200

Ao Ill.^{mo} e Ex.^{mo} Senhor Antonio José da Miranda offerece o seu antiguo discipulo, e constante venerador.

Marquez de Paranaguá

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.

Estes Elementos de Geometria foram scriptos em Lisboa, sendo o author então Lente de Mathematica na Academia Real da Marinha. Delles tem-se feito alli tres edições por determinação e á custa da Academia Real das Sciencias. A edição actual porém apresenta melhoramentos feitos pelo author, assim nos dictos Elementos, como no pequeno Tractado de Geometria Spherica, em appendice.

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA.

PELO

Marquez de Paranaguá,

Senador do Imperio do Brasil; Conselheiro de Estado; Grão-Cruz da Imperial Ordem do Cruzeiro; Cavalleiro da de Christo; Brigadeiro do Imperial Corpo de Ingenheiros; Membro Honorario da Sociedade Litteraria do Rio de Janeiro; Socio da Academia Real das Sciencias de Lisboa; e de outras Academias e Sociedades Extrangeiras: &c.

Nova edição.

SOCIEDADE LITTERARIA NO RIO DE JANEIRO

Rio de Janeiro.

Typographia Austral. Bêco de Bragança N.º 15.

1838.

A Sociedade Litteraria do Rio de Janeiro em sua Sessão do 1.° de Julho de 1836, mandou imprimir á sua custa a obra — **Elementos de Geometria** —, composição de seu mui digno Socio Honorario o Ill.^mo^ e Ex.^mo^ Sr. Marquez de Paranaguá, correcta e melhorada pelo mesmo Senhor, e offerecida á sobredicta Sociedade.

O Dr. Luiz Antonio da Costa Barradas.
1.° Secretario da Sociedade.

PROLOGO.

Entre os muitos Elementos de Geometria, que se tem scripto e publicado depois de Euclides, foram adoptados nas Scholas portuguezas, principalmente nas militares, os de Bezout; talvez por que este Geometra screveu um curso completo de mathematicas para uso dos alumnos de Marinha, e Artilheria: e a pezar das muitas faltas, e inadvertencias, que se tem reconhecido nos scriptos elementares deste author, alias de merecida reputação, é ainda inteiramente seguido o seu curso de mathematicas. Mas que difficuldades não encontram os disciplulos, que embaraços os mestres, no stuido, e na explicação das suas doctrinas? Por isso alguns professores, assim das nossas scholas, como das de França, tem publicado supplementos, e notas a Bezout, e até reformado alguns dos seus compendios. Entretanto o de Geometria exige sem duvida mais do que todos rigorosa reforma (*); pois

---

(*) Veja-se Lacroix — Essai sur l'enseignement — Edição de 1805.

não posso jamais accommodar-me a que os discipulos hajam, como evidentes, proposições que carecem de ser demonstradas; nem como demonstração, paralogismos e fallacías. Supprir na aula o mestre com outras demonstrações, nem sempre é possivel, ou facil: e quando o seja, a experiencia tem mostrado, que é baldar tempo; por que de ordinario, nem todos promptamente as concebem, nem facilmente as retem na memoria. Nestes termos intendi por melhor, ordenar novo compendio, que acostado ao de Bezout podesse servir aos mesmos fins.

Todos sabem, quanto é difficil screver bons compendios. Descartes, Newton, Leibnitz, Bernoulli, &c. (ao intender de d'Alembert) não teriam feito pouco em produzir dignamente o de Geometria (*). Não me poupei porém a desvelo e a trabalho algum, para que as doctrinas fossem expostas com methodo e clareza: e quiz antes ser algumas vezes miudo, do que vago nos enunciados dos Theoremas, e ligeiro nas de-

(*) Pour faire d'excellens élémens de Géométrie, Descartes, Newton, Leibnitz, Bernoulli, &c. n'eussent pas été de trop. (Alembert.)

monstrações; lembrando-me sempre, como diz o celebre professor de Felice (*), que a principal vantajem do studo desta Sciencia, é o de crear e formar na mocidade o spirito de Exactidão; falo do spirito geometrico, o unico que segundo a expressão de outro sabio, é a *verdadeira fonte do discurrer, do inventar, e do saber*. Embora encontre isto a opinião de muitos, que tendo so por util das mathematicas, o que pode ter immediata applicação aos usos mechanicos da vida, julgam para isso mais do que sufficientes os enunciados das Proposições. Ja deste mal se queixava o Geometra portuguez, o Padre Manuel de Campos, contra aquelles que *tendo obrigação de instruir e formar verdadeiros mathematicos, como são Ingenheiros, Pilotos, e Architectos, lhes dão sómente umas doctrinas superficiaes, que não servem mais que de crear ignorantes e presumidos com pouca utilidade do bem publico*. Ver-se-á tambem do

(*) Mais le principal avantage des mathématiques, c'est la justesse de l'esprit, qu'elles produisent chez ceux qui les cultivent. La prémiere qualité de l'homme, la plus nécessaire, celle qui s'étend à toutes ses actions, à tous ses emplois, et qui etant jointe à la droiture du cœur, qu'elle doit mettre en œuvre, et conduire par sa lumière, fait toute sa perfection, c'est la justesse de l'esprit.
Leçons de Logique par Mr. le Professeur de Felice.

contexto da obra, que busquei, quanto me foi possivel, conservar a analogia entre as suas partes (*). As *rectas* e os *planos*, os *triangulos* e os *tetraedros*, os *parallelogrammos* e os *parallelipipedos*, &c. são quasi sempre tractados debaixo do mesmo aspecto: e proposições ha, que vão transcriptas de huma Secção ás outras, com a unica differença de mudar as palavras *linha* em *área*, e *área* em *volume*.

Algumas difficuldades se tem encontrado em demonstrar certas *theorias*: e entre todas a das *parallelas* tem dado mais que intender aos Geometras. Eu quiz antes valer-me do principio da *similhança*; e me persuado de que facilmente se me concederá « Que si duas rectas que estão inclinadas a respeito de terceira, concorrem; outras que estiverem inclinadas do mesmo modo a respeito dessa ou de outra terceira, similhantemente tambem concurrerão. »

Era egualmente difficil, pelo menos não se soube por muito tempo, demonstrar com o ri-

---

(*) La conservation de l'analogie entre les parties d'un même Traité, est de la plus haute importance, puisqu'en même temps qu'elle aide la mémoire du lecteur, elle l'accoutume à généraliser ses idées.

Lacroix no disc. prelim. dos Elem. de Geom.

gor geometrico o Theorema n.º 308 (*). Recurriam á idea dos *infinitos*; quando Legendre mais zeloso da exactidão tentou romper as trevas por um modo ingenhoso e elegante. Mas elle mesmo, e Lacroix que o seguira, não se satisfizeram depois com a evidencia desse methodo, como este dá a intender na nota da pag. 163 dos seus Elementos de Geometria, 4.ª edição feita no anno de 1804, em que apparece com outra demonstração, qual a que damos com pouca differença nestes Elementos: e a suppõe achada em primeiro logar por Mr. Ampère, Professor na Schola central de Lyão (**). Nós porém lha não concedemos em honra das Letras portuguezas; e declaramos que a temos lido nos Elementos de Geometria do Padre Manuel de Campos, impressos em Lisboa no anno de 1735, e por conseguinte muito anterior a Mr. Ampère. Não queremos com isto

---

(*) Veja-se o mesmo discurso preliminar.

(**) Elle se expressa desta maneira: Si on ne regarde pas cette égalité comme évidente, on la prouvera ainsi qu'il suit. E dando a demonstração, accrescenta: Cette démonstration très-simple paroit avoir été trouvée en premier lieu par Mr. Ampère, Professeur à l'Ecole centrale de Lyon. Veja-se o citado Ensaio a p. 326.

Esta mesma demonstração vem ja nos Elementos de Geometria de Legendre impressos em 1812, 9.ª edição.

tirar o merito a este Professor; que pode bem ter-se encontrado em seu raciocinio com o Geometra portuguez: só não consentimos que se attribua a aquelle a gloria de primeiro no invento; nem ainda á José Anastasio da Cunha, como alguns pretenderam, alias Geometra de mui distincta reputação.

De certas applicações, taes como alinhamentos, medição de distancias, configurações, &c. intendi desnecessario tractar aqui, tanto por terem logar proprio na *Trigonometria rectilinea*, como por que requerem o conhecimento de alguns instrumentos, para o qual não basta unicamente a descripção delles.

INDICE

Das materias, que se contêm nestes Elementos.

TERCEIRA SECÇÃO.

QUARTA SECÇÃO.

APPENDICE.

ADVERTENCIA.

Intendemos por *construcções geometricas* aquellas operações graphicas, em que so se emprega a regua, e o compasso.

Os numeros, que se encontrarem entre parenthesis, são citações de alguma proposição destes Elementos. Por ex. (14) indica a proposição ou § 14: e (1.°), ou (2.°), &c. indica a parte já demonstrada da proposição de que se tracta, ou do § que se cita.

Ax.	significa	*Axioma*, isto é, uma proposição por si mesma evidente.
Theor.	»	*Theorema*, isto é, uma proposição, que se ha de demonstrar.
Probl.	»	*Problema*, isto é, uma questão que se ha de resolver.
Coroll.	»	*Corollario*, isto é, uma consequencia de proposição demonstrada.
Schol.	»	*Scholio*, isto é, uma reflexão sobre alguma ou mais proposições precedentes.
Soluç.	»	*Solução*.
Demonstr.	»	*Demonstração*.
Hyp.	»	*Hypothese*.
Constr.	»	*Construcção*.

Não damos a explicação dos signaes algebricos, por suppormos no leitor principios de Algebra, pelo menos até ás equações lineares.

ERRATAS.

Paginas.	Linhas.	Erros.	Emendas.
10	28	$\frac{1}{2}. \frac{1}{2}. \frac{1}{2}. \frac{1}{2}. \ldots$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots$
11	22	$\widehat{Ai'}.:$	$\widehat{Ai'}:$
12	8	$n^{\circ}.$	n°
12	24	FG	$\widehat{FG}$
70	10	(83)	(85)
84	8	a área	as áreas
91	12	$\overline{AD}^2 : \overline{MG}^2$	$\overline{AB}^2 : \overline{MG}^2$
97	16	Si é possivel.	Si é possivel,

ELEMENTOS

DE

GEOMETRIA.

Noções geraes e definições.

1. Consideramos os corpos, somente como porções de extensão penetraveis, divisiveis, e figuradas.

Notamos em qualquer delles tres dimensões: *comprimento*, *largura*, e *profundidade*.

Si abstrahindo a profundidade, contemplamos so o exterior do corpo; temos a idea da *superficie*.

Si na superficie abstrahindo a largura, attendemos unicamente ao comprimento; temos a idea da *linha*.

Si na linha abstrahindo o comprimento, consideramos somente o logar em que ella começa ou termina; temos a idea do *ponto*.

Conseguintemente:

Corpo é uma extensão com tres dimensões: *comprimento*, *largura*, e *profundidade*.

Superficie é uma extensão com duas dimensões: *comprimento*, e *largura*.

Linha é uma extensão com uma so dimensão: *comprimento*.

Ponto é o logar da Extensão, que se considera sem dimensão alguma.

2. Todo o spaço terminado, ou por uma ou mais linhas, ou por uma ou mais superficies, diz-se *figura*.

3. Intendemos por *volume* a quantidade de extensão com tres dimensões, que um corpo occupa: E por *área* a quantidade de extensão superficial que se contém em uma figura.

4. Duas figuras são eguaes, quando podem ajustar-se perfeitamente entre si.

PRIMEIRA SECÇÃO.

Das linhas.

5. Entre as linhas distinguem-se *rectas*, e *curvas*. Chamam-se *rectas* aquellas linhas que não podem ter dous pontos communs, sem que se confundam inteiramente:

E *curvas* as que não são rectas.

6. *Coroll.* Dous pontos dados determinam a situação de uma recta: e ao mesmo tempo a sua grandeza, si estes dous pontos são extremos della.

Esta se diz ser a *distancia* reciproca dos dous pontos.

7. Nomea-se um ponto com uma letra: e uma recta com duas, posta cada uma nos extremos da recta. Assim a recta (fig. 1) tirada entre os dous pontos *A*, *B*, se nomea a recta *AB*.

8. As linhas medem-se com outras linhas: porém geralmente a medida commum das linhas, e a mais simples, é a recta. Medir uma linha recta, ou curva, é procurar a relação, que ha entre essa linha e uma recta conhecida, a qual se considera então como unidade. Por ex: quer-se medir a recta *AB* (fig. 2), isto é, achar a relação, que ha entre *AB* e outra recta *DE*, que se tomou para medida. Para isso se procederá da maneira seguinte.

Si for $AB > DE$, applique-se *DE* pelo seu comprimento successivamente sobre *AB*, em quanto nesta se podér ir contendo, começando de *A* para *B*. Supponha-se que applicada duas vezes até *C*, ficou o resto $CB < DE$. Será $AB = 2DE + CB$. Applique-se do mesmo modo o resto *CB* sobre *DE*: e supponhamos tambem que applicado tres vezes até *F*, sobrou $FE < CB$. Será $DE = 3CB + FE$. Continue-se da mesma forma com este segundo resto: e demos que finalmente aconteça caber *FE* em *CB* cinco vezes sem resto algum. Será $CB = 5FE$: e por tanto $DE = 16FE$: e $AB = 37FE$; ou $AB = \frac{37}{16}DE$: valor conhecido, pois é expresso na medida que se escolheu. Donde se vê 1.°: Que as linhas *AB*, *DE* estão entre si, como os numeros 37, e 16; por quanto $AB : DE :: 37 : 16$. 2.°: Que *FE* é a maior medida commum que ha entre as linhas *AB*, *DE*.

Si neste processo ainda ficasse resto; continuar-se-hia do mesmo modo. E como todas as vezes que o houver, se pode assim continuar, segue-se que, ainda quando não possamos achar exactamente a relação entre duas linhas, sempre nos podemos aproximar della quanto quizermos; e pelo menos, sem erro sensivel, exprimir em numeros a relação que se dá entre ellas. Taes linhas dizem-se *incommensuraveis*.

9. A fim de facilitar a intelligencia do que vamos a dizer ácerca das linhas, supporemos nesta 1.ª Secção, e na 2.ª, que todas as linhas e figuras estão descriptas sobre a mesma *superficie plana.*

Chama-se *superficie plana*, ou *plano* simplesmente, aquella superficie, sobre a qual se pode exactamente applicar uma recta em todos os sentidos. E a que não é plana, chama-se *superficie curva*.

10. *Coroll.* A recta, que tem dous pontos em um plano, existe toda nelle.

11. A linha curva, que não pode ser cortada por uma recta em mais de dous pontos, diz-se *convexa.*

12. *Ax.* De todas as linhas, que terminam nos mesmos pontos, a recta é a minima: e entre as que estão da mesma parte da recta, a convexa interior é sempre menor do que qualquer outra exterior.

13. A superficie curva, que não pode ser atravessada por uma recta em mais de dous pontos diz-se *convexa.*

14. *Ax.* De todas as superficies, que terminam nas mesmas linhas, a plana é a minima: e entre as que estão da mesma parte da plana, a convexa interior é sempre menor do que qualquer outra exterior.

15. E' facil ver, que a quaesquer tres pontos

se pode applicar um plano. Por quanto assentado o plano sobre a recta tirada por dous desses pontos, si o fizermos gyrar sobre ella, necessariamente ha de ir encontrar o terceiro ponto, prolongado o plano, si for preciso.

16. Theor. *Si dous planos tiverem tres pontos communs, que não estejam em linha recta, confundir-se-hão inteiramente.*

Demonstr. Sejam os pontos (fig. 3) A, B, C, communs a dous planos. Tirem-se as rectas AB, BC, AC. Estarão todas tres em ambos os planos (10). Tome-se qualquer ponto F em uma dellas; e qualquer ponto E em outra. Tire-se a recta FE indefinida. Estará FE tambem em ambos os planos; por ter os dous pontos F, E, em ambos elles. O mesmo accontecerá a respeito de qualquer outra, que se tirar. Logo os dous planos tocam-se por toda a parte. Por conseguinte confundem-se inteiramente.

17. *Coroll.* Tres pontos, que não estão em linha recta, determinam a situação de um plano.

18. De todas as linhas curvas tractaremos unicamente da *circumferencia do circulo.*

Chama-se *circulo* a figura terminada em um plano por uma so linha, a qual tem todos os seus pontos equidistantes de outro ponto do mesmo plano. Este ponto chama-se *centro* do circulo. A linha que o termina, *circumferencia.* As rectas tiradas do centro para a circumferencia, *raios.* E a que passa pelo centro, e termina de uma e outra parte na circumferencia, *diametro*. Qualquer porção da circumferencia, *arco*. A recta, cujos extremos são os mesmos de um arco, *corda*, ou *subtensa*. A porção do circulo terminada por um arco e pela sua corda, *segmento*: e por um arco e pelos raios que interceptam esse arco, *sector*.

N. B. Denotaremos algumas vezes os arcos com este signal ⌒ posto por cima das letras que marcam seus extremos, a fim de os distinguirmos das cordas.

19. THEOR. *O diametro divide a circumferencia, e o circulo, em duas partes eguaes.*

Seja (fig. 4) o circulo *CAEBDA*, cujo centro é *C*; e *AB* um diametro. Digo que a circumferencia e o circulo estão divididos por *AB* em duas partes eguaes.

Demonstr. Imagine-se dobrada a figura pelo diametro *AB*; e applicado um ponto do segmento *AEBCA* sobre o segmento *ADBCA*. O plano daquelle se ajustará sobre o deste (16): e todos os pontos do arco *AEB* cairão sobre o arco *ADB*; por que o raio, que se tirasse para um ponto *a* ou *á*, que não caisse sobre *ADB*, seria > ou < *CD* raio do mesmo circulo: o que é contra a definição (18). Logo o arco *AEB* se ajustará sobre o arco *ADB*, e lhe será egual; pois tem os mesmos extremos. Por conseguinte *AEBCA*=*ADBCA*. Mas ambos os arcos fazem a circumferencia, e ambos os segmentos o circulo. Logo cada arco é a metade da circumferencia, ou uma *semi-circumferencia*: e cada segmento a metade do circulo ou *semi-circulo*. Logo o diametro divide a circumferencia e o circulo em duas partes eguaes.

20. Assentaram em repartir a circumferencia do circulo em 360 partes eguaes, a que deram o nome de *graus:* cada um destes em 60 partes eguaes, a que chamaram *minutos:* cada minuto em outras 60 partes eguaes, a que chamaram *segundos:* e assim foram successivamente subdividindo, dando a estas subdivisões de 60 em 60 os nomes de *minutos*, *segundos*, *terceiros*, *&c.*

O grau denota-se com o signal. . . . °
O minuto . . . . ′
O segundo. . . . . ″
&c.

Por ex. $3° 47' 52''$ quer dizer 3 graus, 47 minutos, e 52 segundos.

Dos angulos e sua medida.

21. Duas rectas, que concorrem em um ponto, estão ambas no mesmo plano (17); e se diz que fazem *angulo.*

E formarão sempre um sector, descrevendo-se com qualquer raio do ponto do concurso, como centro, um arco que nellas termine (18). Assim a um angulo corresponde um arco de circulo: e reciprocamente.

Em geral se diz que fazem *angulo* duas linhas que concorrem em um ponto. Este chama-se *vertice* do angulo; e as linhas *lados:* e conforme estas são, rectas ou curvas, ou uma recta e a outra curva, se lhe dá o nome de *angulo rectilineo*, *curvilineo*, ou *mixtilineo*. Si os lados se prolongam do vertice para a outra parte; o angulo formado pelo prolongamento dos dictos, diz-se *verticalmente opposto* a respeito do primeiro: e reciprocamente. Fig. 6.

22. Nomea-se um angulo com tres letras, das quaes a media se põe no vertice, e cada uma das outras em seu lado. Assim para dizermos o angulo formado pelas duas linhas *AC*, *BC* (fig. 5) diremos o angulo *ACB*, ou *BCA* : ou simplesmente *C*, quando não mais de um angulo tiver o vertice no mesmo ponto; por que no caso contrario, dizendo-se somente *C*, como na fig. 6, não saberemos de qual dos angulos se fala.

Tractaremos unicamente dos angulos rectilineos.

23. Dous angulos são eguaes, quando applicado o vertice de um sobre o vertice do outro, e ajustado um lado sobre um lado, os outros dous tambem se ajustam, sobrepostos os planos. Mas si entre os dous lados de um cae o segundo lado do outro; aquelle angulo se diz maior do que este, ou este menor do que aquelle: e é neste sentido que os consideramos como grandezas.

A grandeza pois de um angulo não depende da de seus lados.

24. Theor. *Si dous sectores do mesmo circulo, ou de circulos eguaes, tiverem arcos eguaes; terão angulos eguaes, áreas eguaes, e serão eguaes. E o que tiver maior arco; terá maior angulo, maior área, e será maior.*

1.° Sejam (fig. 7) os sectores *CAB*, *CDE* do mesmo circulo: e $\widehat{AB}=\widehat{DE}$. Digo que o angulo *ACB* é = angulo *DCE*; a área *CABC* = área *CDEC*; e os sectores eguaes.

Demonstr. Dobre-se a figura, de modo que o raio *CB* se ajuste sobre o raio *CD*. O arco *BA* se ajustará sobre $\widehat{DE}$ (18): e por ser $\widehat{AB}=\widehat{DE}$ (hyp.), o ponto *A* cairá em *E*. Logo tambem *CA* se ajustará sobre *CE* (5); o angulo *ACB* cobrirá exactamente o angulo *DCE*; e a área *CABC* a área *CDEC*: Logo $ACB=DCE$; $CABC=CDEC$; e eguaes os sectores, pois se ajustam perfeitamente.

2.° Seja porêm $\widehat{AD}>\widehat{DE}$. Digo que o angulo *ACD* > angulo *DCE*; a área *CADC* > área *CDEC*; e o sector *CAD* > sector *CDE*.

Demonstr. Por quanto é $\widehat{AD}>\widehat{DE}$; haverá em $\widehat{AD}$ uma porção $\widehat{AB}=\widehat{DE}$. Tire-se *CB*. Será o angulo *ACB* = angulo *DCE*; a área *CABC* = área *CDEC*; e o sector *CAB* = sector *CDE* (1.°). Mas é evidentemente o angulo *ACD* > angulo *ACB*; a área *CADC* > área *CABC*; e o sector *CAD* > sector *CAB*. Logo tambem o angulo *ACD* > angulo *DCE*; a área *CADC* > área *CDEC*; e o sector *CAD* > sector *CDE*.

25. *Coroll*. 1.° Reciprocamente: si dous sectores do mesmo circulo, ou de circulos eguaes, tiverem

angulos eguaes, terão arcos eguaes, áreas eguaes, e serão eguaes. E o que tiver maior angulo, terá maior arco, maior área, e será maior.

26. *Coroll.* 2.º Dividindo pois a circumferencia de um circulo em quaesquer partes eguaes, AB, BD, DE, &c., e tirando para os pontos da divisão os raios CA, CB, CD, CE, &c.; os angulos ACB, BCD, DCE, &c., assim como os respectivos sectores, serão eguaes. E por isso teremos $ACB : BCD : DCE :$ &c. :: $\widehat{AB} : \widehat{BD} : \widehat{DE}$: &c.; e logo $ACB+BCD+DCE+$ &c. (somma de todos os antecedentes): $\widehat{AB}+\widehat{BD}+\widehat{DE}$ +&c. (somma de todos os consequentes) :: ACB (um so antecedente): $\widehat{AB}$ (seu consequente); ou como qualquer numero de vezes ACB para o mesmo numero de vezes $\widehat{AB}$. Por ex. :: $ACD : \widehat{AD}$ :: $ACE : \widehat{AE}$ :: &c.

Do mesmo modo se comparam as áreas.

27. Theor. *Postas duas grandezas deseguaes; si da maior se tirar não menos da metade; e do resto não menos da metade; e assim se continuar; ficará por fim um resto mais pequeno do que a menor daquellas duas grandezas.*

Demonstr. Seja a grandeza $A>B$. E' evidente que algum multiplo de B excederá A. Si for $3B>A$; com mais razão será $4B>A$. Si for $5B>A$, ou $6B>A$, ou $7B>A$; tambem com mais razão será $8B>A$; &c. Logo haverá sempre um multiplo da forma 2. 2. 2. 2. .... $2B>A$. E logo $\frac{1}{2}. \frac{1}{2}. \frac{1}{2}. \frac{1}{2}...\frac{1}{2}A<B$.

Tirando mais da metade será o resto muito menor.

28. Theor. *Os angulos estão entre si, como os arcos dos sectores formados sobre os seus lados com o mesmo raio; ou tambem como as áreas dos mesmos sectores.*

Sejam (fig. 8) os angulos ACB, DEF: e sejam os arcos AB, DF, descriptos com o mesmo raio. Digo que é $ACB : DEF :: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{DF}$.

Demonstr. Supponha-se tomado de A para B o arco $\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{DF}$. Tire-se CG. Será o angulo $ACG = DEF$ (24): e $ACB : ACG :: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{AG}$. Por que si não for $ACB : ACG :: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{AG}$; será como $\overset{\frown}{AB}$ para um arco $>$ ou $< \overset{\frown}{AG}$. Seja $:: \overset{\frown}{AB}$: arco $> \overset{\frown}{AG}$, isto é $:: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{Ar}$. Conceba-se dividido $\overset{\frown}{AB}$ em tantas partes eguaes, que um dos pontos da divisão cáia entre r e G; por ex. i. Tire-se o raio Ci. Teremos $ACB : ACi :: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{Ai}$. (26). Mas tambem supposemos $ACB : ACG :: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{Ar}$. Logo $ACi : ACG :: \overset{\frown}{Ai} : \overset{\frown}{Ar}$. Mas $ACi > ACG$: logo $\overset{\frown}{Ai} > \overset{\frown}{Ar}$: o que é absurdo. Pois seja $:: \overset{\frown}{AB}$: arco $< \overset{\frown}{AG}$, isto é $:: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{Ar'}$. Conceba-se dividido $\overset{\frown}{AB}$ do mesmo modo, até que um dos pontos da divisão cáia entre r' e G, por ex. i'. Teremos da mesma forma $ACB : ACi' :: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{Ai'}$. Mas tambem supposemos $ACB : ACG :: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{Ar'}$. Logo $ACi' : ACG :: \overset{\frown}{Ai'} : \overset{\frown}{Ar'}$. Mas $ACi' < ACG$: logo $\overset{\frown}{Ai'} < \overset{\frown}{Ar'}$: o que é absurdo. E pois não é $ACB : ACG :: \overset{\frown}{AB}$: arco $>$ ou $< \overset{\frown}{AG}$; será $:: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{AG}$. Mas $ACG = DEF$, e $\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{DF}$ (constr.). Logo $ACB : DEF :: \overset{\frown}{AB} : \overset{\frown}{DF}$. Da mesma forma discurreremos a respeito das áreas.

29. *Coroll.* Pois os angulos são proporcionaes aos arcos dos sectores formados sobre os seus lados com o mesmo raio; segue-se que podemos representar os

angulos pelos dictos arcos; e conhecer por meio destes a grandeza daquelles. Com effeito:

Seja ACB (fig. 5) um angulo que se quer medir: e $n°$ o numero dos graus e partes do grau do arco do sector formado sobre os seus lados. Denotando $1^\wedge$ o grau angular, ou angulo correspondente ao arco de $1°$; teremos $1° : n° :: 1^\wedge : ACB$. Logo $ACB = \frac{n°}{1°} \times 1^\wedge = n \times 1^\wedge = n^\wedge$: onde se vê que o angulo vem expresso em medidas angulares, e pelo mesmo numero dos graus, e partes do grau, de que consta o arco. Pelo que pode o arco representar o angulo: e é neste sentido que daqui em diante diremos que lhe serve de medida.

Das perpendiculares, e obliquas.

30. Theor. *Si uma recta cair sobre outra; fará com esta, prolongada si for necessario, dous angulos, cada um de sua parte, que junctos valerão* 180°.

Cáia (fig. 9) a recta AC sobre a recta BD, fazendo com esta os dous angulos ACB, ACD. Digo que $ACB + ACD = 180°$.

Demonstr. Faça-se centro em C, e com qualquer raio CE descreva-se a semi-circumferencia EFG. Será $\widehat{EF}$ a medida de ACB, e $\widehat{FG}$ a medida de ACD (29). Porém $\widehat{EF} + \widehat{FG}$ fazem 180°. Logo $ACB + ACD = 180°$.

31. *Coroll.* 1.° Si os dous angulos são eguaes;

cada um é $= 90°$: e chamam-se *angulos rectos*; e a linha incidente *perpendicular*. Si deseguaes; o maior é $> 90°$, e o menor $< 90°$: e chama-se aquelle, *angulo obtuso*; e este, *angulo agudo*; e a linha incidente, *obliqua*.

32. *Coroll.* 2.° Logo si uma recta for perpendicular á outra recta, tambem esta o será a respeito daquella.

33. Dous angulos, cuja somma é 180°, dizem-se *supplementos* um do outro: e aquelles, cuja somma, ou differença é 90°, dizem-se *complementos*.

34. *Coroll.* 1.° Os angulos, que são eguaes, tem supplementos eguaes, e complementos eguaes. E reciprocamente: os que tem supplementos eguaes, ou complementos eguaes, são eguaes; sendo porém ou ambos agudos, ou ambos obtusos, os que tiverem complementos eguaes.

35. *Coroll.* 2.° Logo os angulos verticalmente oppostos são eguaes. Por ex. (fig. 6) $ACB = GCF$. Por que ACG é supplemento assim de ACB, como de GCF.

36. THEOR. *Por um ponto não se pode tirar mais do que uma perpendicular a uma recta.*

Este Theorema comprehende dous casos: por que ou o ponto está na recta, ou fóra.

1.° Esteja o ponto na recta; e seja esta BD (fig. 9), e aquelle C. Digo que por C não se pode tirar mais, do que uma perpendicular a BD.

Demonstr. Si é possivel, tirem-se duas; e sejam CA, *CA'*. Pelo n.° 31 se mostra a impossibilidade.

2.° Esteja agora o ponto fóra da recta; e seja esta *EF* (fig. 10), e aquelle *C*. Digo que por *C* não se pode tirar mais do que uma perpendicular a *EF*.

Demonstr. Si é possivel, tirem-se duas; e sejam *CA*, *CD*, que se imaginem continuadas de *A*, e *D*. Si dobrarmos o plano da figura por *EF*; ajustar-se-ha *CA* sobre o seu prolongamento; e *CD* tambem sobre o seu; por serem rectos os angulos que formam em *A*, e *D*, de uma e outra parte de *EF*. Mas então o ponto *C* commum ás duas *CA*, *CD*, deve estar no prolongamento de uma e outra: logo *CA*, e *CD* prolongadas tem outro ponto commum: o que é impossivel (5). Logo &c.

37. Theor. *Si duas obliquas a uma recta, tiradas de um mesmo ponto situado fóra della, forem eguaes; desviar-se-hão egualmente da perpendicular abaixada do dicto ponto, e farão com esta angulos eguaes. E si as obliquas forem deseguaes; a menor se desviará menos, e fará angulo menor.*

1.° Sejam (fig. 10) *CA*, *CB*, duas obliquas eguaes tiradas do ponto *C* para a recta *EF*. Digo que *CA*, *CB* se desviam egualmente da perpendicular abaixada do mesmo ponto *C* sobre *EF*: isto é, $DA=DB$; e *CD* perpendicular.

Demonstr. Supponha-se dividido o angulo *ACB* em duas partes eguaes pela recta *CD*. Dobre-se por *CD* a figura. Sobreposto o plano *CDA* ao plano *CDB*, a recta CA se ajustará sobre CB, por ser o angulo $ACD = DCB$ (hyp.): e o ponto A cairá em B, por ser $CA = CB$ (hyp.). Logo tambem DA se ajustará sobre DB (5); e como tem os mesmos extremos, é $DA = DB$. Mas então o angulo ADC cobre exactamente o angulo CDB, e por isso $ADC = CDB$ (23). Logo CD é perpendicular no meio de AB (31). E logo &c.

Ao mesmo tempo fica provado, que as obliquas eguaes fazem com a perpendicular angulos eguaes.

2.° Seja porém (fig. 11) $CA > CB$. Digo que CB se desvia menos da perpendicular, do que CA.

Demonstr. Sobre CB continuada tome-se $Cr = CA$: e fazendo centro em C descreva-se com o raio CA um arco, que passará pelo ponto r, e cortará AF em um ponto n. Tire-se Cn. E por que $Cn = CA$; abaixando-se de C sobre EF a perpendicular CD, será $DA = Dn$ (1.°). Mas é $Dn > DB$: logo tambem $DA > DB$. Logo CB se desvia menos da perpendicular, do que CA.

Do mesmo modo se provará ser $ACD > BCD$: isto é, que a obliqua menor faz com a perpendicular angulo menor.

38. *Coroll.* 1.° Reciprocamente: si duas obliquas a uma recta, tiradas de um mesmo ponto situado fóra della, se desviarem egualmente da perpendicular abaixada do dicto ponto, ou fizerem com esta angulos eguaes; serão eguaes. E as que menos se desviarem, ou fizerem angulo menor, serão menores.

39. *Coroll.* 2.° Logo a perpendicular é a menor recta que para outra se pode tirar de um ponto si-

tuado fóra. (Por ella se mede a distancia, que vae de um ponto a uma recta.)

40. *Coroll.* 3.° De um mesmo ponto situado fóra de uma recta não se pode tirar para esta tres rectas eguães: nem tres, das quaes duas sendo eguaes entre si, e maiores do que a terceira, estejam do mesmo lado dessa terceira.

41. *Coroll.* 4.° A perpendicular levantada no meio de uma recta passa por todos os pontos equidistantes dos extremos dessa recta: e so passa por esses. Por que a perpendicular, que de taes pontos se abaixar sobre a dicta recta, cairá no meio della; e ahi não pode haver mais do que uma perpendicular. (36). E si fosse possivel passar esta por algum ponto não equidistante daquelles extremos, a perpendicular delle tirada não cairia no meio da recta: contra o supposto.

42. *Schol.* Conclue-se pois: que uma recta será perpendicular á outra, todas as vezes que passar por dous pontos, cada um dos quaes diste egualmente de outros dous tomados em est'outra.

43. Theor. *Em todo o angulo agudo a perpendicular, que de qualquer ponto de um dos seus lados se abaixar sobre o outro lado, cairá dentro do dicto angulo agudo.*

Seja (fig. 12) o angulo agudo *ABD*. Digo que a perpendicular abaixada de qualquer ponto *A* de um dos lados *AB* sobre o outro *BD* cairá dentro do angulo *ABD*.

Demonstr. Si é possivel, cáia fóra, como por ex. *AC*. A perpendicular, que do ponto *B* se levantar sobre *CD*, encontrará *AC* em um ponto *E*: o que é impossivel (36, 2. °). Logo &c.

44. Theor. *Si tres rectas fecharem spaço, a somma de quaesquer duas será maior do que a terceira.*

Sejam (fig. 13, e 14) as tres rectas, que fechem spaço, *AB*, *BC*, *CA*. Digo que a somma de quaesquer duas, por ex. $AC+BC>AB$.

Demonstr. Consta do Ax. n. ° 12. Póde tambem demonstrar-se da maneira seguinte. Supponha-se tirada do ponto *C* sobre *AB* a perpendicular *CD*. Será $AC>AD$; e $CB>DB$. Logo tambem $AC+CB>AD+DB$. Porém $AD+DB$ (fig. 13) é a mesma *AB*, ou (fig. 14) $>AB$. Logo $AC+BC>AB$.

45. Probl. *No meio de uma recta dada levantar a perpendicular.*

Seja (fig. 15) a recta *AB*.

Soluç. Tome-se de um dos extremos *A* na dicta recta uma parte arbitraria, que seja porém maior do que o resto. Com esta como raio, fazendo centro em *A*, descreva-se um arco *EF*: e com o mesmo raio, fazendo depois centro em *B*, descreva-se outro $\widehat{GH}$; o qual corte o primeiro em um ponto *C*. Do mesmo modo, e com o mesmo, ou diverso raio, determine-se outro ponto C', ou C'', ou fique por baixo, ou por cima da recta *AB*. Tire-se por estes dous pontos

C, *C'*, a recta *CC'*. Será esta a perpendicular pedida (42).

46. *Schol.* Serve esta proposição para dividir uma recta pelo meio.

47. Probl. *De um ponto dado tirar a perpendicular a uma recta dada.*

Seja (fig. 16) a recta *AB*; e o ponto *C*.

Soluç. Faça-se centro em *C*, e com o raio *CD*, tal, que descrevendo um arco este corte *AB*; marquem-se os pontos *D*, *E*. Destes, como centros, e com maior raio do que a metade de *DE* (45), descrevam-se outros dous arcos, que se cortem em *C'*, ou *C''*. Tire-se *CC'*. Será esta a perpendicular pedida.

48. *Schol.* Si o ponto *C* estivesse na recta *AB* (fig. 17), fariamos a mesma construcção, tomando $CD = CE$, &c. Porém se tivesse tal situação, que se não podesse marcar um dos pontos *D*, ou *E* (fig. 18), continuariamos a recta *AB* primeiramente, e fariamos depois a construcção.

Dos arcos de circulo, e das suas cordas: das rectas consideradas a respeito da circumferencia do circulo: e das circumferencias consideradas umas a respeito das outras.

49. Theor. *A recta, que em qualquer circulo for perpendicular a uma corda, e passar por um dos tres*

pontos: centro do circulo, meio da corda, e meio do arco que essa corda sustém: *passará pelos outros dous. E reciprocamente: a que passar por dous desses pontos, passará pelo terceiro, e será perpendicular á corda.*

Seja (fig. 19) o circulo *CAEA*, cujo centro é *C*; e a recta *CG* perpendicular á corda *AB*. Digo que *CG* passa pelo meio de $\widehat{AB}$, e da corda.

Demonstr. Tirem-se os raios *CA*, *CB*. Segue-se do n.° 37.

Consequentemente a perpendicular á corda que passar pelo meio d'ella, ou do arco, passará pelos outros dous pontos; visto que tirada do centro deve passar por aquelles, e por um ponto não passam duas perpendiculares á mesma recta (36).

A reciproca é manifesta: por quanto esses tres pontos existem todos na mesma linha recta, perpendicular á corda (6).

50. Theor. *No mesmo semi-circulo, ou em semi-circulos eguaes, arcos eguaes tem cordas eguaes. E arco maior, corda maior.*

1.° Seja (fig. 19) $\widehat{AB}=\widehat{DE}$. Digo que $AB=DE$.

Demonstr. Conceba-se dobrada a figura pelo diametro, que divide pelo meio o arco *BD*. Sobrepostos os semi-circulos, o ponto *B* cairá em *D*, e o ponto *A* em *E*, pela egualdade dos arcos (hyp.). Logo *AB* se ajustará sobre *DE*. E logo $AB=DE$.

2.º Seja porém (fig. 20) $\widehat{AB} > \widehat{DE}$. Digo que $AB > DE$.

Demonstr. Pois é $\widehat{AB} > \widehat{DE}$; haverá em $\widehat{AB}$ um arco $\widehat{AF} = \widehat{DE}$: e será $AF = DE$ (1.º). Tire-se BF; e do centro C abaixe-se sobre BF a perpendicular CI. Tire-se tambem LF. Será $BI = FI$ (49): e logo $LB = LF$ (38). Mas é $AL + LF > AF$ (44). Logo $AL + LB > AF$: isto é, $AB > DE$.

51. *Coroll.* Reciprocamente: no mesmo semi-circulo, ou em semi-circulos eguaes, cordas eguaes tem arcos eguaes. E corda maior, arco maior.

52. Probl. *Fazer em um ponto dado de uma recta um angulo egual a outro angulo dado.*

Seja (fig. 21) a recta AB; o ponto C; e o angulo acb.

Soluç. Descreva-se do ponto c, como centro, com qualquer raio cg o arco ge. Tire-se a sua corda eg. Com o mesmo raio cg, e fazendo centro em C descreva-se o arco indefinido EH: e com a corda eg, como raio, e fazendo centro em E, descreva-se outro, que corte $\widehat{EH}$ em um ponto G. Tire-se pelos pontos C, G a recta CG. Será o angulo construido $GCB = acb$: como se pedia (24, e 51).

53. Probl. *Dividir um angulo, ou arco, em duas partes eguaes.*

Seja (fig. 22) o angulo ACB.

Soluç. Faça-se centro em C, e com qualquer raio

Ca descreva-se o arco *ab*. Tire-se a sua corda; e no meio desta levante-se a perpendicular *CD* (45). Digo que o angulo *ACB* está dividido em duas partes eguaes *ACD*, *DCB* (49): como se pedia.

54. Probl. *Dada a circumferencia, ou arco de um circulo, achar o centro.*

Seja (fig. 23) a circumferencia dada *ABD*.

Soluç. Tomem-se nella tres pontos *A*, *B*, *D*. Tirem-se as cordas *AB*, *BD*. Levantem-se no meio de cada uma as perpendiculares *FL*, *EM*. Digo que estas concurrerão em um ponto *C*; e que este é o centro do circulo.

Demonstr. Com effeito o centro deve estar tanto em *FL* como em *EM* (49). Logo ha de estar em um ponto *C* commum a ambas. Logo ellas hão de concurrer nesse ponto *C*; e este é o centro.

O mesmo practicariamos, quando dado um arco de circulo o quizessemos continuar.

55. *Coroll.* Duas circumferencias de circulo não podem ter tres pontos communs sem inteiramente se confundirem. Por que as rectas tiradas de um desses pontos para os outros dous, seriam cordas de ambos os circulos: e por conseguinte o centro de ambos estaria no mesmo ponto do concurso das perpendiculares levantadas no meio dessas cordas. Logo a recta tirada do dicto centro para um daquelles pontos, seria raio de ambos os circulos; e é evidente que com o mesmo raio, e centro, não se descrevem dous circulos distinctos.

56. Theor. *Uma recta não póde cortar a circumferencia de um circulo em mais de dous pontos.* (E cortando-a chama-se *secante*).

Demonstr. Si é possivel (fig. 24), corte uma recta a circumferencia *ABDA* de um circulo em tres pontos *A*, *a*, *B*. Tirem-se raios para estes tres pontos. Pelo n.° 40 se mostra a impossibilidade.

57. Theor. *A recta que toca a circumferencia de um circulo, e não a corta prolongada que seja, so a toca em um ponto.* (E chama-se *tangente*.)

