RESUMO DE GEOMETRIA

INTUÍTIVA E EXPERIMENTAL

(COM 34 FIGURAS)

**Para uso dos alunos
da 3.ª, 4.ª e 5.ª classes dos liceus,
em harmonia com o actual programa**

POR

J. M.

Preço 3$00

1928
LIVRARIA PACHECO
Rua do Mundo, 79
LISBOA
Telef. T. 939

RESUMO DE GEOMETRIA

INTUÍTIVA E EXPERIMENTAL

(COM 34 FIGURAS)

para uso dos alunos
da 3.ª, 4.ª e 5.ª classes dos liceus,
em harmonia com o actual programa

POR

J. M.

Preço 3$00

1923
LIVRARIA PACHECO
Rua do Mundo, 79
LISBOA
Telef. T. 939

Tip. Henrique Torres
: R. de S. Bento, 279 :
LISBOA

Programa da 3.ª classe

Estudo da geometria no plano:

a) Proporcionalidade dos segmentos determinados por rectas paralelas em duas concorrentes e por um feixe de rectas concorrentes em duas paralelas.

b) Igualdade e semelhança de triângulos; condições de igualdade e semelhança.

c) Teorema de Pitágoras. Definição do seno, coseno e tangente de um ângulo. Relações entre os lados e os ângulos dos triângulos.

d) Resolução de triângulos rectangulos, usando tábuas naturais.

e) Angulos ao centro de um circulo; angulos inscritos e ex-inscritos; relações com os arcos respectivos. Segmento capaz de um angulo dado. Triangulos e quadriláteros inscritíveis e circunscritiveis ao circulo.

f) Simetria em relação a um ponto e a uma recta

g) Semelhança e homotétia.

h) Comprimento de um arco de curva e área de uma superficie plana.

i) Comprimento da circunferência rectificada.

j) Áreas do quadrado, rectângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio e dos polígonos regulares.

l) Área do circulo, sector circular, corôa circular e do segmento de circulo.

CAPITULO I

Proporcionalidade dos segmentos determinados por rectas paralelas em duas concorrentes e por um feixe de rectas concorrentes em duas paralelas

Segmentos proporcionais — São aqueles cujos valores numéricos, referidos à mesma unidade, formam uma proporção. Por exemplo: quando a razão de dois deles fôr igual à razão de outros dois.

I Teorema — Quando um feixe de paralelas é cortado por duas concorrentes, a segmentos iguais, numa das concorrentes correspondem segmentos iguais na outra (fig 1).

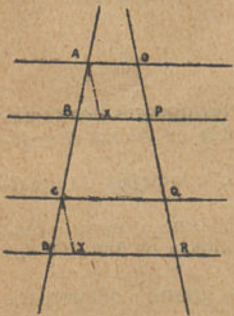

Fig. 1

Sendo $AO \parallel BP \parallel CQ \parallel DR$,

e sendo $AB = CD$

será $OP = QR$

De facto, traçando AX e CY paralelas a OR será :

$AX \parallel CY$ e $A\hat{B}X \parallel C\hat{D}Y$ e

$B\hat{A}X = D\hat{C}Y$ e portanto

$\overset{\triangle}{ABX} = \overset{\triangle}{CDY}$ e por isso

$AX = CY$ e como

$AX = OP$ e $CY = QR$ logo

$OP = QR$

II Teorema ou **teorema de Tales** — Um feixe de paralelas cortado por duas transversais intersecta estas em segmentos proporcionais (fig. 2).

Sendo $AO \parallel BP \parallel CQ \parallel DR$

será $$\frac{AB}{CD} = \frac{OP}{QR}$$

Dividindo AB e CD num número exacto de vezes (*m e n*) teremos: $AB = m \times a$ e $CD = n \times a$, supondo *a* o segmento que serviu de unidade.

