et conséquemment (en remarquant que $ds = d\sigma$):

$$x - \xi = \frac{1}{\lfloor n} \left(\frac{d^n x}{ds^n} - \frac{d^n \xi}{d\sigma^n} \right) ds^n + \varepsilon;$$

$$y - \eta = \frac{1}{\lfloor n} \left(\frac{d^n y}{ds^n} - \frac{d^n \eta}{d\sigma^n} \right) ds^n + \varepsilon_1;$$

$$z - \zeta = \frac{1}{\lfloor n} \left(\frac{d^n z}{ds^n} - \frac{d^n \zeta}{d\sigma^n} \right) ds^n + \varepsilon_2,$$

ε, ε_1, ε_2 étant des infiniment petits d'ordre supérieur à n.

Si donc on désigne par δ la distance infinitésimale entre les points correspondants des lignes L, l dans le voisinage du point de contact, on a:

$$\delta = \sqrt{\Sigma\,(x-\xi)^2} = \sqrt{\Sigma \left(\frac{d^n x}{ds^n} - \frac{d^n \xi}{d\sigma^n} \right)^2} \cdot \frac{ds^n}{\lfloor n} + \tau,$$

τ étant un infiniment petit d'ordre supérieur à n.

Cette analyse démontre que «lorsque deux lignes à double courbure ont n points consécutifs communs, la distance entre les points correspondants des lignes, dans le voisinage du point de contact, est un infiniment petit d'ordre non inférieur à n.»

3. Si la ligne l d'une certaine famille bien définie est déterminée de façon que le contact avec une ligne donnée L dans un point fixé A soit le plus grand possible, on dit que la ligne l est *osculatrice* à la courbe L en A.

Nous allons résoudre complètement le problème de la détermination de la courbe l osculatrice à une ligne donnée L, lorsque l appartient à quelque famille remarquable de lignes.

Une géodésique l d'un cône quelconque σ peut avoir 5 points consécutifs communs avec la ligne L et alors deux génératrices rectilignes consécutives du cône C coïncident avec deux droites rectifiantes consécutives de L; le sommet du cône C est donc sur l'arête de rebroussement de la développable rectifiante de L.

La géodésique l du cône C et la ligne L ne peuvent pas avoir en commun un nombre de points plus grand que 5; en effet cela conduirait à la coïncidence de 3, 4, . . . droites rectifiantes de L avec les génératrices rectilignes du cône C, ce que ne peut pas arriver, puisque si la ligne L n'est pas une géodésique d'un cône, trois de ses droites rectifiantes ne passent pas, en général, par un même point.

Donc «lorsqu'une géodésique d'un cône quelconque est tangente à une ligne à double courbure L, dont la développable rectifiante n'est pas un cône, l'ordre du contact ne peut pas, en général, arriver à 5; le sommet du cône est sur la droite rectifiante de L, si l'ordre du contact n'est pas inférieur à 3 (ou, plus généralement, si la ligne L et la géodésique du cône ont, au point de contact, les mêmes rayons le courbure et de torsion); le sommet du cône est sur l'arête de rebroussement de la développable rectifiante de L, si l'ordre du contact n'est pas inférieur à 4 (ou, plus généralement, si la ligne L et la géodésique du cône ont, au point de contact et au point successif, les mêmes rayons de courbure et de torsion).»

Si ρ est le rayon de courbure d'une géodésique l d'un cône et R_g le rayon de courbure géodésique de la ligne Δ que l'on obtient en coupant le cône par une sphère quelconque dont le centre est au sommet, dans le point où l coupe Δ on a (*):

$$R_g = \rho \sin^2 i,$$

i étant l'inclinaison de l sur les génératrices du cône: mais si l'ordre du contact des lignes l, L n'est pas inférieur à 3 (ou, plus généralement, si ces lignes ont, au point de contact, les mêmes rayons de courbure et de torsion) le sommet du cône est placé sur la droite rectifiante de la courbe L; on a donc dans cette hypothèse:

$$\operatorname{tang} i = \frac{r}{\rho}$$

(*) Sulle linee a doppia curvatura, § 6 — *Journal de M. Battaglini*, 1887.

et l'égalité précédente devient:

$$R_{\rho} = \frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Donc «si une ligne à double courbure L et une géodésique d'un cône ont en A un contact dont l'ordre n'est pas inférieur à 3 (ou, plus généralement, si ces lignes ont, au point de contact, les mêmes rayons de courbure et de torsion) la trajectoire ortogonale des génératrices de ce cône passant par A a pour rayon de courbure géodésique, sur la esphère où elle est tracée, la portion de la normale principale de L comprise entre cette ligne et la ligne de striction de la surface gauche des normales principales.»

Géodésique d'un cône de rotation osculatrice.—Le rayon de courbure φ et celui de torsion ψ de la géodésique l d'un cône quelconque sont liés à l'arc σ de la ligne par la relation (*):

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\sigma}{a},$$

a étant la plus courte distance entre le sommet du cône et la ligne l. D'autre part le cône de rotation est une développable dont les génératrices rectilignes sont inclinées d'un angle constant sur une droite (l'axe du cône); la géodésique l d'une telle développable doit donc vérifier la relation:

$$\frac{d}{d\sigma} \operatorname{arc.tang}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right) = \operatorname{tang} \varepsilon \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\psi^2}},$$

ε étant le demi-angle au sommet du cône. On a donc les équations:

$$\varphi(\sigma) = \frac{(a^2 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} \operatorname{tang} \varepsilon; \quad \psi(\sigma) = \frac{(a^2 + \sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{a\sigma} \operatorname{tang} \varepsilon$$

(*) Studi geometrici relativi specialmente alle superficie gobbe, § 1 — *Journal de M. Battaglini*, 1885.

qui définissent une géodésique d'un cône de rotation. Et puisque on a ici les trois paramètres σ, a, ε, on peut satisfaire aux deux premières équations (1) et à la première (2). On obtient donc le système d'équations:

$$(3)\quad \frac{(a^2+\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\operatorname{tang}\varepsilon=\rho;\; \frac{3\sigma(a^2+\sigma^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}\operatorname{tang}\varepsilon=\rho';\; \frac{(a^2+\sigma^2)^{\frac{3}{2}}}{a\sigma}\operatorname{tang}\varepsilon=r,$$

d'où l'on dérive aisément:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \sigma=3\dfrac{\rho}{\rho'}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2}{\left[1+\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2\right]^2};\; a=3\dfrac{\rho}{\rho'}\cdot\dfrac{\dfrac{\rho}{r}}{\left[1+\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2\right]^2}; \\ \\ \cot\varepsilon=\dfrac{3}{\rho'}\cdot\dfrac{\rho}{r}\sqrt{1+\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2}. \end{array}\right.$$

Ces équations suffisent à déterminer la forme et la position de la ligne demandée.

La ligne L et la géodésique conique l, ayant 4 points consécutifs communs, ont un contact dont l'ordre n'est pas inférieur à 3; le sommêt O du cône est donc sur la droit rectifiante de L. Si l'on désigne par H la distance OA entre le sommet et le point de contact, on a:

$$\mathrm{H}=\frac{\sigma}{\cos i},$$

i étant l'inclinaison de l sur les génératrices rectilignes du cône.

Or, au point A on a:

$$(\cot i)_{\mathrm{A}}=\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)_{\mathrm{A}}=\left(\frac{\rho}{r}\right)_{\mathrm{A}}$$

d'où il suit:

$$\cos i = \frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}$$

et conséquemment:

$$\text{(5)} \qquad H = 3\,\frac{\rho}{\rho'}\,\frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

Cette équation fixe le sommet O du cône.

Les lignes L, l ont, au point de contact, la même normale principale AB et cette droite AB coupe l'axe du cône; si B est le point de rencontre, le triangle rectangle OAB nous donne:

$$AB = H \,.\, \text{tang}\,\varepsilon = \frac{\rho}{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2},$$

ce qui démontre que le point B est sur la ligne de striction de la surface gauche des normales principales de L.

On a donc «Á un point quelconque A d'une ligne à double courbure quelconque L construisons le cône de rotation dans lequel:

le demi-angle ε au sommet est défini par la troisième équation (4);
le sommet O est sur la droite rectifiante de L à une distance H de A donnée par (5);
l'axe est la droite joignant O au point de la ligne de striction de la surface gauche des normales principales de L qui correspond à A.

La géodésique de ce cône qui est tangente en A à la ligne donnée L est la géodésique osculatrice.»

À l'aide de ce théorème la construction géométrique de la géodésique d'un cône de rotation osculatrice à une ligne quelconque n'offre aucune difficulté.

Si aux équations (3) on ajoute les autres:

$$\frac{3 \operatorname{tang} \varepsilon}{a^2} \cdot \frac{a^2+2\sigma^2}{\sqrt{a^2+\sigma^2}} = \rho''; \quad \frac{(\sigma^2+a^2)^{\frac{1}{2}}(2\sigma^2-a^2)}{a\sigma^2} \operatorname{tang} \varepsilon = r',$$

correspondant aux conditions:

$$\varphi'' = \rho'', \quad \psi' = r',$$

et l'on rappelle les (4) donnant σ, a, ε, en fonction de ρ, et r, on obtient:

$$(6) \qquad \rho'^2 \frac{1+2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}{3\rho\left(\frac{\rho}{r}\right)^2} = \rho''; \quad \frac{\rho'\left\{2\left(\frac{\rho}{r}\right)^2-1\right\}}{3\left(\frac{\rho}{r}\right)^3} = r'.$$

Les courbes définies par le système des équations différentielles (6) ont la propriété que l'ordre du contact avec la géodésique d'un cône de rotation osculatrice n'est pas inférieur à 4.

Les courbes représentées par la deuxième des équations différentielles (6) ont avec la géodésique osculatrice susdite le contact le plus intime possible, bien que son ordre soit inférieur à 4; en effet les conditions:

$$\varphi = \rho, \quad \varphi' = \rho', \quad \psi = r, \quad \psi' = r'$$

nous apprendent qu'il a lieu la coincidence de deux droites rectifiantes consécutives de L avec les génératrices du cône.

Pour que les géodésiques coniques l osculatrices d'une même ligne L soient semblables entre elles, il faut et il suffit qu'il résulte ε constante. Les lignes L ayant la propriété susdite sont donc définies par la troisième des équations (4), dans laquelle ε est à considérer comme une constante.

Les lignes L pour lesquelles les géodésiques d'un cône de rotation osculatrices sont égales entre elles, sont définies par le système des deux dernières équations (4), pourvu que l'on y suppose a et ε constantes.

Des équations susdites on dérive:

$$\frac{\rho}{r}=\frac{\sqrt{\rho^{\frac{2}{3}}-(a\ \mathrm{tang}\,\varepsilon)^{\frac{2}{3}}}}{(a\ \mathrm{tang}\,\varepsilon)^{\frac{1}{3}}};$$

en force de cette équation, la deuxième des (4) nous donne:

$$\frac{a\,\rho'}{\rho^{\frac{1}{3}}\sqrt{\rho^{\frac{2}{3}}-(a\ \mathrm{tang}\,\varepsilon)^{\frac{1}{3}}}}=3\,(a\ \mathrm{tang}\,\varepsilon)^{\frac{1}{3}},$$

d'où par intégration:

$$\rho^{\frac{2}{3}}=\left\{\frac{(a\ \mathrm{tang}\,\varepsilon)^{\frac{1}{3}}}{a}\,s+k\right\}^2+(a\ \mathrm{tang}\,\varepsilon)^{\frac{2}{3}},$$

k étant une constante arbitraire, que l'on peut faire $=0$, sans nuire à la généralité.

On a donc:

$$\rho=\frac{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}\,\mathrm{tang}\,\varepsilon,$$

et conséquemment:

$$r=\frac{(a^2+s^2)^{\frac{3}{2}}}{as}\,\mathrm{tang}\,\varepsilon.$$

Ces équations démontrent le théorème «si les géodésiques d'un cône de rotation osculatrices à une ligne L sont égales entre elles, dans tous les points da L, cette ligne L est elle-même une de ces géodésiques.»

4. Une hélice cylindrique quelconque peut avoir 4 points consécutifs communs avec une ligne L, mais elle ne saurait en avoir de plus; en effet si le nombre des points communs à la ligne L et à l'hélice l était supérieur à 4, les lignes susdites auraint au moins deux droites rectifiantes communes, ce qui ne peut pas arriver, les droites rectifiantes de l étant parallèles entre elles.