Demonstr. Si é possivel (fig. 24), toque uma recta a circumferencia *ABDA* de um circulo em dous pontos *A*, *B*, sem que a corte, prolongada que seja. Tirem-se raios para estes dous pontos. A perpendicular, que do centro *C* se abaixar sobre a dicta recta, cairá entre elles (37); e será menor do que qualquer destes raios (39). Logo ella encontrará a recta dentro do circulo; e por conseguinte esta cortará a circumferencia; o que é contra a hypothese. Logo &c.

58. *Coroll.* 1.° A menor recta, que se póde tirar do centro de um circulo para a tangente, é o raio que vae ao ponto do contacto. Por que qualquer outra que se tirasse do centro para a tangente, sairia fóra do circulo; e seria por conseguinte maior do que o raio.

59. *Coroll.* 2.° E' pois a tangente á circumferencia de um circulo perpendicular ao raio, que vae ao

ponto do contacto (39): e por isso unica nesse ponto (36).

60. *Schol.* Assim havendo-se de tirar a tangente a qualquer ponto de uma circumferencia, levantar-se-ha a perpendicular no extremo do raio tirado a esse ponto: e será tangente.

61. THEOR. *Si duas circumferencias de circulo passarem por um mesmo ponto da recta, em que estão os seus centros; so terão commum esse ponto, em que por conseguinte se tocarão. E reciprocamente: si se tocarem em um ponto; esse ponto, e os seus centros estarão na mesma recta.*

Sejam (fig. 25) as duas circumferencias $ABDA$, $AbdA$, as quaes passem pelo ponto A da recta Cc, em que estão os seus centros C, c. Digo que estas duas circumferencias so tem commum o ponto A, em que por conseguinte se tocam.

Demonstr. Si é possivel, tenham outro ponto D tambem commum. Tirem-se as rectas CD, cD. Será $CD+cD>Cc$ (44). Mas si o ponto D é commum a ambas as circumferencias; é $CD=CA$; e $cD=cA$: logo tambem $CA+cA$, isto é, $Cc>Cc$: o que é absurdo. Logo &c.

Si as circumferencias forem $ABDA$, $AgdA$; teremos a mesma conclusão: será $CC'+C'D>CD$; isto é, $CC'+C'A>CA$: absurdo.

Reciprocamente. Toquem-se (fig. 26) as duas circumferencias $ABDA$, $AgdA$ no ponto A. Digo que este ponto, e os seus centros estarão na mesma recta.

Demonstr. Si é possivel, não estejam; e seja a recta Cc, a que passe pelos centros; e estes C, c. Tirem-se ao ponto do contacto A os raios CA, cA. Será $AC+Ac>Cc$. Mas é $CA=Cb$, e $cA=cd$: logo tambem $Cb+cd>Cc$: o que é absurdo. Logo &c.

Si as circumferencias forem $ABDA$, $Ad'g'A$, e Cc' a recta que prende os centros; se concluirá do mesmo modo: teremos $Cc'+c'A>CA$; isto é, $Cc'+c'd'>Cb$: absurdo.

62. *Coroll.* 1.° Duas circumferencias de circulo, que se tocam em um ponto, tem nesse ponto a mesma tangente. Por que ella é a perpendicular ahi levantada sobre a recta, que prende os seus centros (59).

63. *Coroll.* 2.° Duas circumferencias de circulo de raios deseguaes não se tocam em mais de um ponto: nem as de raios eguaes, si estas se tocam exteriormente. Por que si a caso se tocassem em dous pontos; estes estariam ambos na recta, que passa pelos centros: e então haveria em uma circumferencia dous pontos não equidistantes do centro: o que é contra a definição do circulo.

64. PROBL. *Descrever com determinado raio uma circumferencia de circulo, que toque outra dada em um ponto tambem dado.*

Seja (fig. 27) a circumferencia dada ADA; e A o ponto, em que se quer que a toque outra descripta com o raio bc.

Soluç. Pelo centro C (que se deve primeiramente achar (54), si não for dado) e pelo ponto A, tire-se a recta indefinida CL. Tome-se de A para L na recta CL a parte $AB=bc$; ou de A para C na recta AC, prolongada si for necessario, a parte $AC'=bc$. Faça-se centro em B, e com o raio BA descreva-se a circumferencia $AEGA$; ou faça-se centro em C', e com o raio $C'A$ descreva-se a circumferencia AFA. Digo que qualquer destas duas circumferencias satisfaz ao que se pede.

65. Probl. *Fazer passar por um ponto dado uma circumferencia de circulo, que toque outra dada em um ponto tambem dado.*

Seja (fig. 28, e 29) o ponto B, por onde deve passar a circumferencia de circulo; e A o da circumferencia $AEGA$, em que deve tocar.

Soluç. Do ponto A tire-se o raio AC; e para o ponto B a recta AB. No meio de AB levante-se a perpendicular LN; e do ponto C', em que esta encontrar o raio CA prolongado, descreva-se com o raio $C'A$ a circumferencia $AFBA$. Digo que será a circumferencia pedida.

Prova-se pelos n.os 61, e 49, discurrendo como no Problema n.º 54.

66. *Schol.* Si quizessemos fazer passar por um ponto dado B (fig. 30) uma circumferencia de circulo, que tocasse uma recta DE em outro ponto dado A; a construcção seria a mesma, com a unica differença de se levantar no ponto A sobre a recta DE a perpendicular AC (60).

Comtudo em um e outro caso pode uma vez ser impossivel o Problema.

Das parallelas.

67. *Ax.* Si duas rectas, que fazem angulos com uma terceira, prolongadas concorrem; outras duas rectas, que fizerem com a mesma, ou com outra terceira, angulos respectivamente eguaes para a mesma banda, similhantemente concurrerão. Com effeito, si os angulos (fig. 31) *CAB*, *CBA* são respectivamente eguaes aos angulos *GEF*, *HFE*, e as rectas *AC*, *BC* concorrem; tambem similhantemente concurrerão as duas *EG*, *FH*.

68. As rectas, que estando no mesmo plano se não encontram, por mais que se prolonguem de uma e outra parte, chamam-se *parallelas*. A recta, que as corta, se nomêa *secante*. Diz-se que os angulos formados pela secante com cada uma das parallelas, são *alternos*, quando estão de differentes bandas da secante: *internos*, quando estão entre as parallelas: e *externos*, quando estão de fóra dellas.

69. Theor. *Si uma de duas parallelas for perpendicular a uma terceira recta, tambem a outra o será.*

Sejam (fig. 32) as rectas parallelas *AB*, *CD*: e 1.° seja *AB* perpendicular a *EF* tirada de um ponto *F* da outra *CD*. Digo que tambem *CD* será perpendicular a *EF*.

Demonstr. Si é possivel, não seja. Então um dos angulos *CFE*, ou *EFD*, será agudo. Seja *CFE*. De qualquer ponto *C* da recta *FC*, continuada até onde o quizermos, abaixe-se sobre *FE* a perpendicular *CO* (43). E' manifesto que as duas rectas *CD*, *CO* fazem com a terceira *FE* o angulo *CFE*, e o recto *COF*; e que as duas *CD*, *AB* fazem com a mesma terceira *FE* o mesmo angulo *CFE*, e tambem o recto *AEF*. Ora as duas *CD*, *CO* concorrem: logo tambem concurrerão as duas *CD*, *AB* (67): o que é contra a hypothese. Logo &c.

2.° Seja agora *AB* perpendicular a *EF* tirada de um ponto *E* da mesma *AB*. Digo que tambem *CD* será perpendicular a *EF* em um ponto *F*, onde esta ha de encontrala.

Demonstr. Com effeito, como a perpendicular, que do ponto *E* se abaixar sobre *CD*, é tambem perpendicular a *AB*, como acabamos de ver (1.°); seguese, que ella será *EF*; por quanto de um mesmo ponto *E* não se pode tirar duas perpendiculares a *AB* (36). Logo *EF* encontrará *CD*; &c.

70. *Coroll.* 1.° Duas rectas parallelas a uma terceira, são parallelas entre si. Por que seriam perpendiculares á mesma recta, que se tirasse perpendicularmente sobre a dicta terceira: e por conseguinte não podem concurrer (36).

71. *Coroll.* 2.° Logo por um ponto dado fóra de uma recta não se pode tirar mais do que uma parallela á dicta recta.

72. THEOR. *Si duas rectas cortadas por terceira fi-*

zerem com esta o angulo externo egual ao interno da mesma banda; serão parallelas entre si. E reciprocamente: si duas rectas parallelas forem cortadas por terceira, farão o angulo externo egual ao interno da mesma banda.

Sejam (fig. 33) as rectas AB, CD cortadas por EF: e seja o angulo externo EGB = interno GHD da mesma banda. Digo que AB é parallela a CD.

Demonstr. Sendo $EGB = GHD$ (hyp.); e $GHD = CHF$ (35); e $EGB = AGH$; será $EGB = GHD = CHF = AGH$: de sorte que as rectas AB, CD fazem com EF para uma banda os mesmos angulos eguaes, externo, e interno, que para a outra banda. Isto posto: si as dictas rectas não são parallelas, concurrerão de uma destas bandas. Ora não ha mais razão para concurrerem desta, e não daquella: logo concurrerão de ambas, o que é impossivel (5). Logo será AB parallela a CD.

Reciprocamente. Sejam (fig. 34) as rectas parallelas AB, CD cortadas por EF. Digo que o angulo externo EGB = interno GHD da mesma banda.

Demonstr. Si não é $EGB = GHD$; um delles será menor. Seja EGB. Então faça-se o angulo $EGL = GHD$ (52). Será IL parallela a CD (1.º). Mas é AB parallela a CD (hyp.): logo tambem IL parallela a AB (70): o que é contra a definição (68). Logo $EGB = GHD$.

73. *Coroll.* Duas rectas pois (fig. 33) AB, CD tambem são parallelas entre si:

1.º Quando cortadas por terceira EF, os angulos alternos internos *AGH*, *GHD* são eguaes. E reciprocamente. Por que então o angulo externo verticalmente opposto a um desses internos, é egual ao outro interno da mesma banda.

2.° E pela mesma razão: Quando os angulos alternos externos *EGB*, *CHF* são eguaes. E reciprocamente.

3.° Quando os angulos internos da mesma banda *BGH*, *GHD* são supplementos um do outro. E reciprocamente. Por que cada angulo interno é supplemento do externo, que lhe é contiguo; e por isso o dicto externo egual ao outro interno da mesma banda (34).

4.° E pela mesma razão: Quando os angulos externos da mesma banda *EGB*, *DHF* são supplementos um do outro. E reciprocamente.

74. Probl. *Por um ponto dado fóra de uma recta, tirar a parallela á dicta recta.*

Seja (fig. 35) a recta *AB*; e o ponto *E*.

Soluç. Tire-se por *E* qualquer secante *ED*. Faça-se em *E* o angulo *DEF*=*DGB* para a mesma banda (52). Será *EF* a parallela pedida (72).

75. Theor. *Os angulos, que respectivamente tem os lados parallelos, e estão voltados para a mesma banda, são eguaes entre si.*

Sejam (fig. 36) os angulos *ACB*, *acb*, que tem os lados parallelos, e estão voltados para a mesma banda; a saber, AC parallelo a ac, e BC parallelo a bc. Digo que $ACB = acb$.

Demonstr. Continuem-se CB, ca, até concurrerem em um ponto D. Será $ACB = CDc$; por ser CD secante a respeito das parallelas AC, ac (73). Mas tambem é $CDc = acb$, por ser cD secante a respeito das parallelas BC, bc. Logo $ACB = acb$.

76. *Schol*. Os angulos (fig. 37, e 38) ACB, acb, que tem os lados parallelos, mas que estão voltados para differentes bandas; ou são eguaes, ou supplementos entre si. Distinguem-se facilmente, depois do que diximos, comparando um com o verticalmente opposto ao outro. Assim na fig. 37 é $ACB = a'cb'$ (75); e logo $= acb$ (35). Na fig. 38 é $ACB = acb'$ supplemento de acb (33).

77. Theor. *Os angulos, que respectivamente tem os lados perpendiculares, e estão voltados para differentes bandas, são eguaes entre si.*

Sejam (fig. 39, e 40) os angulos ACB, acb, que tem os lados respectivamente perpendiculares, e estão voltados para differentes bandas; a saber, AC perpendicular a ac, e BC perpendicular a bc. Digo que $ACB = acb$.

Demonstr. Pelo ponto c tire-se cd parallela a AC, e ce parallela a BC (74). Será cd perpendicular a ac, e ce perpendicular a bc (69). Logo o angulo ecb será $= dca$: e portanto tirando de um e outro (fig. 39) o commum bcd: ou ajunctando (fig. 40);

ficará $acb = dce$. Mas é $dce = ACB$ (75). Logo $ACB = acb$.

78. *Schol.* Não se comprehendem nesta regra os angulos (fig. 41) ACB, acb, não obstante terem os lados respectivamente perpendiculares, e estarem voltados para differentes bandas; pois são supplementos entre si, todas as vezes que comparado um com o verticalmente opposto ao outro, estes não estejam tambem voltados para differentes bandas. Com effeito é acb, ou $a'cb'$, supplemento de $acb' = ACB$ (77).

79. THEOR. *Si duas cordas forem parallelas; ou o forem uma corda, e uma tangente; os arcos interceptos serão eguaes entre si. E reciprocamente.*

Sejam (fig. 42) as cordas parallelas AB, ED. Digo que $\widehat{AE} = \widehat{BD}$.

Demonstr. Do centro C abaixe-se sobre uma das cordas, AB, a perpendicular CF. Será tambem perpendicular sobre ED (69). Por conseguinte é $\widehat{AF} = \widehat{BF}$, e $\widehat{EF} = \widehat{DF}$ (49). Logo si tirarmos $\widehat{EF}$ de $\widehat{AF}$, e $\widehat{DF}$ de $\widehat{BF}$; ficará $\widehat{AE} = \widehat{BD}$.

Reciprocamente. Seja $\widehat{AE} = \widehat{BD}$. Digo que AB é parallela a ED.

Demonstr. Com effeito a parallela a ED, que se tirar pelo ponto A, interceptará com ED um arco $= \widehat{AE}$; como se acabou de mostrar. Mas é $\widehat{BD} = \widehat{AE}$ (hyp). Logo a parallela passará pelo ponto B, e será AB.

Do mesmo modo discurreremos a respeito das parallelas corda, e tangente.

80. *Coroll.* Quando uma tangente é parallela a

uma corda; o ponto do contacto é o meio do arco, que essa corda sustém.

81. *Schol.* A proposição n.° 79 pode entre outros usos servir para se tirar por um ponto dado a parallela a uma recta dada.

Dos triangulos.

82. O menor numero de rectas, que se pode empregar para fechar spaço, é o de tres. Concurrendo duas a duas, formam tres angulos, que estão todos no mesmo plano (17, e 10). Por isso:

Chama-se *triangulo rectilineo*, ou *triangulo* simplesmente, a figura terminada por tres linhas rectas. Cada uma destas se diz *lado* do triangulo. Si todas tres são eguaes; chama-se *triangulo equilatero*. Si duas somente eguaes; *triangulo isosceles*. Si todas deseguaes; *triangulo scaleno*.

Distinguem-se pois no triangulo sete cousas: *tres angulos*, *tres lados*, e a *área*.

83. Em todo o triangulo a somma de quaesquer dous lados é maior do que o terceiro (44).

84. *Coroll.* Logo com tres rectas quaesquer nem sempre se forma triangulo.

85. Theor. *A somma dos tres angulos de qualquer triangulo é* $= 180°$.

Seja (fig. 43) o triangulo *ABC*. Digo que $CAB + ABC + BCA = 180°$.

Demonstr. Prolongue-se um dos lados *AC*. Pelo ponto *C* tire-se *CE* parallela a *AB*. Será $CAB = DCE$ (72), e $ABC = BCE$ (73). Por conseguinte $DCE + BCE$, ou $BCD = CAB + ABC$. Mas é $BCD + BCA = 180°$ (30). Logo tambem $CAB + ABC + BCA = 180°$.

86. *Coroll* 1.° Um triangulo não pode ter mais do que um angulo recto: e então chama-se *triangulo rectangulo*. Não mais do que um angulo obtuso: e então chama-se *triangulo obtusangulo*. E pode telos todos agudos: e então chama-se *triangulo acutangulo*.

Indistinctamente chamam-se *triangulos obliquangulos*, os que não são rectangulos.

No triangulo rectangulo o lado opposto ao angulo recto chama-se *hypothenusa*.

87. *Coroll.* 2.° Os dous angulos agudos de um triangulo rectangulo são entre si complementos.

88. *Coroll.* 3.° Quando dous angulos de um triangulo, ou a sua somma, são eguaes a dous angulos de outro triangulo, ou á sua somma; o terceiro angulo de um é egual ao terceiro angulo do outro.

89. *Coroll.* 4.° Dados dous angulos de um triangulo, ou a sua somma, acha-se o valor do terceiro, tirando a dicta somma de 180°.

90. *Schol.* No mesmo Theorema fica incidentemente provado, que produzindo-se qualquer lado *AC* de um triangulo, o angulo externo *BCD* é egual á somma dos dous internos *CAB*, *ABC*, que lhe são oppostos.

91. Theor. *Si em algum triangulo forem eguaes dous angulos; os lados, que lhes são oppostos, serão eguaes. E si forem deseguaes dous angulos; será maior o lado opposto ao angulo maior.*

1.° Seja (fig. 44) no triangulo ABC o angulo $ACB=BAC$. Digo que $AB=BC$.

Demonstr. Imagine-se virado o triangulo ABC, e posto sobre si mesmo de modo que o ponto A fique em C, e C em A. E' manifesto, que o lado AB se ajustará perfeitamente sobre CB, e este sobre aquelle, por serem eguaes os angulos ACB, BAC (hyp). Logo é $AB=BC$.

2.° Seja porém (fig. 45) o angulo $ACB>BAC$. Digo que $AB>BC$.

Demonstr. Faça-se o angulo $ACD=BAC$. Será $AD=DC$ (1.°). Mas é $DC+DB>BC$ (83). Logo tambem $AD+DB$, isto é, $AB>BC$.

92. *Coroll.* 1.° Reciprocamente: si em algum triangulo forem eguaes dous lados; os angulos que lhes são oppostos, serão eguaes. E si forem deseguaes dous lados; será maior o angulo opposto ao lado maior.

93. *Coroll.* 2.° O triangulo, que for equilatero, será equiangulo. E reciprocamente.

94. Theor. *Si em dous triangulos, sendo dous lados de um respectivamente eguaes a dous lados do outro, for o angulo formado pelos primeiros maior do que o angulo formado pelos segundos; o terceiro lado opposto ao maior angulo será maior do que o terceiro opposto ao menor. E reciprocamente.*

Sejam (fig. 46) os triangulos ABC, CBD, nos quaes BC é commum, $AB=BD$, e o angulo $ABC>CBD$. Digo que $AC>CD$.

Demonstr. Divida-se o angulo ABD em duas partes eguaes pela recta BE (53). Tire-se AD. Será BE perpendicular no meio de AD (37); por ser $AB=BD$ (hyp.): e cortará AC em um ponto E. Tire-se DE. Será $AE=DE$ (38), e por isso o angulo $ADE=EAD$ (92). Mas é o angulo $ADC>ADE$: logo tambem $ADC>EAD$. E logo $AC>CD$ (91).

Reciprocamente. Seja $AC>CD$. Digo que o angulo $ABC>CBD$.

Demonstr. Por ser $AC>CD$ (hyp.); será o angulo $ADC>CAD$ (92). Faça-se pois o angulo $ADE=CAD$: e tire-se EB. Será $AE=ED$ (91). Ora tambem $AB=BD$ (hyp.). Logo BE é perpendicular no meio de AD (42): e por conseguinte o angulo $ABE=EBD$. E logo $ABC>CBD$.

95. PROBL. *Descrever uma circumferencia de circulo, que passe pelos vertices dos tres angulos de um triangulo.*

Seja (fig. 47) o triangulo ABD.

Soluç. Levantem-se no meio de cada um de dous lados AB, BD as perpendiculares LM, NO, as quaes necessariamente concurrerão em um ponto C: por que não concurrendo, seriam parallelas; e por conseguinte AB, perpendicular a LM (constr.), seria tambem perpendicular a NO (69), prolongadas ambas; e então por ser BD tambem perpendicular a NO

(constr.), teriamos duas perpendiculares a esta recta tiradas de um mesmo ponto *B*: o que é impossivel (36). Descreva-se pois do ponto *C*, como centro, e com um dos intervallos *CA*, ou *CB*, como raio, a circumferencia do circulo. Digo que esta passará pelos tres pontos *A*, *B*, *D*.

Demonstr. Com effeito o ponto *C* dista tanto de *A*, como de *B*, como de *D* (41).

Chama-se a esta construcção *circumscrever* um circulo a um triangulo: e o circulo se diz estar *circumscripto*, e o triangulo *inscripto*. Em geral, quando as rectas, que terminam uma figura (ás quaes se dá o nome de *lados*) são todas cordas de um circulo, a figura se diz estar *inscripta*, e o circulo *circumscripto*. E reciprocamente: o circulo se diz estar *inscripto*, e a figura *circumscripta*, quando os lados da figura são tangentes ao circulo.

Dos angulos considerados no circulo.

96. Theor. *O angulo, que encontrando com seus lados a circumferencia de um circulo, tiver o vertice:*

1.° *Na circumferencia; terá por medida metade do arco intercepto pelos seus lados.*

2.° *Dentro do circulo; terá por medida metade do arco intercepto pelos seus lados, e mais metade do arco intercepto pelos mesmos lados prolongados do vertice.*

3.° *Fóra do circulo; terá por medida metade do arco concavo menos metade do arco convexo, interceptos pelos dictos lados.*

1.° Seja (fig. 48 e 49) o angulo, que tem o vertice na circumferencia em B. Este ou é formado por uma corda e um diametro; ou por um diametro e uma tangente; ou por duas cordas; ou por uma corda e uma tangente. Seja (fig. 48) pela corda AB e pelo diametro BD. Digo que ABD tem por medida $\frac{1}{2}\widehat{AD}$.

Demonstr. Tire-se o raio CA. Teremos no triangulo ABC o angulo $ACD=CAB+ABC$ (90). Mas é $ABC=CAB$ (92), por ser $AC=BC$: logo $ACD=2\,ABC$; donde $ABC=\frac{1}{2}ACD$. Mas ACD tem por medida $\widehat{AD}$. Logo ABC, ou ABD, terá por medida $\frac{1}{2}\widehat{AD}$.

Sendo o angulo feito (fig. 49) pelo diametro BE e pela tangente BF, está provado que vale a metade da semi-circumferencia BE (59).

Quanto ao angulo formado por duas cordas; ou por uma corda e uma tangente; facilmente se demonstrará, tirando-se pelo vertice um diametro, com o qual o angulo proposto ficará sendo somma, ou differença de dous angulos, de cada um dos quaes a medida é a metade do arco intercepto pelos seus lados, como se acaba de mostrar: e assim a medida do angulo proposto virá a ser a semi-somma, ou a semi-differença desses arcos; isto é, a metade do arco intercepto pelos lados do angulo. Com effeito (fig. 49) tirado o diametro BE, temos $ABD'=ABE+EBD'$, cuja medida é $\frac{1}{2}\widehat{AE}+\frac{1}{2}\widehat{ED'}=\frac{1}{2}\widehat{AD'}$: $ABD=ABE-DBE$, cuja medida é $\frac{1}{2}\widehat{AE}-\frac{1}{2}\widehat{DE}=\frac{1}{2}\widehat{AD}$: $DBF=DBE+EBF$, cuja medida é $\frac{1}{2}\widehat{DE}+\frac{1}{2}\widehat{EB}=\frac{1}{2}\widehat{DB}$: $D'BF=EBF-EBD'=\frac{1}{2}\widehat{EB}-\frac{1}{2}\widehat{ED'}=\frac{1}{2}\widehat{D'B}$.

2.° Seja agora (fig. 50) o angulo ABD, que tem o vertice dentro do circulo. Prolonguem-se os seus lados até encontrarem a circumferencia nos pontos *E*, *F*. Digo que *ABD* tem por medida $\frac{1}{2}\widehat{AD}+\frac{1}{2}\widehat{EF}$.

Demonstr. Tire-se a corda *ED*. Teremos no triangulo *BED* o angulo $ABD=AED+BDE$ (90). Mas *AED* tem por medida $\frac{1}{2}\widehat{AD}$; e *BDE* $\frac{1}{2}\widehat{EF}$. Logo *ABD* terá por medida $\frac{1}{2}\widehat{AD}+\frac{1}{2}\widehat{EF}$.

3.° Seja finalmente (fig. 51) o angulo, que tem o vertice fóra do circulo. Este ou é formado por duas secantes; ou por uma secante e uma tangente; ou por duas tangentes. Seja pelas secantes *AB*, *BD*. Digo que *ABD* tem por medida $\frac{1}{2}\widehat{AD}-\frac{1}{2}\widehat{EF}$.

Demonstr. Tire-se a corda *ED*. Teremos no triangulo *BED* o angulo $AED=ABD+BDE$; donde $ABD=AED-BDE$. Mas *AED* tem por medida $\frac{1}{2}\widehat{AD}$; e *BDE* $\frac{1}{2}\widehat{EF}$. Logo *ABD* terá por medida $\frac{1}{2}\widehat{AD}-\frac{1}{2}\widehat{EF}$.

Quanto ao angulo formado por uma secante e uma tangente; ou por duas tangentes; demonstra-se do mesmo modo.

97. *Coroll.* 1.° São pois eguaes todos os angulos, que tendo os vertices na circumferencia, interceptam com seus lados o mesmo arco, ou arcos eguaes.

98. *Coroll.* 2.° E' recto o angulo, que tendo o vertice na circumferencia, toca com seus lados os extremos do diametro.

99. *Schol.* Na primeira parte deste Theorema se deve intender tambem comprehendido o angulo *DBE* (fig 52), no qual um dos lados em vez de ser a corda *AB*, é o seu prolongamento *BE*. E com effeito este angulo tem por medida metade do arco *ABD* intercepto pelos seus lados: por quanto tirando a corda *AD*,

é o angulo $DBE = ADB + BAD$, que tem por medida $\frac{1}{2} AFB + \frac{1}{2} BGD$.

100. Probl. *Levantar a perpendicular no extremo de uma recta, a qual do dicto extremo se não pode continuar.*

Seja (fig. 53) a recta AB; e o extremo B.

Soluç. Tome-se fóra da recta o ponto C, tal, que a circumferencia $BDEB$ descripta delle, como centro, com o raio CB, corte a recta AB em um ponto D. Tire-se por D o diametro DE: e do ponto E, onde este encontra a circumferencia, dirija-se ao ponto B a recta EB. Será EB a perpendicular pedida (98).

101. Probl. *De um ponto dado fóra de um circulo, tirar uma tangente á circumferencia desse circulo.*

Seja (fig. 54) a circumferencia do circulo $ABDA$; e o ponto E.

Soluç. Do ponto E ao centro C do circulo tire-se a recta EC; e sobre esta, como diametro, descreva-se a circumferencia $AEBA$, que cortará a primeira nos pontos A, B. De cada um destes para E tirem-se as rectas AE, BE. Digo que qualquer destas duas rectas satisfaz ao que se pede.

Demonstr. Tirem-se os raios CA, CB. Serão rectos os angulos CAE, CBE (98): e por tanto AE perpendicular no extremo do raio CA; e BE no extremo do raio CB. Logo AE, BE, são tangentes á circumferencia $ABDA$ (60). Logo &c.

Dos casos de egualdade dos triangulos.

102. THEOR. *Dous triangulos são eguaes, quando tem dous lados respectivamente eguaes, e egual o angulo formado por esses dous lados.*

Sejam (fig. 55) os triangulos ABC, abc: e seja o lado $AB = ab$; $AC = ac$; e o angulo $A =$ angulo a. Digo que o triangulo ABC é egual ao triangulo abc.

Demonstr. Sobreponha-se um triangulo ao outro, applicando o ponto A ao ponto a, e ajustando o lado AB sobre o lado ab. O ponto B cairá em b, por ser $AB = ab$ (hyp.): o lado AC se ajustará sobre o lado ac, por ser o angulo $A =$ angulo a (hyp.): e o ponto C cairá em c, por ser $AC = ac$ (hyp.). Logo tambem o lado BC se ajustará sobre o lado bc, e lhe será egual (5, 6); pois tem os mesmos extremos. Mas então o angulo B cobre exactamente o angulo b; o angulo C o angulo c; e a área $ABCA$ a área $abca$ (16). Logo os dous triangulos se ajustam perfeitamente. E por tanto são eguaes.

103. *Coroll.* Um triangulo é determinado inteiramente, quando se dão dous dos seus lados com o angulo formado por elles.

104. *Schol.* Convém observar (e o mesmo succede nas tres proposições seguintes) que os angulos respectivamente eguaes nos triangulos eguaes, são os que ficam oppostos a lados respectivamente eguaes. Assim ao lado $AB = ab$ fica opposto o angulo $C = c$.

105. Theor. *Dous triangulos são eguaes, quando tem um lado egual, adjacente a angulos respectivamente eguaes; ou adjacente a um, e opposto a outro respectivamente eguaes.*

Sejam (fig. 55) os triangulos ABC, abc: e seja o lado AB = lado ab; o angulo A = angulo a; e o angulo B = angulo b. Digo que o triangulo ABC é egual ao triangulo abc.

Demonstr. Si os triangulos não são eguaes, sendo $AB = ab$, e o angulo A = angulo a (hyp.); não será $AC = ac$; por que, si o for, serão eguaes os triangulos (102). Seja pois $AC > ac$. Corte-se $AD = ac$; e tire-se BD. Será o triangulo ABD egual ao triangulo abc (102): e por tanto o angulo ABD = angulo b (104). Mas é o angulo ABC = angulo b (hyp.): logo tambem o angulo ABD = angulo ABC: o que é absurdo. Logo não pode AC deixar de ser $= ac$. E logo os dous triangulos são eguaes.

A segunda hypothese reduz-se á primeira, por serem então eguaes os terceiros angulos (88).

106. *Coroll.* Um triangulo é determinado inteiramente, quando se dão dous dos seus angulos com o lado adjacente a estes, ou opposto a um delles.

107. Theor. *Dous triangulos são eguaes, quando tem tres lados respectivamente eguaes.*

Sejam (fig. 56) os triangulos ABC, abc: e seja o lado $AB = ab$; $BC = bc$; e $AC = ac$. Digo que o triangulo ABC é egual ao triangulo abc.

Demonstr. Si os triangulos não são eguaes, sendo $AB = ab$, e $AC = ac$ (hyp.); não será o angulo BAC = angulo a; por que, si o for, serão eguaes os triangulos (102). Seja pois $BAC > a$. Faça-se $BAD = a$; $AD = AC$; e tire-se BD. Será o triangulo ABD egual ao triangulo abc: e por tanto $BD = bc$. Mas é $BC = bc$ (hyp.): logo tambem $BD = BC$. Mas nos triangulos ABC, ABD, é $BD < BC$ (94): logo $BD =$ e $< BC$: o que é absurdo. Logo não pode o angulo BAC deixar de ser = angulo a. E logo os dous triangulos são eguaes.

108. *Coroll.* Um triangulo é determinado inteiramente, quando se dão os seus tres lados.

109. THEOR. *Dous triangulos são eguaes, quando tem dous lados respectivamente eguaes, e egual o angulo opposto ao maior desses dous lados.*

Sejam (fig. 56) os triangulos ABC, abc: e seja o lado $AB = ab$; $AC = ac$; e o angulo ABC = angulo b, sendo $AC > AB$. Digo que o triangulo ABC é egual ao triangulo abc.

Demonstr. Si os triangulos não são eguaes, sendo $AB = ab$, e $AC = ac$ (hyp.); não será o angulo BAC = angulo a; por que, si o for, serão eguaes os triangulos (102). Seja pois $BAC > a$. Faça-se $BAD = a$, e $AD = AC$. O ponto D não cairá em BC (40). Tire-se BD. Será o triangulo ABD egual ao triangulo abc: e por tanto o angulo ABD = angulo b. Mas é o angulo ABC = angulo b (hyp.): logo tambem o angulo $ABD = ABC$: o que é absurdo. Logo não pode o angulo *BAC* deixar de ser = angulo *a*. E logo os dous triangulos são eguaes.

110. *Coroll.* Um triangulo é determinado inteiramente, quando se dão dous dos seus lados com o angulo opposto ao maior delles.

111. *Schol.* Podem tambem dous triangulos ser, ou não ser, eguaes entre si, quando dous lados de um forem respectivamente eguaes a dous lados do outro, e egual o angulo opposto ao menor desses dous lados. Por ex. (fig. 58) os triangulos *BEF*, *BEG*, tem o lado maior *BE* commum, e o angulo *B*, opposto ao lado menor, tambem commum; e pode ser *EF*=*EG*; e comtudo os dous triangulos são evidentemente deseguaes. Pelo que fica indeterminado um triangulo, todas as vezes que se dão dous dos seus lados com o angulo opposto ao menor delles: si o dicto menor lado comtudo não for egual á perpendicular, que se abaixar sobre o terceiro lado do vertice do angulo opposto a este; por que nesse caso será determinado: mas é necessario, que não seja menor do que ella, para que possa existir triangulo.

112. THEOR. *Si duas parallelas se cortarem com outras duas parallelas; as partes interceptas serão eguaes entre si.*

Sejam (fig. 57) as parallelas *EF*, *GH*, cortadas pelas parallelas *LM*, *NO*. Digo que *AB*=*CD*; e *AC* =*BD*.

Demonstr. Tire-se a recta *AD*. Os triangulos *ABD*, *ACD*, são eguaes (105); por terem o lado *AD* commum adjacente a angulos respectivamente eguaes; a saber, *DAB*=*ADC*, por ser *AD* secante a respeito das parallelas *AB*, *CD*; e *CAD*=*ADB*, por ser tambem *AD* secante a respeito das parallelas *AC*, *BD* (73). Logo é *AB*=*CD*, e *AC*=*BD* (104).

113. *Coroll.* As rectas *AC*, *BD*, que prendem os extremos correspondentes de duas rectas *AB*, *CD*, eguaes e parallelas, são tambem parallelas entre si, e consequentemente eguaes. Por que a parallela a *AC*, que se tirasse pelo ponto *B*, interceptaria com *AC* uma parte *CD*=*AB*. Logo necessariamente passaria pelo ponto *D*, e seria *BD*.

114. Probl. *Construir um triangulo, que tenha dous lados respectivamente eguaes a duas rectas dadas, e o angulo formado por elles egual a um angulo dado.*

Soluç. Tire-se (fig. 58) uma recta *BE* egual a uma das rectas dadas. Em um dos seus extremos faça-se um angulo *BEF* egual ao angulo dado (52). Tome-se *EF* egual a outra recta dada: e tire-se *BF*. Será o triangulo *BEF*, o que se pede (103).

115. Probl. *Construir um triangulo, que tenha dous angulos respectivamente eguaes a dous angulos dados cuja somma seja* $< 180.^\circ$, *e o lado adjacente a estes angulos egual a uma recta dada.*

Soluç. Tire-se (fig. 58) uma recta *BF* egual á recta dada. Nos extremos *B*, *F* da dicta recta façam-se os angulos *B*, *F* eguaes aos angulos dados;

e os seus lados concurrerão em um ponto *E*. Será o triangulo *BEF*, o que se pede (106).

116. Probl. *Construir um triangulo, que tenha tres lados respectivamente eguaes a tres rectas dadas; sendo a somma de quaesquer duas maior do que a terceira.*

Soluç. Tire-se (fig. 58) uma recta *BF* egual a uma das tres rectas dadas. Do extremo *B*, como centro, e com um raio egual á segunda, descreva-se um arco: e similhantemente do extremo *F*, como centro, e com um raio egual á terceira, descreva-se outro arco. Do ponto *E*, em que estes arcos se cortam, tiremse aos pontos *B*, *F*, as rectas *EB*, *EF*. Será o triangulo *BEF*, o que se pede (108).

117. Probl. *Construir um triangulo, que tenha dous lados respectivamente eguaes a duas rectas dadas, e o angulo opposto ao maior destes lados egual a um angulo dado.*

Soluç. Tire-se (fig. 58) uma recta *EF* egual á menor das rectas dadas. Em um dos seus extremos faça-se um angulo *BFE* egual ao angulo dado: e do outro extremo *E*, como centro, e com um raio egual á recta maior, descreva-se um arco, que cortará *BF* em um ponto *B*. Tire-se *BE*. Será o triangulo *BEF*, o que se pede (110).

118. Probl. *Construir um triangulo, que tenha dous lados respectivamente eguaes a duas rectas da-*

das, e o angulo opposto ao menor destes lados egual a um angulo dado; sendo o dicto menor lado maior do que a perpendicular, que do vertice do angulo opposto ao terceiro lado se abaixar sobre este.

Soluç. Tire-se (fig. 58) uma recta *BE* egual á maior das rectas dadas. Em um dos seus extremos faça-se um angulo *EBF* egual ao angulo dado: e do outro extremo *E*, como centro, e com um raio egual á recta menor, descreva-se um arco, que cortará *BF* em dous pontos *F*, *G* (37). Tirem-se *EF*, *EG*. Qualquer dos dous triangulos *BEF*, *BEG*, satisfaz ao que se pede (111).

Das linhas proporcionaes.

119. Advertimos que na comparação das linhas, como de quaesquer outras grandezas, verdadeiramente so comparamos numeros; isto é, o numero de medidas de uma com o numero das mesmas medidas de outra (8). Por conseguinte todas as propriedades, que na Arithmetica se demonstraram sobre a proporcionalidade dos numeros, convém ás linhas, que estiverem em proporção. Tractamos porém somente das proporções geometricas: e é esta a parte mais essencial dos Elementos de Geometria.

120. Theor. *Si em um dos lados de qualquer an-*

gulo, começando do vertice, se marcarem quaesquer partes eguaes; e conduzindo por hum dos pontos da divisão uma recta arbitraria até encontrar o outro lado, se tirarem pelos mais pontos parallelas a essa recta; o segundo lado ficará tambem dividido no mesmo numero de partes, eguaes entre si.

Seja (fig. 59) o angulo BAC: e sobre um dos lados, AB, marquem-se as partes eguaes AD, DG, GI, &c. Tire-se por um dos pontos, P, da divisão uma recta arbitraria PQ; e pelos outros pontos as rectas DF, GH, IK, &c. parallelas a PQ. Digo que o lado AC ficará tambem dividido em outras tantas partes, eguaes entre si; isto é, $AF = FH = HK =$ &c.

Demonstr. Pelos pontos D, G, I, &c. tirem-se as rectas DE, GR, IS, &c. parallelas a AC. Serão os triangulos DAF, GDE, IGR, &c. eguaes entre si (105), por ser $AD = DG = GI =$ &c. (constr.), e por serem eguaes os angulos, a que estão adjacentes estes lados, cada um ao seu; isto é, $DAF = GDE = IGR =$ &c.; e $ADF = DGE = GIR =$ &c. (72). Logo é $AF = DE = GR =$ &c.; ou $AF = FH = HK =$ &c.; por ser $DE = FH$, $GR = HK$, &c. (112).

121. *Coroll.* Teremos pois $AD : DG : GI :$ &c. :: $AF : FH : HK :$ &c.: e por conseguinte AP (somma de todos os antecedentes) : AQ (somma de todos os consequentes) :: AD (um só antecedente) : AF (seu consequente); ou como qualquer numero daquellas partes de AB para o mesmo numero destas de AC. Por ex. :: $AG : AH$ :: $AI : AK$ :: $DN : FO$ :: &c.

122. Theor. *Si dous lados de qualquer triangulo forem cortados por uma recta parallela ao terceiro; serão cortados proporcionalmente: isto é, será um lado para o outro, como qualquer parte do primeiro para a parte correspondente do segundo. E reciprocamente.*

Sejam (fig. 60) os lados AB, AC do triangulo ABC cortados pela recta DE parallela ao terceiro lado BC. Digo que é $AB : AC :: AD : AE :: DB : EC$.

Demonstr. Si não é $AB : AC :: AD : AE$; será como AD para um quarto termo $X >$ ou $< AE$. Seja $:: AD : Ar > AE$. Conceba-se dividido o lado AC em tantas partes eguaes, que um dos pontos da divisão cáia entre E, e r; por ex. i. Tire-se in parallela a BC. Teremos $AB : AC :: An : Ai$ (121). Mas tambem supposemos $AB : AC :: AD : Ar$: logo $An : AD :: Ai : Ar$. Mas $An > AD$: logo $Ai > Ar$: o que é absurdo. Pois então seja $:: AD : Ar' < AE$. Conceba-se dividido o lado AC do mesmo modo, até que um dos pontos da divisão cáia entre E, e r'; por ex. i'. Tire-se $i'n'$ parallela a BC. Teremos da mesma forma $AB : AC :: An' : Ai'$. Mas tambem supposemos $AB : AC :: AD : Ar'$: logo $An' : AD :: Ai' : Ar'$. Mas $An' < AD$: logo $Ai' < Ar'$. o que é absurdo. E pois não é $AB : AC :: AD : X >$ ou $< AE$; será $:: AD : AE$. E logo tambem $AB—AD$, ou $DB : AC—AE$, ou $EC :: AB : AC$. Donde $AB : AC :: AD : AE :: DB : EC$.

Reciprocamente. Sejam (fig. 61) os lados AB, AC do triangulo ABC cortados proporcionalmente pela recta DE, isto é, seja $AB : AC :: AD : AE$. Digo que DE é parallela a BC.

Demonstr. Si não é; tire-se pelo ponto D uma recta DF parallela a BC. Será $AB : AC :: AD : AF$ (1.°). Mas tambem é $AB : AC :: AD : AE$ (hyp.). Logo será $AF = AE$: o que é absurdo.

123. *Coroll.* Todas as rectas (fig. 62) AB, AD, AE, &c., que de qualquer ponto A tomado fóra de uma recta BF se tirarem para differentes pontos da mesma, serão cortadas proporcionalmente por qualquer outra GH parallela a BF. E reciprocamente: si as rectas AB, AD, AE, &c. forem cortadas proporcionalmente nos pontos G, I, L, &c., todos esses pontos estarão em uma recta parallela a BF. Por que considerando successivamente os triangulos BAD, BAE, &c.; temos, por ser GH parallela a BF,

1.° $AB : AD :: AG : AI :: GB : ID$;
2.° $AB : AE :: AG : AL :: GB : LE$;
&c.

Consequentemente

$$AB : AD : AE : \&c. :: AG : AI : AL : \&c. :: GB : ID : LE : \&c.$$

Reciprocamente nos mesmos triangulos, sendo $AB : AD :: AG : AI$; será GI parallela a BD. Tambem sendo $AB : AE :: AG : AL$; será GL parallela a BE; &c.: isto é, GI, GL, &c. parallelas a BF. Logo partindo todas do ponto G, devem fazer uma so recta GH parallela a BF (71).

