado chama-se *somma geometrica* das linhas dadas.

(*) *Argand — Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géometriques.* Paris — 1806.

Assim AD (fig. 2.ª) é a somma geometrica das linhas AB, BC, CD, e póde escrever-se

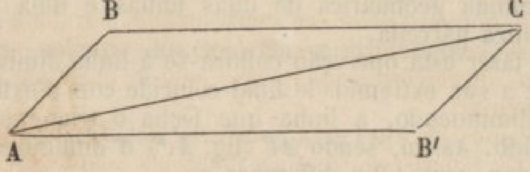
$$AB + BC + CD \bumpeq AD .$$

Quando as linhas tem todas a mesma direcção póde substituir-se o signal $\bumpeq$ pelo signal $=$.

1) A' somma geometrica applica-se o primeiro principio caracteristico da somma (n.º 2 — 1.º), a saber: *a ordem das parcellas é arbitraria.*

Com effeito, temos

Fig. 1.ª



$$AC \bumpeq AB + BC \bumpeq AB' + B'C,$$

e

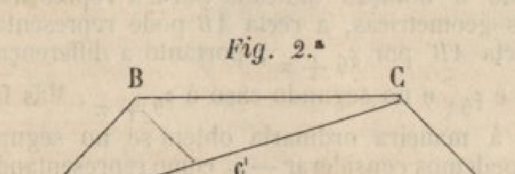
$$AB' \bumpeq BC, \; B'C \bumpeq AB,$$

logo será

$$AB + BC \bumpeq BC + AB .$$

2) Para mostrar que o segundo principio caracteristico da somma (n.º 2 — 1.º) se applica á somma geometrica, consideremos as linhas AB, BC, CD, e teremos

Fig. 2.ª



$$AD \bumpeq AC + CD, \bumpeq (AB + BC) + CD .$$

Por outra parte, tirando por B uma linha BC' parallela e igual a CD, será $BCDC'$ um parallelogrammo, e portanto $BC' \bumpeq CD$, $C'D \bumpeq BC$, e teremos

$$AD \bumpeq AC' + C'D \bumpeq (AB + CD) + BC\,.$$

Logo será

$$(AB + BC) + CD \bumpeq (AB + CD) + BC\,.$$

2.° — Chama-se *subtração geometrica* a operação inversa da somma geometrica, isto é a operação que tem por fim, dada a somma geometrica de duas linhas e uma parcella, achar a outra parcella.

Para fazer esta operação colloca-se a linha diminuidor de modo que a sua extremidade final coincide com a extremidade final do diminuendo, a linha que fecha o triangulo será o resto pedido. Assim, sendo AC (fig. 1.ª) o diminuendo e BC o diminuidor, será AB a differença e

$$AC - BC \bumpeq AB\,.$$

E' evidente que BC póde ser maior que AC.

Se as linhas (fig. 3.ª) AC e BC tem a mesma direcção θ,

Fig. 3.ª

a differença geometrica é AB ou AB', segundo AC é maior ou menor do que BC.

Segundo a notação indicada para a representação das quantidades geometricas, a recta AB póde representar-se por ρ_θ, e a recta AB' por $\rho_{\theta+\pi}$; portanto a differença no primeiro caso é ρ_θ, e no segundo caso é $\rho_{\theta+\pi}$. Mas fazendo a subtracção á maneira ordinaria obtem-se no segundo caso $-\rho_\theta$, logo podemos considerar $-\rho_\theta$ como representando a recta $\rho_{\theta+\pi}$, isto é, podemos considerar uma quantidade geometrica negativa como representando uma recta que faz com o eixo um angulo supplementar d'aquelle que a mesma recta faz quando é positiva.

3.º — Chama-se *producto geometrico* de duas linhas ρ_θ e $\rho'_{\theta'}$ uma linha de grandeza $\rho\rho'$ e de inclinação $\theta + \theta'$, e escreve-se

$$(\rho\rho')_{\theta+\theta'} \doteq \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'}.$$

A operação assim definida satisfaz aos principios caracteristicos da multiplicação (n.º 2 — 3.º), como vamos vêr.

1) Em primeiro logar, a ordem dos factores é arbitraria, pois que

$$\rho_{\theta'} \cdot \rho'_{\theta'} \doteq (\rho\rho')_{\theta+\theta'} \doteq (\rho'\rho)_{\theta'+\theta} \doteq \rho'_{\theta'} \cdot \rho_\theta.$$

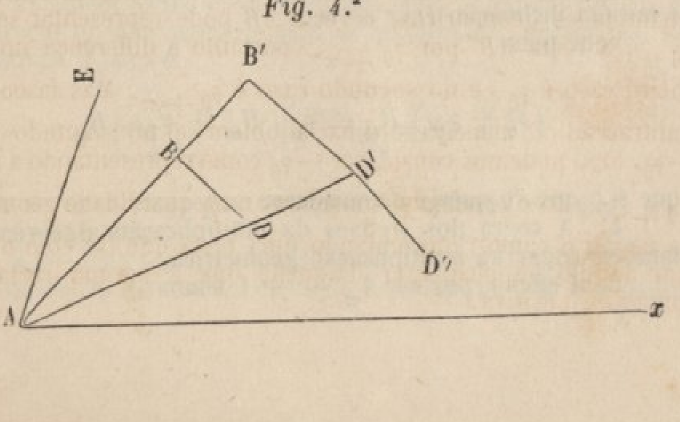
2) O segundo principio da multiplicação tem tambem logar, por ser

$$(\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'})\rho''_{\theta''} \doteq (\rho\rho')_{\theta+\theta'}\rho''_{\theta''} \doteq (\rho\rho'\rho'')_{\theta+\theta'+\theta''}$$
$$\doteq (\rho\rho''\rho')_{\theta+\theta''+\theta'} \doteq (\rho\rho'')_{\theta+\theta''} \cdot \rho'_{\theta'}.$$

3) O terceiro principio da multiplicação tem tambem logar, isto é, para obter o producto geometrico de uma somma por uma quantidade geometrica deve-se multiplicar cada parcella da somma pelo multiplicador e sommar os resultados.

Com effeito, chamando $\rho\theta$ e $\rho'_{\theta'}$ as parcellas, a somma geometrica $\rho_\theta + \rho'_{\theta'}$ é representada pela linha *AD* (fig. 4.ª) que fecha o triangulo cujos lados *AB* e *BD* representam ρ_θ e $\rho'_{\theta'}$.

Fig. 4.ª



Esta linha AD multiplicada por outra R_ω dá uma linha AE cujo modulo é $R \times AD$ e cujo argumento é $\omega + DAx$.

Consideremos agora a somma geometrica

$$\rho_\theta \cdot R_\omega + \rho'_{\theta'} \cdot R_\omega .$$

Esta somma representa uma linha que fecha o triangulo cujos lados têm as grandezas $R.\ \rho$ e $R.\ \rho'$ e as inclinações $\theta + \omega$ e $\theta' + \omega$.

Dando a este triangulo uma rotação $- \omega$ em roda de A deve tomar a posição $AB'D''$, sendo $B'D''$ parallela a BD por terem estas duas linhas a mesma indicação θ' sobre o eixo. Mas por ser AB' o producto de AB por R e $B'D''$ o producto de BD por R, teremos

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'D''}{BD} = R;$$

logo os triangulos ADD e $AB'D''$ devem ser semilhantes, e portanto o ponto D'' deve estar em D' sobre a recta AD.

Vem pois

$$\frac{AD'}{AD} = R,\ AD' = R \times AD;$$

o comprimento AD' será pois igual a AE.

Trazendo outra vez o triangulo á primeira posição, AD' descreverá o angulo ω e porisso irá cair sobre AE, com o qual coincidirá por ter a mesma grandeza $R \times AD$ e adquirir a mesma inclinação $DAx + \omega$.

Vem pois

$$(\rho_\theta + \rho'_{\theta'})\, R_\omega \triangleq \rho_\theta \cdot R_\omega + \rho'_{\theta'} \cdot R_\omega$$

que é o que se queria demonstrar.

4) A regra dos signaes da multiplicação algebrica tem tambem logar na multiplicação geometrica.

Com effeito, por ser $1_\pi = -1$ temos

$$(+\rho_\theta)(-\rho'_{\theta'}) \bumpeq \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'+\pi} \bumpeq \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} \cdot 1_\pi \bumpeq -\rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'},$$

$$(-\rho_\theta) \cdot (-\rho'_{\theta'}) \bumpeq \rho_{\theta+\pi} \cdot \rho'_{\theta'+\pi}$$
$$\bumpeq \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} \cdot 1_\pi \cdot 1_\pi \bumpeq \rho_\theta \cdot \rho'_{\theta'} \cdot$$

5) E' evidente que o quinto principio da multiplicação subsiste na multiplicação geometrica.

De tudo que vimos de dizer conclue-se que a multiplicação geometrica satisfaz a todos os principios da multiplicação algebrica.

4.° — Chama-se *divisão de quantidades geometricas* a operação inversa da multiplicação, isto é a operação que tem por fim achar uma linha que multiplicada pelo divisor reproduza o dividendo.

D'este modo é

$$\frac{\rho_\theta}{\rho'_{\theta'}} \bumpeq \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)_{\theta-\theta'}$$

5.° — Chama-se *potencia de uma quantidade geometrica* o producto de quantidades geometricas iguaes.

E' facil de vêr, attendendo á definição de multiplicação de quantidades geometricas, que o principio fundamental da theoria das potencias (n.° 2 — 5.°) tem logar quando as quantidades são geometricas, isto é, que temos

$$(\rho_\theta)^m \cdot (\rho_\theta)^n \bumpeq (\rho_\theta)^{m+n},$$

sendo m e n inteiros positivos.

As potencias pares das quantidades geometricas podem, ao contrario do que acontece com as quantidades numericas, ser negativas. Assim é

$$\left(\rho_{\frac{1}{2}\pi}\right)^{2n} \bumpeq \left(\rho^{2n}\right)_{n\pi} \bumpeq \pm \rho^{2n},$$

onde se deve empregar o signal $+$ quando n é par, e $-$ quando n é impar.

6.° — *Extracção da raiz de uma quantidade geometrica* é a operação inversa da elevação a potencias, isto é a operação que tem por fim achar uma quantidade geometrica, que elevada a uma potencia igual ao indice da raiz, reproduza a quantidade geometrica dada.

Assim $\sqrt{-1}$ indica uma quantidade geometrica que elevada ao quadrado dá -1. Esta quantidade é $1_{\frac{\pi}{2}}$, pois que

$$\left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = 1_{\pi} = -1 ,$$

de modo que se póde escrever

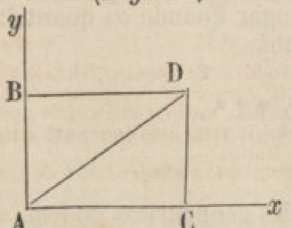
$$1_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1} .$$

Vê-se pois que $\sqrt{-1}$, que nada significava na Arithmetica, representa aqui uma recta perpendicular ao eixo e igual á unidade.

Vejamos o que representa $x + y\sqrt{-1}$. Temos (fig. 5.ª)

$$x + y\sqrt{-1} \bumpeq x + y\, 1_{\frac{\pi}{2}} \bumpeq AC + AB \bumpeq AD,$$

(*Fig. 5.ª*)



e portanto $x + y\sqrt{-1}$ representa uma linha AD cujas projecções sobre dous eixos coordenados rectangulares são x e y.

Esta representação geometrica do imaginario $z = x + y\sqrt{-1}$ é muito importante, como veremos mais tarde.

7. — Da analyse das operações geometricas que acabamos de fazer, conclue-se que os *principios* em que se funda a transformação das operações algebricas umas nas outras, applicam-se ás linhas consideradas em grandeza e direcção, quando se definem as operações de modo que vimos de vêr.

Do que precede podemos tambem concluir que o calculo feito com imaginarios tem um sentido concreto bem definido, considerando as lettras e os signaes da Algebra como representando linhas e operações com a significação de que vimos de fallar.

Se este calculo levar a um resultado real as linhas correspondentes tem todas a mesma direcção, as operações tem a significação ordinaria e póde substituir-se o signal $\triangleq$ pelo signal $=$. Estas linhas podem então representar numeros, e conclue-se porisso que *são verdadeiros na Arithmetica os resultados reaes a que se chega quando se faz uso dos imaginarios durante o calculo*, que é a proposição que atraz demonstrámos analyticamente.

8. — De tudo o que precede podemos ainda tirar o seguinte theorema:

Quando a resolução de uma questão de geometria leva a soluções imaginarias, a questão é absurda, podemos porém transformal-a n'outra possivel fazendo no seu enunciado uma mudança correspondente á mudança de equações em equipollencias, isto é das operações ordinarias nas geometricas correspondentes. O resultado primeiramente achado satisfará á nova questão, depois de se lhe fazer a mesma mudança.

Abordamos assim um methodo para resolver questões de Geometria plana, descoberto e desenvolvido pelo illustre geometra italiano Bellavitis, que consiste em traduzir as questões geometricas em *equipollencias* em logar de as traduzir em equações, e tratar depois as equipollencias como se fossem equações. (*)

Em principios em parte análogas se funda o methodo chamado dos quaterniões, que se emprega nas questões de Geometria no espaço. (**)

(*) *G. Bellavitis — Spozione del methodo delle equipollenze* — Modena — 1854. Póde vêr-se nos tomos I e II do *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* dous artigos de Bellavitis, em que elle resolve pelo seu methodo algumas questões propostas n'este jornal, bem como um artigo sobre o mesmo assumpto pelo snr. Schiappa Monteiro.

(**) Veja-se *A. d'Arzilla Fonseca — Principios elementares do calculo dos quaterniões — Coimbra — 1884.*

IV

Operações sobre imaginarios

9. — As regras do calculo dos imaginarios foram justificadas nos §§ anteriores.