Tirando pelos pontos de divisão paralelas, teremos:

$$OP = m \times o \text{ e } QR = n \times o$$

e assim teremos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{m \times a}{n \times a} = \frac{m}{n}$$

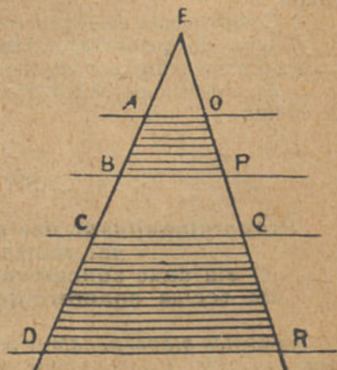

Fig. 2

e $$\frac{OP}{QR} = \frac{m \times o}{n \times o} = \frac{m}{n}$$

e como duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si

$$\frac{AB}{CD} = \frac{OP}{QR}$$

III Teorema — Os segmentos determinados numa recta por um feixe de concorrentes são proporcionais aos segmentos correspondentes que esse mesmo feixe determina em qualquer paralela á recta considerada (fig. 3).

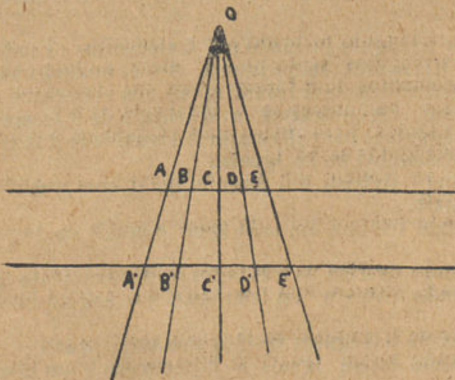

Fig. 3

Sendo AA', BB' e CC' concorrentes em O e a ∥ a' teremos:

$$\frac{AB}{A'\ B'} = \frac{BC}{B'\ C'} = \frac{AC}{A'\ C'} = \ldots\ldots$$

Ora, pelo teorema de Tales

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'\ B'} = \frac{OB}{OB'}$$

mas $$\frac{OA}{OA'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ e } \frac{OB}{OB'} = \frac{BC}{A'C'}$$

logo $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

CAPITULO II

Igualdade e semelhança de triângulos; condições de igualdade e semelhança

IGUALDADE DE TRIANGULOS

Sendo um triângulo formado por 6 elementos (3 lados e 3 ângulos) dois triângulos serão iguais, isto é, poderão sobrepôr-se quando os elementos dum forem iguais aos elementos do outro.

Basta porém, reconhecer-se a igualdade de 3 elementos (não sendo todos ângulos) para afirmarmos a igualdade dos triângulos. Assim, dois triângulos serão iguais:

1.° — Quando tivérem um ângulo igual compreendido entre dois lados iguais.

2.° — Quando tivérem um lado igual e iguais os ângulos correspondentes.

3.° — Quando tivérem os três lados respectivamente iguais.

4.° — Quando tiverem um lado igual e o ângulo oposto tambem igual.

Tratando-se de triângulos rectângulos serão iguais:

1.° — Quando forem iguais a hipotenusa e um dos ângulos agudos.

2.° — Quando forem iguais a hipotenusa e um dos catetos.

SEMELHANÇA DE TRIANGULOS

Figuras semelhantes — São as que tendo a mesma forma, sem ocupárem a mesma área, se correspondem ponto a ponto, segmento a segmento.

Dois triângulos são semelhantes quando teem:

1.° — dois ângulos respectivamente iguais.

2.° — dois lados de um proporcionais a dois lados do outro, sendo iguais os ângulos por eles formados.

3.° — os 3 lados respectivamente proporcionais.

CAPITULO III

Teorema de Pitágoras. Definição do seno, coseno e tangente de um ângulo. Relações entre os lados e os ângulos dos triângulos

Para demonstrar o teorema de Pitágoras necessitamos de demonstrar primeiramente o seguinte:

Teorema — Num triângulo rectângulo, qualquer cateto é meia proporcional entre a hipotenusa e a sua projecção sobre ela.

No triângulo ABC (fig. 4) $AD \perp BC$ e portanto o triângulo ADB é semelhante a BAC e CAD é semelhante a CAB.