124. *Schol.* Quando a recta GH parallela a BF estivesse por cima do ponto A, como na fig. 63, egualmente teriam logar as proposições, que acabamos de stabelecer (122, e 123): pois tudo o que dissemos na fig. 59, e que lhes serve de fundamento,

se applicará ás parallelas, que cortarem os lados do angulo BAC, continuados do vertice.

125. THEOR. *Si uma recta dividir pelo meio qualquer angulo de um triangulo; dividirá o lado opposto a esse angulo em duas partes proporcionaes aos lados correspondentes.*

Seja (fig. 64) o triangulo ABC; cujo angulo BAC esteja dividido em duas partes eguaes pela recta AD. Digo que é $BD : DC :: AB : AC$.

Demonstr. Tire-se pelo ponto B a recta BE parallela a AD, até encontrar em um ponto E o lado CA continuado. Será o angulo $ABE=BAD$ (73); e o angulo $AEB=CAD$ (72). Mas é $BAD=CAD$ (hyp.): logo tambem $ABE=AEB$; e por isso $AE=AB$ (91). Porém temos $BD : AE :: DC : AC$ (122). Logo substituindo AB em logar de AE, e alternando, ficará $BD : DC :: AB : AC$.

Dos casos de similhança dos triangulos.

126. *Figuras similhantes* são as que tem egual numero de lados respectivamente proporcionaes, e adjacentes a angulos respectivamente eguaes.

Os lados adjacentes aos angulos eguaes dizem-se *homologos*.

Estas duas condições da similhança das figuras estão nos triangulos ligadas de maneira, que basta que uma se verifique, para que se siga immediatamente a outra. Assim o veremos nos Theoremas seguintes.

127. THEOR. *Dous triangulos são similhantes, quando tem dous angulos respectivamente eguaes, e por conseguinte o terceiro egual ao terceiro.*

Sejam (fig. 65) os triangulos ABC, abc: e sejam os angulos $A=a$; $B=b$; e logo $C=c$. Digo que o triangulo ABC é similhante ao triangulo abc.

Demonstr. Em qualquer lado AB de um dos triangulos, continuado si for necessario, tome-se a porção $Ab'=ab$, lado homologo: e pelo ponto b' tire-se $b'c'$ parallela a BC. Será o triangulo $Ab'c'$ egual ao triangulo abc (105): e por tanto $b'c'=bc$, e $Ac'=ac$. Tire-se por c' a recta $c'd$ parallela a AB. Será $Bd=b'c'$ (112.) Ora por ser $b'c'$ parallela a BC (constr.), temos $AB : Ab' :: AC : Ac'$ (122): e da mesma forma, por ser $c'd$ parallela a AB, é $AC : Ac' :: BC : Bd$, ou $b'c'$. Logo será $AB : Ab'$, ou $ab :: AC : Ac'$, ou $ac :: BC : b'c'$, ou bc; isto é, os dous triangulos, cujos angulos são respectivamente eguaes, tem os lados homologos proporcionaes, e por tanto são similhantes (126).

128. *Coroll.* Logo dous triangulos são similhantes, quando os lados de um são parallelos, ou perpendiculares, respectivamente aos lados do outro. (75, e 77).

129. THEOR. *Dous triangulos são similhantes, quando tem dous lados respectivamente proporcio-*

naes, e egual o angulo formado por esses dous lados.

Sejam (fig. 66) os triangulos ABC, abc: e seja o lado $AB : ab :: AC : ac$; e o angulo A=angulo a. Digo que o triangulo ABC é similhante ao triangulo abc.

Demonstr. Si os triangulos não são similhantes, sendo o angulo $A=a$ (hyp.); não será o angulo ABC =angulo b: por que, si o for, serão similhantes os triangulos (127). Seja pois $ABC > b$. Faça-se $ABD=b$. Será o triangulo ABD similhante ao triangulo abc (127): e por tanto $AB : ab :: AD : ac$ (126). Mas tambem é $AB : ab :: AC : ac$ (hyp.): logo $AD : ac :: AC : ac$; e por isso $AD=AC$: o que é absurdo. Logo não pode o angulo ABC deixar de ser=angulo b. E logo os dous triangulos são similhantes.

130. Theor. *Dous triangulos são similhantes, quando tem tres lados respectivamente proporcionaes.*

Sejam (fig. 67) os triangulos ABC, abc: e seja o lado $AB : ab :: AC : ac :: BC : bc$. Digo que o triangulo ABC é similhante ao triangulo abc.

Demonstr. Si os triangulos não são similhantes, sendo $AB : ab :: AC : ac$ (hyp.); não será o angulo BAC=angulo a: por que, si o for, serão similhantes os triangulos (129). Seja pois $BAC > a$. Faça-se BAD $=a$, $AD=AC$, e tire-se BD. Será o triangulo ABD similhante ao triangulo abc (129); e por tanto $AB : ab :: BD : bc$. Mas tambem é $AB : ab :: BC : bc$ (hyp.): logo $BD : bc :: BC : bc$: e por isso $BD=BC$.

Mas nos triangulos ABC, ABD, é $BD<BC$ (94): logo $BD=$, e $<BC$: o que é absurdo. Logo não pode o angulo BAC deixar de ser=angulo a. E logo os dous triangulos são similhantes.

131. Theor. *Dous triangulos são similhantes, quando tem dous lados respectivamente proporcionaes, e egual o angulo opposto ao maior desses dous lados.*

Sejam (fig. 67) os triangulos ABC, abc: e seja o lado $AB : ab :: AC : ac$; e o angulo ABC=angulo b, sendo $AC>AB$. Digo que o triangulo ABC é similhante ao triangulo abc.

Demonstr. Si os triangulos não são similhantes, sendo $AB : ab :: AC : ac$ (hyp.); não será o angulo BAC=angulo a: por que, si o for, serão similhantes os triangulos (129). Seja pois $BAC>a$. Faça-se $BAD=a$, e $AD=AC$. O ponto D não cairá em BC (40). Tire-se BD. Será o triangulo ABD similhante ao triangulo abc; e por tanto o angulo ABD=angulo b. Mas é o angulo ABC=angulo b (hyp.): logo tambem será o angulo $ABD=ABC$: o que é absurdo. Logo não pode o angulo BAC deixar de ser=angulo a. E logo os dous triangulos são similhantes.

132. *Schol.* Podem tambem dous triangulos ser, ou não, similhantes entre si, quando tiverem dous lados respectivamente proporcionaes, e egual o angulo opposto ao menor desses dous lados. Veja-se o que fica dicto em o n.º 111.

133. THEOR. *Em todo o triangulo rectangulo, a perpendicular abaixada do vertice do angulo recto sobre a hypothenusa, é meia proporcional entre os segmentos da mesma hypothenusa. E cada lado do angulo recto é meia proporcional entre a hypothenusa, e o segmento correspondente.*

Seja (fig. 68) o triangulo rectangulo ABC; e AD a perpendicular tirada do vertice A do angulo recto sobre a hypothenusa BC. Digo que é

1.º $BD : AD :: AD : DC$;

2.º $BC : AB :: AB : BD$;

3.º $BC : AC :: AC : DC$.

Demonstr. Como os triangulos ABD, ABC são ambos rectangulos, e tem o angulo B commum; e da mesma sorte os triangulos ADC, ABC são ambos rectangulos, e tem o angulo C commum; serão os dous ABD, ADC similhantes ao total ABC, e por conseguinte similhantes entre si (127). Logo comparando os lados homologos dos triangulos parciaes, e depois successivamente os de cada um destes com os homologos do total; observando que é o angulo $BAD=C$, e $DAC=B$, resultará

1.º $BD : AD :: AD : DC$;

2.º $BC : AB :: AB : BD$;

3.º $BC : AC :: AC : DC$.

134. *Schol.* Ao mesmo tempo fica provado, que a perpendicular, tirada do vertice do angulo recto de um triangulo rectangulo sobre a hypothenusa, divide o triangulo em outros dous similhantes entre si, e ao triangulo total.

135. Theor. *As rectas tiradas do vertice de qualquer angulo de um triangulo para o lado opposto dividirão este lado, e a toda a recta que lhe for parallela, em partes respectivamente proporcionaes.*

Seja (fig. 62) no triangulo *ABF* a recta *GH* parallela ao lado *BF*: e do vertice *A* do angulo opposto tirem-se quaesquer rectas *AD*, *AE*, &c, que cortem *BF*. Digo que é *BD*: *GI* :: *DE*: *IL* :: &c.

Demonstr. Por ser *GH* parallela a *BF* (hyp.); os triangulos *ABD*, *ADE*, &c, são similhantes respectivamente aos triangulos *AGI*, *AIL*, &c.; e por isso *BD*: *GI* :: *AD*: *AI* :: *DE*: *IL* :: *AE*: *AL* :: &c. Logo tirando desta serie de razões eguaes aquellas, em que entram as partes das linhas *BF*, *GH*, teremos *BD*: *GI* :: *DE* : *IL* :: &c.

136. Probl. *Dada uma recta, dividila em partes, que tenham entre si quaesquer razões dadas.*

Seja (fig. 69) a recta *AB*, que se quer dividir em tres partes, que estejam entre si, como os numeros 4, 3, 2.

Soluç. Tire-se pelo ponto *A* uma recta indefinida *AZ*: e sommando os termos dados 4, 3, 2, marque-se nella egual numero de partes eguaes; a saber, 9 neste caso, de grandeza arbitraria; por ex. *AC*, *CD*, *DE*; &c. Tire-se pelo ponto *B*, e pelo ultimo *M* da divisão, a recta *BM*: e pelos pontos *F* (o 4.°), *I* (o 7.°), as rectas *FN*, *IO* parallelas a *BM*. Digo que *AB* está dividida nos pontos *N*, *O*, como se pedia; isto é, *AN*: *NO*: *OB* :: 4: 3; 2 (121).

Si aquellas razões, em vez de serem expressas por numeros, se dessem em linhas; marcar-se-iam successivamente as suas grandezas sobre a indefinida AZ; tomando, por ex., de A para Z a grandeza $AF =$ 1.ª; de F para a mesma parte a grandeza $FI = 2$.ª; e finalmente de I para Z a grandeza $IM = 3$.ª Então as rectas FN, IO, BM, tiradas como a cima fizemos, dividiriam a linha dada na forma pedida.

137. *Schol.* 1.º Quando as partes da linha, que se pretende dividir, devem ser muito pequenas, ou é mesmo muito pequena a dicta linha; o mais leve defeito em tirar as parallelas influiria muito na egualdade, ou desegualdade das partes. Por isso então procederemos da maneira seguinte.

Seja (fig. 70) a recta ab, que se quer dividir, por ex., em seis partes eguaes. Construa-se sobre ella o triangulo equilatero aCb (116). Em Ca, prolongada indefinidamente, marquem-se seis partes eguaes de grandeza arbitraria: e seja CA a linha, que contém essas seis partes. Tome-se em Cb, tambem prolongada, a parte $CB = CA$: e tire-se AB. Será AB parallela a ab (122); por que, sendo $CA = CB$, e $Ca = Cb$, é $CA : CB :: Ca : Cb$. Faça-se pois centro em A, e successivamente com os raios AD, AE, AF, &c. descrevam-se arcos, que cortarão AB em outras tantas partes eguaes. Do ponto C dirijam-se rectas aos pontos da divisão de AB. Ficará ab cortada por estas rectas do mesmo modo que AB; isto é, em seis partes eguaes (135).

138. *Schol.* 2.º A divisão das rectas em partes eguaes é o fundamento da construcção das *Scalas*,

que servem para reduzir uma figura de grande a pequena. A mais commoda de todas em grande numero de operações, é a que se chama *Scala de dizima*. Eis aqui a sua construcção.

Nas extremidades A, B da linha AB (fig. 71), que se pretende dividir em 100 partes eguaes, levantem-se as perpendiculares indefinidas AC, BD; em cada uma das quaes se marquem 10 partes eguaes de qualquer grandeza. Tire-se então CD; e dividindo AB em 10 partes eguaes, marquem-se estas sobre CD. Isto feito, conduzam-se as transversaes, como se vê na figura; e tirem-se rectas pelos pontos correspondentes das divisões de AC, e BD; que serão outras tantas parallelas a AB. Não obstante pois estar AB dividida so em 10 partes eguaes; querendo-se tomar qualquer numero das 100, em que ella se pode dividir, por ex. pedindo-se 47 centesimas partes de AB; tomaremos na recta tirada pela 7.ª divisão a parte $7H$, que vae desde CA até á transversal, que passa pelo n.° 40; e será $7H = 0{,}47\,AB$.

Com effeito os triangulos similhantes $C7v$, CAx, dão $CA : C7 :: Ax : 7v$; isto é, $10 : 7 :: \frac{1}{10}\,AB : 7v = \frac{7}{100}\,AB$. Ora $vH = 0{,}40\,AB$. Logo $7v + vH$, ou $7H = 0{,}47\,AB$.

139. Probl. *Achar a quarta proporcional a tres rectas dadas.*

Sejam (fig. 72) as rectas dadas ab, cd, ef.

Soluç. Tirem-se (fig. 69) duas linhas indefinidas AZ, AB, que façam angulo. Tome-se sobre AZ de

A para *Z* a parte $AF=ab$; e a parte $AI=cd$: e da mesma forma sobre *AB* tome-se de *A* para *B* a parte $AN=ef$. Tire-se *FN* : e pelo ponto *I* conduza-se *IO* parallela a *FN*, até encontrar *AB*. Digo que *AO* é a quarta proporcional pedida.

Demonstr. Com effeito é *AF*, ou *ab* : *AI*, ou *cd* :: *AN*, ou *ef* : *AO* (122).

O mesmo Problema pode resolver-se desta outra maneira.

Depois de se haver tomado $AF=ab$, e $AI=cd$; tire-se pelo ponto *F* qualquer recta *Fn* indefinida: e corte-se $Fn=ef$. Tire-se *Anb*; e pelo ponto *I* a recta *Io* parallela a *Fn*. Será *Io* a quarta proporcional. Por quanto é *AF*, ou *ab* : *AI*, ou *cd* :: *Fn*, ou *ef* : *Io*.

140. *Schol.* Sem differença alguma do que acabamos de practicar, acharemos a terceira proporcional a duas rectas dadas *ab*, *cd* (fig. 72); por ser ella quarta proporcional ás tres *ab*, *cd*, *cd*.

Das linhas proporcionaes consideradas no circulo.

141. THEOR. *Si duas cordas se cortarem mutuamente em qualquer circulo, cortar-se-hão em razão reciproca; isto é, serão os segmentos de uma reciprocamente proporcionaes a os segmentos da outra.*

Sejam (fig. 73) as cordas *AB*, *DE*, que se cortam mutuamente no circulo *CABD*. Digo que é *AF* : *EF* :: *DF* : *BF*.

Demonstr. Tirem-se as rectas *AD*, *BE*. Serão similhantes os triangulos *ADF*, *BEF* (127); por ser o angulo *AFD* = *BFE*; e o angulo *ADF* = *EBF* (96). Logo é *AF* : *EF* :: *DF* : *BF* (126).

142. *Coroll.* Segue-se pois: que toda a perpendicular *DF* (fig. 74), tirada de qualquer ponto *D* da circumferencia de um circulo sobre o diametro, é meia proporcional entre os segmentos do mesmo diametro. Por que então é *DF*=*EF* (49).

143. Probl. *Achar a meia proporcional entre duas rectas dadas.*

Sejam (fig. 75) as rectas dadas *ab*, *cd*.

Soluç. Tire-se uma recta indefinida *AZ*. Marquem-se nella de *A* para *Z* as partes *AF* = *ab*, e *FB* = *cd*. Levante-se no ponto *F* sobre *AB* a perpendicular *FD* : e descreva-se sobre a mesma *AB*, como diametro, a semi-circumferencia *ADB*, que cortará *DF* em um ponto *D*. Será *DF* a meia proporcional pedida (142).

144. Theor. *Si de um mesmo ponto, situado fóra de um circulo, se tirar uma tangente, que termine no ponto do contacto, e uma secante, que termine na parte concava da circumferencia; será a tangente meia proporcional entre a secante, e a parte exterior da mesma secante.*

Sejam (fig. 76) a tangente *AD*, e a secante *AB*, tiradas do mesmo ponto *A* fóra do circulo *CBDEB*. Digo que é *AB* : *AD* :: *AD* : *AE*.

Demonstr. Tirem-se as rectas *BD*, *DE*. Serão similhantes os triangulos *ABD*, *ADE*; por ser o angulo em *A* commum, e o angulo *ABD* = *ADE* (97). Logo é *AB* : *AD* :: *AD* : *AE*.

145. *Coroll.* Por quanto, tirando do mesmo ponto *A* qualquer outra secante *AG*, temos tambem *AG* : *AD* :: *AD* : *AF*; e desta e da precedente proporção resulta $\overline{AD}^2 = AG \times AF = AB \times AE$; donde *AG* : *AB* :: *AE* : *AF*; segue-se que duas secantes quaesquer tiradas de um mesmo ponto situado fóra de um circulo, até terminarem na parte concava da circumferencia, são reciprocamente proporcionaes ás suas partes exteriores.

146. Probl. *Dada uma recta, dividila em duas partes taes, que a maior seja meia proporcional entre a menor e a recta inteira.*

(Chama-se a isto *dividir a recta em media, e extrema razão*).

Seja (fig. 77) a recta *AB*.

Soluç. De um dos extremos *B* levante-se a perpendicular $BC = \frac{1}{2} AB$. Com o centro em *C*, e o raio *CB*, descreva-se o circulo *CBEDB*. Tire-se por *A*, e *C*, a recta *ACD*; que termine na parte concava da circumferencia em o ponto *D*: e por um arco descripto de *A*, como centro, com o raio *AE*, corte-se *AB* no ponto *F*. Digo que *AB* fica dividida em media, e extrema razão.

Demonstr. Por ser *AD* secante, e *AB* tangente (59), como perpendicular a *CB* (constr.); temos $AD : AB :: AB : AE$ (144): e por conseguinte $AD—AB : AB :: AB—AE : AE$. Mas é $AB=2\ CB$ (constr.) $=ED$, e $AE=AF$ (constr.); será $AD—AB=AF$; e $AB—AE=BF$. Logo, por substituição, $AF : AB :: BF : AF$; ou, invertendo, $AB : AF :: AF : BF$.

Dos polygonos.

147. A figura terminada em um plano por linhas rectas, chama-se *polygono*: e a estas linhas, isto é, aos lados do polygono, considerados junctos, dá-se o nome de *perimetro*.

Todo o polygono tem tantos angulos, como lados. Si todos os lados são eguaes, e tambem os angulos; diz-se, que o polygono é *regular*.

O mais simples de todos os polygonos é o que tem tres lados; e nomea-se *triangulo*, como ja dissemos. Tambem se diz *trilatero*.

Quando o polygono tem quatro lados, chama-se *quadrilatero*: cinco, *pentagono*: seis, *hexagono*: sete, *heptagono*: outo, *octogono*: nove, *enneagono*: dez, *decagono*: &c.

Em um polygono se diz, que um angulo é *reintrante*, si os lados do angulo, continuados do vertice, entram no polygono: e se diz, que é *salien-*

te, si não entram. Assim no polygono *ABCDEFG* (fig. 78) o angulo *ABC* é saliente; e *DEF* reintrante. A recta, que divide dous angulos quaesquer de um polygono, e termina nos vertices destes, chama-se *diagonal.* Taes são *AF*, *AE*, *BE*, &c.

148. Theor. *Todo o polygono se divide em tantos triangulos, quantos são os seus lados menos dous.*

Seja (fig. 79) o polygono *ABDFHGEC.*

Demonstr. Tire-se uma diagonal *CB*, que separe dous lados do polygono. Teremos um triangulo, e restará uma figura de (n-1) lados, sendo n o numero dos lados do polygono dado. Nesta faça-se o mesmo. Teremos outro triangulo, e restará outra figura de (n-2) lados. Continue-se assim, até que tenhamos uma figura de (n-(n-3)) lados; isto é, um triangulo. E' manifesto, que em cada processo desde n até (n-(n-3)) se vae cortando sempre um triangulo. Ora desde n até (n-(n-3)) inclusivamente, há (n-2) termos. Logo &c.

N. B. Nos polygonos, que tem angulos reintrantes, poderá accontecer, que alguma diagonal fique em direitura com um, ou dous lados do polygono. Mas então ou tire-se outra, ou considere-se aquella, como si tal não accontecesse; isto é, como sendo lado, so por si, do seguinte polygono.

149. *Coroll.* 1.° A somma dos valores de todos os angulos internos de qualquer polygono, vale tantas vezes 180°, quantos são os seus lados menos dous. Por que a somma dos dictos angulos é a mesma que

a de todos os angulos dos triangulos, em que se divide o polygono. Ora os tres angulos de qualquer triangulo valem junctos 180° : logo deve-se tomar tantas vezes 180°, quantos são os mesmos triangulos; isto é, $(n-2)$ 180°.

150. *Coroll.* 2.° Logo $\frac{(n-2)\ 180^\circ}{n}$ é o valor de qualquer dos angulos de um polygono regular.

151. *Schol.* Para que comprehenda todos os polygonos o que dissemos em o n.° 149; convém observar nos que tem angulo reintrante, como *FED* (fig. 78), que não se deve intender este por interno do polygono; mas o que lhe falta para 360°; a saber, a somma dos angulos *FEA*, *AEB*, *BED*.

152. Theor. *Si em qualquer polygono, que não tenha angulo reintrante, um dos lados de cada angulo se prolongar do vertice; a somma de todos os angulos externos valerá 360°: isto é, será a somma dos supplementos dos angulos internos do polygono* = 360°.

Seja (fig. 80) o polygono *ABCDE*; cujos lados *AB*, *BC*, &c. estão prolongados dos vertices dos seus angulos. Digo que a somma de todos os angulos externos *FAB*+*GBC*+ &c. = 360°.

Demonstr. Como a somma de cada angulo interno *BAE* com o seu externo *BAF* vale 180° (30); valerá a somma de todos os angulos internos com a de todos os externos tantas vezes 180°, quantos forem os lados do polygono. Mas a somma de todos os internos differe desta somma total em duas vezes 180°, ou 360° (149). Logo a somma de todos os externos, isto é, a somma dos supplementos dos angulos internos do polygono, vale os 360°.

153. THEOR. *As rectas, que dividirem pelo meio os angulos de um polygono regular, concurrerão todas em um ponto dentro do polygono; e o dividirão em tantos triangulos isosceles eguaes, quantos forem os lados do mesmo polygono.*

Seja (fig. 81) o polygono regular *ABDEFG*; cujos angulos *GAB*, *ABD*, *BDE*, &c. estejam divididos em duas partes eguaes pelas rectas *Aa*, *Bb*, *Dd*, &c., cada um por cada uma. Digo que estas rectas concurrerão todas em um ponto *C* dentro do polygono, e o dividirão em tantos triangulos isosceles eguaes, quantos são os lados do mesmo polygono.

Demonstr. Por ser o angulo $GAB = ABD$ (147), e cada um delles $< 180°$; as suas metades *aAB*, *ABb* tambem serão eguaes, e cada uma $< 90°$. Logo as rectas *Aa*, *Bb* concurrerão em um ponto *C*; e farão o triangulo *ACB* isosceles (91, e 82). Da mesma sorte se mostrará que *Bb*, *Dd* concurrerão, e farão outro triangulo isosceles; e assim os mais. Logo ficarão formados tantos triangulos isosceles, quantos são os lados do polygono. Ora todos estes triangulos são eguaes entre si (105), pois tem por lados os do polygono, adjacentes a angulos eguaes, como metades dos angulos do mesmo polygono. Logo será $AC = BC = DC = EC =$ &c.; e por conseguinte concurrerão todas no mesmo ponto *C* dentro do polygono.

154. *Coroll.* 1.° Consequentemente as perpendiculares *Cm*, *Cn*, *Ch*, &c. tiradas do ponto *C* sobre os lados *AB*, *BD*, *DE*, &c. são eguaes entre si. O ponto *C* chama-se *centro* do polygono: qualquer das rectas *CA*, *raio*: e as perpendiculares *Cm*, *Cn*, &c. *apothemas*.

155. *Coroll.* 2.° Pode-se pois a qualquer polygono regular circumscrever um circulo, o qual terá o mesmo centro, e raio do polygono: E tambem inscrever um circulo, do qual será raio o apothema, e centro o mesmo do polygono.

156. *Coroll.* 3.° Todos os angulos *ACB*, *BCD*, &c. formados no centro do polygono regular por dous raios tirados aos extremos de um mesmo lado, são eguaes entre si. E como a somma de todos é 360°; será $\frac{360°}{n}$ o valor de cada um; denotando *n* o numero dos lados.

157. *Coroll.* 4.° Logo o angulo *ACB* no centro do hexagono regular é de 60°: e por isso qualquer dos seus lados *AB* egual ao raio *CA* do mesmo hexagono, ou do circulo a elle circumscripto. Por que sendo *ACB* de 60°, a somma dos angulos *CAB*, *CBA* é de 120° (85); o que dá para cada um 60°, por serem eguaes entre si. Logo o triangulo *ACB* é equilatero (93). E logo $AB=CA$.

Dos polygonos inscriptos, e circumscriptos ao circulo.

158. Probl. *Inscripto em um circulo um polygono regular, inscrever outro tambem regular, de duplicado numero de lados.*

Seja (fig. 82) o circulo *CABDFA*; e o polygono regular inscripto *ABDF*.

Soluç. Dividam-se pelo meio nos pontos *E*, *G*, &c. os arcos *AB*, *BD*, &c. (53). Tirem-se as cordas *AE*, *EB*, *BG*, *GD*, &c. Digo que formarão o polygono pedido.

Demonstr. Com effeito, sendo *AB*, *BD*, &c. lados de um polygono regular (hyp.), serão eguaes os arcos *AB*, *BD*, &c. (51); e por conseguinte eguaes as cordas das metades desses arcos (50), isto é, $AE=EB=BG=GD=$&c. Ora estas cordas formam o polygono *AEBGD* &c., cujos angulos *AEB*, *BGD*, &c. tambem são eguaes, por serem eguaes os triangulos *AEB*, *BGD*, &c. (107). Logo o polygono é regular; e de duplicado numero de lados, por quanto a cada um *AB* do primeiro correspondem dous *AE*, *EB* no segundo.

159. Probl. *Inscrever em um circulo um polygono regular de* 4, 8, 16, &c. *lados.*

A questão se reduz a inscrever primeiro o de 4 lados; por que todos os outros se irão depois formando, como fizemos no Problema antecedente.

Seja pois (fig. 83) o circulo *CADBEA*, em que se pretende inscrever um polygono regular de 4 lados.

Soluç. Tire-se qualquer diametro *AB*, e perpendicular a este o diametro *DE*. Tirem-se as cordas *AD*, *DB*, *BE*, *EA*. Digo que o quadrilatero *ADBE* é o pedido.

Demonstr. Por serem *AB*, *DE* dous diametros perpendiculares entre si (constr.); serão eguaes os arcos *AD*, *DB*, *BE*, *EA*; e consequentemente eguaes as cordas *AD*, *DB*, *BE*, *EA*; isto é, os lados do quadrilatero *ADBE*. Ora os seus angulos *ADB*, *DBE*, *BEA*, *EAD*, tambem são eguaes, por serem rectos (98). Logo o quadrilatero *ADBE* é regular, e está inscripto.

160. Probl. *Inscrever em um circulo um polygono regular de* 3, 6, 12, &c. *lados.*

Reduz-se a questão a inscrever primeiro o triangulo equilatero.

Seja (fig. 84) o circulo *CADEA*.

Soluç. Tire-se qualquer diametro *BE*; e descreva-se de um dos seus extremos *B*, como centro, e com o raio do mesmo circulo um arco, que corte a circumferencia nos dous pontos *A*, *D*. Tirem-se as rectas *AD*, *DE*, *AE*. Digo que o triangulo *ADE* é o pedido.

Demonstr. Por ser *BE* diametro (constr.), os arcos *BAE*, *BDE* são de 180° cada um. Mas cada um dos arcos *AB*, *BD*, é de 60°, por serem as suas cordas eguaes ao raio *BC* (constr.): logo cada um dos tres $\frown{AD}$, $\frown{DE}$, $\frown{AE}$, é de 120°. Por conseguinte as cordas destes arcos, isto é, os lados do triangulo *ADE* são eguaes. Logo o triangulo é equilatero.

O hexagono regular pode-se inscrever immediatamente, sem dependencia do triangulo, descrevendo-se dos extremos do diametro *BE*, como centros, com o raio do mesmo circulo, dous arcos, que cortem a circumferencia nos quatro pontos *A*, *D*, *F*, *G*; e tirando as cordas *AB*, *BD*, *DG*, *GE*, *EF*, *FA* (157).

161. Probl. *Inscrever em um circulo um polygono regular de* 5, 10, 20, &c. *lados.*

Reduz-se a questão a inscrever primeiro o decagono regular.

Seja (fig. 85) o circulo $CABA$.

Soluç. Divida-se o raio CA no ponto E em media e extrema razão (146): e inscreva-se a corda $AB=CE$, segmento maior. Digo que AB é o lado do decagono regular.

Demonstr. Tire-se a recta BE, e o raio CB. Por ser $AC:CE::CE:AE$, e $CE=AB$; temos $AC:AB::AB:AE$. Logo os triangulos ACB, ABE são similhantes (129): e por tanto o angulo $ABE=ACB$, e $AEB=BAC$: e logo $BE=AB$ (91) $=CE$ (constr.). Por conseguinte é $ACB=EBC$ (92); e por isso $ABE=EBC$; donde $ABC=2ACB$; e tambem $BAC=2ACB$, por ser $BAC=ABC$. Mas $BAC+ABC+ACB=180°$ (85); ou $2ACB+2ACB+ACB=180°$: logo $ACB=\frac{180°}{5}=36.°$ Por consequencia AB será lado do decagono regular (156).

Junctando com uma recta os extremos de dous lados contiguos do decagono regular, ter-se-ha o lado do pentagono regular.

162. *Schol.* Pela inscripção dos polygonos regulares em qualquer circulo, pode-se dividir a circumferencia em certo numero de partes eguaes, por ex. em arcos de 15° cada um, inscrevendo o polygono regular de 24 lados. Não é porém possivel dividila em arcos de um grau, e so por tentativa o poderiamos conseguir; pois não offerece a Geometria

elementar meio algum para isso. Podemos comtudo chegar directamente até ao arco de 3°, inscrevendo o lado do decagono regular, e depois o do hexagono regular, partindo ambos do mesmo ponto, e para a mesma parte; por que dividindo então pelo meio o arco de 60°, ter-se-ha o de 6°, differença entre o de 36°, e o de 30°; e a metade dará o de 3°.

163. PROBL. *Inscripto em um circulo um polygono regular, circumscrever ao mesmo circulo outro tambem regular do mesmo numero de lados. E reciprocamente: dado o polygono circumscripto, construir o polygono inscripto.*

Seja (fig. 86) o circulo $CABDEFA$; e o polygono regular inscripto $ABDEF$.

Soluç. Pelos pontos A, B, D, E, &c. tirem-se as tangentes fa, ab, bd, de, &c. Digo que formarão o polygono pedido.

Demonstr. Pois os lados AB, BD, DE, &c. são eguaes (hyp.); e são eguaes os angulos aAB, aBA, bBD, bDB, dDE, dED, &c. formados pelas tangentes com esses lados (97), por interceptarem os arcos eguaes AB, BD, DE, &c. (51); os triangulos AaB, BbD, DdE, &c. serão eguaes, e isosceles: e portanto eguaes os angulos AaB, BbD, DdE, &c.; e eguaes os lados Aa, aB, Bb, bD, Dd, dE, &c., que dão $ab = bd = de =$ &c. Logo o polygono circumscripto $abdef$ é equiangulo, e junctamente equilatero. Logo é regular, e do mesmo numero de lados do polygono inscripto, por quanto neste a cada angulo ABD corresponde naquelle um lado ab.

Reciprocamente. Seja o polygono regular circumscripto *abdef*. Quer-se inscrever outro tambem regular do mesmo numero de lados.

Soluç. Pelos pontos *A*, *B*, *D*, *E*, &c. tirem-se as cordas *AB*, *BD*, *DE*, &c. Digo que formarão o polygono pedido.

Demonstr. Com effeito, por serem eguaes os angulos *a*, *b*, do polygono circumscripto, será a somma dos dous *aAB*, *aBA* no triangulo *AaB*, egual á somma dos dous *bBD*, *bDB* no triangulo *BbD* (85). Ora a primeira somma tem por medida o arco *AB*, e a segunda o arco *BD* (96): logo estes dous arcos são eguaes: e por tanto eguaes as suas cordas *AB*, *BD*. Do mesmo modo se mostrará ser $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DE}$; $\overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF}$; e assim por diante; e conseguintemente eguaes as cordas *BD*, *DE*, *EF*, &c., isto é, os lados do polygono inscripto *ABDEF*. Mas tambem pela egualdade dos mesmos arcos *AB*, *BD*, &c. são eguaes entre si os angulos *ABD*, *BDE*, &c. do mesmo polygono, pois interceptam os seus lados egual numero destes arcos eguaes (97). Logo o polygono é regular, e do mesmo numero de lados do polygono circumscripto, por quanto neste a cada lado *ab* corresponde naquelle um angulo *ABD*.

Tirando no polygono circumscripto os raios *Ca*, *Cb*, *Cd*, &c., e pelos pontos a', b', d', e', &c., em que estes cortam a circumferencia, as cordas $a'b'$, $b'd'$, &c.; se formará o polygono regular $a'b'd'e'f'$, que egualmente satisfará. Por que sendo eguaes os angulos $a'Cb'$, $b'Cd'$, &c. (156); e sendo $Ca' = Cb' = Cd' =$ &c.; serão eguaes e isosceles os triangulos $a'Cb'$, $b'Cd'$, $d'Ce'$, &c.: e por tanto $a'b'= b'd'=d'e'=$&c., lados do polygono inscripto $a'b'd'e'f'$; e $Cb'a'=Cb'd'=Cd'b'=Cd'e'=$&c., que dão $a'b'd'= b'd'e'=$&c., angulos do mesmo polygono.

164. Probl. *Dados dous circulos concentricos, circumscrever a o menor um polygono regular, cujos lados não encontrem a circumferencia do maior.*

Sejam (fig. 87) os circulos concentricos, cujas circumferencias estão notadas por C, c.

Soluç. Tire-se uma recta AB tangente á circumferencia menor c: e para os pontos A, B, em que essa tangente encontrar a circumferencia maior, dirijam-se os raios OA, OB; que cortarão a menor nos pontos D, E. Divida-se esta pelo meio, e as metades tambem pelo meio, e assim successivamente, até que resulte um arco menor do que $\overparen{cD}$ (27). Tome-se esse arco do ponto c para D, e para E; por ex. $\overparen{cd}$, $\overparen{ce}$. Tirem-se os raios Od, Oe: e produzam-se até encontrar a tangente nos pontos a, b. Será ab o lado do polygono pedido.

165. *Schol.* Os raios Od, Oe prolongados até á circumferencia C marcariam o lado do polygono regular, que se quizesse inscrever no circulo maior, de modo que não tocasse a circumferencia do menor.

Este polygono inscripto, e aquelle circumscripto se dirão *polygonos correspondentes*.

Dos polygonos similhantes.

166. Theor. *Os perimetros de dous polygonos similhantes estão entre si, como quaesquer dous lados homologos.*

Demonstr. Denotem A, B, C, &c. os lados de um; a, b, c, &c. os homologos do outro. Será $A:a::B:b::C:c::$ &c. (126): e por conseguinte $A+B+C+$&c. : $a+b+c+$&c. $::A:a::B:b::$&c.

167. Theor. *Si dous polygonos forem similhantes; dividir-se-hão em egual numero de triangulos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos. E reciprocamente: si dous polygonos se dividirem em egual numero de triangulos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos; serão similhantes.*

Sejam (fig. 88) os polygonos similhantes $ABCDEF$, $abcdef$; e os lados homologos AB e ab, BC e bc, CD e cd, &c. Digo que tiradas as diagonaes BF, bf; FC, fc; CE, ce; ficam divididos os polygonos em egual numero de triangulos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos.

Demonstr. Com effeito, por serem os dous polygonos de egual numero de lados (hyp.), dividir-se-hão em egual numero de triangulos (148). Ora o primeiro ABF do polygono P é similhante ao primeiro abf do polygono p (129); por ser o angulo $A=a$, e $AB : ab :: AF : af$ (hyp.). Da mesma sorte o segundo FBC do polygono P é similhante ao segundo *fbc* do polygono *p*; por que pela similhança dos dous primeiros é *AB* : *ab* :: *BF* : *bf*, e o angulo *ABF*=*abf*; e pela similhança dos polygonos é *AB* : *ab* :: *BC* : *bc*, e o angulo *ABC*=*abc*; donde *BF* : *bf* :: *BC* : *bc*; e tirando os angulos *ABF* de *ABC*, e *abf* de *abc*, fica *FBC*=*fbc*. O mesmo se concluirá a respeito dos terceiros triangulos, e assim dos mais. Logo &c.

Reciprocamente. Sejam os polygonos *P*, *p*, divididos em egual numero de triangulos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos; isto é, seja o primeiro triangulo *ABF* do polygono *P* similhante ao primeiro *abf* do polygono *p*; o segundo ao segundo; e assim os mais. Digo que os dous polygonos são similhantes.

Demonstr. Como os triangulos o são (hyp.); os seus angulos serão eguaes; isto é, *A*=*a*, *ABF*=*abf*, *FBC*=*fbc*, &c. : e por tanto *ABC* (somma dos dous *ABF*, *FBC*)=*abc* (somma dos dous *abf*, *fbc*). E assim se irá mostrando a egualdade respectiva dos mais angulos dos polygonos. Ora tambem pela similhança dos mesmos triangulos é *AF* : *af* :: *AB* : *ab* :: *BF* : *bf* :: *BC* : *bc* :: &c. : logo, tirando desta serie de rasões eguaes aquellas, em que entram os lados dos polygonos, teremos *AF* : *af* :: *AB* : *ab* :: *BC* : *bc* :: &c. Logo os dous polygonos são similhantes (126).

168. PROBL. *Construir sobre uma recta dada um polygono similhante a outro.*

Seja (fig. 88) o polygono dado *P*, e *ab* a recta, sobre a qual se pretende construir outro similhante.

Soluç. Em um dos extremos b da dicta recta faça-se o angulo $abc = ABC$. Tome-se bc, quarta proporcional ás tres rectas AB, BC, ab (139). Faça-se do mesmo modo no ponto c o angulo $bcd = BCD$. Tome-se cd, quarta proporcional ás tres rectas BC, CD, bc. Continue-se desta maneira. Será construido sobre a recta ab o polygono pedido.

O mesmo polygono se poderia construir, dividindo o dado P em triangulos, e fazendo sobre a recta ab o triangulo abf similhante ao triangulo ABF; isto é, fazendo no extremo a o angulo $a = A$, e no extremo b o angulo $abf = ABF$; o que determinaria o ponto f: e depois construindo do mesmo modo sobre bf o triangulo bfc similhante ao triangulo BFC; o que determinaria o ponto c: e assim por diante.

169. THEOR. *Si em dous polygonos similhantes se tirarem duas rectas, cada uma em cada um, que façam angulos eguaes com dous lados homologos, e em pontos similhantemente postos a respeito destes lados; as dictas rectas serão proporcionaes a quaesquer dous lados homologos.*

Sejam (fig. 89) os polygonos similhantes P, p: e os lados homologos AB e ab, BC e bc, &c. Tire-se pelo ponto L do lado BC uma recta LM; e pelo ponto l do seu homologo bc a recta lm; mas de modo que seja o angulo $blm = BLM$, sendo $BL : bl :: BC : bc$. Digo que será $LM : lm :: Ab : ab :: BC : bc ::$ &c.

Demonstr. Tirem-se AL, al. Será o triangulo ABL

similhante ao triangulo abl (129); por ser o angulo $B=b$, e por que sendo $AB : ab :: BC : bc$, e $BC : bc :: BL : bl$ (hyp.), é $AB : ab :: BL : bl$. Logo o angulo BLA=angulo bla, e $BAL=bal$. Ora é $BLM=blm$ (constr.), e $BAM=bam$ (hyp.) : si tirarmos BLA de BLM, e bla de blm; ficará $ALM=alm$: e si tirarmos BAL de BAM, e bal de bam; ficará $LAM=lam$. Logo os dous triangulos ALM, alm tambem são similhantes (127). Mas então os dous quadrilateros $ABLM$, $ablm$ são similhantes entre si, pois se dividem em egual numero de triangulos respectivamente similhantes (167). Logo é $LM : lm :: AB : ab :: BC : bc$ :: &c. (126).

170. *Coroll.* Logo os perimetros de dous polygonos regulares de egual numero de lados estão entre si, como os seus raios ou apothemas. Por que elles o estão como quaesquer dous lados homologos (166); e estes, como os raios ou apothemas, que tambem são linhas homologas.

171. Theor. *As circumferencias dos circulos estão entre si, como os seus raios.*

Sejam (fig. 90) os circulos, cujas circumferencias estão notadas por C, c : e representem R, r os respectivos raios. Digo que é $R : r :: C : c$.

Demonstr. Si não é $R : r :: C : c$; será como C para uma circumferencia $C' > c$, ou $c' < c$: e façam-se concentricas. Seja :: $C : C'$. Imagine-se circumscripto ao circulo menor c um polygono regular, cujos lados não encontrem a circumferencia C' (164); e circumscripto ao maior C outro similhante. Denote P o perimetro do maior, e p o do menor. Será $P : p :: R : r$ (170). Mas tambem supposemos $R : r :: C : C'$: logo $P : p :: C : C'$. Mas $P > C$ (12): logo $p > C'$: o que é absurdo, por ser p ainda menor do que o perimetro do polygono correspondente inscripto em C', o qual é menor do que C'. Pois seja $:: C : c'$. Imagine-se inscripto no circulo menor c um polygono regular, cujos lados não encontrem a circumferencia c' (165); e inscripto no maior C outro similhante. Denote tambem P o perimetro do maior, e p o do menor. Será $P : p :: R : r$. Mas tambem supposemos $R : r :: C : c'$: logo $P : p :: C : c'$. Mas $P < C$: logo $p < c'$: o que é absurdo, por ser p ainda maior do que o perimetro do polygono correspondente circumscripto a c', o qual é maior do que c'. E pois não é $R : r :: C : C' > c$, ou $c' < c$; será $R : r :: C : c$.

172. *Coroll.* Por tanto, conhecida a grandeza, ou comprimento da circumferencia de um circulo de dado diametro, será facil determinar a de outro circulo, cujo diametro for tambem dado. A isto se diz *rectificar* a circumferencia do circulo.