Observando que todo o imaginario $x + iy$ (pondo $\sqrt{-1} = i$) póde ser reduzido á fórma

$$\rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

(ρ tem o nome de *modulo* e θ o de *argumento* do imaginario) pondo, o que é sempre possivel,

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\operatorname{sen}\theta\,,$$

o que dá

$$\rho = +\sqrt{x^2+y^2}\,,\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\rho}\,,\ \cos\theta = \frac{x}{\rho}\,;$$

aquellas regras dão os resultados seguintes:

1.° — A somma e differença dos imaginarios

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\,,\ z' = \rho'\,(\cos\theta' + i\operatorname{sen}\theta')$$

é

$$z \pm z' = \rho\cos\theta \pm \rho'\cos\theta' + i\,(\rho\operatorname{sen}\theta \pm \rho'\operatorname{sen}\theta')\,,$$

ou

$$\pm z' \cos z = R \quad \omega + i\operatorname{sen}\omega)\,,$$

pondo

$$\rho \cos \theta \pm \rho' \cos \theta' = R \cos \omega, \ \rho \operatorname{sen} \theta \pm \rho' \operatorname{sen} \theta' = R \operatorname{sen} \omega,$$

o que dá

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 \pm 2 \rho\rho' \cos(\theta - \theta')}.$$

Esta expressão de R mostra que é $R^2 < (\rho + \rho')^2$, e portanto temos o theorema seguinte:

O *modulo de uma somma algebrica de imaginarios é sempre menor do que a somma dos modulos das parcellas.*

2.° — O producto dos mesmos imaginarios é

$$\begin{aligned} zz' &= \rho\rho' [\cos\theta \cos\theta' - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta'] + i [\cos\theta \operatorname{sen}\theta' + \operatorname{sen}\theta \cos\theta'] \\ &= \rho\rho' [\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta')]. \end{aligned}$$

Multiplicando este resultado por

$$z'' = \rho'' (\cos \theta'' + i \operatorname{sen} \theta'')$$

vem

$$zz'z'' = \rho\rho'\rho'' [\cos(\theta + \theta' + \theta'') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta' + \theta'')].$$

Em geral temos

$$\begin{aligned} zz' \ldots z^{(n-1)} = \rho\rho' \ldots \rho^{(n-1)} [&\cos(\theta + \theta' + \ldots + \theta^{(n-1)}) \\ &+ i \operatorname{sen}(\theta + \theta' + \ldots + \theta^{(n-1)})], \end{aligned}$$

e portanto o *modulo do producto de imaginarios é igual ao producto dos modulos dos factores, e o seu argumento é igual á somma dos argumentos dos factores.*

Se fôr $z = z' = \ldots = z^{(n-1)}$, vem o resultado importante

$$z^n = \rho^n [\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta]$$

conhecido pelo nome de *formula de Moivre.*

3.° — Dividindo por z o imaginario

$$u = r (\cos \omega + i \operatorname{sen} \omega)$$

vem

$$\frac{u}{z}=\frac{r}{\rho}\,\frac{(\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega)(\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta)}{(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)(\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$
$$=\frac{r}{\rho}[\cos(\omega-\theta)+i\,\mathrm{sen}(\omega-\theta)].$$

Dividindo este resultado por z', vem

$$\frac{u}{z\,z'}=\frac{r}{\rho\rho'}[\cos(\omega-\theta-\theta')+i\,\mathrm{sen}(\omega-\theta-\theta')]\,.$$

Em geral, temos

$$\frac{u}{zz'\ldots z^{(n-1)}}=\frac{r}{\rho\rho'\ldots\rho^{(n-1)}}[\cos(\omega-\theta-\theta'-\ldots-\theta^{(n-1)})$$
$$+i\,\mathrm{sen}(\omega-\theta-\ldots-\theta^{(n-1)})]\,.$$

Fazendo $r=1$, $\omega=0$, $z=z'=\ldots=z^{(n-1)}$, resulta

$$z^{-n}=\rho^{-n}[\cos(-n\theta)+i\,\mathrm{sen}(-n\theta)]\,.$$

Vê-se pois que a *formula de Moivre* ainda tem logar quando o expoente é inteiro negativo.

4.° — Passemos á extracção das raizes.

Vejamos se póde ser

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)}=r(\cos\omega+i\,\mathrm{sen}\,\omega)\,.$$

Para ter logar esta igualdade deverá ser

$$\rho(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)=r^n(\cos n\omega+i\,\mathrm{sen}\,n\omega),$$

ou

$$\rho\cos\theta=r^n\cos n\omega,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta=r^n\,\mathrm{sen}\,n\omega$$

d'onde se deduz

$$r=\sqrt[n]{\rho},\ n\omega=\theta+2k\pi\,,$$

representando por k um inteiro que póde ter todos os valores positivos e negativos desde zero até ao infinito.

Vem pois

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right]\left[\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right].$$

O binomio

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{rk\pi}{n}$$

só tem n valores differentes correspondentes a $k = 0, 1, 2, \ldots n - 1$, pois é facil de vêr que, quando a k se dá valores differentes d'estes, o seno e coseno que entram no binomio, retomam os valores correspondentes aos valores precedentes de k. O radical tem pois n valores differentes, e o theorema de Moivre tem ainda logar para o valor correspondente a $k = 0$.

Os valores do radical que vimos de obter, representam as n raizes da equação binomia $z^n - \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = 0$.

V

Series

10. — Depois de considerar expressões analyticas compostas de um numero finito de operações é natural passar a considerar expressões analyticas compostas de um numero infinito de operações, isto é, as *series, os productos infinitos e as fracções continuas.* Vamos pois estudar estas expressões, limitando-nos porém aos casos mais simples e mais uzados.

Todas estas expressões para poderem ser sujeitas ao calculo, devem se r*convergentes,* isto é, devem tender para um limite determinado á medida que augmenta o numero de sommas, multiplicações ou divisões. As expressões que não estão n'este caso chamam-se *divergentes.*

11. — As series são expressões da fórma

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

em que o numero das parcellas é infinito. O termo u_n é o *termo geral* do qual se formam todos os outros dando a n os valores *1, 2, 3,* etc. Empregando o signal Σ para designar sommas, esta expressão póde ser escripta do modo seguinte:

$$\sum_1^\infty u_n .$$

Como já dissemos, a serie é convergente todas as vezes que a somma s_n' das n primeiras parcellas, isto é, a somma

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots u_n$$

tende para um limite determinado á medida que n augmenta. Este limite chama-se *somma da serie.*

Por exemplo, a progressão

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + x^{n+1} + \ldots$$

é convergente quando o valor absoluto de x é menor do que a unidade, pois que a somma dos seus n primeiros termos, isto é,

$$s_n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

tende para o limite $\frac{1}{1-x}$ quando n augmenta indefinidamente.

Se o valor absoluto de x é maior do que a unidade, a somma s_n augmenta indefinidamente e a serie é divergente.

Se é $x = 1$, a serie é divergente.

Se é $x = -1$, vem

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots,$$

e a serie toma alternadamente os valores *zero* e *um*, e portanto é divergente.

A convergencia das series compostas de termos imaginarios depende da convergencia das series compostas de termos reaes, como veremos.

Os dois theoremas seguintes dão uma condição necessaria e sufficiente para a convergéncia d'estas ultimas series:

1.° — *Se a serie é convergente póde sempre dar-se a* **n** *um valor tão grande que, combinado com qualquer valor de* **p**, *satisfaça á desigualdade:*

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} < \delta,$$

por mais pequena que seja δ.

Com effeito, é evidente que o valor absoluto da differença $s_{n+p} - s_n$ nunca póde exceder a somma dos valores absolutos de $s_{n+p} - s$ e $s_n - s$. Mas, representando por s a somma da serie proposta, s_{n+p} e s_n convergem para s quando n e p augmentam, e portanto n'estas circumstancias $s_{n+p} - s_n$ e $s_n - s$ diminuem indefinidamente; ha porisso sempre um valor de n que, combinado com qualquer valor de p, torna esta somma, e *á fortiori* o valor absoluto de $s_{n+p} - s_n$ menor do que qualquer grandeza assignavel δ.

2.° — *Reciprocamente, se houver sempre um valor de*

n *que, combinado com qualquer valor de* **p**, *satisfaça á desigualdade:*

$$s_{n+p} - s_n < \delta,$$

por mais pequena que seja δ, *a serie proposta será convergente.*

Com effeito, se o não fosse, a serie ou augmentaria indefinidamente, ou occillaria entre dous valores. Em qualquer dos casos seria sempre possivel dar a p um valor que, combinado com qualquer valor de n, tornasse o valor absoluto de $s_{n+p} - s_n$ maior do que uma quantidade qualquer, ou maior do que uma quantidade arbitraria inferior a metade do intervallo dos limites entre os quaes a serie occilla, o que é contra a hypothese.

Do que procede tira-se o corollario seguinte:

E' condição necessaria, mas não sufficiente, para que a serie seja convergente, que os seus termos decresçam em valor absoluto á medida que **n** *augmenta.*

Nota. — E' facil de vêr que os theoremas precedentes subsistem quando os termos u_1, u_2, etc. da serie são funcções de n que tendem para limites determinados á medida que n augmenta.

12. — Não ha criterio geral para decidir se uma serie real é convergente; ha apenas regras abrangendo maior ou menor numero de casos. Aqui exporemos apenas as seguintes de que teremos de fazer uso:

1.ª — *Toda a serie de termos positivos na qual a somma* s_n *é, qualquer que seja* **n**, *menor do que uma grandeza determinada* L, *é convergente.*

Com effeito, a somma das parcellas $u_1, u_2, \ldots u_n$ cresce com n, mas como por hypothese não póde crescer indefinidamente, converge para um limite determinado.

Por exemplo, a serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^n} + \cdots$$

é convergente, pois que cada termo é menor do que o termo correspondente da progressão geometrica convergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

e portanto a sua somma é menor do que a somma da progressão.

2.ª — *Toda a serie composta de termos positivos e negativos de que deriva uma serie convergente pela mudança dos signaes dos termos negativos, é convergente.*

Com effeito, a nova serie composta só de termos positivos é convergente, por hypothese, e portanto, chamando U_1, U_2, U_3, etc. os seus termos e S_n a somma dos n primeiros, teremos (11 — 1.º) a desigualdade:

$$S_{n+p} - S_n = U_{n+1} + U_{n+2} + \ldots + U_{n+p} < \delta,$$

e *à fortiori*

$$s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} < \delta;$$

logo (11 — 2.º) a serie proposta será convergente.

Por exemplo, a serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \ldots$$

é convergente.

3.ª — *Se a partir de um valor determinado* p *de* n *a razão* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ *de dois termos consecutivos é sempre menor do que uma quantidade* L *inferior á unidade, a serie é convergente; se esta razão é maior do que a unidade, a serie é divergente.*

Basta considerar o caso de serem os termos da serie todos positivos (theor. 2.º). Temos, por hypothese,

$$u_{p+1} < Lu_p, \; u_{p+2} < Lu_{p+1} < L^2u_p \text{ etc.};$$

logo será

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p + u_{p+1} + \ldots < u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p(1 + L + L^2 + \ldots).$$

Mas, por ser $L < 1$, é convergente a progressão que entra no segundo membro d'esta desigualdade, logo este segundo membro terá um valor determinado, e será porisso convergente (theor. 1.º) o primeiro membro.

Se, pelo contrario, é

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$$

a serie, a partir de $n = p$, torna-se crescente e portanto divergente.

Por exemplo, a serie

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \ldots + \frac{x^n}{2.3\ldots n} + \ldots$$

é convergente, pois que a razão de dois termos consecutivos

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$$

decresce indefinidamente com n, e portanto ha um valor de n, a partir do qual esta razão se torna menor do que uma quantidade qualquer L comprehendida entre zero e a unidade.

4.ª—*Se a partir de um valor determinado* **p** *de* **n** *a raiz* $\sqrt[n]{u_n}$ *é menor do que uma quantidade* **L** *inferior á unidade, a serie é convergente; se esta raiz é maior do que a unidade a serie é divergente.*

Demonstra-se este theorema do mesmo modo que o anterior, pois que temos

$$u_p < L^p,\ u_{p+1} < L^{p+1}, \text{ etc.},$$

o que dá

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + u_p + u_{p+1} + \ldots < u_1 + u_2 + \ldots + u_{p-1} + L^p (1 + L + L^2 + \ldots).$$

Se é pelo contrario $\sqrt[n]{u_n} > 1$, é tambem $u_n > 1$, e a somma s_n augmenta indefinidamente.

5.ª—*Se uma serie decrescente tem os termos alternadamente positivos e negativos, esta serie é convergente.*

Com effeito, por ser cada termo da serie proposta:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$$

maior do que o seguinte, a differença:

$$s_{n+p} - s_n = \pm [u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \dots \pm u_{n+p}]$$

tem o signal de u_{n+1}. Mas esta differença póde ser escripta do modo seguinte:

$$\pm [u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \dots],$$

e vê-se então que ella é menor do que u_{n+1}, pois que deve ter o signal de u_{n+1}.

Sendo pois, em valor absoluto,

$$s_{n+p} - s_n < u_{n+1},$$

e decrescendo u_{n+1} indefinidamente com n, a serie proposta é (n.º 11 — 2.º) convergente.

Por exemplo, as series

$$1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} - \frac{x^6}{2.3.4.5.6} + \dots$$

$$x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \dots$$

são convergentes, pois que têem os termos alternadamente positivos e negativos, e o denominador augmenta, qualquer que seja x, mais rapidamente do que o numerador, de modo que existe um termo a partir do qual a serie é decrescente.

13. — Passemos ás series compostas de termos imaginarios.

Theorema 1.º — A condição necessaria e sufficiente para que uma serie de termos imaginarios seja convergente, é que o sejam a serie formada pelos termos reaes, e a serie formada pelos coefficientes de $\sqrt{-1}$.

Com effeito a somma

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \dots + (x_n + iy_n) + \dots$$

ou

$$(1) \dots\dots\dots\dots\dots \sum_{n=1}^{n=\infty} (x_n + iy_n)$$

é igual a

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{n=\infty} y_n,$$

e esta expressão só póde ser convergente quando o forem as sommas Σx_n e Σy_n.