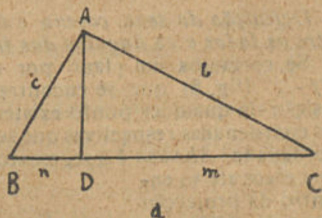

Fig. 4

logo:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \text{ e } \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC}$$

ou:

$$\frac{au}{cu} = \frac{cu}{mu} \text{ e } \frac{au}{bu} = \frac{bu}{nu}$$

ou ainda:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \text{ e } \frac{a}{b} = \frac{b}{n}$$

e portanto:

$$c^2 = a \times m \quad \text{e} \quad b^2 = a \times n$$

Teorema de Pitágoras — *O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Somando os dois últimos valores obtidos no teorema anterior vem:

$$b^2 + c^2 = (a \times m) + (a \times n)$$

ou seja:

$$b^2 + c^2 = a \times (m + n)$$

mas como:

$$m + n = a$$

teremos:

$$b^2 + c^2 = a \times a$$

ou seja:

$$b^2 + c^2 a^2 =$$

Definição do seno, coseno e tangente de um ângulo. Relações entre os lados e os ângulos dos triângulos.

Se cortamos um plano por dois eixos perpendiculares $X - X'$ e $\gamma - \gamma'$ (fig. 5) que se encontrem em O podemos determinar a posição de qualquer ponto existente no plano pelo conhecimento das coordenadas respectivas que se chamam respectivamente abcissa e ordenada. *Abcissa* é o segmento desde o ponto de intercessão dos dois eixos até ao encontro da projecção do ponto (OQ).

Ordenada é a projecção do ponto sobre o eixo horizontal (QP)

Se ligamos o ponto com o centro dos dois eixos teremos XOZ que terá como *seno* a relação da respectiva ordenada QP para OP e como *coseno* a relação da respectiva abcissa OQ para OP.

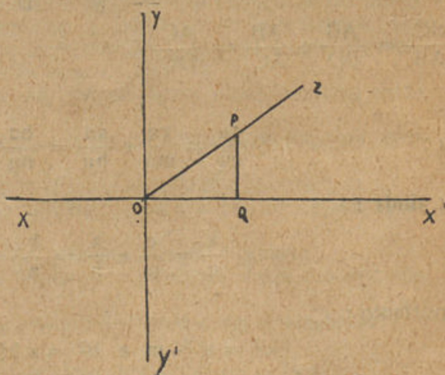

Fig. 5

Assim diremos que:

Seno de um ângulo — é a relação entre a sua ordenada e a recta que marca a sua abertura.

Coseno de um ângulo — é a relação entre a sua abcissa e a recta que marca a sua abertura.

Claro que qualquer que seja a posição do ponto P o valor do seno e do coseno não varia visto que os segmentos respectivos continuam sendo proporcionais.

Alem do seno e do coseno como funções goniométricas ou trignométricas, ainda temos:

Tangente—é a relação entre o seno e o coseno, $\operatorname{tg} \hat{\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen} \hat{\alpha}}{\cos \hat{\alpha}}$.

Secante—é o inverso do coseno, $\sec \hat{\alpha} = \dfrac{1}{\cos \hat{\alpha}}$.

Cosecante—é o inverso do seno, $\operatorname{cosec} \hat{\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} \hat{\alpha}}$.

Cotangente—é o inverso da tangente $\cot \hat{\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg} \hat{\alpha}}$.

Relações entre os lados e os ângulos dos triângulos:

1.°—Num triângulo qualquer lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a sua diferença.
2.°—Num triângulo, ao maior ângulo opõe-se o maior lado.
3.°—Num triângulo, ao menor ângulo opõe-se o menor lado.
4.°—Um triângulo equilátero é sempre equiângulo, isto é, tem tem todos os ângulos iguais.
5.°—A soma dos ângulos internos de um triàngulo é igual a 2 rectos, 180.°.
6.°—O ângulo externo dum triângulo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.
7.°—Os dois ângulos agudos dum triângulo rectângulo são complementares.
8.°—Um triângulo não pode ter mais que um ângulo recto ou que um obtuso, nem pode ter um ângulo recto e outro obtuso.

CAPITULO IV

Resolução de triângulos rectângulos usando tábuas naturais

1.°—Num triângulo rectângulo qualquer cateto é igual ao produto da hipotenusa pelo seno do ângulo oposto ou pelo coseno do ângulo agudo adjacente.
2.°—Num triângulo rectângulo qualquer cateto é igual ao produto do outro pela tangente do ângulo oposto ou pela cotangente do ângulo agudo adjacente.