Donc «lorsqu' une hélice quelconque est tangente à une ligne à double courbure L, dont la développable rectifiante n'est pas un cylindre, l'ordre de leur contact ne peut pas, en général, arriver à 4; si cet ordre n'est pas inférieur à 3 (ou, plus généralement, si la ligne L et l'hélice ont, au point de contact, les mêmes rayons de courbure et de torsion) les génératrices rectilignes du cylindre contenant l'hélice sont parallèles à la droite rectifiante de L au point de contact.»

Dans l'hypothése que l'ordre du contact ne soit pas inférieur à 3, l'inclinaison i de l sur les génératrices du cylindre est égale à l'inclinaison de L sur la droite rectifiante; donc:

$$\operatorname{tang} i = \frac{r}{\rho}$$

Si ρ_0 est le rayon de courbure de la section droite du cylindre, au point de contact, on a:

$$\rho_0 = \rho \sin^2 i = \frac{\rho}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

et conséquemment. «Si une hélice et une courbe ont un contact d'ordre non inférieur à 3 (ou, plus géneralement, ci ces lignes ont au point de contact, les mêmes rayons de courbure et de torsion) le centre de courbure de la section droite du cylindre contenant l'hélice, au point de contact, est placé sur la ligne de striction de la surface gauche des normales principales de la ligne considérée.»

Hélice cylindro-conique osculatrice. — Les coordonées d'un point quelconque d'une hélice peuvent s'exprimer par les équations:

$$(7) \qquad x = \mathrm{R} \, . \cos u, \; y = \mathrm{R} \, . \sin u, \; z = \cot i \int \sqrt{\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}'^2} \, . \, du,$$

R étant le rayon vecteur de la section droite du cylindre, u l'angle polaire et i l'inclinaison de la courbe sur les génératrices rectiligne du cylindre.

Les coordonnées d'un point quelconque d'une loxodromie d'une surface de révolution sont:

$$x = \mathrm{R} \, . \cos u, \; y = \mathrm{R} \, . \sin u, \; z = \frac{1}{\sin \theta} \int \sqrt{\mathrm{R}^2 \cos^2 \theta - \mathrm{R}'^2 \sin^2 \theta} \, . \, du,$$

R ayant la même signification qu'auparavant et θ étant l'inclinaison de la loxodromie sur les lignes méridiennes.

Si l'on égale les deux expressions de z, on a:

$$\mathrm{R} = k \, e^{\frac{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \theta}}{\sin \theta} \, . \, u},$$

équation d'une spirale logarithmique; en désignant par ω l'inclinaison de cette spirale sur les rayons vecteurs issus du pôle, on a:

$$(8) \qquad \cot \omega = \frac{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}.$$

Si l'on remarque que le rayon de courbure φ_0 d'une spirale logarithmique s'exprime en fonction de l'arc σ_0 par l'équation:

$$\varphi_0 = \cot \omega \, . \, \sigma_0,$$

on obtient par des formules connues:

$$\varphi(\sigma) = \frac{\cot \omega}{\sin i} \, \sigma, \quad \psi(\sigma) = \frac{\cot \omega}{\cos i} \, \sigma;$$

ces équations sont caractéristiques de l'hélice cylindro-conique.

Les deux premières équations (1) et la première (2) deviennent dans ce cas:

$$\frac{\cot\omega}{\sin i}\sigma=\rho;\quad \frac{\cot\omega}{\sin i}=\rho';\quad \frac{\cot\omega}{\sin i}\sigma=r;$$

et si l'on y ajoute l'équation (8), on obtient aisément:

$$\operatorname{tang} i=\frac{r}{\rho};\ \operatorname{tang}\theta=\frac{1}{\sqrt{\rho'^2+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}};\ \operatorname{tang}\omega=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\rho'};\ \sigma=\frac{\rho}{\rho'}.$$

Les équations (7) et l'expression déterminée pour R nous donnent pour équation de la ligne méridienne de la surface engendrée par la rotation de la ligne (7) autour de l'axe des z:

$$\frac{x_0}{z_0}=\cos\omega\,.\operatorname{tang} i,$$

qui représente une droite. Si donc α est le demi-angle au sommêt du cône contenant l'hélice osculatrice, on a: $\operatorname{tang}\alpha=\cos\omega\operatorname{tang} i$, c'est-à-dire:

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{\rho'}{\frac{\rho}{r}\sqrt{1+\rho'^2+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}. \tag{9}$$

En désignant par O le sommet du cône, on peut aisément calculer la longueur OA; en effet si l'on étale le cône sur un plan, l'hélice l devient une spirale logarithmique coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle θ. Par conséquent:

$$\mathrm{OA}=\sigma\,.\cos\theta=\frac{\rho}{\rho'}\,\frac{\sqrt{\rho'^2+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\sqrt{1+\rho'^2+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

Si OB est l'axe du cône contenant l'hélice osculatrice et AB la perpendiculaire à l'axe menée par A, le triangle rectangle OAB nous donne:

$$(10)\quad AB = OA \, . \sin\alpha = \frac{\rho}{\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right\}\left\{1+\rho'^2+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right\}}}$$

$$(11)\qquad OB = OA \, . \cos\alpha = \frac{\rho}{\rho'}\,\frac{\frac{\rho}{r}}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

La droite AB forme avec la normale principale commune à la ligne donnée et à l'hélice osculatrice le même angle que le rayon vecteur de la spirale forme avec la normale à cette courbe; si l'on désigne cet angle par ε, on a:

$$(12)\qquad \text{tang}\,\varepsilon = \cot\omega = \frac{\rho'}{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}.$$

Si donc on regarde la courbe osculatrice l comme tracée sur le cône, on a:

«Le cône de révolution contenant l'hélice cylindro-conique osculatrice à une ligne quelconque L est défini par les conditions suivantes:

l'axe du cône rencontre la droite AB menée dans le plan perpendiculaire à la droite rectifiante et inclinée sur la normale principale de l'angle ε donné par l'égalité (12);

la distance AB entre le point de rencontre B et le point de contact A est donnée par (10);

l'axe du cône est parallèle à la droite rectifiante et le sommet O a du point B une distance OB donnée par (11);

le demi-angle α au sommet est exprimé por (9).»

Si au contraire on regarde la courbe osculatrice comme tracée sur le cylindre, on a:

«Le cylindre contenant l'hélice cylindro-conique osculatrice à une ligne quelconque L est défini de la manière suivante:

les génératrices rectilignes sont parallèles à la droite rectifiante;

la section droite du cylindre est une spirale logarithmique coupant les rayons vecteurs issus du pôle sous l'angle ω tel que:

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}}{\rho'};$$

le pôle de cette spirale est le point B déterminé précédement.»

Au moyen de ces théorèmes on peut construire, à chaque point d'une courbe L, l'hélice cylindro-conique osculatrice.

5. Helice circulaire osculatrice. — L'hélice circulaire est définie par les deux équations:

$$\varphi = a, \ \Psi = b,$$

a et b étant des constantes; on peut donc vérifier la première des équations (1) et des (2), qui dans notre cas deviennent:

$$a = \rho, \ b = r.$$

L'hélice circulaire osculatrice l et la ligne osculée L ont 3 points consécutifs communs et les égalités que l'on vient d'écrire démontrent que la droite rectifiante de l, c'est-à-dire la génératrice rectiligne du cylindre circulaire passant au point de contact, coïncide avec la droite rectifiante de L.

D'autre part la section droite du cylindre a le centre sur la ligne de striction de la surface gauche des normales principales de L.

Donc «l'hélice circulaire osculatrice à une courbe donnée L est tracée sur un cylindre circulaire dont l'axe est la plus courte distance entre deux normales principales consécutives de L; elle coupe les génératrices rectilignes sous l'angle i défini par la relation:

$$\cot i = \frac{\rho}{r}.$$

Ce théorème sert pour la construction de l'hélice dont il s'agit.

Courbes tracées sur une sphère ou sur un plan

6. Théorème fondamental. — Soient A, A_1, A_2,... et a, a_1, a_2,... des points consécutifs de deux lignes sphériques L, l définies par l'expression de leurs rayons de courbure géodésique:

$$\rho = \rho(s), \quad \varphi = \varphi(\sigma)$$

en fonction de l'arc.

Si les points a, a_1, a_2 coïncident avec A, A_1, A_2, les deux lignes ont en A et a le même rayon de courbure géodésique.

Si réciproquement $\rho = \varphi$ aux points A, a, on peut déplacer la ligne l sur la sphère jusqu'à la coïncidence des points a, a_1 avec A, A_1; et puisque l'égalité entre les rayons de courbure géodésique entraîne l'égalité des rayons sphériques, les trois points a, a_1, a_2 coïncident avec A, A_1, A_2.

Lorsque a, a_1, a_2, a_3 coïncident avec A, A_1, A_2, A_3, les rayons de courbure géodésique des lignes L, l en (A, a) et (A_1, a_1) sont égaux.

Si, réciproquemment, ces conditions sont remplies, lorsque les lignes L, l sont disposées de manière que a, a_1, a_2 coïncident avec A, A_1, A_2, on a aussi la coïncidence des points a_3, A_3, puisque l'égalité des rayons de courbure géodésique en A_3, a_3 équivaut à celle des rayons sphériques en ces points.

Si l'on suit un procédé analogue, on arrive au théorème général:

«La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes sphériques l, L, placées sur une même sphère, puissent être disposées de façon que les n points consécutifs $a, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ de l coïncident avec les n points consécutifs $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ de L, est que les rayons de courbure géodésique de la ligne l aux points $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-3}$ soient égaux aux rayons de courbure géodésique de la ligne L aux points $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-3}$».

La coïncidence de n points consécutifs de l avec les n points consécutifs correspondants de L est donc exprimée par les équations suivants:

$$\varphi_a = \rho_a;\ \varphi_{a_1} = \rho_{A_1};\ \varphi_{a_2} = \rho_{A_2};\ \ldots\ \varphi_{a_{n-3}} = \rho_{A_{n-3}};$$

et si l'on applique ici des considérations analogues à celles dont on a fait usage au § 1, dans une pareille circonstance, on arrive au théorème.

«La condition necessaire et suffisante pour que les lignes l, L tracées sur une même sphère et définies par les équations:

$$\varphi = \varphi(\sigma),\quad \rho = \rho(s)$$

exprimant leurs rayons de courbure géodésique en fonction de l'arc, puissent être placées de façon que les n points consécutifs $a, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ de l coïncident avec les n points consécutifs $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ de L, est qu'aux points de contact a, A soient vérifiées les $(n-2)$ équations suivantes entre les fonctions φ, ρ:

$$(13)\quad \varphi(\sigma)=\rho(s);\ \varphi'(\sigma)=\rho'(s);\ \varphi''(\sigma)=\rho''(s); \ldots \varphi^{(n-3)}(\sigma)=\rho^{(n-3)}(s).$$

Remarque. — Le théorème que l'on vient de démontrer peut aussi s'appliquer aux lignes planes, pourvu que l'on désigne par φ e ρ les rayons de courbure ordinaire des lignes considérées l, L.

7. Hélice sphérique osculatrice. — Si l'on désigne par Φ,

Ψ, σ les rayons de courbure et de torsion et l'arc d'une hélice sphérique, on a:

$$R^2=\Phi^2+\Psi^2\left(\frac{d\Phi}{d\sigma}\right)^2;\ \Psi=\Phi\operatorname{tang} i,$$

R étant le rayon de la sphère et i l'inclinaison de la courbe sur les génératrices rectilignes du cylindre. On dérive d'ici:

$$\Phi=\sqrt{R^2-\sigma^2\cot^2 i},\ \Psi=\operatorname{tang} i\sqrt{R^2-\sigma^2\cot^2 i}$$

et par conséquent le rayon de courbure géodésique φ est donné par l'égalité:

$$\varphi(\sigma)=\frac{R\sqrt{R^2\operatorname{tang}^2 i-\sigma^2}}{\sigma}.$$

Si l'on désigne par ρ le rayon de courbure géodésique de la ligne osculée L, les deux premières équations (13) deviennent:

$$\frac{R\sqrt{R^2\operatorname{tang}^2 i-\sigma^2}}{\sigma}=\rho;\ -\frac{R^3\operatorname{tang}^2 i}{\sigma^2\sqrt{R^2\operatorname{tang}^2 i-\sigma^2}}=\rho',$$

d'où l'on déduit:

$$\operatorname{tang} i=\frac{(R^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{R^2\rho\rho'};\ \sigma=-\frac{R^2+\rho^2}{\rho\rho'}.$$

Ces équations suffisent pour la détermination de l'hélice osculatrice dans sa position par rapport à la courbe donnée.

