JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

DR. F. GOMES TEIXEIRA

Professor na Academia Polytechnica do Porto,
antigo professor na Universidade de Coimbra,
socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa, etc.

VOLUME XIII

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1897

NOTE SUR CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

A. Gutzmer

(à Berlin)

Dans une note que j'ai publiée dans le t. cxv du «Journal für die reine und angewandte Mathematik», j'ai montré que les équations différentielles linéaires et homogènes provenant de la réitération d'une équation de premier ordre

$$p_0 \frac{dy}{dx} + p_1 y = 0 \tag{1}$$

sont identiques aux équations linéaires et homogènes remplies par les puissances des intégrales d'une équation linéaire de deuxième ordre. C'est une conséquence de ce fait que l'équation du deuxième ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + q_1 \frac{dy}{dx} + q_2 y = 0 \tag{2}$$

peut toujours être représentée comme la réitération d'une équation de premier ordre de la forme (1) (*) et que les équations obtenues par la réitération de l'équation (1) admettent les intégrales (**):

$$y_1 = e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx}, \quad y_2 = y_1 \int \frac{dx}{p_0}, \quad y_3 = y_1 \left[\int \frac{dx}{p_0}\right]^2, \ldots$$

$$(3) \qquad y_n = y_{n-1} \left[\int \frac{dx}{p_0}\right]^{n-1}.$$

On peut, comme je vais faire voir, présenter ce résultat encore sous un autre point de vue.

Les intégrales (3) peuvent être écrites encore sous cette forme:

$$y_1, \quad y_2 = y_1 . m(x), \quad y_3 = y_2 . m(x), \ldots \quad y_n = y_{n-1} . m(x),$$

où l'on a posé

$$m(x) = \int \frac{dx}{p_0};$$

elles se produisent donc d'une seule y_1 par la multiplication successive de y_1 par la même fonction $m(x)$.

Inversement il est clair que *les équations différentielles dont les intégrales possèdent la propriété que le quotient de deux intégrales*

(*) Voir mes «Bemerkungen über die Iteration linearer homogener Differentialgleichungen» Comptes rendus de la société tchéque des Sciences, Prague, 1892.

(**) l. c.; voir aussi ce Journal, t. x, 1891.

consécutives est toujours égal à la même fonction m(x), *sont des réitérations d'une équation de premier ordre de la forme* (1).

Car si l'on a les intégrales

(4) $$y_1, \quad y_1 . m(x), \quad y_1 . m^2(x), \quad y_1 . m^3(x), \ldots,$$

on peut toujours déterminer p_0 et p_1 par les équations

$$y_1 = e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx}, \quad \int \frac{dx}{p_0} = m(x),$$

ce qui donne

(5) $$p_0 = \frac{1}{m'(x)}, \quad p_1 = -\frac{1}{m'(x)} . \frac{y'_1}{y_1};$$

et il suit que les intégrales (4) satisfont à une équation provenant de la réitération de l'équation

(6) $$\frac{1}{m'(x)} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{m'(x)} . \frac{y'_1}{y_1} y = 0$$

et qui est déterminée aussitôt qu'on donne les valeurs de y_1 et de $m(x)$ (*).

(*) Il est à remarquer qu'il ne faut pas omettre le facteur commun $\frac{1}{m'(x)}$ dans l'équation du premier ordre, parce que le résultat de la réitération changerait et qu'on obtiendrait les intégrales y_1, $y_1 . x$, $y_1 . x^2$, ... au lieu des intégrales (4). Voir mes «Bemerkungen» dans les comptes rendus de Prague, p. 55.

En considérant maintenant une équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2}+q_1\frac{dy}{dx}+q_2y=0, \tag{7}$$

qui admet les intégrales fondamentales y_1 et y_2, on peut les mettre sous la forme

$$y_1 \quad \text{et} \quad y_1.m(x),$$

en posant

$$m(x)=\frac{y_2}{y_1}.$$

En introduisant cette valeur de $m(x)$ dans les expressions (5), on obtient:

$$\left\{\begin{aligned} p_0 &= \frac{y_1{}^2}{y_1y'_2-y'_1y_2}=y_1{}^2.e^{\int q_1dx}, \\ p_1 &= -y_1y'_1\,e^{\int q_1dx}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

ce qui est d'accord avec le résultat que nous avons obtenu d'une autre manière (*). On a donc immédiatement notre théorème (**) que *toute équation différentielle linéaire et homogène du second ordre peut être représentée comme la réitération d'une équation linéaire et homogène du premier ordre.*

Ces considérations s'étendent à l'équation linéaire d'ordre $n+1$ à laquelle satisfait la n^{me} puissance de l'intégrale générale de l'é-

(*) Voir: Comptes rendus de Prague, 1892, p. 57.
(**) l. c., p. 57.

quation (7), car les expressions

$$(9) \qquad y_1^n, \quad y_1^{n-1} y_2, \quad y_1^{n-2} y_2^2, \ldots, \quad y_1 y_2^{n-1}, \quad y_2^n,$$

qui forment un système fondamentale d'intégrales de l'équation d'ordre $n+1$, naissent de la première par la multiplication répétée avec le facteur $m(x) = \frac{y_2}{y_1}$. Il s'ensuit donc immédiatement que *l'équation d'ordre* $n+1$, *remplie par la* n^{me} *puissance de l'intégrale générale d'une équation linéaire du second ordre* (7), *doit être la réitération d'une équation linéaire du premier ordre:*

$$P_0 \frac{dy}{dx} + P_1 y = 0.$$

La détermination de P_0 et P_1 se fait par les équations

$$e^{-\int \frac{P_1}{P_0}} = y_1^n, \quad \int \frac{dx}{P_0} = \frac{y_2}{y_1},$$

qui donnent:

$$P_0 = p_0, \quad P_1 = np_1,$$

où p_0 et p_1 sont définis par les équations (8). Donc:
Si l'équation

$$(9) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + q_1 \frac{dy}{dx} + q_2 y = 0$$

est la réitération de l'équation

$$p_0 \frac{dy}{dx} + p_1 y = 0,$$

l'équation d'ordre n + 1 *remplie par la* n^{me} *puissance de l'intégrale de (7), est la réitération de l'équation*

$$p_0 \frac{dy}{dx} + np_1 y = 0.$$

C'est exactement le théorème que nous avons établi d'une autre manière dans le t. CXV du Journal für Mathematik.

On voit donc, que les équations différentielles provenant de la réitération d'une équation de premier ordre sont identiques à celles qui sont remplies par les puissances de l'intégrale d'une équation différentielle du second ordre, et à celles dont les intégrales se produisent d'une seule par la multiplication répétée avec la même fonction de la variable indépendante.

Ajoutons encore deux mots sur la réitération des équations non homogènes de premier ordre. Étant donnée l'équation

$$\text{(10)} \qquad D(y) = p_0 \frac{dy}{dx} + p_1 y = q,$$

on obtient par la réitération de l'opération D:

$$\text{(11)} \quad D^2(y) = p_0^2 \frac{d^2y}{dx^2} + p_0 (p_0' + 2p_1) \frac{dy}{dx} + (p_1^2 + p_0 p_1') y = D(q)$$

et généralement

$$(12) \qquad D^n(y) = D^{n-1}(q).$$

Comme l'intégrale générale de l'équation $D^n(y)=0$ est connue (expressions (3)), il reste seulement à déterminer l'intégrale supplémentaire de l'équation non homogène (12), ce qui peut se faire par la variation des constantes arbitraires. En considérant par exemple l'équation (11), il vient

$$y = e^{-\int \frac{p_1}{p_0} dx} \cdot \left\{ C_1 + C_2 \int \frac{dx}{p_0} - \int \frac{D(q)}{p_0} \cdot \int \frac{dx}{p_0} \cdot e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} . dx \right.$$
$$\left. + \int \frac{dx}{p_0} \cdot \int \frac{D(q)}{p_0} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx} . dx \right\}$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires et $D(q) = p_0 q' + p_1 q$.

Si q est elle-même une intégrale de l'équation $D(q)=0$, l'équation $D(y)=q$ est équivalente à l'équation homogène $D^2(y)=0$.

Ces équations $D^n(y) = D^{n-1}(q)$ fournissent donc une classe d'équations différentielles non homogènes intégrables par des quadratures.

Berlin, mai 1895.

LES QUARTIQUES Á TROIS POINTS DOUBLES D'INFLEXION (*)

(Extrait d'une lettre adressée à M. F. Gomes Teixeira)

PAR

M. P. H. Schoute

(Professeur à l'Université de Groningen)

1. En soumettant une conique C^2 à une transformation quadratique involutive aux trois points fundamentaux A, B, C on engendre une quartique rationnelle C^4 aux trois points doubles A, B, C.

Par rapport à la réalité du triangle A B C il y a deux cas à distinguer. Nous parlons d'une C^4 de première espèce si les trois points A, B, C sont réels et d'une C^4 de seconde espèce si le triangle A B C n'admet qu'un seul couple d'éléments opposés réel. Dans ces deux cas les exemples les plus simples de la transformation quadratique sont l'inversion isogonale et la transformation par rayons recteurs réciproques.

Par rapport au triangle de reférence A B C la transformation

(*) Traduction analytique de résultats obtenus par la géométrie (voir *Archiv. des Math. u. Physik*, série 2, tome 2, 3, 4, 6).

quadratique est répresêntée par

$$\lambda x_1 x_1' = \mu x_2' = \nu x_3 x_3',$$

où λ, μ, ν sont trois constantes.

De plus on a en forme symbolique

$$C^2 \equiv (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^{(2)} = 0,$$

$$C^4 \equiv \left(\frac{a_1}{\lambda x_1} + \frac{a_2}{\mu x_2} + \frac{a_3}{\nu x_3}\right)^{(2)} = 0.$$

Enfin des deux coniques

$$C_1^2 \equiv \left(\frac{\lambda x_1}{a_1} + \frac{\mu x_2}{a_2} + \frac{\nu x_3}{a_3}\right)^{(2)} = 0,$$

$$C_2^2 \equiv (\lambda \alpha_1 x_1 + \mu \alpha_2 x_2 + \nu \alpha_3 x_3)^{(2)} = 0,$$

où α_{11} α_{12}, etc., sont les mineurs du déterminant des a_{11}, a_{12}, etc., la première touche les trois couples de tangentes de C^4 aux points doubles, tandis que la seconde touche les tangentes de C^4 par ces points qui la touchent ailleurs.

2. Considérons le cas où A B C est triangle autopolaire de C^2. Alors la quartique a trois points doubles d'inflexion en A, B, C (théorème de Küpper) et les équations se simplifient. On trouve

$$C^2 = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0.$$

$$C^4 = \frac{a_{11}}{\lambda^2 x_1^2} + \frac{a_{22}}{\mu^2 x_2^2} + \frac{a_{33}}{\nu^2 x_3^2} = 0.$$

De plus les coniques C_1^2 et C_2^2 coïncident en

$$\frac{\lambda^2 x_1^2}{a_{11}} + \frac{\mu^2 x_2^2}{a_{22}} + \frac{\nu^2 x_3^2}{a_{33}} = 0.$$

Nous appelons cette conique, qui touche les tangentes d'inflexion sur les côtés de A B C, la *conique d'inflexion* de C^4; A B C en est un triangle autopolaire.

Il est possible de choisir la transformation quadratique de manière que la conique donnée C^2 et la conique d'inflexion de sa transformée C^4 se confondent ($\lambda = a_{11}$, $\mu = a_{22}$, $\nu = a_{33}$). Alors les tangentes à la conique d'inflexion par un des points fondamentaux se correspondent l'un à l'autre

3. Supposons A B C réel et C^4 donc de première espèce. D'un point S de la sphère décrite sur A B comme diamètre projetons la figure que nous occupe sur un plan parallèle à S A B. Alors la projection nous donne une conique C^2 à centre C dont CA_∞ et CB_∞ sont les axes de symétrie. Donc C, CA_∞, CB_∞ sont en même temps centre et axes de symétrie de la transformée C^4. Ainsi la quartique à trois points doubles d'inflexion réels (deux noeuds et un point isolé) a deux formes symétriques de première espèce. Car à mesure que C se trouve à l'intérieur ou à l'extérieur de la conique donnée, la projection est ellipse ou hyperbole. De ces deux quartiques symétriques l'une est la *kreuzcurve,* l'autre la *kohlenspitzencurve.*

Dans le permier cas on trouve

$$C^2 \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$C^4 \equiv \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0;$$

dans le second cas on a

$$C^2 \equiv \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$$

$$C^4 \equiv \frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} - 1 = 0.$$

Ces courbes admettent nne génération très simple. Elles sont les lieux du quatrième sommet R d'un rectangle C P R Q dont une des diagonales P Q touche la conique d'inflexion.

Les noms des courbes se rapportent à leur forme, kreuzcurve = courbe en forme d'un croix, kohlenspitzencurve = courbe en forme des deux charbons d'une lampe électrique.

4. Quand A B C ne possède que deux éléments opposés réels, la forme la plus symétrique de C^4 est celle de la lemniscate de Bernoulli (transformée par rayons vecteurs réciproques et podaire d'un hyperbole équilatère par rapport au centre); cette courbe forme la courbe symétrique de seconde espèce.

5. Par rapport à la courbe $C^4 \equiv \frac{a_{11}}{x_1^2} + \frac{a_{22}}{x_2^2} + \frac{a_{33}}{x_3^2} = 0$ on a les théorèmes suivants:

a) Les points de contact des six tangentes menées par un point quelconque Q (x_1, x_2, x_3) du plan se trouvent sur une conique C_q^2 représentée par

$$\Sigma\left[\left(a_{33} x^2 + a_{22} x_3^2\right) X_1^2\right] + \Sigma\left[a_{11} x_2 x_3 X_2 X_3\right] = 0.$$

b) Les points de contact des quatre tangentes menées par un point de C^4 se trouvent sur une droite (théorème de Emile Weyr).

c) La conique C_q^2 du point Q dégénère en deux droites si Q est un point de C^4 ou de sa conique d'inflexion. Dans le premier cas les deux droites dont se compose C_q^2 sont la tangente en Q à C^4 et la droite de Weyr qui touche la conique d'inflexion; dans le second cas les deux droites se coupent sur C^4 et elles enveloppent deux nouvelles coniques. Dans le cas particulier de la lemniscate ces nouvelles coniques s'obtiennent par une rotation de $\pm \frac{1}{3}\pi$ de la conique d'inflexion autour de son centre. Ces trois hyperboles équilatères sont les figures polaires réciproques les uns des autres par rapport à la troisième, etc.

6. En polarisant les figures considérées par rapport à une conique, on trouve les théorèmes corrélatives sur les courbes de quatrième classe à trois tangentes doubles et en particulier à trois tangentes doubles de rebroussement (qui forment les tangentes de rebroussement en deux points de rebroussement). Alors en même temps la conique d'inflexion se polarise en une conique qui passe par les six points de rebroussement; nous l'appelons la conique de rebroussement de la courbe de la quatrième classe.

La polarisation transforme la tranformation quadratique par points en une transformation quadratique par tangentes (exemple : la correspondance entre les asymptotes des hyperboles passan- par trois points fixes donnés).

On peut choisir la transformation quadratique tangentielle de manière qu'en l'appliquant à la conique de rebroussement on trouve la courbe de quatrième classe, etc.

7. La courbe de quatrième classe de première espèce à trois tangentes doubles de rebroussement réelles (deux tangentes à points de contact réels, une tangente isolée) a deux formes symétriques. De ces deux courbes l'une est la *développée de l'ellipse*, l'autre la *développée d'hyperbole*.

En polarisant par rapport à la conique d'inflexion on trouve dans le premier cas

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 = 1,$$

$$\frac{1}{a^2 u^2} + \frac{1}{b^2 v^2} = 1$$

et dans le second

$$a^2 u^2 - b^2 v^2 = 1,$$

$$\frac{1}{a^2 u^2} + \frac{1}{b^2 v^2} = 0.$$

En passant aux coordonées de points ces deux courbes de quatrième classe deviennent

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

etc.

Pour $a=b$ on trouve l'astroïde.

8. La podaire négative de l'hyperbole équilatere par rapport à son centre forme la courbe symétrique de quatrième classe de seconde espèce à trois tangentes doubles de rebroussement.

9. La polarisation du théorème de Weyr, etc., n'offre pas de difficulté.

Groningen, **7 novembre 1896.**

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE DEUX MOUVEMENTS Á LA POINSOT CONCORDANTS

PAR

R. MARCOLONGO

Professeur à l'Université de Messina

Mr. Greenhill dans son remarquable mémoire «*Dynamics of a top*» (Proc. Lond. Math. Soc. vol. XXVI, 1895) a donné une nouvelle démonstration d'un théorème célèbre de Jacobi sur la décomposition du mouvement d'un corps grave de révolution, suspendu par un point de son axe, dans deux mouvements à la Poinsot.

Il démontre en effet très simplement cette propriété:

L'extrémité H de l'axe du couple résultant des quantités de mouvement décrit, dans le corps, une herpolhodie dans un plan perpendiculaire à l'axe et dans l'espace une autre herpolhodie dans un plan horizontal.

Les formules que j'ai établies directement dans mon mémoire *Sopra due moti di Poinsot concordanti* (Annali di Matem. Ser. II, tom. XXI, 1894) permettent aussi de déduire cette propriété d'une manière bien simple.

Les composantes du couple OH sur les axes $x_1\ y_1\ z_1$, fixes dans le corps, sont:

$$Ap, \quad Bq, \quad Cr, \quad (A=B)$$

où A, B, C, p, q, r, ont des significations bien connues. Mais l'on a :

$$Cr = A\alpha = \text{constante} ;$$

donc H décrit, dans le corps, une courbe dans un plan perpendiculaire à l'axe. Soient $x_1\ y_1\ z_1$ les coordonnées de H par rapport aux axes $x_1\ y_1\ z_1$; nous aurons

$$x_1 + iy_1 = A(p+iq) = -2i\,AE_1\tau\,\frac{\sigma(u+v_1)}{\sigma u\,\sigma v_1}\,e^{-\left(\zeta v_1 + i\frac{h_1}{\mu_1}\right)u}$$

à cause de la formule (20) de mon mémoire.

C'est une herpolhodie dont le paramètre est v_1.

On voit aussi que tous les points de l'axe instantané de rotation décrivent des herpolhodies semblables entre elles et à celle du point H, dans des plans normaux à l'axe du corps.

La composante du couple OH suivant l'axe vertical z_0 est :

$$Ap \cos x_1 z_0 + Bq \cos y_1 z_0 + Cr \cos z_1 z_0 = A\delta = \text{constante}.$$

C'est l'intégrale des aires. Donc H se meut dans un plan horizontal.

Soient $x_0\ y_0\ z_0$ les coordonnées de H par rapport aux axes fixes. On a :

$$x_0 = Ap \cos x_1 x_0 + Bq \cos y_1 x_0 + Cr \cos z_1 x_0,$$

$$y_0 = Ap \cos x_1 y_0 + Bq \cos y_1 y_0 + Cr \cos z_1 y_0,$$

d'où, à cause des formules 23), 24) on tire successivement:

$$x_0+iy_0=\frac{1}{2}\,\mathrm{A}(\cos z_1x_0+i\cos z_1y_0)\left\{\frac{(\cos x_1z_0+i\cos y_1z_0)(p-iq)}{1+\cos z_1\,z_0}-\right.$$

$$\left.-\frac{(\cos x_1z_0-i\cos y_1\,z_0)\,(p+iq)}{1-\cos z_1\,z_0}+2\alpha\right\},$$

$$x_0+iy_0=i\tau\,\mathrm{A}\,(\cos z_1\,x_0+i\cos z_1\,y_0)\left\{\zeta\,(u-a)-\zeta\,(u+a_1)-\right.$$

$$\left.-\zeta a-\zeta a_1+2\zeta\,(a+a_1)+\frac{\alpha}{i\tau}\right\};$$

et, puisque:

$$\alpha=\frac{2\tau}{i}\left\{\zeta\,(a+a_1)-\zeta a-\zeta a_1\right\},$$

l'expression entre crochets se transforme dans la suivante:

$$\zeta\,(u-a)-\zeta\,(u+a_1)+\zeta a+\zeta a_1=\frac{\sigma\,(a+a_1)}{\sigma a\,\sigma a_1}\,\frac{\sigma u\sigma\,(u-a+a_1)}{\sigma\,(u-a)\,\sigma\,(u+a_1)}.$$

Donc enfin:

$$x_0+iy_0=-2i\tau\,\mathrm{AE}_0\,\frac{\sigma\,(u-v_0)}{\sigma u\,\sigma v_0}\,e^{\left(\zeta v_0+i\frac{h_0}{\mu_0}\right)u}.$$

C'est une autre herpolhodie dont le paramètre est v_0.
Le théorème est donc établi.