Theorema 2.º — Para que uma serie seja convergente basta que a serie formada pelos módulos dos seus termos o seja.

Com effeito, por ser $\rho = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ o módulo de $x_n + iy_n$, o theorema 1.º do n.º 9 dá

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{(\Sigma x_n)^2 + (\Sigma y_n)^2}.$$

O primeiro membro d'esta desigualdade é convergente, por hypothese, logo, se as quantidades x_n e y_n são todas positivas, o segundo membro, que augmenta com n e que não póde exceder o limite do primeiro membro, será tambem convergente. Logo serão convergentes as series Σx_n e Σy_n, e portanto a serie (1).

Se algumas das quantidades x_n, y_n forem negativas a desigualdade precedente terá logar para os valores absolutos α_n e β_n de x_n e y_n, isto é

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{(\Sigma \alpha_n)^2 + (\Sigma \beta_n)^2}.$$

Logo as series $\Sigma \alpha_n$ e $\Sigma \beta_n$ serão convergentes, e porisso tambem o serão (12 — 2.º) as series que resultam de mudar os signaes a alguns termos das series precedentes, isto é, serão convergentes as series Σx_n e Σy_n, e por consequencia a serie (1).

O theorema reciproco do precedente não é sempre verdadeiro, isto é, póde ser convergente a serie (1) e não o ser a serie correspondente dos módulos. Ha porém um caso muito importante em que esta proposição reciproca é verdadeira, que é quando a serie (1) tem todos os seus termos positivos. Com effeito, n'este caso temos

$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2} < x_n + y_n,$$

e portanto

$$\Sigma\sqrt{x^2_n + y^2_n} < \Sigma x_n + \Sigma y_n .$$

Mas por ser a serie (1) convergente tambem o são as series Σx_n e Σy_n, e portanto a desigualdade precedente mostra que é convergente a serie formada pelos módulos (n.º 12—1.º).

Se algumas das quantidades x_n e y_n são negativas ainda terá logar o theorema reciproco, se mudando a estas o signal a nova serie assim formada fôr convergente; pois que então recaímos no caso anterior, e porisso é convergente a somma dos módulos $\Sigma\sqrt{x^2_n + y^2_n}$.

14. — As series formadas de termos cujos módulos formam uma serie convergente chamam-se *series absolutamente convergentes*. A respeito d'estas series vamos demonstrar o seguinte theorema importante:

Theorema 3.º — A somma de uma serie absolutamente convergente não se altera quando se muda a ordem dos seus termos.

Seja s_n a somma dos n primeiros termos da serie dada e s'_p a somma dos p primeiros termos da nova serie, que resulta de mudar a ordem dos termos da primeira. Suppondo que se dá a p um valor sufficientemente grande para que s'_p contenha todos os termos de s_n, e chamando u_α, u_β, etc., os termos que aquella somma contém a mais, vem

$$s'_p - s_n = u_\alpha + u_\beta + \ldots + u_p ;$$

ou, chamando ρ_1, ρ_2, etc. os módulos de u_1, u_2, etc. e attendendo ao theorema 1.º do n.º 9,

$$\begin{aligned}\text{mod}\,(s'_p - s_n) \overline{\overline{<}} \rho_\alpha + \rho_\beta + \ldots + \rho_p \overline{\overline{<}} \rho_{n+1} \\ + \rho_{n+2} + \ldots + \rho_p .\end{aligned}$$

Vê-se pois que á medida que n augmenta, o módulo da differença $s'_p - s_n$ tende para o limite zero, e portanto que s'_p tende para o mesmo limite que s_n.

Corollario. — N'uma serie formada de termos reaes pode-se alterar a ordem das parcellas sem mudar o valor da serie, se, dando a todos os termos da serie o signal $+$, *resultar uma serie convergente.*

15. — Passando agora ás operações sobre series, demonstraremos a este respeito os dous theoremas seguintes:

Theorema 4.° — Se as series

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

forem convergentes e as suas sommas forem s e s', tambem a serie cujo termo geral é $u_n + v_n$ será convergente, e a sua somma será igual a $s + s'$.

Com effeito, a somma dos n primeiros termos da nova serie será $\Sigma u_n + \Sigma v_n$, e esta somma tende para o limite $s + s'$.

Theorema 5.° — Se as series

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

forem absolutamente convergentes e as suas sommas forem s e s', tambem a serie

$$T_1 + T_2 + \dots + T_n + \dots,$$

cujo termo geral T_n é a somma de todos os valores de $u_\alpha\, v_\beta$ correspondentes ás soluções inteiras positivas da equação $\alpha + \beta = n + 1$, será convergente, e a sua somma será igual a ss'.

Com effeito, a somma S_p dos p primeiros termos da nova serie contém todos os valores de $u_\alpha\, v_\beta$ correspondentes ás soluções inteiras positivas das equações:

$$\alpha + \beta = 2,\ 3,\ 4,\ \dots\ p + 1.$$

Por outra parte o producto $s_n\, s'_n$ dos n primeiros termos das series dadas contém como parcellas todos os valores de $u_\alpha\, v_\beta$ correspondentes aos valores inteiros positivos de α e β desde 1 até n, isto é, a todas as soluções inteiras positivas das equações

$$\alpha + \beta = 2,\ 3,\ \dots\ 2\,n,$$

que não excederem n em grandeza.

Logo, dando a p um valor maior do que $2n - 1$, vem

$$S_p - s_n s'_n = u_i v_j + u_k v_l + \ldots + u_r v_t,$$

onde cada parcella tem um dos indices superior a n e inferior a $p + 2$, e o outro inferior a $p + 2$.

Portanto, chamando ρ_1, ρ_2, etc. os módulos de u_1, u_2, etc., ρ'_1, ρ'_2, etc. os módulos de v_1, v_2, etc., M a somma dos primeiros e N a somma dos segundos, temos (n.º 9—1.º)

$$\text{mod}\,(S_p - s_n s'_n) \overline{\overline{<}} \rho_i \rho'_j + \rho_k \rho'_l + \ldots + \rho_r \rho'_t$$

$$\overline{\overline{<}} (\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_{p+1})(\rho'_{n+1} + \rho'_{n+2} + \ldots + \rho'_{p+1})$$

$$+ (\rho'_1 + \rho'_2 + \ldots + \rho'_{p+1})(\rho_{n+1} + \rho_{n+2} + \ldots + \rho_{p+1})$$

$$< M(\rho'_{n+1} + \rho'_{n+2} + \ldots + \rho'_{p+1}) + N(\rho_{n+1} + \rho_{n+2} + \ldots \rho_{p+1}).$$

Como as series $\rho_1 + \rho_2 + \ldots$, $\rho'_1 + \rho'_2 + \ldots$, são, por hypothese, convergentes, o segundo membro da desigualdade precedente tende para o limite zero á medida que n augmenta, logo S_p tende para o mesmo limite que $s_n s'_n$, isto é, para o limite ss'.

***16**.—Consideremos agora especialmente as series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de z, isto é, as series da fórma:

$$(2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n z^n,\ z = x + iy,$$

e demonstremos o seguinte theorema, devido a Abel:

Theorema 6.º—Se ha um numero positivo α que, substituido em (2) no logar do módulo de **z**, *torna os módulos de todos os termos inferiores a uma quantidade finita* **B**, *a serie (2) será convergente todas as vezes que se derem a* **z** *valores cujos módulos sejam inferiores a α.*

Seja z_1 um valor de z cujo módulo ρ_1 é menor que α, e seja r_n o módulo de c_n. Por ser, por hypothese,

$$r_n \alpha^n < B,$$

teremos

$$r_n \rho_1^n < B \left(\frac{\rho_1}{\alpha}\right)^n,$$

e portanto

$$\sum_1^\infty r_n \cdot \rho_1^n < B\,\Sigma\left(\frac{\rho_1}{\alpha}\right)^n = B\,\frac{\rho_1}{\alpha - \rho_1}.$$

Mas o segundo membro é finito, logo o primeiro tende para um limite determinado; portanto é convergente a serie formada com os módulos de (2), e por consequencia a serie (2).

Nota. — D'este theorema vamos tirar uma conclusão importante, mas para isso observemos primeiro que todo o imaginario $x + iy$ ou ρ (cos $\theta + i$ sen θ) póde ser representado por um ponto cujas coordenadas cartesianas são x e y, e cujas coordenadas polares são ρ e θ, e vice-versa. D'este modo podemos em logar de fallar no imaginario $x + iy$ fallar no ponto (x, y) ou (ρ, θ). Esta observação é muito importante e d'ella faremos um grande uso. Devemos notar que esta representação geometrica do imaginario é independente da theoria geometrica atraz exposta.

Se fizermos variar z, a partir de zero, a serie (2) ficará convergente em quanto $r_n\ \rho^n$ fôr finito, por ser então este módulo inferior á quantidade B; e deixará de o ser logo que este módulo se torne infinito, por ter então a serie proposta termos com valor infinito. Como todos os valores de z a que corresponde o mesmo módulo se podem representar pelos pontos de uma circumferencia cujo centro é a origem das coordenadas e cujo raio é esse módulo, vê-se que para todos os valores de z representados pelos pontos da área de um circulo cujo raio é o maior valor de ρ que torna $r_n\ \rho^n$ finito, a serie é convergente, e é divergente para todos os valores de z que correspondem a pontos collocados fóra d'este circulo. A este circulo deu porisso Cauchy o nome de *circulo de convergencia* da serie (2). O theorema precedente nada diz relativamente á convergencia ou divergencia da serie (2), quando z representa pontos collocados sobre a circumferencia do circulo de convergencia.

O estudo das series ordenadas segundo as potencias inteiras e positivas de $z - a$, isto é, das series da fórma

$$\Sigma c_n (z - a)^n$$

reduz-se ao precedente fazendo $z - a = t$, pois vem a serie

$$\Sigma c_n t^n,$$

que acabamos de estudar.

***17.** — Voltemos á serie

$$(1) \ldots\ldots \quad \Sigma u_n = \Sigma (x_n + iy_n) = \Sigma x_n + i\Sigma y_n,$$

e supponhamos que u_n é funcção de $x + iy = z$, e portanto que x_n e y_n são funcções de x e y.

Representando por $s_n + is'_n$ a somma dos n primeiros termos d'esta serie, isto é, pondo

$$s_n = \sum_1^\infty x_n, \quad s'_n = \sum_1^\infty y_n,$$

vimos nos n.^{os} 11 e 13 que é necessario e sufficiente para que a serie (1) seja convergente que, sendo δ e δ' quantidades arbitrarias tão pequenas quanto se queira, exista sempre um valor de n que combinado com qualquer valor de p, satisfaça ás desigualdades:

$$s_{n+p} - s_n < \delta, \quad s'_{n+p} - s'_n < \delta'.$$

Suppondo que as condições precedentes são satisfeitas nos pontos $x' + iy'$, $x'' + iy''$, etc. por um valor a de n; nos pontos $x'_1 + iy'_1$, $x''_1 + iy''_1$, etc. por um valor b de n; etc., temos as desigualdades:

$$s_{a+p} - s_a < \delta, \quad s'_{a+p} - s'_a < \delta'$$

$$s_{b+p} - s_b < \delta, \quad s'_{b+p} - s'_b < \delta'$$

$$s_{c+p} - s_c < \delta, \quad s'_{c+p} - s'_c < \delta'$$

....

*

Suppondo que a serie (1) é convergente quando a $x+iy$ se dá valores que representam pontos de uma área dada, e que as desigualdades precedentes se referem aos pontos d'esta área, se os valores de a, b, c, etc. tem um limite superior N, as desigualdades:

$$s_{N+p} - s_N < \delta,\ s'_{N+p} - s'_N < \delta'$$

comprehendem todas as precedentes. Diz-se n'este caso que a serie proposta é *uniformemente convergente* em toda a área considerada. A respeito d'estas series vamos demonstrar o theorema seguinte:

Theorema 7.º — Toda a serie ordenada segundo as potencias de uma variavel real ou imaginaria, é uniformemente convergente em qualquer área comprehendida dentro do circulo de convergencia.

Seja

$$\sum_1^\infty c_n\, z^n,\ z = x + iy$$

a serie proposta, e seja R o maior valor do módulo de z na área considerada.

Pondo

$$c_n = r_n\,(\cos d_n + i \operatorname{sen} d_n)$$

$$z = \rho\,(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

vem (n.º 9, 2.º)

$$\sum_1^\infty r_n\, \rho^n\,[\cos(n\,\theta + d_n) + \operatorname{sen}(n\,\theta + d_n)]\,.$$

Temos pois

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{n+1}^\infty r_k\, \rho^k \cos(k\,\theta + d_k)$$

$$s'_{n+p} - s'_n = \sum_{n+1}^{\infty} r_k \rho^k \operatorname{sen}(k\theta + d_k).$$

Por ser a serie convergente na área considerada, ha sempre um valor de n que, combinado como qualquer valor de p, satisfaz ás desigualdades

$$\sum_{n+1}^{\infty} r_k R^k \cos(k\theta + d_k) < \delta,$$

$$\sum_{n+1}^{\infty} r_k R^k \operatorname{sen}(k\theta + d_k) < \delta';$$

e portanto, por ser $\rho < R$, o mesmo valor de n satisfará *à fortiori* ás desigualdades

$$s_{n+p} - s_n < \delta,$$

$$s_{n+p} - s'_n < \delta',$$

qualquer que seja ρ, que é o que se queria demonstrar.

Por exemplo, a serie

$$1 + mz + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} z^n + \ldots$$

onde m é real, é convergente quando o é a serie (n.° 13 — 2.°):

$$1 + m\rho + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \rho^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \ldots n} \rho^n + \cdots$$

Como ha um valor de n a partir do qual, n'esta ultima serie, a razão de dois termos consecutivos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n+1}{n} \rho = \left(\frac{m+1}{n} - 1\right) \rho$$

tende para o limite ρ (em valor absoluto) quando n augmenta indefinidamente, e fica sempre inferior a este limite, a serie será convergente (n.° 12 — 3.°) quando é $\rho < 1$, e divergente quando é $\rho > 1$.