Les rayons de courbure géodésique ρ_1, φ_1 des développées sphériques L_1, l_1 des lignes L, l sont exprimés par les équations (*):

$$\rho_1 = R^3 \frac{\rho\rho'}{(R^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad \varphi_1 = R^3 \frac{\varphi\varphi'}{(R^2+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et puisque, au point de contact, $\varphi = \rho$, $\varphi' = \rho'$, on a ici: $\varphi_1 = \rho_1$.

La développée géodésique l_1 de l'hélice sphérique l est donc un petit cercle, dont le rayon de courbure géodésique est égal à celui de L_1; on conclut que l_1 est le cercle osculateur de la ligne L_1.

Donc «sur une sphère quelconque l'hélice osculatrice à une ligne L est une des développantes géodésiques du cercle osculateur de la ligne L_1 dévéloppée géodésique de L.»

8. Spirale logarithmique osculatrice. — Une telle courbe est définie par l'équation:

$$\varphi(\sigma) = \sigma . \cot i,$$

i étant l'angle constant sous lequel la ligne coupe les rayons vecteurs issus du pôle.

On peut vérifier les deux premières équations (13):

$$\sigma . \cot i = \rho, \quad \cot i = \rho'$$

qui donnent:

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \cot i = \rho'.$$

Ces équations définissent la spirale logarithmique osculatrice à la ligne plane donnée, quel que soit le point de contact.

(*) Sur les lignes sphériques, § II, formule (2'). — Ce Journal, 1889.

Si l'on remarque que le produit $\rho\rho'$ est égal au rayon de courbure ρ_1 de la ligne L_1 développée de L, on peut écrire:

$$\cot i = \frac{\rho'}{\rho},$$

d'où le théorème «le pôle de la spirale logarithmique osculatrice à une ligne plane quelconque L est placé sur la droite qui joint le point de contact au centre de deuxième courbure de L.»

Ce remarque permet de trouver le pôle de la spirale logarithmique osculatrice, à l'aide d'une construction géométrique très facile.

9. Cycloïde osculatrice. — L'équation caractéristique de la cycloïde est:

$$\varphi(\sigma) = \sqrt{a^2 - \sigma^2},$$

$\frac{1}{2}a$ étant le diamètre du cercle générateur et l'origine des arcs étant au sommet de la ligne. Les équations:

$$\sqrt{a^2 - \sigma^2} = \rho, \quad -\frac{\sigma}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} = \rho',$$

correspondant aux conditions $\varphi = \rho$, $\varphi' = \rho'$, nous donnent:

$$a = \rho\sqrt{1 + \rho'^2}; \quad \sigma = -\rho\rho';$$

d'où, en remarquant que $\rho\rho'$ est le rayon de courbure de la développée de L:

$$a = \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2}.$$

Donc «le diamètre du cercle générateur de la cycloïde osculatrice à une ligne plane quelconque L au point A est la moitié de la droite joignant A au centre correspondant de deuxième courbure de L.»

Soient A un point quelconque de L, A_1 et A_2 le centre de première et de deuxième courbure de L, A_0 le contre de la droite AA_1. La base de la cycloïde est une droite passant par A_0; et lorsque le cercle générateur, en roulant sur la base, arrive à la position qui correspond au point de contact A, il touche la base au point A_0.

Si, dans cette position particulière du cercle, on désigne par B l'extrémité du diamètre du cercle générateur passant par A_0 et par C le point de rencontre de la base de la cycloïde avec AA_2, le triangle rectangle AA_0B (étant $A_0B = \frac{1}{2} AA_2$, à cause du théorème précédent) nous donne:

$$\cos(AA_0B) = \frac{AA_0}{A_0B} = \frac{AA_1}{AA_2}.$$

Donc il est:

$$\sin(AA_0C) = \cos(AA_0B) = \frac{AA_1}{AA_2}.$$

E puisque le triangle AA_1A_2 donne:

$$\sin(AA_2A_1) = \frac{AA_1}{AA_2},$$

il résulte:

$$A\hat{A}_0C = A\hat{A}_2A_1;$$

et la droite A_0C est perpendiculaire à AA_2.

Donc «la base de la cycloïde osculatrice à une ligne quelconque au point A passe par le centre du rayon de courbure en A et sa direction est perpendiculaire à celle de la droite qui joint A au centre de deuxième courbure de L.»

Si l'on remarque que le rayon de courbure de la cycloïde au point de contact est égal à celui de la ligne donnée, les théorèmes que l'on vient de démontrer suffisent à la détermination de la cycloïde osculatrice à une ligne plane quelconque, à l'aide d'une construction géométrique très simple.

Parme, août, 1891.

SOBRE A CONVERGENCIA DOS PRODUCTOS INFINITOS

(Extracto de uma carta dirigida a F. Gomes Teixeira)

POR

J. BRUNO DE CABEDO

(Professor na Universidade de Coimbra)

1.º Seja

$$p=(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ldots$$

um producto infinito, onde $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ representam quantidades reaes e positivas.

Designando por p_n o producto dos n primeiros factores, tem-se

$$p=p_1+(p_2-p_1)+\ldots+(p_n-p_{n-1})+\ldots$$

$$=p_1+\sum_2^\infty(p_n-p_{n-1})=p_1+\sum_2^\infty p_{n-1}\,a_n,$$

d'onde se tira, substituindo successivamente os factores p_{n-1} por p_1 e p_n,

$$\left.\begin{aligned} p&>p_1+p_1\sum_2^\infty a_n\\ p&<p_1+p\sum_2^\infty a_n \end{aligned}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} p > p_1(1+\sum\limits_2^\infty a_n) \\[2ex] p < \dfrac{p_1}{1-\sum\limits_2^\infty a_n} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

suppondo que é $\sum\limits_2^\infty a_n < 1$.

A ultima das relações (1) demonstra pois a convergencia de p, quando for convergente a serie $\sum\limits_2^\infty a_n$ e o seu valor menor que a unidade.

Se a serie $\sum\limits_2^\infty a_n$ é convergente mas não se tem $\sum\limits_2^\infty a_n < 1$, existe um numero inteiro e positivo j para o qual da serie $\sum\limits_{j+1}^\infty a_n < 1$ se deduz a convergencia de

$$p' = (1 + a_j)(1 + a_{j+1}) \ldots$$

e portanto do producto proposto

$$p = p_{j-1}\, p'.$$

Attendendo agora á primeira das relações (1) póde enunciar-se a proposição seguinte:

É condição necessaria e sufficiente para que o producto p seja convergente que a serie $\sum\limits_1^\infty a_n$ o seja.

2.º Se $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ designam quantidades reaes ou imaginarias, pondo

$$|a_n| = \alpha_n, \;\; \pi_n = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_n),$$

vê-se que da convergencia de

$$\pi = \pi_1 + \sum_{2}^{\infty} \pi_{n-1}\, \alpha_n$$

se deduz a convergencia de

$$p = p_1 + \sum_{2}^{\infty} p_{n-1}\, a_n,$$

por ser $$|p_{n-1}| \overline{\overline{\lt}}\, \pi_{n-1}.$$

Logo, se o producto π é convergente, tambem é convergente o producto p.

BIBLIOGRAPHIA

Maurice d'Ocagne. — Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Paris, 1891.

Eis um livro bem interessante para os mathematicos e bem util para os engenheiros. Tracta n'elle o auctor dos *abacos*, isto é, dos quadros graphicos em que por meio de certas curvas, construidas antecipadamente, se representam sobre um plano equações que ligam quantidades submettidas ao calculo, de modo a obter as incognitas, dadas por aquellas equações, por meio de uma simples leitura feita n'aquelle quadro. O uso dos abacos é por isso da maior vantagem em todas as questões, em que é necessario effectuar um numero consideravel de vezes o mesmo calculo numerico com dados differentes.

Graças aos trabalhos dos srs. Lallane, Lallemand, Colignon e do proprio sr. Ocagne, o uso dos abacos está já bastante espalhado entre os engenheiros francezes, que têm reconhecido as suas grandes vantagens em muitas questões. Não existia porém uma obra em que a sua theoria fosse completa e methodicamente estudada; por isso o sr. M. d'Ocagne fez um importante serviço, publicando sobre ella o presente livro. As qualidades que se junctam no auctor de geometra e engenheiro dão-lhe uma competencia especial para os assumptos d'esta natureza; por isso o seu trabalho é excellente, quer se considere pelo lado da Geometria pura, quer se considere pelo lado practico.

O assumpto é distribuido em seis capitulos, de cujo assumpto vamos dar uma rapida noticia.

No capitulo 1.º o auctor mostra como se fórma o abaco correspondente a uma equação de tres variaveis $F_0(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ que resulta da eliminação de x e y entre tres equações da fórma

$$F_1(x, y, \alpha) = 0, \quad F_2(x, y, \beta) = 0, \quad F_3(x, y, \gamma) = 0.$$

Como as funcções F_1, F_2 e F_3 podem ser escolhidas de uma infinidade de maneiras diversas, quando F_0 é dada, o auctor tracta em seguida de procurar as fórmas mais simples para aquellas funcções, e de determinar a fórma que deve ter F_0 para que $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ representem linhas rectas.

No capitulo 2.° faz o auctor applicação dos principios geraes estudados no capitulo 1.° á construcção de alguns abacos. Considera assim o abaco da multiplicação e divisão, o abaco da equação trinomia do terceiro gráo, o abaco dos muros de supporte para um massiço de terra prefilado segundo o seu talude natural, etc.

No capitulo 3.° são estudados os abacos correspondentes ao caso em que as equações $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ representam tres systemas de rectas parallelas. Ahi são considerados os trabalhos de Lallemand a respeito do methodo do indicador transparente, do uso das escalas lineares, dos abacos hexagonaes, etc.

Como applicação vem n'este capitulo os abacos para o calculo dos prefis de aterros a desaterros.

No capitulo 4.° são considerados os abacos que correspondem ao caso de $F_1=0$, $F_2=0$, $F_3=0$ representarem tres systemas de rectas não parallelas. Este caso leva o sr. Ocagne a considerar um novo systema de abacos por elle imaginados, em que as rectas representadas por aquellas equações são substituidas por simples escalas. Para fazer o estudo d'estes abacos emprega o auctor o seu methodo das *coordenadas parallelas*, de que se deu noticia na pag. 30 do tom. VI d'este jornal. Entre as applicações encontra-se o abaco de equação completa do terceiro gráo.

Nos capitulos 5.° e 6.° são emfim considerados alguns abacos de equações com mais de tres variaveis. Depois de algumas considerações e principios geraes sobre estes abacos, são considerados os abacos dos juros compostos, da impulsão de terras, das equações do terceiro, quarto e quinto gráo, etc.

Por esta rapida noticia vê-se quanto interesse offerece o livro excellente que vem de publicar o sr. Ocagne e de quão grande utilidade póde ser aos engenheiros. Accrescentaremos ainda que o livro é terminado por oito estampas, muito bem gravadas, contendo os principaes abacos mencionados no texto.

W. Herkness. — The solar parallax and its related constants, etc., Washington, 1891.

Esta importante memoria foi publicada como appendice ás *Washington Observations for 1885*. A parallaxe sollar não é uma constante independente, mas sim uma constante dependente de outras muitas, que são a parallaxe lunar, as massas da terra e da lua, a relação do tempo solar e lunar, as constantes de aberração, nutação, etc. Por isso o auctor julga preferivel á determinação isolada da parallaxe solar a determinação simultanea de todas estas constantes, combinando as equações pelo methodo dos menores quadrados. É esta determinação que o sr. Herkness faz no seu trabalho, e acha asssim para valor da parallaxe solar o numero $8 \cdot 80905'' \pm 0 \cdot 00567''$. Não indicaremos aqui os numeros que acha para valores das outras constantes.

G. Floquet. — Notice sur Émile Mathieu (Bulletin de la Société des sciences de Nancy, 1891).

E. Mathieu nasceu em Metz a 15 de agosto de 1835 e morreu em Nancy a 19 de outubro de 1890. Era na occasião da sua morte professor na Faculdade de sciencias d'esta ultima cidade. Publicou muitos trabalhos importantes, entre os quaes sobresahe o seu *Traité de Physique mathématique*, que infelizmente ficou incompleto. O sr. Floquet na sua interessante noticia faz o elogio d'este sabio illustre e dá informações sobre os trabalhos que publicou.