CAPITULO V

Angulos ao centro de um círculo ; ângulos inscritos e ex-inscritos ; relações com os arcos respectivos. Segmento capaz de um ângulo dado. Triângulos e quadriláteros inscritíveis e circunscritíveis ao círculo

Chama-se *ângulo ao centro*, ao ângulo formado por dois raios que terminam nas extremidades dum mesmo lado e que tem o vértice no centro.

Sendo os ângulos ao centro, tantos quantos os lados do polígono, e valendo a soma de todos eles 360°, o valor de um deles é $\frac{360^\circ}{n}$ sendo n o número dos lados do polígono.

Chama-se *ângulo inscrito*, ao ângulo que tem o seu vértice na circunferência e cujos lados são cordas desta.

Podem-se dar 3 casos :

1.°—O ângulo está inscrito num semi-círculo ; é um ângulo recto.

2.°—O ângulo está inscrito num segmento maior que um semi-círculo ; é agudo.

3.—O ângulo está inscrito num segmento menor que um semi-círculo ; é obtuso.

Chama-se *ângulo ex-inscrito*, ao ângulo que tem o seu vértice na circunferência e um dos lados secante a esta.

Chama-se *segmento capaz* de um ângulo, ao segmento compreendido na circunferência e que é medida comum de todos os ângulos inscritos nela e cujos lados terminam no segmento.

Chamam-se *polígonos inscritos* numa circunferência, aqueles cujos lados são cordas da circunferência.

Chamam-se *polígonos circunscritiveis* aqueles, cujos lados são tangentes da circunferência.

Nos polígonos regulares inscritos em função do raio, o lado é igual :

Triângulo	$R\sqrt{3}$
Quadrado	$R\sqrt{2}$

Pentágono $\frac{1}{2} R \sqrt{10-2\sqrt{5}}$

Hexágono R

Octógono $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Decágono $\frac{1}{2} R \left(\sqrt{5}-1\right)$

Dodecágono $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Estas raízes teem os valores seguintes:

$\sqrt{2} = 1{,}4142$ $\sqrt{2-\sqrt{2}} = 0{,}7653$

$\sqrt{3} = 1{,}732$ $\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2{,}352$

$\sqrt{5} - 1 = 1{,}2361$

CAPITULO VI

Simetria em relação a um ponto e a uma recta. Semelhança e homotétia

Dois pontos dizem-se *simétricos* em relação a uma recta, quando esta é perpendicular à recta que une os dois pontos considerados e a divide ao meio.

Chama-se *eixo de simetria* à recta que une os dois pontos.
Chama-se *lugar geométrico* à figura formado por um conjunto de pontos que gosam todos da mesma propriedade.

1.º—O lugar geométrico dos pontos que distam igualmente dos extremos dum segmento é a perpendicular ao meio desse segmento.
2.º—O lugar geométrico dos pontos que distam igualmente dos lados dum ângulo é a bissectriz do ângulo considerado.

Chamam-se *figuras semelhantes*, as que teem a mesma forma sem, todavia, ocuparem a mesma área.
Elementos homólogos — São os elementos correspondentes de duas figuras semelhantes.
Razão dos segmentos — E' o cociente dos números que representam as suas medidas, expressas na mesma unidade.
Razão de semelhança — É o número que exprime a razão entre os lados homólogos.

Propriedade das figuras semelhantes.
1.º — Os ângulos homólogos são iguais.
2.º — Os lados homólogos são proporcionais.
3.º — A razão das áreas das figuras é igual ao quadrado da razão de semelhança das mesmas figuras.

A semelhança entre figuras indica-se com o sinal $\backsim$.
A's figuras semelhantes tambem se dá o nome de figuras homotéticas.

Os principais casos de homotétia são:
1.º — A figura semelhante de uma semi-recta é uma semi-recta paralela.
2.º — A figura semelhante duma recta é uma recta paralela.
3.º — A figura semelhante dum ângulo é um ângulo igual.
4.º — A figura semelhante dum polígono é um polígono cujos lados são proporcionais e cujos ângulos são iguais.
5.º — A figura semelhante duma circunferência é outra circunferência.