Logo a serie proposta é uniformemente convergente em qualquer área comprehendida dentro do circulo do raio igual á unidade.

Como segundo exemplo consideremos a serie

$$1+\frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\gamma(\gamma+1)}z^2+\ldots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\ldots n\,.\,\gamma(y+1)\ldots(\gamma+n-1)}z^n+\ldots$$

e supponhamos que α, β, γ são constantes reaes.

A serie correspondente dos módulos será:

$$1+\frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}\rho+\frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\gamma(\gamma+1)}\rho^2+\ldots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,.\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1\,.\,2\ldots n\,.\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\rho^n+\ldots,$$

e a razão de dous termos consecutivos:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{(n+1)(\gamma+n-1)}\rho$$

$$=\frac{\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)\left(1+\frac{\beta-1}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma-1}{n}\right)}\,.\,\rho=$$

$$\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)\left(1+\frac{\beta-1}{n}\right)\left(1-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)\left(1-\frac{\frac{\gamma-1}{n}}{1+\frac{\gamma-1}{n}}\right)$$

approxima-se de ρ tanto quanto se queira augmentando n. Logo, se é $\rho<1$, póde dar-se a n um valor tão grande que a razão precedente se torne menor do que uma quantidade qualquer B comprehendida entre ρ e 1; se é $\rho>1$, póde dar-se a n um valor tal que a mesma razão se torne maior do que a unidade. No primeiro caso a serie será convergente, no segundo caso será divergente (n.° 12—3.°).

Logo a serie proposta será convergente dentro do circulo de raio igual á unidade, e n'este circulo será uniformemente convergente.

A serie precedente, que tem sido objecto de trabalhos importantes, tem o nome de *serie hypergeometrica.*

Como exemplo de uma serie que não é uniformemente convergente consideremos a progressão geometrica

$$z + z(1-z) + z(1-z)^2 + \dots$$

e supponhamos z real e comprehendido entre 0 e 1. Formando as sommas s_n e s_{n+p} dos n e dos $n+p$ primeiros termos d'esta progressão, e subtraindo os resultados, vem

$$s_{n+p} - s_n = (1-z)^n [1-(1-z)^p].$$

Para que esta differença seja menor do que δ, qualquer que seja p, basta que seja

$$(1-z)^n < \delta$$

o que dá

$$n > \frac{\log \delta}{\log (1-z)}.$$

Mas á medida que z se approxima de zero, o denominador d'esta fracção diminue indefinidamente; logo n não tende para limite algum e a serie não é portanto uniformemente convergente no intervallo considerado.

VI

Productos infinitos

18. — Consideremos agora as expressões da fórma

$$(3)\ldots\ldots\ldots \quad (1+a_0)(1+a_1)\ldots(1+a_n),$$

que, empregando o signal Π para representar productos, podemos escrever do modo seguinte:

$$\prod_0^n (1+a_n).$$

Suppondo primeiramente $a_0, a_1, \ldots a_n$ quantidades reaes positivas, procuremos as condições para que este producto convirja para um limite finito e determinado á medida que n augmenta indefinidamente. (*)

Sabe-se que a media arithmetica de p quantidades positivas é maior do que a sua media geometrica; portanto, sendo q d'estas quantidades iguaes a A e as restantes iguaes a B, teremos

$$\left(\frac{qA+(p-q)B}{p}\right)^p > A^q B^{p-q}.$$

Pondo n'esta desigualdade

$$A=1+\beta\frac{p}{q},\ B=1,$$

(*) Veja-se o *Calculo Differencial* de Todhunter e o artigo intitulado — *Sobre a expressão lim* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ que publiquei na *Revista Scientifica* do Porto—tomo I.

vem

$$\left(1+\beta\right)^p > \left(1+\beta\,\frac{p}{q}\right)^q,$$

ou, pondo $\beta = 1$,

$$2^p > \left(1+\frac{p}{q}\right)^q.$$

Temos pois, pondo $\gamma = \frac{p}{q} > 1$,

$$2^\gamma > 1 + \gamma > 1 + \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Se fôr $\gamma < 1$, a formula precedente dá

$$2^{1+\gamma} > 1 + (1+\gamma)$$

e portanto teremos tambem n'este caso

$$2^\gamma > 1 + \tfrac{1}{2}\gamma.$$

Em virtude d'esta desigualdade virá

$$1 + a_n < 2^{2a_n}$$

e portanto

$$\Pi\,(1+a_n) < \Pi\, 2^{2a_n} = 2^{2\Sigma a_n}.$$

Esta igualdade mostra que, se Σa_n converge para um limite finito e determinado, tambem $\Pi\,(1+a_n)$ converge para um limite finito e determinado.

Por outra parte, a desigualdade

$$\Pi\,(1+a_n) = 1 + \Sigma a_n + \Sigma a_n\, a'_m + \ldots > \Sigma a_n$$

mostra que, se Σa_n fôr uma serie divergente, tambem $\Pi\,(1+a_n)$ será divergente. Temos pois o theorema seguinte:

Theorema.—*A condição necessaria e sufficiente para que o producto* (3) *seja convergente é que a serie* Σa_n *o seja.*

19.—Podemos ligar com a doutrina precedente a das potencias de grão infinito. A este respeito vamos considerar a expressão

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

que tem grande importancia no *Calculo Differencial*.

A desigualdade

$$(1+\beta)^p > \left(1+\beta\frac{p}{q}\right)^q$$

ou

$$(1+\beta)^\gamma > 1+\beta\gamma$$

dá, pondo $\beta = \frac{1}{\gamma n}$ e elevando á potencia n,

$$\left(1+\frac{1}{\gamma n}\right)^{\gamma n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

onde é $\gamma n > n$ por ser $y > 1$. Logo a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ augmenta com n.

Por outra parte temos, pondo $a_n = \frac{1}{n}$,

$$1+\frac{1}{n} < 2^{\frac{2}{n}}$$

e portanto

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2^2,$$

o que mostra que a potencia considerada, que augmenta indefinidamente com n, tende para um limite menor do que 4.

Este limite designa-se habitualmente pela lettra e, e serve de base a um systema de logarithmos, que são chamados *neperianos*, por ser a base de que usou Neper, inventor dos logarithmos.

O valor de e póde calcular-se com a approximação que se quizer dando a n os valores $1, 2, 3, \ldots$, o que dá $e = 2,278281\ldots$

Se fôr n negativo, vem

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right),$$

e portanto

$$\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right) = e.$$

Podemos pois enunciar o seguinte theorema importante:

Se o numero inteiro ou fraccionario, positivo ou negativo **n** *augmenta indefinidamente em valor absoluto, a expressão* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ *tende para um limite determinado.*

***20.** — Consideremos agora o producto

$$\Pi\,(1+u_n),$$

onde u_n é uma funcção da variavel imaginaria z.

Teremos, em virtude da formula conhecida da multiplicação de binomios,

$$(a) \ldots \lim \Pi\,(1+u_n) = \lim\,[1+\Sigma u_i + \Sigma u_i\, u_j + \ldots + u_1\, u_2 \ldots u_n],$$

onde Σu_i representa a somma dos segundos termos dos binomios, $\Sigma u_i\, u_j$ a somma dos seus productos distinctos dois a dois, etc.

Por outra parte, chamando $a_1, a_2, \ldots a_n$ os módulos de $u_1, u_2, \ldots u_n$, e suppondo convergente a serie:

$$(b) \ldots 1 + \Sigma a_i + \Sigma a_i \,.\, a_j + \ldots + a_1\, a_2 \ldots a_n,$$

que é equivalente ao producto $\Pi\,(1+a_n)$, as series Σa_i, $\Sigma a_i\, a_j$, etc. tambem serão convergentes, assim como (n.° 13—2.°) as series Σu_i, $\Sigma u_i\, u_j$, etc. Portanto, chamando

S_n a somma dos n primeiros termos da serie equivalente a $\Pi(1+a_n)$, teremos (n.º 11 — 1.º)

$$S_{n+p} - S_n < \delta.$$

Mas, por ser o termo geral da serie (a), isto é $\Sigma u_i\, u_j \ldots$, igual a $\Sigma a_i\, a_j \ldots (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ (representando por θ a somma dos argumentos de u_i, u_j, etc.), as duas series em que ella se decompõe têem os seus termos respectivamente menores do que os da serie (b), e portanto, chamando s_n e s'_n as sommas dos seus n primeiros termos, teremos

$$s_{n+p} - s_n < \delta,\ s'_{n+p} - s'_n < \delta.$$

Logo estas duas series serão (n.º 11 — 2.º) convergentes, e portanto tambem será convergente a sua somma $\Pi(1+u_n)$.

Podemos pois enunciar o principio seguinte:

Se o producto $\Pi(1+a_n)$ *fôr convergente, tambem o será o producto* $\Pi(1+u_n)$.

Vê-se pois que aqui, como no caso das series, se póde fazer depender o estudo das condições de convergencia dos productos imaginarios do estudo das condições de convergencia dos productos reaes.

Por exemplo, o producto

$$\prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{1\,.\,2\ldots n}\right)$$

é convergente, porque, chamando ρ o módulo de z, temos

$$\Sigma a_n = \Sigma \frac{\rho}{1\,.\,2\ldots n} = \rho\, \Sigma \frac{1}{1\,.\,2\ldots n},$$

e a serie $\Sigma \dfrac{1}{1\,.\,2\ldots n}$ é convergente (n.º 12 — 3.º).

VII

Fracções continuas

21. — As fracções continuas são conhecidas desde os Elementos de Algebra, onde se viu a grande importancia que tinham em muitas questões relativas aos numeros. Os principaes resultados lá achados tem logar no caso da fracção continua:

$$(1)\ldots\; u=\frac{a_1}{b_1+u_1},\; u_1=\frac{a_2}{b_2+u_2},\; u_2=\frac{a_3}{b_3+u_3},\ \text{etc.},$$

onde a_1, a_2, ... b_1, b_2, etc., representam funcções inteiras de uma variavel z.

I — Formando as convergentes successivas como no caso das fracções continuas elementares, acha-se os resultados:

$$C_1=\frac{N_1}{D_1}=\frac{a_1}{b_1}$$

$$C_2=\frac{N_2}{D_2}=\frac{a_1\,b_2}{b_1\,b_2+a_2}$$

....

$$C_n=\frac{N_n}{D_n}=\frac{N_{n-1}\,b_n+N_{n-2}\,a_n}{D_{n-1}\,b_n+D_{n-2}\,a_n}.$$

II — As tres convergentes consecutivas:

$$\frac{N_{n-2}}{D_{n-2}},\ \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}},\ \frac{N_n}{D_n}=\frac{N_{n-1}\,b_n+N_{n-2}\,.\,a_n}{D_{n-1}\,b_n+D_{n-2}\,.\,a_n}$$

dão, pela subtracção,

$$C_{n-1} - C_n = \frac{a_n (N_{n-1} D_{n-2} - D_{n-1} N_{n-2})}{D_{n-1} D_n}$$

$$C_{n-2} - C_{n-1} = - \frac{N_{n-1} D_{n-2} - D_{n-1} N_{n-2}}{D_{n-1} D_{n-2}},$$

e portanto o numerador da differença $C_{n-1} - C_n$ é igual ao numerador da differença $C_{n-2} - C_{n-1}$ multiplicado por $-a_n$; mas as primeiras convergentes dão

$$C_1 - C_2 = \frac{a_1 \, a_2}{D_1 \, D_2},$$

logo teremos

$$C_{n-1} - C_n = \pm \frac{a_1 \, . \, a_2 \, \ldots \, a_n}{D_{n-1} D_n},$$

e

$$N_{n-1} D_n - N_n D_{n-1} = \pm a_1 \, . \, a_2 \, . \, a_3 \, \ldots \, a_n \, .$$

III — Este resultado permitte transformar a fracção continua n'uma serie. Com effeito, temos evidentemente

$$u_1 = C_1 - (C_1 - C_2) - (C_2 - C_3) - \ldots$$

d'onde se segue,

$$u = \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 \, a_2}{D_1 \, D_2} + \frac{a_1 \, a_2 \, a_3}{D_2 \, D_3} - \ldots$$

O valor que se obtém sommando n termos d'esta serie é igual á convergente de ordem n de fracção continua. Logo para que a fracção continua seja convergente basta que esta serie o seja e reciprocamente.

IV — Das fracções continuas contidas na fórma geral (1) ha dois grupos importantes na Analyse. O primeiro corresponde a $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = 1$ (*). O segundo corresponde a $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$.

(*) Veja-se o nosso opusculo intitulado — *Desenvolvimento das funcções em fracção continua* — Coimbra, 1871.

A respeito das fracções continuas do segundo grupo enunciaremos os principios seguintes:

1.° — *O denominador de convergente da ordem* n *é um polynomio inteiro cujo grão augmenta com* n.

Este principio é uma consequencia da lei da formação dos denominadores das convergentes.

2.° — *A fracção algebrica* $\frac{N_n}{D_n}$ *é irreductivel.*

Este principio é consequencia da formula

$$N_{n-1} D_n - N_n D_{n-1} = \pm 1.$$

3.° — *O producto por* x^k *da differença entre o valor da fracção continua completa e de qualquer convergente, isto é, a expressão*

$$x^k \left(\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - u\right)$$

tende para um limite finito, quando x *augmenta indefinidamente, se* k *é igual á somma dos grãos dos polynomios* D_{n-1} *e* D_n, *tende para zero se* k *é maior do que esta somma, e tende para o infinito se* k *é menor do que esta somma.*

Com effeito, a igualdade

$$\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - \frac{N_n}{D_n} = \pm \frac{1}{D_n D_{n-1}}$$

$$= \pm \frac{1}{D_{n-1}(D_{n-1} b_n + D_{n-2})}$$

dá, quando se muda b_n em $b_n + u_n$,

$$\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} - u = \pm \frac{1}{D_{n-1}(D_{n-1} b_n + D_{n-1} u_n + D_{n-2})}$$

$$= \pm \frac{1}{D_{n-1}(D_n + D_{n-1} u_n)}.$$

Temos pois a igualdade

$$(C_{n-1} - u)\, x^k = \pm \frac{x^k}{D_{n-1}(D_n + D_{n-1} u_n)},$$

que, dividindo os dois termos da fracção que entra no segundo membro por x levantado a uma potencia de gráo igual á somma dos gráos de D_n e D_{n-1} e fazendo depois $x = \infty$, leva ao theorema enunciado.