Gino Loria. — Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche (Rivista di Matematica, 1891).

Eis um trabalho muito util e muito interessante. Contém a historia das demonstrações, que têem sido apresentadas, do theorema fundamental da theoria das equações. Ao mesmo tempo o auctor faz a critica d'estas demonstrações, analysando os defeitos das que são viciosas, ligando as que derivam de um principio commum, etc.

Annuaire pour l'an 1892, publié par le Bureau des Longitudes (*Paris, Gauthier-Villars et Fils*, 1fr,50).

Além das informações practicas que contém cada anno, o *Annuaire du Bureau des Longitudes* para 1892 contém artigos devidos aos sabios mais illustres sobre as Moedas, a Geographia, a Mineralogia, etc., e finalmente as noticias seguintes:

Noticia sobre a 3.ª reunião da Commissão internacional permanente, para a execução photographica da Carta celeste, no Observatorio de Paris, em abril de 1892, pelo contra-Almirante Mouchez. — *Noticia sobre a Lua e sua acceleração secular*, por F. Tisserand. — *Sessão da Associação geodesica internacional, celebrada em Florença, em 8 de outubro de 1891*, por A. Bouquet de la Grye. — *Os Observatorios de montanha. Um Observatorio no Monte Branco*, por J. Janssen. — *Sobre a Mira do Observatorio de Nice*, por A. Cornu. — *Discursos pronunciados na inauguração da estatua de Borda, em Dax, a 24 de maio de 1891*, por A. Bouquet de la Grye e Vice-Almirante Paris.

J. A. Serrasqueiro. — Tratado elementar de Arithmetica, 10.ª edição. Coimbra, 1891.

—— *Tratado elementar de Trigonometria e Noções de Geometria analytica, 4.ª edição. Coimbra 1891.*

G. de Longchamps. — Exposition de la théorie des intégrateurs (*Progreso Matematico*, t. I).

O auctor expõe n'este artigo, debaixo de uma fórma geometrica inteiramente elementar, a theoria dos integradores.

—— *Développements sur les paraboles de M. Artzt* (*Progreso Matematico*, t. I).

Dá-se o nome de parabola de Artz a toda a parabola que passa por dois dos vertices de um triangulo e é tangente aos lados que unem estes dois vertices ao terceiro. O sr. Longchamps no seu interessante artigo estuda as propriedades d'estas parabolas.

Vincenzo Reina. — *Sulle linee conjugate di una superficie* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890*).

Com este titulo apresenta o auctor duas Notas muito interessantes. N'ellas tracta do estudo de algumas fórmas differenciaes, importantes na Geometria das superficies, que resultam de exprimir por coordenadas curvilineas os elementos

$$ds^2, \quad \frac{ds^2}{\rho}, \quad -\frac{ds^2}{\tau}, \quad d\sigma^2,$$

e da interpretação geometrica dos seus parametros differenciaes de primeira ordem.

—— *Di alcune formule relative alla teoria delle superficie* (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890*).

O auctor estuda n'esta bella Nota as consequencias de seis equações ás derivadas parciaes, a que satisfazem os cosenos directores da normal a qualquer superficie e as coordenadas do ponto da superficie pelo qual se tira esta normal. Entre estas consequencias notam-se duas expressões notaveis da *curvatura Gaussiana*.

T. W. Backhouse. — *The structure of the sideral Universe, Sunderland, 1891.*

Este opusculo, publicado pelo *West Hendon House Observatory* (*Sunderland*), contém as observações sobre a structura das nebulosas feitas pelo auctor durante nove annos n'este Observatorio.

G. Pirondini. — *Sulle linee d'ombra di alcune superficie* (*Giornale di Battaglini*, t. XXIX).

O auctor estuda no seu bello trabalho as linhas de sombra dos helicoides, das superficies regradas que admittem cone director de revolução, das superficies parallelas, etc.

L. Kronecker. — *Ueber eine Stelle in Jacobis Aufsatz. «Observatiunculai ad theoriam aequationum pertinentes»* (*Journal für die reine und angwandte Mathematik*, t. 107).

—— *Ueber die Zeit un die Art der Entstehung der Jacobis Thetaformel* (*Item*, t. 108).

—— *Eine analytisch-arithmetische Formel* (*Item*).

—— *Reduction der Systeme von si ganzzahligen Elementen* (*Item*).

—— *Anwendung der Modulssysteme auf Fragen der Determinantentheoria* (*Item*).

—— *Bermerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale* (*Item*).

Todos estes artigos importantes foram publicados no *Journal für die reine und angwandte Mathematik*, do qual o auctor dirigia ultimamente a publicação. São os ultimos trabalhos com que Kronecker enriqueceu o seu jornal, pois que este grande mathematico a quem a Analyse, em especial a Algebra, e a Arithmetica superior devem brilhantes trabalhos, falleceu em Berlin no dia 29 de dezembro do anno que findou.

L. Niesten. — *A propos de la rotation de la planète Vénus* (*Bulletins de l'Académie R. de Belgique, 1891*.

Contém este trabalho algumas observações feitas pelo auctor no Observatorio de Bruxellas, para a determinação do periodo de rotação do planeta Venus. Havendo grande discordancia entre o periodo de rotação determinado por Vico, por muito tempo admittido na sciencia, e o periodo modernamente determinado por Schiaparelli, o auctor analysa e compara as suas observações e as feitas por outros astronomos inclinando-se a admittir o periodo de Vico.

D. Juan Durán y Loriga. — *Teoria elementar de las formas algebricas. Segovia, 1889.*

Este interessante opusculo foi escripto pelo auctor para servir aos alumnos que se quizerem preparar para entrar na Eschola preparatoria de Engenheiros e Architectos de Madrid. Contém por isso sómente a parte da theoria das fórmas algebricas necessaria para este fim.

O assumpto está distribuido por dez capitulos, em que o auctor tracta das substituições lineares, dos descriminantes, dos invariantes, das funcções jacobiana e hesseana, dos covariantes, dos contravariantes e concomitantes mixtos, dos emanantes e finalmente das fórmas canonicas.

A respeito de cada um d'estes pontos o auctor expõe os theoremas, regras e principios mais essenciaes, conservando-se sempre no ponto de vista elementar. Esta exposição é feita com a maior clareza e bom methodo, sendo por isso o livro muito proprio para servir de auxiliar a quem quizer tomar conhecimento da parte elementar de uma doutrina que tem tanta importancia na analyse moderna.

—— *Tres capitulos de Geometria superior. Coruña, 1891.*

Este opusculo foi escripto pelo auctor para o mesmo fim que o anterior. Por isso contém as doutrinas de Geometria superior exigidas pelos programmas de admissão á Eschola de Engenheiros e Architectos de Madrid. As mesmas qualidades de clareza, precisão e bom methodo que se notam no livro a que anteriormente nos referimos, notam-se ainda no presente opuscnlo.

Como o titulo do opusculo mesmo indica, contém elle tres capitulos, sendo estudadas no primeiro as relações anharmonicas de quatro pontos em linha recta e de quatro rectas formando um feixe; no segundo a relação harmonica de quatro pontos em linha recta ou de quatro rectas formando feixe; e no terceiro a homographia e a involução.

G. Bigourdan. — Nébuleuses nouvelles découvertes à l'Observatoire de Paris (*Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, 1887 e 1891*).

Duas Notas apresentadas pelo sr. Bigourdan á Academia das sciencias de Paris em 1887 e 1891, que contêm a primeira uma lista de 102 nebulosas descobertas por este illustre astronomo no intervallo de 1884 a 1887, e a segunda uma lista de 142 nebulosas descobertas pelo mesmo astronomo no intervallo de 1887 a 1890.

Rodolpho Guimarães. — Sobre una escuadra cicloidal (*El Progreso matematico*, t. I).

—— *Sur une équerre cicloidale propre à effectuer la rectification des arcs de cercle* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIX).

Estas duas Notas contêm um resumo de um artigo publicado pelo sr. R. Guimarães no tom. VIII d'este jornal.

F. Engel. — Kleinere Beiträge zur Gruppentheorie (*Berichte der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaft, 1891*).

S. Lie. — Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen transformationsgruppen (*Item*).

Debaixo d'estes titulos estão comprehendidas quatro Notas do sr. Engel e duas do sr. Lie, todas relativas á theoria das transformações infinitesimaes, theoria creada por este eminente geometra e no estudo da qual tem tomado uma parte das mais importantes o sr. Engel.

Vincenzo Reina. — Di alcune proprità delle linee caratteristiche (*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1890*).

—— *Della compensazione nel problema di Hansen* (*Atti della R. Accademia di Torino, 1891*).

Vincenzo Reina. — *Sulla teoria della normali ad una superficie* (*Rend. della R. Accademia de Napoli, 1890*).

G. Vivanti. — *Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton* (*Bibliotheca mathematica, 1891*).

—— *Ancora sull'infinitezimo attuale* (*Rivista di Matematica*, t. I).

G. T.

NOTAS SOBRE A THEORIA DAS FUNCÇÕES ELLIPTICAS

POR

F. GOMES TEIXEIRA

I

Sobre o integral $\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$.

1. O integral

$$(1) \qquad u = \int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$$

tem uma importancia consideravel na theoria das funcções ellipticas, visto que leva pela inversão á funcção $z = p(u)$, introduzida pelo sr. Weierstrass, que representa um papel fundamental n'aquella theoria.

Supponhamos que as constantes g_2 e g_3 são reaes e que e_1, e_2 e e_3 representam as raizes da equação

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0.$$

Estas raizes podem ser todas reaes, e n'este caso supporemos $e_1 > e_2 > e_3$; ou podem ser uma real e duas imaginarias, e n'este caso supporemos que e_1 representa a raiz real. Em ambos os casos estas raizes satisfazem á condição

$$e_1+e_2+e_3=0.$$

Posto isto, a primeira questão a resolver, quando se estuda o integral (1), é mostrar que o integral tem um valor finito e determinado quando z varia desde e_1 até ∞; isto é, que, sendo $a>z>e_1$, o integral

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

tende para um limite finito e determinado quando a tende para o infinito, e que o integral (1) tende tambem para um limite finito e determinado quando z tende para e_1.

Para demonstrar esta proposição póde-se empregar um theoréma bem conhecido de calculo integral, que a dá com muita facilidade. Aqui vamos demonstral-a porém por uma analyse directa, que tem a vantagem de levar a algumas desegualdades interessantes.

I. Supponhamos primeiramente que as raizes e_1, e_2 e e_3 são reaes.

Por ser $e_2>e_3$ e

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=\int_z^a \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

temos evidentemente

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}<\int_z^a \frac{dx}{2(x-e_2)\sqrt{x-e_1}}.$$

Mas, pondo

$$t=\sqrt{x-e_1},$$

vem

$$\int \frac{dx}{(x-e_2)\sqrt{x-e_1}} = 2\int \frac{dt}{t^2+e_1-e_2} = \frac{2}{\sqrt{e_1-e_2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{x-e_1}{e_1-e_2}}.$$

Portanto

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}} < \frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a-e_1}{e_1-e_2}} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{z-e_1}{e_1-e_2}}\right]$$

$$< \frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{z-e_1}{e_1-e_2}}\right],$$

e *á fortiori*

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3-g_2\,x-g_3}} < \frac{\pi}{2\sqrt{e_1-e_2}}.$$

Logo o integral que entra no primeiro membro d'esta desigualdade, que cresce com a e não póde jámais exceder o segundo membro da mesma desegualdade, tende para um limite determinado

$$\int_z^\infty \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3-g_2\,x-g_3}},$$

quando a tende para o infinito; e este integral, que cresce quando z tende para e_1 sem poder tambem exceder o segundo membro da mesma desegualdade, tende para um limite determinado

(2) $$\omega = \int_{e_1}^\infty \frac{dx}{\sqrt{4\,x^3-g_2\,x-g_3}}.$$

II. No caso de serem imaginarias as raizes $e_2 = \alpha + i\beta$,

$e_3 = \alpha - i\beta$, as conclusões precedentes são ainda verdadeiras. É o que se tira da desegualdade

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_z^a \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]}}$$

$$< \int_z^a \frac{dx}{2(x-\alpha)\sqrt{x-e_1}} < \frac{\pi}{2\sqrt{e_1-\alpha}},$$

quando $e_1 > \alpha$, procedendo como no caso anterior.