A razão do diametro á circumferencia não é exactamente conhecida: temos porém valores sufficientemente aproximados, para que na practica se repute, como inutil, maior aproximação.

Por methodos, que nos não cumpre aqui tractar, se achou que a razão do diametro á circumferencia é a de 1 para 3,1415926536. Ludolfo de Ceulen foi o primeiro, que a deu. Temos tambem a de 113 para 355, publicada por Adriano Metio, e por elle attribuida a seu Pae Pedro Metio; a qual é mui facil de se conservar na memoria, e é exacta até á sexta casa da dizima. Com effeito sendo avaliada em decimaes dá 3,1415929, valor verdadeiro até á dicta sexta casa. A razão bem conhecida de 7 para 22, achada por Archimedes, somente é exacta até á segunda casa decimal, como egualmente se pode ver, avaliando-a do mesmo modo. Assim seria necessario um circulo de 1000000 pés de diametro para haver $\frac{3}{10}$ de pé de erro na circumferencia rectificada pela razão de Metio: e bastaria um circulo, cujo diametro não tivesse menos de 800 pés, para haver um de erro na circumferencia rectificada pela razão de Archimedes. Todas as vezes porém que desta fizermos uso, poderemos dispensar-nos de fazer a proporção, e bastará triplicar o diametro, e sommar este producto com a septima parte do mesmo diametro: por quanto $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7}$.

173. *Schol.* Achada a grandeza da circumferencia de um circulo, se conhecerá a de qualquer dos seus arcos, cujo numero de graus e partes do grau for dado; buscando-se o quarto termo da proporção, em que os primeiros tres são: 360°, o numero dos graus e partes do grau do arco, e a circumferencia rectificada. Por quanto no mesmo circulo os comprimentos dos arcos são proporcionaes ao numero dos graus e partes do grau de cada um delles (29).

SEGUNDA SECÇÃO.

Das superficies.

174. Consideraremos unicamente nesta Secção as superficies terminadas por linhas rectas, ou pela circumferencia do circulo; isto é, tractaremos somente das áreas dos polygonos, e do circulo.

A medição das áreas depende (como veremos) da dos triangulos, e quadrilateros.

Entre os quadrilateros distinguem-se o *trapezio*, e o *parallelogrammo*. Chama-se

Trapezio o quadrilatero, em que ha so dous lados parallelos. Fig. 91.

Parallelogrammo o quadrilatero, em que são parallelos os lados oppostos; e por isso eguaes entre si (112). Fig. 92, 93, 94, 95.

Tambem entre os parallelogramos se distinguem o *rectangulo*, e o *quadrado*. Chama-se

Rectangulo o parallelogrammo, que tem todos os angulos rectos, e os lados contiguos deseguaes. Fig. 94.

Quadrado o parallelogrammo, que tem todos os angulos rectos, e os lados contiguos eguaes. Fig. 95.

A perpendicular tirada de qualquer ponto de um dos lados de um parallelogrammo; ou de um dos lados parallelos de um trapezio; ou do vertice de um dos angulos de um triangulo; sobre o lado opposto, prolongado si for necessario; diz-se *altura* do parallelogrammo; ou do trapezio; ou do triangulo: e o dicto lado opposto, chama-se *base*. Assim *EF* nas fig. 91, 92, 93, 96, e *AB* nas fig. 94, 95, é a *altura*; e *AD* é então a *base*.

O vertice do angulo opposto á base de um triangulo tambem se diz *vertice do triangulo*.

Para abbreviarmos, nomearemos algumas vezes os parallelogrammos somente pelas letras, que marcam os vertices de dous angulos oppostos. Por ex. (fig. 92) em vez de dizermos o parallelogrammo *ABCD*, diremos o parallelogrammo *AC*, ou *BD*.

175. Theor. *Si dous parallelogrammos tiverem a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; terão áreas eguaes.*

Sejam (fig. 97) os parallelogrammos *ABCD*, *AFED*, da mesma base, e da mesma altura. Digo que estes dous parallelogrammos tem áreas eguaes.

Demonstr. Por ser o angulo $BAF=CDE$ (75); e ser $AB=CD$, e $AF=DE$ (112); são eguaes os triangulos *ABF*, *DCE* (102). Ora a área do trapezio *ABED* compõe-se da área do triangulo *DCE* mais da área do parallelogrammo *ABCD*; ou da área do triangulo *ABF* mais da área do parallelogrammo *AFED*. Logo, como as áreas dos triangulos são eguaes, serão necessariamente eguaes as dos parallelogrammos.

Quanto aos parallelogrammos de bases eguaes e alturas eguaes, a demonstração é a mesma; pois se reduzem ao caso presente, ajustando a base de um com a do outro, e sobrepondo-os.

Estes parallelogrammos dizem-se *equivalentes*.

176. *Coroll.* Dividindo pois (fig. 98) a base *AD* de qualquer rectangulo *AC*, em quantas partes eguaes quizermos, por ex. *AE*, *EF*, &c.; e levantando dos pontos da divisão perpendiculares á dicta base; o rectangulo proposto ficará tambem dividido em outros tantos rectangulos *AI*, *EL*, &c. eguaes entre si. E por isso será *AI* : *EL* : *FM* : &c. :: *AE* : *EF* : *FG* : &c. : e logo *AC* (somma de todos os antecedentes) : *AD* (somma de todos os consequentes) :: *AI* (um so antecedente) : *AE* (seu consequente); ou como qualquer numero daquellas partes de *AC* para o mesmo numero destas de *AD*. Por ex. :: *AL* : *AF* :: *EN* : *EH* :: *EC* : *ED* :: &c.

177. Theor. *Si um parallelogrammo e um triangulo tiverem a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; será a área do triangulo metade da do parallelogrammo.*

Seja (fig. 99) o triangulo *AFD* da mesma base e altura do parallelogrammo *ABCD*. Digo que a área do triangulo é a metade da do parallelogrammo.

Demonstr. Tire-se pelo ponto *D* a recta *DE* parallela a *AF*; e continue-se *FC* até encontrar *DE* em um ponto *E*. Serão eguaes as áreas dos parallelogrammos *ABCD*, *AFED* (175). Mas o parallelogrammo *AFED* compõe-se dos dous triangulos *AFD*, *DFE*, eguaes entre si (107). Logo a área do triangulo *AFD* é a metade da do parallelogrammo *AFED*; e por consequencia tambem metade da do parallelogrammo *ABCD*.

178. *Coroll.* Deste Theorema, e do precedente, se deduz: que os triangulos da mesma base e da mesma altura, ou de bases eguaes e alturas eguaes, tem áreas eguaes.

Estes triangulos dizem-se *equivalentes*.

179. Theor. *As áreas dos rectangulos estão entre si, como os productos das suas bases multiplicadas pelas suas alturas.*

Sejam (fig. 100) os rectangulos AF, AC, que tenham por bases AG, AD, e por alturas AE, AB. Digo que é $AF : AC :: AG \times AE : AD \times AB$.

Demonstr. Continue-se EF até encontrar CD. Teremos os rectangulos AF, AH da mesma altura AE. Ora as áreas destes dous rectangulos estão entre si, como as bases; isto é, $AF : AH :: AG : AD$. Por que si não é $AF : AH :: AG : AD$; será como AG para um quarto termo $X >$ ou $< AD$. Seja $:: AG : AR > AD$. Conceba-se dividida a base AG em tantas partes eguaes, que continuando-se a divisão de G para R, caia um dos pontos entre D, e R; por ex. I. Complete-se o rectangulo AQ. Será $AF : AQ :: AG : AI$ (176). Mas tambem supposemos $AF : AH :: AG : AR$: logo $AQ : AH :: AI : AR$. Mas $AQ > AH$: logo $AI > AR$: o que é absurdo. Com egual raciocinio, imitando o que temos feito em outros logares, se demonstrará tambem não ser $:: AG : X < AD$. E pois não é $AF : AH :: AG : X >$ ou $< AD$; será

$$AF : AH :: AG : AD.$$

Pela mesma razão, considerando os rectangulos

AH, *AC*, como tendo a mesma altura *AD* sobre as bases *AE*, *AB*, será

$$AH : AC :: AE : AB.$$

Logo multiplicando ordenadamente os termos destas duas proporções, e simplificando a primeira razão, teremos

$$AF : AC :: AG \times AE : AD \times AB. \ (*)$$

180. *Coroll.* Quanto pois dissemos a respeito dos rectangulos, se extende a quaesquer parallelogrammos; e por conseguinte aos triangulos. Por que todo o parallelogrammo é egual em área ao rectangulo da mesma base e da mesma altura (175). E quanto aos triangulos: como as suas áreas são metades das de parallelogrammos da mesma base e da mesma altura dos triangulos (177), necessariamente hão de ter a mesma razão que as desses parallelogrammos, ou rectangulos.

Da avaliação das áreas, e da sua medida.

181. Por quanto *medir* a área de uma figura é determinar quantas vezes esta contêm outra conhecida, a qual se considera então, como unidade; e sabemos que as áreas dos parallelogrammos estão entre

(*) Não pareça que multiplicamos áreas por áreas, e linhas por linhas. Multiplicam-se as razões geometricas entre si, isto é, numeros por numeros. Com effeito a 1.ª proporção dá $\frac{AF}{AH} = \frac{AG}{AD}$; e a 2.ª $\frac{AH}{AC} = \frac{AE}{AB}$. Por conseguinte $\frac{AF}{AH} \times \frac{AH}{AC} = \frac{AG}{AD} \times \frac{AE}{AB}$; donde &c.

si, como os productos das suas bases multiplicadas pelas suas alturas; segue-se, que, si denotar A a altura, e B a base de um parallelogrammo P, cuja área se pretende avaliar; e a a altura, e b a base de outro parallelogrammo p, tomado para medida, ou unidade de área; teremos conhecida a daquelle, visto que podemos saber, quantas vezes contêm a deste. Com effeito por ser $P : p :: B \times A : b \times a$, será $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$: o que faz ver, que para avaliarmos a área de qualquer parallelogrammo P devemos, depois de examinar quantas vezes na sua base B se contêm a base b da unidade de área, e quantas na altura A se contêm a altura a, multiplicar esses dous quocientes, e o producto nos mostrará o numero de vezes, que a área escolhida para medida se contêm na do parallelogrammo, que se tracta de avaliar.

Como porém a medida commum das áreas, e a mais simples, é um *quadrado* conhecido, por ex. um pé quadrado, uma braça quadrada, &c. ; no caso de que por p escolhamos qualquer dessas medidas, v. gr. um pé quadrado (1^{pp}); então $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$ se torna em $\frac{P}{1^{pp}} = \frac{B}{1^{p}} \times \frac{A}{1^{p}}$; ou $P = B \times A$: expressão abbreviada, e donde vem dizer-se geralmente :

182. A área de um parallelogrammo se avalia, multiplicando a base pela altura: e por tanto a de um quadrado, pela segunda potencia do seu lado (*).

(*) Por isso se diz quadrado de um numero, ainda que impropriamente, a segunda potencia desse numero.

Não se perca porém de vista, quando assim nos expressarmos, que se deve intender por esse producto o numero de medidas quadradas, que se contêm na área procurada.

183. *Coroll.* 1.° Logo a área de qualquer triangulo avalia-se, multiplicando a metade da base pela altura (177).

184. *Coroll.* 2.° E daqui se segue: que as áreas de dous triangulos similhantes estão entre si, como os quadrados dos seus lados homologos. Por que dando-se-lhes por bases quaesquer dous lados homologos B, b; como então as suas alturas A, a, são tambem linhas homologas (169); temos $A : a :: B : b$, e $\frac{1}{2} B : \frac{1}{2} b :: B : b$; e multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $\frac{1}{2} B \times A : \frac{1}{2} b \times a :: B^2 : b^2$.

185. *Coroll.* 3.° Logo em geral as áreas de dous polygonos similhantes estão entre si, como os quadrados de quaesquer dous lados ou linhas homologas. Por que os polygonos similhantes podem-se considerar compostos de egual numero de triangulos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos (167): e por tanto a área de cada triangulo do 1.° polygono será para a área do triangulo correspondente no 2.°, como o quadrado de um lado daquelle para o quadrado do homologo deste. Ora tendo todos os lados homologos a mesma razão entre si, tambem devem ter a mesma razão os seus quadrados: logo a área de cada triangulo do 1.° polygono será para a área do seu correspondente no 2.°, como o quadrado de qualquer lado do 1.° polygono

para o quadrado do lado homologo do 2.° Por consequencia a somma das áreas de todos os triangulos, de que se compõe o 1.° polygono, isto é, a sua área, será para a somma das áreas de todos os triangulos, de que se compõe o 2.° polygono, isto é, a sua área; como o quadrado de qualquer lado do 1.° para o quadrado do lado homologo do 2.°

186. *Schol.* Vê-se por tanto: que nos polygonos similhantes basta comparar os quadrados de quaesquer lados ou linhas homologas, para saber-se a relação, que ha entre as suas áreas. Porém geralmente em quaesquer figuras, é necessario primeiramente avaliar a área de cada uma, e depois comparar esses valores referidos á mesma medida. Ora nos polygonos serve de muito a avaliação das áreas dos triangulos; pois por ellas se pode sempre avaliar a área de qualquer polygono; o que se faz, dividindo-o em triangulos (148), calculando separadamente a área de cada um, e depois sommando todos esses resultados. Comtudo, ainda que em geral este é o meio de avaliar a área dos polygonos, não é elle o mais expedito em alguns casos, nem applicavel ás figuras terminadas por linhas curvas. Temos methodos mais promptos, como vamos ver nos Theoremas seguintes.

187. Theor. *A área de qualquer trapezio avalia-se, multiplicando a semi-somma dos lados parallelos pela altura do trapezio.*

Seja (fig. 91) o trapezio $ABCD$; e EF a sua altura. Digo que a área é $= \frac{AD + BC}{2} \times EF$.

Demonstr. Tire-se a diagonal BD. Então a área do trapezio compõe-se da área do triangulo $ABD = \frac{1}{2} AD \times EF$, e da área do triangulo $BCD = \frac{1}{2} BC \times EF$ (183). Logo a área do trapezio $ABCD = \frac{1}{2} AD \times EF + \frac{1}{2} BC \times EF = \frac{AD + BC}{2} \times EF$.

188. *Schol.* Em logar de $\frac{AD + BC}{2}$, semi-somma dos lados parallelos, podemos substituir a linha GM parallela a AD, tirada pelo ponto G meio do lado AB; isto é, pode dizer-se, que a área de um trapezio se avalia tambem, multiplicando pela sua altura a linha tirada em egual distancia dos lados parallelos. Com effeito, por ser $BG = \frac{1}{2} AB$, e GM parallela a AD, os triangulos similhantes ABD, GBI dão $GI = \frac{1}{2} AD$; e os triangulos similhantes BDC, IDM dão $IM = \frac{1}{2} BC$. Logo $GI + IM$, ou GM é $= \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} BC = \frac{AD + BC}{2}$.

189. Theor. *A área de qualquer polygono regular avalia-se, multiplicando a metade do perimetro pelo apothema.*

Seja (fig. 81) o polygono regular $ABDEFG$. Denote A a área; a o apothema; e P o perimetro. Digo que $A = \frac{1}{2} P \times a$.

Demonstr. Como os raios de um polygono regular o dividem em tantos triangulos isosceles eguaes, quantos são os lados do mesmo polygono (153); é evidente que para avaliarmos a sua área bastará calcular a de um desses triangulos, e multiplicar depois o resultado pelo numero dos lados do polygono. Ora a área de qualquer dos triangulos, ABC, é $=\frac{1}{2} AB \times Cm$. Logo, representando n o numero dos dictos lados, será a área do polygono $=\frac{1}{2} n \,.\, AB \times Cm$; isto é, $A=\frac{1}{2} P \times a$.

190. Theor. *A área de qualquer circulo avalia-se, multiplicando a metade da circumferencia pelo raio.*

Seja (fig. 146) o circulo, cuja circumferencia está notada por C. Represente R o raio, e A a área. Digo que $A=\frac{1}{2} C \times R$.

Demonstr. Si não é $A=\frac{1}{2} C \times R$; seja $\frac{1}{2} C \times R$ o valor da área de outro circulo maior, ou menor do que o proposto. Seja=área do circulo maior concentrico, cuja circumferencia está notada por C'. Imagine-se circumscripto ao circulo C um polygono regular, cujos lados não encontrem a circumferencia C' (164). Denote P o perimetro desse polygono. Será a sua área$=\frac{1}{2} P \times R$ (189). Ora esta área é menor do que a do circulo C': logo será $\frac{1}{2} P \times R < \frac{1}{2} C \times R$; isto é, $P < C$: o que é absurdo (12). Pois seja $\frac{1}{2} C \times R=$área do circulo menor concentrico, cuja circumferencia está notada por c. Imagine-se circumscripto ao circulo c um polygono regular, cujos lados não encontrem a circumferencia C. Denote p o perimetro desse polygono, e r o raio do circulo c. Será a sua área$=\frac{1}{2} p \times r$. Ora esta área é maior do que a do circulo c: logo será $\frac{1}{2} p \times r > \frac{1}{2} C \times R$: o que é absurdo, por ser $r < R$, e $p < C$. E pois não é $\frac{1}{2} C \times R=$área $>$ ou $< A$; será $A=\frac{1}{2} C \times R$.

191. *Coroll.* 1.° Como a área do circulo se avalia, multiplicando a metade da circumferencia pelo raio; segue-se, que a de qualquer sector se avaliará tambem, multiplicando a metade do seu arco pelo raio. Por que no mesmo circulo as áreas dos sectores são proporcionaes aos seus arcos (28): e assim, denotando S a área de um sector, e $\overset{\frown}{a}$ o seu arco, será $C : \overset{\frown}{a} :: \frac{1}{2}C \times R : S$; donde $S = \frac{1}{2}\overset{\frown}{a} \times R$.

192. *Coroll.* 2.° As áreas dos circulos, ou dos sectores similhantes, isto é, do mesmo numero de graus, estão entre si, como os quadrados dos seus raios. Com effeito, denotando C, c as circumferencias de dous circulos, e R, r os respectivos raios, como temos $C : c :: R : r$ (171), e $\frac{1}{2}R : \frac{1}{2}r :: R : r$; multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $\frac{1}{2}C \times R : \frac{1}{2}c \times r :: R^2 : r^2$.

193. *Schol.* A área de qualquer segmento de circulo $AGBA$ (fig. 19) se achará, tirando da área do sector $CAGB$ a do triangulo ABC.

194. Theor. *Si se construirem tres figuras similhantes sobre os tres lados de um triangulo rectangulo, cada uma sobre cada um; a área da figura formada sobre a hypothenusa será egual á somma das áreas das figuras formadas sobre os outros dous lados.*

Seja (fig. 101) o triangulo rectangulo ABC, e o angulo recto em A. Denotem S, S', S'' as áreas das figuras similhantes construidas sobre os lados do triangulo. Digo que $S = S' + S''$.

Demonstr. Do ponto A abaixe-se sobre a hypothenusa a perpendicular AD. Represente T a área do triangulo ABC; T' a do triangulo ABD; e T'' a do triangulo ADC. Por serem similhantes estes triangulos (134); será $T : T' : T'' :: \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$ (184). Mas tambem pela similhança das figuras é $S : S' : S'' :: \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$ (185): logo $S : S' : S'' :: T : T' : T''$; e por conseguinte $S : S' + S'' :: T : T' + T''$. Mas é evidentemente $T = T' + T''$. Logo tambem $S = S' + S''$. (*)

195. *Coroll.* 1.° Pois os triangulos ABC, ABD, ACD tem todos a mesma altura AD; será $T : T' : T'' :: BC : BD : CD$ (180, 179). Mas tambem, segundo acabamos de ver, é $T : T' : T'' :: S : S' : S''$: logo $S : S' : S'' :: BC : BD : CD$. Quer dizer, que a área da figura formada sobre a hypothenusa é para cada uma das áreas das figuras similhantes formadas sobre os outros dous lados, como a hypothenusa para cada um dos segmentos adjacentes a estes mesmos lados, feitos esses segmentos pela perpendicular tirada do vertice do angulo recto sobre a mesma hypothenusa.

196. *Coroll.* 2.° Consequentemente em um circulo (fig. 102) os quadrados de quaesquer cordas

---

(*) É um caso particular deste Theorema aquella celebre proposição do quadrado da hypothenusa, a qual vem demonstrada em particular em algumas Geometrias; isto é, que a área do quadrado formado sobre a hypothenusa é egual á somma das áreas dos quadrados formados sobre os outros dous lados.

AD, *AE*, tiradas dos extremos de um diametro *AB*, são como os segmentos adjacentes *AG*, *AF*, formados pelas perpendiculares *DG*, *EF* abaixadas dos extremos das mesmas cordas sobre o diametro. Com effeito, tirando-se as rectas *DB*, *EB*, os triangulos *ADB*, *AEB* rectangulos em *D*, e *E* (98), dão $\overline{AD}^2 : \overline{AB}^2 :: AG : AB$; e $\overline{AE}^2 : \overline{AB}^2 :: AF : AB$. E logo $\overline{AD}^2 : \overline{AE}^2 :: AG : AF$.

197. *Schol.* O mesmo Theorema nos offerece um meio de acharmos o valor numerico de qualquer dos lados de um triangulo rectangulo, quando forem dados os outros dous lados. Por que sendo (fig. 101) $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$; e por conseguinte $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2$; si dados os dous lados do angulo recto se pedir a hypothenusa, será $BC = \sqrt{(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)}$: e si dada a hypothenusa, e um dos outros seus lados, por ex. *AC*, se pedir o terceiro, será $AB = \sqrt{(\overline{BC}^2 - \overline{AC}^2)}$.

198. PROBL. *Dado um polygono, construir outro similhante, cuja área esteja para a daquelle em uma razão dada.*

Seja (fig. 103) o polygono dado *X*; e $m : n$ a razão em que deve estar a área deste para a do que se pretende construir similhante.

Soluç. Tire-se uma linha indefinida *DE*, sobre a qual se tomem as partes *DP*, *PE* taes, que seja $DP : PE :: m : n$ (136). Sobre *DE*, como diametro, descreva-se a semi-circumferencia *DME*; e do ponto *M*, onde a perpendicular *PM* levantada do ponto *P* a encontra, tirem-se para os extremos do diametro as cordas *MD*, *ME*. Tome-se sobre *MD* de *M* para *D* a parte MF egual à um dos lados do polygono, por ex. AB: e tire-se pelo ponto F a recta FG parallela a DE, até encontrar ME em um ponto G. Construindo sobre MG, como homologa de AB, um polygono similhante ao dado X (168); digo que será este o polygono pedido.

Demonstr. Por ser PM perpendicular a DE (constr.); será $\overline{MD}^2 : \overline{ME}^2 :: DP : EP$ (196); ou $\overline{MD}^2 : \overline{ME}^2 :: m : n$, visto que é $m : n :: DP : EP$ (constr.). Mas por ser FG parallela à DE (constr.), temos $MD : ME :: MF$, ou $AB : MG$ (122); e por consequencia $\overline{MD}^2 : \overline{ME}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{MG}^2$: logo tambem $\overline{AB}^2 : \overline{MG}^2 :: m : n$. Mas é $\overline{AB}^2 : \overline{MG}^2$ :: área do polygono X : área do similhante construido sobre MG (185). Logo tambem as dictas áreas estão naquella razão.

199. Probl. *Dado um circulo, inscrever, ou circumscrever-lhe um polygono regular, cuja área diffira da do circulo, quam pouco se quizer.*

Seja (fig. 104) o circulo $CABDA$. Pede-se o polygono inscripto.

Soluç. Inscreva-se qualquer polygono regular ABD &c. Sobre este inscreva-se outro tambem regular, mas de duplicado numero de lados, AFB &c. (158). Continue-se assim. Digo que se ha de chegar a inscrever um polygono, que satisfaça ao que se pede.

Demonstr. Tire-se pelo ponto F a tangente mn; e construa-se sobre AB o rectangulo Am. Será a área do triangulo AFB metade da desse rectangulo.

(177). Ora a área do rectangulo é evidentemente maior do que a do segmento *AFBA*. Logo a do triangulo será tambem maior do que a da metade do segmento. Por conseguinte, tirado do segmento o triangulo, será o residuo, isto é, a somma das áreas dos segmentos *AFA*, *BFB*, menor do que a metade da área do segmento *AFBA*. Logo si o numero dos lados de cada polygono inscripto se for successivamente duplicando, sempre se irá tirando mais e mais do que a metade do residuo: e consequentemente chegar-se-ha a uma differença tam pequena, que seja menor do que qualquer assignada (27).

Seja agora (fig. 104*) o circulo *CDGD*. Pede-se o polygono circumscripto.

Soluç. Circumscreva-se um polygono regular, cujo meio lado seja *DF*. Sobre este circumscreva-se outro tambem regular, mas de duplicado numero de lados, o que se faz, conduzindo do centro *C* ao ponto *F* a recta *CF*, e tirando pelo ponto *G*, onde esta encontra a circumferencia, a tangente *GH*, que será meio lado do polygono *DHG* &c. de duplicado numero de lados. Continue-se assim. Chegar-se-ha a circumscrever um polygono, que satisfaça ao que se pede.

Demonstr. Tire-se a corda *DG*; e *DI* perpendicular a *CF*. Por quanto é $DH = HG$; e $FH > HG$; será $FH > HD$: e por consequencia $FG > GI$ (122). Ora $\frac{1}{2} FG \times HG$ é a expressão da área do triangulo *FHG*, e $\frac{1}{2} GI \times HG$ a do triangulo *HDG* (183). Logo será a área do triangulo *FHG* > área do triangulo *HDG*;

e por conseguinte a área do mesmo *FHG* maior do que a metade da do triangulo *FDG*. Mas é a área de *FDG* evidentemente maior do que a do mixtilineo *FDoG* : logo a do triangulo *FHG* muito maior do que a metade da do mesmo mixtilineo *FDoG*; isto é, a área do residuo *HDoG*, depois de tirado o triangulo *FHG* do mixtilineo *FDoG*, será menor do que a metade da área deste mixtilineo. Logo, si o numero dos lados de cada polygono circumscripto se for successivamente duplicando, sempre se irá tirando mais e mais do que a metade do residuo: e consequentemente chegar-se-ha a uma differença tam pequena, que seja menor do que qualquer assignada.

200. Concluiremos esta Secção expondo um methodo muito simples na practica, para se medirem as áreas de algumas figuras, bem que seja bastante, o que fica dicto (186) para a medição das áreas das figuras rectilineas de toda a specie. Consiste elle (fig. 105) em se tirar na figura uma linha *AG*, e abaixar sobre ella do vertice de cada um dos angulos as perpendiculares *BM*, *LC*, *DK*, *EI*, *FH* : medir cada uma destas linhas, como tambem os intervallos *AN*, *NO*, *OP*, *PQ*, *QR*, *RG* : e por que a figura fica repartida em muitas partes, das quaes as duas extremas podem ser triangulos, e as mais trapezios; medir aquelles, multiplicando a metade da base pela altura (183); e estes multiplicando a semi-somma dos lados parallelos pela distancia perpendicular destes mesmos lados (187).

Quando a figura for terminada por linha curva;

medir-se-ha com sufficiente exactidão para a practica, dividindo a linha *AT* (fig. 106), que se tirará pelo seu maior comprimento, em um grande numero de partes, a fim de que os arcos *AB*, *BC*, &c., que estão entre as perpendiculares, se possam considerar, como linhas rectas: e para fazer o calculo mais simples que é possivel, se farão as partes *AO*, *OP*, &c. eguaes entre si. Para ter então a área, sommar-se-hão todas as linhas *BN*, *CM*, &c., e so metade da linha *GH*, si a curva for terminada por uma recta *GH* perpendicular a *AT*; esta somma se multiplicará por um dos intervallos *AO*; e o producto será o valor da área, que se busca. E' consequencia immediata do que dissemos em o n.° 187.

Si se tractasse do spaço *BNHG* terminado pelas linhas *BN*, *GH*; tomar-se-hia, não *BN* inteira, mas somente a sua metade.

TERCEIRA SECÇÃO.

Dos Planos.

201. Não supporemos presentemente nos planos nem grandeza nem figura determinada: consideralos-hemos indefinidamente extensos para toda a parte; e so para ajudar a imaginação os representaremos com uma figura.

202. Uma recta não pode ter parte em um plano, e parte mais elevada ou mais baixa a respeito desse plano (10). E o mesmo se deve intender de um plano a respeito de outro plano (16).

203. Theor. *A intersecção de dous planos é sempre linha recta.*

Demonstr. Que é linha, segue-se do que acabamos de dizer, e da definição que démos da *superficie* : e mostra-se que é recta; por quanto não pode haver nessa intersecção tres pontos, que não estejam em linha recta, sem que os planos se confundam (16).

204. *Coroll.* 1.º Logo por uma mesma recta podem passar muitos planos.

205. *Coroll.* 2.º Consequentemente podem no Spaço duas rectas ser perpendiculares a uma terceira, sem serem parallelas entre si, e sem todavia se encontrarem. Com effeito, si no plano *ABD* (fig. 107), que corta o plano *EG* na recta *BD*, se tirarem duas perpendiculares *BA*, *DC*, á dicta recta, será *BA* parallela a *DC* (73, 3.º); mas não a respeito de outras quaesquer perpendiculares, que se levantarem sobre a dicta recta nos differentes planos que por ella podem passar, como por ex. *DH* no plano *EG*.

Das linhas rectas consideradas nas differentes posições, que podem ter a respeito dos planos.

206. Theor. *Si uma recta for perpendicular a outras duas rectas no ponto, onde estas duas se cortam; será tambem perpendicular a todas as mais rectas, que a tocarem, existentes no plano das duas. (E se dirá perpendicular ao plano; e reciprocamente).*

Seja (fig. 108) a recta *CD* perpendicular ás duas *Ee*, *Ff*, no ponto *D*, em que estas duas se cortam: e seja *AB* o plano, que ellas determinam. Digo que *CD* será tambem perpendicular a todas as mais rectas, que a tocarem, existentes no plano *AB*.

Demonstr. Tire-se pelo ponto *D* no plano *AB* uma recta indefinida *Gg*: e tomem-se eguaes as partes *DE*, *De*, *DF*, *Df*. Tirem-se *FE*, *fe*. Serão eguaes os triangulos *DEF*, *Def*, como tendo dous lados respectivamente eguaes, e egual o angulo formado por esses dous lados; a saber, $EDF = eDf$ (102). Logo será $FE = fe$; e por isso, e por serem eguaes as obliquas *CF* e *Cf*, *CE* e *Ce*, pois se desviam egualmente da perpendicular *CD* (38); serão eguaes os triangulos *FCE*, *fCe* (107); e logo o angulo $CEF =$ angulo Cef. Temos tambem que os triangulos *GDE*, *gDe* são eguaes (105); por ser $DE = De$ (constr.), o angulo $GDE =$ angulo gDe, e o angulo $DEG =$ angulo Deg, pela egualdade dos triangulos *DEF*, *Def*. Logo será $EG = eg$: pelo que, e por termos concluido ser $CE = Ce$, e eguaes os angulos

CEF, *Cef*; serão eguaes os triangulos *CEG*, *Ceg*. Mas é por isso $CG=Cg$; e pela egualdade dos triangulos *GDE*, *gDe*, é $DG=Dg$: logo será *CD* perpendicular a *Gg* (42). Mas a recta *Gg* foi tirada arbitrariamente pelo ponto *D* no plano *AB*. Logo *CD* será tambem perpendicular a toda outra recta, que a tocar, existente no dicto plano; isto é, *CD* perpendicular ao plano *AB*.

207. Theor. *Por um ponto não se pode tirar mais do que uma perpendicular a um plano.*

Este Theorema comprehende dous casos: por que ou o ponto está no plano, ou fóra.

1.° Esteja o ponto no plano; e seja este *GE* (fig. 107), e aquelle *D*. Digo, que por *D* não se pode tirar mais do que uma perpendicular ao plano *GE*.

Demonstr. Si é possivel, tirem-se duas; e sejam *AD*, *CD*. Conduza-se por *AD* e *CD* o plano *ADC*, que cortará o outro *GE* em uma recta *BD*. Serão *AD*, *CD* perpendiculares a *BD* (206): o que é impossivel (36). Logo &c.

2.° Esteja agora o ponto fóra do plano; e seja este o mesmo *GE*, e aquelle *A*. Digo que por *A* não se pode tirar mais do que uma perpendicular ao plano *GE*.

Demonstr. Si é possivel, tirem-se duas perpendiculares; e sejam *AB*, *AD*. Conduza-se por *AB* e *AD* o plano *ABD*, que cortará o outro *GE* na recta *BD*. Serão *AB*, *AD* perpendiculares a *BD* (206): o que é tambem impossivel (36). Logo &c.

208. A recta, que encontrando um plano, lhe

não é perpendicular, se diz *obliqua* a esse plano: e a sua inclinação se mede pelo angulo formado pela mesma recta, e por outra existente no plano entre ella e a perpendicular, que de qualquer ponto da obliqua cair sobre o mesmo plano. Por ex. (fig. 108) si for CE obliqua ao plano AB, e CD perpendicular; o angulo CED medirá a inclinação de CE a respeito do plano AB.

209. Theor. *Si duas, ou mais obliquas a um plano, tiradas de um mesmo ponto situado fóra delle, forem eguaes; desviar-se-hão egualmente da perpendicular abaixada do dicto ponto, e farão com esta angulos eguaes. E si as obliquas forem deseguaes; a menor se desviará menos, e fará angulo menor.*

1.° Sejam (fig. 109) as obliquas eguaes DE, DF, &c., e a perpendicular DC, tiradas para o plano AB do ponto D situado fóra. Digo que $CE=CF=$&c.

Demonstr. Os triangulos DCE, DCF, &c. são rectangulos em C, e eguaes (109); por terem o lado commum DC perpendicular ao plano AB, e as hypothenusas eguaes (hyp.). Logo é $CE=CF=$&c., e o angulo $EDC=CDF=$&c.

2.° Seja porém $DG>DE$. Digo que $CG>CE$; e o angulo $CDG>CDE$.

Demonstr. Conceba-se totalmente applicado o triangulo CDE sobre o triangulo CDG. Cairá CE sobre CG; por ser o angulo $DCE=DCG$, como rectos. Mas é $DG>DE$ (hyp.): logo o ponto E cairá entre C, e G (37). Logo $CG>CE$, e o angulo $CDG>CDE$.

210. *Coroll.* 1.° Reciprocamente: si duas, ou mais obliquas a um plano, tiradas de um mesmo ponto situado fóra delle, se desviarem egualmente da perpendicular abaixada do dicto ponto, ou fizerem com esta angulos eguaes; serão eguaes. E as que menos se desviarem, ou fizerem angulo menor, serão menores.

211. *Coroll.* 2.° Logo a perpendicular é a menor recta, que para um plano se pode tirar de um ponto situado fóra. (Por ella se mede a distancia, isto é, a altura, em que está um ponto a respeito de um plano.)

212. Theor. *Si no mesmo ponto de uma recta outras tres lhe forem perpendiculares; estas tres existirão em um mesmo plano.*

Sejam (fig. 110) as tres rectas AB, BC, BD, perpendiculares a EB no ponto B. Digo que AB, BC, BD estão todas em o mesmo plano.

Demonstr. Si é possivel, não esteja BC no plano das duas AB, BD: e seja BF a intersecção desse plano com o plano das outras duas EB, BC. Por ser EB perpendicular a AB e a BD (hyp.); será EB tambem perpendicular a BF (206). Mas egualmente EB é perpendicular a BC (hyp.): logo no plano EBC estão duas perpendiculares BF, BC, levantadas do mesmo ponto B sobre a recta EB: o que é impossivel (36). Logo &c.

213. *Coroll.* Por um ponto de uma recta não podem passar dous planos perpendiculares a esta. Por que, si passassem, poder-se-hia tirar por esse

ponto tres rectas; duas em um dos planos, e uma no outro; que seriam perpendiculares a aquella outra no dicto ponto (206), e não estariam todas tres no mesmo plano, contra o que acabamos de demonstrar.

214. PROBL. *De um ponto dado em um plano, levantar a perpendicular a esse plano.*

Seja (fig. 111) o plano *AB*; e o ponto *C*.

Soluç. Tirem-se pelo ponto dado, e no plano, duas rectas *DE*, *FG* perpendiculares entre si. Faça-se passar por uma dellas, *DE*, qualquer plano *DEI*. Tire-se neste a recta *CI* perpendicular a *DE* no ponto *C*: e no plano determinado pelas duas *CI*, *CF*, levante-se do mesmo ponto a recta *CH* perpendicular a *FG*. Digo que *CH* é a perpendicular pedida.

Demonstr. Por ser *DC* perpendicular a *CI*, e a *CF* (constr.); é tambem perpendicular a *CH*, que está no plano *ICF* (206). Mas *CH* egualmente é perpendicular a *CF* (constr.). Logo *CH* é perpendicular ao plano *DCF*, isto é, ao plano *AB*.

215. PROBL. *De um ponto dado fóra de um plano, abaixar a perpendicular a esse plano.*

Seja (fig. 109) o plano *AB*; e o ponto *D*.

Soluç. Tire-se do ponto *D* para o plano uma recta *DE* tal, que gyrando ao redor do ponto *D*, descreva no mesmo plano uma circumferencia de circulo *EFHE*, como necessariamente o será (209). Determine-se o seu centro (54): e deste para o ponto dado D tire-se a recta CD. Será CD a perpendicular pedida (209).

216. Probl. *Por um ponto dado em uma recta tirar um plano perpendicular a essa recta.*

Seja (fig. 112) a recta EF; e o ponto G.

Soluç. Faça-se passar por EF dous planos quaesquer EFH, EFI. Levantem-se do ponto G duas perpendiculares a EF; uma GH no plano EFH, e a outra GI no plano EFI. Digo que o plano HGI determinado por estas duas perpendiculares é o pedido (206).

217. Theor. *A recta, que pelo vertice do angulo, que mede a inclinação de uma obliqua a um plano, se tirar nesse plano perpendicularmente á outra recta, que forma o dicto angulo com a obliqua; será tambem perpendicular á mesma obliqua.*

Seja (fig. 113) a recta CD obliqua ao plano AB; e o angulo CDE, o que mede a inclinação. Tire-se FG perpendicular a DE no ponto D, e no plano AB. Digo que FG é tambem perpendicular a CD.

Demonstr. De qualquer ponto C da obliqua CD abaixe-se CE perpendicular ao plano AB (215); e cairá sobre DE (208). Tome-se $DF=DG$; e tirem-se as rectas GE, EF, CG, CF. Será $GE=EF$ (38); por ser DE perpendicular no meio de FG (constr.). Conseguintemente as rectas CG, CF se desviam egualmente da perpendicular CE ao plano AB. Logo é

$CG = CF$ (210). Logo os pontos C, D da recta CD estão equidistantes dos pontos F, G da recta FG. Logo CD é perpendicular a FG (42).

218. Theor. *Si uma de duas parallelas for perpendicular a um plano; tambem a outra o será.*

Sejam (fig. 107) as rectas parallelas AB, CD; e seja AB perpendicular ao plano GE. Digo que tambem CD é perpendicular ao mesmo plano.

Demonstr. Tire-se a recta AD; e no plano GE a recta FH perpendicular no ponto D á intersecção BD do plano das parallelas com o plano GE. Será FH tambem perpendicular a AD (217); e por tanto perpendicular ao plano ABD (206). Logo FH egualmente é perpendicular a CD, que está nesse plano. Mas tambem CD é perpendicular a BD (69); por ser a sua parallela AB perpendicular ao plano GE (hyp.), e por isso perpendicular a BD. Logo CD perpendicular ás duas BD, FH, é perpendicular ao plano GE, em que ellas estão.

219. *Coroll.* 1.º Duas rectas AB, CD perpendiculares ao mesmo plano GE são parallelas entre si. Por que a parallela a AB, que se tirasse pelo ponto D, seria perpendicular ao plano GE: e do mesmo ponto não se pode levantar mais do que uma perpendicular a um plano (207).

220. *Coroll.* 2.º Duas rectas AB, CD (fig 112) parallelas a uma terceira EF, ainda não estando todas situadas no mesmo plano, são parallelas entre si. Por que ao plano, a que a terceira for perpendicular,

tambem serão perpendiculares as outras duas; e por conseguinte parallelas entre si.

221. *Coroll.* 3.° Logo qualquer recta *EF* situada fóra de um plano, e parallela á outra *AB* tirada nesse plano, não poderá encontralo, por mais que se continue para uma e outra parte. (E se dirá tambem *parallela* ao plano). Com effeito si *EF* encontrasse o plano em algum ponto; por esse ponto e no dicto plano tirar-se-hia outra recta parallela á *AB* (74), a qual seria tambem parallela a *EF*: o que é contra a definição (68).

222. Theor. *Os angulos, que respectivamente tem os lados parallelos, e estão voltados para a mesma parte, ainda estando situados em differentes planos, são eguaes entre si.*

Sejam (fig. 114) os angulos *ABD*, *ECF*, situados cada um em seu plano; e tenham os lados parallelos, e voltados para a mesma parte; a saber, *AB* parallelo a *CE*, e *BD* parallelo a *CF*. Digo que $ABD = ECF$.

Demonstr. Façam-se eguaes as rectas *BA*, *BD*, *CE*, *CF*; e tirem-se *BC*, *AE*, *DF*, *AD*, *EF*. Por ser *AB* egual e parallela a *CE*; será *BC* egual e parallela a *AE* (113): e por ser *BD* egual e parallela a *CF*; tambem será *BC* egual e parallela a *DF*. Logo será *AE* egual e parallela a *DF* (220); e por isso $AD = EF$. Logo os triangulos *ABD*, *ECF* são eguaes (107). E logo o angulo $ABD = ECF$.

223. *Schol.* Tem aqui egualmente logar, o que se disse no *Schol.* n.° 76.

Dos planos considerados nas differentes posições, que podem ter uns a respeito dos outros.

224. Similhantemente ao que dissemos á cerca das linhas, quando concorrem em um ponto, se diz que dous planos concurrendo fazem entre si *angulo*. Mas para differençarmos estes daquelles, chamaremos *angulo diedro* ao angulo formado por dous planos; e *angulo rectilineo*, ou simplesmente *angulo*, ao formado por duas rectas.

Démos o nome de *vertice* no angulo rectilineo ao ponto do concurso das rectas; e a estas o de lados: daremos o de *aresta* no angulo diedro á recta em que concorrem os planos; e a estes o de *faces*.