(continua.)

SUR LES POLYNOMES DE LEGENDRE

(Extrait d'une lettre adressée à F. Gomes Teixeira)

PAR

M. Ch. Hermite

... Vous connaissez cette belle proposition de M. Tchebichew que le polynôme X_n de Legendre est le dénominateur de la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de la quantité:

$$\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}+\ldots.$$

On peut y parvenir, comme vous allez voir, au moyen du développement en série, qui a été le point de départ de Legendre et a donné la première définition des polynômes X_n, à savoir:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx+z^2}}=X_0+X_1z+\ldots+X_nz^n+\ldots.$$

Soit pour abréger

$$R(z)=1-2zx+z^2,$$

je remarque d'abord qu'en changeant z en $\frac{1}{z}$, on aura:

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}}=\frac{X_0}{z}+\frac{X_1}{z^2}+\ldots+\frac{X_n}{z^{n+1}}+\ldots$$

Il en résulte, comme je l'ai établi page 299 de mon *Cours d'Analyse*, que l'intégrale $\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}}$ s'exprime ainsi:

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = F(z)\sqrt{R(z)} + X_n \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

en désignant par $F(z)$ un polynôme en z du dégré $n-1$.

Et il est facile de voir que ce polynôme est donné par le développement en série suivant les puissances descendantes de z de l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} \int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}},$$

en n'en prenant que la partie entière. Cette partie entière s'obtient au moyen de la relation:

$$\frac{z^n}{\sqrt{R(z)}} = X_0 z^{n-1} + X_1 z^{n-2} + \ldots + X_i z^{n-i-1} + \ldots,$$

d'où l'on tire en intégrant

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = \frac{X_0 z^n}{n} + \frac{X_1 z^{n-1}}{n-1} + \ldots + \frac{X_i z^{n-i}}{n-i} + \ldots.$$

Il suffit en effet de multiplier membre á membre avec l'équation:

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{X_0}{z} + \frac{X_1}{z^2} + \ldots + \frac{X_i}{z^{i+1}} + \ldots$$

et l'on trouve immédiatement ainsi:

$$F(z) = \frac{X_0^2 z^{n-1}}{n} + \frac{(2n-1) X_0 X_1 z^{n-2}}{n(n-1)} + \ldots.$$

Je remarquerai seulement le dernier terme, le terme indépendant de z, ou bien $F(o)$, qui a pour expression:

$$F(o) = \sum \frac{X_i X_{n-i-1}}{i+1}, \; i = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Ce résultat donne en effet la valeur de l'intégrale définie:

$$\int_0^\xi \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}},$$

où ξ désigne la plus petite racine de $R(z) = 0$, c'est-à-dire:

$$\xi = x + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Si l'on employe la formule générale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \log\left[z - x + \sqrt{R(z)}\right],$$

on a facilement:

$$\int_0^\xi \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = \log \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} + \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1},$$

d'où par conséquent:

$$\int_0^\xi \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = -F(o) + \frac{1}{2} X_n \log \frac{x+1}{x-1},$$

et cette expression de l'intégrale définie contient la belle proposition de M. Tchebichew.

Faites, pour le voir, la substitution $z = \zeta\xi$, l'intégrale devient:

$$\xi^{n+1} \int_0^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{1 - 2x\zeta\xi + \zeta^2\xi^2}},$$

*

ou bien

$$\frac{1}{x^{n+1}}\,\mathrm{Y},$$

en posant

$$\mathrm{Y}=(x\,\xi)^{n+1}\int_0^1\frac{d\zeta}{\sqrt{1-2x\zeta\xi+\zeta^2\xi^2}},$$

quantité finie pour n infiniment grand. Effectivement

$$\xi=x-\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2x}+\ldots,$$

ce qui donne pour x infini

$$\mathrm{Y}=\frac{1}{2^{n+1}}\int_0^1\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta}}=\frac{1}{2^{n+2}}.$$

Remarquez encore que

$$\mathrm{F}(o)=\sum\frac{\mathrm{X}_i\,\mathrm{X}_{n-i-1}}{i+1}$$

est un polynôme entièr en x du dégré $n-1$; $\frac{\mathrm{F}(o)}{\mathrm{X}_n}$ est bien par conséquent la réduite d'ordre n du développement de $\frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$ en fraction continue.

Paris, 31 mai 1885.

EMPREGO DA CYCLOIDE
PARA A RESOLUÇÃO GRAPHICA DE ALGUNS PROBLEMAS DE GEOMETRIA

POR

RODOLPHO GUIMARÃES

1. PROBLEMA. — *Dividir graphicamente um angulo em* m *partes proporcionaes a numeros dados.*

SOLUÇÃO. — Do vertice o do angulo dado (*) descrevamos um circulo com um raio egual á unidade, que intercepte os lados do angulo nos pontos A e B.

Façamos em seguida coincidir um dos lados do angulo, OA por exemplo, com o diametro perpendicular ao eixo dos x, ficando por conseguinte o circulo tangente no ponto A ao dicto eixo.

Podemos considerar este circulo como o gerador da cycloide CBD, que passa pelo ponto B, e encontra respectivamente o eixo dos x nos pontos C e D.

Por esta consideração o arco AB é egual à linha AC. Mas, como esta propriedade é a mesma para todo e qualquer ponto da circumferencia do circulo gerador, podemos considerar no dicto circulo em vez d'um ponto unico B, m pontos a, a_1, a_2, . . . a distancias proporcionaes a numeros dados.

D'este modo, teremos m cycloides passando por esses pontos e encontrando respectivamente o eixo dos x em m pontos b, b_1, b_2, . . . tambem a distancias proporcionaes a numeros dados.

D'aqui concluimos que, se AC se dividir em m partes proporcionaes, o arco AB fica egualmente dividido em m partes na mesma proporção.

2. Posto isto, vejamos como se opéra na practica.

Construamos uma cycloide de metal correspondente a um cir-

(*) Pede-se ao leitor o favor de construir a figura.

culo gerador de raio qualquer, que deve estar marcado na cycloide. Dando ao angulo a mesma disposição que anteriormente, colloquemos a cycloide sobre o eixo dos x, de maneira que passe pelo ponto B, e notemos o ponto C que lhe corresponde no dicto eixo.

Dividamos AC no mesmo numero de partes em que se quer dividir o angulo dado; e, applicando a cycloide sobre cada uma d'essas divisões, vejamos os pontos que lhes correspondem no arco.

D'este modo o arco, e portanto o angulo, fica dividido em m partes proporcionaes.

3. Corollario I. — Até aqui não nos temos referido á grandeza do angulo. Se o considerarmos de 360°, estamos no caso de dividir a circumferencia do circulo gerador em m partes proporcionaes a numeros dados.

Dividida a circumferencia do circulo gerador, para dividirmos uma outra de raio R, basta traçal-a concentrica com a primeira, e em seguida prolongar os raios tirados para os pontos de divisão da circumferencia do circulo gerador.

4. Corollario II. — É evidente que o problema da divisão do angulo e da circumferencia em partes eguaes é um caso particular do que vimos de expôr.

5. Problema II. — *Rectificar um arco de circulo.*

Solução. — Seja A′B′ o arco que se quer rectificar, correspondente a um circulo de raio R e que tem O como centro (*).

Unindo as extremidades A′ e B′ do arco dado com o centro O do circulo, os raios A′O e B′O interceptam nos pontos A e B o circulo descripto de O como centro e com um raio egual ao do gerador da cycloide.

Para se rectificar o arco AB, dispomos a cycloide como no n.° 2, e vejamos o ponto C que lhe corresponde no eixo dos x. Unindo C com O, o seu prolongamento encontrará o eixo dos X em um ponto C′.

A distancia A′C′ é a rectificação do arco dado A′B′.

(*) Note-se que a disposição da figura é a mesma que a do processo anterior, portanto a extremidade A′ do arco dado é tangente ao eixo dos X, e OA′ é perpendicular ao dicto eixo. Egualmente, o eixo dos X, tangente em A′, é parallelo ao dos x, tangente em A, estando os pontos A e A′ situados na mesma perpendicular ao eixo dos X e portanto ao dos x.

Com effeito. Os triangulos AOC e A'OC' dão

$$\frac{OA}{AC}=\frac{OA'}{A'C'}.$$

D'onde concluimos que A'C' é a rectificação do arco A'B'.

6. Corollario. — Do mesmo modo que rectificámos o arco A'B', rectificaremos uma circumferencia. Para isso basta substituir na relação

$$\frac{OA}{AC}=\frac{OA'}{A'C'}$$

AC pela rectificação da circumferencia do circulo gerador, isto é, pela base da cycloide de metal.

7. Problema III. — *Reciprocamente, dada uma linha recta, achar o raio da circumferencia de que essa recta é a rectificação.*

Solução. — Na relação

$$\frac{OA}{AC}=\frac{OA'}{A'C'}$$

OA' é uma quarta proporcional entre OA, AC, e A'C'. Por outra, é uma quarta proporcional entre *o raio da circumferencia do circulo gerador, a rectificação do mesmo circulo, e a linha dada.*

8. Problema IV. — *Dada uma esphera achar um triangulo cuja área lhe seja equivalente.*

Solução. — Se R é o raio da esphera dada, a sua área é representada pela expressão

$$S=4\pi R^2=\pi(2R)^2.$$

Esta fórmula diz-nos que a área d'uma esphera é egual á de um circulo de raio duplo do da esphera; isto é, egual á de um triangulo rectangulo cujos cathetos são $2R$ e $2\pi(2R)$.

Vejamos o modo de construir esse triangulo sem rectificar a circumferencia do circulo equivalente á esphera dada.

Vimos já que a rectificação da circumferencia do circulo gerador da cycloide de metal, era a base da propria cycloide.

Portanto, unindo a extremidade C da base AC da cycloide com o centro O do circulo gerador, situado na extremidade do raio OA perpendicular em A á base da cycloide, obtemos um triangulo rectangulo OAC equivalente ao circulo gerador.

Prolonguemos os lados OA e OC; tomemos sobre o prolongamento de OA a partir de O um comprimento OM egual ao dobro do raio da esphera, e tiremos pelo ponto M uma parallela a AC que irá encontrar o prolongamento de OC n'um ponto P. O triangulo assim formado OMP será equivalente á superficie da esphera.

Com effeito, os triangulos OAC e OMP dão

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OM}{PM},$$

d'onde

$$PM = 2\pi(2R),$$

e portanto a área da esphera será

$$S = \frac{1}{2} PM \times OM = 4\pi R^2.$$

D'onde concluimos que *a área d'uma esphera é egual á de um triangulo rectangulo cujos cathetos são o duplo raio da esphera dada, e a quarta proporcional entre esse duplo raio, o raio do circulo gerador da cycloide de metal e a base d'essa cycloide.*

9. Problema V. — *Determinar a superficie lateral e total d'um cone circular recto.*

Solução. — Sabe-se que a planificação d'um cone circular recto é um sector circular, cujo arco é evidentemente egual á circumferencia da base.

D'onde concluimos que *a superficie lateral d'um cone circular recto é egual á de um triangulo rectangulo cujos cathetos são a generatriz e a rectificação da circumferencia da base.*

Se quizermos obter a superficie total, temos de accrescentar á lateral a da base, que é representada por um triangulo rectangulo cujos cathetos são o raio da base e a rectificação da circumferencia da mesma base.

Vejamos agora quaes devem ser os elementos d'um triangulo rectangulo, para que a sua área seja egual á superficie total do cone.

Seja AOB um triangulo rectangulo cujos cathetos OA e AB são respectivamente a generatriz e a rectificação da circumferencia da base do cone dado. Este triangulo será equivalente á superficie lateral do cone.

Prolonguemos os lados OA e OB, e tomemos sobre o prolongamento de OA um ponto A'; tiremos em seguida por A' uma recta A'B' parallela a AB, e vejamos qual deve ser o comprimento de OA' para que o triangulo A'OB' represente a superficie total do cone dado.

Na hypothese de que A'OB' representa a superficie total, o trapezio ABA'B' representa evidentemente a área da base.

D'onde, representando por R o raio da base, temos

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{R}=\frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\times\mathrm{OA'}-\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times\mathrm{OA}$$

ou

$$\frac{1}{2}\mathrm{A'B'}\times\mathrm{OA'}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\,(\mathrm{OA}+\mathrm{R}),$$

e pela relação

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{A'B'}}$$

teremos

$$\overline{\mathrm{OA'}}^2=\mathrm{OA}\,(\mathrm{OA}+\mathrm{R}).$$

D'onde concluimos que *a superficie total d'um cone circular recto, é egual á de um triangulo rectangulo cujos cathetos são a media geometrica entre a generatriz do cone e essa mesma generatriz augmentada do raio da base, e a quarta proporcional entre essa media geometrica, a generatriz do cone e a rectificação da circumferencia da base.*

10. PROBLEMA VI. — *Determinar a superficie lateral e total d'um tronco de cone circular recto de bases parallelas.*

Solução. — Sabe-se que a planificação d'um tronco de cone é um trapezio circular, em que os arcos de circulo parallelos que o limitam são eguaes ás circumferencias das bases do tronco.

Rectificando esses arcos obtemos um trapezio que se póde ainda transformar em um triangulo rectangulo da mesma altura que o trapezio e de base egual á somma das bases.

Portanto, *a área lateral do tronco é egual á de um triangulo rectangulo cujos cathetos são a generatriz do tronco e a somma das rectificações das circumferencias das bases.*

11. O methodo que empregamos nas questões dos numeros antecedentes, leva-nos á resolução graphica de muitos problemas de geometria.