Se porém é $\alpha \geqq e_1$, partiremos da decomposição

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_z^\eta \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} + \int_\eta^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

onde η representa uma quantidade qualquer comprehendida entre a e z e maior do que α, e das desegualdades

$$\int_z^\eta \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} < \int_z^\eta \frac{dx}{2\beta\sqrt{x-e_1}},$$

$$\int_\eta^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} < \int_\eta^a \frac{dx}{2(x-\alpha)\sqrt{x-e_1}} < \int_\eta^a \frac{dx}{2(x-\alpha)\sqrt{x-\alpha}},$$

e teremos a relação

$$\int_z^a \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} < \frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\eta - e_1} - \sqrt{z-e_1}\right]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\eta-\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{a-\alpha}} < \frac{1}{\beta}\sqrt{\eta-e_1} + \frac{1}{\sqrt{\eta-\alpha}},$$

6
7
15
3
59
2
41

da qual se tiram as conclusões enunciadas procedendo como no caso anterior.

2. O integral (2) tem grande importancia na theoria das funcções ellipticas, e a doutrina precedente dá um limite superior do seu valor. Temos, com effeito,

$$\omega < \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - e_2}},$$

se as raizes e_1, e_2 e e_3 são reaes; e

$$\omega < \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - \alpha}},$$

se as raizes e_2 e e_3 são imaginarias e é $\alpha < e_1$; e finalmente

$$\omega < \frac{1}{\beta}\sqrt{\eta - e_1} + \frac{1}{\sqrt{\eta - \alpha}},$$

se e_2 e e_3 são imaginarias e é $\alpha \geqq e_1$.

Por ser

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

temos $e_1 = -2\alpha$ e portanto as duas ultimas egualdades podem ser escriptas do modo seguinte

$$\omega < \frac{\pi}{2\sqrt{-3\alpha}}, \quad \alpha < 0$$

$$\omega < \frac{1}{\beta}\sqrt{\eta + 2\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\eta - \alpha}}, \quad \alpha \geqq 0.$$

Póde-se tambem achar facilmente um limite inferior do valor de ω. Se as raizes e_2 e e_3 são reaes, temos com effeito, por ser $e_2 > e_3$,

$$\omega > \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2(x-e_3)\sqrt{x-e_1}},$$

o que dá

$$\omega > \frac{\pi}{2\sqrt{e_1 - e_3}}.$$

Se as raizes e_2 e e_3 são imaginarias e é $\alpha \lesseqgtr e_1$, temos $x > \alpha$, e portanto

$$\omega = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]}}$$

$$> \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)\left[(x-\alpha)^2+\beta^2+2\beta(x-\alpha)\right]}},$$

o que dá

$$\omega > \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2(x-\alpha+\beta)\sqrt{x-e_1}},$$

ou, integrando e pondo $e_1 = -2\alpha$,

$$\omega > \frac{\pi}{2\sqrt{-3\alpha+\beta}}.$$

Se as raizes e_2 e e_3 são imaginarias e é $\alpha > e_1$, partindo da decomposição

$$\int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}} = \int_{e_1}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}} + \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

e das desegualdades

$$\int_{e_1}^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{e_1}^{\alpha} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]}}$$

$$> \int_{e_1}^{\alpha} \frac{dx}{2(x-\alpha-\beta)\sqrt{x-e_1}},$$

$$\int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]}}$$

$$> \int_{e_1}^{\infty} \frac{dx}{2(x-\alpha+\beta)\sqrt{x-e_1}},$$

cujos ultimos membros são integraveis por meio de funcções elementares, resolve-se a questão proposta, mas o resultado que se obtem n'este caso não é simples.

II

Sobre o theorema de addição da funcção $p(u)$

Halphen no seu *Traité des fonctions elliptiques* deduz o theorema de addição da funcção $p(u)$ por meio da consideração de um caso particular do theorema de Abel. Aqui vamos mostrar como se deduz este theorema por meio da integração da equação d'Euler

$$\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} + \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}} = 0.$$

Ponha-se

$$\Delta x = \sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3},\ \Delta y = \sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}$$

e

$$\frac{dx}{\Delta x} = -\frac{dy}{\Delta y} = dt,$$

o que dá

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3,$$

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = 12x^2 - g_2,$$

$$2\frac{d^2y}{dt^2} = 12y^2 - g_2.$$

Teremos

$$\frac{dx^2 - dy^2}{dt^2} = 4(x^3 - y^3) - g_2(x - y),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = 6(x^2 + y^2) - g_2.$$

Substituindo n'estas egualdades as variaveis x e y por outras p e q ligadas com x e y por meio das equações

$$x + y = p,\ x - y = q,$$

em

$$\frac{dp\,dq}{dt^2} = q\,(3\,p^2 + q^2) - g_2\,q,$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = 3\,(p^2 + q^2) - g_2,$$

e, eliminando g_2 entre estas equações,

$$q\,\frac{d^2 p}{dt^2} - \frac{dp\,dq}{dt^2} = -\,q^3,$$

ou

$$2\,\frac{q\,\dfrac{d^2 p}{dt^2}\,\dfrac{dp}{dt} - \left(\dfrac{dp}{dt}\right)^2 \dfrac{dq}{dt}}{q^3} = 4\,\frac{dp}{dt},$$

ou ainda

$$\frac{d\left[\dfrac{1}{q^2}\left(\dfrac{dp}{dt}\right)^2\right]}{dt} = 4\,\frac{dp}{dt}.$$

Integrando esta equação obtem-se o resultado

$$\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = 4\,p + C',$$

ou, substituindo p e q pelos seus valores em funcções de x e y,

$$\left(\frac{\Delta\,x - \Delta\,y}{x - y}\right)^2 = 4\,(x + y) + C',$$

C' representando uma constante arbitraria.

Esta equação representa o integral geral, obtido pela primeira vez por Euler, da equação proposta. O methodo que vem de ser empregado para o achar é devido a Lagrange.

Posto isto, para obter o theorema de addição de $p(u)$, notemos em primeiro logar que a equação proposta dá

$$\int_x^{\infty} \frac{dx}{\Delta x} + \int_y^{\infty} \frac{dy}{\Delta y} = \mathrm{C},$$

ou, determinando a constante C de modo que seja $y = z$ quando $x = \infty$,

$$(a) \qquad \int_x^{\infty} \frac{dx}{\Delta x} + \int_y^{\infty} \frac{dy}{\Delta y} = \int_z^{\infty} \frac{dz}{\Delta z},$$

onde

$$\Delta z = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}.$$

Por outra parte, o integral de Euler póde ser escripto do modo seguinte

$$\frac{4x\left[\left(1 - \frac{g_2 x + g_3}{4x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{\Delta y}{2x^{\frac{3}{2}}}\right]}{\left(1 - \frac{y}{x}\right)^2} = 4(x+y) + \mathrm{C}',$$

ou, desenvolvendo os binomios que entram no primeiro membro em serie,

$$4x\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{g_2 x + g_3}{4x^3} + \ldots - \frac{\Delta y}{z x^{\frac{3}{2}}}\right]\left[1 + 2\frac{y}{x} + \ldots\right]$$

$$= 4(x+y) + \mathrm{C}';$$

e esta egualdade dá, effectuando as operações e pondo depois $x=\infty$ e $y=z$,

$$C'=4z.$$

Quando pois se determina a constante que entra no integral de Euler pela condição de ser $y=z$ quando $x=\infty$, este integral toma a fórma

$$(b) \qquad z=\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta x-\Delta y}{x-y}\right)^2-x-y.$$

Pondo agora na egualdade (a),

$$u=\int_x^\infty \frac{dx}{\Delta x},\ v=\int_y^\infty \frac{dy}{\Delta y},$$

vem

$$u+v=\int_z^\infty \frac{dz}{\Delta z};$$

e portanto temos

$$x=p(u),\ y=p(u),\ z=p(u+v).$$

Temos porém

$$\Delta x=p'(u),\ \Delta y=p'(v).$$

Logo a formula (b) dá a egualdade

$$p(u+v)=\frac{1}{4}\left(\frac{p'(u)-p'(v)}{p(u)-p(v)}\right)^2-p(u)-p(v),$$

na qual consiste o theorema de addição da funcção $p(u)$.

III

Sobre algumas series

1. Uma questão relativa á theoria das funcções ellipticas leva a estudar as condições de convergencia das series

$$(1) \qquad \sum_c \frac{1}{(u-a_c)^\alpha},\ \alpha > 2$$

$$(2) \qquad \sum_c \left[\frac{1}{(u-a_c)^2} - \frac{1}{a_c^2}\right],$$

$$(3) \qquad \sum_c \left[\frac{1}{u-a_c} + \frac{1}{a_c} + \frac{u}{a_c^2}\right],$$

onde a_c representa os numeros que se obtêm dando a n e m os valores

$$\left.\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

na expressão

$$a_c = 2\,n\,\omega_1 + 2\,m\,\omega_2,$$

ω_1 *e* ω_2 representando duas quantidades taes que o quociente $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ tenha a parte imaginaria differente de zero.

Para estudar estas series basear-nos-hemos, como se faz ordinariamente, no lemma seguinte cuja demonstração é bem conhecida.

A serie

$$\sum \frac{1}{(2\,n\,\omega_1 + 2\,m\,\omega_2)^2}$$

é absolutamente convergente quando é $\alpha > 2$ e a parte imaginaria do quociente $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ é differente de zero.

Mas para d'elle tirar as condições de convergencia das series propostas seguiremos um novo caminho.

Para tractar simultaneamente as tres series propostas, vamos considerar a serie:

$$\text{(A)} \qquad \Sigma \frac{f(c, u)}{(u - a_c)^\alpha},$$

e mostrar que *esta serie é absoluta e uniformemente convergente em qualquer área* A *que não contenha ponto algum dos que são representados por* a_c, *se for* $\alpha > 2$ *e existir um numero* L *que o módulo de* f (c, u) *não possa exceder quando* n *e* m *variam desde* 0 *até* ∞ *e* u *passa por todos os valores representados por pontos da área* A.

Com effeito, por ser, na área A, u differente de a_c, existe um numero l a que a quantidade

$$\left|1 - \left|\frac{u}{a_c}\right|\right|^\alpha$$

não póde ser inferior, e porisso temos

$$\frac{|f(c, u)|}{\left|1 - \left|\frac{u}{a_c}\right|\right|^\alpha} < \frac{L}{l};$$

e por ser convergente a serie

$$\frac{L}{l} \Sigma \left|\frac{1}{a_c^\alpha}\right| = \frac{L}{l} \Sigma \frac{1}{|2n\,\omega_1 + 2m\,\omega_2|^\alpha},$$

a cada valor da quantidade positiva δ, por mais pequeno que seja, corresponde um numero t_1 tal que a desigualdade

$$\frac{\mathrm{L}}{l} \sum_{c=t}^{t+p} \left|\frac{1}{a_c^{\alpha}}\right| < \delta$$

é satisfeita pelos valores de t superiores a t_1, qualquer que seja p.

Logo teremos, quando $t > t_1$,

$$\sum_{c=1}^{t+p} \left|\frac{1}{a_c^{\alpha}}\right| \frac{|f(c,u)|}{\left|1-\left|\frac{u}{a_c}\right|\right|^{\alpha}} < \delta;$$

depois

$$\sum_{c=1}^{t+p} \left|\frac{1}{a_c^{\alpha}}\right| \frac{|f(c,u)|}{\left|1-\frac{u}{a_c}\right|^{\alpha}} < \delta,$$

por ser

$$1 = \left|1-\frac{u}{a_c}+\frac{u}{a_c}\right| \overline{\overline{<}} \left|1-\frac{u}{a_c}\right| + \left|\frac{u}{a_c}\right|,$$

ou

$$\left|1-\frac{u}{a_c}\right| \geqq 1 - \left|\frac{u}{a_c}\right|;$$

e finalmente

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left|\frac{f(c,u)}{(u-a_c)^{\alpha}}\right| < \delta.$$

D'esta desegualdade conclue-se que a serie (A) é absoluta e uniformemente convergente no interior da área A.

2. D'este theorema tira-se como corollario que as series (1), (2) e (3) são absoluta e uniformemente convergentes na área A.