* *

Nous terminerons par une observation. Dans un mouvement à la Poinsot, les binômes tels que:

$$\cos x_0 z_1 + i \cos y_0 z_1 = U$$

sont de la forme:

$$V = \frac{\sigma(u+a)}{\sigma u} e^{-u\zeta a},$$

sauf une constante et un facteur exponentiel e^{ku} (k constante).

Mais V satisfait à une équation de Lamé:

$$V'' = (2pu + pa)\, V.$$

Donc: *U satisfait à une équation différentielle du second ordre linéaire et homogène.*

Dans le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe, les mêmes binômes ont la forme:

$$V = \frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u+a_1)}{\sigma^2 u} e^{-(\zeta a + \zeta a_1) u}$$

sauf une constante et un facteur exponentiel.

Mais l'on démontre aussitôt que V satisfait à l'équation différentielle:

$$V'' = \left\{ 4\, pu + pa + pa_1 + \frac{1}{2} \frac{(p'u - p'a)\,(p'u - p'a_1)}{(pu - pa)\,(pu - pa_1)} \right\} V,$$

ou :

$$V'' = \left\{ 6\,pu + 2pa + 2\,pa_1 + \frac{p'a + p'a_1}{pa - pa_1}\left[\zeta(u+a) - \zeta(u+a_1) - \zeta a + \zeta a_1\right] \right\},$$

qui se réduit à une équation de Lamé, pourvu que :

$$p'a + p'a_1 = 0.$$

(Mr. Brioschi comme on sait, a considéré le cas général).

Donc : *U satisfait à une équation différentielle du second ordre linéaire et homogène.*

Messine : mars 1896.

BIBLIOGRAPHIA

G. Darboux : Leçons sur la théorie générale des surfaces et sur les applications géométriques du Calcul infinitésimale, Paris, G. Villars.

Entre as obras mais consideraveis que têem sido consagradas á Geometria e que se têem tornado celebres occupa um logar dos mais importantes a presente obra do sr. Darboux, tal é a profundeza com que são considerados os assumptos, as vistas originaes que encerra e a elegancia com que está redigida; obra muito sugestiva e que por isso tem sido desde o apparecimento do primeiro volume o ponto de partida de muitos trabalhos importantes, que téem apparecido nas principaes publicações scientificas que encerram trabalhos mathematicos. E não é só debaixo do ponto de vista geometrico que a obra do eminente geometra francez é importante; muitas questões de Analyse, a que levam as theorias geometricas consideradas, são estudadas n'ella de uma maneira completa, sendo umas vezes empregada a Analyse em proveito da Geometria, outras vezes tendo logar o inverso.

N'um dos volumes anteriores d'este jornal deu-se noticia do primeiro volume d'esta obra. Aqui vamos dar noticia das doutrinas que encerram o segundo e o terceiro volume.

Os primeiros quatorze capitulos do segundo volume das *Leçons sur la theorie générale des surfaces* são consagradas á theoria das congruencias de linhas e á integração das equações ás derivadas parciaes lineares, a que esta theoria conduz. N'elles o auctor principia por apresentar os principios geraes da theoria das congruencias (cap. I), que o levam a fazer no capitulo II um estudo profundo do methodo dado por Laplace, nas *Mémoires de l'Académie* *des sciences de Paris, 1773*, para integrar a equação

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} + cz = 0,$$

onde procura, em especial, as condições para que o methodo conduza, depois de um certo numero de operações, a uma equação integravel. Esta equação encerra como caso particular a seguinte, conhecida pelo nome de *equação de Euler e Poisson*,

$$\frac{d^2z}{dx\,dx} - \frac{n}{x-y}\frac{dz}{dx} + \frac{m}{x-y}\frac{dz}{dy} - \frac{p}{(x-y)^2}z = 0,$$

que representa na obra do sr. Darboux um papel importante, e á qual por isso dedicou um bello e interessante capitulo (cap. III). Ás mesmas equações é consagrado o capitulo IV, onde é exposto um methodo de integração das mesmas equações devido a Riemann. De questões analyticas tractam ainda o capitulo V, onde o auctor se occupa das equações differenciaes lineares ordinarias de qualquer ordem, estudando de um modo profundo algumas ideias de Lagrange relativas a estas equações, estudo que o leva a resultados que lhe permittem completar, no capitulo VI, o estudo dos methodos de Laplace e Riemann expostos no capitulo II e IV; o capitulo VII, onde é estudada a equação

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \lambda z;$$

o capitulo VIII, onde são apresentadas algumas proposições geraes que permittem ligar com qualquer equação linear de segunda ordem uma serie de equações da mesma fórma e da mesma ordem, que se integram ao mesmo tempo que aquella de que deri vam; finalmente o capitulo IX, consagrado ás equações da fórma

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = [\varphi(x+y) - \psi(x-y)]z,$$

a que o sr. Darboux dá o nome de equações harmonicas. As theorias analyticas a que vimos de nos referir são applicadas em varios logares do resto da obra.

No capitulo X entra o auctor outra vez no campo da Geometria, estudando n'este capitulo alguns problemas relativos ás congruencias de curvas, no capitulo XI as superficies cujas linhas de curvatura são isothermes, no capitulo XII as trajectorias orthogonaes d'uma familia de superficies, no capitulo XIII as congruencias de rectas perpendiculares a uma superficie, no capitulo XIV as superficies cujos planos principaes são conjugados em relação a uma superficie do 2.° grão e no capitulo XV as congruencias de circulos.

Passa depois o sr. Darboux ao estudo das linhas traçadas sobre as superficies. A esta doutrina são consagrados cinco capitulos, sendo no primeiro estabelecidas as formulas geraes d'esta doutrina, no segundo as formulas de Codazzi, no terceiro a theoria da curvatura normal e da torsão geodesica, no quarto a theoria das linhas geodesicas e no quinto a das familias de curvas parallelas. Os tres ultimos capitulos d'este volume, estreitamente ligados com os anteriores em quanto ao methodo, são consagrados ao estudo dos problemas de Mecanica nos quaes existe uma funcção de força, sendo um capitulo consagrado aos movimentos que se effectuam n'um plano, o outro aos movimentos no espaço e o terceiro ao problema geral da Mecanica. Esta ligação da Geometria com a Mecanica apparece em maitos pontos da obra, sendo os methodos da Mecanica umas vezes approveitadas para o estudo de questões geometricas, outras vezes, como nos capitulos a que vimos de nos referir, tendo logar o inverso.

O volume terceiro da obra que estamos considerando consta de duas partes, sendo uma destinada ao estudo das linhas geodesicas e da curvatura geodesica, a outra ao estudo da deformação das superficies.

A theoria das linhas geodesicas occupa os primeiros oito capitulo do volume, consagrados ao estudo do methodo de Jacobi para determinar as linhas geodesicas (cap. I), á integração das equações das linhas geodesicas (cap. II e IV), á representação geodesica de duas superficies uma sobre a outra (cap. III), ao estudo do problema que tem por fim a determinação da distancia entre dous pontos d'uma superficie (cap. V), á theoria da curvatura geodesica (cap. VI), á determinação das curvas quando é dada a curvatura geodesica em funcção das coordenadas dos pontos da curva e em especial á determinação das curvas cuja curvatura geodesica é constante (cap. VII), e finalmente á theoria dos triangulos geodesicos e á demonstração do theorema de Gauss relativo a estes triangulos.

A segunda parte do volume é, como já dissémos, consagrada ao estudo da deformação das superficies. Abre por um capitulo onde é exposta a theoria dos parametros differenciaes que se deve a Beltrami; é estudado depois o problema que tem por fim reconhecer se duas superficies são applicaveis uma sobre a outra, vem depois o methodo de Gauss para determinar todas as superficies applicaveis sobre uma superficie dada; seguem-se differentes methodos para formar a equação ás derivadas parciaes das superficies applicaveis sobre uma superficie dada. Com estes elementos estuda o auctor em seguida a deformação das superficies regradas, demonstra as relações que M. Weingarten achou entre as superficies applicaveis sobre as superficies de revolução e as superficies para as quaes os raios de curvatura principaes são funcções um do outro, estuda as popriedades d'esta classe de superficies e applica os theoremas de M. Weingarten ás superficies para as quaes a curvatura total ou a curvatura media é constante.

Nos restantes capitulos do volume são consideradas as superficies de curvatura total negativa e as superficies de curvatura constante.

No quarto volume estuda o sr. Darboux o problema da deformação infinitamente pequena das superficies e o problema da representação espherica. Os primeiros quatro capitulos são consagrados ao estudo de dous methodos para resolver o primeiro d'estes problemas, e ao estudo de doze superficies que esta questão leva a considerar, o quinto a algumas applicações d'estes methodos. No capitulo VI é estudado o rolamento de duas superficies uma sobre a outra. O problema da representação espherica e a sua relação com o problema da deformação das superficies são o objecto dos capitulos IX a XI, sendo os dois primeiros consagrados ao estudo geral d'aquelle problema e os tres ultimos ás applicações dos resultados obtidos ás superficies de linhas de curvatura planas e ás superficies de linhas de curvatura esphericas. No capitulo XII são generalisados alguns resultados relativos ás equações ás derivadas parciaes anteriormente consideradas e as theorias geometricas a que foram applicadas. Nos capitulos XIII e XIV são finalmente estudados alguns resultados recentemente descobertos por M. Weingarten, relativos á applicação das superficies umas sobre as outras.

Termina a obra por onze notas. A primeira é devida a M. Picard, que expõe n'ella o seu methodo de approximações successivas para determinar os integraes das equações differenciaes. A segunda é devida a M. Koenigs, que resolve n'ella o problema das geodesicas que admittem muitos integraes quadraticos. A terceira é devida a M. Cosserat, que se occupa da theoria das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem. As restantes são de M. Darboux, que ahi trata da torsão, das curvas empenadas e das curvas de torsão constante, das formulas de Euler e do movimento do solido invariavel, das superficies espiraes, da fórma das linhas de curvatura na visinhança d'um ponto umbilical, das linhas asymptoticas e das linhas de curvatura das superficies d'onda de Fresnel, da Geometria Cayleyana, das equações ás derivadas parciaes, etc.

Gino Loria: Il passato ed il presente delle principale teorie geometriche, Torino, C. Clausen, 1896.

Com a publicação d'esta bella e importante monographia historica teve o sr. Gino Loria por fim, como elle mesmo diz, lançar uma vista retrospectiva sobre todo o vasto edificio da sciencia geometrica.

Principía o illustre professor da Universidade de Genova por descrever o desenvolvimento da Geometria desde a sua origem até 1850, referindo-se ás origens d'esta sciencia, ao progresso que ella teve na antiga Grecia, a respeito do qual o auctor tinha já anteriormente publicado importantes trabalhos, ao nascimento da Geometria analytica a duas e a tres dimensões, ao renascimento da Geometria pura, etc., mencionando todos os methodos importantes, apresentados n'este longo periodo de tempo, para o estudo das questões geometricas, e os trabalhos mais notaveis que a respeito d'elles foram publicados.

Nos capitulos II, III e IV expõe o auctor as phases por que passaram, nos seus progressos successivos, a theoria das curvas planas algebricas, a theoria das superficies algebricas e a theoria das curvas algebricas a dupla curvatura.

No capitulo V vem a historia da Geometria differencial, no capitulo VI a historia das indagações sobre a fórma das curvas, no capitulo VII a historia da Geometria da recta, no capitulo VIII a historia da theoria das transformações, no capitulo IX a historia da Geometria numerativa, no capitulo X a historia da Geometria não-euclideana e no capitulo XI a historia da Geometria a qualquer numero de dimensões.

Termina a obra por um epilogo onde o auctor se refere a algumas cathegorias de indagações geometricas ás quaes não fez referencia nos capitulos anteriores.

Por esta rapida indicação dos assumptos considerados pelo sr. Gino Loria no seu bello livro, vê-se como é vasto o programma que se propoz tractar. O modo como conseguiu desempenhar esta missão que a si mesmo se impoz está á altura da sua situação como um dos geometras da actualidade que melhor conhece a historia das sciencias mathematicas. Accrescentaremos ainda que a exposição de cada assumpto é acompanhada de indicações bibliographicas muito completas que augmentam a utilidade do livro e revelam a grande erudição do seu auctor.

H. G. Zeuthen: Geschicht der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, Copenhague, Host und Sön, 1896.

Esta obra importante é consagrada á historia das mathematicas, da qual o sr. Zeuthen expõe a parte mais essencial. Foi escripta pela primeira vez em dinamarquez para servir de livro de texto aos que na Dinamarca se preparam para o professorado de mathematicas.

Entre os assumptos mais interessantes, que são considerados figura o da reconstituição dos methodos empregados pelos geometras da antiguidade para o estudo das conicas, assumpto ao qual o eminente geometra de Copenhague consagrou uma obra que se tornou célebre.

A. Capelli: Lezioni di Algebra complementare, Napoli, Pellerano, 1895.

O objecto principal d'este livro excellente é estabelecer os fundamentos do ramo da Analyse conhecido pelo nome de Analyse algebrica. Tudo o que ha de mais essencial n'este assumpto é n'elle exposto de um modo elegante, claro e completamente rigoroso.

Abre o livro por uma pequena introducção consagrada à noção de funcção, á qual se segue o capitulo I consagrado ás operações sobre numeros reaes. N'este capitulo é exposta primeiramente de uma maneira muito clara a theoria dos numeros irracionaes, para os quaes o auctor adopta a definição de Dedekind; depois são cuidadosamente estudadas a noção de limite, a theoria das series de termos reaes, e a theoria das fracções continuas numericas.

No capitulo II occupa-se o auctor da Analyse combinatoria e das suas applicações á Algebra. Vêem n'elle a theoria das permutações e das combinações, os principios da theoria das substituições entre os elementos de uma permutação, a demonstração das formulas do desenvolvimento do binomio e dos polynomios, e a demonstração da formula de Taylor para o caso das funcções inteiras de uma e de muitas variaveis.

No capitulo III é exposta a theoria dos determinantes e a sua applicação á theoria das equações do primeiro grão.

O capitulo IV é destinado aos numeros complexos. Ahi são expostos os principios da theoria d'estes numeros, é considerada a sua representação geometrica e são estudadas as series compostas de termos complexos.

O capitulo V é consagrado á theoria das raizes das equações algebricas. Encontra-se n'elle, entre outros assumptos, a demonstração, dada por Cauchy, do theorema fundamental da theoria das equações, com todos os desenvolvimentos necessarios para a tornar rigorosa, a theoria das funcções symetricas das raizes das equações, a theoria dos descriminantes de uma equação algebrica, os methodos para desembaraçar de radicaes as equações algebricas, o desenvolvimento em serie das funcções racionaes, etc.

No capitulo VI é considerada a divesibilidade das funcções e a theoria da eliminação entre equações algebricas. Esta ultima doutrina é exposta de um modo notavelmente claro e simples.

No capitulo VII occupa-se o sr. Capelli das principaes transformações das equações algebricas e da resolução das equações do terceiro e do quarto grão.

O capitulo VIII é um dos mais interessantes da obra, e o assumpto d'elle não se encontra tratado ordinariamente nos livros de Algebra complementar. Contém a theoria dos numeros irracionaes algebricos, e, como consequencia d'esta theoria, a demonstração da impossibilidade da resolução algebrica das equações de grão superior ao quarto, e a da impossibilidade de resolver com a regoa e o compasso o problema celebre da trisecção do angulo.

O capitulo IX é consagrado ao estudo das propriedades geraes das equações algebricas com coefficientes reaes (theoremas de Budan, Descartes, Fourier, Cauchy, etc.), e o capitulo X aos methodos para a resolução numerica das equações.

Cada assumpto considerado é seguido por uma serie de exercicios e de notas, entre as quaes se encontram muitos theoremas importantes que o auctor julgou poderem ser dispensados n'uma primeira leitura.

Por esta rapida noticia só se vê quaes os principaes assumptos que são considerados pelo sr. Capelli no seu bello trabalho ; acrescentaremos porém ainda que á roda de cada um d'elles se agrupam muitas questões interessantes, que não podemos especificar, e que tornam a obra do illustre geometra italiano vivamente interessante.

C. A. Laisant: Recueil de problèmes de Mathématiques — Géométrie du triangle, Paris, Gauthier-Villars, 1896.

O presente volume é o sexto da collecção util de problemas de que temos dado noticia em varios logares d'este jornal. É consagrado ao ramo da Geometria elementar conhecido pelo nome de Geometria recente do triangulo, o qual nos ultimos tempos tem tomado um desenvolvimento tal e tem dado logar a tantas questões que o sr. Laisant entendeu dever-lhe reservar um volume especial.

Os problemas que este volume contém estão classificados do modo seguinte: I Pontos notaveis. II Rectas e angulos notaveis. III Circulos notaveis. IV Conicas notaveis. V Systemas de triangulos. VI Questões diversas (transversaes reciprocas, pontos em linha recta, rectas concorrentes, arias, etc.). VII Logares geometricos e envolventes. VIII Relações metricas e trigonometricas.

Observations méridiennes de la planète Mars pendant l'opposition de 1892; Lisbonne, 1895.

Foi com o mais vivo prazer que vimos que o Observatorio astronomico de Lisboa vem de iniciar a publicação das suas observações. As condições especiaes em que está collocado este Observatorio e o modo como está organisado levam, com effeito, a esperar que elle tomará em breve um logar importante na sciencia, honrando d'este modo o paiz.

É bem sabido que os primeiros annos da vida de qualquer Observatorio astronomico são gastos no estudo longo e fastidioso, mas indispensavel, dos instrumentos e apparelhos com os quaes se devem depois fazer as observações; este estudo foi feito no Observatorio de Lisboa com o maior cuidado, como se vê, na parte que respeita a alguns d'elles, no volume que vem de ser publicado, preparando-se assim este estabelecimento importante para apresentar resultados quanto possivel rigorosos no estudo das questões astronomicas de que tenha de se occupar.

O volume a que nos estamos referindo é consagrado ás observações meridianas do planeta Marte, feitas durante a opposição de 1892. Estas observações foram emprehendidas em virtude de um convite feito pelo Observatorio astronomico de Washington aos Observatorios de todos os paizes, para fazerem observações meridianas do planeta Marte durante a opposição de 1892, segundo um plano do professor Earstman, a fim de, combinando os resultados obtidos segundo este plano em diversos observatorios collocados nos dois hemispherios, se procurar obter o valor da parallaxe solar com mais exactidão do que é actualmente conhecido.

Como é natural, principia o volume pela descripção dos instrumentos e apparelhos com os quaes foram feitas as observações (circular meridiano de Repsold, apparelhos chronometricos, apparelhos meteorologicos) e dos methodos empregados para fazer estas observações. Vêem depois as descripções dos meios usados para obter as constantes do circular meridiano, os valores d'estas constantes, as descripções dos methodos e dos elementos empregados para a reducção das observações, e finalmente a apresentação d'alguns resultados deduzidos das observações (latitude do Observatorio, posições medias das estrellas de comparação, diametro de Marte, logares apparentes de Marte). Termina o volume por uma collecção de 85 tabellas contendo as observações meridianas de Marte que foram feitas no intervallo de 20 de junho de 1892 a 23 de setembro do mesmo anno.