Assim os problemas concernentes á linha recta se tornam extensivos aos arcos e circumferencias de circulo; assim se, por exemplo, quizermos dividir uma circumferencia em duas partes taes que a maior seja meia proporcional entre a outra e a circumferencia toda, basta-nos dividir a sua rectificação em media e extrema razão; se pretendermos achar sobre uma circumferencia um ponto tal que a divida em duas partes proporcionaes a dois arcos ou a duas rectas, não temos mais do que dividir a sua rectificação em dois segmentos proporcionaes a esses arcos ou rectas; da mesma fórma querendo construir a meia proporcional entre duas circumferencias dadas, rectifical-as-hemos e acharemos a meia proporcional entre essas rectificações.

A muitos outros problemas poderiamos ainda, como é evidente, applicar o mesmo methodo de resolução.

Tencionamos opportunamente estudar outras questões a que este methodo se applica.

REMARQUES ARITHMÉTIQUES

PAR

Ernest Cesaro

III

Sur quelques conséquences asymptotiques de la série de Lambert

1. Soient $a, b, c, \ldots$ *tous* les diviseurs de n, et posons

$$F(n)=f(a)+f(b)+f(c)+\ldots \tag{1}$$

Si l'on développe

$$\frac{zf(1)}{1-z}+\frac{z^2f(2)}{1-z^2}+\frac{z^3f(3)}{1-z^3}+\ldots+\frac{z^\nu f(\nu)}{1-z^\nu}$$

suivant les puissances croissantes de z, on reconnaît facilement que le coefficient de z^n est ce que devient le second membre de (1), quand on y supprime les diviseurs *supérieurs à* ν. Si l'on représente le résultat par $F_\nu(n)$, on obtient, après multiplication par $1-z$,

$$\sum_{n=1}^{n=\nu}\frac{1-z}{1-z^n}z^n f(n)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[F_\nu(n)-F_\nu(n-1\right]z_n.$$

En faisant $z=1$, puis $\nu=\infty$, on trouve

$$F(\infty)=\frac{f(1)}{1}+\frac{f(2)}{2}+\frac{f(3)}{3}+\ldots \tag{2}$$

pourvu que le second membre soit convergent.

2. Soit, par exemple, $f(n)=\frac{1}{n}$, de sorte que $F(n)$ représente la somme des inverses des diviseurs de n. La formule (2) montre que *la somme des inverses des diviseurs d'un nombre tend asymptotiquement vers* $\frac{\pi^2}{6}$. Si, d'après *Euler*, on représente par $\int n$ la *somme des diviseurs de* n, la somme des inverses des diviseurs du même nombre est $\frac{1}{n}\int n$. On a donc

$$\lim.\frac{\int n}{n}=\frac{\pi^2}{6},$$

pour n indéfiniment croissant. Cependant, il ne faut pas croire que ces égalités soient vraies autrement qu'*en moyenne*. En effet, si grand que soit n, la fonction $\frac{1}{n}\int n$ peut différer aussi peu qu'on le veut de 1 ou de 2, et, par suite, s'écarter considérablement de $\frac{\pi^2}{6}$: il suffit de prendre n *premier* ou *parfait*. En d'autres termes, si $F(x)$ est une fonction continue, qui, pour les valeurs entières n de x, prend les valeurs définies par (1), il n'est pas dit que la ligne $y=F(x)$ admet pour asymptote la droite $y=F(\infty)$. La courbe oscille autour de la droite, mais ne tend pas à se confondre avec elle.

3. Si $u, v, w, \ldots$ sont les facteurs premiers de n, et l'on a $n=u^{\alpha}v^{\beta}w^{\gamma}\ldots$, on sait que

$$\varphi(n)\int n=n^2\left(1-\frac{1}{u^{\alpha+1}}\right)\left(1-\frac{1}{v^{\beta+1}}\right)\left(1-\frac{1}{w^{\gamma+1}}\right)\ldots,$$

d'où l'on pourrait déduire

$$\lim. \frac{\varphi(n)}{n} = \lim. \frac{n}{\int n} = \frac{6}{\pi^2},$$

conformément à un théorème démontré par **M. Perott** dans le *Bulletin de M. Darboux.*

Pour la démonstration, il ne faut pas oublier que ces égalités sont des *relations moyennes.* — Si $f(n) = (-1)^n$, la formule (2) montre que *l'excès du nombre des diviseurs impairs d'un nombre, sur le nombre de ses diviseurs pairs, tend asymptotiquement vers log* 2. De même, pour $f(n) = \sin \frac{\pi n}{2}$, *l'excès du nombre des diviseurs de* n, *de la forme* $4k+1$, *sur le nombre des diviseurs de* n, *de la forme* $4k+3$, *tend asymptotiquement vers* $\frac{\pi}{4}$; etc., etc.

4. Soit

$$Q_r(z) = z(1-z)^{r-1}\Delta(0^r) + z^2(1-z)^{r-2}\Delta^2(0^r) + \ldots + z^r\Delta^r(0^r),$$

et considérons la somme

$$\frac{Q_r(z)f(1)}{(1-z)^{r+1}} + \frac{Q_r(z^2)f(2)}{(1-z^2)^{r+1}} + \ldots + \frac{Q_r(z^\nu)f(\nu)}{(1-z^\nu)^{r+1}}.$$

On sait que

$$\frac{Q_r(z)}{(1-z)^{r+1}} = 1^r.z + 2^r z^2 + 3^r z^3 + \ldots.$$

Par conséquent, si l'on pose

$$F(n) = n^r \left\{ \frac{f(a)}{a^r} + \frac{f(b)}{b^r} + \frac{f(c)}{c^r} + \ldots \right\},$$

et l'on désigne par $F_\nu(n)$ ce que devient le second membre, lorsqu'on y supprime les diviseurs supérieurs à ν, on a

$$\sum_{n=1}^{n=\nu} \frac{Q_r(z^n) f(n)}{(1-z^n)^{r+1}} = zF_\nu(1) + z^2F_\nu(2) + z^3F_\nu(3) + \ldots;$$

puis:

$$\sum_{n=1}^{n=\nu} \left(\frac{1-z}{1-z^n}\right)^{r+1} Q_r(z^n) f(n)$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} z^n \left\{ F_\nu(n) - C_{r+1,1} F_\nu(n-1) + C_{r+1,2} F_\nu(n-2) - \ldots \right\},$$

en convenant de prendre $F_\nu(n) = 0$, lorsque $n < 1$. Si l'on fait $z = 1$, puis $\nu = \infty$, et l'on observe que

$$Q_r(1) = \Delta^r(0^r) = r!,$$

on trouve

$$\lim \left\{ F(n) - C_{r,1} F(n-1) + C_{r,2} F(n-2) - \ldots \right\} = r! \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f(n)}{n^{r+1}},$$

pourvu que la série du second membre soit convergente. On en déduit sans peine que $F(n)$ *tend asymptotiquement vers*

$$n^r \left\{ \frac{f(1)}{1^{r+1}} - \frac{f(2)}{2^{r+1}} + \frac{f(3)}{3^{r+1}} + \ldots \right\}.$$

Par exemple, *la somme des diviseurs de* n *tend asymptotiquement vers* $\frac{\pi^2}{6} n$; etc.

D'ailleurs, ces résultats peuvent être déduits, bien plus simplement, de la formule (2).

5. Au lieu de (2) on peut *toujours* écrire

$$F_\nu(\infty) = \frac{f(1)}{1} + \frac{f(2)}{2} + \frac{f(3)}{3} + \ldots + \frac{f(\nu)}{\nu}.$$

Cette égalité permet de se rendre compte de l'*allure moyenne* de certaines fonctions.

Pour $f(n) = 1$, et ν très-grand, nous avons les égalités asymptotiques

$$F_\nu(\infty) = \log \nu, \quad F_{2\nu}(\infty) - F_\nu(\infty) = \log 2.$$

Il en résulte que, *si d'un nombre indéfiniment grand on prend les diviseurs non supérieurs à un nombre* ν, *très-grand, leur nombre est asymptotique à log* ν, tandis que *le nombre des diviseurs compris entre* ν *et* 2ν *est asymptotique à log* 2.

Il y a donc une irrégularité extrême dans la distribution de ces diviseurs. Il n'en est pas ainsi de leurs sommes; car, pour $f(n) = n$, on trouve que, *si l'on considère la somme des diviseurs compris entre* 0 *et* ν, — *la somme de ceux qui sont compris entre* ν *et* 2ν, etc. — *toutes ces sommes sont asymptotiques à* ν. — Remarquons, pour finir, que, *si d'un nombre indéfiniment grand on prend les diviseurs non supérieurs à* ν, *et l'on calcule leur moyenne arithmétique, cette moyenne tend asymptotiquement vers la totalité des nombres premiers inférieurs à* ν, *lorsque* ν *augmente sans limite.*

NOTA SOBRE O EMPREGO DO PARALLELEPIPEDO ELEMENTAR

POR

HENRIQUE DA FONSECA BARROS

No bello artigo *Hydromechanics* da Encyclopedia Britannica, artigo devido, na parte especulativa, á penna erudita do sr. A. G. Greenhill, assevera-se (pag. 445) que o methodo geralmente seguido para deduzir a equação de continuidade constitue (palavras textuaes do auctor) *uma violação dos principios do calculo differencial*, por isso que n'elle se considera successivamente cada um dos accrescimos infinitamente pequenos dx, dy e dz como sendo infinitamente grande em relação a qualquer dos outros dois, e tambem em relação ao elemento de tempo dt.

Por esse motivo, o sabio professor inglez entende dever substituir a demonstração vulgar pela que se funda no emprego da notavel fórmula de calculo integral devida a Georges Green.

É possivel que as observações da Encyclopedia Britannica sejam applicaveis ao modo pelo qual, n'alguns livros de mecanica e de physica mathematica, vem exposto o methodo do parallelepipedo elementar, methodo que póde empregar-se, como é de todos sabido, na deducção, não só da equação de continuidade, como das equações do equilibrio e do movimento dos fluidos, e ainda na deducção das equações da elasticidade, na theoria do calor, etc.

O proprio Euler, na sua celebre memoria em que estabelece as equações dos Fluidos, dirige a sua exposição por fórma tal, que lhe são applicaveis, até certo ponto, as reflexões citadas; e não nos deve admirar muito que assim succeda, porque não vai longe ainda a epocha em que a exposição rigorosa e didactica do methodo infinitesimal se desembaraçou da obscuridade e confusão em que se involvia.

Parece-me porém que, relativamente ao methodo em si, a critica é infundada, pois nada ha mais facil, como vou mostrar, do que apresentar a demonstração de modo que não haja violação de principio algum.

Supponhamos, por exemplo, que se pretendem as condições de equilibrio do parallelepipedo $dx\,dy\,dz$; diz-se geralmente: «a pressão no ponto (x, y, z) é p, portanto a pressão sobre a face $dy\,dz$ é $p\,dy\,dz$; na face opposta é

$$\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)dy\,dz;$$

logo a differença, isto é, a pressão no sentido do eixo dos X é

$$-\frac{dp}{dx}dx\,dy\,dz.»$$

Effectivamente, parece á primeira vista que é contrario aos principios ordinarios do methodo infinitesimal attender por um lado á variação de p quando x cresce de dx, e não attender por outro á variação que soffre a mesma quantidade p quando y e dz crescem dos accrescimos dy e dz, da mesma ordem que dx e até muitas vezes eguaes a este ultimo; e é claro que só não attendendo á variação de p proveniente dos accrescimos de y e z se póde dizer que a pressão sobre a face é $p\,dy\,dz$. É porém facil reconhecer que não ha na realidade contradicção alguma; mas que, pelo contrario, se seguem em tudo as prescripções do methodo infinitesimal — «não desprezar, ou, mais correctamente, não supprimir senão os termos de ordem superior aos que se pretendem calcular.»

Com effeito, o que pretendemos determinar? São as pressões sobre as faces oppostas, ou é a differença entre essas pressões? Evidentemente é a differença, porque é esta que dá a componente da pressão segundo o eixo dos X; ora a differença entre as pressões por unidade de superficie no ponto (x, y, z) e no seu correspondente na face opposta $(x+dx, y, z)$ é $-\frac{dp}{dx}dx$; para um outro qualquer ponto da face $dy\,dz$ e para o seu correspondente, essa differença é o valor que toma $-\frac{dp}{dx}dx$ quando y e z

variam de quantidades quando muito eguaes ás arestas dy e dz, isto é,

$$-\frac{dp}{dx}dx+\varepsilon,$$

sendo ε um termo de segunda ordem pelo menos.

A differença entre as duas quantidades é ε, e por isso, segundo o methodo infinitesimal, e sem violação de principio algum, a expressão $-\frac{dp}{dx}dx$ póde ser tomada para valor constante da differença de pressão por unidade de superficie em quaesquer dois pontos oppostos das faces perpendiculares ao eixo dos X.

Considerações inteiramente analogas, e que ficam evidentes em presença do exposto, se podem fazer quando se tracte de applicar o methodo de Euler á deducção da equação de continuidade, ou a qualquer dos problemas em que se emprega a consideração do parallelepipedo elementar.

Parece-me pois que não ha motivo algum para considerar menos rigorosa, ou sequer menos conforme com o espirito do methodo infinitesimal, a consideração que serviu a Euler, a Fourier, a Lamé, e outros mais, e que é na verdade muito mais directa, simples e naturalmente indicada pela indole dos problemas a que se applica, do que o emprego da fórmula, aliás importantissima e de grande utilidade n'outros casos, de Georges Green.

BIBLIOGRAPHIA

D. Besso. — *Sul prodotto di due soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenea de seconde ordine.* — *Roma, 1884.*
——— *Sull'equazione del quinto grado.* — *Roma, 1884.*
——— *Sopra una classe di equazione trinomia.* — *Roma, 1884.*

Na primeira d'estas memorias o sabio professor do Instituto technico de Roma expõe algumas propriedades importantes das equações differenciaes lineares homogeneas de quarta ordem, satisfeitas por productos de soluções de duas equações differenciaes lineares homogeneas de segunda ordem.