Construção de figuras semelhantes — Podem seguir-se os seguintes processos:

1.º — Recorrendo à quadriculágem.
2.º — Decompondo a figura dada em triângulos e construindo triângulos semelhantes com os quais se forma a nova figura.
3.º — Marcando dois pontos fóra da figura e unindo-os por um segmento; medem-se os ângulos sob os quais se vêm desses dois

pontos, os diversos segmentos da figura. Traça-se um segmento homólogo do que se obteve, unindo os dois pontos referidos e nos extremos dêsse segmento marcam-se aquêles ângulos, obtendo assim uma figura semelhante.

CAPITULO VII

Comprimento de um arco de curva e área de uma superficie plana. Comprimento da circunferência rectificada

Châma-se *linha curva* aquela que não só não é recta como não é formada por segmentos de recta.

Châma-se *circunferência* ao lugar geométrico de todos os pontos que distam igualmente dum ponto fixo chamado centro.

A medição dos arcos de circunferência faz-se de maneira análoga à dos ângulos sendo as unidades geralmente adoptadas o *grau*, o *grado* e o *quadrante*.

O comprimento de um arco de curva é igual à rectificação dessa curva, isto é: considerando um fio ajustado sobre a linha curva, será esse fio depois de esticado.

Da mesma forma se pode obter o perímetro da circunferência.

Mas como dividindo o comprimento de qualquer circunferência pelo seu diâmetro se encontra sempre o mesmo valor 3,1416 que se designa por π, podemos obter o perímetro da circunferência (c) de raio (r) da forma seguinte:

$$\text{Como } \frac{\text{Per}(c)}{\text{diâmetro}} = \pi \text{ e como diâmetro} = 2\text{ R}$$

temos

$$\frac{\text{Per (c)}}{2\text{ R}} = \pi$$

ou seja:

$$\text{Per (C)} = \pi \times 2\text{ R}$$

$$\text{Per (C)} = 2\,\pi\,\text{R}$$

Châma-se *área de uma superfície plana* — ao espaço ocupado por essa superfície; é portanto igual ao producto do seu *comprimento* pela sua *altura*.

As áreas avaliam-se, comparando-as com uma unidade da mesma especie, sendo geralmente empregada como unidade a área do quadrado que tem um metro linear de comprimento e de altura (visto que no quadrado o comprimento e a largura são iguais.

Entre as figuras planas existem umas certas equivalências, isto é, que apezar de terem formas diversas ocupam uma mesma área.

Essas equivalências são:

1.º — Um paralelogramo é equivalente a um rectângulo da mesma base e altura.

2.º — Um triângulo é equivalente a metade dum paralelogramo com a mesma base e altura.

3.º — Um trapézio é equivalente a dois triângulos cada um dos quais tem por base, uma base do trapézio e por altura a altura dele.

4.º — Um trapézio é equivalente a um rectângulo da mesma altura e cuja base é a mediana do trapézio.

Châma-se *mediana do trapézio* ao segmento que une o meio dos dois lados não paralelos.

5.º — Um polígono regular é equivalente à soma de tantos triângulos iguais quantos os seus lados, tendo cada triângulo por base o lado do polígono e por altura o apótema.

CAPITULO VIII

Áreas do rectângulo, quadrado, paralelogramo, trapézio e polígonos regulares

Área do rectângulo — é igual ao producto de dois lados consecutivos, isto é, da base pela altura (fig. 6).

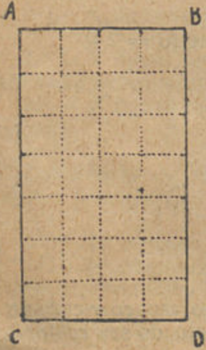

Fig. 6

$$Ar = B \times h$$

Demonstração: Dado o rectângulo A B C D e supondo que a unidade é contida um número exacto de vezes em AB e em AC, e tirando por esses pontos paralelos a AB e AC, ficará o rectângulo decomposto num certo número de rectângulos tendo a unidade como comprimento e como altura.

Ora, verifica-se que o número de rectângulos assim obtido é igual ao producto das unidades contidas no comprimento pelos contidos na altura, logo a sua área é igual ao produto da base pela altura.