M. Lerch: Sur une relation ayant rapports avec la théorie de la fonction gamma (Bulletin de l'Académie des Sciencies de Prague, 1895).

N'esta nota importante apresenta o illustre geometra um desenvolvimento da funcção

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-2x\pi(v+n)}}{v+n}$$

do qual tira a formula notavel que dá o desenvolvimento em serie periodica da funcção D log $\Gamma(v)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}(2k+1)v\pi \, . \log \frac{k}{k+1}$$

$$= (\log 2\pi - \Gamma'[1]) \operatorname{sen} v\pi + \frac{\pi}{2} \cos v\pi + \frac{\Gamma'(v)}{\Gamma(v)} \operatorname{sen} v\pi.$$

H. Burkhardt: Uber einige mathematische resultate neuerer astronomicher untersuchungen, insbesondere über irreguläre integrale linearer differentialgleichungen (Congress Mathematical Papers, vol. 1).

Ernesto Pascal: Sulle varie forme che possono darsi alle relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare (Annali di Matematica, 1896).

—— Sulla ricerca del secondo termine dello sviluppo in serie delle funzioni sigma abeliane pari di genere tre (Annali di Matematica, 1896).

—— Su di un teorema del Netto relativo ai determinanti e su di un altro teorema ad esse affine (Rend. della R. Accademie dei Lincei, 1896).

Burali Forti: Il metodo del Grassmann nella Geometria projettiva (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1896).

E. Carvallo: Sur l'absorption de la lumière par les milieux doués du pouvoir rotatoire (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1896).

E. Lenoble: La théorie atomique et la theorie dualistique, Paris, G. Villars, 1896.

G. T.

2.ª NOTA SOBRE LOS CIRCULOS RADICALES Y ANTI-RADICALES

POR

JUAN J. DURAN LORIGA

Comandante de artilleria

I

En el anterior articulo hemos definido el circulo radical como lugar geométrico de los puntos cuyas potencias con relacion á dos circulos fijos (0) y (0′) son iguales y de signos contrarios y hemos visto que el dicho circulo tiene por centro el medio del segmento que une los delas circunferencias dadas y que su rádio es, llamando R y R′ los conocidos

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}$$

Se comprende la posibilidad de resolver el problema inverso es decir dadas das circunferencias (0) y (ρ) encontrar otra, que unida ál la (0) tenga por circunferencia radical la (ρ) y à la que llamaremos *circunferencia anti-radical de la* (0) *respecto á* (ρ); pero antes de entrar en esta investigation, ampliaremos algo lo dicho respecto á circunferencias radicales en el anterior trabajo.

Por de pronto debemos observar que formando parte las dos circunferencias dadas y la radical de un haz de circulos puesto que las tres pertencen á un sistema co-axial gozaran de las muchas propriedades de estos sistemas y que asi mismo se podria hacer derivar su estudio de la geometria proyectiva aunque hemos preferido darle unaforma mas elemental.

La consideracion de circunferencias radicales, permite deducir las conocidas relaciones entre los coeficientes para que dos circunferencias sean ortogonales, tomando como fundamento el hecho de que si dos circulos son ortogonales la radical pasa por sus centros y *reciprocamente* por lo que tendrá que verificarse en el caso de ortogonalidad como condicion necesaria y suficiente que las coordenadas del centro de uno de ellos verifiquen la ecuacion del circulo radical.

Sean las ecuaciones de los circulos cuyas condiciones para que sean ortogonales, queremos establecer las siguintes:

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$$

$$x^2+y^2+2A'x+2B'y+C'=0.$$

La ecuacion del circulo radical es

$$2(x^2+y^2)+2(A+A')x+2(B+B')y+C+C'=0.$$

Las coordenadas del centro de uno de ellos por ejemplo el primeiro son $-A$ y $-B$ tendrá pués que verificarse.

$$2(A^2+B^2)-2(A+A')A-2(B+B')B+C+C'=0$$

que se reduce á la conocida relacion

$$2(AA'+BB')=C+C'.$$

Cuando las ecuaciones de los circulos estan dadas en coordenadas baricéntricas será comodo este procedimiento para averiguar si dos circulos son ortogonales, sobre todo cuando se conoceu *à priori* las coordenadas del centro de uno de ellos. Tratemos p. e. de demonstrar que el circulo de Longchamps es ortogonal respecto á los circulos potenciales (llamamos circulos potenciales á los descritos desde los medios de los lados como centros con rádios ignales á las medianas correspondientes (vease P. M., tom. 5.°, pag. 70) tenemos

Ecuacion del circulo de Longchamps

$$(\alpha+\beta+\gamma)(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma)-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0$$

Id del potencial P_a

$$p_a(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma)+a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta=0$$

ecuacion del circulo radical

$$(\alpha+\beta+\gamma)\,a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma)-p_a\beta-p_a\gamma)-2\,(a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta)=0$$

Hemos llamado p_a á la cantidad

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

Como el centro de P_a es el medio del lado a sus coordenadas baricéntricas son $\alpha=0$ $\beta=\gamma$ con lo que resulta

$$2\beta\,(b^2\beta+c^2\beta-2p_a\beta)-2a^2\beta^2=0$$

luego etc.

Si una de las circunferencias se reduce á un punto, la circunferencia radical tendrá por rádio

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - d^2}$$

y si ambas se convierten en puntos la circunferencia radical será siempre imaginaria y tendrá por radio

$$\rho = \frac{d}{2}\sqrt{-1}.$$

Observaremos tambien que se puede generalizar la nocion de circulo radical haciendo que la relacion de potencias tenga un valor $\frac{m}{n}$ todos los circulos asi obtenidos forman parte de un mismo haz gozando de muchas propriedades comunes.

El teorema de que si se tienen tres circulos y se combinan de dos en dos, el eje radical de las circunferencias radicales de dos grupos lo es del tercero, será igualmente cierto a un que se generalice la nocion de circulo radical y por consiguiente:

Si se tienen tres circunferencias y se encuentran las radicales de dos grupos para cualquier relacion de potencia todos estos circulos forman parte de un mismo haz.

Diremos por último que se puede extender la nocion de circulo radical á las esferas y asi mismo á los circulos trazados sobre una superficie esférica.

II

Entremos yá á estudiar lo que hemos llamado anteriormente *circulos anti-radicales*.

Dada una circunferencia (0) y la radical (ρ) puede determinarse la (0′) circunferencia anti-radical de (0) respecto á (ρ)

tomando una distancia $\rho 0' - 0\rho$ con lo que se obtendrá su centro $0'$; para C cálcular surádio despejaremos R' en la fórmula que dá el valor de ρ y se tiene

$$R' = \sqrt{2(\rho^2 + d^2) - R^2}$$

llamando ahora d *á la distancia* 0ρ.
Para que la circunferencia $(0')$ sea real, tendrá que verificarse

$$d > \sqrt{\frac{R^2 - 2\rho^2}{2}}$$

si

$$2(\rho^2 + d^2) - R^2 = 0$$

la circunferencia anti-radical se reduce á un punto.

Dadas las ecuaciones de dos circunferencias

$$(C) \qquad x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

$$(C') \qquad x^2 + y^2 + 2'Ax + 2B'y + C' = 0$$

la anti-radical de (C) respecto á (C') tiene por ecuacion

$$x^2 + y^2 + 2(2A' - A)x + 2(2B' - B)y + 2C' - C = 0$$

si se trata de coordenadas baricentricas se tendrá igualmente

$$(C) \qquad (\alpha + \beta + \gamma)(u\alpha + v\beta + w\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0$$

$$(C') \qquad (\alpha + \beta + \gamma)(u'\alpha + v'\beta + w'\gamma) - a^2\beta\gamma - b^2\alpha\gamma - c^2\alpha\beta = 0$$

circunferencia anti-radical de (C) respecto (C′)
$$(\alpha+\beta+\gamma)[(2u'-u)\alpha+(2v'-v)\beta+(2w'-w)\gamma]-\\-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0.$$

Si una de las circunferencias degenera en un punto circulo, el rádio de la circunferencia anti-radical de una (0) respecto a un punto ρ tendrá por valor

$$R'=\sqrt{2d^2-R^2}$$

siendo d la distancia 0ρ, su centro estará sobre 0ρ á una distancia $00'20\rho$.

La circunferencia anti-radical será real, un circulo punto ó imaginaria segun se verifique

$$d \gtreqless R\sqrt{2}\,.$$

Si la ecuacion de la circunferencia es:

$$x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$$

y a y b las coordenadas del punto, se tendrá para ecuacion de la circunferencia anti-radical de (0) respecto á ρ

$$x^2+y^2-2(2a+A)x-2(2b+B)y+2(a^2+b^2)-C=0$$

y si la circunferencia tiene su centro en el origen y el punto ρ está sobre el eje de las x á una distancia d la ecuacion será:

$$x^2+y^2-4dx+2d^2+R^2=0.$$

De la expresion que dá el valor del rádio R′ de la circunferencia anti-radical, deducimos

$$2(R^2 + R'^2) = \overline{OO'}^2$$

y por consiguiente resulta que los puntos de contacto de las tangentes comunes á una circunferencia y su anti-radical respecto á un punto estan cuatro á cuatro sobre dos rectas que cortan á la linea OO′ en un mismo punto distante de O la cantidad $\frac{R^2}{d}$ es decir que este punto es el pié de la polar de ρ respecto á (O) dichas rectas se inclinan 45° sobre la linea de centros y las tangentes dirijidas desde cualquier punto de ellas á las circunferencias (O) y (O′) forman un haz armonico.

Tambien la relacion citada demuestra que si permaneciendo fija la circunferencia (O) el punto ρ se mueve sobre la líneu OO′ la envolvente de los circulos anti-radicales es la hiperbola equitatera

$$x^2 - y^2 = R^2.$$

Es claro que todas las circunferencias que pasan por los puntos H y K en que la anti-radical (O′) corta á la línea de centros son tambien anti-radicales de la (O) respecto al punto ρ pero entendemos por anti-radical la que tiene su centro sobre Oρ. Si buscamos la circunferencias radicales de el haz que se obtendria y la dada (O) todas pasarán por el punto ρ por lo que se obtendrian dichas lineas uniendo un punto cualquiera del diametro perpendicular á HK con el centro O y tomado como centro y rádio el medio de esta recta y su distancia á ρ.

Si la circunferencia (O) se reduce tambien á un punto (circulo punto) entraremos en el caso de encontrar la circunferencia anti-radical de un punto O respecto á otro ρ y bien fácil es ver que bastará para obternela prolongar Oρ una longitud $\rho O' = O\rho$ con lo que se determina el centro O′ y el rádio tendrá por valor $R' = d\sqrt{2}$ resulta por consiguiente que la circunferencia anti-radical de un punto respecto á otro es siempre real. Seve asi mismo que los dos puntos son inversos respecto á la circunferencia.

Si permaneciendo fijo el punto 0 se mueve el otro sobre la linea 0ρ la hiperbola equitatera envolvente de los circulos antiradicales, que consideramos en el caso de circunferencia y punto, degenera en este caso en dos rectas que tienen por ecuacion.

$$y = \pm x$$

es decir que son las asintotas de la anterior hiperbola.

La circunstancia de formar dos puntos y la circunferencia antiradical un haz en el que dichos puntos, son los puntos limites permite citar una porcion de propiedades; nos limitaremos á enunciar la siguiente que hemos de utilizar. Si se une un punto cualquiera A de plano con dos puntos 0 y ρ y en los extremos de A0 y Aρ se levantan perpendiculares, estas rectas y la polar de A respecto á la circunferencia anti-radical de 0yρ son concurrentes.

Si se quiere encontrar el lugar geometrico de los puntos de interseccion de estas rectas cuando A describe una cierta linea, bastará recurrir á las siguientes formulas de transformacion bien faciles de obtener

$$x = d - \mathrm{X} \quad \text{»} \quad y = \frac{\mathrm{X}(\mathrm{X} - d)}{\mathrm{Y}}$$

llamando d á la distancia de los puntos 0 y ρ y tomando como ejes cartesianos la recta 0ρ y la perpendicular en 0.

Estas formulas hacen ver que si el punto A describe una recta que pasa por 0 el correspondiente describe tambien otra perpendicular en 0 á la primera — A una paralela al eje de las y corresponde otra recta tambien paralela — A una paralela al de las x una parabola.

Todo circulo que pasa por 0ρ se corresponde asi mismo A la parabola que tiene por ecuacion $x^2 = 2py$ una hiperbola ect. ect,

Dada una circunferencia 0, sobre uno de sus diametros, solo existen dos puntos 0yρ (ó sus simetricos) tales que el circulo anti-radical de 0 respecto á ρ se a el (0'), podriamos llamar á los puntos asi ligados á cada circunferencia del plano *puntos radicalmente asociados á dicha circunferencia.* Si no se fija el diametro entoces los lugares geométricos de 0 *y* ρ son dos circunferencias concentricas con la dada, de rádio doble una que otra y tales que el de la (0') es la media proporcional; á estos circulos podriamos llamar tambien *circulos radicalmente asociados al* (0').

Puede deducirse de lo anterior la siguiente pequeña proposicion.

Se tiene una circunferencia de centro 0 y sus dos radicalmente asociadas y se traza un rádio cualquiera $0abc$ (a, b y c son los puntos en que corta sucesivamente á las tres circunferencias).

Uniendo cualquier punto A del plano con a y c y levantando perpendiculares en dichos puntos á las rectas obtenidas, dichos perpendiculares y la polar de A respecto al circulo dado, son concurrentes.

Si en particular se toma el punto A sobre la circunferencia dada (0) resulta esta otra proposicion.

Las perpendiculares en sus estremos á las rectas que unen un punto A de una circunferencia con los estremos de un mismo rádio de las radicalmente asociadas se cortan sobre la tangente en A á la circunferencia primitiva, siendo por lo tanto dicha tangente el lugar geométrico de las intersecciones de todas las perpendiculares relativas al punto A.

Si las coordenadas de dos puntos A y A' son respectivamente a y b, a' y b' la ecuacion de la circunferencia anti-radical de A respecto á A' es

$$x^2+y^2+2(a-2a')x+2(b-2b')y+2(a'^2+b'^2)-(a^2+b^2)=0.$$

La consideracion de circunferencias radicales y anti-radicales en la geometria del triangulo y á tomando en cuenta circunferencias efectivas, y á degeneradas en puntos y hasta haciendo entrar la nocion de lo imaginerio podrá dar lugar como y a en otra ocasion hemos dicho ó estudios interesantes. Como una aplicacion muy sencilla vamos á estudiar ligeramente las circunferencias anti-radicales de un vértice de un triangulo respecto á otro.

Se a A B C el triangulo propuesto, y suponiendo recorrido su perimetro en un cierto sentido, por ejemplo el órden alfabético, encontremos la circunferencia anti-radical de A respecto á B, de B respecto á C. y de C. respecto á A que llamaremos respectivamente

$$(C_1), \quad (A_1) \text{ y } (B_1).$$

Obtendremos los centros de las circunferencias prolongando los lados (en el sentido que se considera) una longitud igual á si mismo y en cuanto á los rádios tendrán por valores $c\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$ y $b\sqrt{2}$.

Encontremos la ecuacion del circulo A_1.

Sabemos que en la forma indicada por Mr. de Longchamps (J. S. 1886, p. 57) la ecuacion de todo circulo es

$$(\alpha+\beta+\gamma)(u\alpha+v\beta+w\gamma)-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0$$

en la que u, $vy\beta$ son las potencias de los vertices del triangulo respecto al circulo que se considera.

En el caso en que estamos se tiene

$$u=2b^2-c^2 \quad v=2a^2 \quad w=-a^2$$

luego la ecuacion del circulo (A_1) es

$$\alpha+\beta+\gamma)\left[(2b^2-c^2)\alpha+2a^2\beta-a^2\gamma\right]-a^2\beta\gamma-b^2\alpha\gamma-c^2\alpha\beta=0$$

y de un modo análogo ó por permutacion circular se obtendran las de (B_1) y (C_1).

Si se encuentra el centro radical de (A_1), (B_1) y (C_1) se obtiene

$$\alpha:\beta:\gamma=a^2p_a:b^2p_b:c^2p_c$$

es decir que coincide con el circulo circunscripto.

Calculemos el radio del circulo ortotomico.

La potencia de 0 respecto á (A_1) es

$$\overline{0A_1}^2 - 2a^2$$

pero

$$\overline{0A_1}^2 = R^2 + 2a^2$$

resulta por consiguiente que el circulo ortotomico tiene por radio R y coincide con el circulo circunscripto.

Esse resultado debia preverse puesto que siendo los vertices los puntos limites del haz de que forman parte los circulos anti-radicales, la circunferencia que pase á la vez por los tres vértices debe ser ortogonal á aquellos circulos, es decir el ortotomico de (A_1) (B_1) y (C_1).

Las polares del centro del circulo circunscripto respecto á los circulos que estudiamos pasan por los vértices del triangulo tangencial (puntos asociados al punto de Lemoine) puesto que las perpendiculares á 0B, 0C y 0A en sus extremos se cortan en dichos puntos. Dichos polares dividen á los lados del triangulo fundamental en la razon de 2 á 1.

La polar del vertice A por ejemplo, respecto al circulo (A_1) pasa por el punto simetrico de A con relacion al centro del circulo circunscripto por cortarse en dicho punto las perpendiculares en B y C á los lados AB y AC.

Siendo los puntos B*y* C inversos respecto al circulo (A_1) resulta que si trazamos por C una cuerda cualquiera *mn* en dicho circulo, los puntos *m*, *n*, B y A_1 son conciclicos.

Como los puntos H y K (puntos en que el lado BC corta á (A_1)) son conjugados armónicos respecto á B y C se tiene.

$$\frac{HB}{HC} = \sqrt{2}$$

y por conseguiente en qualquier punto n de la circunferencia (A_1) se verificará que

$$\overline{nB}^2 = 2\,\overline{nC}^2$$

es decir que dicha circunferencia es el lugar geometrico de los puntos tales que los cuadrados de sus distancias á B son dobles que los cuadrados de distancias á C.

Las polares de cualquier vertice del triangulo respecto á los circulos (A_1), (B_1) y (C_1) son concurrentes y lo mismo sucede con los ejes radicales.

Las polares de uno de los puntos de Brocard respecto á las circunferencias que estudiamos pasan por el punto diametralmente opuesto de la circunferencia adjunta correspondiente.

Una cosa análoga se verifica si se consideran los centros isogonos y los circu'os de Torrichelti.

Si sobre $0A_1$, $0B_1$ y $0B_1$ como diametros se describen circunferencias, estas son las radicales del circulo circunscripto y los (A_1), (B) y (C_1) y por consiguiente se ve comprobado pre los ejes radicales de estos últimos pasan por 0.

Las potencias de los vértices del triangulo respecto á los circulos de Neuberg y á los (A_1), (B_1) y (C_1) son iguales y designo cóntrario, por exemplo la potencia de C respecto á (N_a) es igual. salvo el signo, á lade C respecto á (A_1) asi es que las circunferencias radicales de los citados circulos pasan por los vértices del triangulo fundamental. La ecuacion de dichos circulos radicales, por ejemplo el correspondiente á (N_a) y (A_1) es

$$(\alpha+\beta+\gamma)\,[2b^2-c^2)\,\alpha+3a^2\beta]-2a^2\beta\gamma-2b^2\alpha\gamma-2c^2\alpha\beta=0.$$

Si queremos encontrar el rádio de la circunferencia radical cuya ecuacion hemos escrito bastara sustituir en la formula

$$\rho=\frac{1}{2}\sqrt{2\,(R^2+R'^2)-d^2}$$

los valores

$$R = a\sqrt{2} \quad R' = \frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\omega - 3} \quad d = \frac{a}{2}\sqrt{9 + \cot^2\omega}$$

y resulta para el rádio que buscamos la sencillisima expresion seguiente

$$\rho = \frac{a}{4} \operatorname{cosec} \omega.$$

Este resultado podria tambien obtenerse observando que la recta que une C con el centro del circulo es paralela é igual á la mitad de BN_a.