Nomêa-se um angulo diedro com quatro letras, das quaes as duas medias se poem na aresta, e cada uma das outras em sua face. Assim para dizermos o angulo diedro formado pelos dous planos *CA*, *CD* (fig. 114), que concorrem na recta *BC*, diremos o angulo diedro *ABCD*: ou o designaremos simplesmente pela aresta *BC*, quando não mais de um angulo diedro tiver a mesma aresta.

225. Theor. *Si em dous angulos diedros forem eguaes os angulos formados por duas perpendiculares ás suas arestas, tiradas cada uma em sua face; os dous angulos diedros serão eguaes entre si.*

Sejam (fig. 114) os angulos diedros *ABCD*, *abcd*; e o angulo *IGH* formado pelas perpendiculares *GI*, *GH*, tiradas nas faces do primeiro respectivamente a *BC*, seja egual ao angulo *igh* formado pelas perpendiculares *gi*, *gh*, tiradas nas faces do segundo respectivamente a *bc*. Digo que o angulo diedro *ABCD* é = angulo diedro *abcd*.

Demonstr. Applique-se o ponto *g* ao ponto *G*; e ajustando a aresta *bc* sobre a aresta *BC*, faça-se coincidirem as faces *cd*, *CD*. A recta *gh* se ajustará sobre a recta *GH*; por serem rectos os angulos *cgh*, *CGH* (hyp.). Mas o plano *igh* é perpendicular a *gc* (206), e o plano *IGH* perpendicular a *GC*: logo estes dous planos coincidirão; por que não succedendo assim, teriamos por um ponto *G* da mesma recta conduzido dous planos perpendiculares a esta: o que é impossivel (213). Logo a recta *gi* se ajustará sobre a recta *GI*; por ser o angulo *igh* = angulo *IGH* (hyp.). E pois as rectas *gc*, *gi* se ajustam sobre as rectas *GC*, *GI*; tambem se ajustarão os seus respectivos planos, isto é, as faces *ca*, *CA*. Mas ja se tem ajustado as faces *cd*, *CD*. Logo os angulos diedros *ABCD*, *abcd* se ajustam perfeitamente entre si. E por tanto são eguaes.

226. *Coroll.* Dividindo pois o angulo *IGH* em quaesquer partes eguaes, e tirando planos pela aresta *BC* e por cada uma das divisões; o angulo diedro *ABCD* ficará tambem dividido em outros tantos angulos diedros eguaes entre si. E concluir-se-ha (discurrendo como em o n.º 26), que o angulo *IGH* é para o angulo diedro *ABCD*, como qualquer numero daquellas partes de *IGH* para o mesmo numero destas de *ABCD*.

227. THEOR. *Os angulos diedros estão entre si, como os angulos formados por duas perpendiculares ás suas arestas, tiradas cada uma em sua face.*

Sejam (fig. 114, e 115) os angulos diedros $ABCD$, $abcd$, em que estejam formados os angulos IGH, igh, pelas perpendiculares GI, GH, respectivamente a BC; e gi, gh, respectivamente a bc; cada uma em sua face. Digo que é $ABCD : abcd :: IGH : igh$.

Demonstr. Prova-se por um raciocinio em tudo similhante ao do n.° 28.

228. *Coroll.* Pois os angulos diedros são proporcionaes aos angulos formados por duas perpendiculares ás suas arestas, tiradas cada uma em sua face; segue-se, que podemos representalos por estes; e assim os angulos diedros gosam de todas as propriedades dos angulos rectilineos. Por ex.

1.° Um plano, que cáe sobre outro, forma com este, prolongado si for necessario, dous angulos diedros, cada um de sua parte, que junctos valerão 180°. Si estes angulos são eguaes, isto é, cada um de 90°, dizem-se *rectos*; e o plano incidente, *perpendicular*; &c.

2.° Si um plano for perpendicular a outro, tambem este o será a respeito daquelle.

3.° Por uma recta situada em um plano não se pode tirar dous planos perpendiculares a aquelle outro.

4.° Os angulos diedros verticalmente oppostos são eguaes; &c.

229. THEOR. *Si uma recta perpendicular á inter-*

secção de dous planos perpendiculares entre si for tambem perpendicular a um delles; estará situada no outro. E reciprocamente: si estiver situada em um; será perpendicular ao outro.

Seja (fig. 111) *DE* a intersecção dos dous planos *AB*, *IDE* perpendiculares entre si: e seja *CH* perpendicular ao plano *AB* no ponto *C* da dicta intersecção. Digo que *CH* está situada no plano *IDE*.

Demonstr. Tire-se no plano *AB* a recta *CF* perpendicular a *DE* no ponto *C*: e si não está *CH* no plano *IDE*, nelle esteja *CI* perpendicular a *DE* no ponto *C*. Pois o plano *IDE* é perpendicular ao plano *AB* (hyp.); o angulo *ICF* será recto (228): e por tanto *CI* é perpendicular a *CF*. Mas então *CI*, como perpendicular ás duas *CF*, *DE*, é tambem perpendicular ao plano *AB* (206): logo temos no mesmo ponto *C* duas perpendiculares a este plano: o que é impossivel (207). Logo &c.

Ao mesmo tempo fica demonstrada a reciproca.

230. *Coroll.* 1.° Qualquer plano *IDE* é perpendicular a outro *AB*, quando aquelle passa por uma recta *CH* perpendicular a este. Com effeito não se pode tirar por *DE* um plano perpendicular ao plano *AB*, em que não esteja *CH*.

231. *Coroll.* 2.° A intersecção *IL* (fig. 116) de dous planos *CD*, *EF* perpendiculares a um terceiro *AB*, é perpendicular ao mesmo terceiro. Por que a perpendicular levantada do ponto *L* ao plano *AB* não pode ser outra, sinão a mesma intersecção daquelles dous; visto que deve existir ao mesmo tempo em ambos elles.

Dos planos parallelos.

232. Chamam-se *planos parallelos* aquelles, que nunca se encontram, por mais que se continuem para qualquer parte.

233. Theor. *Si um de dous planos parallelos for perpendicular a uma recta; tambem o outro o será.*

Sejam (fig. 117) os planos parallelos *AB*, *CD*: e 1.° seja o plano *AB* perpendicular á recta *EF*, tirada de um ponto *F* do outro *CD*. Digo que tambem o plano *CD* será perpendicular á recta *EF*.

Demonstr. Si é possivel, não seja. Haverá então no plano *CD* uma recta *FG* obliqua a *EF*. Conduza-se por *EF* e por *FG* o plano *EFG*; o qual encontrará o outro *AB* em uma recta *EH*. Será *EF* perpendicular a *EH*; por ser *EF* perpendicular ao plano *AB* (hyp.). Logo *FG*, *EH* prolongadas no plano *HEFG* concurrerão (73, 3.°): e por tanto tambem hão de concurrer os planos *AB*, *CD*, em que ellas existem (202): o que é contra a hypothese. Logo &c.

2.° Seja agora o plano *AB* perpendicular á recta *EF*, tirada de um ponto *E* do mesmo *AB*. Digo que tambem o plano *CD* será perpendicular á recta *EF* em um ponto *F*, onde esta ha de encontralo.

Demonstra-se discurrendo como no 2.° caso do n.° 69.

234. *Coroll.* Dous planos *AB*, *CD*, perpendiculares á mesma recta *EF*, são parallelos entre si. Por

que o plano, que pelo ponto *F* se tirasse parallelo a *AB*, seria perpendicular a *EF*: e pelo mesmo ponto de uma recta não se pode tirar mais do que um plano perpendicular a esta (213).

235. Theor. *Si duas rectas parallelas se cortarem por dous planos parallelos; as partes interceptas serão eguaes entre si.*

Sejam (fig. 118) as rectas parallelas *EH*, *GF* cortadas pelos planos parallelos *AB*, *CD*. Digo que $EH = GF$.

Demonstr. Tirem-se as rectas *EG*, *HF*, intersecções do plano das parallelas com os dous planos parallelos. Estas intersecções tambem são parallelas entre si; por que, não o sendo, concurreriam em algum ponto. Mas então necessariamente tambem concurreriam os planos, em que ellas estão: o que é contra a hypothese. Logo *EG* é parallela a *HF*. E logo $EH = GF$ (112).

236. *Schol.* 1.° Incidentemente fica demonstrado; que as intersecções de dous planos parallelos com um terceiro são parallelas entre si.

237. *Schol.* 2.° Dous planos parallelos, cortados por terceiro, tem a respeito dos angulos diedros, que fazem com este, as mesmas propriedades, que duas rectas parallelas tem a respeito dos angulos, que fazem com a sua secante (228).

238. Theor. *Si dous angulos, formados cada um em seu plano, tiverem os lados respectivamente parallelos; os dous planos serão parallelos.*

Sejam (fig. 119) os angulos *ABC*, *DEF*, cada um em seu plano: e seja o lado *AB* parallelo a *DE*; e *BC* parallelo a *EF*. Digo que o plano *ABC* é parallelo ao plano *DEF*.

Demonstr. Abaixe-se do ponto *B* a perpendicular *BG* sobre o plano *DEF*. Tirem-se neste plano pelo ponto *G* as rectas *GH*, *GI* parallelas respectivamente a *DE*, e a *EF*. Será *AB* tambem parallela a *GH*; e *BC* a *GI* (220). Mas *BG* é perpendicular ás duas *GH*, *GI*; por ser perpendicular ao plano *DEF* (constr.): logo será tambem perpendicular ás duas *AB*, *BC* (69); e por conseguinte ao plano *ABC*. Logo o plano *ABC* é parallelo ao plano *DEF* (234).

239. Probl. *Por um ponto, dado fóra de um plano, tirar outro plano parallelo ao primeiro.*

Seja (fig. 119) o plano *DEF*; e o ponto *B*.

Soluç. Tirem-se no plano dado duas rectas quaesquer *DE*, *EF*, que façam angulo: e fazendo passar um plano pelos pontos *B*, *D*, *E*, e outro pelos pontos *B*, *E*, *F*; tire-se no plano *BDE* pelo ponto *B* a recta *BA* parallela a *ED*, e no plano *BEF* pelo mesmo ponto *B* a recta *BC* parallela a *EF*. Digo que o plano *ABC* determinado por estas duas rectas *AB*, *BC*, é o pedido (238).

240. Theor. *Si de um mesmo ponto situado fóra de um plano se tirarem rectas para differentes pontos desse plano, e se cortarem por outro plano parallelo ao primeiro; ficarão cortadas proporcionalmente.*

Seja (fig. 120) o plano *GE*: e do ponto *I*, tomado fóra, tirem-se para os pontos *K*, *L*, *M* do mesmo plano as rectas *IK*, *IL*, *IM*; que se cortem nos pontos *k*, *l*, *m* pelo plano *ge* parallelo a *GE*. Digo que é $IK : Ik :: IL : Il :: IM : Im$.

Demonstr. Tirem-se as rectas *kl*, *KL*; *lm*, *LM*; *km*, *KM*; que são as intersecções dos planos parallelos *ge*, *GE*, com cada um dos outros *IKL*, *ILM*, *IKM*. Ora estas são parallelas entre si, a saber: *kl* a *KL*, *lm* a *LM*, *km* a *KM* (236). Logo teremos $IK : Ik :: IL : Il :: IM : Im$ (122).

241. *Schol.* Convem observar, que os triangulos *KLM*, *klm* são similhantes entre si (127); por serem os angulos *KLM*, *LMK* respectivamente eguaes aos angulos *klm*, *lmk* (222). E o mesmo digo de outras quaesquer figuras *ABCDF*, *abcdf*, quando forem mais de tres as rectas conduzidas do ponto *I* para estes planos. Por quanto, tirando dos pontos correspondentes *a*, *A* em cada uma das figuras as diagonaes *ac*, *AC*, *ad*, *AD*, &c., concluir-se-ha a similhança dos triangulos *ABC* e *abc*, *ACD* e *acd*, &c.; e por consequencia a das duas figuras (167).

Dos angulos solidos.

242. E' facil de conceber, que si tres, ou mais planos, concurrendo dous a dous, fizerem tres, ou mais angulos diedros, cujas arestas concorram todas no mesmo ponto; ellas reunirão nesse ponto outros

tantos angulos rectilineos, que terão todos o mesmo vertice, e cada dous contiguos um lado commum.

A esta reunião de tres ou mais angulos rectilineos, concurrentes no mesmo ponto, e existentes cada um em seu plano, se dá o nome de *angulo solido*, ou mais propriamente de *angulo polyedro*. Si é formado por tres angulos rectilineos, isto é, si tem so tres faces, chama-se *angulo triedro*. Si quatro; *angulo tetraedro*: &c.

O ponto do concurso dos angulos rectilineos, que formam um angulo polyedro, tambem se diz *vertice* delle; assim como tambem *arestas* delle as arestas dos angulos diedros, que o torneam.

Nomea-se um angulo polyedro, lendo em primeiro logar a letra, que marca o seu vertice, e depois as que estão em cada uma das suas arestas. Assim (fig. 121) para nomearmos o angulo triedro, cujo vertice é d, diremos o angulo triedro $dabc$.

Seis cousas pois se distinguem em um angulo triedro: *tres angulos rectilineos*, e *tres angulos diedros*.

243. Theor. *Dos tres angulos rectilineos, que formam um angulo triedro, a somma de quaesquer dous é maior do que o terceiro.*

Seja (fig. 121) o angulo triedro $DABC$ formado pelos tres angulos rectilineos ADB, ADC, CDB. Digo que a somma de dous quaesquer, por ex. $ADB+ADC>CDB$.

Demonstr. Quando os tres angulos são eguaes, ou quando, sendo deseguaes, entra na somma dos dous o maior de todos os tres, é evidente que em ambos os casos essa somma é maior do que o terceiro. Seja porém CDB o maior. Tire-se uma recta CB, que corte DC e DB; e faça-se o angulo $CDE=ADC$. Tome-se $AD=DE$; e tirem-se AB, AC. Os triangulos ADC, CDE serão eguaes (102): e logo $AC=EC$. Mas é $AB+AC>BC$; isto é, $AB+AC>BE+EC$: si tirarmos de uma e da outra parte as linhas eguaes AC, EC; ficará $AB>BE$. Mas nos triangulos ABD, EBD é o angulo $ADB>EDB$ (94); por ser DB commum, $DE=DA$ (constr.), e $AB>BE$. Logo a somma dos angulos ADB, CDE será tambem maior do que a dos angulos EDB, CDE; isto é, $ADB+ADC>CDB$; pois que é $CDE=ADC$ (constr.).

244. Theor. *A somma de todos os angulos rectilineos, que formam um angulo polyedro convexo, isto é, em que não ha angulo diedro reintrante, é sempre* $<360°$.

Seja (fig. 122) o angulo polyedro convexo $ABCDE$. Digo que a somma de todos os angulos rectilineos, que o compoem, isto é, $BAE+EAD+DAC+BAC<360°$.

Demonstr. Cortem-se com um plano $BCDE$ todas as arestas do angulo polyedro (*). As secções desse

(*) Tem-se supposto ser sempre possivel dirigir um plano, que corte todas as arestas de qualquer angulo polyedro convexo. Com effeito, quanto a tres, não ha duvida alguma, tomando em cada uma um ponto, e tirando por elles um plano. Mas por ventura prolongado este encontrará sempre a todas as outras arestas?

plano com cada uma das faces formarão o polygono *BCDE*, e farão das mesmas faces outros tantos triangulos. Isto posto; nos angulos triedros, cujos vertices são *B*, *E*, *D*, *C*, será $ABC+ABE>CBE$; $AEB+AED>BED$; $ADE+ADC>EDC$; $ACD+ACB>BCD$ (243): e por conseguinte, sommando todos os angulos, que estão de uma parte, e por ordem aos que pertencem a cada triangulo, teremos $(ABE+AEB)+(AED+ADE)+(ADC+ACD)+(ABC+ACB)>CBE+BED+EDC+BCD$, que é a somma de todos os angulos do polygono. Logo a somma dos supplementos de cada dous desses angulos de cada triangulo, isto é, a somma de todos os angulos rectilineos, que formam o angulo polyedro, é menor do que a somma dos supplementos de todos os angulos do polygono, a qual é 360° (152).

245. *Coroll.* Consequentemente, para que tres angulos rectilineos formem um angulo triedro, é necessario que a somma de quaesquer dous seja maior do que o terceiro; e a somma de todos tres menor do que 360°.

Não certamente: e seria então necessario repetir tentativas. Logo deve-se mostrar a possibilidade desta construcção, e segurar o modo de a fazer.

Imaginem-se prolongadas duas faces quaesquer *EAB*, *DAC*, que estejam separadas por uma intermedia *EAD*, sendo o prolongamento para a parte das arestas *AB*, *AC*. A intersecção das dictas duas faces passará pelo vertice *A*; e ficarão comprehendidas entre ellas todas as outras. Tire-se então um plano, que corte as arestas *AE*, *AD*, e aquella intersecção. Este cortará tambem todas as arestas do angulo polyedro.

246. Theor. *Si em dous angulos triedros forem os tres angulos rectilineos, que formam um, respectivamente eguaes aos tres angulos rectilineos, que formam o outro; os angulos diedros formados pelos planos dos angulos eguaes serão respectivamente eguaes.*

Sejam (fig. 121*) os angulos triedros *DABC*, *dabc*: e sejam os angulos rectilineos do primeiro *ADB*, *ADC*, *CDB* respectivamente eguaes aos angulos rectilineos do segundo *adb*, *adc*, *cdb*. Digo que serão eguaes os angulos diedros *BADC* e *badc*, *ADCB* e *adcb*, *CDBA* e *cdba*.

Demonstr. Façam-se eguaes as rectas *DA*, *DB*, *DC*, *da*, *db*, *dc*: e tirem-se as rectas *AB*, *AC*, *BC*, *ab*, *ac*, *bc*. E' facil reconhecer a egualdade dos triangulos isosceles *ADB* e *adb*, *ADC* e *adc*, *CDB* e *cdb* (102). Logo serão agudos e eguaes os angulos *DAB* e *dab*, *DAC* e *dac*, &c.; e $AB=ab$, $AC=ac$, $BC=bc$: e por tanto o triangulo *ABC* egual ao triangulo *abc* (107). Isto posto; nas arestas communs a dous angulos rectilineos respectivamente eguaes, por ex. *DA*, *da*, tomem-se eguaes as porções *AG*, *ag*; e concebam-se nos pontos *G*, *g* dous planos perpendiculares a essas arestas, a saber: o plano *HGF* á aresta *DA*, o qual necessariamente encontrará as rectas *AB*, *AC*; e o plano *hgf* á aresta *da*, o qual tambem encontrará as rectas *ab*, *ac*. Os triangulos *AGF*, *AGH* serão rectangulos em *G* (206); assim como em *g* os triangulos *agf*, *agh*. Por isso, e por ser $AG=ag$ (constr.), e serem eguaes os angulos *DAB* e *dab*, *DAC* e *dac*; serão eguaes os triangulos AGF e agf, AGH e agh (105): e logo $AF=af$, $GF=gf$, $AH=ah$, $HG=hg$. Mas o angulo BAC é$=bac$, pela egualdade ja mostrada dos triangulos ABC, abc; e temos $AF=af$, e $AH=ah$; os triangulos AFH, afh serão eguaes (102); e por conseguinte $HF=hf$. Mas tambem se acabou de demonstrar ser $GF=gf$, e $HG=hg$: logo os triangulos FGH, fgh são eguaes entre si (107); e por tanto eguaes os angulos HGF, hgf, que medem os angulos diedros $BADC$, $badc$ (225). Logo estes são eguaes.

Do mesmo modo se mostrará a egualdade respectiva dos outros (*).

247. THEOR. *Dous angulos triedros são eguaes, quando os tres angulos rectilineos, que formam um, são respectivamente eguaes aos tres angulos rectilineos, que formam o outro, e similhantemente dispostos.*

Sejam (fig. 121) os angulos triedros $DABC$, $dabc$: e sejam os angulos rectilineos do primeiro ADB, ADC, CDB respectivamente eguaes aos angulos re-

---

(*) Esta proposição foi inserida nos Elementos de Geometria de Euclides por Roberto Simson para encher um vazio, que se achava no Livro 11 dos dictos Elementos: e é a Proposição *A*. Com tudo a demonstração, que elle ahi dá, suppõe que o plano tirado perpendicularmente a uma das arestas do angulo triedro encontra sempre as outras duas: o que pode deixar de acontecer—Não sabemos que alguem até ao presente fizesse este reparo: pelo contrario bons Authores copiaram a Simson. Por tanto julgamos conveniente advertilo, dando á mesma demonstração a generalidade que exige.

ctilineos do segundo *adb*, *adc*, *cdb*, e similhantemente dispostos. Digo que o angulo triedro *DABC* é = angulo triedro *dabc*.

Demonstr. Applicado o ponto *d* ao ponto *D*, e a aresta *da* sobre a aresta *DA*, imagine-se a face *adc* posta sobre a face *ADC*. Cairá a aresta *dc* sobre a aresta *DC*, por ser o angulo rectilineo *adc*=angulo rectilineo *ADC* (hyp.); a face *cdb* sobre a face *CDB*, por ser o angulo diedro *adcb*=angulo diedro *ADCB* (246); e a aresta *db* sobre a aresta *DB*, por ser o angulo rectilineo *cdb*=angulo rectilineo *CDB* (hyp.). Logo a face *adb* confundir-se-ha com a face *ADB*: e por conseguinte os angulos triedros *DABC*, *dabc* ajustar-se-hão perfeitamente entre si. Logo &c.

QUARTA SECÇÃO

Dos Corpos.

248. Antes de passarmos a tractar dos Corpos convem lembrar, o que dissemos logo no principio destes Elementos (1).

Consideraremos os corpos que são terminados por superficies planas, os quaes chamam-se *corpos polye-*

dros, ou *polyedros* simplesmente: e entre os terminados por superficies curvas, unicamente tractaremos dos que tem o nome de *pyramide conica*, de *cylindro*, e de *sphera*.

Dizem-se faces de um polyedro os planos, que o terminam: e menos de quatro não podem fechar volume.

249. *Polyedros similhantes* são os que tem egual numero de faces respectivamente similhantes e adjacentes a angulos polyedros respectivamente eguaes.

As faces adjacentes aos angulos polyedros eguaes dizem-se *homologas*; assim como tambem estes se dizem *homologos*.

250. Tem o nome de *pyramide* o polyedro, em que uma das faces é qualquer polygono, e todas as mais são triangulos, que tem por bases os lados desse polygono, e todos o mesmo vertice. Este se diz tambem *vertice* da pyramide: e aquelle polygono *base*.

A perpendicular tirada do vertice sobre o plano da base é a *altura* da pyramide.

As pyramides tomam differentes nomes conforme a figura das suas bases. Si é triangulo; chama-se *pyramide triangular*, ou *tetraedro* simplesmente. Fig. 121. Si quadrilatero; *pyramide quadrangular*. Fig. 122. &c. E si a base é polygono regular, e a altura da pyramide cáe no centro desse polygono, diz-se que a pyramide é *regular*. Fig. 123.

251. Theor. *Em qualquer pyramide regular as faces, que terminam no vertice, são todas triangulos isosceles, e eguaes.*

Seja (fig. 123) a pyramide regular *ABCDE*, cujo vertice é *A*. Digo que as faces *BAC*, *CAD*, &c. são triangulos isosceles, e eguaes.

Demonstr. Por ser regular a pyramide (hyp.), a perpendicular tirada do vertice sobre a base cairá no centro desta. Logo são eguaes as arestas *AB*, *AC*, *AD*, &c. (210). Mas tambem são eguaes os lados da mesma base, *BC*, *CD*, *DE*, &c. Logo os triangulos *BAC*, *CAD*, &c. são isosceles (82), e eguaes (107).

252. *Coroll.* São pois eguaes entre si as perpendiculares, como *AP*, tiradas do vertice da pyramide regular sobre os lados da base. (E chamam-se *apothemas* da pyramide).

253. Theor. *Toda a secção feita em qualquer pyramide por um plano parallelo á base, é uma figura similhante á da dicta base.*

Demonstr. Consta do n.º 241.

A porção da pyramide, comprehendida entre aquella secção e a base, chama-se *tronco* da pyramide, ou *pyramide truncada*: a mesma secção tambem se diz *base*: e é facil ver, que todas as mais faces são trapezios; e estes eguaes, si o tronco é de pyramide regular.

254. O polyedro, em que duas faces, que se chamam *bases*, são dous polygonos eguaes e parallelos, e todas as mais faces são parallelogrammos, tem indistinctamente o nome de *prisma*. Fig. 124, 125, 126, 127.

A sua *altura* é a perpendicular tirada de uma das bases sobre o plano da outra base.

As rectas, como *AB* (fig. 124), que são os encontros de dous parallelogrammos contiguos, chamam-se *arestas* do prisma.

O prisma é *recto*, quando a aresta é perpendicular á base: e por conseguinte egual á altura (219, 235). Fig. 125: E *obliquo*, no caso contrario. Fig. 124.

Tomam tambem os prismas differentes nomes conforme a figura das suas bases. Si é triangulo; chama-se *prisma triangular*. Fig. 124. Si quadrilatero; *prisma quadrangular*. Fig. 127. &c.

Entre os prismas quadrangulares se distingue o *parallelipipedo*. Chama-se assim o prisma, que tem por base um parallelogrammo.

Tambem entre estes se distingue o *parallelipipedo rectangulo*, e o *cubo*. Chama-se

Parallelipipedo rectangulo aquelle, cujas bases e faces são todas rectangulos. Fig. 125.

Cubo o parallelipipedo, cujas bases e faces são todas quadrados. Fig. 126.

255. Theor. *Toda a secção feita em qualquer prisma por um plano parallelo á base, é uma figura egual á da dicta base.*

Seja (fig. 124) o prisma *ABDF*, cortado pelo plano *bdf* parallelo á base. Digo que a figura *bdf* é egual á figura *BDF*.

Demonstr. Por serem parallelas as secções dos planos parallelogrammos *AD*, *DE*, &c. com os planos parallelos *bdf*, *BDF* (236), serão eguaes *bd* a *BD*, *df* a *DF*, &c. (112), e eguaes os angulos *bdf* e *BDF*, &c. (222). Logo as figuras *bdf*, *BDF* podem ajustar-se entre si perfeitamente. E por tanto são eguaes.

256. O corpo terminado por um circulo, e por uma superficie, na qual todas as rectas tiradas da circumferencia do circulo concorrem no mesmo ponto, chama-se *pyramide conica*. Fig. 128, e 129. O ponto diz-se *vertice*; as rectas *lados*; e o circulo *base*. A perpendicular tirada do vertice sobre o plano da base, chama-se *altura*; e a recta que passa pelo vertice e pelo centro da base, *eixo*.

A pyramide conica é *recta*, quando o eixo é perpendicular á base. Fig. 128. E *obliqua*, no caso contrario. Fig. 129.

A pyramide conica recta pode considerar-se gerada pela revolução inteira de um triangulo rectangulo *ABC* (fig. 128) ao redor de um dos lados do angulo recto *AC*, que se suppõe immovel.

257. *Pyramides conicas similhantes* são as que tem eixos proporcionaes aos diametros das bases, e egualmente inclinados a estas.

258. Theor. *Toda a secção feita em qualquer pyramide conica por um plano parallelo á base, é circulo.*

Seja (fig. 129) a pyramide conica *ABDE*. Digo que a secção feita pelo plano *bde* parallelo á base, é circulo.

Demonstr. Imagine-se o eixo *AC*; e tomem-se no contorno da secção quaesquer pontos b, e, d, &c. Tirem-se por elles e pelo vertice A as rectas AB, AE, AD, &c.; e os raios CB, CE, CD, &c.; e as rectas cb, ce, cd, &c. Será $AB : Ab :: AC : Ac :: CB : cb :: AE : Ae :: CE : Ce :: AD : Ad :: CD : cd ::$ &c. (240, 129): e logo $CB : cb :: CE : ce :: CD : cd ::$ &c. Mas é $CB = CE = CD =$ &c. Logo tambem $cb = ce = cd =$ &c. O que mostra que a dicta secção é circulo (18).

A porção da pyramide conica comprehendida entre aquella secção e a base, tem o nome de *tronco*, ou de *pyramide conica truncada*.

259. O corpo terminado por dous circulos eguaes e parallelos e por uma superficie, na qual todas as rectas tiradas da circumferencia de um dos circulos para a do outro são parallelas entre si, chama-se *cylindro*. Fig. 130, e 131. As rectas dizem-se *lados*; e os circulos *bases*.

A perpendicular tirada de uma das bases sobre o plano da outra base, chama-se *altura*: e a recta que passa pelos centros das bases, *eixo*.

O cylindro é *recto*, quando o eixo é perpendicular á base. Fig. 130. E *obliquo*, no caso contrario. Fig. 131.

O cylindro recto pode considerar-se gerado pela revolução inteira de um rectangulo $ABC'C$ (fig. 130) ao redor de um dos lados CC', que se suppõe immovel.

260. *Cylindros similhantes* são os que tem eixos proporcionaes aos diametros das bases, e egualmente inclinados a estas.

261. O corpo terminado por uma unica superficie,

a qual tem todos os seus pontos equidistantes de outro ponto, chama-se *sphera*.

Esse ponto se diz *centro*. As rectas tiradas delle para a superficie, *raios*. E a que passa pelo centro, e termina de uma e outra parte na superficie, *diametro*.

Tambem a sphera pode considerar-se gerada pela revolução inteira de um semi-circulo *CADB* (fig. 132) ao redor do diametro *AB*, que se suppõe immovel. Este diametro chama-se *eixo*.

262. Theor. *Toda a secção feita em qualquer sphera por um plano, é circulo: e o maximo é o formado pelo plano, que passa pelo centro da sphera.*

Demonstr. Com effeito os raios, que vão a todos os pontos do contorno da secção, desviam-se egualmente da perpendicular tirada do centro da sphera sobre o plano da mesma secção (209). Logo esta perpendicular cae em um ponto equidistante de todos os pontos do dicto contorno. Logo é circulo (18).

A segunda parte é evidente.

263. A porção da sphera, que é cortada por um plano, chama-se *segmento spherico*. O circulo, que resulta da secção desse plano (262), diz-se *base*: e a parte do diametro, que termina no centro da base e na superficie convexa do segmento, *altura*.

O segmento spherico pode considerar-se gerado pela revolução inteira do semi-segmento de circulo *DAF* (fig. 132) ao redor da porção *AF* do diametro *AB*, que se suppõe immovel.

A superficie, que um arco *AD* descreve neste movimento, tem o nome de *zona*.

264. *Sector spherico* é a porção da sphera, terminada pela superficie convexa de um segmento spherico, e pela da pyramide conica recta, que tem o vertice no centro da sphera, e por base a do segmento.

O sector spherico pode considerar-se gerado pela revolução inteira de um sector de circulo *CAD* (fig. 132) ao redor do raio *CA*, que se suppõe immovel.

265. Theor. *O plano, que toca a superficie de uma sphera, e não a corta, prolongado que seja, so a toca em um ponto.* (E diz-se *plano tangente*).

Demonstr. Si é possivel, toque um plano em dous pontos a superficie de uma sphera, sem que a corte, prolongado que seja. Imaginem-se raios tirados a esses dous pontos. Qualquer delles será maior do que a perpendicular abaixada do centro da sphera sobre o dicto plano (211). Logo este terá um ponto dentro da sphera; e por conseguinte a cortará: o que é contra a hypothese. Logo &c.

266. *Coroll.* A menor recta, que do centro de uma sphera se pode tirar para um plano tangente, é o raio que vae ao ponto do contacto. Por conseguinte o dicto plano será perpendicular a esse raio (211): e por isso o unico tangente nesse ponto (213).

267. Probl. *Dada uma sphera, achar ó seu diametro.*

Seja (fig. 133) a sphera *ABDEF*.

Soluç. Tome-se nella qualquer ponto *A*; e por meio de um compasso curvo, fazendo centro em *A*, descreva-se com qualquer abertura *AD* o circulo menor *DFEG*. Na circumferencia deste marque-se qualquer ponto *D*, e com intervallos eguaes para uma e outra parte os pontos *F*, *G*. Com as cordas *DF*, *DG*, *FG*, tomadas entre as pontas do compasso, construa-se á parte o triangulo isosceles *FDG*, de cujo vertice *D* se abaixe sobre a base *FG* a perpendicular indefinida *DE*: e de um dos pontos *F* ou *G*, por ex. *F*, levante-se sobre *DF* a perpendicular *FE*. Será DE=diametro do circulo menor, que temos descripto (98). Com *DE*, e as cordas *AD*, *AE* eguaes, construa-se outro triangulo isosceles $A'D'E'$. De A' abaixe-se sobre a base $D'E'$ a perpendicular indefinida $A'B'$; e de D' sobre $A'D'$ levante-se a perpendicular $D'B'$. Digo que $A'B'$ é = diametro da sphera dada.

Dos casos de egualdade dos tetraedros.

268. Theor. *Dous tetraedros são eguaes, quando tem duas faces respectivamente eguaes, e similhantemente dispostas, e egual o angulo diedro formado por essas duas faces.*

Sejam (fig. 121) os tetraedros *DABC*, *dabc*: e sejam eguaes as faces *ADB* e *adb*; *ADC* e *adc*; e similhantemente dispostas; e o angulo diedro *CDAB* =angulo diedro *cdab*. Digo que o tetraedro *DABC* é egual ao tetraedro *dabc*.

Demonstr. Applique-se o ponto *d* da aresta *ad* sobre o ponto *D* da aresta *AD*; e como os angulos diedros *cdab*, *CDAB* são eguaes (hyp.), ajuste-se um com o outro. As faces *adb* e *ADB*, *adc* e *ADC*, coincidirão por conseguinte, e pois são eguaes (hyp.), se ajustarão tambem entre si: e por tanto o ponto *a* cairá em *A*; o ponto *b* em *B*; e o ponto *c* em *C*. Logo a face *abc* tambem se ajustará com a face *ABC*; e a face *cdb* com a face *CDB*; e os tetraedros se confundirão. Logo elles são eguaes.

269. Theor. *Dous tetraedros são eguaes, quando tem uma face egual, adjacente a angulos diedros respectivamente eguaes, e similhantemente dispostos.*

Sejam (fig. 121) os tetraedros *DABC*, *dabc*: e seja a face *ADB* egual á face *adb*; e eguaes os angulos diedros *CDAB* e *cdab*; *CDBA* e *cdba*; *CBAD* e *cbad*; e similhantemente dispostos. Digo que o tetraedro *DABC* é egual ao tetraedro *dabc*.

Demonstr. Ponha-se a face *adb* sobre a face *ADB*: e como são eguaes (hyp.), ajuste-se uma com a outra. Pela egualdade dos angulos diedros cujas arestas são *ad*, *AD* (hyp.), a face *cda* assentará sobre o plano da face *CDA*; e por conseguinte o ponto *c* se achará neste plano. Da mesma sorte por serem eguaes os angulos diedros, cujas arestas são *db*, *DB* (hyp.), a face *cdb* assentará sobre o plano da face *CDB*; e o ponto *c* por conseguinte se achará neste plano. Finalmente pela egualdade dos angulos diedros cujas arestas são *ab*, *AB* (hyp.), a face *abc* assentará sobre o plano da face *ABC*; e por conseguinte o ponto *c* se achará tambem neste plano. Logo elle, devendo estar tanto no plano da face *CDA*, como no da face *CDB*, como no da face *ABC*, ha de necessariamente coincidir com o ponto *C* da intersecção: e por tanto todas as faces do tetraedro *dabc* se ajustarão exactamente com todas as faces do tetraedro *DABC*, e os tetraedros se confundirão. Logo elles são eguaes.

270. Theor. *Dous tetraedros são eguaes, quando tem tres faces respectivamente eguaes, e similhantemente dispostas.*

Sejam (fig. 121) os tetraedros *DABC*, *dabc*: e sejam eguaes as faces *ADB* e *adb*; *ADC* e *adc*; *CDB* e *cdb*; e similhantemente dispostas. Digo que o tetraedro *DABC* é egual ao tetraedro *dabc*.

Demonstr. Os angulos triedros *D*, *d* são formados por angulos rectilineos respectivamente eguaes e similhantemente dispostos, por serem as faces de um respectivamente eguaes ás faces do outro e similhantemente dispostas (hyp.). Logo o angulo triedro *D* é egual ao angulo triedro *d* (247). Ajuste-se pois um com o outro, pondo, por ex., o segundo sobre o primeiro. O ponto *a* cairá em *A*; o ponto *b* em *B*; e o ponto *c* em *C*. Logo tambem a face *abc* se ajustará com a face *ABC*, e os tetraedros se confundirão. Logo elles são eguaes.

271. Theor. *Dous prismas, ou duas pyramides, são eguaes, quando tem tres faces de um angulo triedro respectivamente eguaes, e similhantemente dispostas.*

Sejam (fig. 134) os prismas *AH*, *ah*: e sejam as tres faces *AL*, *EI*, *ABCDE*, que formam o angulo triedro *E*, respectivamente eguaes ás tres faces *al*, *ei*, *abcde*, que formam o angulo triedro *e*; e similhantemente dispostas. Digo, que o prisma *AH* é egual ao prisma *ah*.

Demonstr. Os angulos triedros *E*, *e*, são eguaes (247). Por conseguinte pondo um sobre o outro, as faces eguaes *AL* e *al*, *EI* e *ei*, *ABCDE* e *abcde* se ajustarão perfeitamente entre si: e logo a aresta *DI* cairá inteiramente sobre *di*, e *DC* sobre *dc*. Mas então os angulos *IDC*, *idc* tambem se ajustam entre si: logo $IDC=idc$. Mas as arestas *DI*, *DC* com o angulo *IDC* determinam o parallelogrammo *DH*, e as arestas *di*, *dc* com o angulo *idc* o parallelogrammo *dh*, como faces lateraes que são de prismas: logo estes parallelogrammos tambem se hão de ajustar entre si. Do mesmo modo se mostrará que todos os outros parallelogrammos do prisma *AH* se ajustarão com os do prisma *ah*; e conseguintemente o polygono *FGHIL* com o polygono *fghil*. Logo &c.

Quanto ás pyramides, demonstra-se do mesmo modo.

Dos casos de similhança dos tetraedros.

272. Theor. *Dous tetraedros são similhantes, quando tem duas faces respectivamente similhantes, e similhantemente dispostas; e egual o angulo diedro formado por essas duas faces.*

Sejam (fig. 135) os tetraedros *DABC*, *dabc*: e sejam similhantes as faces *ADB* e *adb*; *ADC* e *adc*; e similhantemente dispostas; e o angulo diedro *CDAB* = angulo diedro *cdab*. Digo que o tetraedro *DABC* é similhante ao tetraedro *dabc*.

Demonstr. Tome-se na aresta *DA* homologa a *da* a parte *Da*=*da*: e pelo ponto *a* da primeira conduzindo um plano parallelo á base *ABC* (239), corte-se o tetraedro *Dabc*, que será similhante ao total *DABC* (249). Por ser *Da*=*da* (constr.), e os angulos *aDb*=*adb*, e *Dab*=*dab*, pela similhança das faces (hyp.), os triangulos *aDb*, *adb* são eguaes entre si (105): e do mesmo modo se demonstra a egualdade dos outros dous *aDc*, *adc*. Mas o angulo diedro *CDAB* é = angulo diedro *cdab* (hyp.): logo os tetraedros *Dabc*, *dabc* são eguaes (268): e por conseguinte o total *DABC*, similhante a *Dabc*, é tambem similhante a *dabc*.

273. Theor. *Dous tetraedros são similhantes, quando tem uma face similhante, adjacente a angulos diedros respectivamente eguaes, e similhantemente dispostos.*

Sejam (fig. 135) os tetraedros *DABC*, *dabc*: e seja a face *ADB* similhante á face *adb*; e eguaes os angulos diedros *CDAB* e *cdab*; *CDBA* e *cdba*; *CBAD* e *cbad*; e similhantemente dispostos. Digo que o tetraedro *DABC* é similhante ao tetraedro *dabc*.

Demonstr. Corte-se, como na demonstração precedente, o tetraedro *Dabc* similhante ao total *DABC*. Concluir-se-ha do mesmo modo ser o triangulo *aDb* egual ao triangulo *adb*. Ora estes dous triangulos estão adjacentes a angulos diedros respectivamente eguaes, e similhantemente dispostos. Logo os tetraedros *Dabc*, *dabc* são eguaes (269): e por conseguinte o total *DABC*, similhante a *Dabc*, é tambem similhante a *dabc*.

274. Theor. *Dous tetraedros são similhantes, quando tem tres faces respectivamente similhantes, e similhantemente dispostas.*

Sejam (fig. 135) os tetraedros *DABC*, *dabc*: e sejam similhantes as faces *ADB* e *adb*; *ADC* e *adc*; *CDB* e *cdb*; e similhantemente dispostas. Digo que o tetraedro *DABC* é similhante ao tetraedro *dabc*.

Demonstr. Observando ainda a mesma construcção, e demonstrando-se da mesma maneira a egualdade das faces *aDb* e *adb*; *aDc* e *adc*; *cDb* e *cdb*; os tetraedros *Dabc*, *dabc* são eguaes (270): e por conseguinte o total *DABC*, similhante a *Dabc*, é tambem similhante a *dabc*.

275. Theor. *Si dous polyedros forem similhantes; dividir-se-hão em egual numero de tetraedros respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos.*

Sejam (fig. 136) os polyedros similhantes *ABCDEFGHI*, *abcdefghi*; e as faces homologas *AG* e *ag*, *GC* e *gc*, *CDH* e *cdh*, *EH* e *eh*, *EF* e *ef*, *ABCDE* e *abcde*, *FGHI* e *fghi*. Digo que os dous polyedros se dividirão em egual numero de tetraedros respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos.

Demonstr. Dividam-se quaesquer duas faces homologas *ABCDE*, *abcde*, em egual numero de triangulos respectivamente similhantes, a saber: *ABE* e *abe*, *BEC* e *bec*, *CED* e *ced*. Tirem-se dos vertices de dous angulos polyedros homologos *F*, *f* as rectas *FB*, *fb*, *FE*, *fe*, para os extremos correspondentes das linhas homologas *BE*, *be*. Os planos *FBE*, *fbe* separarão dous tetraedros *FABE*, *fabe* similhantes entre si (274); por serem as faces *FAB*, *FAE*, *BAE* respectivamente similhantes ás faces *fab*, *fae*, *bae*, e similhantemente dispostas. Isto posto; mostremos, que separados os dous tetraedros, são ainda similhantes os polyedros residuos. Com effeito, por serem similhantes os tetraedros, serão similhantes as secções *FBE*, *fbe*, e similhantemente dispostas: e serão eguaes os angulos triedros homologos em *F* e *f*, em *E* e *e*, em *B* e *b*. Ora tambem pela similhança dos polyedros totaes são eguaes os angulos polyedros homologos em *F* e *f*, em *E* e *e*, em *B* e *b*: logo tirados destes angulos aquelles dos tetraedros, serão eguaes os residuos em *F* e *f*, em *E* e *e*, em *B* e *b*. Mas todas as outras faces, e angulos polyedros dos polyedros residuos são em tudo como pertencentes tambem aos polyedros totaes. Logo os polyedros residuos são similhantes (249). E pois nestes se pode separar do mesmo modo outros dous tetraedros similhantes, e assim nos seguintes: logo &c.