Área do quadrado — E' igual ao quadrado do lado (fig. 7).

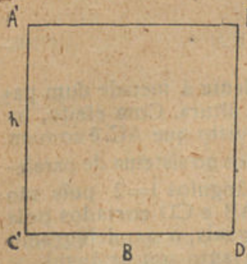

Fig. 7

$$Ar = l^2$$

Demonstração — Um quadrado é no fim de contas um rectângulo com a mesma base e a mesma altura e assim temos:

$$Ar = B \times h$$

mas como: $B = l$ e $h = l$

teremos: $Ar = l \times l = l^2$

Área do paralelogramo — É igual ao pro-duto da base pela altura (fig. 8).

$$Ar = B \times h$$

Demonstração — Um paralelogramo é equivalente a um rectângulo da mesma base e da mesma altura. De facto os 2 triângulos da mesma base ABB'' e DCE são iguais visto que AB = DC porque são lados opostos do palelogramo.

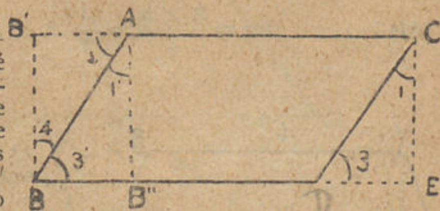

Fig. 8

Os ângulos $\hat{1} = \hat{1}'$ e $\hat{3} = \hat{3}'$ porque são ângulos de lados respectivamente paralelos e da mesma espécie.

E porisso os 2 triângulos que teem um lado e os ângulos adjacentes iguais, são iguais e portanto podemos transportar ABB'' para DCE e ficamos com um rectângulo cuja base é igual à do paralelogramo e cuja altura é a altura do paralelogramo.

Area do triângulo — É igual a metade do produto da base pela altura (fig. 9).

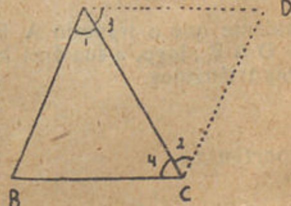

Fig. 9

$$Ar = \frac{1}{2} B \times h$$

Demonstração — Um triângulo é equivalente á metade dum paralelogramo com a mesma base e a mesma altura. Com efeito, os dois triângulos B A C e C A D são iguais, visto que AC é comum e os ângulos $\hat{3} = \hat{4}$ porque são alternos internos no sistema de paralelos AD e BC cortados pela secante AC e os ângulos $\hat{1} = \hat{2}$ pois são alternos internos no sistema de paralelas AB e CD cortados pela secante AC. Ora se os dois triângulos são iguais, o paralelogramo é equivalente a dois triângulos iguais e portanto um triângulo é equivalente a metade do paralelogramo. Como a área do paralelogramo é igual ao produto da base pela altura $Ar = B \times h$; a área do triângulo será igual a metade desta

ou seja: $$ar = \frac{B \times h}{2} = \frac{1}{2} B \times h$$

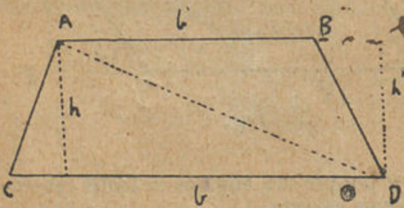

Fig. 10

A'rea do trapézio — E' igual ao producto da semi-soma das bases pela altura (fig. 10).

$$ar = \frac{b + b'}{2} \times h$$

Demonstração — É evidente que o trapézio A B C D é igual aos triângulos C A D + D A B; logo, a sua área ha-de ser igual à soma das áreas dos dois triângulos.

e portanto:

$$Ar = \frac{1}{2} AB \times h + \frac{1}{2} CD \times h$$

ou seja : $$Ar = \frac{1}{2}(AB + CD) \times h$$

e como : $$AB = b; \quad CD = b'$$

teremos :

$$Ar = \frac{1}{2}(b + b') \times h = \frac{b + b'}{2} \times h$$

Área do trapézio em função da mediana—É igual ao produto da mediana pela altura do trapézio. (fig. 11)