Los ejes radicales de los circulos de Neuberg y los (A_1), (B_1) y (C_1) pasan por los vértices del primer triangulo de Brocard (puntos semi-reciprocos del punto de Lemoine) y cortan á los lados del triangulo en la relacion de 2 á 1 por ejemplo el eje radical de (N_a) y (A_1) pasa por el vertice A_1 cuyus coordenados son

$$\alpha : \beta : \gamma = a^2 : c^2 : b^2.$$

El triangulo de centros A_1 B_1 C_1 es triplemente homologico con el fundamental siendo A B y C los centros de homologia y los lados del primero los ejes de homologia.

Las polares del punto de Tarry respecto á los circulos (A_1), (A_1), (B_1), (C_1) se cortan en el punto de Steiner.

Entre los lados del triangulo de centros y el fundamental se verifica la igualdad

$$\overline{A_1 B_1}^2 + \overline{B_1 C_1}^2 + \overline{A_1 C_1}^2 = 7\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

es decir que la *potencia total* del primer triangulo es siete veces la del segundo.

La polar del vertice B respecto al circulo (A_1) es la perpendicular á BC levantado en el punto C. y los ejes radicales de los mismos elementos son los mediatrices.

En el caso particular de que se verifique en un triangulo la igualdad

$$c^2 = 2b^2$$

el circulo (A_1) se convierte en el de Apolonius.

Si se considera recorrido el perimetro del triangulo en sentido contrario resultarán otros circulos (A_2), (B_2) y (C_2) gozando de analogas propriedades á las de los (A_1) (B_1) y (C_1); sin embargo de la combinacion de unos y otros pueden deducirse otras nuevas, por exemplo, los centros radicales de (N_a), (A_2), (A_1); (N_b), (B_2), (B_1) etc. son los vértices del pirmer triangulo de Brocard.

Otras várias propiedades podrian citarse pero reservamos para una tercera nota la parte de aplicacion (en particular á la geometria del triangulo) que facilmente se deduce de la consideracion y estudio de los *circulos radicales y anti-radicales*.

CONGRESSO INTERNACIONAL DOS MATHEMATICOS, EM ZURICH, EM 1897

Em agosto do anno corrente hade reunir-se em Zurich um Congresso internacional dos mathematicos. O bom acolhimento que esta ideia teve de parte dos mathematicos os mais eminentes e a excellente posição do lugar escolhido para a reunião do Congresso fazem esperar que elle será muito concorrido e dará os melhores resultados. Eis a circular que vem de ser dirigida aos geometras pelos membros da commissão encarregada de preparar este Congresso.

«*Monsieur :* — Vous n'ignorez pas que l'idée d'un congrès international des mathématiciens a été, dans ces derniers temps surtout, l'objet de nombreuses délibérations de la part des savants intéressés à sa réalisation. Il leur a paru, en raison des excellents résultats obtenus dans d'autres domaines scientifiques, par une entente internationale, qu'il y aurait de très sérieux avantages à assurer l'exécution de ce projet.

«A la suite d'un échange de vues très actif on tomba d'accord sur un premier point. C'est que la Suisse, par sa situation géographique centrale, par ses traditions et son expérience des congrès internationaux, paraissait toute désignée pour tenter un premier essai de réunion des mathématiciens. On voulut bien ensuite choisir Zurich comme siège du congrès.

«Les mathématiciens de Zurich ne se font aucune illusion sur les difficultés qu'ils auront à surmonter. Mais, dans l'intérêt même de cette entreprise, ils ont pensé ne pouvoir décliner les ouvertures si honorables qui leur ont été faites de tous côtés. Ils se décidèrent donc à prendre toutes les mesures préparatoires pour le futur congrès et à contribuer à sa réussite dans la mesure de leurs forces. Ainsi se constitua, avec le concours de mathématiciens d'autres nations, le comité d'organisation soussigné, chargé de réunir à Zurich, en 1897, les mathématiciens du monde entier.

«Le congrès, auquel vous êtres cordialement prié d'assister, aura lieu, à Zurich, les 9, 10 et 11 août 1897, dans les salles de l'Ecole polytechnique fédérale, Le comité ne manquera pas de vous communiquer, en temps opportun, le texte du programme arrêté en vous priant de lui envoyer votre adhésion. Mais, dès à présent, il est permis d'observer que les travaux scientifiques et les questions d'ordre administratif porteront essentiellement sur des sujet d'intérêt général ou d'importance reconnue.

«Les congrès scientifiques ont aussi ce précieux avantage de favoriser et d'entretenir les relations personnelles. Le comité local ne manquera pas d'accorder toute sa sollicitude à cette partie de sa tâche et, dans ce but, il élaborera un modeste programme de fêtes et de réunions intimes.

«Puissent les espérances fondées sur ce premier congrès se réaliser pleinement! Puissent de nombreux participants contribuer par leur présence à créer, entre collègues, non seulement des rapports scientifiques suivis, mais encore des relations cordiales basées sur une connaissance personnelle ! Puisse enfin notre congrès servir à l'avancement et au progrès des sciences mathématiques !»

SOBRE AS VELOCIDADES NA ESPIRAL

POR

ANTONIO CABREIRA

---

1. *As espiraes de Archimedes e logarithmica imprimem movimento accelerado ao ponto movel que as percorre; a hyperbolica imprime-lhe um movimento retardado.*

Estas curvas podem representar-se pelas seguintes equações que deduzimos na nossa memoria «Sobre a geometria da espiral» :

$$r = \frac{\alpha}{\pi}\theta, \quad r\theta = \alpha\pi, \quad r = \alpha^{\frac{\theta}{\pi}}. \tag{1}$$

Ora, se θ no fim do tempo unidade fôr π, no fim do tempo t, terá o valor

$$\theta = \pi t;$$

d'onde

$$r = \alpha t, \quad r = \frac{\alpha}{t}, \quad r = \alpha^t. \tag{2}$$

Introduzindo as derivadas do vector, em relação á variavel tempo, na formula

$$v=\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

que exprime a velocidade d'um ponto movel que percorre qualquer curva, vem, respectivamente,

$$v_1=\alpha\left[1+(\pi t)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (3)$$

$$v_2=\frac{\alpha}{t^2}\left[1+(\pi t)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (4)$$

$$v_3=\alpha^t(l^2\alpha+\pi^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (5)$$

Derivando estas velocidades em relação á mesma variavel, obtemos as quantidades

$$\frac{dv_1}{dt}=\frac{\pi^2\alpha t}{\left[1+(\pi t)^2\right]^{\frac{1}{2}}}, \qquad (6)$$

$$\frac{dv_2}{dt}=-\alpha\frac{2+(\pi t)^2}{\left[1+(\pi t)^2\right]^{\frac{1}{2}}t^3}, \qquad (7)$$

$$\frac{dv_3}{dt}=\alpha^t(l^2\alpha+\pi^2)^{\frac{1}{2}}\,l\alpha, \qquad (8)$$

Logo a velocidade do movimento sobre a primeira e ultima espiral augmenta com t e a do movimento sobre a segunda diminue com t. Quando t tende para ∞, a acceleração na primeira espiral tende para $\pi\alpha$, na segunda para 0 e na terceira para ∞.

2. *O quociente das velocidades de dois pontos moveis que, simultaneamente e respectivamente percorrem as espiraes de Archimedes e hyperbolica, cuja caracteristica geometrica é commum, representa o quadrado do tempo decorrido.*

Com effeito, dividindo a formula (3) pela (4) vem

$$\frac{v_1}{v_2}=t^2, \tag{9}$$

visto, pela hypothese figurada, serem communs α e t.

3. *O dobro da raiz quadrada do quociente das velocidades de dois pontos moveis que simultaneamente e respectivamente percorrem as espiraes de Archimedes e hyperbolica, de commum caracteristica geometrica, representa o quebrado, cujo numerador é a differença entre o producto da acceleração sobre a primeira curva pelo velocidade sobre a segunda, e o producto da velocidade sobre a primeira pela acceleração sobre a segunda, e cujo denominador é o quadrado da velocidade sobre a segunda.*

Derivando, na expressão (9), v_1 e v_2 relativamente a t, vem

$$\frac{\frac{dv_1}{dt}v_2-v_1\frac{dv_2}{dt}}{v_2^2}=2t=2\sqrt{\frac{v_1}{v_2}}. \tag{10}$$

4. *A acceleração d'um ponto movel que percorre a espiral logarithmica é egual ao producto da velocidade correspondente pelo logarithmo neperiano da caracteristica geometrica.*

É a conclusão que se tira, comparando as formulas (5) e (8).

BIBLIOGRAPHIA

E. Picard: Traité d'Analyse, t. III, Paris, Gauthier-Villars, 1896.

O terceiro volume da bella e importante obra do sr. Picard, do qual vamos dar uma rapida noticia, é quasi todo consagrado á theoria das equações differenciaes. Esta theoria, que tem tomado nos ultimos tempos uma extensão consideravel, é nelle exposta pelo eminente geometra francez com grande desenvolvimento, principalmente na parte que se refere ás questões de maior interesse na actualidade.

Nos primeiros capitulos do livro o auctor continua o estudo das singularidades dos integraes das equações differenciaes, principiado no volume anterior. A este assumpto são consagrados o capitulo I, onde são expostas as generalidades sobre as singularidades das equações differenciaes, o capitulo II, onde são estudadas as singularidades dos integraes das equações differenciaes de primeira ordem a duas variaveis, o capitulo III, que se refere ás soluções singulares das equações differenciaes ordinarias, e o capitulo IV, onde o auctor se occupa de algumas classes particulares de equações differenciaes.

No capitulo V da obra volta o sr. Picard a occupar-se do importante methodo de aproximações successivas, já considerado no volume anterior e ao qual elle tem consagrado importantes trabalhos. Este methodo, é aproveitado no capitulo VI, para o estudo profundo da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{A}(x)y = 0,$$

onde A (x) representa uma funcção positiva de x entre dous numeros dados, e, no capitulo VII, para o estudo de algumas equações não lineares.

Nos capitulos VIII, IX e X são expostos os profundos trabalhos de Poincaré sobre as soluções periodicas e as soluções asymptoticas de certas equações differenciaes, sobre os pontos singulares dos integraes reaes das equações de primeira ordem e sobre a fórma das curvas que satisfazem a uma equação differencial de primeira ordem e do primeiro gráo.

A vasta theoria das equações differenciaes lineares de qualquer ordem é o objecto dos capitulos seguintes, principiando no capitulo XI pela exposição das generalidades sobre os pontos singulares das equações differenciaes lineares, seguindo nos capitulos XII e XIII a theoria das funcções hypergeometricas, no capitulo XIV o estudo de certas equações differenciaes irregulares no infinito e no capitulo XV o estudo de algumas equações integraveis. Os dois ultimos capitulos do livro são consagrados á theoria importante e difficil das substituições, sendo no primeiro expostas com todo o desenvolvimento as ideias de Galois sobre a theoria das equações algebricas como preparação para o estudo, no capitulo seguinte, da theoria correspondente nas equações differenciaes.

O sabio illustre a quem é devida a presente obra tem sido um dos que principalmente têm concorrido para os progressos rapidos que a theoria das equações differenciaes tem feito nos ultimos annos; por isso na sua obra ha muita originalidade e uma grande profundeza no modo de estudar as questões difficeis a que é consagrada.

C. de Freycinet: Essais sur la Philosophie des Sciences, Paris, Gauthier-Villars, 1896.

Lê-se com vivo prazer esta interessante obra, que versa sobre a philosophia da Analyse e da Mecanica. Para se ver qual a ordem de ideias que presidiu á sua concepção, nada podemos fazer de melhor do que transcrever as palavras pronunciadas pelo seu illustre auctor, quando a apresentou á Academia das Sciencias de Paris.

«As sciencias não se limitam a estender o dominio dos nossos conhecimentos positivos. Ellas tornam-se por seu turno um objecto de estudo para o espirito, que ama o tirar d'ellas o pensamento philosophico, definir seus methodos e seus processos, remontar até aos seus principios e conhecer os laços que as ligam ás ideias geraes, fundo commum onde se alimentam os diversos ramos do saber humano. Haveria interesse em que, de tempos a tempos, cada sciencia fosse resumida, segundo este ponto de vista e em certo modo inventariada de maneira a offerecer ao publico illustrado os seus resultados os mais caracteristicos. Eu ensaiei executar este trabalho sobre dois ramos de que me tenho mais particularmente occupado: a Analyse infinitesimal e a Macanica racional. As pessoas que procurassem na minha obra um tratado mais ou menos didactico estariam inteiramente enganadas. Não encontrarão n'ella senão um resumo philosophico, em linguagem ordinaria, sem fórmulas nem figuras geometricas, e que procurei tornar assecivel a todos os espiritos cultos.

«Propuz-me sobretudo mostrar o caminho no qual eu desejaria ver os sabios entrar. Meu fim seria attingido se eu decidisse certos d'elles a realçar, por sua auctoridade, este genero de trabalhos, e, se inspirasse desde já a alguns litteratos o gosto de se approximar de duas sciencias mais faceis de penetrar do que se suppõe, e que marcam um dos mais poderosos esforços do espirito humano na indagação da verdade».

A obra está dividida em duas partes. Na primeira, relativa á Analyse, são consideradas as noções de espaço, de tempo, de infinito, de continuidade e divisibilidade, de infinitamente pequeno e de limite, e é analysado o espirito philosophico do methodo infinitesimal e da Analyse infinitesimal. Na segunda parte, relativa á Mecanica, são consideradas as noções de força, massa, capacidade dynamica, quantidade de movimento, força viva e energia, a gravidade, as leis geraes do movimento, etc. Terminam o livro tres notas interessantes, a primeira sobre a realidade do espaço e do tempo, a segunda sobre a infinidade do Universo, a terceira sobre um argumento do determinismo.

Demartres: Cours d'Analyse, Troisième partie. Paris, Hermann, 1896.

A terceira parte do Curso professado pelo sr. Demartres na Faculdade das Sciencias de Lille versa sobre a theoria das equações differenciaes. Sem saír do campo elementar o auctor ahi expõe com clareza e rigor logico o que existe sobre esta doutrina de fundamental ou de mais importante. Principia pelas generalidades relativas aos systemas de equações differenciaes, a que consagra quatro lições. Passa ao estudo dos methodos de integração, aos quaes consagra tres lições. Veem depois seis lições sobre a integração das equações de ordem superior e das equações simultaneas, tres lições sobre a integração das equações ás derivadas parciaes e finalmente tres lições sobre o calculo das variações.

Para a exposição dos principios geraes o auctor inspirou-se principalmente nos trabalhos de Cauchy.

M. d'Ocagne: Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale, Paris, Gauthier-Villars, 1896.

Contém esta obra excellente os assumptos que o sr. d'Ocagne ensina no Curso que professa na Escola de pontes e estradas de Paris, e ainda outros assumptos geometricos que podem interessar aos engenheiros. Estes assumptos estão separados em dois grupos, um contendo tudo o que se refere á representação dos corpos *(Geometria descriptiva)*, o outro tudo o que se refere ás suas propriedades intrinsecas *(Geometria infinitesimal)*.

Na exposição d'estes assumptos, que é feita com muita clareza e elegancia, o sr. d'Ocagne não emprega exclusivamente, como outros auctores, os methodos puramente geometricos, mas sim combina os methodos analyticos com os methodos geometricos, empregando em cada circumstancia especial aquelle de que mais convém usar, tendo em vista a natureza da questão considerada. Tambem em cada questão expõe primeiramente os methodos geraes, ao estudo dos quaes dedica a maior attenção, para depois expôr os assumptos de natureza mais particular.

A primeira parte da obra está dividida em quatro capitulos, onde são respectivamente consideradas as projecções cotadas, a prespectiva axonometrica, a theoria das sombras e a perspectiva linear. A segunda parte está tambem dividida em quatro capitulos, onde o auctor estuda respectivamente as curvas planas, as curvas empenadas, as superficies em geral e algumas superficies de natureza especial (superficies envolventes de espheras, superficies empenadas, superficies planificaveis). Na exposição dos assumptos d'esta segunda parte nota-se o cuidado que o auctor emprega para dar ás demonstrações das fórmulas infinitesimaes, obtidas geometricamente, o rigor das demonstrações analyticas.

É consideravel o uumero de passagens da obra em que se encoutram vistas originaes do auctor. Demonstrações novas de theoremas conhecidos, construcções mais simples do que as conhecidas, fórmas de exposição mais claras e rigorosas do que as anteriormente empregadas encontram-se em muitos logares do bello livro do sr. d'Ocagne, em especial na parte que se refere á Geometria infinitesimal. Não mencionaremos aqui quaes estes logares que merecem mais attenção, porque o espaço de que dispomos não o permitte; limitar-nos-hemos a aconselhar vivamente aos engenheiros e aos geometras portuguezes este livro, interessante para os primeiros, pelas construcções geometricas que encerra e de que poderão aproveitar-se, para os segundos pelos methodos e theoremas que n'elle são expostos.

B. Niewenglowski: Cours de Géométrie analytique, t. III, Paris, Gauthier-Villars, 1896.

Deu-se já n'este jornal noticia dos tomos 1.° e 2.° do Curso de Geometria analytica do sr. Niewenglowski, os quaes são consagrados á Geometria plana. O presente volume é consagrado á Geometria no espaço e é, como os anteriores, um livro excellente, onde os assumptos de Geometria a tres dimensões são expostos com grande clareza desde os primeiros principios até ás questões mais elevadas.

Por um resumo que vamos apresentar da taboa das materias, póde apreciar-se a abundancia de assumptos da obra e a sua importancia:

I Coordenadas. II Transformação das coordenadas rectilineas. III Plano e linha recta. IV Pontos, rectas, planos imaginarios. V Esphera. VI Curvas empenadas; tangentes, plano osculador, curvaturas. VII Planos tangentes. VIII Logares geometricos. Geração das superficies ou das linhas. IX Noções sobre as superficies regradas. X Envolventes. XI Noções sobre os systemas de rectas. Complexos. Congruencias. XII Figuras homotheticas. XIII Classificação das quadricas referidas a coordenadas pontuaes. XIV Theoria do centro. XV Planos diametraes. Diametros. XVI Planos principaes. Cordas principaes. Eixos. Equação em S. XVII Reducção da equação do segundo gráo. XIX Polares reciprocas. XX Propriedades dos diametros conjugados nas quadricas com centro. XXI Cónes do segundo gráo. XXII Planos tangentes; Esphera de Monge; logares dos vertices dos cónes de revolução circunscriptos a uma quadrica. XXIII Normaes. XXIV Generatrizes rectilineas. XXV Secções circulares XXVI Discussão de uma equação numerica do segundo gráo. XXVII Determinação das quadricas. XXVIII Intersecção de duas quadricas. XXIX Focaes. Quadricas homofocaes. XXX Elementos de uma secção plana de uma quadrica. XXXI Applicação dos imaginarios á Geometria analytica a tres dimensões.

Todos estes assumptos são expostos com desenvolvimento e são acompanhados de exercicios interessantes.

Termina o volume uma nota interessante de M. Borel, onde é exposta com desenvolvimento a theoria das transformações em Geometria.

X. Antomari: Leçons de Statique, Paris, Nony, 1897.

É exposta n'este opusculo com muita clareza e bom methodo a parte da Statica exigida pelos modernos programmas aos candidatos á Escola Polytechnica de Paris. Está dividido em duas partes, sendo a primeira consagrada á statica do ponto e a segunda á statica dos systemas invariaveis.

A primeira parte consta de cinco capitulos onde são considerados os assumptos seguintes: I Primeiras noções sobre as forças;

dynamometros. II Composição de muitas forças applicadas a um mesmo ponto. III Theorema das projecções applicado ás forças. IV Theoremas sobre os momentos. V Equilibrio de um ponto collocado sobre uma linha ou sobre uma superficie.

A segunda parte contém seis capitulos, onde são estudadas as questões seguintes:

I Noções preliminares. II Theoria das forças parallelas. III Theoria dos centros de gravidade. IV Reducção das forças applicadas a um corpo solido. Equilibrio de um corpo. V Equilibrio de um corpo solido submettido a ligações. VI Equilibrio das machinas.