Para considerar a serie (1) basta pôr em (A) $f(c,u)=1$.

A serie (2) póde ser reduzida á fórma

$$\sum_{c=0}^{\infty} \frac{u(2a_c - u)(u - a_c)}{a_c^2 (u - a_c)^3},$$

e a sua convergencia demonstra-se por meio do theorema anterior pondo

$$f(c, u) = \frac{u(2a_c - u)(u - a_c)}{a_c^2} = u\left(2 - \frac{u}{a_c}\right)\left(\frac{u}{a_c} - 1\right)$$

e notando que $|f(c, u)|$ não póde augmentar indefinidamente quando n e m crescem desde 0 até ∞ e u passa por todos os pontos da área A.

A serie (3) póde ser reduzida á fórma

$$\sum_{c=0}^{\infty} \frac{u^2 (u - a_c)^2}{a_c^2 (u - a_c)^3},$$

e n'este caso podemos pôr

$$f(c, u) = \left(\frac{u}{a_c}\right)^2 (u - a_c)^2 = u^2 \left(\frac{u}{a_c} - 1\right)^2,$$

e demonstra-se ainda a sua convergencia por meio do theorema anterior.

IV

Desenvolvimento de $p(u)$ em serie de fracções simples

1. A formula que dá o desenvolvimento de $p(u)$ em serie de fracções simples póde ser obtida por meios inteiramente elementares, como fez Halphen na sua obra já citada. Póde ser tambem obtida de uma maneira menos elementar mas mais rapida por meio d'alguns theoremas da theoria das funcções analyticas.

Supporemos demonstrado que $p(u)$ é uma funcção analytica uniforme, que é par, que é duplamente periodica, e que os seus infinitos são os pontos

$$a_c = 2n\omega_1 + 2m\omega_2,$$

n e m reprcsentando dois numeros inteiros quaesquer e $2\omega_1$ e $2\omega_2$ os periodos de $p(u)$.

Demonstremos em primeiro logar a egualdade

$$\lim_{u=a_c} (u-a_c)^2 p(u) = 1.$$

Consideremos para isso o integral que serve de definição a $p(u)$

$$u = \int_z^\infty \frac{dx}{\Delta x} = \int_z^\infty \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}},$$

o qual dá

$$u = \frac{1}{2}\int_z^\infty x^{-\frac{3}{2}}\left(1-\frac{e_1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{e_2}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{e_3}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

e, desenvolvendo em serie os binomios,

$$u = \frac{1}{2}\int_z^\infty (x^{-\frac{3}{2}} + \mathrm{A}x^{-\frac{5}{2}} + \mathrm{B}x^{-\frac{7}{2}} + \ldots)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z}}\left(1 + \frac{\mathrm{A}}{3} z^{-1} + \frac{\mathrm{B}}{5} z^{-2} + \ldots\right).$$

Logo temos, pondo $z = p(u)$ e elevando os dois membros d'esta egualdade ao quadrado,

$$u^2 p(u) = 1 + \frac{2A}{3} p^{-1}(u) + \ldots,$$

o que dá, por ser $p(0) = \infty$,

$$\lim_{u=0} u^2 p(u) = 1.$$

Por ser a_c um periodo de $p(u)$, tira-se d'esta egualdade

$$\lim_{u=a_c} (u-a_c)^2 p(u) = \lim_{u=0} u^2 p(u+a_c) = \lim_{u=0} u^2 p(u) = 1.$$

Posto isto, por ser $p(u)$ uma funcção uniforme e por ser a_c um dos seus infinitos, temos na visinhança do ponto a_c (em virtude do theorema de Laurent),

$$p(u) = \ldots + \frac{A_3}{(u-a_c)^3} + \frac{A_2}{(u-a_c)^2} + \frac{A_1}{u-a_c} + P(u-a_c),$$

$P(u-a_c)$ representando uma serie ordenada segundo as potencias inteiras e positivas de $u-a_c$, e $A_1, A_2, A_3, \ldots$ representando quantidades constantes.

Mas, devendo ser

$$\lim_{u=a_c} (u-a_c)^2 p(u) = 1,$$

temos

$$\lim_{u=a_c} \left[A_2 + \frac{A_3}{u-a_c} + \frac{A_4}{(u-a_c)^2} + \ldots \right] = 1,$$

o que dá

$$A_2 = 1, \ A_3 = 0, \ A_4 = 0, \ldots$$

Por outra parte, por ser a_c um periodo de $p(u)$, temos na visinhança do ponto $u = 0$,

$$p(u) = p(u + a_c) = \frac{1}{u^2} + \frac{A_1}{u} + P(u),$$

e esta egualdade mostra que é $A_1 = 0$.

Substituindo estes valores de $A_1, A_2, \ldots$ na expressão anterior de $p(u)$ vem a egualdade

$$p(u) = \frac{1}{(u - a_c)^2} + P(u - a_c),$$

que tem logar na visinhança do ponto a_c e que dá

$$p'(u) = -\frac{2}{(u - a_c)^3} + P'(u - a_c).$$

Baseados n'esta egualdade vamos resolver a questão proposta.

Vimos com effeito na *Nota* anterior que a funcção $\varphi(u)$ definida pela serie

$$\varphi(u) = -\Sigma \frac{2}{(u - a_c)^3}$$

é uniformemente convergente; é pois natural comparar a funcção $p'(u)$ com a funcção $\varphi(u)$ definida por esta serie.

Para fazer esta comparação notemos em primeiro logar que $\varphi(u)$ admitte derivadas de todas as ordens, finitas em todos os pontos differentes de a_c, e dadas pelas relações

$$\varphi'(u) = \Sigma \frac{2.3}{(u-a_c)^4},$$

$$\varphi''(u) = -\Sigma \frac{2.3.4}{(u-a_c)^5},$$

. . . .

visto que estas series são todas uniformemente convergentes.

Nos pontos differentes de a_c, como as duas funcções $p'(u)$ e $\varphi(u)$ admittem derivadas finitas, a funcção $p'(u)-\varphi(u)$ tambem admitte derivadas finitas.

Na visinhança do ponto a_j, j representando um valor qualquer de c, teremos

$$\varphi(u) + \frac{2}{(u-a_j)^3} = -\Sigma' \frac{2}{(u-a_c)^3}$$

(devendo no segundo membro d'esta egualdade excluir-se j dos valores dados a c), e

$$p'(u) = -\frac{2}{(u-a_j)^3} + P'(u-a_j);$$

portanto

$$p'(u) - \varphi(u) = P'(u-a_j) + \Sigma' \frac{2}{(u-a_c)^3},$$

onde o segundo membro admitte derivadas de todas as ordens finitas no ponto a_j.

Logo a funcção $p'(u)-\varphi(u)$ admitte derivadas de todas as ordens, finitas em todo o plano, e é portanto uma funcção holomorpha de u, que representaremos por $P_1(u)$.

Temos pois

$$p'(u) = \mathrm{P}_1(u) - \Sigma \frac{2}{(u-a_c)^3}.$$

Resta determinar a funcção $\mathrm{P}_1(u)$.

Notemos para isso que a funcção $\varphi(u)$ é periodica e que os seus periodos são os de $p'(u)$.

Com effeito, mudando em $a_c = 2n\omega_1 + 2m\omega_2$, n em $n+n_1$ e m em $m+m_1$, vem

$$\varphi(u) = -\Sigma \frac{2}{[u-2(n+n_1)\omega_1 - 2(m+m_1)\omega_2]^3}$$

e mudando depois u em $u + 2n_1\omega_1 + 2m_1\omega_2$,

$$\varphi(u+2n_1\omega_1+2m_1\omega_2) = -\Sigma \frac{2}{(u-2n\omega_1-2m\omega_2)^3} = \varphi(u).$$

Logo a funcção holomorpha $\mathrm{P}_1(u)$ é duplamente periodica e portanto, em virtude de um theorema de theoria das funcções duplamente periodicas bem conhecido, é egual a uma constante C.

Temos pois

$$p'(u) = \mathrm{C} - \Sigma \frac{2}{(u-a_c)^3}.$$

Para determinar C basta pôr n'esta egualdade $u=\omega_1$, e attender ás egualdades

$$p'(\omega_1) = 0,\ \Sigma \frac{2}{[(2n-1)\omega_1 + 2m\omega_2]^3} = 0,$$

a segunda das quaes resulta de a cada termo de somma corresponder outro egual e de signal contrario, que se obtem mudando $2n-1$ em $-(2n-1)$ e m em $-m$.

Vem d'este modo

$$C=0.$$

Temos pois

$$p'(u)=-\Sigma\frac{2}{(u-a_c)^3},$$

onde é

$$a_c=2n\omega_1+2m\omega_2,\quad \left.\begin{matrix}n\\m\end{matrix}\right\}=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots.$$

D'esta egualdade tira-se o desenvolvimento de $p(u)$ integrando entre os limites 0 e u os seus dois membros.

Temos d'este modo, separando o termo correspondente a $m=0$ e $n=0$,

$$\int_0^u\left[p'(u)+\frac{2}{u^3}\right]du=\Sigma\left[\frac{1}{(u-a_c)^2}-\frac{1}{a_c^2}\right],$$

ou

$$p(u)-\frac{1}{u^2}-\lim_{u=0}\left[p(u)-\frac{1}{u^2}\right]=\Sigma\left[\frac{1}{(u-a_c)^2}-\frac{1}{a_c^2}\right].$$

Mas, por ser, na visinhança do ponto $u=0$,

$$p(u)=\frac{1}{u^2}+a_0+a_1u+\ldots,$$

e

$$p'^2(u)=4p^3(u)-g_2p(u)-g_3,$$

podemos substituir n'esta segunda egualdade $p(u)$ e $p'(u)$ pelos seus desenvolvimentos dados pela primeira e pela sua derivada, e egualar os coefficientes das mesmas potencias de u nos dois membros do resultado. Acha-se d'este modo que $a_0 = 0$.

Logo

$$\lim_{u=0} \left[p(u) - \frac{1}{u^2} \right] = 0.$$

Temos pois

$$(1) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + \Sigma \left[\frac{1}{(u-a_c)^2} - \frac{1}{a_c^2} \right],$$

onde

$$a_c = 2n\omega_1 + 2m\omega_2, \quad \left.\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots,$$

excluindo a combinação $n = 0$, $m = 0$.

É esta formula que pretendiamos achar.

2. A formula que vimos de achar póde servir tambem para definir a funcção $p(u)$.

Querendo-se tractar d'este modo a theoria das funcções ellipticas, é necessario tirar do desenvolvimento (1) as propriedades da funcção $p(u)$. É o que vamos fazer.

1. A simples inspecção da formula (1) mostra que a funcção $p(u)$ é *meromorpha* e que os seus pólos são os pontos

$$2n\omega_1 + 2m\omega_2;$$

que é

$$(2) \qquad p(-u) = p(u);$$

e que é

$$(3) \qquad \lim_{u=0} \left[p(u) - \frac{1}{u^2} \right] = 0.$$

II. A funcção $p(u)$ é duplamente periodica e os seus periodos são $2\omega_1$ e $2\omega_2$.

Para demonstrar esta proposição consideremos primeiramente a serie que resulta de derivar (1) (onde se introduz o termo $-\frac{2}{u^3}$ na somma Σ):

$$p'(u) = -\Sigma \frac{2}{(u - 2n\omega_1 - 2m\omega_2)^3}.$$

Mudando n em $n_1 + n$ e m em $m_1 + m$, vem

$$p'(u) = -\Sigma \frac{2}{[u - 2(n + n_1)\omega_1 - 2(m + m_1)\omega_2]^3};$$

e, mudando depois u em $u + 2n_1\omega_1 + 2m_1\omega_2$,

$$p'(u + 2n_1\omega_1 + 2m_1\omega_2) = -\Sigma \frac{2}{(u - 2n\omega_1 - 2m\omega_2)^3}.$$

Logo

$$p'(u + 2n_1\omega_1 + 2m_1\omega_2) = p'(u).$$

Integremos agora a equação

$$p'(u + 2n_1\omega_1 + 2m_1\omega_2)\, du = p'(u)\, du,$$

e teremos

$$p(u + 2n_1\omega_1 + 2m_1\omega_2) = p(u) + C,$$

C representando uma constante. Para a determinar ponha-se

$$u = -(n_1\omega_1 + m_1\omega_2);$$

o que dá

$$p(-n_1\omega_1 - m_1\omega_2) = p(n_1\omega_1 + m_1\omega_2) - C,$$

e portanto $$C = 0.$$

Temos pois

$$p(u + 2n_1\omega_1 + 2m_1\omega_2) = p(u),$$

que é o que se queria demonstrar.