276. *Schol.* Convem observar nos polyedros similhantes:

1.° Que os vertices dos angulos polyedros homologos são pontos similhantemente dispostos nos dictos polyedros. Por que, por ex., da similhança dos triangulos *FAB*, *fab*, se segue, que os pontos *F*, *A*, *B*, *f*, *a*, *b* estão similhantemente dispostos nos planos, em que estão situados: e como estes mesmos planos estão similhantemente dispostos nos dictos polyedros, e egualmente inclinados uns a respeito dos outros; tambem os dictos pontos *F*, *A*, *B*, *f*, *a*, *b* estarão similhantemente dispostos nos mesmos polyedros.

2.° Que as arestas homologas, as diagonaes homologas das faces similhantes, e as interiores dos dictos polyedros, isto é, as que são tiradas de vertices de angulos polyedros homologos para vertices de angulos polyedros homologos, como tambem as perpendiculares abaixadas de pontos homologos sobre faces homologas, por ex. *HL*, *hl*, são linhas proporcionaes entre si. Com effeito por serem respectivamente similhantes, e similhantemente dispostas as faces dos polyedros similhantes, e estas se dividirem em triangulos tambem respectivamente similhantes; será $AF : af :: FB : fb :: BE : be :: BC : bc :: CH : ch :: HL : hl ::$ &c.

Dos polyedros inscriptos, e circumscriptos aos cylindros, ás pyramides conicas, e á sphera.

277. Inscrevendo em cada uma das bases de um cylindro, ou circumscrevendo-lhes, um polygono regular do mesmo numero de lados, os quaes sejam respectivamente parallelos; e depois tirando rectas dos vertices dos angulos do polygono superior para os vertices dos angulos correspondentes do polygono inferior; ficará inscripto no cylindro, ou circumscripto, um prisma; como é facil ver.

278. Inscrevendo na base de uma pyramide conica, ou circumscrevendo-lhe, um polygono regular; e depois tirando rectas do vertice della para os vertices dos angulos do polygono; ficará inscripta na pyramide conica, ou circumscripta, uma pyramide; a qual será regular, si a pyramide conica for recta.

N. B. Os apothemas das pyramides regulares circumscriptas ás pyramides conicas rectas são lados das mesmas pyramides conicas rectas.

279. Inscrevendo no circulo maximo de uma sphera, ou circumscrevendo-lhe, um polygono regular de numero de lados multiplice de 4; e fazendo depois o semi-polygono uma revolução inteira ao redor do seu diametro, considerado immovel; ficará inscripto na sphera, ou circumscripto, um corpo composto de tantas pyramides conicas rectas, quantos forem os lados do semi-polygono, a saber: a primeira e a ultima inteiras, e as mais truncadas. Então, si em cada uma das do inscripto se inscreverem,

e a cada uma das do circumscripto se circumscreverem pyramides regulares do mesmo numero de faces, cujos lados das bases sejam respectivamente parallelos, resultará um polyedro inscripto na sphera, ou circumscripto, composto tambem de outras tantas pyramides regulares; a primeira e a ultima inteiras, e as mais truncadas. Fig. 144.

N. B. Convem observar, que essas faces são triangulos, e trapezios, os quaes no polyedro circumscripto tem por altura um lado do polygono circum-voluto.

280. Theor. *A somma das áreas de quaesquer duas faces lateraes de um prisma triangular é maior do que a da terceira.*

Seja (fig. 137) o prisma triangular $ADEB$. Digo que a somma das áreas de quaesquer duas faces lateraes, por ex. $AD+DE>AF$.

Demonstr. Por qualquer ponto b de uma aresta AB conduza-se o plano bdf perpendicular a AB (216). Este será tambem perpendicular ás arestas CD, EF, como parallelas a AB (218). Ora a secção bd deste plano com o plano AD é a altura do parallelogrammo AD; por ser bd perpendicular a AB: e do mesmo modo se mostra ser df a altura do parallelogrammo DE, e bf a do parallelogrammo AF. Logo teremos a somma das áreas $AD+DE=AB\times bd+DC\times df$ (182) $=AB\times(bd+df)$; por ser $AB=DC$: e será a área de $AF=AB\times bf$. Mas é $bd+df>bf$: logo tambem $AB\times(bd+df)>AB\times bf$. Logo &c.

281. *Coroll.* Segue-se pois: que á medida que se duplica o numero dos lados das bases de um prisma inscripto em um cylindro, se augmentam as áreas dos novos prismas, que se forem inscrevendo sobre esses lados: entretanto que duplicando o numero dos lados das bases do prisma circumscripto, as áreas dos circumscriptos, que resultarem, vão diminuindo.

282. THEOR. *A superficie convexa do cylindro é sempre maior do que a do prisma inscripto, e menor do que a do circumscripto.*

Seja (fig. 138) o cylindro, que tem por base o circulo ABC: e o prisma inscripto, o que tem por base o polygono, de que é lado AB. Denote C a superficie convexa do cylindro, e P a do prisma. Digo que $C > P$.

Demonstr. Si não é $C > P$; será $C <$ ou $= P$. Seja $C < P$; e marque δ a differença. Será $C + \delta = P$. Duplique-se o numero dos lados da base do prisma, até resultar outro polygono AaB &c., cujos lados formem com a circumferencia da base do cylindro segmentos taes, que a somma das áreas destes, que represento por s, isto é, a differença entre a área do circulo e a desse polygono, seja $< \frac{1}{2} \delta$ (199). Inscreva-se sobre o dicto polygono outro prisma; e denote P' a sua superficie lateral. A porção da superficie convexa do cylindro, terminada nas linhas DA, da, e accrescentada dos segmentos Aa, Dd, será maior do que a do parallelogrammo Ad, face do prisma P' (14): e assim das outras. Por conseguinte toda a superficie convexa do cylindro, accrescentada desses segmentos em ambas as bases, será tambem maior do que a do mesmo prisma P'; isto é, $C+2s>P'$. Ora $P'>P$ (281), e supposemos $C+\delta=P$: logo com maior razão $C+2s>C+\delta$; isto é, $s>\frac{1}{2}\delta$: o que não pode ser, pois se fez $s<\frac{1}{2}\delta$. Logo C não $<P$; nem tam pouco $=P$; por que então, por ser $P'>P$, seria $C<P'$: o que não tem logar, como acabamos de ver. Logo $C>P$.

Seja agora o prisma circumscripto ao cylindro; e represente-se este (fig. 104*) pelo circulo da sua base $CDGD$; e aquelle pelo polygono, de que é meio lado DF. Denote tambem C a superficie convexa do cylindro, e P a do prisma. Digo que $C<P$.

Demonstr. Si não é $C<P$; será $C>$ou$=P$. Seja $C>P$; e marque δ a differença. Será $C=P+\delta$. Duplique-se o numero dos lados da base do prisma, até resultar outro polygono, cujos meios lados contiguos, por ex. DH, GH, formem com a circumferencia da base do cylindro os mixtilineos, como $DHGoD$, taes que a somma das áreas destes, que represento por s, isto é, a differença entre a área desse polygono e a do circulo, seja $<\frac{1}{2}\delta$. Circumscreva-se sobre o dicto polygono outro prisma, e denote P' a sua superficie lateral. A superficie das duas meias faces contiguas deste prisma, que represento pelos seus meios lados DH, GH, accrescentada do triangulo DGH em cada uma das bases, o qual se compõe do mixtilineo *DHGoD*, e do segmento *DoGD*, será maior do que a porção da superficie do cylindro, que represento pelo arco *DoG*, comprehendida entre essas meias faces, accrescentada do mesmo segmento *DoGD* em ambas as bases (14); isto é, $DH+GH+2\,DHGoD+2\,DoGD>DoG+2\,DoGD$; donde, tirando de uma e outra parte $2\,DoGD$, resulta $DH+GH+2\,DHGoD>DoG$; e por conseguinte $P'+2s>C$. Mas é $P>P'$ (281); e supposemos $C=P+\delta$: logo com maior razão $P+2s>P+\delta$; isto é, $s>\frac{1}{2}\delta$: o que não pode ser, pois se fez $s<\frac{1}{2}\delta$. Logo C não $>P$: nem tam pouco $=P$; por que então, por ser $P'<P$, seria $C>P'$: o que não tem logar, como acabamos de ver. Logo $C<P$.

283. Theor. *A superficie convexa da pyramide conica é sempre maior do que a da pyramide inscripta, e menor do que a da circumscripta.*

Seja (fig. 139) a pyramide conica, que tem por base o circulo *BCD*; e a pyramide inscripta, a que tem por base o polygono, de que é lado *BD*. Denote C a superficie convexa da pyramide conica, e P a da inscripta. Digo que $C>P$.

A demonstração, tanto da inscripta, como da circumscripta, é a mesma que a do Theorema precedente, e ainda mais simples, por não se considerar mais do que uma base.

284. Theor. *A superficie da sphera é sempre maior do que a do polyedro inscripto, e menor do*

que a do circumscripto. O mesmo digo do segmento spherico a respeito do segmento polyedral, que lhe corresponde.

Demonstr. Quanto á sphera; é manifesto, que tirando um plano pelos pontos, em que uma das pyramides conicas do corpo de revolução inscripto ou circumscripto (279) toca a sphera, terminarão de uma e outra parte na circumferencia da secção duas superficies, das quaes a exterior é maior do que a interior (14); e por conseguinte a somma das primeiras maior do que a somma das segundas; isto é, a superficie spherica maior do que a conica inscripta, e menor do que a circumscripta. Ora attendendo á formação do polyedro, não é menos evidente, que passando um plano pelos lados do polygono circum-voluto, terminam nelles, de uma e outra parte, duas superficies, uma pertencente ao polyedro, e a outra ao corpo conico. Logo do mesmo modo se concluirá, que a superficie do polyedro é maior do que a conica inscripta, e menor do que a circumscripta; e por tanto muito maior do que a da sphera inscripta, e menor do que a da circumscripta.

Quanto ao segmento spherico; tome-se outro em tudo egual; e unindo-os pelas bases, discorra-se da mesma forma.

285. Probl. *Dadas duas spheras concentricas, circumscrever á menor um polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da maior.*

Sejam (fig. 140) as spheras concentricas representadas pelas circumferencias dos seus circulos maximos C, c, ambos no mesmo plano.

Soluç. Circumscreva-se ao circulo c um polygono regular de numero de lados multiplice de 4, os quaes não encontrem a circumferencia C (164). Gyre o semi-polygono ao redor do seu diametro, considerado immovel. Ficará circumscripto á sphera c o corpo composto de pyramides conicas rectas, que dissemos em o n.º 279. A estas circumscrevamse pyramides regulares, cujas bases tenham todas o mesmo numero de lados respectivamente parallelos, e não encontrem as circumferencias dos circulos, que os planos das dictas bases prolongados traçam na superficie da sphera C (262). Ficará circumscripto o polyedro pedido.

Do modo de comparar, e avaliar a área dos corpos.

286. Theor. *As áreas de dous polyedros similhantes estão entre si, como os quadrados de suas arestas, ou linhas homologas.*

Demonstr. As áreas dos polyedros similhantes compoem-se de egual numero de polygonos respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos (249). Logo a área de cada polygono do 1.º polyedro será para área do polygono correspondente no 2.°, como o quadrado de um lado daquelle para o quadrado do homologo deste (185). Mas tendo todos os lados homologos, isto é, as arestas, e linhas homologas dos dous polyedros a mesma razão entre si (276, 2.°), tambem devem ter a mesma razão os seus quadrados: logo a área de cada polygono do 1.° polyedro será para a área do seu correspondente no 2.°, como o quadrado de qualquer aresta ou linha do 1.° polyedro para o quadrado da linha homologa do 2.°. Por consequencia a somma das áreas de todos os polygonos do 1.° polyedro, isto é, a sua área, será para a somma das áreas de todos os polygonos do 2.° polyedro, isto é, a sua área, como o quadrado de qualquer aresta ou linha do 1.° para o quadrado da linha homologa do 2.°.

287. *Schol.* Vê-se por tanto: que nos polyedros similhantes basta comparar os quadrados de quaesquer arestas, ou linhas homologas para saber-se a relação que há entre as suas áreas. Porém geralmente em quaesquer corpos é necessario primeiramente avaliar a área de cada um, e depois comparar esses valores, referidos á mesma medida. Ora ainda que na segunda Secção fica dicto o modo de avaliar as áreas das figuras planas, e em geral é esse o meio de avaliar a área de qualquer polyedro, calculando separadamente a de cada uma das figuras planas, que o terminam, e depois sommando todos esses resultados; comtudo não é elle o mais expedito em alguns casos, nem applicavel aos corpos terminados por superficies curvas. Temos methodos

mais promptos, como vamos ver nos Theoremas seguintes.

Advertimos, que nesta avaliação não entram as áreas das bases dos corpos, que temos de considerar.

288. THEOR. *A área de qualquer prisma avalia-se, multiplicando por uma das arestas o perimetro da secção feita por um plano perpendicular á dicta aresta.*

Seja (fig. 137) o prisma $ADEB$. Por qualquer ponto a de uma aresta AB conduza-se o plano bdf perpendicular a AB. Denote L a dicta aresta, P o perimetro da secção, e A a área do prisma. Digo que $A=P\times L$.

Demonstr. Collige-se da demonstração do n.° 280.

289. *Coroll.* Avalia-se pois a área de um prisma recto, multiplicando o perimetro da base pela altura.

290. THEOR. *A área de qualquer pyramide regular avalia-se, multiplicando a metade do perimetro da base pelo apothema da pyramide.*

Seja (fig. 123) a pyramide regular $ABCDE$. Denote A a área, a o apothema, e P o perimetro. Digo que $A=\frac{1}{2}P\times a$.

Demonstr. Como as faces da pyramide regular são todas triangulos isosceles, e eguaes (251), e tantos, quantos são os lados da base da mesma pyramide; é evidente, que para avaliarmos a sua área bastará calcular a de um desses triangulos, e multiplicar depois o resultado pelo numero dos lados da base. Ora a área de qualquer dos triangulos, BAE, é $= \frac{1}{2} BE \times AP$. Logo representando n o numero dos dictos lados, será a área da pyramide proposta $= \frac{1}{2} n. BE \times AP$; isto é, $A = \frac{1}{2} P \times a$.

291. Theor. *A área do tronco de qualquer pyramide regular avalia-se, multiplicando a semi-somma dos perimetros das duas bases pela altura de um dos trapezios faces do tronco: ou tambem multiplicando por essa altura o perimetro da secção feita por um plano parallelo ás dictas bases, tirado em egual distancia destas.*

Denote A área do tronco, a a altura de um dos trapezios, P o perimetro da base inferior, p o da superior, e P' o da secção feita em egual distancia das dictas bases. Digo que $A = \frac{P+p}{2} \times a$; ou $P' \times a$.

Demonstra-se, como a cima, recurrendo aos n.os 187, e 188.

292. Theor. *A área de qualquer cylindro recto avalia-se, multiplicando a circumferencia da base pelo lado do cylindro.*

Seja (fig. 141) o cylindro recto AE. Denote L o lado AB, C a circumferencia da base, e A a área do cylindro. Digo que $A = C \times L$.

Demonstr. Si não é $A = C \times L$; seja $C \times L$ o valor da área de outro cylindro recto maior, ou menor do que o proposto. Seja = área do cylindro recto maior, da mesma altura, que tem por base o circulo concentrico C'. Imagine-se circumscripto ao cylindro proposto um prisma recto, cujas faces não encontrem a superficie do cylindro C'. Denote P o perimetro da base desse prisma. Será a sua área $= P \times L$ (289). Ora esta área é menor do que a do cylindro C'; por ser ainda menor do que a do prisma correspondente inscripto no dicto cylindro C' (como é facil ver), a qual é menor do que a do mesmo C' (282): logo será $P \times L < C \times L$; isto é $P < C$: o que é absurdo (12). Pois seja $C \times L$ = área do cylindro recto menor, da mesma altura, que tem por base o circulo concentrico c. Imagine-se circumscripto ao cylindro c um prisma recto, cujas faces não encontrem a superficie do cylindro C. Denote p o perimetro da base desse prisma. Será a sua área $= p \times L$. Ora esta área é maior do que a do cylindro c: logo será $p \times L > C \times L$; isto é, $p > C$: o que é absurdo. E pois não é $C \times L$ = área $>$ ou $< A$: será $A = C \times L$.

293. *Coroll.* As áreas de dous cylindros rectos similhantes estão entre si, como os quadrados dos raios das suas bases, ou como os dos seus lados ou eixos. Com effeito denotando C e c as circumferencias das respectivas bases, R e r os raios, L e l os lados, ou eixos; como temos $C : c :: R : r :: L : l$ (260); e $L : l :: R : r :: L : l$; multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $C \times L : c \times l :: R^2 : r^2 :: L^2 : l^2$.

294. Theor. *A área de qualquer pyramide conica recta avalia-se, multiplicando a metade da circumferencia da base pelo lado da pyramide.*

Seja (fig. 142) a pyramide conica recta $ABCD$. Denote L o lado AB, C a circumferencia da base, e A a área da pyramide. Digo que $A = \frac{1}{2} C \times L$.

Demonstr. Si não é $A = \frac{1}{2} C \times L$; seja $\frac{1}{2} C \times L$ o valor da área de outra pyramide conica recta maior, ou menor do que a proposta. Seja = área da pyramide conica recta maior, da mesma altura, que tem por base o circulo concentrico C'. Imagine-se circumscripta á pyramide conica C uma pyramide regular, cujas faces não encontrem a superficie da pyramide conica C'. Denote P o perimetro da base dessa pyramide. Será a sua área $= \frac{1}{2} P \times L$ (290, 278 N. B.). Ora esta área é menor do que a da pyramide conica C'; por ser ainda menor do que a da pyramide regular correspondente inscripta na dicta pyramide conica C' (como é facil vêr), a qual é menor do que a da mesma C' (283): logo será $\frac{1}{2} P \times L < \frac{1}{2} C \times L$; isto é, $P < C$: o que é absurdo. Pois seja $\frac{1}{2} C \times L =$ área da pyramide conica recta menor, da mesma altura, que tem por base o circulo concentrico c. Imagine-se circumscripta á pyramide conica c uma pyramide regular, cujas faces não encontrem a superficie da pyramide conica C. Denote p o perimetro da base dessa pyramide regular, e l o apothema. Será a sua área $= \frac{1}{2} p \times l$. Ora esta área é maior do que a da pyramide conica c: logo será $\frac{1}{2} p \times l > \frac{1}{2} C \times L$: o que é absurdo, por ser

$p<C$, e $l<L$ (210). E pois não é $\frac{1}{2} C \times L =$ área $>$ ou $<A$; será $A = \frac{1}{2} C \times L$.

295. *Coroll.* As áreas de duas pyramides conicas rectas similhantes estão entre si, como os quadrados dos raios das suas bases, ou como os dos seus lados, ou eixos. Deduz-se da mesma forma, que o Corollario precedente, com a unica differença de se escrever na proporção $\frac{1}{2} C : \frac{1}{2} c$.

296. THEOR. *A área do tronco de qualquer pyramide conica recta avalia-se, multiplicando a semisomma das circumferencias das duas bases pelo lado do tronco.*

Seja (fig. 143) a pyramide conica recta truncada Bd. Denote L o lado Bb, C a circumferencia da base inferior, c a da superior, e A a área. Digo, que $A = \frac{C+c}{2} \times L$.

Demonstr. Imagine-se completa a pyramide conica ABD: e no ponto B levante-se sobre AB a perpendicular BE, que seja egual em comprimento á circumferencia C. Tire-se AE, e pelo ponto b a recta be parallela a BE. Por ser $BE : be :: AB : Ab :: BD : bd$ (122); e $BD : bd :: C : c$; será $C : c :: BE : be$; e logo $be = c$, por ser $BE = C$. Isto posto, a área da pyramide ABD é egual á do triangulo ABE; por ser uma e outra avaliada por $\frac{1}{2} C \times AB$ (294, e 183). Da mesma sorte a área da pyramide conica Abd é egual á do triangulo Abe; por ser uma e outra avaliada por $\frac{1}{2} c \times Ab$. Logo, si da área da pyramide ABD tirarmos a da pyramide Abd, e da área do triangulo ABE tirarmos a do triangulo Abe, ficará a do tronco Bd egual á do trapezio Be. Mas a área do trapezio Be é $= \frac{BE+be}{2} \times Bb$, ou $\frac{C+c}{2} \times L$ (187). Logo tambem a do tronco $A = \frac{C+c}{2} \times L$.

297. *Schol.* Em logar de $\frac{C+c}{2}$ podemos substituir a circumferencia C' da secção feita por um plano parallelo á base, tirado pelo ponto F meio do lado Bb: isto é, pode dizer-se, que a área do tronco de uma pyramide conica recta se avalia tambem, multiplicando pelo lado do mesmo tronco a circumferencia da secção feita em egual distancia das suas bases. Com effeito, por ser $C : BD :: c : bd :: C' : FG$, será $C+c : BD+bd :: C' : FG$; e por conseguinte $\frac{C+c}{2} = C'$, por ser $\frac{BD+bd}{2} = FG$ (188).

298. Theor. *A área do polyedro circumscripto á sphera* (279) *avalia-se, multiplicando a somma dos perimetros das bases das pyramides regulares, de que elle se compõe, por um dos lados do polygono circum-voluto.*

Seja (fig. 144) ACD &c. o polygono circum-voluto. Denote L qualquer lado AC, A a área do polyedro, e p, p', p'' os perimetros das bases das pyramides regulares, de que elle se compõe, e que para mais simplicidade se representam somente por uma face cada uma, Apm, mp', $m'p''$, $Bp''m''$. Digo que $A = (p+p'+p'') \times L$.

Demonstr. Com effeito a área da pyramide regular, de que é face o triangulo Apm, tem por expressão $\frac{1}{2}\, p \times L$ (290): a área da truncada, de que é face o trapezio mp', tem por expressão $\frac{1}{2}\,(p+p') \times L$ (291): a área da outra tambem truncada, de que é face o trapezio $m'p''$, tem por expressão $\frac{1}{2}\,(p'+p'') \times L$: e finalmente a da pyramide regular, de que é face o triangulo $Bp''m''$, tem por expressão $\frac{1}{2}\, p'' \times L$. Logo sommando todos esses resultados, teremos o valor da área do polyedro; isto é, $A=(p+p'+p'') \times L$.

299. *Schol.* 1.° Convem ao fim, que nos propomos, que os polygonos bases dessas pyramides, e o circum-voluto sejam todos do mesmo numero de lados, o que é sempre possivel: e então em logar da expressão geral $(p+p'+p''+\&c.) \times L$ substituiremos o producto do perimetro do polygono circum-voluto (que denotaremos por P) multiplicado pelo seu diametro; isto é, pode dizer-se, que a área do polyedro se avalia tambem, multiplicando o perimetro do polygono circum-voluto pelo diametro do mesmo polygono. Com effeito:

Seja (fig. 145) o polygono mencionado $ACDE$ &c., cujo diametro é AB. Tirem-se as rectas BC, CM, MD, DK, KE, &c. Serão similhantes os triangulos ABC, ACN, NMO, ODP, PKQ, &c.; por serem rectangulos em C, N, P, &c., e serem eguaes os angulos ABC, ACN, NMO, ODP, PKQ, &c. (51, 97). Logo será $BC : AC :: CN : AN :: MN : NO :: DP : OP :: KP : PQ ::$ &c.; e por conseguinte $BC : AC :: CN+MN+DP+KP+$ &c.$: AN+NO+OP+PQ+$&c.; isto é, $BC : AC :: CM+DK+$&c.$: AB$; ou $BC : CM+DK+$&c. $:: AC : AB$. Mas por ser BC egual ao diametro do circulo inscripto no polygono P; e CM, DK, EL, &c. tambem diametros dos circulos inscriptos nos respectivos polygonos p, p', p'' &c., os quaes todos são similhantes entre si, como regulares do mesmo numero de lados (constr.); é $P : BC :: p : CM :: p' : DK :: p'' : EL ::$ &c.; ou $P : p+p'+p''+$ &c. $:: BC : CM + DK + EL +$ &c. Logo tambem $P : p+p'+p''+$ &c. $:: AC : AB$; donde, denotando L o lado AC, se tira $(p+p'+p''+\text{\&c.}) \times L = P \times AB$.

300. *Schol.* 2.° Com este mesmo discurso se mostrará, que a área de uma porção, ou segmento polyedral $ACDKMA$ tem por expressão $P \times AP$; isto é, o perimetro do polygono circum-voluto multiplicado pela altura do segmento.

301. THEOR. *A área de qualquer sphera avalia-se, multiplicando a circumferencia de um dos seus circulos maximos pelo diametro.*

Seja (fig. 146) a sphera representada pela circumferencia C de um dos seus circulos maximos. Denote D o diametro, e A a área. Digo que $A = C \times D$.

Demonstr. Si não é $A = C \times D$; seja $C \times D$ o valor da área de outra sphera maior, ou menor do que a proposta. Seja = área da sphera maior concentrica, representada pela circumferencia C' de um dos seus circulos maximos. Imagine-se circumscripto á sphera proposta um polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da sphera C', do modo que deixamos dicto em os n.os 285, 299. Denote P

o perimetro do polygono circum-voluto, e D' o seu diametro. Será a área do polyedro $= P \times D'$ (299). Ora esta área é menor do que a da sphera C'; por ser ainda menor do que a do polyedro correspondente inscripto na sphera C' (como é facil ver), a qual é menor do que a da mesma C' (284): logo será $P \times D' < C \times D$: o que é absurdo, por ser $D' > D$, e $P > C$. Pois seja $C \times D =$ área da sphera menor concentrica, representada pela circumferencia c de um dos seus circulos maximos. Imagine-se circumscripto do mesmo modo á sphera c um polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da sphera C. Denote p o perimetro do polygono circum-voluto, e d o seu diametro. Será a área do polyedro $= p \times d$. Ora esta área é maior do que a da sphera c: logo será $p \times d > C \times D$: o que é absurdo, por ser $d < D$, e $p < C$. E pois não é $C \times D$ = área > ou < A; será $A = C \times D$.

302. *Coroll.* 1.º E' pois a área da sphera quadrupla da do seu circulo maximo (190); e egual á convexa do cylindro circumscripto (fig. 147) (292).

303. *Coroll.* 2.º As áreas de duas spheras estão entre si, como os quadrados dos seus raios. Conclue-se, como em o n.º 293.

304. THEOR. *A área de qualquer segmento spherico avalia-se, multiplicando a circumferencia de um dos circulos maximos da respectiva sphera pela altura do segmento.*

Seja (fig. 161) o segmento spherico *EAF*, que tem por altura AR, e pertence á sphera, cujo raio é CA. Denote C a circumferencia de um dos seus circulos maximos, e A a área do segmento. Digo que $A = C \times AR$.

Demonstr. Si não é $A = C \times AR$; seja $C \times AR$ o valor da área de outro segmento spherico maior, ou menor do que o proposto. Seja = área do segmento spherico maior LMN, que tem por altura MR, e pertence á sphera concentrica, cujo raio é CM. Imagine-se circumscripto á sphera, de que é segmento o proposto EAF, um polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da outra sphera (285, 299), e de modo que um dos lados do polygono circumvoluto termine em um ponto o entre EL e DL; o que sempre é possivel. Denote P o perimetro desse polygono. Teremos o segmento polyedral de altura ar, cuja área é $= P \times ar$ (300). Ora esta área é menor do que a do segmento spherico LMN; por ser ainda menor do que a do segmento polyedral correspondente inscripto no segmento spherico IMK, a qual é menor do que a do mesmo IMK (284), e com maior razão, menor do que a do segmento spherico LMN: logo será $P \times ar < C \times AR$: o que é absurdo, por ser $P > C$, e $ar > AR$. Pois seja = área de um segmento spherico menor: e para não complicarmos a figura, tomemos agora pelo segmento proposto o segmento spherico LMN; e denote C' a circumferencia de um dos circulos maximos da sphera respectiva: e seja, si é possivel, $C' \times MR =$ área do segmento menor EAF, pertencente á sphera concentrica, cujo raio é CA.

Conservadas as mesmas denotações, temos que a área do segmento polyedral de altura *ar* é $= P \times ar$. Ora esta área é maior do que a do segmento spherico *EAF*; por ser ainda maior do que a do segmento de altura *Ar*, a qual é maior do que a do dicto *EAF*: logo será $P \times ar > C' \times MR$: o que é absurdo, por ser $P < C'$, e $ar < MR$; por quanto, concebendo as cordas *IM*, *oa*, os triangulos simi-lhantes *IMP*, *oar* dão $IM : oa :: MP : ar$; donde, por ser $IM > oa$, é $MP > ar$; e por conseguinte *MR* muito maior do que *ar*. Logo &c.

Quanto ao segmento spherico *EBF* maior do que um hemispherio; teremos tambem $C \times BR$ por expressão da sua área: por que, como ella é a differença entre a área da sphera e a do segmento menor *EAF*, será o seu valor $= C \times AB - C \times AR = C \times BR$.

Dos parallelipipedos, e tetraedros.

305. Theor. *Si dous parallelipipedos tiverem a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; terão volumes eguaes.*

Dous casos comprehende este Theorema.

1.º Sejam (fig. 148) os parallelipipedos *BCHE*, *BIHM*, construidos sobre a mesma base *ABHG*, e terminados pelo mesmo plano *DE* parallelo a esta; sendo tambem communs a ambos elles os planos lateraes oppostos *AE*, *BF*. Digo que os dous parallelipipedos tem volumes eguaes.

Demonstr. Por serem os parallelogrammos *CB*, *CL*, e o triangulo *ACI*, que formam o angulo triedro *C*, e os parallelogrammos *EH*, *EN*, e o triangulo *GEM*, que formam o angulo triedro *E*, respectivamente eguaes, e similhantemente dispostos; serão eguaes os prismas triangulares *AL*, *GN* (271). Ora o volume do polyedro *BCHM* compõe-se do volume do prisma triangular *GN* mais do volume do parallelipipedo *BCHE*; ou do volume do prisma triangular *AL* mais do volume do parallelipipedo *BIHM*. Logo como os volumes dos prismas triangulares são eguaes, serão necessariamente eguaes os dos parallelipipedos.

2.° Sejam agora (fig. 149) os parallelipipedos *BCHE*, *BOHQ*, construidos sobre a mesma base *ABHG*, e terminados pelo mesmo plano *DQ* parallelo a esta; não lhes sendo communs os planos lateraes oppostos. Digo tambem, que estes dous parallelipipedos tem volumes eguaes.

Demonstr. Prolongadas as rectas *OP*, *QR* cortarão a *DF* em *L* e *N*, e a *CE* em *I* e *M*. Tirem-se as rectas *AI*, *BL*, *GM*, *HN*. Ficará formado o parallelipipedo *BIHM*; por serem os planos oppostos parallelogrammos eguaes e parallelos. Ora este parallelipipedo tem volume egual ao de cada um dos dous propostos (1.°). Logo tambem estes terão volumes eguaes.

306. *Coroll.* 1.° Dividindo pois (fig. 150) a base *ABHG* de qualquer parallelipipedo rectangulo *AF*, em quantos rectangulos eguaes quizermos, por ex.

BN, *LY*, &c.; e tirando pelas rectas dessas divisões planos perpendiculares á dicta base, como *LM*, *ZX*, &c; o parallelipipedo proposto ficará tambem dividido em outros tantos parallelipipedos rectangulos, eguaes entre si. E concluir-se-ha, discurrendo, como em o n.º 176, que o parallelipipedo rectangulo *AF* é para a base *ABHG*, como qualquer numero daquellas partes de *AF* para o mesmo numero destas de *ABHG*.

307. *Coroll.* 2.º Dous parallelipipedos da mesma ou egual altura, construidos sobre parallelogrammos equivalentes, tem volumes eguaes. Com effeito imaginando dous parallelipipedos construidos com egual altura sobre os parallelogrammos *BF*, *BN* (fig. 151), e sobre cada um dos mesmos parallelogrammos construindo um parallelipipedo recto da altura daquelles; a saber, sobre a base *BF* o parallelipipedo recto *BE*, e sobre a base *BN* o parallelipipedo recto *BM*; estes dous parallelipipedos rectos terão volumes respectivamente eguaes aos dos outros dous. Ora estes mesmos parallelipipedos rectos tem volumes eguaes, como tendo a mesma base *BG* e a mesma altura: logo &c.

308. Theor. *O plano, que se tirar pelas diagonaes de duas faces oppostas de um parallelipipedo, dividilo-ha em dous prismas triangulares de egual volume.*

Seja (fig. 152) o parallelipipedo recto *BE*; ou (fig. 153) obliquo. Tire-se um plano em qualquer delles pelas diagonaes *CG*, *DH* de duas faces oppostas. Digo que dividirá o parallelipipedo *BE* em dous prismas triangulares *ACGBDH*, *CGEDHF*, de egual volume.

Demonstr. Que o divide em dous prismas triangulares, é sem duvida; por quanto as rectas *CD*, *GH* parallelas, e eguaes a *AB*, são eguaes, e parallelas entre si (220): por tanto estando no mesmo plano com as diagonaes *CG*, *DH*, formarão o parallelogrammo commum *CDHG*. Ora é manifesto, que as outras duas faces em cada um dos dictos prismas são parallelogrammos, e as bases triangulos. Logo &c. Resta pois so mostrar, que os dictos dous prismas tem volumes eguaes.

Si se considera o parallelipipedo recto *BE* (fig. 152), conclue-se que os dous prismas triangulares são eguaes; por quanto os parallelogrammos *AD*, *AH*, e o triangulo *CAG*, que formam o angulo triedro *A*, e os parallelogrammos *EH*, *ED*, e o triangulo *CEG*, que formam o angulo triedro *E*, são respectivamente eguaes, e similhantemente dispostos (271). Considerando porém o parallelipipedo obliquo *BE* (fig. 153), então se demonstrára da maneira seguinte.

Pelos pontos *A*, *B* da aresta *AB* do prisma triangular *ACGBDH* conduzam-se perpendicularmente a ella os planos *AIM*, *BLN*: e continuando as arestas *CD*, *GH*, até encontrarem este ultimo plano nos pontos *L*, *N*, tirem-se as rectas *BL*, *LN*, *BN*. Teremos a pyramide *ACGMI* egual á pyramide *BDHNL*; por serem as faces da primeira *ACG*, *ACI*, *ICGM*, que formam o angulo triedro *C*, respectivamente eguaes ás faces da segunda *BDH* , *BDL* , *LDHN*, que formam o angulo triedro *D* , e similhantemente dispostas (271). Ora o volume do polyedro *ACGBLN* compõe-se do volume da pyramide *BDHNL* mais do volume do prisma triangular obliquo *ACGBDH* ; ou do volume da pyramide *ACGMI* mais do volume do prisma triangular recto *AIMBLN*. Logo, como as pyramides são eguaes, será o volume do prisma triangular obliquo egual ao do recto. Mas o prisma triangular recto é metade do parallelipipedo recto, que tem a mesma altura *AB*, e por base o parallelogrammo *AIOM*, como primeiro se demonstrou. Logo tambem o volume do prisma triangular obliquo *ACGBDH* será metade do volume do mesmo parallelipipedo recto. Mas este parallelipipedo recto é egual em volume ao obliquo *BE*, como tendo as bases equivalentes *ABLI*, *ABDC*, e a mesma altura (307). Logo tambem o volume do prisma triangular obliquo *ACGBDH* é metade do volume do parallelipipedo obliquo *BE*. Logo &c.

309. *Coroll.* Desta proposição, e da precedente se conclue: que dous prismas triangulares da mesma base e da mesma altura, ou de bases eguaes e alturas eguaes, tem volumes eguaes; como tambem os que tendo egual altura são construidos sobre bases equivalentes.

310. Theor. *Si um tetraedro for cortado por planos parallelos á base, e equidistantes entre si; e entre cada dous planos consecutivos se inscreverem, e cir-*

cumscreverem prismas ao dicto tetraedro; a differença entre a somma dos volumes de todos os circumscriptos, e a somma dos volumes de todos os inscriptos, será egual ao volume do circumscripto, cuja base é a mesma do tetraedro.

Seja (fig. 154) o tetraedro $DABC$. Divida-se qualquer das suas arestas DB em partes eguaes: e pelos pontos da divisão cortem o tetraedro planos parallelos á base. Tirem-se pelos pontos N, R, O, S, &c., em que esses planos cortam as outras duas arestas, outras tantas parallelas a DB: prendam-se os extremos destas com as rectas de, fg, &c.: e imaginem-se os prismas inscriptos NF, OG, &c. Do mesmo modo, produzindo os lados desses planos, e tirando as parallelas necessarias a DB, concebam-se os prismas circumscriptos ME, LF, &c. Digo que a differença entre a somma dos volumes de todos os circumscriptos, e a somma dos volumes de todos os inscriptos, é egual ao volume do prisma circumscripto HB, cuja base é a mesma do tetraedro.

Demonstr. Com effeito, por ser $ME=NF$ (309), $LF=OG$, $IG=PB$, será $ME+LF+IG+HB-NF-OG-PB$, ou $(ME+LF+IG+HB)-(NF+OG+PB)=HB$.

311. *Coroll.* Cortado pois successivamente o tetraedro por planos parallelos á base, e equidistantes entre si, se lhe poderão inscrever e circumscrever tantos prismas, que a differença entre a somma dos volumes de todos os circumscriptos e a somma dos volumes de todos os inscriptos, seja menor do que

qualquer volume assignado, por pequeno que este se dê: e por conseguinte muito menor a differença entre a somma dos volumes dos inscriptos ou circumscriptos, e o volume do tetraedro.

312. Theor. *Si dous tetraedros tiverem a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; terão volumes eguaes.*

Sejam (fig. 155) os tetraedros $DABC$, $D'ABC$, os quaes tem a mesma base ABC, e são de egual altura. Denotem T, T' os respectivos volumes. Digo que $T=T'$.

Demonstr. Si é possivel, não seja. Um delles será maior. Seja $T>T'$. Concebam-se inscriptos em cada um dos tetraedros, e em egual numero, tantos prismas, que a differença entre o volume de qualquer dos tetraedros e a somma dos volumes de todos os prismas nelle inscriptos, seja menor do que qualquer assignado. Denotando por S a somma dos volumes dos prismas inscriptos em T, e por S' a dos inscriptos em T'; será $T-S<T-T'$; donde $S>T'$. Mas é $S=S'$; por serem os volumes dos prismas inscriptos em um respectivamente, e por ordem, eguaes aos volumes dos inscriptos no outro, como tendo bases eguaes e alturas eguaes (309): logo será tambem $S'>T'$: o que é absurdo. Logo &c.

313. Theor. *Si um prisma triangular, e um tetraedro tiverem a mesma base e a mesma altura, ou bases eguaes e alturas eguaes; será o volume do tetraedro a terça parte do volume do prisma.*

Seja (fig. 156) o tetraedro *ABCD* da mesma base e altura do prisma triangular *EGFBCD*. Digo que o volume do tetraedro é a terça parte do volume do prisma.

Demonstr. Tirem-se as rectas *BF*, *FC*, *CE*; e considere-se dividido o prisma nos tres tetraedros *FBCD*, *FBCE*, *FECG*. Por serem eguaes os triangulos *BCE*, *ECG*, terão volumes eguaes os dous tetraedros *FBCE*, *FECG* (312). Pela mesma razão terão eguaes volumes os dous *FBCD*, *CEFG* (isto é *FECG*). Logo os tres, em que o prisma está dividido, tem entre si volumes eguaes: e por tanto cada um delles é a terça parte do volume do prisma. Mas o proposto *ABCD* tambem tem volume egual ao do tetraedro *FBCD*. Logo tambem o seu volume é a terça parte do do prisma.

314. Theor. *Os volumes dos parallelipipedos rectangulos estão entre si, como os productos das suas bases multiplicadas pelas suas alturas.*

1.° Sejam (fig. 157) os parallelipipedos rectangulos *AF*, *AC*, que tem por bases *AG*, *AD*, e por alturas *AE*, *AB*; tendo as dictas bases um lado commum. Digo que é $AF : AC :: AG \times AE : AD \times AB$.

Demonstr. Continue-se o plano *EF* até encontrar o outro *CL*; e complete-se o parallelipipedo rectangulo *AH* da mesma altura *AE* do parallelipipedo rectangulo *AF*. Ora os volumes destes dous parallelipipedos estão entre si como as bases; isto é,

$AF : AH :: AG : AD$. Por que si não é $AF : AH :: AG : AD$; será como AG para um quarto termo $X >$ ou $< AD$. Seja $:: AG : AR > AD$. Conceba-se dividida a base AG em tantos rectangulos eguaes, que continuando-se a divisão de G para R, cáia uma dellas entre D e R; por ex. PI. Complete-se o parallelipipedo rectangulo AQ. Será $AF : AQ :: AG : AI$ (306). Mas tambem supposemos $AF : AH :: AG : AR$: logo $AQ : AH :: AI : AR$. Mas $AQ > AH$: logo $AI > AR$: o que é absurdo. Com egual raciocinio, imitando o que temos feito em outros logares, se demonstrará tambem não ser $:: AG : X < AD$. E pois não é $AF : AH :: AG : X >$ ou $< AD$; será

$$AF : AH :: AG : AD.$$

Pela mesma razão, considerando os parallelipipedos rectangulos AH, AC, como tendo a mesma altura AL sobre as bases AM, AN, as quaes estão entre si, como $AE : AB$ (179), será

$$AH : AC :: AE : AB.$$

Logo multiplicando ordenadamente os termos destas duas proporções, e simplificando a primeira razão, teremos $AF : AC :: AG \times AE : AD \times AB$. (*).

2.° Sejam agora os parallelipipedos rectangulos AF, AK, que tem por bases AG, AO, e por alturas AE, AB; não tendo as dictas bases um lado commum. Digo tambem que é $AF : AK :: AG \times AE : AO \times AB$.