No fim de cada uma das partes do livro vem uma lista de exercicios relativos aos assumptos n'ella considerados, sendo 41 relativos aos assumptos da primeira parte, 133 relativos aos assumptos da segunda. Estes exercicios são muito bem escolhidos.

J. Tannery et J. Molk: Éléments de la théorie des fonctions elliptiques, Paris, t. II, Gauthier-Villars, 1896.

No 1.º volume d'esta bella e importante obra, do qual se deu já noticia n'este jornal, os auctores, depois de considerarem algumas questões de Analyse necessarias para o seu fim, estudaram, como dissémos, com desenvolvimento a theoria das funcções p, σ e ζ de Weierstrass. O segundo volume, de que hoje damos noticia, é consagrado á theoria das funcções θ de Jacobi, ao estudo de algumas funcções introduzidas na sciencia pelo sr. Hermite, cuja theoria está ligada com a d'aquellas funcções, e ao estudo dos quocientes das funcções σ e das funcções θ. As funcções θ são definidas pelas series periodicas de Jacobi, ás quaes os auctores são conduzidos pelos desenvolvimentos, que primeiramente obtéem, das funcções σ em series de exponenciaes; as propriedades das funcções θ são deduzidas das propriedades das funcções σ, anteriormente estudadas, por intermedio das relações d'estas funcções. N'este volume é tambem considerada a theoria das transformações das funções θ e dos seus quocientes, á qual é consagrada uma parte importante do volume.

Os auctores tiveram a feliz ideia de junctar a este volume uma tabella das formulas relativas á theoria das funcções ellipticas demonstradas n'elle e no anterior. Isto é tanto mais de apreciar quanto é certo que o numero das formulas, a que dá logar a theoria das funcções ellipticas, é muito consideravel e d'ahi vem a difficuldade de as reter na memoria. Estas formulas estão dispostas ordenadamente em 90 grupos, contendo cada um certo numero de formulas que téem entre si affinidade.

E. Pascal: I determinanti. Theoria ed applicazioni, U. Hoepli, Milano, 1897.

A secção mathematica da collecção de *Manuaes Hoepli,* a que por varias vezes nos temos referido n'este jornal, foi enriquecida com mais um volume, devido ao sabio professor da Universidade de Pavia, sr. E. Pascal, o qual versa sobre a theoria dos determinantes e suas applicações. É um volume de 330 paginas, muito bem escripto, no qual o auctor condensou com muita habilidade tudo o que de mais importante existe sobre esta doutrina, incluindo mesmo muitos assumptos que não faziam parte dos tratados sobre determinantes anteriormente publicados, acompanhando cada assumpto de preciosas informações bibliographicas, que permittem aos leitores conhecer as origens de cada questão estudada e os habilitam a proseguir o estudo dos assumptos considerados no livro.

O livro está dividido em duas partes. Na primeira parte são expostos os principios da theoria e os methodos geraes para o calculo dos determinantes. Na segunda parte são expostos os trabalhos de caracter mais especial e as applicações. Estas applicações são todas analyticas; o auctor entendeu, e muito bem, que as applicações geometricas devem estudar-se nos livros de Geometria analytica,

Para organizar este trabalho o sr. Pascal entrou em consideração com os trabalhos mais modernos sobre o assumpto estudado; por isso o seu livro é o mais proprio que existe para se conhecer o estado actual da importante doutrina a que é consagrado.

X. Antomari: Cours de Géométrie descriptive, Paris. Nony, 1897.

O curso de Geometria descriptiva, que vem de publicar o sr. Antomari, é destinado aos alumnos que se preparam para a Escola Polytechnica, Escola Normal superior, Escola central, etc., de Paris, e contém por isso os assumptos que fazem parte dos programmas para a entrada para essas escolas. É um bom livro de texto, muito claro, contendo a parte elementar da Geometria descriptiva, desde os primeiros principios, com muitos problemas proprios para os alumnos se desenvolverem na arte das construcções, que entre nós póde ser empregado com vantagem pelos alumnos das nossas escolas no estudo da primeira parte da sciencia a que é consagrado.

A obra está dividida em quatro partes. A primeira parte, consagrada aos principios da Geometria descriptiva, consta de uma introducção, onde são expostos os methodos de projecção conica e cylindrica, e de oito capitulos, cujos assumptos são os seguintes: I Representação dos corpos. II Linha recta. III O plano. IV A recta e o plano combinados. V Os methodos de Geometria descriptiva (mudança dos planos de projecção, rotações, rebatimentos). VI Distancias e angulos; applicação á construcção dos angulos triédros. VII Secções planas; intersecções e sombras dos polyedros. VIII Noções de Geometria cotada.

A segunda parte consta de quatro capitulos, onde são estudadas a representação das superficies e a construcção dos planos tangentes, e, em especial, a representação dos cylindros, dos cónes e das superficies de revolução e a construcção dos seus planos tangeutes.

Na terceira parte occupa-se o auctor das secções planas das superficies, e, em especial, das secções planas dos cylindros, cónes e superficies de revolução.

A quarta parte é consagrada á determinação das intersecções das superficies, e consta de tres capitulos, onde são respectivamente consideradas a intersecção de duas superficies conicas ou cylindricas, as intersecções do cóne ou do cylindro com as superficies de revolução e a intersecção de duas superficies de revolução.

Lucien Lévy: Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonaux (Mémoires couronnés de l'Académie de Belgique, t. LIV, 1896).

O assumpto d'esta interessante Memoria é a theoria dos systemas de superficies triplamente orthogonaes. Principía por uma parte historica, onde o auctor dá noticia de todos os trabalhos importantes, publicados nos ultimos trinta annos, a respeito d'esta questão. Ao estudo da parte essencial d'estes trabalhos são consagrados os quatro primeiros capitulos. No quinto capitulo o auctor apresenta as suas indagações sobre a determinação dos systemas orthogonaes dos quaes uma familia de trajectorias é espherica. N'uma série de notas são depois desenvolvidos ou completados alguns pontos da Memoria.

Jorge F. d'Avillez: Nota sobre algumas proposições de Geometria (Jornal de sciencias math., physicas e naturaes, 1896).
—— *Sobre a área de um triangulo parabolico (Item).*
—— *Sobre um systema tri-tangente (Item).*

Estes tres trabalhos interessantes revelam no seu joven auctor feliz disposição para trabalhos geometricos. O primeiro versa sobre algumas consequencias da proposição seguinte: *é constante a grandeza da recta que une os pés das perpendiculares tiradas de qualquer ponto de uma circumferencia sobre dois diametros dados.* No segundo determina o auctor a área do triangulo formado pelos tres parabolas consideradas no vol. XII, pag. 137, d'este jornal. No terceiro estuda as propriedades dos circulos tangentes interiormente á ellipse nas extremidades do eixo menor, e tangentes exteriormente um ao outro, o centro de um d'estes circulos estando no ponto em que a normal á curva n'um ponto dado corta o eixo considerado.

Annuaire pour l'an 1897 publié par le Bureau des Longitudes, Paris, G.-Villars.

O *Annuaire du Boreau des Longitudes* para 1897 contém as informações praticas que é uso conter cada anno, noticias devidas aos sabios mais illustres, sobre a Estatistica, a Geographia, a Mineralogia, etc., e finalmente as noticias scientificas seguintes:

1.° *Noticia sobre o movimento proprio do systema solar,* por F. Tisserand.

2.° *Os raios cathodicos e os raios Röntgen,* por H. Poincaré.

3.° *As epochas na Historia astronomica dos planetas,* por J. Janssen.

4.° *Noticia sobre a quarta reunião da Commissão internacional para a execução da carta photographica do céo,* por F. Tisserand.

5.° *Noticia sobre os trabalhos da Commissão internacional das estrellas fundamentaes,* por F. Tisserand.

6.° *Discurso pronunciado nos funeraes de H. Fizeau,* por A. Cornu.

7.° *Discursos pronunciados nos funeraes de Tisserand,* por Poincaré, J. Janssen e Loewy.

8.° *Trabalhos no Monte Branco em 1896,* por J. Janssen.

A. Capelli: Sopra un principio generale di Aritmetica ed una nuova deduzione del teorema di Hilbert (Rend. della R. Accademia della Scienze di Napoli, 1896).

—— Estensione del teorema di Hilbert al caso di polinomi con infiniti termi (Item).

R. Marcolongo: Sula equazione $\Delta_2 U + K^2 U = 0$ *in uno spazio di* n *dimensioni (Annali di Matematica, 1896).*

A. Gützmer: Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichungen, Halle a. S., 1896.

—— Remarque sur la formule théta de Jacob (Nouvelles Annales des Mathématiques, 1896).

O primeiro d'estes opusculos contém a these apresentada pelo sr. Gützmer á Universidade de Halle. O segundo contém uma bella demonstração da relação entre os productos das quatro funcções théta, que Jacobi tomou para base da theoria das funcções ellipticas no seu Curso em Königsberg.

M. Lerch: Sur une espèce de séries semiconvergentes (Académie des Sciences de Prague, 1896).

——*Sur la transformation abélienne des séries trigonométriques (Item).*

——*Sur un théorème arithmétique de Zolotarev (Item).*

——*Uvahy z poctu integrál niho (Item).*

E. Lampe: Ueber Körper grösseter Anziehung (Verh. der Physikalischen Gesellsehaft zu Berlin, 1896).

Alf Guldberg: Zur Theorie der Differentialgleichungen die Funda mentallösungen besitzen (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 115).

——*Om en speciel klasse lineaere homogene differentialligninger (Christiania Videnskabs-Sélikabs Forhandlinger, No. 9).*

G. Peano: Saggio di Calculo geometrico (Atti delle R. Accademia delle Scienze di Torino, 1896).

Giovanni Vailati: Del concetto di centro di gravitá nella Statica d'Archimede (Atti della R. Accademia di Torino, 1897).

S. Pincherle: Sulla generalizzazione della proprietá del determinante wronskiano (*Rend. della R. Accademia dei Lincei, 1897*).

—— *Cenno Sulla Geometria dello spazio funzionale* (*Rendiconti della R. Accademia di Bologne, 1897*).

G. Maupin: Quelques réflexions sur le jeu de la manille aux enchéres, Paris, Nony, 1897.

H. Burkhardt: Uber Vectoranalysis (*Jahresbericht der Deutchen Mathematiker Vereinigung, t. v*).

G. T.

SOBRE OS COEFFICIENTES DO DESENVOLVIMENTO DA POTENCIA DE GRAU QUALQUER D'UM POLYNOMIO

POR

J. Pedro Teixeira

Os coefficientes $\dfrac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\mu!}$ *do desenvolvimento da potencia do grau* n *d'um polynomio, correspondentes aos valores de* $\alpha, \beta,\ldots \mu$, *primos entre si, são multiplos de* n.

Com effeito, sejam $\alpha, \beta,\ldots \mu$ primos entre si e dividamos estes numeros e $n-1$ por um inteiro positivo a. Sendo $\alpha_1, \beta_1, \ldots \mu_1$, $(n-1)_1$ os quocientes e $\alpha', \beta',\ldots \mu'$, $(n-1)'$ os restos das divisões, a equação

$$\alpha+\beta+\ldots+\mu=n$$

dá

$$(n-1)_1=\alpha_1+\beta_1+\ldots+\mu_1+\frac{\alpha'+\beta'+\ldots+\mu'}{a}-\frac{(n-1)'+1}{a}.$$

Como $\alpha', \beta',\ldots \mu'$ não podem ser conjunctamente nullos e como os restos das divisões $\dfrac{\alpha'+\beta'+\ldots+\mu'}{a}$, $\dfrac{(n-1)'+1}{a}$ devem ser eguaes, teremos

$$\alpha'+\beta'+\ldots\mu' \geqq (n-1)'+1,$$

e por isso

$$(n-1)_1 \geqq \alpha_1+\beta_1+\ldots+\mu_1.$$

Sendo $(n-1)_2$, α_2, β_2,... μ_2 a respeito de $(n-1)_1$, α_1, β_1,... μ_1 o que estas quantidades são a respeito de $n-1$, α, β,... μ, facilmente se vê que

$$(n-1)_2 \geqq \alpha_2+\beta_2+\ldots+\mu_2$$

e assim por deante.

Mas as maiores potencias d'um numero primo a que dividem

$$(n-1)!, \; \alpha!\,\beta!\ldots\mu!$$

são respectivamente

$$a^{\Sigma(n-1)_i}, \quad a^{\Sigma\alpha_i+\Sigma\beta_i+\ldots+\Sigma\mu_i};$$

logo

$$\frac{(n-1)!}{\alpha!\,\beta!,\ldots\mu!}$$

é um inteiro, o que demonstra o theorema.

Como corollario d'este theorema temos esta proposição:

$$\frac{(n-1)!}{\alpha!\,\beta!\ldots\mu!}$$

é um inteiro para os valores de $\alpha, \beta, \ldots \mu$ que constituem as soluções inteiras e positivas das equações

$$\alpha+\beta\ldots+\mu=n,$$

$$\beta+2\gamma+\ldots+m\mu=n-1.$$

Estes inteiros encontram-se como coefficientes dos termos de certas series que se obtem pelo theorema de Lagrange.

BIBLIOGRAPHIA

E. Pascal: Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finita, U. Hoepli, Milano, 1897.

O volume, de que vamos dar noticia, consta de duas partes, a primeira consagrada ao Calculo das variações, a segunda ao Calculo das differenças finitas.

Na primeira parte o sr. Pascal segue com cuidado o encadeamento dos trabalhos a que tem dado logar o calculo das variações, principiando pela historia dos trabalhos anteriores aos de Lagrange, passando depois a expôr os d'este illustre geometra e em seguida os numerosos trabalhos, publicados pelos geometras, para dar á doutrina de Lagrange o rigor que lhe faltava em alguns pontos e para a continuar. Assim organisada, a bella obra do sr. Pascal não só satisfaz ao fim de fazer conhecer o estado actual do assumpto a que é consagrada, mas faz conhecer a ordem dos progressos realizados n'este assumpto até chegar a este estado.

Todos os problemas relativos ao calculo das variações podem ser agrupados, como diz o sr. Pascal, á roda de tres problemas fundamentaes, o primeiro relativo á primeira varlação dos integraes simples, o segundo relativo á variação de segunda ordem dos mesmos integraes, o terceiro relativo ás variações dos integraes multiplos com limites variaveis. Todos estes problemas são considerados pelo sabio professor da Universidade de Pavia no seu bello trabalho, sendo a respeito de cada um d'elles apresentado o que existe de mais essencial e sendo a exposição acompanhada de muitas indicações bibliographicas para uso dos que quizerem estudar com maior desenvolvimento cada assumpto especial. Os problemas notaveis que teem sido resolvidos por meio do calculo das variações são tambem apresentados e acompanhados da sua historia e da sua bibliographia.

A segunda parte do livro que estamos considerando é, como já dissemos, consagrado ao calculo das differenças finitas. N'ella é exposto o que existe de mais importante a respeito do calculo directo das differenças e da interpolação, e são apresentadas algumas noções sobre o calculo inverso das differenças. A exposição é acompanhada, como no calculo das variações, de preciosas indicações bibliographicas, proprias a habilitar o leitor para um estudo largo do assumpto.

Ao que vem de ser dito acrescentaremos que o volume, a que nos estamos referindo, faz parte da magnifica collecção do *Manuali Hoepli*, a que já por varias vezes nos temos referido n'este jornal, a qual o sr. Pascal tem illustrado com excellentes trabalhos.

Oeuvres mathématiques de Evariste Galois. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1897.

Evariste Galois nasceu perto de Paris em 25 de outubro de 1811 e morreu n'esta cidade, em resultado de um ferimento que recebeu em um duelo, em 31 de maio de 1832. Pois, apesar de uma vida tão curta, que não chegou mesmo a attingir 21 annos, deixou trabalhos da mais alta importancia sobre a theoria das equações algebricas, que representam n'esta theoria um papel fundamental e que revelam quanto era extraordinario o genio d'este joven tão grande e tão infeliz, do qual diz M. Picard, no prefacio que antecede as suas obras : *Galois tem sem duvida eguaes entre os grandes mathematicos d'este seculo; nenhum porém o excede pela originalidade e profundeza de suas concepções.*

As obras de Galois foram publicadas em 1846 por Liouville no seu jornal. A importancia d'ellas levou a Sociedade mathematica de França a reunil-as em um volume, que vem de ser publicado por M. G.-Villars. Contém este volume cinco artigos publicados por Galois nos *Annales* de Gergonne e no *Bulletin* de Férussac, a carta dirigida por Galois a Augusto Chevalier na vespora de sua morte, especie de testamento scientifico em que o grande geometra dá parte dos trabalhos que fez sobre a theoria das equações e sobre a analyse, a sua celebre memoria sobre as condições de resolubilidade das equações por meio de radicaes e finalmente um fragmento sobre as equações primitivas que podem ser resolvidas por meio de radicaes.

In memoriam N. I. Lobatschevskii, Kasan, 1897.

Contém este volume algumas memorias apresentadas á Sociedade Physico-mathematica de Kasan na occasião da festa da inauguração do monumento levantado ao eminente geometra russo Lobatschevsky n'esta cidade, a qual teve logar em setembro de 1896.

A primeira memoria contida no volume considerado é devida ao sr. Hermite. N'ella applica o grande geometra a theoria da transformação de segunda ordem na theoria das funcções ellipticas á demonstração de dois desenvolvimentos em serie notaveis. Vêem depois artigos de G. Halsted sobre darwinismo e geometria não euclideana, de P. Girardville sobre a theoria do vôo das aves, de Laisant sobre a curvatura das curvas planas, de Lemoine sobre duas novas decomposições dos numeros inteiros, sobre a Géometrographia e sobre a transformação continua no triangulo e no tetraédro, de Neuberg sobre um problema de Jacobi, e de M. d'Ocagne sobre a representação por meio de rectas e de circulos das equações do terceiro grão a tres variaveis.

B. Baillaud: Cours d'Astronomie, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893-1896.

As doutrinas do Curso de Astronomia que acaba de publicar o sr. Baillaud, director do Observatorio de Toulouse, estão distribuidas em dois volumes, o primeiro dos quaes foi publicado em 1893 e o segundo em 1896. O primeiro volume é consagrado á exposição de certos assumptos do interesse não só para os astronomos mas tambom para os que se occupam d'outras sciencias de observação. O segundo volume é consagrado á Astronomia propriamente dita. Os assumptos tanto do primeiro como do segundo volume são muito bem escolhidos, estão dispostos em muito boa ordem e são muite bem tratados quer na parte theorica quer na parte pratica.

O primeiro volume da obra que estamos considerando está dividido em nove capitulos. Nos dois primeiros é estudada a theoria das probabilidades e o methodo dos menores quadrados. Os capitulos III, IV, V e VI são consagrados aos assumptos d'Optica necessarios para bem conhecer os instrumentos opticos que se usam nas observações. Para esse fim são estudadas com bastante desenvolvimento a theoria das lentes, a dos prismas e a dos instrumentos opticos (oculos, microscopios, telescopios, etc.). O capitulo VII é consagrado ao estudo dos instrumentos para a medida do tempo, ao estudo dos instrumentos accessorios das observações (nivel, nonio, microscopio micrometrico, etc.), e ao estudo dos instrumentos para a medida das coordenadas dos astros. No capitulo VIII é estudada a Trigonometria espherica e são expostos alguns preceitos a que se deve attender quando se effectuam os calculos numericos. Finalmente o capitulo IX é consagrado a algumas questões de Analyse applicaveis em Astronomia, como são a theoria das differenças, a interpolação, os methodos para o calculo approximado dos integraes definidos, a theoria das series trigonometricas, etc.