Na segunda memoria tracta da resolução da equação do quinto grão por meio das series hyper-geometricas.

Na terceira memoria resolve por meio das series hyper-geometricas de ordem $n-2$ a equação trinomia

$$y^n + y - a = 0.$$

Todas estas memorias importantes foram publicadas na collecção de Memorias da *Academia dos Lynces* de Roma.

G. Paxton Young. — *Solution of Solvable Irreducible Quintic Equations without the aid of a Resolvent Sextic* (*American Journal of Mathematics*, vol. VII).

No tomo V d'este jornal (pag. 121) demos noticia de duas memorias do sr. Young, onde este sabio geometra se occupa da resolução algebrica das equações. A importante memoria de que hoje damos noticia é continuação das precedentes, e n'ella o auctor, partindo da fórma dada por Jerrard á equação do quinto grão, acha as condições necessarias e sufficientes para que esta equação seja resoluvel algebricamente, e dá as fórmulas por meio das quaes se obtêm as raizes, no caso de se verificarem estas condições.

A. d'Arzilla Fonseca. — *Applicação dos quaterniões á Mecanica. — Coimbra, 1835.*

No volume v d'este jornal demos noticia de um trabalho, em que o sr. Arzilla expõe com todo o rigor e clareza a theoria dos quaterniões.

No presente trabalho faz applicação dos principios expostos no anterior á Mecanica racional, para fazer ver a importancia d'estes principios.

Principia pela Statica onde considera o equilibrio do ponto e dos systemas rigidos, e passa depois á Dynamica onde considera o movimento do ponto e o movimento do corpo solido independentemente das forças que o produzem, e em seguida o movimento do ponto produzido por quaesquer forças.

Brito Limpo. — *Sobre as refracções terrestres* (*Revista Scientifica*, tomo I, 1855).

N'este artigo faz o sr. Brito Limpo algumas considerações a respeito dos coefficientes de refracção terrestre. Mostra que em logar de empregar um coefficiente medio para cada paiz, se devem empregar varios coefficientes medios correspondentes ás differentes alturas, e dá os methodos practicos para obter estes coefficientes.

A. Marre. — *Lettre à le Président de l'Académie de Sciences de Lisbonne* (*Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, n.° 38, 1884).

N'esta carta dá o sr. Marre uma breve noticia da vida e dos trabalhos do sabio belga René François de Sluze, que floreceu no seculo XVII, e que foi notavel como mathematico, physico, astronomo, etc.

J. M. Rodrigues. — *Teoria de la Balistica.* — *Madrid, 1884.*

Este artigo, escripto em lingua hespanhola, contém os pontos mais importantes da bella *Memoria sobre a theoria da Balistica*, que o sr. Rodrigues apresentou á Academia das Sciencias de Lisboa, e da qual demos noticia no tomo V d'este jornal.

J. A. Sarrasqueiro. — *Tratado de Geometria elementar* — *3.ª edição, Coimbra, 1884.*

—— *Tratado elementar de Arithmetica* — *6.ª edição, Coimbra, 1885.*

Veja-se o que se disse a respeito das edições anteriores d'estes excellentes compendios no tomo V d'este jornal.

F. M. Costa Lobo. — *Resolução das equações indeterminadas.* — *Coimbra, 1885.*

N'este trabalho importante o sr. Costa Lobo expõe e desenvolve os trabalhos dos principaes geometras que se tem occupado das equações indeterminadas.

Principia pelas equações do primeiro grão, a respeito das quaes expõe os principaes methodos de resolução, e desenvolve o calculo relativo a n equações a m incognitas.

Passa depois ás equações do segundo grão, e de grãos superiores, e expõe a este respeito os trabalhos importantes de Euler, Lagrange, Legendre, Gauss, Chasles, etc.

Depois, na segunda parte, expõe os principios da theoria das congruencias.

Finalmente na terceira parte expõe com todo o desenvolvimento a applicação do methodo teleologico de Wronski á resolução das congruencias e das equações indeterminadas.

O sr. Costa Lobo promette occupar-se n'outro trabalho de applicações que façam ver a importancia do methodo teleologico.

A. Schiappa Monteiro. — Sur un théorème relatif à la théorie des nombres (*Revista scientifica*, tomo I, 1885).

N'este artigo interessante o sr. Schiappa apresenta duas soluções da questão proposta a pag. 173 do volume II d'este jornal.

G. T.

RECHERCHES RELATIVES AU CERCLE VARIABLE QUI COUPE DEUX CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES DONNÉS

PAR

A. Schiappa Monteiro

(Professeur à l'École Polytechnique de Lisbonne)

(Suite)

60. Comme nous savons, étant donnés deux cercles directeurs correspondants (E) et (I) (fig. 4), si nous prenons dans les cercles enveloppes respectifs (E′) et (I′) les couples de tangentes $m_1\theta$, $m_o\theta_o$ et $n_{i_o}\theta'_2$, $n_{s_o}\theta'_1$ aux extrémités de leurs diamètres m_1m_o et $n_{s_o}n_{i_o}$, et des points d'intersection θ, θ_o et θ'_1, θ'_2 de ces tangentes avec l'axe radical $\theta\Omega_{m_o}\theta_o$ des cercles directeurs nous abaissons les perpendiculaires $\theta\theta_c$, $\theta\theta_2$; $\theta_o\theta_c$, $\theta_o\theta_1$ et $\theta'_1\theta'$, $\theta'_1\theta'_o$; $\theta'_2\theta'_o$, $\theta'_2\theta'$ sur les vecteurs Em_1, $E'm_1$; Em_o, $E'm_o$ et En_{s_o}, $E'n_{s_o}$; En_{i_o}, $E'n_{i_o}$, les coupant respectivement aux points π, π'; π_1, π'_1 et $\mathring{\pi}_1$, $\mathring{\pi}'$; $\mathring{\pi}$, $\mathring{\pi}'_1$, nous avons les quadrilatères $\theta_c\theta_1\theta'_c\theta_2$, $\theta\theta_o$ et $\theta_{c_o}\theta'_1\theta'_{c_o}\theta'_2$, $\theta'\theta'_o$, dont les sommets θ_1, θ_2 et θ', θ'_o se trouvent sur l'axe radical des cercles directeurs (I_e) et (E_i); d'où il résulte que *nous pouvons de même déterminer d'une manière générale ces cercles au moyen de ces deux quadrilatères.*

En effet, si des sommets θ_1 et θ' de ces quadrilatères nous abaissons sur les rayons $C\underset{1}{m}$ et $C_on_{s_o}$ des cercles enveloppes (E′) et (I′) les perpendiculaires $\overset{1}{C}\mu''$ et C_om_i, qui les coupent aux points $\overset{1}{\mu}''$ et m_i, les segments $\overset{1}{C}\mu''$ et C_om_i seront les rayons des cercles enveloppes (I'_e) et (E'_i). Ces mêmes perpendiculaires couperont aux points $\mathring{a}$ et a_i les vecteurs tangentiels $\mathring{m}_2\mathring{a}$ et $m_3\mathring{a}_i$ parallèles à ces rayons, d'où il résulte que les segments $C\mathring{a}$ et C_oa_i seront les rayons du second couple de cercles directeurs (I_e) et (E_i), des coniques (Ω) et (Ω'), et ayant pour axe radical la droite $\theta'\theta'_0$: car les cercles focaux (E'') et (I'') de ces coniques restent invariables.

Si les diamètres $m_1 m_0$ *et* $n_{s_0} n_{i_0}$ *de* (E') *et* (I') *sont parallèles les dits quadrilatères auront les côtés parallèles chacun à chacun, ou seront inversement ou symétriquement égaux par rapport à* σ_0 (n.° 45).

61. D'après cela, considérons maintenant (fig. 3) le cas où les cercles directeurs (E) et (I) ne sont point correspondants.

Étant T et T_0 les points d'intersection de la corde commune, ou de l'axe radical des cercles directeurs avec les tangentes $m_1 b$ et $m_0 a'_1$ au cercle (E') aux extrémités de son diamètre $m_1 m_0$, représentons par T_c et T'_c les points d'intersection des couples de droites Too_3, $T_0 o_1 o_4$ et $To'o'_3$, $To'_1 o'_4$, qui coupent orthogonalement les vecteurs Em_1, Em_0 et $E'm_1$, $E'm_0$ aux points P, P_1 et P', P'_1; et par T_1 et T_2 les points d'intersection des couples de droites Too_3, $T_0 o'_1 o'_4$ et $To'o'_3$, $T_0 o_1 o_4$.

Soient 0_{m_0} et 0_m les intersections des diagonales TT_0 et $T_1 T_2$ du quadrilatère $T_c T_1 T'_c T_2$, TT_0 avec la droite CC_0, et 0_c et $0'_c$ les intersections de cette même droite avec les perpendiculaires $T_c O_c$ et $T'_c O'_c$.

Si nous remplaçons le cercle directeur (I) par le cercle directeur correspondant $(\gamma_0 b_0)$ de (E), par rapport aux couples de cercles générateurs (o), (o_3) et (o_1), (o_4) de la conique (Σ), les droites Too_3 et $T_0 o_1 o_4$, et celles qui unissent les centres des deux autres couples de cercles générateurs correspondants de la seconde suite de cercles générateurs d'une conique (Σ_0) isocycloconfocale avec la première (n.° 56), se trouvant aussi sur ba'_1 et ab_3, détermineront un quadrilatère, étant le diamètre $m_2 \overset{\circ}{m}_2$ du cercle focal (E'') la direction d'une des diagonales, qui, étant équidistante des tangentes $m_1 T$ et $m_0 T_0$ à (E'), passera par le point milieu T'_m de la diagonale TT_0, et le sommet T_c se trouvera sur la droite $T_c 0_c$ (n.° 44 et 60).

De même, si nous remplaçons le cercle (I) par le cercle directeur correspondant $(\gamma'_0 b'_0)$ de (E), par rapport aux couples de cercles générateurs (o'), (o'_3) et (o'_1), (o'_4) de la conique (Σ'), les droites $To'o'_3$ et $T_0 o'_1 o'_4$ seront analoguement les côtés opposés d'un autre quadrilatère, étant encore le diamètre $m_2 \overset{\circ}{m}_2$ de (E') la direction d'une de ses diagonales, qui passera de même par le point milieu T'_m de la diagonale TT_0, et le sommet T'_c se trouvera sur la droite fixe $T'_cO'_c$.

Donc, *ce diamètre sera également la direction de la diagonale* $T_cT'_c$ *du quadrilatère* $T_cT_1T'_cT_2, TT_0$; *et puisque les diagonales* TT_0 *et* T_1T_2 *sont ainsi coupées aux points milieux* T'_m *et* T_m *par cette diagonale, elles seront parallèles.*

Or le point O_m étant alors *le conjugué harmonique* du point fixe O_{m_0}, par rapport aux deux points fixes O_c, O'_c, sera lui-même *fixe*, et, par suite, *la diagonale* T_1T_2 *sera également fixe.*

Menons au cercle enveloppe (I') les tangentes $n_{s_0}T'_1$ et $n_{i_0}T'_2$ aux extrémités d'un diamètre $n_{s_0}n_{i_0}$, et soient T'_1 et T'_2 leurs points d'intersection avec l'axe radical TT_0 des cercles directeurs (E) et (I). Si de ces points nous abaissons les perpendiculaires $T'T'_1T_{c_0}$, $T'_0T'_{c_0}T'_1$ et $T'_0T'_2T_{c_0}$, $T'T'_{c_0}T'_2$ sur les vecteurs En_{s_0}, $E'n_{s_0}$ et En_{i_0}, $E'n_{i_0}$, les coupant respectivement aux points $\mathring{P}_1$, $\mathring{P}'$ et $\mathring{P}$, $\mathring{P}'_1$, nous avons le quadrilatère $T_{c_0}T'_1T'_{c_0}T'_2, T'T'_0$ en des conditions tout à fait analogues au quadrilatère précédent.

Ainsi, *la diagonale* $T_{c_0}T'_{c_0}$ *passera par le centre* C_0 *du cercle enveloppe* (I'), *et par les points milieux* T_{m_0}, T'_{m_0} *des autres diagonales* $T'_1T'_2$ *et* $T'T'_0$, *qui seront fixes, et les sommets* T_{c_0} *et* T'_{c_0} *se trouveront sur les perpendiculaires* $T_{c_0}O_{c_0}$ *et* $T'_{c_0}O'_{c_0}$ *à la droite* CC_0 *également fixes*, dont les points d'intersection avec cette droite sont désignés par O_{c_0} et O'_{c_0}.

En vertu des données, *si les diamètres* m_1m_0 *et* $n_{s_0}n_{i_0}$ *sont parallèles les quadrilatères* $T_cT_1T'_cT_2, TT_0$ *et* $T_{c_0}T'_1T'_{c_0}T'_2, T'T'_0$ *auront les côtés parallèles chacun à chacun, et seront alors symétriquement semblables.*

Soit O le centre de similitude du quel nous abaissons sur CC_0 la perpendiculaire OS, dont le pied nous désignons par S.