Demonstr. Prolongue-se o plano MG até á secção NC com o plano BK: e complete-se o parallelipi-

(*) Veja-se a nota ao n.° 179.

pedo rectangulo AC. Pois temos, como acabamos de mostrar,

$$AF : AC :: AG \times AE : AD \times AB \ (1.^{o}),$$

e tambem $AC : AK :: AD : AO$; multiplicadas ordenadamente entre si estas duas proporções, e simplificadas as razões, darão

$$AF : AK :: AG \times AE : AO \times AB.$$

315. *Coroll.* Quanto pois dissemos a respeito dos parallelipipedos rectangulos se extende a quaesquer parallelipipedos; e por conseguinte aos prismas triangulares, e aos tetraedros. Por que todo o parallelipipedo é egual em volume ao parallelipipedo rectangulo da mesma altura, e de base equivalente. (307). E quanto aos prismas triangulares, e aos tetraedros; como os volumes daquelles são metades dos de parallelipipedos da mesma altura, &c. (308); e os destes são terços dos de prismas triangulares da mesma base e da mesma altura (313); necessariamente hão de ter a mesma razão, que os desses parallelipipedos, e prismas.

Da avaliação dos volumes dos corpos, e da sua medida.

316. Por quanto *medir* o volume de um corpo é determinar, quantas vezes este contêm outro conhecido, o qual se considera então como unidade; e sabemos, que os volumes dos parallelipipedos estão entre si, como os productos das suas bases multi-

plicadas pelas suas alturas; segue-se, que, si denotar A a altura, e B a base de um parallelipipedo P, cujo volume se pretende avaliar; e a a altura, e b a base de outro parallelipipedo p, tomado para medida, ou unidade de volume; teremos conhecido o daquelle, visto que podemos saber, quantas vezes contêm o deste. Com effeito, por ser $P : p :: B \times A : b \times a$, será $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$: o que faz ver, que para avaliarmos o volume de qualquer parallelipipedo P devemos, depois de examinar quantas vezes na sua base B se contêm a base b da unidade de volume, e quantas na altura A se contêm a altura a, multiplicar esses dous quocientes, e o producto nos mostrará o numero de vezes, que o volume escolhido para medida se contêm no do parallelipipedo, que se tracta de avaliar.

Como porém a medida commum dos volumes, e a mais simples, é um cubo conhecido, por ex. um pé cubico, uma pollegada cubica, &c.; no caso de que por p escolhamos qualquer dessas medidas, v. gr. um pé cubico (1^{ppp}); então $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$ se torna em $\frac{P}{1^{ppp}} = \frac{B}{1^{pp}} \times \frac{A}{1^{p}}$, ou $P = B \times A$: expressão abbreviada, e donde vem dizer-se geralmente:

317. O volume de um parallelipipedo avalia-se, multiplicando a base pela altura: e por tanto o de um cubo, pela terceira potencia da sua aresta (*).

Não se perca porém de vista, quando assim nos

(*) Por isso se diz cubo de um numero, ainda que impropriamente, a terceira potencia desse numero.

expressarmos, que se deve intender por esse producto o numero de medidas cubicas, que se contêm no volume procurado.

318. *Coroll.* 1.° Logo o volume de qualquer prisma triangular avalia-se, multiplicando a base pela altura (308). E o de um tetraedro, tomando a terça parte deste producto (313).

319. *Coroll.* 2.° E daqui se segue: que os volumes de dous tetraedros similhantes estão entre si, como os cubos das suas arestas ou linhas homologas. Por que dando-se-lhes por base quaesquer faces homologas B, b; como então as suas alturas A, a são tambem linhas homologas (276, 2.°), e proporcionaes a quaesquer outras homologas L, l; temos $B : b :: A^2 : a^2 :: L^2 : l^2$ (185); e $\frac{1}{3} A : \frac{1}{3} a :: A : a :: L : l$; e multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $\frac{1}{3} B \times A : \frac{1}{3} b \times a :: A^3 : a^3 :: L^3 : l^3 ::$ &c.

320. *Coroll.* 3.° Logo em geral os volumes de dous polyedros similhantes estão entre si, como os cubos de quaesquer duas arestas ou linhas homologas. Por que os polyedros similhantes podem-se considerar compostos de egual numero de tetraedros respectivamente similhantes, e similhantemente dispostos (275): e por tanto o volume de cada tetraedro do 1.° polyedro será para o volume do tetraedro correspondente no 2.°, como o cubo de uma aresta ou linha daquelle para o cubo da homologa deste. Ora tendo todas as arestas e linhas homologas a mesma razão entre si, tambem devem ter a mesma razão os seus cubos: logo o volume de

cada tetraedro do 1.° polyedro será para o volume do seu correspondente no 2.°, como o cubo de qualquer aresta ou linha do 1.° polyedro para o cubo da linha homologa do 2.°. Por consequencia a somma dos volumes de todos os tetraedros, de que se compõe o 1.° polyedro, isto é, o seu volume, será para a somma dos volumes de todos os tetraedros, de que se compõe o 2.° polyedro, isto é, o seu volume, como o cubo de qualquer aresta ou linha do 1.° para o cubo da linha homologa do 2.°.

321. *Schol.* Vê-se por tanto: que nos polyedros similhantes basta comparar os cubos de quaesquer arestas ou linhas homologas, para saber-se a relação, que ha entre os seus volumes. Porém geralmente em quaesquer corpos, é necessario primeiramente avaliar o volume de cada um, e depois comparar esses valores referidos á mesma medida. Ora nos polyedros serve de muito a avaliação dos volumes dos tetraedros; pois por elles se pode sempre avaliar o volume de qualquer polyedro, o que se faz, dividindo-o em tetraedros, calculando separadamente o volume de cada um, e depois sommando todos esses resultados. Comtudo, ainda que em geral este é o meio de avaliar os volumes dos polyedros, não é elle o mais expedito em alguns casos, nem applicavel aos corpos terminados por superficies curvas. Temos methodos mais promptos, como vamos ver nos Theoremas seguintes.

322. Theor. *O volume de qualquer prisma avalia-se, multiplicando a base pela altura.*

Seja (fig. 158) o prisma BE. Denote B a base, A a altura, e V o volume. Digo que $V = B \times A$.

Demonstr. Dividam-se os dous polygonos $ACGEI$, $BDHFL$ (pois são eguaes) em egual numero de triangulos respectivamente eguaes: e imaginem-se tirados os planos CL, LG pelas diagonaes correspondentes CI e DL, IG e LH; cujas secções são parallelogrammos, como ja fizemos ver em o n.º 308. Facilmente se conceberá o prisma proposto dividido em tantos prismas triangulares, quantos são os triangulos, em que foi dividida a base; a saber, nos prismas, cuja altura é a mesma do total, e as bases respectivas são os triangulos denotados por b, b', b''. Ora o volume do primeiro avalia-se por $b \times A$ (318); o do segundo por $b' \times A$; e o do terceiro por $b'' \times A$. Logo o valor do volume total do prisma BE será $(b+b'+b'') \times A$; isto é, $V = B \times A$.

323. Theor. *O volume de qualquer pyramide avalia-se, multiplicando o terço da base pela altura.*

Seja (fig. 159) a pyramide $IBDHFL$. Denote B a base, A a altura, e V o volume. Digo que $V = \frac{1}{3} B \times A$.

Demonstr. Divida-se a base em triangulos; e conceba-se composta a pyramide dos tetraedros $IBDL$, $IDLH$, $ILHF$. O volume do primeiro avalia-se por $\frac{1}{3} b \times A$ (318); o do segundo por $\frac{1}{3} b' \times A$; e o do terceiro por $\frac{1}{3} b'' \times A$. Logo o valor do volume total da pyramide será $\frac{1}{3}(b+b'+b'') \times A$; isto é, $V = \frac{1}{3} B \times A$.

324. *Schol.* Por esta mesma proposição se pode avaliar o volume do tronco *Km* (fig. 120) de qualquer pyramide. Por que, sendo este a differença entre o volume da pyramide inteira *IKLM* e o da separada *Iklm*; terá por valor a terça parte do producto da base *KLM* multiplicada pela altura *IP* menos a terça parte do producto da base *klm* multiplicada pela altura *Ip*; havendo-se calculado o valor das dictas alturas pela seguinte proporção, que a similhança das pyramides offerece; a saber, $KL : kl :: IP : Ip$; e logo $KL - kl : KL :: IP - Ip$, ou $Pp : IP$. Donde fica conhecido o valor de *IP*; pois dado o tronco pode-se medir as linhas *KL*, *kl*, *Pp*, que entram nos primeiros tres termos da proporção. Ter-se-ha *Ip*, tirando *Pp* de *IP*.

325. Theor. *O volume de um prisma triangular truncado, isto é, a porção de um prisma triangular cortado por um plano inclinado á base, avalia-se, multiplicando o terço da dicta base pela somma das perpendiculares a esta, tiradas dos vertices dos angulos da secção.*

Seja (fig. 160) o prisma triangular truncado *ACEBDF*, cuja base é o triangulo *BDF*. Denote *V* o volume, *B* a base, e p, p', p'' as perpendiculares a esta, que se imaginem tiradas dos vertices *C*, *A*, *E* dos angulos da secção *ACE*. Digo que $V = \frac{1}{3}B \times (p + p' + p'')$.

Demonstr. Corte-se o prisma pelo plano *CBF* tirado pelo ponto *C* e pela aresta *BF*. Separado o tetraedro *CBDF*, divida-se tambem a pyramide quadrangular residua *CABFE* em outros dous tetraedros *CABF*, *CAEF* pelo plano *CAF* tirado pelo vertice *C* e pela diagonal *AF* da base *ABFE*. Teremos o prisma proposto dividido em tres tetraedros *CBDF*, *CABF*, *CAEF*. Ora o volume do primeiro avalia-se por $\frac{1}{3}\,B \times p$: resta pois so mostrar, que o volume do segundo se avalia por $\frac{1}{3}\,B \times p'$; e o do terceiro por $\frac{1}{3}\,B \times p''$. Com effeito o tetraedro *CABF* é egual em volume ao tetraedro *DABF*; pois ambos tem os vertices na recta *CD* parallela á base commum *ABF* (221). Mas o tetraedro *DABF* pode ser considerado com a base *BDF*, e o vertice em *A*: logo o seu volume, ou o do tetraedro *CABF* terá por valor $\frac{1}{3}\,B \times p'$. Da mesma sorte o tetraedro *CAEF* é egual em volume ao tetraedro *DBEF*; por estarem os seus vertices *C*, *D* na mesma recta *CD* parallela ao plano commum das bases, e serem estas os triangulos equivalentes *AEF*, *BEF*, como construidos sobre a mesma recta *EF* parallela a *AB* (178). Mas o tetraedro *DBEF* pode ser considerado com a base *BDF*, e o vertice em *E*: logo o seu volume, ou o do tetraedro *CAEF* terá por valor $\frac{1}{3}\,B \times p''$. Consequentemente, sommando esses tres valores, teremos o do volume total do prisma triangular truncado; isto é, $V = \frac{1}{3}\,B \times (p + p' + p'')$.

326. *Schol.* Este Theorema é de grande utilidade para a avaliação dos volumes dos corpos polyedros, que se decompoem em prismas triangulares truncados.

327. Theor. *O volume de qualquer cylindro avalia-se, multiplicando a base pela altura.*

Seja (fig. 141) o cylindro AE. Denote A a altura, C a base, e V o volume. Digo que $V = C \times A$.

Demonstr. Si não é $V = C \times A$; seja $C \times A$ o valor do volume de outro cylindro maior, ou menor do que o proposto. Seja=volume do cylindro maior, da mesma altura, que tem por base o circulo concentrico C'. Imagine-se circumscripto ao cylindro proposto um prisma, cujas faces não encontrem a superficie do cylindro C'. Denote P a base desse prisma. Será o seu volume $= P \times A$ (322). Ora este volume é menor do que o do cylindro C': logo será $P \times A < C \times A$; isto é, $P < C$: o que é absurdo. Com egual raciocinio, imitando o que temos feito em outros logares, se demonstrará tambem não ser $C \times A$=volume de outro cylindro menor. Logo &c.

328. *Coroll.* Os volumes de dous cylindros similhantes estão entre si, como os cubos dos raios das suas bases, ou como os das suas alturas ou eixos. Com effeito, denotando C e c as respectivas bases, R e r os raios, A e a as alturas, E e e os eixos; como temos $C : c :: R^2 : r^2 :: A^2 : a^2 :: E^2 : e^2$ (192, 260), e $A : a :: R : r :: A : a :: E : e$; multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $C \times A : c \times a :: R^3 : r^3 ::$ &c.

329. Theor. *O volume de qualquer pyramide conica avalia-se, multiplicando o terço da base pela altura.*

Seja (fig. 142) a pyramide conica $ABCD$. Denote A a altura, C a base, e V o volume. Digo que $V=\frac{1}{3}C\times A$.

Demonstra-se discurrendo, como no cylindro.

330. *Coroll.* Os volumes de duas pyramides conicas similhantes estão entre si, como os cubos dos raios das suas bases, ou como os das suas alturas ou eixos. Deduz-se da mesma forma, que o Corollario precedente, com a unica differença de se screver na proporção $\frac{1}{3}\,C : \frac{1}{3}\,c$.

331. Theor. *O volume de qualquer sphera avalia-se, multiplicando o terço da área pelo raio.*

Seja (fig. 146) a sphera representada pela circumferencia C de um dos seus circulos maximos. Denote R o raio, A a área, e V o volume. Digo que $V=\frac{1}{3}A\times R$.

Demonstr. Si não é $V=\frac{1}{3}A\times R$; seja $\frac{1}{3}A\times R$ o valor do volume de outra sphera maior, ou menor do que a proposta. Seja=volume da sphera maior concentrica representada pela circumferencia C' de um dos seus circulos maximos. Imagine-se circumscripto á sphera proposta um polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da sphera C' (285). Denote S a área desse polyedro. Reflectindo que este pode tambem considerar-se, como um aggregado de pyramides, cujas bases são as faces do mesmo polyedro, cada uma de cada uma, e que todas tem o vertice no centro da sphera, e por altura o raio da mesma; será o seu volume $=\frac{1}{3}\,S\times R$ (323). Ora este volume é menor do que o volume da sphera C': logo será $\frac{1}{3} S \times R < \frac{1}{3} A \times R$; isto é, $S < A$: o que é absurdo (284). Com egual raciocinio se demonstrará tambem não ser $\frac{1}{3} A \times R =$ volume de outra sphera menor do que a proposta. Logo &c.

332. *Coroll.* 1.° Pois a área da sphera é quadrupla da do seu circulo maximo (302); segue-se, que o volume da mesma sphera se avaliará tambem, multiplicando o quadruplo da área do dicto circulo maximo pelo terço do raio; ou (o que vem a ser o mesmo) multiplicando a área do dicto circulo maximo por $\frac{2}{3}$ do diametro: e por isso o volume da sphera é $\frac{2}{3}$ do volume do cylindro a ella circumscripto.

333. *Coroll.* 2.° Os volumes de duas spheras estão entre si, como os cubos dos seus raios. Com effeito, denotando A, a as respectivas áreas, e R, r os raios; como temos $A : a :: R^2 : r^2$ (303), e $\frac{1}{3} R : \frac{1}{3} r :: R : r$; multiplicando ordenadamente estas duas proporções, resulta $\frac{1}{3} A \times R : \frac{1}{3} a \times r :: R^3 : r^3$.

334. Theor. *O volume de qualquer sector spherico avalia-se, multiplicando o terço da área do segmento spherico respectivo pelo raio.*

Seja (fig. 161) o sector spherico $CAEF$. Denote R o raio CA, A a área do segmento spherico EAF, e V o volume do sector. Digo que $V = \frac{1}{3} A \times R$.

Demonstr. Si não é $V = \frac{1}{3} A \times R$; seja $\frac{1}{3} A \times R$ o valor do volume de outro sector spherico maior, ou menor do que o proposto. Seja = volume do sector spherico maior *CMLN*, pertencente á sphera concentrica, cujo raio é *CM*. Imagine-se circumscripto á sphera, de que é sector o proposto, um polyedro, cujas faces não encontrem a superficie da outra sphera, de modo que um dos lados do polygono circum-voluto termine em um ponto *o* entre *EL* e *DL*. Imaginem-se dos vertices dos angulos polyedros do segmento polyedral, que tem por altura *ar*, rectas ao centro da sphera. Teremos o sector polyedral *Caoi*, o qual pode considerar-se, como um aggregado de pyramides, que tem todas o vertice no centro da sphera, e por altura o raio da mesma. Por conseguinte, denotando S a área desse segmento polyedral, será o volume de sector $Caoi = \frac{1}{3} S \times R$. Ora este volume é menor do que o do sector spherico *CMLN*: logo será $\frac{1}{3} S \times R < \frac{1}{3} A \times R$; isto é, $S < A$: o que é absurdo, por ser $S > A$, como ja observámos por occasião da demonstração do Theorema n.° 304. Do mesmo modo se demonstrará tambem não ser $\frac{1}{3} A \times R =$ volume de um sector spherico menor. Logo &c.

335. *Schol.* O volume de qualquer segmento spherico *EAF* menor do que um hemispherio se achará, tirando do volume do sector spherico *CAEF* o da pyramide conica recta *CEFE*: e o de qualquer segmento spherico *EBF* maior do que um hemispherio, se achará tirando do volume total da sphera o do segmento menor *EAF*.

FIM.

APPENDICE (*).

Dos circulos na sphera.

336. Theor. *Quaesquer dous circulos maximos em uma sphera cortam-se reciprocamente em duas partes eguaes.*

Demonstr. Como os circulos max. passam ambos pelo centro da sphera (262); a sua intersecção tambem passará. Mas o centro da sphera é centro dos mesmos circulos: logo essa intersecção é diametro de qualquer delles. Logo &c.

A figura, que então duas semi-circumferencias formam na superficie da sphera, chamaremos *lunula spherica.*

337. *Coroll.* Dous arcos de circ. max., menores cada um do que uma semi-circumferencia, não podem ter dous pontos communs, sem que se confundam inteiramente.

338. Theor. *O diametro da sphera, perpendicular a qualquer circulo da mesma sphera, passa pelo centro desse circulo.*

Demonstr. Consta da do n.° 262.

(*) As figuras deste Appendice são as da ultima Estampa.

Este diametro chama-se *eixo* do circulo; e os extremos do mesmo diametro *polos* do mesmo circulo.

339. *Coroll.* Logo qualquer ponto do eixo de um circulo dista egualmente de todos os pontos da circumferencia desse circulo (210). Si o circulo é max., a distancia dos seus polos á circumferencia é = corda do arco de 90° do circ. max.

Dos angulos sphericos.

340. O angulo, formado por dous arcos de circ. max. na superficie da sphera, chama-se *angulo spherico*. Continuados os lados do angulo até concurrerem, formarão uma lunula sph.

341. Theor. *Si os lados de um angulo sph. forem de 90° cada um; o seu vertice será polo do circulo max., que passar pelos extremos dos dictos lados.*

Seja (fig. 1) o angulo sph. *APB*: e sejam *AP*, *PB* de 90° cada um. Digo que o vertice *P* é polo do circ. max., de que é arco *AB*.

Demonstr. Seja *C* o centro da sphera. Tirem-se os raios *CP*, *CA*, *CB*. Pois são *AP*, *PB* de 90° cada um (hyp.); serão rectos os angulos *ACP*, *PCB* (29): e por conseguinte *PC* será perpendicular no centro *C* ás rectas *AC*, *BC*; e por isso *PC* tambem perpendicular no dicto centro ao plano do circulo CAB (206). Logo PC é o semi-eixo do circulo CAB; e por tanto P o seu polo (338).

342. Probl. *Dado um arco de circulo na superficie da sphera, achar um dos polos desse circulo.*

Seja (fig. 2) o arco AB.

Soluç. Ache-se o diametro do circulo, a que pertence esse arco, como fica dicto em o n.° 267. Seja este $A'B'$, e inscreva-se no circulo max. $A'B'H$, que tambem se achará, segundo o numero citado. Tire-se o diametro PH perpendicular a $A'B'$: e com o intervallo $A'P$, fazendo centro em A e depois em outro qualquer ponto E do mesmo arco, descrevam-se outros dous arcos; que se cortarão em dous pontos, ou estejam ambos da mesma parte do arco AB, ou não. Tome-se um destes P, que distar de terceiro ponto do dicto arco tanto, quanto dista de A e E. Digo que este é polo do circulo, de que é arco AB.

Si o arco dado for de circ. max.; tomar-se-ha entre as pontas do compasso a abertura ou corda de 90° do circ. max.

343. *Schol.* Fica pois manifesto, o que se fará, si por dous pontos dados na superficie da sphera quizermos descrever um arco de circulo de diametro dado, com tanto que este não exceda o da sphera, nem seja menor do que a corda do dicto arco: ou si tractarmos de continuar qualquer arco dado: ou si pedirmos, que por tres pontos dados na dicta superficie se faça passar uma circumferencia de circulo.

N. B. As figuras, que aqui considerarmos, devem-se intender descriptas na superficie da mesma sphera.

344. Theor. *Si em duas lunulas sph. de um hemispherio forem eguaes os arcos de circ. max. descriptos dos vertices dos seus angulos, como polos, e interceptos pelos seus lados; serão eguaes os angulos, as áreas, e as lunulas. E si os arcos forem deseguaes; será maior o angulo, a área, e a lunula, pertencentes ao arco maior.*

Sejam (fig. 3) as lunulas sph. *ABCDA*, *AECFA*: e seja o arco *BD*=arco *EF*, descriptos do vertice *A*, como polo. Digo que o angulo sph. *BAD* é =angulo sph. *EAF*; a área *ABCDA*=área *AECFA*; e as lunulas eguaes.

Demonstr. Imagine-se applicado o arco *AB* sobre o arco *AE*; e sobreposta a lunula *ABCDA* á lunula *AECFA*. O ponto *B* cairá em *E*, como equidistantes do ponto *A*. Mas pela mesma razão todos os pontos do arco *BD* devem então cair sobre o arco *EF*: logo o arco *BD* se ajustará sobre o arco *EF*; e o ponto *D* cairá em *F*, por ser *BD*=*EF* (hyp.). Logo tambem *AD* se ajustará sobre *AF* (337); e o angulo *BAD* cobrirá exactamente o angulo *EAF*; e a área *ABCDA* a área *AECFA*. Logo &c.

A 2.ª parte demonstra-se, como a 2.ª do n.º 24.

345. *Corell.* 1.º Reciprocamente: si em duas lunulas sph. de um hemispherio forem eguaes os

angulos; serão eguaes os arcos de circ. max. descriptos dos seus vertices, como polos, e interceptos pelos seus lados; as áreas; e as lunulas. E si os angulos forem deseguaes; será maior o arco, a área, e a lunula, pertencentes ao angulo maior.

346. *Coroll.* 2.° Dividindo pois em quaesquer partes eguaes um arco de circ. max. *BD* descripto do vertice de um angulo sph. *BAD*, como polo, e intercepto pelos lados do dicto angulo; e tirando por cada um dos pontos dessa divisão e pelo dicto vertice outras tantas semi-circumferencias de circ. max.; o angulo proposto ficará tambem dividido em outras tantas partes eguaes entre si; e da mesma forma a lunula sph., que elle determina. E concluir-se-ha (discurrendo como em o n.° 26), que o arco *BD* é para o angulo sph. *BAD*, ou para a lunula *ABCDA*, como qualquer numero daquellas partes de *BD* para o mesmo numero destas de *BAD*, ou da lunula *ABCDA*.

347. Theor. *Os angulos sph. estão entre si, como os arcos de circ. max. descriptos dos seus vertices, como polos, e interceptos pelos seus lados: ou tambem como as áreas das lunulas sph., que elles determinam.*

Prova-se por um raciocinio em tudo similhante ao do n.° 28.

348. *Coroll.* Pois os angulos sph. são proporcionaes a os arcos de circ. max. descriptos dos seus

vertices, como polos, e interceptos pelos seus lados; segue-se, que todo o angulo sph. pode ser representado pelo dicto arco: e é neste sentido que dizemos, que lhe serve de medida.

349. *Schol.* O angulo sph. pode tambem ser representado pelo angulo diedro, formado pelos planos dos circ. max., de que os seus lados são arcos: ou tambem pelo angulo rectilineo, que mede a inclinação reciproca dos dictos planos.

Com effeito (fig. 1) o arco AB, que mede o angulo sph. APB, mede egualmente o angulo rectilineo ACB, medida da inclinação reciproca dos planos ACP, PCB.

Assim os angulos sph. gosam de todas as propriedades dos angulos diedros, ou dos angulos rectilineos. Por ex.

1.° Um arco de circ. max., que encontra outro arco de circ. max. na superficie da sphera, faz com este, prolongado si for necessario, dous angulos sph., cada um de sua parte, que junctos valerão 180°.

Si estes angulos são eguaes, isto é, cada um de 90°, dizem-se *rectos*, e o arco incidente *perpendicular*: &c.

2.° Si um arco de circ. max. for perpendicular a outro arco de circ. max.; tambem este o será a respeito daquelle.

3.° Do mesmo ponto de um arco de circ. max. não se pode levantar mais do que um arco de circ. max. perpendicular a aquelle outro.

4.° Os angulos sph. verticalmente oppostos são eguaes, &c.

350. Probl. *No extremo de um arco dado de circ. max. fazer um angulo sph. = outro angulo sph. dado.*

Seja (fig. 4) o arco *AB*; o extremo *A*; e o angulo sph. *bac*.

Soluç. Do vertice *a*, como polo, descreva-se o arco de circ. max. *bc*: e do ponto *A*, como polo, descreva-se tambem o arco de circ. max. *BD* indefinido. Tome-se *BC* = *bc*: e tire-se o arco de circ. max. *AC* (343). Digo que o angulo sph. *BAC* é = *bac*: como se pedia.

351. Probl. *Dividir um angulo sph. em duas partes eguaes.*

Seja (fig. 5) o angulo sph. *APB*.

Soluç. Do vertice *P*, como polo, descreva-se o arco de circ. max. *AB*; o qual se divida pelo meio em *D*. Tire-se por *D* e *P* o arco de circ. max. *DP*. Digo que o angulo sph. *APB* está dividido em duas partes eguaes *APD*, *DPB* (347): como se pedia.

352. Theor. *Si um arco de circ. max. for perpendicular a outro arco de circ. max.; aquelle passará pelos polos deste. E reciprocamente.*

Seja (fig. 6) o arco de circ. max. *AB* perpendicular ao arco de circ. max. *AC*. Digo que o arco *AB*, prolongado sendo necessario, passará pelos polos do circ. max. *AC*.

Demonstr. Tome-se em *AB*, continuado si for necessario, para uma ou outra parte a grandeza AP de 90°. Tome-se do mesmo modo AC de 90°; e tire-se o arco PC de circ. max. Pois o angulo BAC é recto (hyp.); será PC de 90° (348). Mas tambem PA é de 90° (constr.). Logo P é polo de AC (341).

Reciprocamente: si P é polo de AC; será PA perpendicular a AC. Com effeito o arco, que do ponto A se levantar perpendicular a AC, deve passar pelo polo P, como acabamos de ver. Logo este será o mesmo arco PA, visto ser o unico, que pelos dous pontos A, P, se pode tirar (337).

353. *Coroll.* Sobre um arco de circ. max., e de um ponto situado na superficie da sphera, que não seja polo desse arco, não se pode abaixar dous arcos perpendiculares, cada um de seu circ. max. Por que então esses dous arcos perpendiculares, continuados, passariam pelos polos daquelle outro: e por conseguinte as circumferencias dos dous circ. max. se cortariam em tres pontos: o que é impossivel (16, 55).

354. *Schol.* Vê-se por tanto: que so por um ponto, que for polo de um circ. max., se pode conduzir dous e mais arcos de circ. max. perpendiculares á circumferencia daquelle outro: e que por ponto, que não for polo, so pode passar uma circumferencia perpendicular.

355. Probl. *De um ponto dado na superficie da sphera, e que não seja polo de um arco dado de circ.*

max., tirar um arco de circ. max. perpendicular ao arco dado, continuado si for necessario.

Seja (fig. 6) o ponto A, ou B; e o arco AC. *Soluç.* Ache-se um dos polos P desse arco (342): e por este e pelo ponto dado A, ou B, tire-se o arco de circ. max., por ex. AP. Digo que AP é o arco perpendicular pedido (352).

A respeito do ponto B, isto é, si o ponto dado não está no arco dado, ou no seu prolongamento, qualquer dos dous BA, BD da semi-circumferencia ABD satisfaz ao Problema.

Dos triangulos sphericos.

356. A figura terminada na superficie da sphera por tres arcos de circ. max. chama-se *triangulo spherico*: e cada um dos dictos arcos *lado* do triangulo. Os triangulos sph. se distinguem, quanto aos seus lados, com os mesmos nomes, que démos aos triangulos rectilineos (82).

357. Theor. *Em todo o triangulo sph. não ha lado* $= 180°$.

Seja (fig. 7) o triangulo sph. ABC.

Demonstr. 1.° Si é possivel, seja um dos lados $BC = 180°$. Continue-se BA até concurrer em C com BC (336). Será $BADC = 180°$: e tambem ADC, e AC, eguaes cada um a 180° (337): isto é, $BADC = ADC$: absurdo.

358. *Schol.* Posto que nos triangulos sph. não ha lado $= 180°$, pode comtudo haver um $> 180°$. Os triangulos sph. porém, que unicamente consideramos, são os que tem cada um dos seus lados $< 180°$. Não se julgue comtudo, que não possamos calcular aquelles triangulos sph., que tem (fig. 8) um lado $AEC > 180°$; por quanto o arco AC, que lhe falta para 360°, forma com os outros dous lados um triangulo ABC, pelo qual viremos no conhecimento do primeiro.

359. Theor. *Em todo o triangulo sph. a somma de quaesquer dous lados é maior do que o terceiro: e a somma de todos tres menor do que 360°.*

Seja (fig. 9) o triangulo sph. ABC. Digo que a somma de quaesquer dous lados, por ex. $AB + BC > AC$: e $AB + BC + AC < 360°$.

Demonstr. Seja D o centro da sphera. Tirem-se os raios AD, BD, CD. Será a somma dos angulos $ADB + CDB > ADC$: e $ADB + CDB + ADC < 360°$ (243, 244). Mas é AB a medida do angulo ADB; BC a do angulo CDB; e AC a do angulo ADC. Logo tambem $AB + BC > AC$: e $AB + BC + AC < 360°$.

360. Theor. *Si em algum triangulo sph. forem eguaes dous angulos; os lados, que lhes são oppostos, serão eguaes. E si forem desiguaes dous angulos; será maior o lado opposto ao angulo maior.*

1.° Seja (fig. 10) no triangulo sph. ABC o angulo $ACB = BAC$. Digo que $AB = BC$.

Demonstr. Produza-se AC até completar a circumferencia $ACGFA$; e AB, CB até concurrerem no ponto E. Por ser $AB + BG = 180°$, e tambem $BG + GE = 180°$; será $AB = GE$. Do mesmo modo se mostrará $AC = FG$. Ora o angulo BAC é $= BGC = FGE$ (349, 4.°); e o angulo $ACB = AFB = EFG$: logo tambem $BAC = EFG$, e $ACB = FGE$; por ser $ACB = BAC$ (hyp.). Isto posto, é facil ver que ajustando-se exactamente o arco AC sobre o seu egual FG, os arcos AB e FE, BC e GE, tambem se ajustarão perfeitamente entre si; pela egualdade dos angulos BAC e EFG, ACB e FGE. Logo é $BC = GE$. E logo $AB = BC$; por ser $AB = GE$ como se mostrou.

2.° Seja porém (fig. 11) o angulo $ACB >$ angulo BAC. Digo que $AB > BC$.

Demonstr. Faça-se o angulo $ACD = BAC$; cujo lado CD encontrará AB em um ponto D entre A e B. Será $AD = CD$ (1.°). Mas é $CD + DB > BC$ (359). Logo tambem $AD + DB$, isto é $AB > BC$.

361. *Coroll.* Reciprocamente: si em algum triangulo sph. forem eguaes dous lados; os angulos, que lhes são oppostos, serão eguaes. E si forem deseguaes dous lados; será maior o angulo opposto ao lado maior.

362. Theor. *Em todo o triangulo sph. isosceles o arco do circ. max., que divide pelo meio o angulo formado pelos lados eguaes, cae perpendicularmente no meio do lado opposto ao dicto angulo.*

Seja (fig. 10) o triangulo sph. isosceles *ABC*; cujo angulo *ABC* formado pelos lados eguaes *AB*, *BC*, está dividido em duas partes eguaes pelo arco de circ. max. *BD*. Digo que este arco *BD* cae perpendicularmente no meio do lado *AC*.

Demonstr. Observe-se a construcção precedente, onde já fica provado ser $AB = GE$: e continue-se *DB* até *E*. Do mesmo modo se pode mostrar que é $DB = HE$, e $AD = GH$. Logo temos $BC = GE$; por ser $BC = AB$ (hyp.). Ora o angulo *CBD* é $= ABD$ (hyp.) $= HBG$ (349, 4.°) $= GEH$: si ajustarmos o angulo *CBD* com o angulo *GEH*; o ponto *C* cairá em *G*, e o ponto *D* em *H*. Por conseguinte o arco *CD* tambem se ajustará sobre *GH*, e o angulo *BDC* cobrirá exactamente o angulo *EHG*. Logo é $CD = GH$; e $BDC = EHG$. Mas tambem mostrámos ser $AD = GH$; e é o angulo $EHG = FHB = ADB$. Logo $AD = CD$; e $ADB = BDC$. E por tanto *BD* perpendicular no meio de *AC* (349, 1.°).

363. *Coroll.* 1.° Reciprocamente: em todo o triangulo sph. isosceles o arco de circ. max., que se levantar perpendicularmente no meio do lado opposto ao angulo formado pelos lados eguaes, passará pelo vertice do dicto angulo, e o dividirá em duas partes eguaes. Por quanto o arco, que assim dividir o angulo, será perpendicular no meio do lado opposto: e ahi não pode haver mais do que um arco perpendicular (349, 3.°).

364. *Coroll.* 2.° Logo o arco de circ. max., que se tirar perpendicular no meio de outro arco de circ. max., terá todos os seus pontos equidistantes dos extremos deste outro arco.

365. *Coroll.* 3.° Consequentemente o arco de circ. max., que passar por dous pontos, cada um dos quaes diste egualmente dos extremos de outro arco de circ. max., será perpendicular a este, e o dividirá pelo meio; não estando os dictos dous pontos na distancia de 180°, um do outro.

366. Theor. *Si em dous triangulos sph., sendo dous lados de um respectivamente eguaes a dous lados do outro, for o angulo formado pelos primeiros maior do que o angulo formado pelos segundos; o terceiro lado opposto ao maior angulo, será maior do que o terceiro opposto ao menor. E reciprocamente.*

Demonstra-se, como nos triangulos rectilineos (94).

367. Theor. *Si a somma de quaesquer dous angulos de um triangulo sph. for* $= 180°$*; a somma dos lados oppostos a esses angulos será tambem* $= 180°$. *Si for maior, será maior. Si for menor, será menor.*

Seja (fig. 12) o triangulo sph. ABC: e seja $ACB + BAC = 180°$. Digo que $AB + BC = 180°$.

Demonstr. Continuem-se os lados AB, AC até concurrerem em D. Por ser $BAC = BDC$; e $ACB + BCD = 180°$ (349, 1.°); será tambem $ACB + BDC = ACB + BCD$: e logo $BDC = BCD$. Mas então é $BC = BD$ (360): logo ajunctando a uma e outra parte AB, teremos $AB + BC = AB + BD$. Mas $AB + BD = 180°$. Logo &c.

A 2.ª e 3.ª parte demonstram-se do mesmo modo.

368. *Coroll.* Reciprocamente: si a somma de quaesquer dous lados de um triangulo sph. for $= 180°$; a somma dos angulos oppostos a esses lados será tambem $= 180°$. Si for maior, será maior. Si for menor, será menor.

369. Theor. *Em todo o triangulo sph., qualquer dos angulos é $< 180°$: a differença entre quaesquer dous < supplemento do terceiro: e a somma de todos tres $> 180°$.*

Seja (fig. 13) o triangulo sph. ABC. Digo que qualquer dos angulos, por ex. ACB é $< 180°$: a differença entre quaesquer dous, v. gr. $ABC - BAC < 180° - ACB$: e a somma de todos tres $ABC + BAC + ACB > 180°$.

Demonstr. Produzam-se os lados BA, BC até concurrerem em D.

1.° Temos $ACB + ACD = 180°$ (349, 1.°). Logo $ACB < 180°$.

2.° Seja $ABC > BAC$. Faça-se $BAE = ABC$: será $ABC - BAC = CAE$; e $AE = BE$ (360). Logo $CE < AE$. E logo $CAE < ACE$ (361); isto é, $ABC - BAC < 180° - ACB$.

3.° No triangulo ACD é $ACD - ADC < 180° - CAD$ (2.°); ou $ACD - ABC < BAC$. Logo $ACD < ABC + BAC$; isto é, $ABC + BAC > 180° - ACB$. E logo $ABC + BAC + ACB > 180°$.

370. *Coroll.* Um triangulo sph. pode ter dous ou tres angulos rectos: dous ou tres angulos obtusos. Quando tem dous angulos rectos, o vertice do terceiro angulo é polo do lado opposto (354).

Os triangulos sph. se distinguem, quanto aos seus angulos, com os mesmos nomes, que démos aos triangulos rectilineos.

Dos casos de egualdade dos triangulos sph.

371. Theor. *Dous triangulos sph. são eguaes:*

1.° *Quando tem dous lados respectivamente eguaes, e similhantemente dispostos, e egual o angulo formado por esses dous lados.*

2.° *Quando tem dous angulos respectivamente eguaes, e similhantemente dispostos; e egual o lado adjacente a esses dous angulos.*

3.° *Quando tem tres lados respectivamente eguaes, e similhantemente dispostos.*

4.° *Quando tem tres angulos respectivamente eguaes, e similhantemente dispostos.*

Os primeiros tres casos demonstram-se, como os mesmos tres da egualdade dos triangulos rectilineos. O 4.° demonstra-se pela maneira seguinte.

Sejam (fig. 14) os triangulos sph. ABC, abc: e seja o angulo $BAC = bac$; $ABC = abc$; $ACB = acb$. Digo que o triangulo ABC é egual ao triangulo abc.

Demonstr. Si os triangulos não são eguaes; não será $AB = ab$: por que, si o for, serão eguaes os triangulos (2.°). Seja pois $AB > ab$. Corte-se $AB' = ab$; e faça-se no ponto B' um angulo $= abc$, que será $AB'C'$, ou $AB'C''$, conforme o lado $B'C'$, ou $B'C''$

cortar ou não o lado BC. Será então o triangulo $AB'C'$, ou $AB'C''$, egual ao triangulo abc (2.°), e por tanto o angulo $AB'C'$, ou $AB'C'' = ABC$; e $AC'B'$, ou $AC''B' = ACB$. Seja o triangulo $AB'C'$. Serão os angulos $D'BB' + BB'D' = 180°$; por ser $AB'C' = ABC$, e $AB'C' + BB'C' = 180°$. Logo $D'B' + D'B = 180°$ (367): e pela mesma razão $D'C' + D'C = 180°$: donde $D'B' + D'C' + D'B + D'C = 360°$; isto é, $B'C' + BC = 360°$: o que é impossivel (358). Pois então seja o triangulo $AB'C''$. Produzam-se os lados BC, $B'C''$ até concurrerem em D. Por ser $DBB' + ABC = 180°$, e $DB'B = AB'C'' = ABC$, será $DBB' + DB'B = 180°$; e por isso $DB + DB' = 180°$. Mas tambem, por ser $DC''C$ supplemento de $AC''B' = ACB$, é $DC''C + DCC'' = 180°$; e conseguintemente $DC + DC'' = 180°$. Logo $DB + DB' = DC + DC''$: manifesto absurdo.

372. *Schol.* 1.° Quando os dous triangulos sph. não tem as suas partes similhantemente dispostas, não se podem sobrepor um ao outro. Comtudo, ainda que se não ajustem em figura, nem por isso deixam de ter todas as suas partes respectivamente eguaes, quando nelles se verifique algum dos quatro casos. Por ex. o 1.°

Sejam (fig. 15) os triangulos sph. ABC, abc: e seja $AB = ab$; $BC = bc$; e o angulo ABC = angulo abc. Digo que $AC = ac$; o angulo BAC = angulo bac; o angulo BCA = angulo bca; e a área $ABCA$ = área $abca$.

Demonstr. Produza-se AC até completar a circumferencia $ACDFA$; e AB, BC até concurrerem em E. Provar-se-ha, como em o n.° 360, ser $AB = DE$, *BC* = *FE*, *AC* = *DF*, o angulo *ABC* = *FED*, o angulo *BAC* = *EDF*, e o angulo *ACB* = *DFE*. Pelo que nos triangulos *DEF*, *abc*, será tambem *DE* = *ab*, *EF* = *bc*, e o angulo *E* = angulo *b*. Mas estes dous triangulos são absolutamente eguaes, por quanto se podem ajustar perfeitamente entre si: logo é *ac* = *DF* = *AC*, o angulo *a* = *EDF* = *BAC*, e o angulo *c* = *DFE* = *ACB*. Resta pois so mostrar a egualdade das áreas.

Sejam (fig. 16) os triangulos *ABC*, *abc* os propostos. Circumscrevam-se-lhes (343) os circulos *ADEFA*, *adefa*, cada um ao seu. E' facil ver que estes circulos são eguaes, como circumscriptos a triangulos, cujos arcos, e por conseguinte as cordas, são eguaes. Logo serão eguaes entre si os segmentos sph., de que elles são bases. Isto posto; applique-se o ponto *A* ao ponto *b*; e ajuste-se o arco *ADB* sobre o arco *bda*. O ponto *B* cairá em *a*, por ser *ADB* = *adb* (51); e o lado *AB* se ajustará sobre o lado *ba*, por ser cada um $< 180^{\circ}$ (337). Logo o spaço *ADBA* cobrirá exactamente o spaço *adba*; e logo as áreas destes spaços são eguaes entre si. Do mesmo modo se mostrará a egualdade respectiva dos outros spaços *AFCA* e *afca*, *BECB* e *becb*. Ora as áreas dos dous segmentos sph. são eguaes pela egualdade dos segmentos; e compoem-se desses spaços respectivamente eguaes e de um triangulo sph. cada uma. Logo as áreas destes dous triangulos sph. são tambem eguaes entre si.

373. *Schol.* 2.° Podem tambem dous triangulos sph. ser, ou não ser, eguaes em todas as suas partes:

1.° Quando dous lados de um forem respectivamente eguaes a dous lados do outro, e egual o angulo opposto a um dos lados eguaes.

2.° Quando dous angulos de um forem respectivamente eguaes a dous angulos do outro, e egual o lado opposto a um dos angulos eguaes.

Com effeito (fig. 11) nos triangulos ABC, BCD, é o angulo B commum, o lado BC tambem commum, e pode ser $AC = CD$ ou o angulo A = angulo CDB; e comtudo os dous triangulos são evidentemente deseguaes.