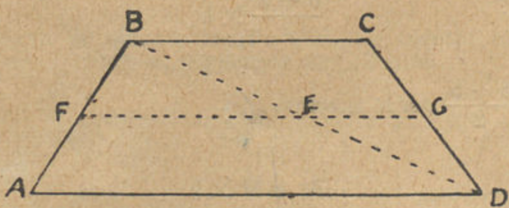

Fig. 11

$$Ar = M \times h$$

Demonstração — A mediana é igual à semi-soma das bases. Na figura 11 temos :

no triângulo ABD :

$$FE = \frac{1}{2}AD$$

e no triângulo DBC :

$$EG = \frac{1}{2}BC$$

logo: $$FE + EG = \frac{AD + BC}{2}$$

ou seja: $$FG = \frac{AD + BC}{2}$$

e como FG é a mediana M temos:

$$M = \frac{AD + BC}{2}$$

portanto, substituindo na formula da área do trapézio:

$$\frac{b + b'}{2} \times h$$

o valor $\frac{b + b'}{2}$ por M teremos:

$$Ar = M \times h$$

Area do poligono regular — É igual ao produto do semi-perimetro pelo apótema. (fig. 12)

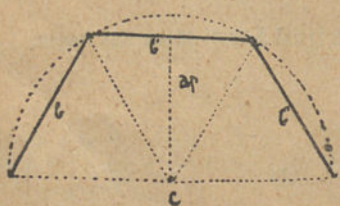

Fig. 12

$$Ar = \frac{Per\ (p)}{2} \times ap$$

Demonstração — Um poligono pode sempre decompor-se num certo número de triângulos tendo por vértice o centro e por base os lados respectivos. A área do polígono será portanto iguat à soma das áreas dos triângulos, e como os triângulos nos polígonos regulares são iguais, será igual à área de um dos triângulos multiplicada pelo número de vezes.

isto é:

$$S = \left(\frac{1}{2}\,b \times h\right) \times n$$

e como $\frac{1}{2}\,b + \frac{1}{2}\,b + \frac{1}{2}\,b \ldots$ n vezes é igual a metade do perimetro e h é igual ao apotema do polígono.

temos: $$Ar = \frac{Per\ (p)}{2} \times ap.$$

CAPITULO IX

Area do círculo, corôa circular, sector circular e segmento de círculo

Área do circulo — É igual ao produto de π pelo quadrado do raio. (fig. 13)

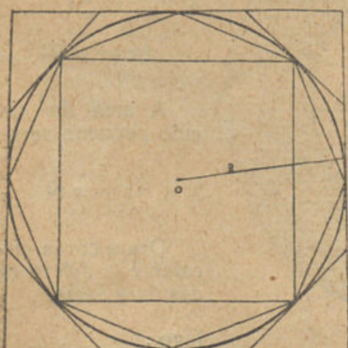

Fig. 13

$$Ar = \pi R^2$$

Demonstração — A circunferência é o limite para que tendem os polígonos inscritos e circunscritos quando se duplica indefinidamente o número dos seus lados, portanto, sendo:

$$Ar = \frac{Per\ (p)}{2} \times ap,$$ teremos:

limite da Ar. do polígono = área do círculo.

logo: $$\lim.\ \frac{Per\ (p)}{2} \times \lim.\ ap = \text{área do círculo}$$

Ora o limite do Per (p) é a circunferência e o limite do ap. é o raio.

logo: $$\frac{2 \pi R}{2} \times R = \text{área do círculo}$$

e portanto: $$\pi R \times R = \text{área do círculo}$$

ou seja: $$Ar = \pi R^2$$

Area da corôa circular – É igual ao produto de π pela diferença entre os quadrados dos raios das circunferências que a determinam. (fig. 14)

$$Ar = \pi (R^2 - r^2)$$

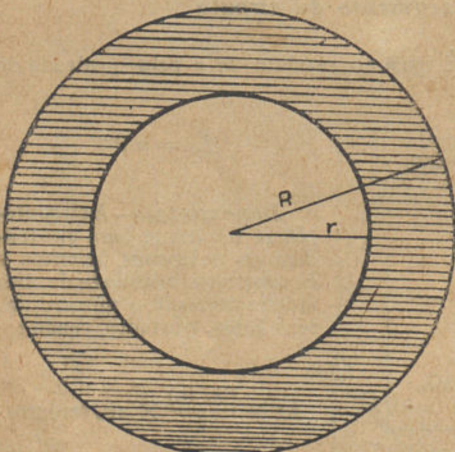

Fig. 14

Demonstração — A área do círculo grande será:

$$Ar = \pi R^2$$

A área do círculo pequeno será:

$$Ar = \pi r^2$$

Ora a corôa circular é a diferença das duas áreas.