III. Das egualdades (1), (2) e (3) conclue-se que a funcção $p(u)$ póde ser desenvolvida em serie por meio do theorema de Laurent, e que este desenvolvimento tem a fórma

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + a_2u^2 + a_4u^4 + \ldots \tag{4}$$

IV. A funcção $p(u)$ satisfaz a uma equação da fórma

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3.$$

Para demonstrar (*) esta proposição notemos primeiramente que as funcções duplamente periodicas

$$p'^2(u),\ 4p^3(u) - g_2p(u),$$

as quaes têm um unico pólo $u = 0$ n'um dos parallelogrammos

(*) Esta demonstração e a seguinte são tiradas de um artigo que a este respeito publicámos no *Bulletin des sciences mathématiques* de Paris, (tom. XXVII, 1892).

dos periodos, dão, na visinhança do ponto $u=0$,

$$p'^2(u) = \left[-\frac{2}{u^2} + 2a_2u + 4a_4u^3 + \dots\right]^2$$

$$= \frac{4}{u^6} - \frac{8a_2}{u^2} - 16a_4 + \dots,$$

$$4p^3(u) - g_2p(u) = 4\left[\frac{1}{u^2} + a_2u^2 + a_4u^4 + \dots\right]^3$$

$$- g_2\left[\frac{1}{u^2} + a_2u^2 + a_4u^4 + \dots\right]$$

$$= \frac{4}{u^6} + \frac{12a_2 - g_2}{u^2} + 12a_4 + \dots.$$

Logo, se posermos

$$12a_2 - g_2 = -8a_2,$$

a differença

$$p'^2(u) - [4p^3(u) - g_2p(u)]$$

não tem o pólo $u=0$, e esta differença é portanto (em virtude de um theorema da theoria das funcções duplamente periodicas bem conhecido) constante.

Temos pois

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2p(u) - g_3,$$

representando a constante por $-g_3$. Para a determinar, substitua-se $p'^2(u)$, $p^3(u)$ e $p(u)$ pelos seus valores, tirados de (4), e ponha-se $u=0$; teremos assim

$$g_3 = 28a_4.$$

Logo $p(u)$ satisfaz a uma equação da fórma

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3$$

onde é

$$g_2 = 20a_2, \quad g_3 = 28a_4.$$

v. Para demonstrar o theorema de addição da funcção $p(u)$ consideremos as duas funcções

$$F_1(u) = p(u+v)[p(u) - p(v)]^2,$$

$$F_2(u) = \frac{1}{4}[p'(u) - p'(v)]^2 - [p(u) + p(v)][p(u) - p(v)]^2,$$

que, considerando v como constante e u como variavel, são funcções periodicas de u que admittem os mesmos periodos $2\omega_1$ e $2\omega_2$.

A primeira funcção admitte o pólo $u=0$; e, substituindo $p(u)$ pelo desenvolvimento (4) e $p(u+v)$ pelo desenvolvimento

$$p(u+v) = p(v) + up'(v) + \frac{1}{2}u^2 p''(v) + \ldots,$$

onde

$$p''(v) = 6p^2(v) - \frac{1}{2}g_2 = 6p^2(v) - 10a_2,$$

$$p'''(v) = 12p(v)p'(v),$$

temos, na visinhança d'este pólo,

$$F_1(u) = \frac{p(v)}{u^4} + \frac{p'(v)}{u^3} + \frac{p^2(v) - 5a_2}{u^2} + \frac{0}{u} + \ldots.$$

A funcção $F_2(u)$ dá do mesmo modo

$$F_2(u) = \frac{p(v)}{u^4} + \frac{p'(v)}{u^3} + \frac{p^2(v) - 5a_2}{u^2} + \frac{0}{u} + \ldots$$

Logo a differença $F_1(u) - F_2(u)$ não contém o pólo 0, nem em virtude da sua periodicidade pólo algum, e temos

$$F_1(u) - F_2(u) = C.$$

Para determinar a constante C ponha-se $u = v$, e teremos

$$F_1(v) = 0, \quad F_2(v) = 0,$$

e portanto $$C = 0.$$

Logo

$$p(u+v)[p(u) - p(v)]^2$$

$$= \frac{1}{4}[p'(u) - p'(v)]^2 - [p(u) + p(v)][p(u) - p(v)]^2,$$

d'onde resulta o theorema de addição da funcção $p(u)$

$$p(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}\right)^2 - p(u) - p(v).$$

VI. A egualdade

$$p'(u) = -\Sigma \frac{2}{(u - 2n\omega_1 - 2m\omega_2)^3}$$

dá, pondo $u = \omega_1$,

$$p'(\omega_1) = \Sigma \frac{2}{[(2n-1)\omega_1 + 2m\omega_2]^3}.$$

Se notarmos agora que a cada termo d'esta somma corresponde outro egual e de signal contrario, que se obtém mudando $2n-1$ em $-(2n-1)$ e m em $-m$, podemos escrever

$$p'(\omega_1)=0.$$

Do mesmo modo se mostra que é

$$p'(\omega_2)=0.$$

D'estas egualdades e da egualdade

$$p'^2(u)=4p^3(u)-g_2 p(u)-g_3$$

conclue-se que $p(\omega_1)$ e $p(\omega_2)$ são raizes da equação

$$4p^3(u)-g_2 p(u)-g_3=0.$$

VII. A expressão de $p(u)$ mostra que $p(u)$ não soffre alteração quando se muda o signal a uma ou a ambas as quantidades ω_1 e ω_2. A mesma expressão mostra que $p(u)$ é uma funcção *homogenea* do gráo -2 de u, ω_1 e ω_2; e temos

$$p(su,\ s\omega_1,\ s\omega_2)=\frac{1}{s^2}p(u,\ \omega_1,\ \omega_2)$$

$$=\frac{1}{s^2}p(u,\ -\omega_1,\ \omega_2)=\frac{1}{s^2}p(u,\ -\omega_1,\ -\omega_2).$$

V

Sobre a funcção $\zeta(u)$

Designa-se por $\zeta(u)$ a funcção definida pela serie absoluta e uniformemente convergente

$$(5) \qquad \zeta(u) = \frac{1}{u} + \Sigma\left[\frac{1}{u-a_c} + \frac{1}{a_c} + \frac{u}{a_c^2}\right],$$

onde a_c representa os numeros que resultam de dar a n e a m os valores

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \infty,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \infty$$

em

$$a_c = 2\,n\,\omega_1 + 2\,m\,\omega_2,$$

excluindo a combinação $n = 0, m = 0$.

Da definição de $\zeta(u)$ deduzem-se immediatamente as propriedades d'esta funcção.

I. Derivando a serie que define $\zeta(u)$ e comparando o resultado com a serie que define $p(u)$, vem

$$(6) \qquad \frac{d\zeta(u)}{du} = -p(u).$$

II. Da expressão analytica de $\zeta(u)$ resulta immediatamente que a funcção $\zeta(u)$ é regular em todo o plano, excepto nos pontos 0 e a_c que são pólos.

III. Como a cada valor de a_c corresponde outro igual e de signal contrario, a expressão de $\zeta(u)$ não muda de valor quando se muda a_c em $-a_c$. Mudando em seguida u em $-u$ torna a apparecer a mesma expressão com signal contrario. Logo temos $\zeta(-u) = -\zeta(u)$.

A funcção $\zeta(u)$ é pois impar.

IV. Da fórmula (5) tira-se immediatamente a egualdade.

$$\lim_{u=0}\left[\zeta(u) - \frac{1}{u}\right] = 0. \tag{7}$$

V. A funcção $\zeta(u)$ tem um theorema de addição, que se deduz do theorema de addição da funcção $p(u)$, como vamos ver.

O theorema de addição da funcção $p(u)$ dá, como vimos,

$$p(u+v) - p(u-v) = -\frac{p'(u)\,p'(v)}{[p(u)-p(v)]^2}$$

e portanto

$$p(u+v)\,du - p(u-v)\,du = -\frac{p'(u)\,p'(v)\,du}{[p(u)-p(v)]^2}.$$

Integrando os dois membros d'esta igualdade, vem

$$\zeta(u-v) - \zeta(u+v) = \frac{p'(v)}{p(u)-p(v)} + C,$$

C representando uma constante arbitraria que se póde determinar pondo $u=0$, o que dá, attendendo ás igualdades $\zeta(-v) = -\zeta(v)$ e $p'(0) = \infty$, $C = -2\zeta(v)$.

Temos pois

$$\zeta(u-v) - \zeta(u+v) = \frac{p'(v)}{p(u)-p(v)} - 2\zeta(v).$$

..

Mudando n'esta igualdade u em v e v em u, vem

$$\zeta(u-v)+\zeta(u+v)=\frac{p'(u)}{p(u)-p(v)}+2\zeta(u).$$

D'esta relação e das precedentes deduzem-se as igualdades

$$(8) \qquad \zeta(u\pm v)=\frac{1}{2}\frac{p'(u)\mp p'(v)}{p(u)-p(v)}+\zeta(u)\pm\zeta(v),$$

nas quaes consiste o theorema de addição da funcção $\zeta(u)$.

VI. A relação

$$p(u\pm 2\omega_1)=p(u)$$

dá (I).

$$\zeta(u\pm 2\omega_1)=\zeta(u)+C,$$

onde C representa uma constante, que se determina pondo $u=\pm\omega_1$, o que dá $C=\pm 2\zeta(\omega_1)$.

Logo, pondo para simplificar $\zeta(\omega_1)=\eta_1$, temos

$$(9) \qquad \zeta(u\pm 2\omega_1)=\zeta(u)\pm 2\eta_1.$$

Do mesmo modo se acha a igualdade

$$(10) \qquad \zeta(u\pm 2\omega_2)=\zeta(u)\pm 2\eta_2,$$

onde

$$\eta_2=\zeta(\omega_2).$$

VI

Sobre a funcção $\sigma(u)$

Formemos por meio do theorema de Weierstrass as funcções inteiras cujas raizes são os pólos de $p(u)$, isto é o ponto **0** e os pontos a_c, e cujos graus de multiplicidade das raizes são iguaes á unidade. Teremos

$$f(u) = e^{\varphi(u)}\, u \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{a_c}\right) e^{S_c},$$

$$S_c = \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k} \left(\frac{u}{a_c}\right)^2,$$

m_c devendo ser determinado pela condição de ser convergente a serie

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{u^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|.$$

Ora já vimos que esta serie é convergente quando $m_c = 2$, e temos portanto a formula

$$f(u) = e^{\varphi(u)}\, u \prod \left(1 - \frac{u}{a_c}\right) e^{\frac{u}{a_c} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a_c^2}}$$

que dá todas as funcções que satisfazem ás condições enunciadas.

A mais simples d'estas funcções corresponde a $\varphi(u) = 0$, e é esta que se representa por $\sigma(u)$. Temos pois

$$(11) \qquad \sigma(u) = u \prod \left(1 - \frac{u}{a_c}\right) e^{\frac{u}{a_c} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a_c^2}},$$

onde

$$a_c = 2\,n\,\omega_1 + 2\,m\,\omega_2, \quad \left.\begin{matrix} n \\ m \end{matrix}\right\} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Da igualdade (11) tiram-se as propriedades da funcção $\sigma(u)$.

I. A funcção $\sigma(u)$ é inteira e as suas raizes são 0 e os numeros a_c.

II. Derivando o logarithmo de $\sigma(u)$ e comparando o resultado com a igualdade (5) vem

$$\frac{d \log \sigma(u)}{du} = \zeta(u). \tag{12}$$

III. Quando u tende para zero, temos

$$\lim \frac{\sigma(u)}{u} = 1.$$

IV. Se notarmos que a cada valor de a_c corresponde outro igual e de signal contrario, podemos escrever a formula (11) do modo seguinte:

$$\sigma(u) = u\,\Pi\left(1 + \frac{u}{a_c}\right) e^{\frac{u}{a_c} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{a_c^2}}.$$

Mudando n'esta igualdade u em $-u$ e comparando o resultado com (11) vem $\sigma(-u) = -\sigma(u)$. Logo a funcção $\sigma(u)$ é impar.