Da área dos triangulos sph.

374. Theor. *A área de qualquer triangulo sph. é para a área da sphera, como a metade do excesso da somma dos tres angulos do triangulo sobre* 180° *é para* 360°.

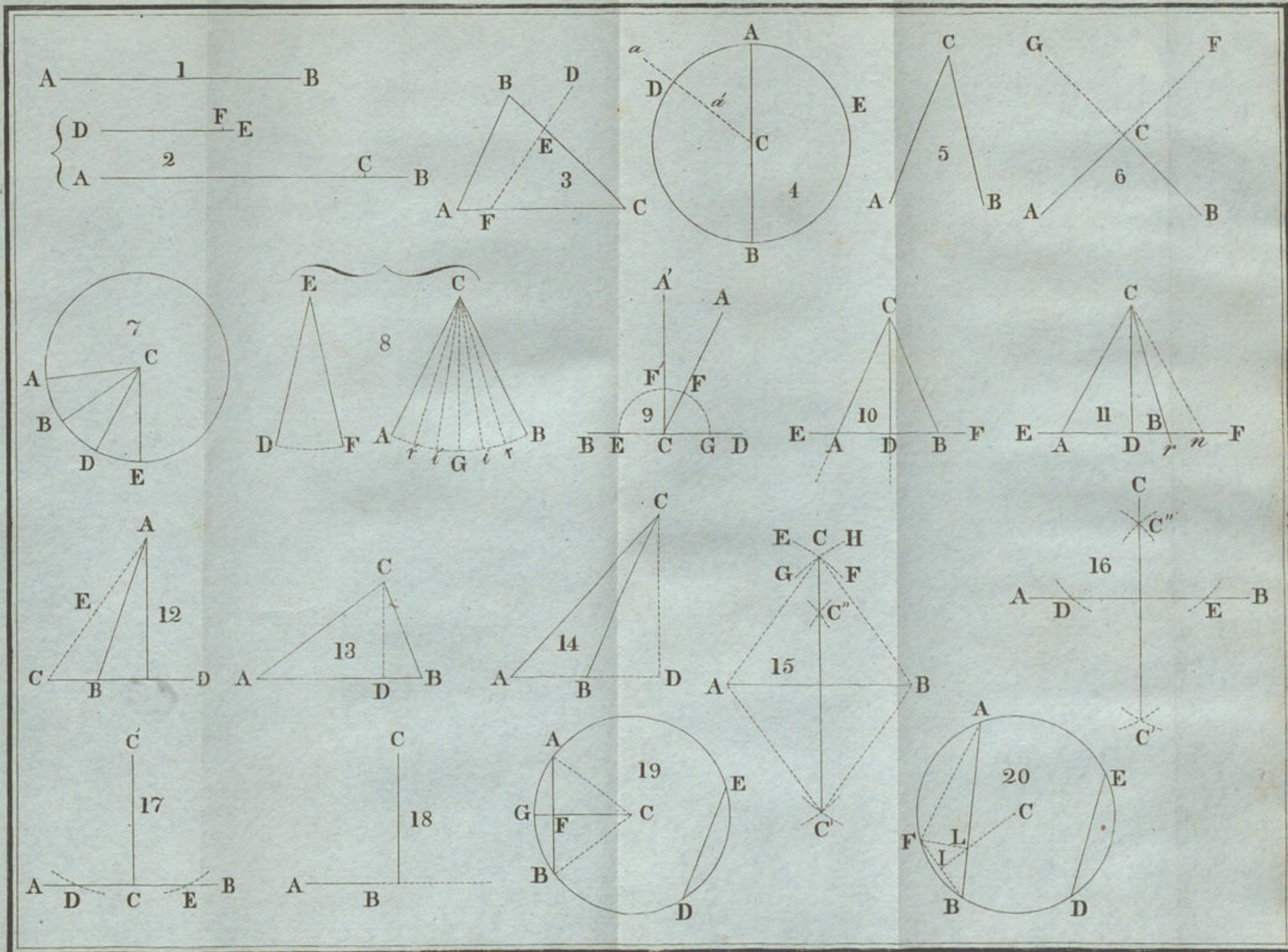
Seja (fig. 15) o triangulo sph. ABC. Denote S a somma dos tres angulos, a a área, e A a área da sphera. Digo que é $a : A :: \frac{S - 180^\circ}{2} : 360^\circ$.

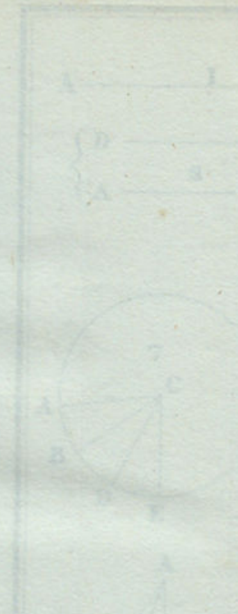
Demonstr. Segundo a construcção, que fizemos em o n.° 372, e do que alli fica dicto, concluimos que os triangulos ABC, DEF erão eguaes em todas as suas partes. Isto posto; por ser a área da lunula sph. $FACBF$ para a área da sphera, como o angulo ACB para 360° (347): e tambem a área da lunula sph. $DCABD$ para a área da sphera, como o angulo *BAC* para 360°: e finalmente a área da lunula sph. *EFBDE*, ou a do triangulo *BAC* mais a do triangulo *FBD*, para a área da mesma sphera, como o angulo *FBD* ou *ABC* para 360°: será (sommando todos os antecedentes) a área do hemispherio *ACDFA* mais o dobro da do triangulo *ABC* para a área da sphera, como a somma dos tres angulos do triangulo para 360°: isto é, $\frac{1}{2}A + 2a : A :: S : 360°$; ou $\frac{1}{2}A + 2a : \frac{1}{2}A :: S : 180°$. Donde $2a : \frac{1}{2}A :: S - 180° : 180°$. E logo $a : A :: \frac{S-180°}{2} : 360°$.

375. *Coroll.* Represente S' a semi-somma dos tres angulos de um triangulo sph., e A a área da sphera: será a área do triangulo $= \frac{S'-90}{360} \times A$.

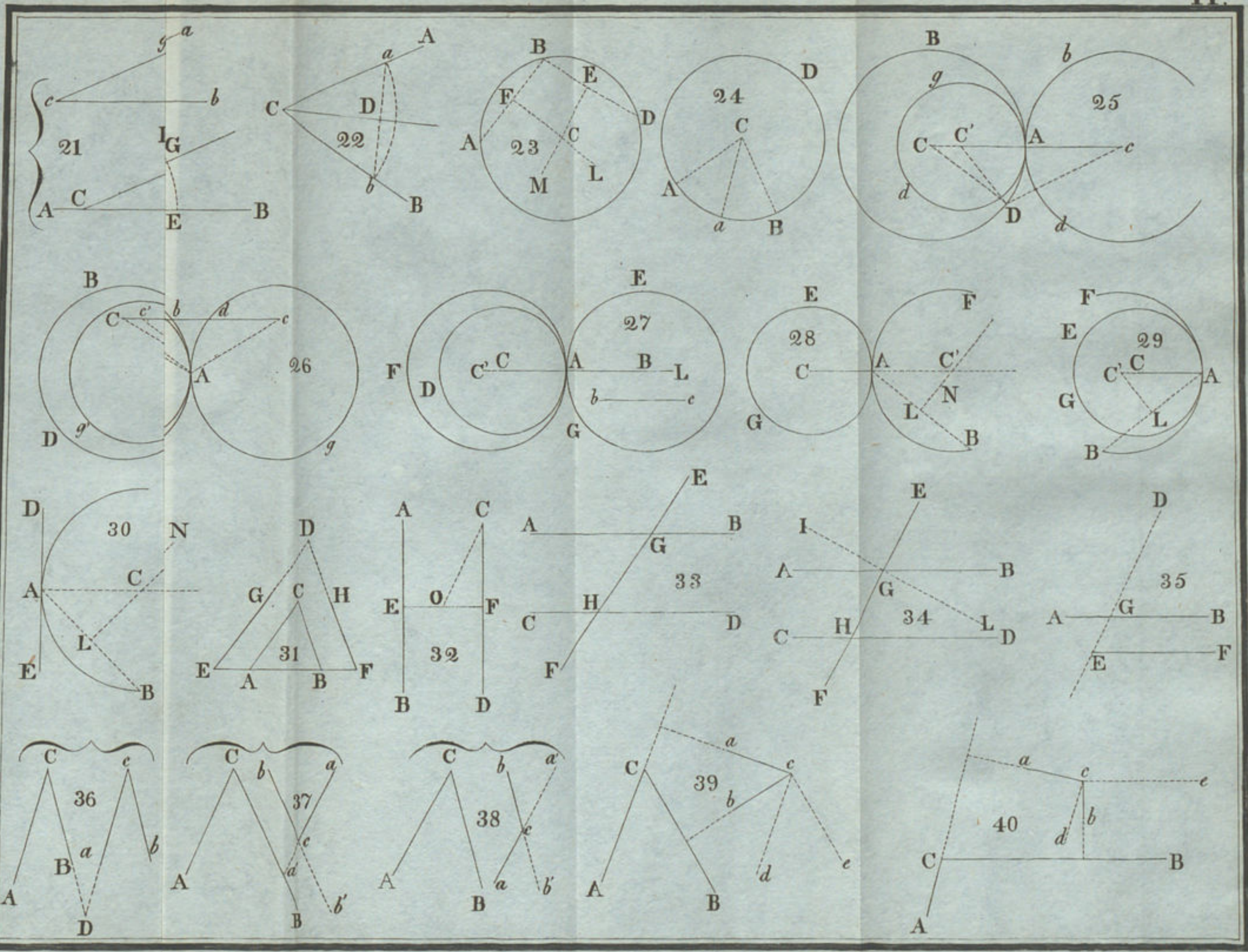
FIM.

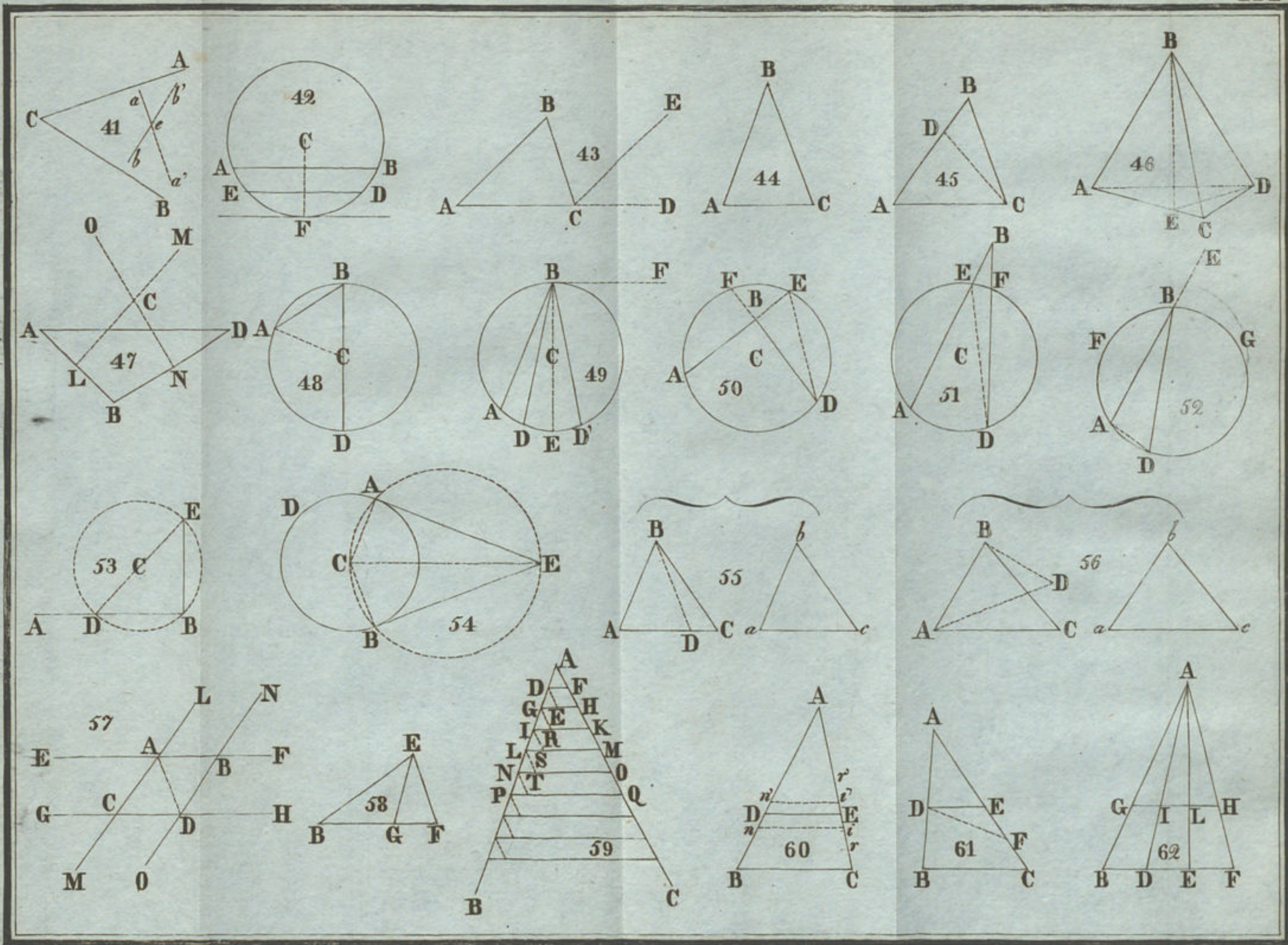
Typographia Austral, Beco de Bragança N.° 15.


1 A B
2 D F E A C B
3 B D E A F C
4 A a D d C E B
5 C A B
6 G F C A B
7 C A B D E
8 E C D F A B r i G i r
9 A' A F' F B E C G D
10 C E A D B F
11 C E A D B r n F
12 A E C B D
13 C A D B
14 C A B D
15 E C H G F C'' A B C'
16 C C'' A D E B C'
17 C' A D C E B
18 C A B
19 A G F C E B D
20 A E C F L I B D

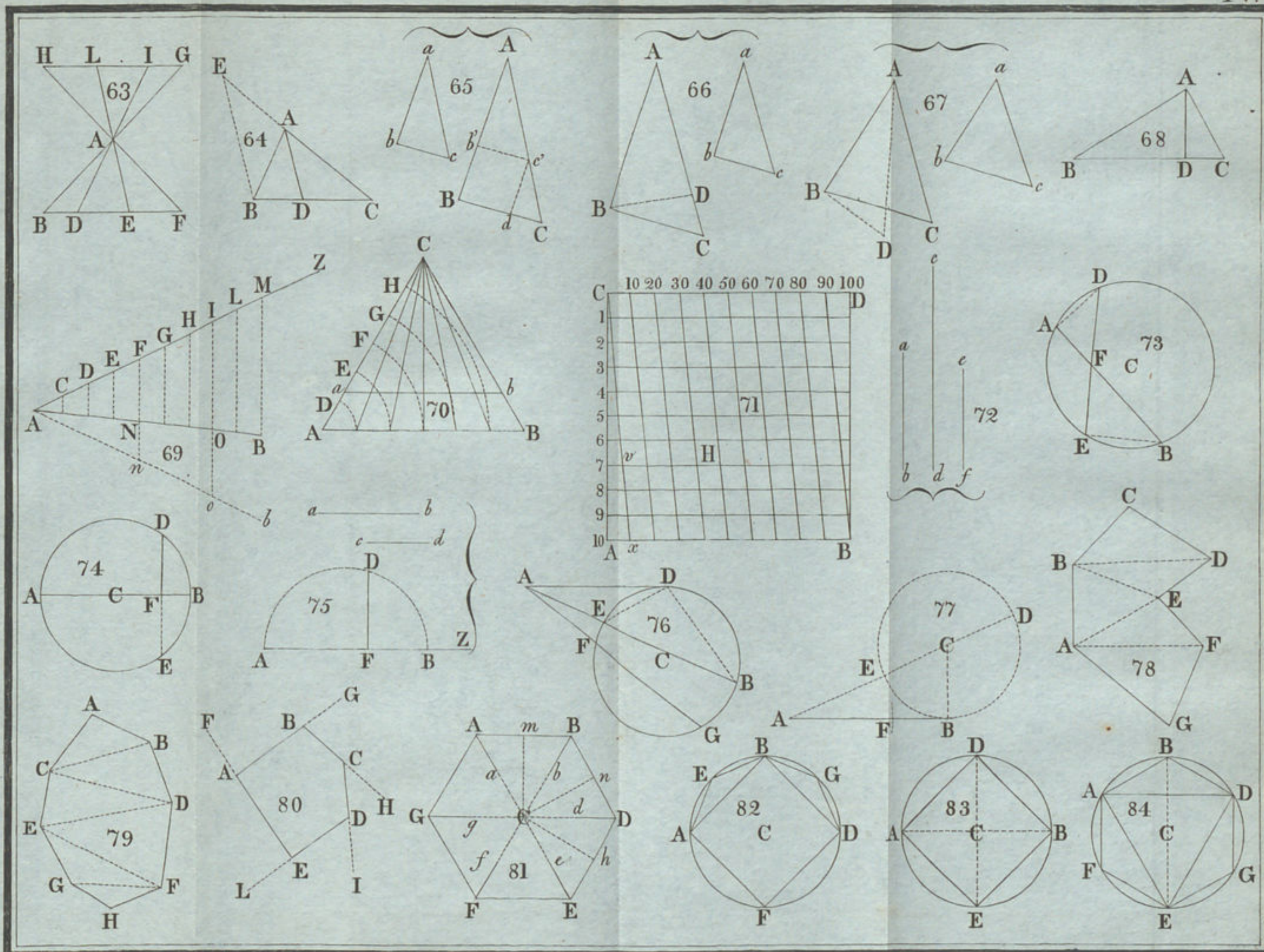


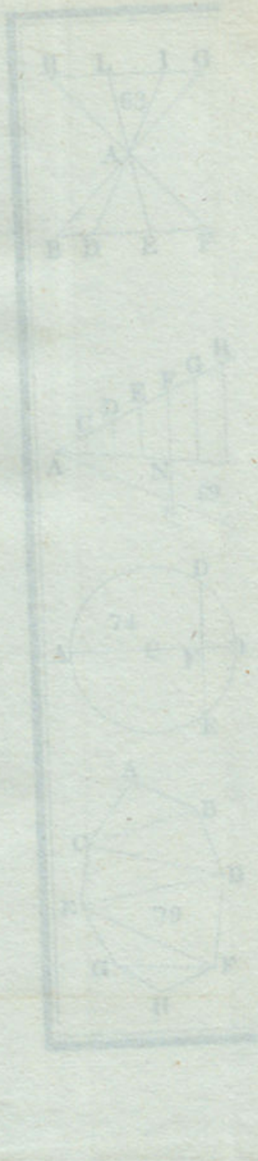
II.

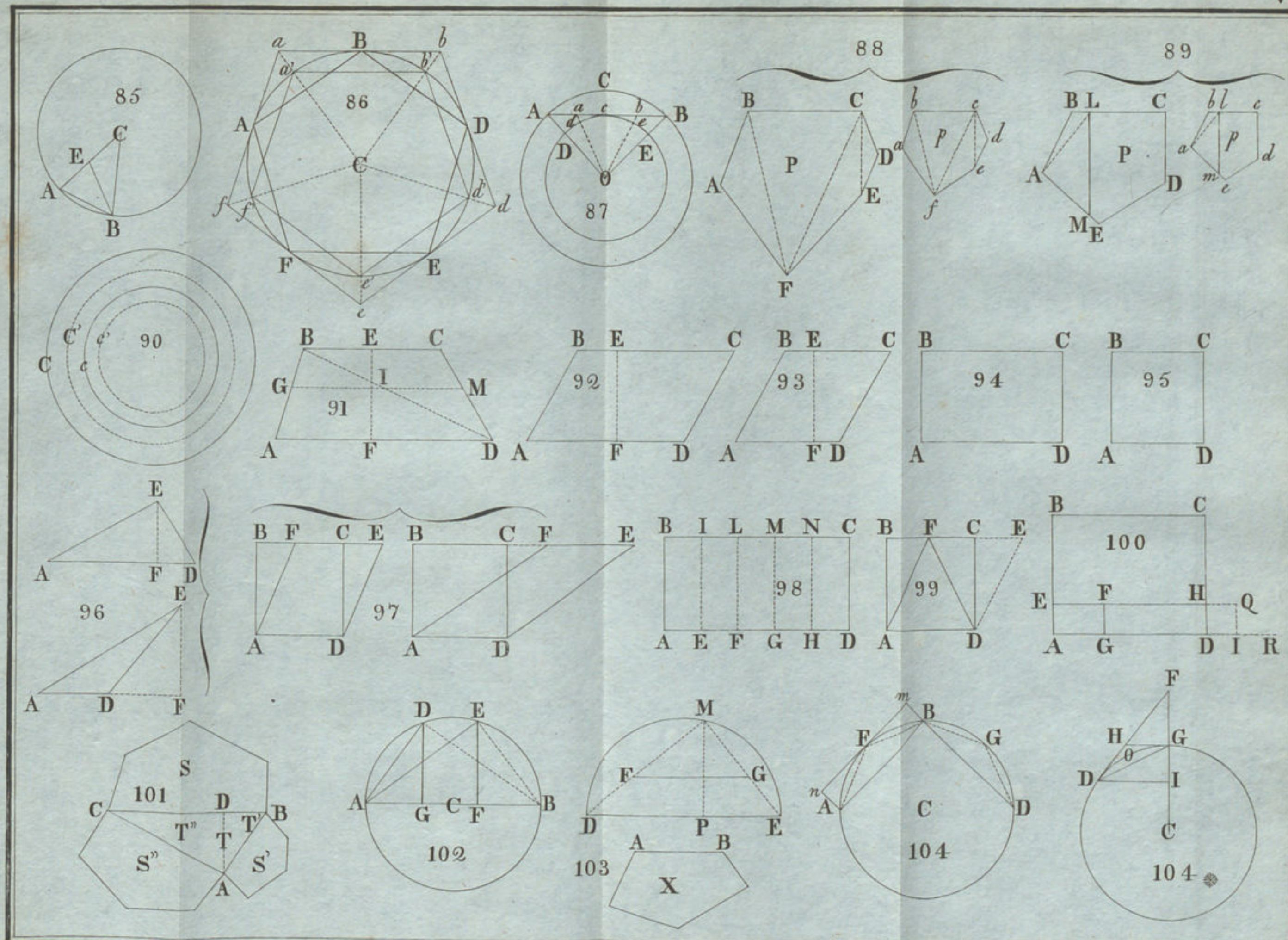


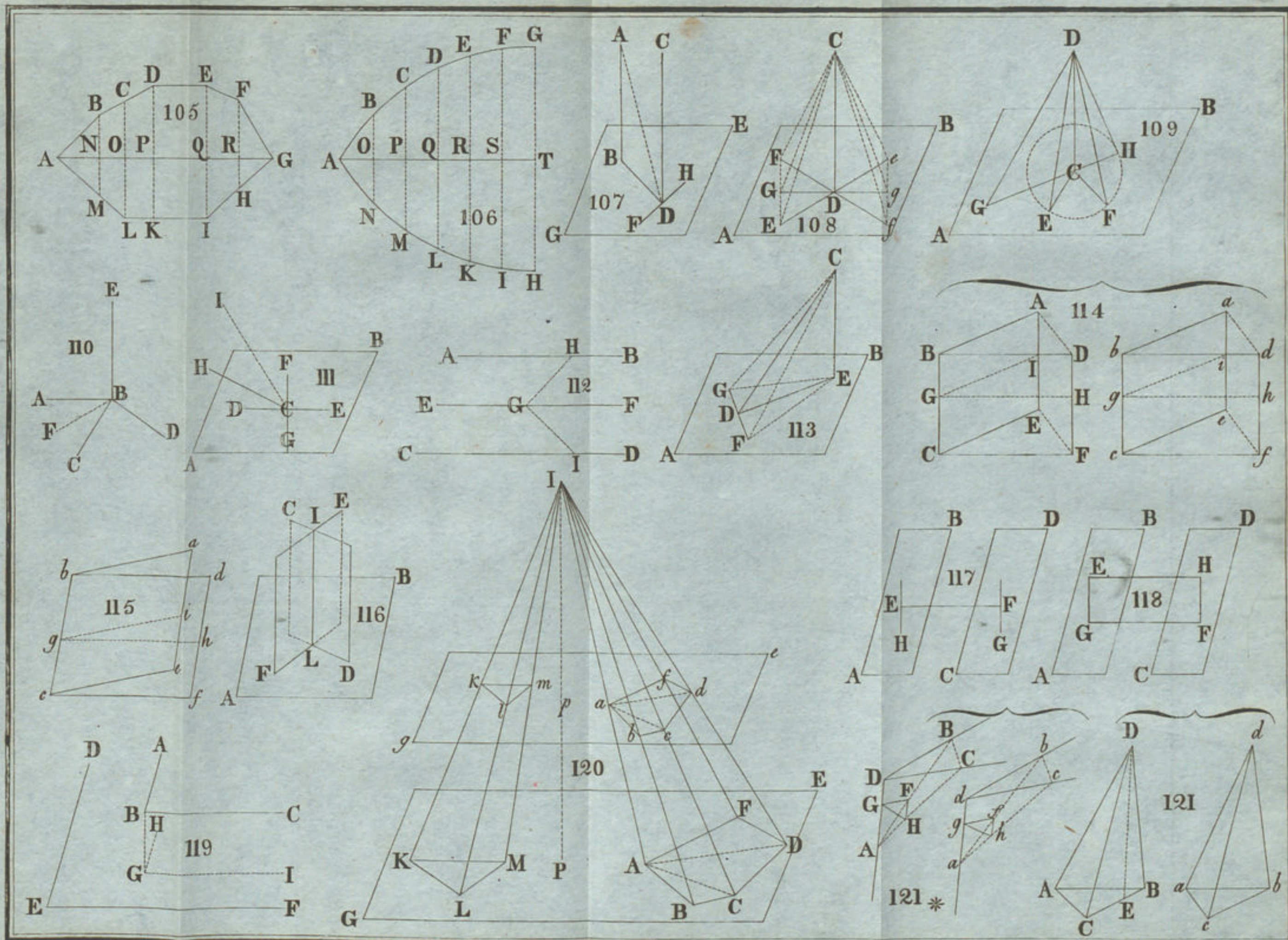

41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62

IV.

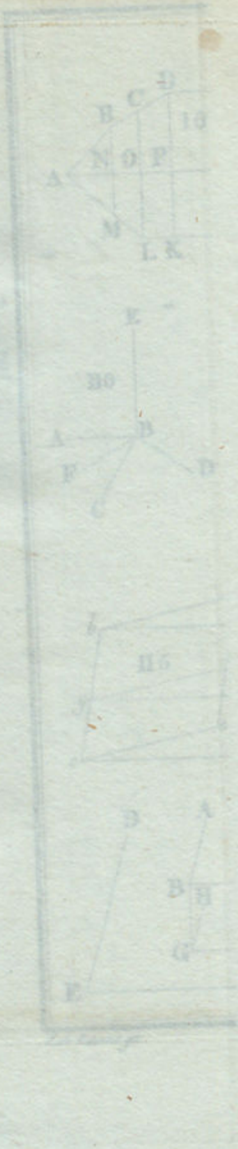

63
64
65
66
67
68
69
70
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84




85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
104

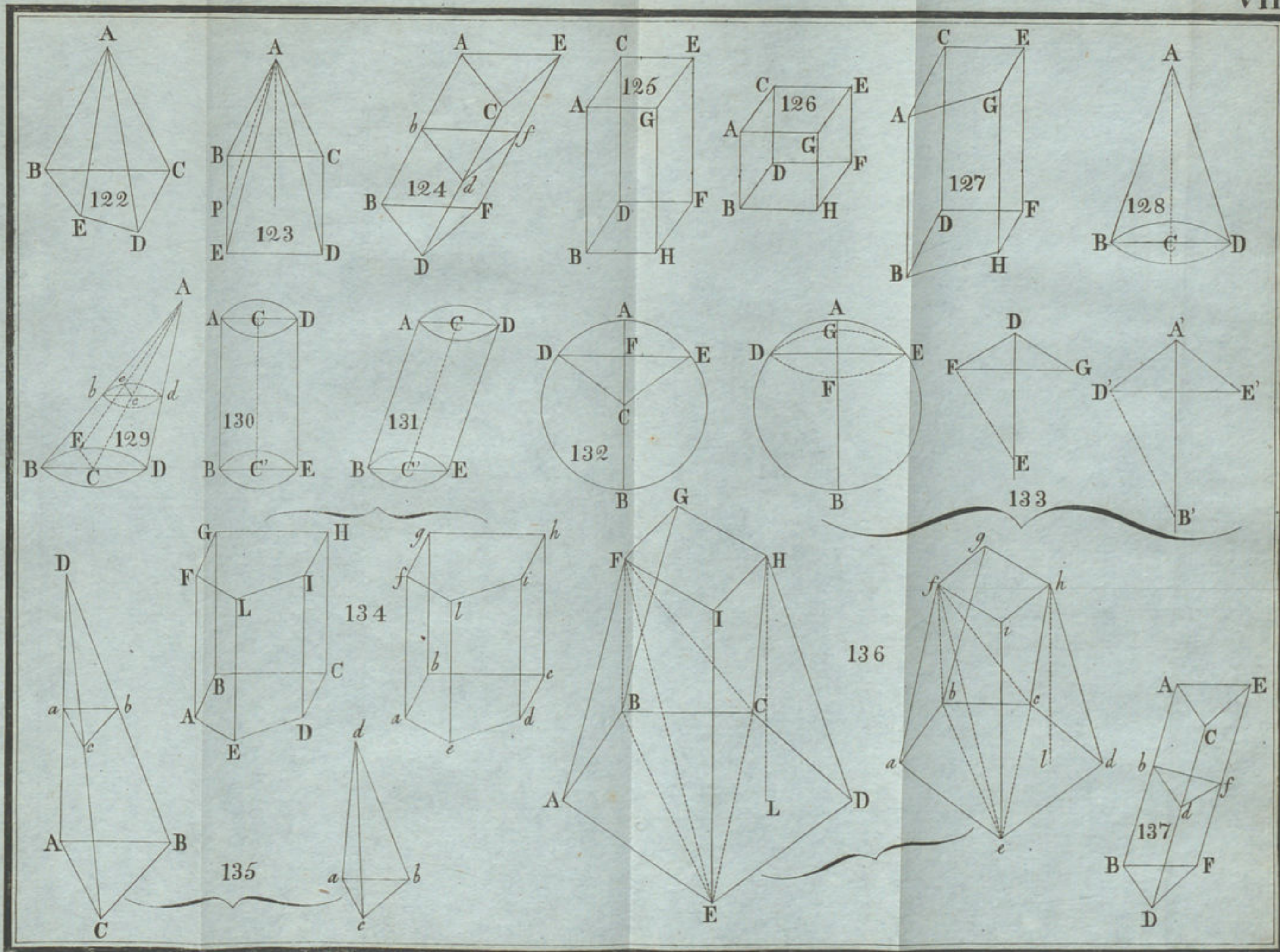

105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
121 *

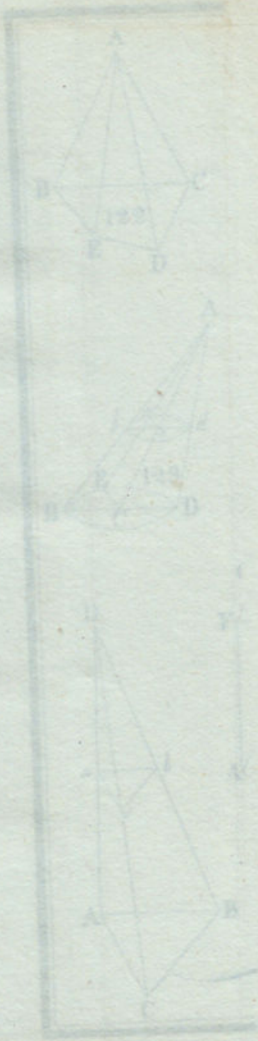
A. de Carmo gr.



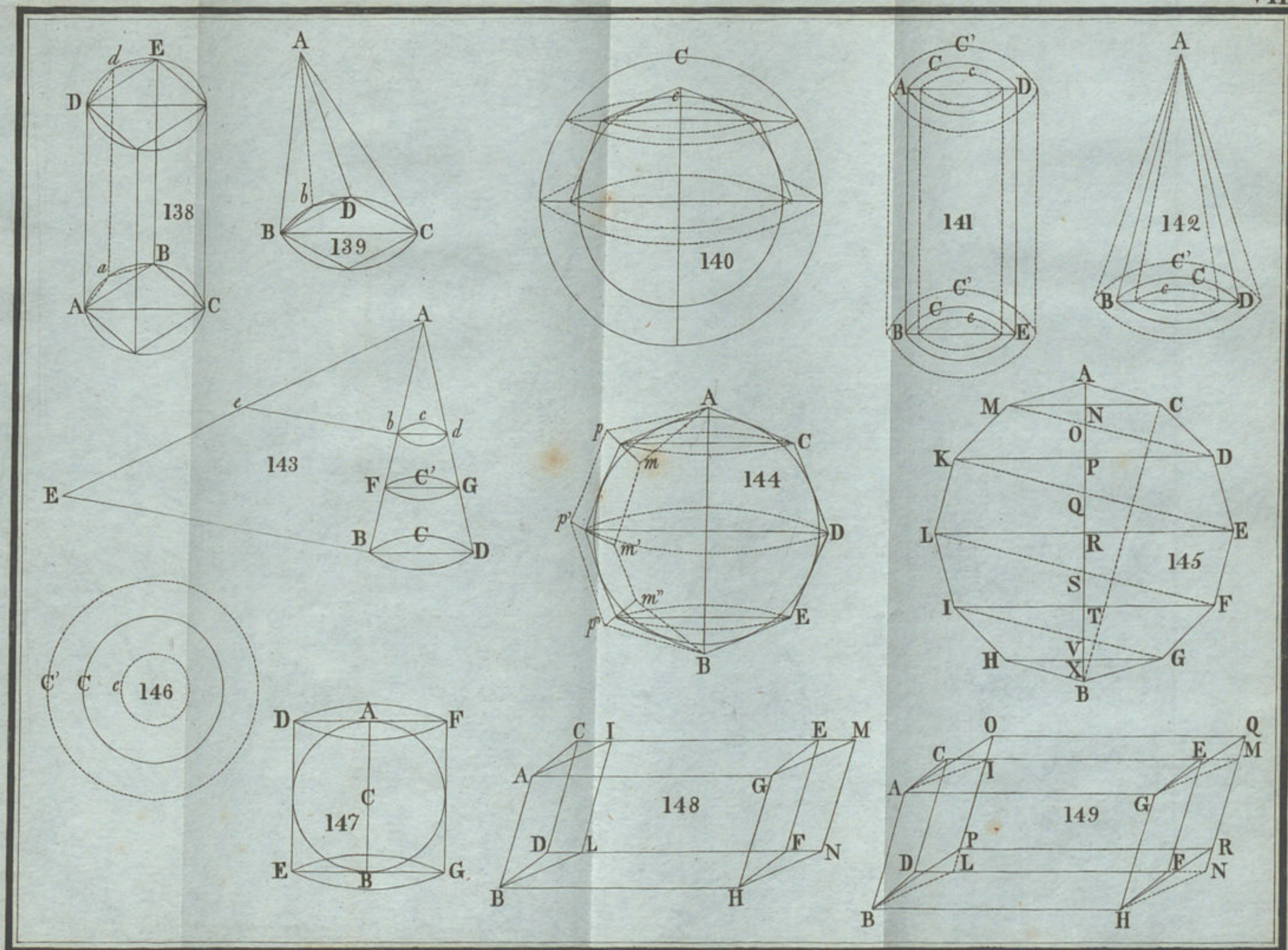
D
C
B
16
N
O
P
A
M
L K
E
30
A
B
F
D
C
b
II 5
A
B
H
G
F

VII.

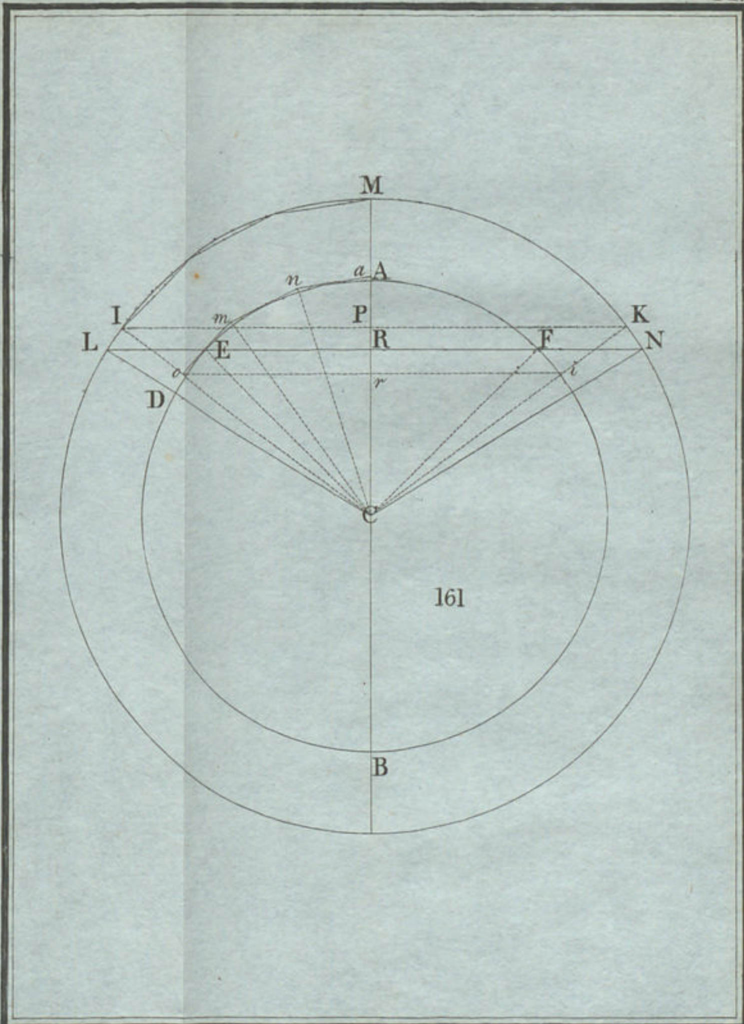


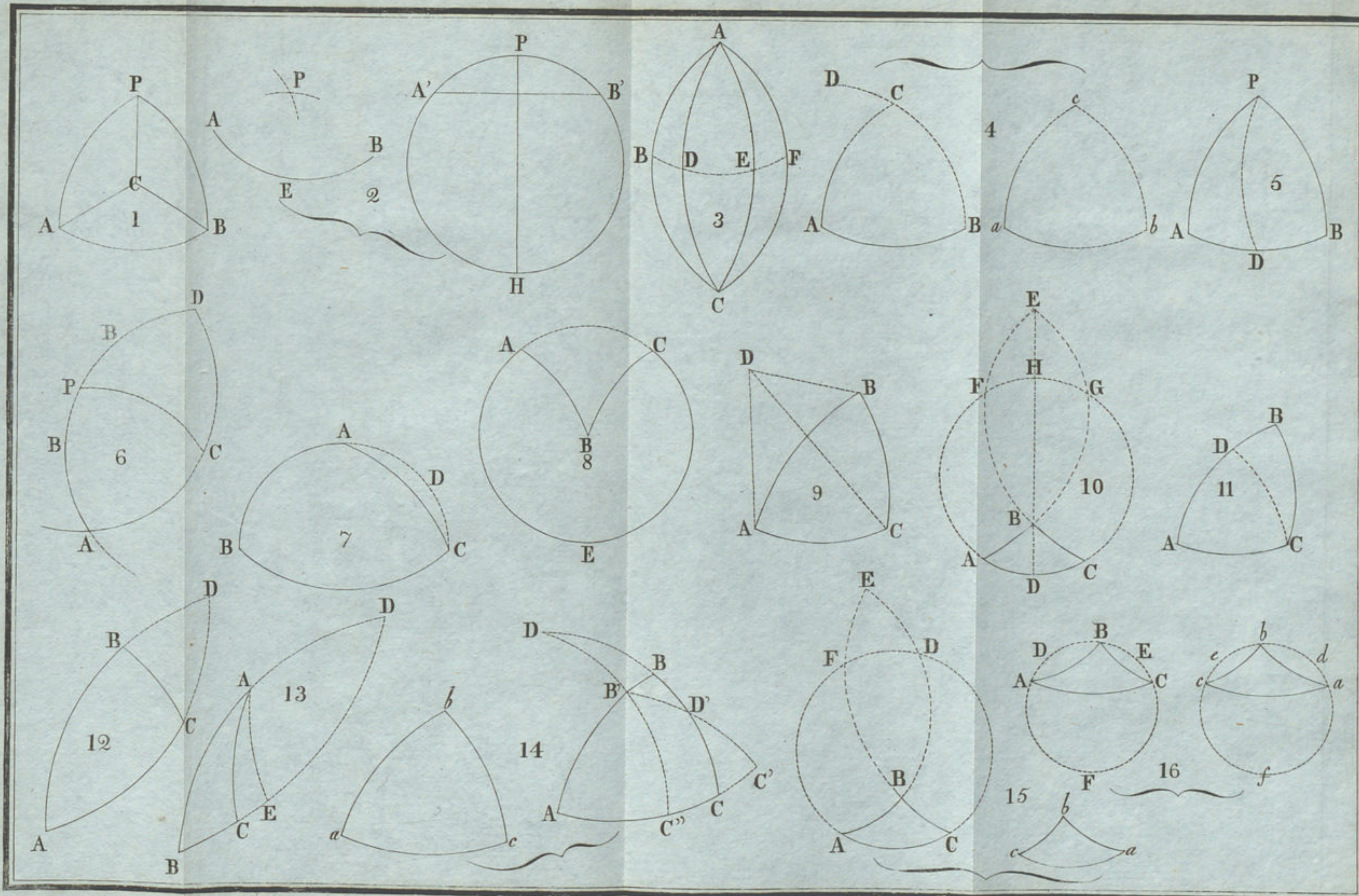


VIII.



X.




1
P C A B
2
P A B E
P A' B' H
3
A B D E F C
4
D C A B
c a b
5
P A B D
6
D B P B C A
7
A D B C
8
A C B E
9
D B A C
10
E H F G B A C D
11
B D A C
12
D B C A
13
D A B C E
14
b a c
D B B' D' C' A C'' C
15
E F D B A C
b c a
16
D B E A C F
b e d c a f

A. do Carmo gr.