O segundo volume, muito mais extenso do que o primeiro, é todo consagrado á Astronomia e está dividido em vinte e um capitulos, onde são estudados os assumptos seguintes: I Esphera celeste. Coordenadas dos astros. Movimento diurno. II Refracção. III Parallaxe. IV Aberração. V Precec̨ção dos equinocios. Nutação. VI Movimentos do sol. Medidas do tempo. VII Movimentos dos planetas, VIII e IX Determinação das orbitas dos planetas. X Movimento dos cometas. Determinação das suas orbitas. XI, XII e XIII Questões de Mechanica celeste (lei de Newton; equações dos movimentos dos planetas á roda do sol; perturbações planetarias, etc.). XIV Movimentos da lua. XV Movimentos dos satelites de Jupiter. XVI a XIX Fórma e medida da terra. Triangulações geodesicas. Cartas geographicas, etc. XX Rotação dos astros. Eclipses. XXI Distancias das estrellas. Spetroscopia. Photographia.

Todos os assumptos a que vimos de nos referir são estudados pelo illustre astronomo francez com muito desenvolvimento e por uma fórma que em ponto algum desmente a auctoridade que o seu nome dá á obra.

Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques, Paris, Gauthier-Villars et Fils.

Deu-se noticia no anterior volume d'este jornal do apparecimento da 1.ª serie de paginas d'este trabalho importante, cuja publicação foi resolvida, como dissémos, pelo Congresso de mathematica que teve logar em Paris na occasião da ultima exposição internacional.

Hoje podemos accrescentar que foram publicadas mais tres series de folhas, contendo cada uma cem folhas e abrangendo perto de tres mil trabalhos.

P. Mansion: Notice sur les travaux mathématiques de Eugène Charles Catalan, Bruxelles, 1896.

Contém este opusculo interessante uma noticia muito bem feita sobre os trabalhos de E. C. Catalan, nascido em Bruges em 1814, morto em Liège a 14 de fevereiro de 1894, e um retrato d'este illustre geometra.

E. Vivanti: Sulle equazioni a derivata parziali del second'ordine a tre variabili independenti (Mathematische Annalen, t. 48).
—— Contributo alla teoria delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine (Rendiconti del R. Inst. Lombardo, 1896).

No primeiro d'estes bellos trabalhos occupa-se o sr. Vivanti em extender o methodo de integração dado por Monge e Ampère para as equações ás derivadas parciaes de segunda ordem com duas variaveis independentes ás equações com tres variaveis independentes.

No segundo são consideradas pelo auctor as equações do mesmo typo com um numero qualquer de variaveis independentes.

A. Gützmer: Remarque sur la formule théta de Jacobi (Nouvelles Annales, 1896).

N'este artigo, traduzido por Laugel do *Jornal de Crelle*, onde foi primitivamente publicado, apresenta o sr. Gützmer uma bella demonstração da relação, descoberta por Jacobi, que liga os productos das quatro funcções θ.

Jacques Deruyts: Quelques propriétés du déterminant d'un système transformable (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1896).
—— Sur les fonctions invariantes associées à un systhème transformable (Ibidem).

G. Pirondini: Una questione geometrica (Annali di Matematica, 1896).

C. Burali-Forti: Exercice de traduction en symboles de Logique mathématique (Bulletin de Mathématiques élémentaires, 1897).
—— Una questione sui numeri transfiniti (Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1897).
—— Il metodo del Grassmann nella Geometria projettiva (Ibidem).
—— Sopra un teorema del sig. G. Cantor (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1896).
—— Le classi finite (Ibidem).

G. Lazzeri: Sopra un problema di Strategia navale (Revista marittima, Roma, 1896).

H. Faye: Sur les fausses trombes (Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de Paris, 1897).

Ch. Hermite: Notice sur M. Weierstrass (Comptes rendus de l'Academie des sciences de Paris, 1897).

E. Lampe: Karl Weierstrass. Gedächtnissrede gehatten in der sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 5 märz 1897; Leipzig, 1897.

G. de Longchamps: L'École Polytechnique à propos des récents programmes (Journal des mathématiques spéciales, 1897).

G. Peano: Studii di Logica matematica (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1897).

Gino Loria: I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali (Bul. da Sociedade R. das Sciencias de Praga, 1896).

—— *Versiera, Vesiera e Pseudo-versiera (Bibliotheca mathematica, 1897).*

M. *Lerch: Uber eine formel aus der Theorie der Gammafunction (Monatshefte für Mathematik, t. VIII).*

—— *Sur quelques formules concernant les fonctions elliptiques et les intégrales Eulériennes (Bul. da Sociedade Real das Sciencias de Praga, 1897).*

Giovani Vailati: Il principio dei lavori virtuali da Aristotele á Erone de Alessandria (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1897).

E. *Cesàro: Sulla distribuzione dei numeri primi (Rend. della R. Accademia delle Scienze di Napoli, 1896).*

A. *Macfarlane: Application of hyperbolic analysis to the discharge of a condensor (American Institute of Electrical Engineers, New-York, 1897).*

Ch. Hermite: Sur une formule de M. G. Fontené (Bulletin des sciences mathématiques, 1896).
—— *Sur la fonction log Γ (a) Journal für Mathematik, t. 115).*
—— *Sur une extension du théorème de Laurent (Ibitem, t, 116).*

G. T.

SUR LE CYLINDRE ORTHOGONAL Á QUELQUES SURFACES

PAR

GEMINIANO PIRONDINI

(à Parme)

§ 1

Dans ce travail on étude le cylindre orthogonal à un cône, à un autre cylindre, à un hélicoïde et à une surface de révolution. Soient:

V le point de l'axe des z placé à la distance k de l'origine; W le point du plan $y=0$ ayant pour coordonnées $x=m$, $z=n$; L une ligne à double courbure; A (x, y, z) un point quelconque de L; H et K les cônes passant par la ligne L et ayant les sommets aux points V, W; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ les cosinus directeurs des normales aux cônes H, K dans un point quelconque de L.

Puisque les cosinus directeurs des rayons VA, WA sont proportionnels á:

$$x,\ y,\ z-k;\quad x-m,\ y,\ z-n,$$

on a:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = yz' - (z-k)\,y' : (z-k)x' - xz' : xy' - yx'$$

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = yz' - (z-n)\,y' : (z-n)\,x' -$$

$$-(x-m)\,z' : (x-m)\,y' - yx'.$$

La condition d'orthogonalité des deux cônes le long de leur intersection L est donc exprimée par l'équation:

$$(1)\quad [yz' - (z-k)\,y']\,[yz' - (z-n)\,y'] + [(z-k)\,x' - xz']\,[(z-n)x' -$$

$$-(x-m)\,z'] + (xy' - yx'[(x-m)\,y' - yx'] = 0.$$

§ 2

Orthogonalité d'un cylindre et d'un cône.— Les génératrices du cylindre soient parallèles à l'axe des z et le sommet du cône soit à l'origine des axes.

Divisons par k l'équation qu'on dérive de l'égalité (1) en y supposant $m = n = o$, et ensuite faisons augmenter k jusqu'à l'infini. L'équation

$$(2)\qquad z'\,(xx' + yy') - z\,(x'^2 + y'^2) = 0$$

qu'on obtient, exprime l'orthogonalité du cylindre H et du cône K.

L'équation (2) est intégrable; et si l'on fait usage des coordonnées cylindriques, on a:

$$(3)\qquad \begin{cases} x=\mathrm{R}.\cos u \\ y=\mathrm{R}.\sin u \\ z= c.e^{\int\frac{R^2+R'^2}{RR'}du}=c.\mathrm{R}e^{\int\frac{R}{R'}du}, \end{cases}$$

c étant une constante arbitraire et (R, u) les coordonnés polaires sur le plan $z=0$.

Il y a donc une infinité de cônes K coupant un cylindre donné H à angle droit: lorsqu'on connaît la ligne L où le cylindre H est coupé par un des cônes K, on obtient les autres lignes analogues en altérant les coordonnées z dans un rapport constant quelconque.

En faisant usage des équations (3), on trouve que, lorsque la section droite Λ du cylindre H est définie par les équations:

$$\xi=f(\sigma),\quad \eta=\int\sqrt{1-f'^2(\sigma)}.d\sigma$$

(σ étant l'arc de Λ), la ligne plane à laquelle se réduit L après le développement du cylindre H sur un plan, est représentée par l'équation cartésienne:

$$(4)\qquad z=c.e^{\int\frac{d\sigma}{f(\sigma)f'(\sigma)+\sqrt{1-f'^2(\sigma)}\int\sqrt{1-f'^2(\sigma)}.d\sigma}}.$$

A l'aide de cette propriété on peut déterminer les lignes L suivant lesquelles un cylindre donné H est coupé orthogonalement par une suite de cônes K.

Exemple. — Si la section droite du cylindre H est un cercle passant à l'origine des axes et ayant le centre sur l'axe des y, on a:

$$R = a . \cos u,$$

a étant le diamètre. On déduit donc des équations (3):

$$x = a . \cos^2 u, \quad y = a . \cos u \sin u, \quad z = \mathrm{ac} . \cot u;$$

et puisqu'on a d'ici:

$$yz = \mathrm{ac}\, x,$$

on conclut que les lignes L où le cylindre H est coupé orthogonalement par les cônes K sont placées sur des surfaces réglées du deuxième ordre.

Si l'on remarque que dans ce cas:

$$\xi = f(\sigma) = \frac{a}{2} \cos\left(\frac{2\sigma}{a}\right), \quad \eta = \int \sqrt{1 - f'^2(\sigma)}\, d\sigma = \frac{a}{2} \sin\left(\frac{2\sigma}{a}\right),$$

l'équation (4) donne:

$$z = c . \cot\left(\frac{\sigma}{a}\right). \tag{5}$$

La construction des lignes L est donc réduite à enrouler le plan de la ligne (5) sur un cylindre circulaire.

Entre un cylindre et un cône orthogonaux entre eux il y a une telle relation, qu'on peut déterminer une de ces surfaces lorsque l'autre est connue:

Soit donné le cylindre H.— Coupons le cône K par uue sphère de rayon h ayant le centre au sommet; soit L_0 la ligne d'intersection et Λ_0 la projection de L_0 sur le plan $z=0$. Les coordonnées d'un point quelconque de L_0 sont :

$$x_0=\frac{h.\cos u}{\sqrt{1+c^2.e^{2\int\frac{R}{R'}du}}},$$

$$y_0=\frac{h.\sin u}{\sqrt{1+c^2.e^{2\int\frac{R}{R'}du}}},$$

$$z_0=\frac{hc.e^{\int\frac{R}{R'}du}}{\sqrt{1+c^2.e^{2\int\frac{R}{R'}du}}}$$

et de ces équations il suit :

$$(6)\qquad R_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\frac{h}{\sqrt{1+c^2.e^{2\int\frac{R}{R'}du}}}$$

$$\frac{y_0}{x_0}=\text{tang}\,u.$$

La dernière équation démontre que les points correspondants des lignes Λ, Λ_0 ont les mêmes angles polaires. Cette propriété et l'équation (6) définissent la ligne Λ_0 (et par conséquent la ligne L_0) lorsque Λ est connue.

La connaissance du cylindre H entraine donc celle du cône K.

Exemple. — Le cylindre H soit circulaire et dans la position désignée dans l'exemple précédent.

On a dans ce cas $R = a . \cos u$ et conséquemment:

$$R_0 = \frac{h . \cos u}{\sqrt{\cos^2 u + c^2}}.$$

La ligne L_0 où le cône K est coupé par la sphère est donc définie par les équations:

$$x_0 = \frac{h \cos^2 u}{\sqrt{\cos^2 u + c^2}}, \quad y_0 = \frac{h \sin u \cos u}{\sqrt{\cos^2 u + c^2}}, \quad z_0 = \frac{hc}{\sqrt{\cos^2 u + c^2}}.$$

Soit donné le cone K. — L'équation (6) nous donne:

$$c . e^{\int \frac{R}{R'} du} \frac{\sqrt{h^2 - R_0^2}}{R_0} = \ldots, \quad \frac{R}{R'} = \frac{-h^2 R_0'}{R_0 \left(h^2 - R_0^2\right)};$$

et si l'on pose

$$R_0 = h . \varphi(u),$$

on a par intégration:

$$R = a . e^{\int \frac{\varphi(u)\left[\varphi^2(u) - 1\right]}{\varphi'(u)} du} \tag{7}$$

a étant une constante arbitraire.

On voit d'ici qu'il y a une infinité de cylindres H orthogonaux à un cône donné H ; les lignes suivant lesquelles K est coupé par les cylindres sont des courbes omothétiques par rapport au sommet. Il suit que :

«Les cylindres orthogonaux à un cône donné sont semblables entre eux».

Un coup d'oeil à l'équation (6) démontre la même propriété.

L'équation (7) peut servir à la détermination des cylindres orthogonaux à un cône donné.

Exemple.— Le cône K soit circulaire et son axe soit perpendiculaire aux génératrices des cylindres H.

On peut supposer que l'axe du cône coïncide avec l'axe des x; si l'on appelle θ le demi-angle au sommet, on a :

$$\varphi(u) = \frac{\cos\theta}{\cos u}$$

et conséquemment :

$$R = a \, . \, \frac{(\tang u)^{\cos^2\theta}}{\sin u} \, .$$

Cette équation définit les sections droites des cylindres H.

Soit H un cylindre quelconque et K, K′, K″, K‴, ... des cônes coupant orthogonalement H suivant les lignes $L, L_1, L_2, L_3, \ldots$

Soit H′ un autre cylindre orthogonal à K, et soient $L', L'_1, L'_2, L'_3, \ldots$ les lignes où H′ coupe les cônes K, K′, K″, K‴,...

Puisque les deux cylindres H, H′ sont orthogonaux au cône K, ils sont aussi omothétiques par rapport au sommet O des cônes; conséquemment ils sont coupés suivant deux lignes omothétiques, par un cône quelconque ayant le sommet en O. Les courbes :

$$(L_1, L'_1), \ (L_2, L'_2), \ (L_3, L'_3), \ldots$$

sont donc des lignes omothétiques par rapport au point O, ce qui démontre que le cylindre H' est orthogonal à tous les cônes K', K'', K''',. . . .

On a donc le théorème :

«*Si l'on construit les cônes (en nombre infini)* $K, K', K'', K''', \ldots$ *orthogonaux à un même cylindre* H *et ensuite les cylindres (en nombre infini)* H'. H'', H''',. . . . *qui, comme le cylindre* H, *sont orthogonaux au cône* K, *les cônes et les cylindres constituen deuxs familles de surfaces orthogonales entre elles*».

§ 3

Orthogonalité de deux cylindres.—Faisons le choix des axes coordonnés de façon, que l'axe des z soit parallèle aux génératrices du cylindre H et que le plan coordonné $y=0$ soit parallèle aux génératrices de l'autre cylindre K.

Soit θ l'inclinaison mutuelle des génératrices des deux cylindres.

Pour avoir la condition d'orthogonalité, divisons l'équation (1) par kn et ensuite faisons augmenter k, m, n, jusqu'à l'infini, avec la condition :

$$\lim\left(\frac{m}{n}\right)=\operatorname{tang}\theta.$$

On obtient ainsi l'équation différentielle :

$$\operatorname{tang}\theta \,.\, x'z'=x'^2+y'^2,$$

d'où l'on dérive :

$$z=\cot\theta\int\frac{x'^2+y'^2}{x'}\,du.$$

On a donc le théorème :

Si sur les génératrices du cylindre H, *dont la section droite sur le plan coordonné* $z=0$ *est la ligne* $y=f(x)$, *on porte des distances* z *définies par l'équation :*

$$z=\cot\theta\left[x+\int f'^2(x)\,.\,dx\right], \tag{8}$$

on obtient la ligne L *où le cylindre* H *est coupé orthogonalement par un autre cylindre* K».

L'équation (8) démontre les propriétés suivantes :

«*Deux cylindres orthogonaux ne peuvent pas avoir les génératrices orthogonales*».

«*Les lignes* L *où un cylindre* H *est coupé orthogonalement par une suite d'autres cylindres* K, *dont les génératrices sont parallèles à un même plan, s'obtiennent d'une de ces lignes en altérant les coordonnées* z *dans un rapport constant arbitraire*».

Supposons que la coordonnée x de la ligne Λ, section droite du cylindre H, s'exprime en fonction de l'arc σ par l'équation.

$$x=\lambda(\sigma).$$

Puisque

$$\left\{1+f'^2(x)\right\}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2=1,$$

à cause de l'équation (8) on a :

$$dz=\cot\theta\,\frac{d\sigma}{\dfrac{dx}{d\sigma}}.$$

Si donc on étale le cylindre H sur un plan, la ligne plane L_0, transformée de la courbe L où les cylindres H, K se coupent orthogonalement, a pour équation cartésienne

$$(9) \qquad z = \cot\theta \int \frac{d\sigma}{\lambda'(\sigma)}.$$

La transformée plane L_0 de L soit donnée *à priori* et

$$(10) \qquad z = \mu(\sigma)$$

soit son équation. L'identification des égalités (9), (10) donne:

$$\lambda(\sigma) = x = \cot\theta \int \frac{d\sigma}{\mu'(\sigma)}.$$

Que l'on suppose $\mu(\sigma) = \lambda(\sigma)$, et l'on arrive au théorème:

«Lorsque la section droite d'un cylindre H *est la ligne représentée par une des équations:*

$$x = \lambda(\sigma), \quad x = \cot\theta \int \frac{d\sigma}{\lambda'(\sigma)}$$

(σ étant l'arc de la ligne) la transformée L_0 *de la ligne* L *où le cylindre* H *est coupé orthogonalement par un autre cylindre* K *est représentée, en coordonnées cartésiennes, respectivement par une des équations:*

$$z = \cot\theta \int \frac{d\sigma}{\lambda'(\sigma)}, \quad z = \lambda(\sigma).$$

Si, par exemple, on suppose $\lambda(\sigma) = \frac{\sigma^2}{a}$, il résulte :

$$\cot\theta \int \frac{d\sigma}{\lambda'(\sigma)} = \frac{a.\cot\theta}{2} \log\sigma.$$

On conclut que :

«*Lorsque la section droite* Λ *du cylindre* H *est la cycloïde* $x = \frac{\sigma^2}{a}$ *ou bien la courbe* $x = \frac{a\cot\theta}{2}\log\sigma$, *la transformée plane* L_0 *de la ligne* L *est respectivement la courbe logarithmique* $z = \frac{a\cot\theta}{2}\log\sigma$ *ou bien la parabole* $z = \frac{\sigma^2}{a}$».

Allons déterminer la section droite du cylindre K orthogonal au cylindre donné H. La génératrice de K passant par le point arbitraire (x, y, z) de la ligne L est représentée par les équations :

$$Y = y, \quad \frac{X - x}{\sin\theta} = \frac{Z - z}{\cos\theta};$$

si donc on coupe le cylindre K par le plan :

$$X\sin\theta + Z\cos\theta = o$$

orthogonal aux génératrices et passant par l'axe des y, les coordonnées d'un point quelconque de la ligne d'intersection Λ_1 sont données comme il suit :

$$X = (x\cos\theta - z\sin\theta)\cos\theta, \quad Y = y, \quad Z = -(x\cos\theta - z\sin\theta)\sin\theta.$$

Que l'on prenne, sur le plan coupant Π, l'intersection des plans

II et $y=o$ pour axe des x_1 et la droite oy pour axe des y_1; la ligne Λ_1 est alors représentée par les équations:

$$x_1=\mathrm{X}\cos\theta-\mathrm{Z}\sin\theta=x\cos\theta-z\sin\theta\,;\quad y_1=\mathrm{Y}=y\,;$$

$$z_1=\mathrm{X}\sin\theta+\mathrm{Z}\cos\theta=o.$$

Si donc on rappelle l'équation (8), on a le théorème:

Si la section droite du cylindre H *est représentée par l'équation* $y=f(x)$, *la section droite du cylindre* K *orthogonal à* H *est définie par les équations:*

$$x_1=-\cos\theta\int f'^2(x).dx,\quad y_1=f(x),$$

Les dernières formules démontrent que:

«*Les sections droites des cylindres* K *orthogonaux à un cylindre donné* H *s'obtiennent d'une de ces courbes, en altérant les coordonnées* x_1 *dans un rapport constant quelconque*».