V. Da relação (12) e da relação

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) = \frac{p'(u)}{p(u) - p(v)}$$

deduz-se

$$\frac{d}{du} \log \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)} = \frac{d}{du} \log\left[p(u) - p(v)\right],$$

e portanto

$$C \frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)} = p(u) - p(v),$$

onde C representa uma constante que se determina multiplicando os dois membros d'esta igualdade por u^2 e fazendo depois tender u para 0, o que dá

$$-C\,\sigma^2(v) \lim \frac{u^2}{\sigma^2(u)} = \lim u^2 p(u) = 1,$$

e portanto

$$C = -\frac{1}{\sigma^2(v)}.$$

Temos portanto

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)} = p(v) - p(u). \tag{13}$$

Esta formula importante representa para a funcção $\sigma(u)$ o papel que o theorema de addição representa para as funcções $\zeta(u)$ e $p(u)$.

VI. Da relação

$$\zeta(u \pm 2\omega_1) = \zeta(u) \pm 2\eta_1$$

tira-se

$$\frac{d}{du} \log \frac{\sigma(u \pm 2\omega_1)}{\sigma(u)} = \pm 2\eta_1,$$

e portanto

$$\frac{\sigma(u \pm 2\omega_1)}{\sigma(u)} = e^{\pm 2\eta_1 u + C},$$

onde C representa uma constante que se determina pondo

$$u = \mp \omega_1,$$

o que dá

$$\sigma(u \pm 2\omega_1) = -e^{\pm 2\eta_1 (u \mp \omega_1)}\,\sigma(u).$$

Para o periodo ω_2 tem logar uma igualdade analoga que so tira d'esta, mudando ω_1 em ω_2.

VII. Das propriedades da funcção $\sigma(u)$ notaremos finalmente a seguinte:

$$\sigma(a-b)\,\sigma(a+b)\,\sigma(c-d)\,\sigma(c+d)$$
$$+\sigma(b-c)\,\sigma(b+c)\,\sigma(a-d)\,\sigma(a+d)$$
$$+\sigma(c-a)\,\sigma(c+a)\,\sigma(b-d)\,\sigma(b+d)=0,$$

conhecida pelo nome de equação dos tres termos, que se verifica facilmente substituindo os productos

$$\sigma(a-b)\,\sigma(a+b),\ \sigma(c-d)\,\sigma(c+d),\ldots$$

pelos seus valores em funcção de $p(a)$, $p(b)$, etc., dados pela igualdade (13).

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A F. GOMES TEIXEIRA

PAR

M. D'OCAGNE

... Permettez moi de revenir sur le problème d'Algèbre dont j'ai insére une solution dans votre Journal en 1887 (vol. VIII, p. 171). J'ai donné depuis, dans *l'American Journal of Mathematics* (vol. XIII, n.° 2; 1890), une solution plus simples de ce problème. Voici le résultat auquel je suis alors parvenu:

Si on met le polynôme

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

sous la forme

$$F(x) = b_0 + b_1 x + b_n x(x-1) + \dots + b_n x(x-1)\dots(x-(n-1)),$$

on a

$$b_p = K_p^p a_p + K_{p+1}^p a_{p+1} + K_{p+2}^p a_{p+2} + \dots + K_p^p a_p.$$

Dès lors l'expression de h_p, dans la note que j'ai rappelée plus haut, peut être écrite

$$h_p = K_p^p a_p - K_{p+1}^p a_{p+1} + \dots\dots + (-1)^{h-p} K_p^p a_n.$$

Par identification de cette expression avec celle donnée à l'endroit cité (*Jornal*, 1887, p. 173), on a cette propriété remarquable des nombres K^p_n.

$$[1-(-1)^{n-p}]K^p_n = C^p_n K^p_p p^{n-p} - C^p_{n-1} K^p_{p+1} \frac{n}{p+1} p^{n-p-1}$$

$$+ C^p_{n-2} K^p_{p+2} \frac{(n-1)n}{(p+2)(p+1)} p^{n-p-2}$$

$$- \ldots + (-1)^{n-p-1} C^p_{p+1} \frac{p(p-1)\ldots(n-1)n}{(n+1)n\ldots(p+2)(p+1)}.$$

Cette formule fait connaître K^p_p en fonction de tous les nombres qui le précèdent dans la colonne du triangle arithmétique de définition, mais seulement *lorsque la différence* n — p *est impaire.*

Récemment, M. Laisant est revenu sur le même problème dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* (t. XX, p. 6). Il a obtenu pour b_p l'expression symbolique suivante

$$b_p = \frac{1}{p!}[\varphi - 1]^p,$$

avec cette convention que dans le développement du second membre φ^m doit être remplacé par $\varphi(m)$, et, en particulier, φ^0 par $\varphi(0)$. Comparant cette expression avec celle écrite plus haut, on en déduit la formule rappelée dans ce Journal (1887, p. 171) qui fait connaître la valeur de K^p_n en fonction de ses indices...

BIBLIOGRAPHIA

J. de Mendizábal Tamborrel. — *Tables des logarithmes à huit décimales des nombres de 1 à 125000, et des fonctions goniometriques, etc.* — *Paris, 1891.*

As novas taboas de logarithmos, que vem de publicar o illustre engenheiro geographo sr. Mendizábal Tamborrel, distinguem-se das outras taboas de logarithmos, que existem, em que o auctor, na parte relativa aos logarithmos das funcções trigonometricas, tomou para unidade, na medida dos angulos, o angulo que corresponde a uma circumferencia (a que dá o nome de *gono*), e adoptou o systema decimal para as divisões e subdivisões d'este angulo (*decigono*, *centigono*, etc.). Este modo de escolher a unidade de medida dos angulos tem grandes vantagens em Astronomia, como fez notar Wilarceau, de que até aqui se não podia tirar partido por causa da falta de taboas de logarithmos apropriadas. É esta falta que o sr. Tamborrel vem de supprir com a sua importante obra.

A nova collecção de taboas de logarithmos contém os logarithmos dos numeros desde 1 até 125000, com oito decimaes, e os logarithmos dos senos, cosenos, tangentes e cotangentes de centimilligone em centimilligone e de microgone em microgone, com oito decimaes para os 25000 microgonos, e com sete decimaes para os seguintes.

Os logarithmos dos numeros desde 1 até 10800 foram extrahidos pelo auctor das taboas de Callet e de Schrön. As taboas dos numeros desde 108000 até 125000 e as taboas dos logarithmos das funcções trigonometricas foram calculados pelo sr. Tamborrel.

Para tornar mais correctas as suas taboas, o auctor comparou-as com as de Prony e com as *Tables du service géographique* publicadas em França. Esta comparação levou-o tambem a descobrir alguns erros que existem n'estas duas ultimas collecções de taboas.

Para verificar as suas taboas trigonometricas comparou o auctor os logarithmos dos senos, calculados directamente, com os numeros que resultam de sommar os logarithmos dos cosenos e das tangentes, numeros que tambem havia calculado directamente.

A impressão da nova collecção de taboas foi feita em França, e é nitida e perfeita, como é essencial em obras d'esta natureza. O cuidado com que o auctor as calculou e as verificações a que as submetteu são garantia de sua exactidão.

Os astronomos e engenheiros serão, estamos certos d'isso, bem gratos ao sr. Tamborrel pela obra util que vem de publicar, tanto mais que esta obra é o fructo de um trabalho consideravel.

Henri Padé. — Premières leçons d'Algèbre élémentaire. — Paris, (Gauthier-Villars), 1892.

Contém este excellente opusculo a parte da Algebra elementar que se refere á theoria dos numeros negativos e ás operações sobre os polynomios, sendo destinado um capitulo a cada um d'estes assumptos.

O capitulo destinado á theoria dos numeros negativos é escripto com rigor e clareza taes, que o aconselharemos vivamente aos professores dos nossos Lyceus para lhes servir de modelo na exposição d'esta doutrina. Não conhecemos na verdade livro algum elementar em que ella melhor e mais completamente seja apresentada.

Para tractar a theoria d'estes numeros, o auctor affecta cada numero, considerado em valor absoluto, de um indice p ou n segundo o numero é positivo ou negativo, define e estuda as operações sobre os numeros assim considerados, e mostra finalmente que se chega aos mesmos resultados supprimindo estes indices e affectando os numeros dos signaes $+$ e $-$, attribuindo a estes signaes um duplo sentido. Depois de constituir assim a theoria dos numeros negativos, faz o sr. Padé applicação d'esta theoria ás grandezas concretas, considerando os exemplos classicos conhecidos.

No capitulo destinado á theoria dos polynomios, o auctor tracta dos polynomios inteiros relativos a uma ou mais variaveis. Estuda as propriedades d'estes polynomios relativas ás operações fundamentaes, mostrando a analogia d'estas propriedades com as propriedades dos numeros inteiros demonstradas na Arithmetica.

O livro é precedido de um prefacio do sr. J. Tannery, em que este sabio professor, ao mesmo tempo que faz o elogio do trabalho do sr. Padé, apresenta observações cheias de interesse sobre o ensino dos pontos de Algebra, considerados n'aquelle trabalho.

John Gray. — *Les machines électriques à influence.* — *Paris, 1892* (*Livraria Gauthier-Villars,* 5 fr.)

Esta obra, escripta pelo auctor em inglez, foi muito bem acolhida em Inglaterra. Porisso o sr. G. Pelissier a traduziu em francez, enriquecendo-a ao mesmo tempo de notas importantes e completando-a por meio de um Appendice em que se acham algumas informações omittidas pelo sr. Gray ou posteriores á apparição da edição ingleza.

A presente obra é a primeira, especialmente consagrada á theoria e á historia das machinas electricas de influencia, que apparece.

Divide-se em tres partes, na primeira das quaes se dá um resumo dos primeiros principios de electricidade statica; na segunda a historia das machinas electricas de influencia e a descripção das machinas de Varley, Toepler, Holtz, Wimshurst, W. Thompson, etc.; na terceira o meio de construir practicamente estas machinas.

M. Lerch. — *Sur une extension de la formule de Frullani* (*Bolletin da Academia bohemia de Praga, 1891*).

——— *Contribution à la théorie des fonctions elliptiques, des séries e des intégrales définies* (*Item*).

——— *Déduction nouvelle d'une formule de Legendre* (*Item*).

——— *Démonstration élémentaire de la formule asymptotique rélative aux polynômos de Legendre* (*Item*).

N'esta serie de artigos apresenta o sr. Lerch varios resultados importantes relativos ao calculo integral. Entre elles mencionaremos a formula seguinte:

$$\int_a^b [f(x) - f(\varphi)\,\varphi'(x)]\,dx = \mathrm{A}\log\varphi'(x) - \mathrm{B}\log\varphi'(b),$$

$$\mathrm{A} = \lim_{x=a}(x-a)f(x),\ \mathrm{B} = \lim_{x=b}(x-b)f(x),$$

que contém como caso particular a formula de Frullani; e o theorema seguinte:

Se $f(t)$ representar uma funcção uniforme no interior do circulo $|t| = 1$, não admittindo senão pólos simples $c_1, c_2 \ldots, c_m$ a que correspondem os residuos $R_1, R_2, \ldots, R_m$, e se a representar uma fracção positiva tal que o intervallo $(0\ldots a)$ não contenha nenhum d'aquelles pólos, temos

$$\int_0^{2a} f(e^{i\varphi})\,e^{\alpha i\varphi}(1 - 2a\cos\varphi + a^2)^{\beta-1}d\varphi$$

$$= 2\operatorname{sen}\beta\,\pi\int_0^a f(\varphi)\,t^{\alpha-\beta}(t-a)^{\beta-1}(1-at)^{\beta-1}dt$$

$$+ 2\pi\sum_{v=1}^{m}\mathrm{R}_v(1-ac_v)^{\beta-1}\left(1-\frac{a}{c_v}\right)^{\beta-1}c_v^{\alpha-1},$$

onde α representa um inteiro nullo ou positivo tal que a parte real de $\alpha - \beta$ seja superior a -1.

G. Loria. — *Esame di alcune richerche concernenti l'esistenza di radici nelle equasioni algebriche (Bibliotheca mathematica, 1891).*

N'este artigo o auctor resume e completa em alguns pontos o artigo de que se deu noticia na pag. 143 d'este volume.

M. Lerch. — *Uber eine characteristiche Eigenschaft der Gattungen von Geschlechte Null (Monatshefte für Mathematik,* t. II).

G. T.

FIM DO VOLUME X.

INDICE