Cela étant, on a

$$\frac{OT_1}{OT'_2}=\frac{OT_2}{OT'_1}=\frac{OT'}{OT_0}=\frac{OT'_0}{OT}=\frac{OT_m}{OT'_m}=\frac{SO_m}{SO_{m_0}}=K=Const.$$

d'où il suit que *les sommets* T_1, T_2 *et* T', T'_0 *se trouvent sur une seule et unique droite.*

Quand la corde ab *tournera autour de* C, *simultanément avec les lignes qui lui sont invariablement reliées, les droites parallèles*

CT_m *et* $C_0T_{m_0}$ *tournant alors autour de* C *et* C_0 *le vecteur de similitude* $T_mOT_{m_0}$ *tournera aussi autour d'un point fixe* F *du segment* CC_0, *qui le divise dans le rapport de* $O_{m_0}C$ *à* $C_0O_{m_0}$, et, par suite, *les quadrilatères, se déformant, leur centre de similitude* O *décrira la droite* OS, ou *on aura*

$$\frac{SO'_c}{SO'_{c_0}}=\frac{SO_m}{SO_{m_0}}=\frac{SO_c}{SO_{c_0}}=K.$$

D'ailleurs, *les points* O_m *et* O_{m_0} *seront les conjugués harmoniques à la fois par rapport aux deux couples de points* O_c, O'_c *et* O_{c_0}, O'_{c_0}, *et*, par conséquent, *ces deux points-là seront les points doubles de l'involution à laquelle appartiennent ces deux couples de points conjugués.*

Maintenant par les sommets T_1 et T' des deux quadrilatères menons parallèlement aux diagonales $T_cT'_c$ et $T_{c_0}T'_{c_0}$ les droites $\overset{\circ}{a}T_1\overset{1}{M}''$ et $T'a_im_i$, qui coupent orthogonalement aux points $\overset{1}{M}''$, m_i les rayons Cm_1, $C_0n_{s_0}$ de (E'), (I'), et aux points $\overset{\circ}{a}$, a_i les vecteurs tangentiels $\overset{\circ}{m}_2a$, $\overset{\circ}{m}_3\overset{\prime}{a}_i$.

En considérant d'abord les trapèzes rectangles $C_0T_{m_0}T'_1n_{s_0}$ et $CT_mT_1\overset{1}{M}''$, on a

$$\frac{T_{m_0}T'_1}{C_0n_{s_0}}=\frac{T_mT_1}{C\overset{1}{M}''},\quad \text{ou}\quad \frac{C\overset{1}{M}''}{C_0n_{s_0}}=\frac{T_mT_1}{T_{m_0}T'_1}=K;$$

mais la valeur de $C_0n_{s_0}$ étant constante, il en sera de même de la valeur de $C\overset{1}{M}''$.

Donc, *le point* C *et le segment* $C\overset{1}{M}''$ *seront le centre et le rayon d'un nouveau cercle enveloppe* (E'_1) de $\overset{\circ}{a}\overset{1}{M}''$; *et, puisque le cercle focal est le même, le segment* $C\overset{\circ}{a}$ *sera aussi le rayon d'un nouveau cercle directeur* (E_1).

Secondement, en considérant les trapèzes rectangles CT'_mTm_1 et $C_0T'_{m_0}T'm_i$, on a

$$\frac{Cm_1}{C_0m_i}=\frac{T'_mT}{T_mT'}=K;$$

d'où il s'ensuit de même que *le point* C_0 *et le segment* $C_0 m_i$ *seront le centre et le rayon de l'autre nouveau cercle enveloppe* (I'_ι), *et le segment* $C_0 a_i$ *le rayon du cercle directeur respectif* (I_ι).

D'après cela, *la droite* TT'_0 *sera donc l'axe radical de ce nouveau couple de cercles directeurs* (E_ι) *et* (I_ι), *auxquels répondront deux séries de cercles générateurs, qui les couperont sous des angles constants* ε *et* ι, *et dont les centres engendront de même les coniques cyclomofocales* (Σ) *et* (Σ').

On en conclut en même temps que *le nombre* K *est aussi le rapport d'homothésie* ou *de similitude des cercles enveloppes* (E'), (I'_ι) *et* (I'), (E'_ι).

En représentant par R_ι et r_ι les rayons des nouveaux cercles directeurs (E_ι) et (I_ι); et par R'_ι et r'_ι les rayons des cercles enveloppes (E'_ι) et (I'_ι), on a

$$\frac{R''}{R'_\iota} = \text{tg.}\,\varepsilon, \quad \frac{r''}{r'_\iota} = \text{tg.}\,\iota \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (48)$$

mais étant

$$\frac{R'}{R'_\iota} = \frac{r'_\iota}{r'} = K, \quad \text{ou} \quad R'_\iota . r'_\iota = R'.r' \ \ldots\ldots \ (49)$$

et

$$\frac{R''}{R'} = \text{tg.}\,e, \quad \frac{r''}{r'} = \text{tg.}\,i \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (50)$$

on aura aussi

$$\text{tg.}\,\varepsilon = K.\text{tg.}\,e, \quad \text{tg.}\,\iota = \frac{1}{K}.\text{tg.}\,i \ \ldots\ldots\ldots \ (51)$$

ainsi que

$$\text{tg.}\,\varepsilon\,.\,\text{tg.}\,\iota = \text{tg.}\,e\,.\,\text{tg.}\,i \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (52)$$

ou

$$\frac{\text{tg.}\,\varepsilon}{\text{tg.}\,e} = \frac{\text{tg.}\,i}{\text{tg.}\,\iota} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (53)$$

Tels sont les rapports entre les angles donnés e et i, et les angles ε et ι, sous lesquels les nouveaux cercles directeurs sont coupés par les deux séries respectives de cercles générateurs (o_0), $(\mathring{o}_3)$, ...; (o'_0), $(\mathring{o}'_3)$, ...; ou (x_0), $(\mathring{x}_3)$, ...; (x'_0), $(\mathring{x}'_3)$, ...

Donc:

Théorème XXV. — *A un couple de cercles directeurs* (E), (I) *de deux coniques cyclomofocales répond toujours un autre couple de cercles directeurs* (E_i), (I_i), *concentriques à ceux-là, ces couples de cercles directeurs étant coupés respectivement par les cercles générateurs sous deux couples d'angles constants* e, i *et* ε, ι *tels, que les produiss* tg. e . tg. i *et* tg. ε . tg. ι *des tangentes trigonométriques des angles de chacun de ces couples d'angles sont égaux.*

Observation. — Comme on sait, quand les cercles directeurs deviendront correspondants on retombera sur le cas de la fig. 4, déjà étudié en spécial (n.° 60), étant alors $K = 1$, $\varepsilon = e$, $\iota = i$; *le point* S *coïncidant avec le point central de l'involution considérée.*

62. Si les cercles directeurs (E) et (I) se rencontrent aux points λ et λ_0 (fig. 5), il est évident que ces points appartiendront aussi aux deux coniques engendrées (Ω) et (Ω'), et, par suite, la droite $\lambda\lambda_0$, perpendiculaire à l'axe de symétrie CC_0, sera donc une *corde principale réelle commune* à ces coniques.

Cela posé, considérons le cercle générateur (ω_0) de la série du cercle générateur (ω), et dont les cordes communes βb_c et $\beta_0\beta'$ avec les cercles directeurs (E) et (I) concourent au point φ_1, lequel sera alors le centre radical de ces quatre cercles, pris trois par trois. Déterminons dans le cercle (ω_0) le pôle Φ_ω de la droite $\lambda\lambda_0$, ou le point de concours des cordes $b_c\beta_0$ et $\beta\beta'$ de ce cercle par rapport auquel la droite $E\Phi_\omega$, qui coupe $\lambda\lambda_0$ au point Φ_2, sera la polaire du point φ_1.

Étant j, j' et j_1, j'_1 les points d'intersection des deux couples de cordes $b\beta$, $\beta'\beta_0$ et $b_c\beta$, $\beta'\beta_0$ des cercles (ω) et (ω_0), avec les droites $E\varphi_\omega$ et $E\Phi_\omega$, il est évident que les droites jj_1 et $j'j'_1$ seront les polaires du point φ_1, par rapport aux cercles directeurs (E) et (I), lesquelles se rencontrent au point Φ sur la corde commune $\lambda\lambda_c$ de ces cercles, laquelle sera alors divisée *harmoniquement* par ces deux points. Or, les couples de points φ_2, φ_ω et j, j' de la droite $E\varphi_\omega$ étant conjugués harmoniques, ainsi que les coucouples de points Φ_2, Φ_ω et j_1, j'_1 de la droite $E\Phi_\omega$, les droites $\varphi_2\Phi_2$, $\varphi_\omega\Phi_\omega$ et jj_1, $j'j'_1$ forment un *faisceau harmonique*, ayant pour centre le point Φ; mais la droite $\varphi_\omega\Phi_\omega$ étant la polaire de φ_1 par rapport à la conique (Ω_h), homologique à la conique (Ω) (n.° 57), il en résulte que *la polaire* $\omega\omega_0$ *de ce même point, par rapport à cette dernière conique, passera de même par le centre de ce faisceau.*

En considérant les cercles générateurs de la conique (Ω'), on reconnaîtra que *la polaire du point* φ_1, *par rapport à cette conique, passera encore par le point* Φ.

Il résulte de là que: *La droite* $\lambda\lambda_0$ *étant une corde commune aux deux cercles directeurs* (E) *et* (I), *ainsi que aux deux coniques engendrées* (Ω) *et* (Ω') *les polaires de chaque point de cette droite se rencontrent sur la droite même:* en d'autres termes, *les coniques ont les mêmes systèmes de deux points conjugués sur cette droite.*

Or cette propriété étant nous-seulement indépendente de la nature des cercles directeurs, mais encore de leurs points d'intersection λ et λ_0, elle est également vraie lorsque nous supposons que ces points, conjugués harmoniques de Φ_2 et ψ_2, de réels qu'ils étaient deviennent eux-mêmes imaginaires.

Donc:

Théorème XXVI. — *La corde* (réelle ou idéale) *commune à deux cercles directeurs* (E) *et* (I) *de deux coniques* (Σ) *et* (Σ') *est elle-même une corde principale* (réelle ou idéale) *commune à ces coniques.*

63. Si les deux coniques engendrées (Σ) et (Σ') sont *isocyclomofocales*, les cercles de chacun des deux couples de cercles directeurs (E), (I) et (E_1), (I_1), étant correspondants, et, par suite, les cercles d'un couple étant symétriquement égaux à ceux de l'autre couple, par rapport au centre commun de ces coniques (n.os 44 et 61 *obs.*), les deux cordes communes de ces couples de cercles pourront seulement être toutes deux *réelles* ou *idéales*.

Dans le cas où les coniques (Σ) et (Σ') sont *anisocyclomofocales*, les deux couples de cercles directeurs (E), (I) et (E_1), (I_1) n'étant pas correspondants, ou les cercles d'un couple n'étant pas égaux à ceux de l'autre couple (n.° 61), les deux cordes communes de ces couples pourront aussi être l'une *réelle* et l'autre *idéale*.

Donc:

Théorème XXVII. — *Quand deux coniques sont* isocyclomofocales, *elles ont trois systèmes de deux cordes communes réelles*, ou *un système de deux cordes communes idéales et deux autres imaginaires; mais, si ces coniques sont* anisocyclomofocales, *elles pourront aussi avoir un système de deux cordes communes, étant l'une corde réelle et l'autre idéale, et deux autres systèmes imaginaires.*

64. Les tangentes aux coniques (Ω) et (Ω') (fig. 5) aux extrémités λ_0 et λ de la corde commune $\lambda_0\lambda$, étant elles-mêmes les polaires de ces points, se coupant sur cette corde comme toutes les autres polaires de chaque point de cette corde même (n.° 62), il s'ensuit que, si ces tangentes se confondent, *ces coniques auront un double contact sur cette droite et tout point de celle-ci aura donc même polaire dans les deux courbes.*

Or, cette propriété étant indépendente de la nature des cercles directeurs, ainsi que de leurs points d'intersection, elle est également vraie si ces points de réels qu'ils étaient deviennent eux-mêmes imaginaires (n.° 62).

65. Considérons (fig. 3, 9, 10 et 11) le quadrilatère $T_cT_1T'_cT_2, TT_0$, et indiquons par $h_0h'_0$ la polaire du sommet T_c, par rapport au cercle focal (E″), laquelle, passant par le rencontre k_0 des diagonales oo_4, o_1o_3 du quadrilatère $o_3oo_1o_4, T_c\infty$ [inscrit dans la conique (Σ)] parallèlement aux côtés oo_1, o_3o_4, coupe les côtés oo_3, o_1o_4 aux points h, h'_0, et les droites CC_0, CT_c aux points Γ, q_0. Or, les segments T_ch_0, $T_ch'_0$ étant respectivement *conjuguées harmoniques* des côtés oo_3, o_1o_4, il s'ensuit que, ces côtés représentant aussi deux cordes de la conique (Σ), la droite $h_0h'_0$ sera en même temps la polaire du point T_c, par rapport à cette courbe, laquelle aura par conséquent un *double contact* avec le cercle focal (E″), sur la sécante T_cO_c (n.° 63), étant le point Γ le *pôle de contact.*

De même la polaire $\mathring{h}\mathring{h}'$ du sommet T'_c, par rapport à ce cercle focal (E″), passant par le rencontre k'_0 des diagonales $o'o'_4$, $o'_1o'_3$ du quadrilatère $o'_3o'o'_1o'_4, T'_c\infty$ [inscrit dans la seconde conique (Σ')] parallèlement aux côtés $o'o'_1$, $o'_3o'_4$ sera elle-même la polaire de ce point T'_c, par rapport à cette conique, laquelle aura donc un *double contact* avec ce cercle, sur la sécante $T'_cO'_c$; le point Γ' étant le pôle de contact.

Soient (fig. 3, 9, 10 et 11) $\mathring{o}_0o_3$, $\mathring{o}'_0o'_3$ et $\mathring{o}_1\mathring{o}_4$, $\mathring{o}'_1\mathring{o}'_4$ respectivement les deux couples de cordes de deux coniques (Σ) et (Σ') déterminant le quadrilatère $T_{c_0}T'_1T'_{c_0}T'_2, T'T_0$, ainsi que les deux quadrilatères respectifs $\mathring{o}_3o_0\mathring{o}_1\mathring{o}_4, T_{c_0}\infty$ et $\mathring{o}'_3o'_0\mathring{o}'_1\mathring{o}'_4, T'_{c_0}\infty$ inscrits dans ces coniques.

D'après cela, on reconnaîtra que le cercle focal (I″) aura un double contact avec les coniques (Σ) et (Σ'), sur les sécantes $T_{c_0}O_{c_0}$ et $T'_{c_0}O'_{c_0}$.

Ainsi, *les deux cercles focaux* (E″) et (I″) *communs à deux co-*