Il suit que lorsqu'un des cylindres K est algébrique et de l'ordre n, tous les autres jouissent de la même propriété. Si l'un des cylindres K est circulaire, tous les autres sont elliptiques, etc.

Exemple.—Le cylindre H donné soit circulaire. On peut écrire:

$$f(x)=\sqrt{a^2-x^2},$$

a étant le rayon; et si l'on applique le théorème précédent, on trouve:

$$x_1=\cos\theta\left\{x-\frac{a}{2}\log\frac{a+x}{a-x}\right\},\quad y_1=\sqrt{a^2-x^2}.$$

c'est-à-dire, en éliminant x:

$$x_1 = \left(\sqrt{a^2 - y_1^2} - a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y_1^2}}{y_1}\right) \cos \theta.$$

Cette équation démontre que la section droite d'un des cylindres K s'obtient de la courbe C aux tangentes constantes, comme l'ellipse s'obtient du cercle.

La même ligne C donne lieu á toutes les sections droites.

On peut remarquer, en terminant, qu'aux séries des cylindres H, K est applicable le dernier théorème du § 2.

§ 4

Orthogonalité d'un hélicoïde et d'un cilindre.— La ligne L_0 représentée par les équations:

$$(11) \qquad x_0 = R, \quad y_0 = o, \quad z_0 = U$$

soit le profil méridien d'un helicoïde S, dont l'axe coïncide avec l'axe coordonné des z. Désignons par p le paramètre du mouvement hélicoïdal (c'est-à-dire le rapport entre la vitesse de translation et celle de rotation).

Soient R et u les coordonnés polaires sur le plan $z = o$, l'axe des x étant l'axe polaire. Dans cette hypothèse les coordonnées d'un point quelconque A d'une ligne L placée sur la surface S sont données comme il suit:

$$(12) \qquad x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = U + p\varphi,$$

R, U et φ étant trois fonctions de u.

Les cosinus directeurs de la normale à l'hélicoïde S, dans le point A de la ligne L, sont proportionnels à:

$$(13) \qquad xz' - py', \quad yz' + px', \quad -(xx' + yy');$$

et les cosinus directeurs de la normale au cylindre H passant par la ligne L et dont les génératrices (parallèles au plan $y = o$) sont inclinées de l'angle θ sur l'axe des z, sont proportionnels à:

$$(14) \qquad y' \cos\theta, \quad z' \sin\theta - x' \cos\theta, \quad -y' \sin\theta.$$

La condition d'orthogonalité des surfaces S, H le long de la ligne L est donc:

$$(15) \quad z'^2 y - z'[(x'y - xy')\cot\theta - px'] - p(x'^2 + y'^2)\cot\theta + \\ + y'(xx' + yy') = 0$$

c'est-à-dire en force des équations (12):

$$(16) \quad (U' + p\varphi')^2 . R \sin\varphi + (U' + p\varphi')[R^2\varphi' . \cot\theta + p(R' \cos\varphi - \\ - R\sin\varphi . \varphi')] - p(R'^2 + R^2\varphi'^2)\cot\theta + (R'\sin\varphi + R\cos\varphi . \varphi')RR' = 0.$$

Le détermination du cylindre orthogonal à un hélicoïde donné est donc ramenée à l'intégration de l'équation (16).

Cas particulier.— Les génératrices du cylindre H soient parallèles à l'axe de l'hélicoïde S. Dans ce cas l'intégration de l'équation (16) peut être effectuée; divisons en effet par $\cot\theta$ et supposons ensuite $\theta = 0$. On a:

$$(U' + p\varphi')R^2\varphi' = p(R'^2 + R^2\varphi'^2),$$

d'où :

$$\varphi' = p \cdot \frac{R'^2}{R^2 U'}$$

et par intégration :

$$(17) \qquad \varphi = p \int \frac{R'^2}{R^2 U'} du + \text{constante.}$$

Donc :

«*L'hélicoïde dont le profil méridien est la ligne* (11) *est coupé orthogonalement par un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe de l'hélicoïde suivant la ligne représentée par les équations* (12), φ *étant définie par l'équation* (17)».

Exemples :

1°) L'axe de l'hélicoïde soit une directrice rectiligne de la surface. On a :

$$R = U . \operatorname{tang} \varepsilon,$$

ε étant une constante, et l'équation (17) donne :

$$\varphi - k = -\frac{p}{U}.$$

On a donc, après l'élimination de U :

$$R = \frac{p \operatorname{tang} \varepsilon}{k - \varphi},$$

ce qui démontre que la section droite du cylindre H orthogonal est une spirale hyperbolique.

2°) S soit un hélicoïde à courbure constante négative (c'est-à-dire un hélicoïde de *M. Dini*). Le profil méridien est une ligne aux tangentes constantes, ayant l'axe de l'hélicoïde pour asymptote.

On a donc:

$$U = \sqrt{a^2 - R^2} - a \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R}\right).$$

a étant une constante, et l'équation (17) donne:

$$\varphi = -\frac{p}{a} \log\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - R^2}}{R}\right).$$

La section droite du cylindre H est donc la courbe représentée en coordonnées polaires R, φ par l'équation:

$$R = \frac{a}{\cos h\left(\frac{a}{p}\varphi\right)}$$

$\cos h$ étant le symbole de la fonction analytique qu'on appelle *cosinus hyperbolique*.

Si l'on suppose de résoudre l'équation (15) par rapport à z' et ensuite d'intégrer l'équation obtenue, on arrive au théorème:

«*La ligne* L *représentée par les équations :*

$$x = R \cos u, \quad y = R \sin u$$

$$z = \frac{1}{2}\int \left\{ \frac{1}{y}(x'y - xy')\cot\theta - px' \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{[(xy - xy')\cot\theta - px']^2 - 4y[-p(x'^2 + y'^2)\cot\theta + y'(xx' + yy')]} \right\} du$$

dans le mouvement hélicoïdal de paramètre p *autour de l'axe des* z, *engendre un hélicoïde* S, *et sur cette surface elle est, dans toutes ses positions, la courbe suivant laquelle l'hélicoïde est coupé à angle droit par un cylindre».*

On voit d'ici que lorsque l'hélicoïde S n'est pas donné d'avance, la détermination de la ligne L est ramenée à des quadratures.

Cas particulier.— Les génératrices du cylindre H *soient parallèles à l'axe de l'hélicoïde.*

Dans cette hypothèse on a $\theta = o$ et les équations qu'on vient d'écrire deviennent:

$$(18) \quad x = \mathrm{R}\cos u, \quad y = \mathrm{R}\sin u, \quad z = pu + p\int\left(\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right)^2 du + \text{const.}$$

Celles-ci conduisent à un résultat très remarquable, que nous allons établir:

Soit S une surface dont les points sont rapportés à deux systèmes de lignes coordonnées quelconques $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Soit MA une des lignes $u = \text{const.}$ et MB une des lignes $v = \text{const.}$; $d\mathrm{X}$, $d\mathrm{Y}$, $d\mathrm{Z}$ les différentiels des cosinus directeurs de la normale à S, comptés le long de MA et $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ ceux des coordonnées des points de S, comptés le long de MB.

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux directions MA, MB soient à tangentes conjuguées est la suivante:

$$\sum d\mathrm{X}\,.\,\delta\xi = o.$$

Et puisque:

$$d\mathrm{X} = \frac{\delta \mathrm{X}}{\delta u}\,du, \quad \delta\xi = \frac{\delta\xi}{\delta v}\,dv,$$

la condition précédente se réduit à l'autre :

$$\sum \frac{\delta X}{\delta u} \cdot \frac{\delta \xi}{\delta v} = 0.$$

On a donc le théorème général suivant de la géométrie des surfaces :

«*Lorsque les coordonnées* ξ, η, ζ *des points d'une surface quelconque non développable sont exprimées en fonction de deux paramètre* u, v *indépendants entre eux, les lignes coordonnées* u = const., v = const. *sont à tangentes conjuguées, pourvu qu'il subsiste la condition :*

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta^2 \xi}{\delta u \delta v} & \frac{\delta^2 \eta}{\delta u \delta v} & \frac{\delta^2 \zeta}{\delta u \delta v} \\ \frac{\delta \xi}{\delta u} & \frac{\delta \eta}{\delta u} & \frac{\delta \zeta}{\delta u} \\ \frac{\delta \xi}{\delta v} & \frac{\delta \eta}{\delta v} & \frac{\delta \zeta}{\delta u} \end{vmatrix} = 0$$

Or si x, y, z (fonctions de u) sont les coordonnées d'un point quelconque d'une ligne L, l'hélicoïde engendré par cette ligne est défini par les équations :

$$\xi = x \cos v - y \sin v, \quad \eta = x \sin v + y \cos v, \quad \zeta = z + pv.,$$

p étant le paramètre du mouvement hélicoïdal.

Posons :

$$x = \mathrm{R} \cos u, \quad y = \mathrm{R} \sin u$$

et supposons que les lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ soient à tangentes conjuguées.

On arrive alors à l'équation :

$$z = pu + p \int \left(\frac{R'}{R}\right)^2 du + \text{const.},$$

qui coïncide avec la troisième des équations (18). Donc :

«*Les courbes, le long desquelles un hélicoïde quelconque est coupé orthogonalement par des cylindres dont les generatrices sont parallèles à l'axe, sont les lignes à tangentes conjuguées avec les hélices de l'hélicoïde*».

Les équations (18) démontrent que le profil méridien de l'hélicoïde engendré par la ligne mobile L est défini par les équations ;

$$x_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = R, \quad z_0 = z - pu = p \int \left(\frac{R'}{R}\right)^2 du + \text{const.}$$

Nous avons donc le théorème :

«*Le profil méridien de l'hélicoïde orthogonal au cylindre ayant les génératrices parallèles à l'axe des z et dont la section droite est la courbe :*

$$R = f(u),$$

est représenté par les équations :

$$x_0 = f(u), \quad y_0 = 0, \quad z_0 = p \int \left\{\frac{f'(u)}{f(u)}\right\}^2 . du + \text{const.}$$

A l'aide de ce théorème on peut déterminer l'hélicoïde coupé orthogonalement par un cylindre donné, lorsque l'axe de l'hélicoïde est parallèle aux génératrices du cylindre et passe par le pôle auquel la section droite est référée.

Si par exemple, la section droite du cylindre est la spirale *d'Archimède* $R = au$, on trouve :

$$x_0 = au, \quad z_0 + m = -\frac{p}{u}$$

d'où, en éliminant u :

$$x_0 (z_0 + c) + ap = 0.$$

Le profil méridien est donc une hyperbole équilatère, ayant un des asymptotes sur l'axe de l'hélicoïde.

§ 5

Orthogonalité d'une surface de révolution et d'un cylindre. — Si l'on veut déterminer le cylindre H qui est orthogonal à une surface de révolution donnée S, l'équation différentielle du problème s'obtient en supposant $p = 0$ dans l'équation (16) du § 4.

Si donc la ligne méridienne de la surface S est définie par les équations :

$$x_0 = R, \quad z_0 = U \tag{11}$$

(R et U étant des fonctions d'un paramètre quelconque u) le problème dont il s'agit est ramené à l'intégration de l'équation différentiélle :

$$RR' \cos\varphi . \varphi' + \cot\theta . RU'\varphi' + (U'^2 + R'^2) \sin\varphi = 0. \tag{19}$$

Cette intégration ne peut pas être effectuée dans le cas général.

La résolution du problème est complète quand la surface de révolution S est un cylindre.

En effet dans ce cas on a

$$R = \text{const.} = k;$$

et si l'on pose $U = u$, l'équation différentielle (19) se réduit à l'autre:

$$k \cot \theta \,.\, \varphi' + \sin \varphi = 0,$$

c'est-à-dire:

$$k \cot \theta \,.\, \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = -du,$$

d'où, en intégrant:

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = a \,.\, e^{\frac{-\operatorname{tang} \theta}{k} . u}$$

Si l'on calcule d'ici les valeurs de $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ et on en fait la soustitution dans les équations qu'on déduit des égalités (12) en y faisant $p = 0$, on trouve que le cylindre circulaire donné est coupé orthogonalement par un autre cylindre suivant la ligne:

$$x = k \,.\, \frac{1 - a^2 \,.\, e^{\frac{-2 \operatorname{tang} \theta}{k} . u}}{1 + a^2 \,.\, e^{\frac{-2 \operatorname{tang} \theta}{k} . u}}, \quad y = k \,.\, \frac{2a \,.\, e^{\frac{-\operatorname{tang} \theta}{k} u}}{1 + a^2 \,.\, e^{\frac{-2 \operatorname{tang} \theta}{k} u}}, \quad z = u$$

On serait parvenu au même résultat par la méthode du § 3; il suffisait de prendre le cylindre H circulaire.

Cas particulier. — Les génératrices du cylindre H *soient perpendiculaires à l'axe de la surface.*

Dans ce cas $\theta = \frac{\pi}{2}$ et l'équation de condition (19) se réduit à l'autre

$$RR'.\cos\varphi.\varphi' + (U'^2 + R'^2)\sin\varphi = 0.$$

Celle-ci peut s'écrire:

$$\frac{\cos\varphi.\varphi'}{\sin\varphi} = -\frac{U'^2 + R'^2}{RR'}$$

et l'intégration donne:

$$\sin\varphi = k.e^{-\int\frac{U'^2+R'^2}{RR'}du} = \frac{k}{R}.e^{-\int\frac{U'^2}{RR'}du}.$$

On a donc le théorème:

«*La surface de révolution* S *dont la ligne méridienne est* (11) *est coupée orthogonalement par un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des* x, *suivant la ligne* L *définie par les équations:*

$$x = \sqrt{R^2 - k^2.e^{-2\int\frac{U'^2}{RR'}du}}, \quad y = k.e^{-\int\frac{U'^2}{RR'}du}, \quad z = U,$$

k *étant une constante arbitraire*».

Ces équations démontrent qu'il y a une infinité decylindres, avec les génératrices parallèles à l'axe des x, coupant la surface S à angle droit.

Si H et H_1 sont deux de ces cylindres, L et L_1 leurs intersections avec S, les coordonnées y et y_1 relatives aux points de ces deux lignes sont proportionnelles.

Si donc L est connue, pour construire la ligne L_1 on faira parcourir à chaque point de L le parallèle de la surface et on arrêtera le mouvement lorsque la distance du point mobile du plan $y=0$ est réduite dans un rapport constant convenable.

Si l'on suppose que

$$x_0 = \varphi(z_0) \tag{20}$$

soit l'équation de la ligne méridienne de S, on a:

$$R = \varphi(U)$$

et conséquemment:

$$\int \frac{U'^2}{RR'} du = \int \frac{dU}{\varphi(U) \cdot \varphi'(U)} = \int \frac{dz_0}{\varphi(z_0) \cdot \varphi'(z_0)}.$$

Si donc on désigne par η, ζ les coordonnées des points de la section droite du cylindre H sur le plan $x=0$, on trouve:

$$\eta = y = k . e^{-\int \frac{dz_0}{\varphi(z) \cdot \varphi'(z_0)}}, \quad \zeta = z = z_0$$

d'où, en éliminant z_0:

$$\eta = k . e^{-\int \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta) \cdot \varphi'(\zeta)}}. \tag{21}$$

Donc:

«Le cylindre (dont les génératrices sont parallèles à l'axe des x*) qui coupe orthogonalement la surface de révolution dont la ligne méridienne est représentée par l'équation* (20), *a pour section droite la courbe* (21)*».*

Si H, H_1 sont deux cylindres correspondant aux valeurs k et k_1 de la constante arbitraire k, on a l'équation (21) et l'autre:

$$\eta_1 = k_1 \cdot e^{-\int \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)\cdot\varphi'(\zeta)}},$$

d'où l'on dérive:

$$\frac{\eta_1}{\eta} = \frac{k_1}{k} = m,$$

m étant une constante. Donc:

«Si la section droite d'un des cylindres orthogonaux à une surface de révolution donnée est représentée par l'équation:

$$f(\eta, \zeta) = 0,$$

la section droite d'un quelconque des autres est représentée par l'équation:

$$f(m\eta, \zeta) = 0,$$

m *étant une constante arbitraire».*

Il suit que les cylindres susdits sont du même ordre; et, en particulier, si l'un d'entre eux est elliptique, hyperbolique ou parabolique, c'est le même des autres.

Exemple.— La ligne méridienne de S soit la ligne des sinus:

$$x_0 = a \cdot \sin\left(\frac{z_0}{a}\right).$$

Nous avons:

$$\varphi(\zeta) = a . \sin\left(\frac{\zeta}{a}\right), \quad \int \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta) \cdot \varphi'(\zeta)} = \log.\text{tang}\left(\frac{\zeta}{a}\right)$$

et puisque il résulte:

$$\eta = k . \cot\left(\frac{\zeta}{a}\right),$$

on conclut que la section droite du cylindre est la ligne des cotangentes.

§ 6

Allons déterminer, dans la manière la plus générale, la ligne L de l'espace le long de laquelle une surface de révolution et un cylindre peuvent se couper orthogonalement.

En posant $\varphi(u) = u$ dans l'équation (19), on a:

$$(22) \qquad (U'^2 + R'^2) \sin u + R\,(U' \cot \theta + R' \cos u) = 0\,;$$

et si l'on intègre l'équation qu'on obtient de celle-ci en la résolvant par rapport à U', on a le théorème:

«*La ligne représentée par les équations:*

$$(23) \quad \begin{cases} x = R \cos u, \quad y = \sin u \\ z = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \frac{-R \cot \theta \pm \sqrt{R^2 \cot^2 \theta - 4R'(R' \sin u + R \cos u) \sin u}}{\sin u}\, du + \text{const.} \end{cases}$$

après une rotation autour de l'axe des z, *engendre une surface* S *sur laquelle elle est (dans sa position primitive) l'intersection de cette surface avec un cylindre orthogonal dont les génératrices sont parallèles au plan* $y=0$.

R *est une fonction arbitraire de* u *et* θ *est l'inclinaison des génératrices du cylindre sur l'axe de la surface*».

Le double signe $\pm$ qu'on trouve dans la troisième équation (2) démontre que:

«*Sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des* z, *on trouve, en général, deux lignes* L, L_1 *jouissant de la propriété précédente*».

Ces lignes L, L_1 peuvent être nommées *lignes conjuguées*.

Une telle propriété peut être démontré par d'autres considérations; en effet si L_1 (R, U_1) est la ligne conjuguée à L, l'équation différentielle (22), appliquée à la nouvelle ligne, donne

$$(24) \qquad (U_1'^2 + R'^2)\sin u + R\,(U_1' \cot\theta + R'\cos u) = 0.$$

En retranchant les équations (22), (24), on obtient:

$$(U_1'^2 - U'^2)\sin u + R\,(U_1' - U')\cot\theta = 0,$$

c'est-à-dire:

$$(U_1' + U')\sin u + R\cot\theta = 0.$$

Et puisque on dérive de cette équation:

$$U_1' = -U' - \cot\theta \cdot \frac{R}{\sin u}.$$

l'intégration donne:

$$U_1 = -U - \cot\theta \int \frac{R}{\sin u} du + \text{const.}$$

A l'aide de cette équation on peut, en général, déterminer la ligne L_1 conjuguée d'une ligne donnée L. Cependant il peut arriver qu'une ligne L ne possède pas sa conjuguée L_1. Le cas exceptionnel a lieu lorsque U_1 résulte constante, c'est-à-dire lorsqu'on a:

$$U + \cot\theta \int \frac{R}{\sin u} . du = \text{const.}$$

On voit d'ici que:
«*Sur un cylindre donné à priori on peut toujours trouver une des lignes précédentes* L *de façon que elle ne soit pas accompagnée par sa conjuguée* L_1».

Par exemple, les cylindres ayant pour section droite l'un ou l'autre des deux cercles:

$$R = a.\sin u, \quad R = a.\cos u$$

coupent les surfaces de révolution dont la ligne meridienne est l'une ou l'autre des deux courbes:

$$U + a\cot\theta . \arcsin\left(\frac{R}{a}\right) = \text{const.},$$

$$U + a\cot\theta . \log\left(\frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{a}\right) = \text{const.}$$

suivant des lignes L qui ne possèdent pas leurs conjuguées L_1.

Lorsque les génératrices du cylindre H sont perpendiculaires à l'axe de la surface S, on a $\theta=\frac{\pi}{2}$ et les équations (23) deviennent :

$$(25)\quad \begin{cases} x=\mathrm{R}\cos u, \quad y=\mathrm{R}\sin u, \\ z=\pm\dfrac{\sqrt{-\mathrm{R}'(\mathrm{R}'\sin u+\mathrm{R}\cos u)\sin u}}{\sin u}\,du. \end{cases}$$

On conclut que la ligne L est réelle seulement dans les parties où la quantité

$$-\mathrm{R}'(\mathrm{R}'\sin u+\mathrm{R}\cos u)\sin u$$

est positive.

Lorsque, par exemple, la projection de L sur le plan $z=0$ est le cercle $\mathrm{R}=a.\sin u$, la troisième équation (25) devient :

$$z=\pm\frac{\sqrt{-2a^2\sin^2 u\cos^2 u}}{\sin u}\,du\,;$$

la ligne L est donc tout-à-fait imaginaire.

Si au contraire la projection de L est le cercle $\mathrm{R}=a.\cos u$, on a

$$z=\pm a\int\sqrt{\cos^2 u-\sin^2 u}\,.\,du$$

et z est réel seulement lorsque u est compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, entre $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$, entre $\frac{7\pi}{4}$ et $\frac{9\pi}{4}$, etc.

La ligne L est donc formé par une infinité de morceaux séparés entre eux.

§ 7

Soit donné un cylindre H; on veut déterminer une surface de révolution S orthogonale à H.

Les génératrices de H soient parallèles au plan $y=0$ et inclinées de l'angle θ sur l'axe des z.

La section du cylindre avec le plan $x=0$ soit définie par les équations:

$$\eta=\eta(t), \quad \zeta=\zeta(t),$$

t étant un paramètre quelconque. Soit L l'intersection du cylindre H et de la surface S dont l'axe coïncide avec l'axe des z: en désignant par A $(0, \eta, \zeta)$ et M (x, y, z) deux points correspondants des lignes Λ, L, et par $f(t)$ la distance AM, nous avons:

$$x=f(t).\sin\theta, \quad y=\eta(t), \quad z=\zeta(t)+f(t).\cos\theta.$$

Puisque le cylindre H passe par la ligne:

$$\xi=0, \quad \eta=\eta(t), \quad \zeta=\zeta(t),$$

les cosinus directeurs de la normale à H sont proportionnels aux quantités (14) du § 4, quantités qui à présent deviennent:

$$\eta'\cos\theta, \quad \zeta'\sin\theta, \quad -\eta'\sin\theta$$

Les cosinus directeurs de la normale à la surface de rotation engendrée par la ligne L sont proportionnels aux quantités :

$$xz' = f.\sin\theta\,(\zeta' + f'\cos\theta), \quad yz' = \eta\,(\zeta' + f'\cos\theta),$$

$$-(xx' + yy') = -(ff'\sin^2\theta + \eta\eta')$$

que l'on obtient en supposant $p = 0$ dans les expressions (13) du § 4.

La condition d'orthogonalité des surfaces H, S est donc exprimée par l'équation :

$$(26) \qquad (\eta'\zeta'.f\cos\theta + \eta'.ff' + \eta\zeta'^2 + \eta\zeta'.f'\cos\theta + \eta\eta'^2 = 0.$$

Si l'on suppose $f = \text{const} = m$, l'équation (26) se réduit à l'autre :

$$\eta\left(\frac{d\zeta}{d\eta}\right)^2 + m\cos\theta.\frac{d\zeta}{d\eta} + \eta = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{\pm\sqrt{m^2\cos^2\theta - 4\eta^2} - m\cos\theta}{2\eta}$$

et après l'intégration :

$$\zeta = \text{const.} - \frac{m\cos\theta}{2}\log\eta \pm \frac{1}{2}\left\{\sqrt{m^2\cos^2\theta - 4\eta^2}\right.$$

$$\left. - m\cos\theta.\log\frac{m\cos\theta + \sqrt{m^2\cos^2\theta - 4\eta^2}}{\eta}\right\}.$$

Une telle équation définit la base Λ du cylindre H.

Cette ligne Λ est la base d'une infinité de cylindres ayant la propriété d'être coupés orthogonalement par une même surface de révolution S, le long d'une ligne plane parallèle à l'axe de la surface.

Dans tous ces cylindres la quantité $m\cos\theta$ est constante.

Cas particulier — Les génératrices du cylindre H *soient perpendiculaires à l'axe de la surface.*

Dans ce cas $\theta = \frac{\pi}{2}$, et l'équation différentielle (26) se réduit à l'autre:

$$\eta' \cdot ff' + \eta\zeta'^2 + \eta\eta'^2 = 0.$$

On déduit d'ici:

$$ff' = -\eta\eta' - \frac{\eta\zeta'^2}{\eta'}$$

et en intégrant:

$$f^2 = a - \eta^2 - 2\int \frac{\eta\zeta'^2}{\eta'} dt.$$

La ligne L est donc définie par les équations:

$$(27)\quad x = \sqrt{a - \eta^2(t) - 2\int \frac{\eta(t) \cdot \zeta'^2(t)}{\eta'(t)} \cdot dt}, \quad y = \eta(t), \quad z = \zeta(t)$$

dans lesquelles a est une constante arbitraire.

Si l'on fait tourner la ligne L autour de l'axe des z, on engendre une surface de révolution S dont la ligne méridienne L_0 est définie par les équations :

$$x_0 = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a - 2\int \frac{\eta(t) \cdot \zeta'^2(t)}{\eta'(t)} . dt}, \quad z_0 = z = \zeta(t).$$

Si donc on suppose que :

$$(28) \qquad \eta = \psi(\zeta)$$

soit l'équation de la section droite du cylindre H sur le plan $x=0$, on a :

$$\int \frac{\eta(t) \cdot \zeta'^2(t)}{\eta'(t)} . dt = \int \frac{\psi(t)}{\psi'(t)} . dt ;$$

conséquemment :

$$x_0 = \sqrt{a - 2\int \frac{\psi(\zeta)}{\psi'(\zeta)} . d\zeta}, \qquad z_0 = \zeta.$$

Et, puisque l'élimination de ζ entre ces deux équations conduit à l'autre équation :

$$x_0 = \sqrt{a - 2\int \frac{\psi(z_0)}{\psi'(z_0)} . dz_0},$$

on a le théorème :

«*Lorsqu'un cylindre, dont les génératrices sont parallèles à l'axe des* x, *a pour section droite la ligne* (28), *la surface de révolution orthogonale au cylindre a pour ligne méridienne la courbe représentée par l'équation* (29)».

Il suit qu'il y a une infinité de surfaces de révolution S coupant un cylindre donné H à angle droit ; leurs lignes méridiennes s'obtiennent en donnant toutes les valeurs possibles à la constante arbitraire a dans l'équation (29).

Considérons les surfaces S correspondant aux valeurs a et A de la constante arbitraire et désignons par x_0, X_0 les abscisses des points correspondants des lignes méridiennes.

On a l'équation (29) et l'autre:

$$X_0 = \sqrt{A - 2\int \frac{\psi(z_0)}{\psi'(z_0)}\, dz_0}$$

d'où l'on dérive:

$$X_0^2 - x_0^2 = A - a = \text{const.} = m$$

et conséquemment:

$$X_0 = \sqrt{m + x_0^2}.$$

On a donc le théorème:

«*Lorsque la ligne méridienne d'une des surfaces de révolution coupant orthogonalement un cylindre donné est la courbe représentée par l'équation:*

$$\lambda(z_0, x_0) = 0,$$

la ligne méridienne d'une des autres surfaces orthogonales au même cylindre est représentée par l'autre équation:

$$\lambda\left(z_0, \sqrt{m + x_0^2}\right) = 0,$$

m *étant une constante quelconque*».

Que l'on prenne une surface de révolution S_0 ayant pour ligne méridienne la courbe :

$$x_0 = f(z_0)$$

et orthogonale au cylindre H_0 ; les autres surfaces de révolution S, en nombre infini, orthogonales au même cylindre H_0, ont pour lignes méridiennes les courbes définies par l'équation :

$$\sqrt{m + x_0^2} = f(z_0),$$

c'est-à-dire par l'autre :

$$x_0 = \sqrt{f^2(z_0) - m},$$

m étant une constante quelconque.

Si, en appliquant l'équation (21), on cherche les cylindres orthogonaux aux surfaces S, on trouve les sections droites :

$$\eta = k.e^{-\int \frac{d\zeta}{f(\zeta) \cdot f'(\zeta)}} ;$$

conséquemment ces cylindres H sont orthogonaux à la surface S_0.

On a donc le théorème général :

«Si l'on construit les surfaces de révolution S, S', S'', S''',.. *(en nombre infini) orthogonales à un même cylindre* H *et ensuite les cylindres* H', H'', H''', .. *(en nombre infini) qui, comme* H, *sont orthogonaux à* S, *les surfaces de révolution et les cylindres constituent deux familles de surfaces orthogonales entre elles».*

Ces deux familles de surfaces n'appartiennent pas à un système triple de surfaces orthogonales, puisque elles ne se coupent pas suivant leurs lignes de courbure.

Supposons qu'une surface de révolution S, orthogonale à un cylindre donné H, soit une surface du deuxième ordre douée de centre. On a :

$$z_0 = \sqrt{p + qx_0^2},$$

p et q étant des constantes.

Quant aux lignes méridiennes des autres surfaces de révolution orthogonales au même cylindre H, on a :

$$z_0 = \sqrt{p + q\left(m + x_0^2\right)} = \sqrt{(p + mq) + qx_0^2} \tag{30}$$

et par conséquent *«ces surfaces de révolution sont elles-mêmes du deuxième ordre, à centre»*.

Lorsque la surface primitive est un ellipsoïde, on a :

$$p > 0, \quad q < 0$$

et l'équation (30) représente une conique du genre ellipse, car le coefficient de x_0^2 est négatif.

Si au contraire la surface primitive est un hyperboloïde à deux nappes, on a :

$$p > 0, \quad q > 0$$

et l'équation (30) représente une conique du genre hyperbole. La surface de révolution correspondante est :

un hyperboloïde à deux nappes, si $m > -\dfrac{p}{q}$

un hyperboloïde á une nappe, si $m < -\dfrac{p}{q}$

une couple de droites, si $m = -\dfrac{p}{q}$.

On a donc le théorème:

«*Si l'une des surfaces de révolution qui coupent orthogonalement un cylindre donné est un ellipsoïde, ou un hyperboloïde, les autres surfaces coupant orthogonalement le même cylindre sont respectivement des ellipsoïdes ou des hyperboloïdes. Cette série d'hyperboloïdes est composée de deux familles, l'une d'hyperboloïdes à deux nappes et l'autre d'hyperboloïdes à une nappe; et les deux familles sont séparées entre elles par un cône de rotation*».

Lorsqu'une des surfaces S est un paraboloïde, on a:

$$z_0 = \frac{x_0^2}{a}$$

et pour les lignes méridiennes des outres surfaces S orthogonales au même cylindre on a:

$$z_0 = \frac{m + x_0^2}{a}. \tag{31}$$

Donc:

«*Si l'une des surfaces de révolution qui coupent orthogonalement un cylindre donné est un paraboloïde, toutes les autres sont aussi des paraboloïdes*».

Allons déterminer la section droite du cylindre H coupant orthogonalement une série de surfaces du deuxième ordre.

Si ces surfaces sont à centre, l'équation (30) donne:

$$x_0 = \sqrt{\frac{z_0^2 - (p + mq)}{q}}$$

et, par l'application de l'équation (31), on obtient :

$$\eta = k \cdot \zeta^{-q}.$$

Si au contraire les surfaces de révolution sont des paraboloïdes, on a après l'équation (31) :

$$x_0 = \sqrt{az_0 - m}$$

et conséquemment :

$$\eta = k \cdot e^{-\frac{2}{a}\cdot\zeta}.$$

Si donc on a recours à un théorème démontre dans ce §, on a :
«Les surfaces du deuxième ordre à centre ayant pour lignes méridiennes les coniques :

$$z_0 = \sqrt{(p+mq) + qx_0^2},$$

ou bien les paraboloïdes ayant pour lignes méridiennes les paraboles :

$$z_0 = \frac{m + x_0^2}{a},$$

(m *étant une constante arbitraire*) *et les cylindres dont les génératrices sont parallèles à l'axe des* x *et dont les sections droites sont les lignes :*

$$\eta = k \cdot \zeta^{-q}$$

ou bien les autres:

$$\eta = k . e^{-\frac{2}{a}\zeta}$$

respectivement (k *étant une constante arbitraire*), *constituent deux séries de surfaces orthogonales entre elles*».

Lorsque la surface S est un ellipsoïde, q est négatif; en posant:

$$q = -Q,$$

la section droite du cylindre orthogonal est définie par l'équation:

$$\eta = k . \zeta^{Q} .$$

Si l'on pose l'équation de l'ellipse méridienne sous la forme:

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{z_0^2}{B^2} = 1$$

on a:

$$z_0 = \sqrt{B^2 - \left(\frac{B}{A}\right)^2 . x_0^2},$$

d'où:

$$Q = \frac{B^2}{A^2}$$

et conséquemment:

$$\eta = k . \zeta^{\frac{A^2}{B^2}} .$$

On voit d'ici que les cylindres orthogonaux à la série d'ellipsoïdes sont algébriques lorsque $\frac{B^2}{A^2}$ est rationnel.

Il y a deux cas dans lesquels les cylindres susdits sont du deuxième ordre ; et cela arrive lorsque :

$$\frac{B^2}{A^2} = 2,$$

ou bien

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{1}{2}.$$

Dans ces cas les sections droites des cylindres orthogonaux sont les paraboles représentées par l'équation :

$$\eta = h\zeta^2,$$

ou bien par l'autre :

$$\eta^2 = k^2\zeta$$

Ces lignes ont le sommet à l'origine et l'axe coïncide avec l'axe des y, ou bien avec l'axe des z.

Les surfaces de révolution S soient des hyperboloïdes ; on a vu qu'entre ces surfaces il y a une famille d'hyperboloïdes à deux nappes. La surface S considérée soit un de ces hyperboloïdes : q est alors positif et la section droite d'un quelconque des cylindres orthogonaux est représentée par l'équation :

$$\eta\zeta^{q} = k.$$

La ligne méridinnne de la surface S soit l'hyperbole :

$$\frac{z_0^2}{B^2} - \frac{x_0^2}{A^2} = 1;$$

puisqu'on trouve

$$q = \frac{B^2}{A^2},$$

l'équation de la section droite du cylindre peut s'écrire :

$$\eta \zeta^{\frac{B^2}{A^2}} = k.$$

Une telle ligne est donc algébrique lorsque $\frac{B^2}{A^2}$ est rationnel ; il y a un cas unique dans lequel elle se réduit à une conique, et cela a lieu lorsque $\frac{B^2}{A^2} = 1$, c'est-à-dire lorsque la série de surfaces de révolution est constituée par des hyperboloïdes équilatères à une ou à deux nappes. Dans ces cas les sections droites des cylindres orthogonaux sont des cylindres équilatères, dont les asymptotes coïncident axec les axes coordonnés.

On a déjà remarqué que dans la série d'hyperboloïdes de révolution ceux à une nappe sont séparés de ceux à deux nappes par un cône de révolution. Considérons ce cas-limite, et désignons par ε le demi-angle au sommet du cône.

Nous avons :

$$\lim \frac{B}{A} = \cot \varepsilon$$

et conséquemment les sections droites des cylindres orthogonaux sont:

$$\eta\zeta^{\cot\varepsilon^2} = k,$$

k étant une constante arbitraire.

Ces courbes sont algébriques si $\cot^2\varepsilon$ est rationnel; lorsque elles sont des coniques, celles-ci sont des hyperboles équilatères et cela a lieu lorsque $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$.

Si $\cot\varepsilon = \sqrt{2}$, on a:

$$\eta\zeta^2 = k.$$

Les sections droites des cylindres orthogonaux sont, dans ce cas, des courbes hyperboliques du troisième ordre, appartenant à la 69.ème espèce de l'énumération de *Newton*.

Si la section droite d'un des cylindres coupant orthogonalement la surface de révolution S est la courbe parabolique générale:

$$\eta = p\zeta^n,$$

les sections droites de tous les autres cylindres orthogonaux sont des lignes de la même famille (Voir le § 5).

Dans ce cas:

$$\psi(\zeta) = p\zeta^n,$$

et, en appliquant l'équation (29), on trouve que la ligne méridienne de S est:

$$x_0^2 + \frac{1}{n} z_0^2 = a.$$

On voit donc que:

«*Toutes les surfaces de révolution* S *orthogonales au cylindre donné sont des surfaces du deuxième ordre à centre, senblables. Pour* n *positif, ces surfaces sont des ellipsoïdes; pour* n *negatif, elles sont des hyperboloïdes*».

Si l'on fait $n=2$, $n=\frac{1}{2}$, $n=-1$, on obtient des résultats qu'on a obtenu dans la question précédente.

§ 8

Lorsque deux surfaces se coupent orthogonalement le long d'une ligne L, et cette courbe est une géodésique ou une asymptotique d'une des surfaces, elle est respectivement une asymptotique on une géodésique de l'autre.

Il suit qu'un cylindre H et une surface de révolution S se coupent orthogonalement le long d'une asymptotique L de S, lorsque la ligne L est une hélice du cylindre H.

Or, si dans les équations (27), qui définissent L, on prend l'arc σ de la section droite du cylindre orthogonal au lieu du paràmètre t, on a:

$$\zeta'^2=1-\eta'^2$$

et les équations (27) diviennent:

$$x=\sqrt{a-2\int\frac{\eta(\sigma)}{\eta'(\sigma)}.d\sigma}, \quad y=\eta(\sigma), \quad z=\int\sqrt{1-\eta'^2(\sigma)}.d\sigma.$$

Celles-ci représentent une hélice d'un cylindre ayant les génératrices parallèles à l'axe des x lorsque

$$x=\sqrt{a-2\int\frac{\eta(\sigma)}{\eta'(\sigma)}d\sigma}=m\sigma+n,$$

m et n étant des constantes. Et dans ce cas on obtient :

$$(32)\quad \eta=h(m\sigma+n)^{-\frac{1}{m^2}}, \quad \zeta=\int\sqrt{1-\frac{h^2}{m^2}(m\sigma+n)^{-\frac{2(1+m^2)}{m^2}}}\,.d\sigma,$$

h étant une constante arbitraire.

Les équations (32) définissent la section droite Λ du cylindre H coupant la surface S orthogonalement.

D'ailleurs on a :

$$x=m\sigma+n, \quad y=\eta, \quad z=\zeta;$$

donc la ligne méridienne de la surface de révolution S est définie par les équations :

$$(33)\begin{cases} x_0=\sqrt{x^2+y^2}=(m\sigma+n)\sqrt{1+h^2(m\sigma+n)^{-\frac{2(1+m^2)}{m^2}}} \\ z_0=z \qquad\qquad =\int\sqrt{1-\frac{h^2}{m^2}(m\sigma+n)^{-\frac{2(1+m^2)}{m^2}}}\,.d\sigma. \end{cases}$$

On peut donc énoncer le théorème :

«*Dans la surface de révolution ayant pour axe l'axe des z et pour ligne méridienne la courbe déterminée par les équations* (33), *un des systèmes de lignes asymptotiques est formé par une suite d'hélices placées sur des cylindres dont les génératrices sont perpendiculaires à l'axe de la surface*».

Si l'on remarque que les binormales d'une ligne asymptotique d'une surface de révolutiou coupent l'axe de cette surface, on peut dire :

«*L'hélice qu'on vient de déterminer jouit de la propriété caractéristique que ses binormales vont couper une droite fixe, perpendiculaire aux génératrices du cylindre contenant l'hélice*».