logo:

$$Ar = \pi R^2 - \pi r^2$$

ou seja, pondo π em factor comum:

$$Ar = \pi (R^2 - r^2)$$

A'rea do sector circular — E' igual ao produto do número dos seus graus pelo cociente da área do seu círculo por 360°. (fig. 15)

$$Ar = \frac{\pi R^2}{360} \times n$$

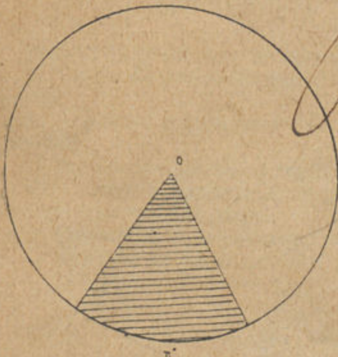

Fig. 15

Demonstração — Um círculo pode ser considerado como um sector circular de 360° que tem por área πR^2.

assim teremos :

Um sector circular de 360° tem $Ar = \pi R^2$.

Um sector circular de 1° terá $Ar = \frac{\pi R^2}{360°}$.

Logo: um sector circular de n° terá $Ar = \frac{\pi R^2}{360} \times n$.

A'rea do segmento de circulo — E' igual à diferença entre a área do sector e a do triângulo compreendido entre a corda e os raios tirados para os extremos da mesma corda. (fig. 16)

$$Ar = \left(\frac{\pi R^2}{360} \times n\right) - \left(\frac{1}{2}\, b \times h\right)$$

Demonstração—E' evidente que, sendo :

$\frac{\pi R^2}{360} \times n$, a área do sector

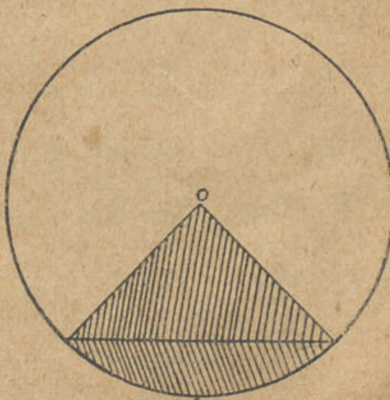

Fig. 16

e $\frac{1}{2}$ b $\times$ h a área do triângulo ABO a área do segmento será gual à diferença da: duas, e portanto :

$$Ar = \left(\frac{\pi R^2}{360} \times n\right) - \left(\frac{1}{2} b \times h\right)$$

Fim da 3.ª classe

Programa da 4.ª classe

Estudo da geometria no espaço.

a) Teoria da perpendicularidade e do paralelismo de rectas e planos.

b) Triedros, relação entre os seus elementos; condições de igualdade.

c) Poliedros: poliedros regulares, prismas e pirâmides.

d) Troncos de prismas e de pirâmides. Áreas, laterais e totais e volumes destes poliedros.

e) Homotétia e semelhança no espaço.

f) Simetria no espaço.

CAPITULO I

Teoria da perpendicularidade e do paralelismo de rectas e planos

Châma-se *plano* à superficie ilimitada sobre a qual assenta completamente qualquer recta que tenha 2 pontos no plano.

Um plano póde ser determinado:

1.° — Por duas rectas que se cortam.
2.° — Por uma recta e um ponto fóra dela.
3.° — Por 3 pontos não em linha recta.
4.° — Por duas rectas paralelas.

Diedro ou *Angulo Diedro* — E' a abertura compreendida entre dois semi-planos que se encontram.

Os seus elementos são:

Faces — São os semi-planos que o formam.

Aresta E' a intersecção das faces.

Rectilineo dum diedro — E' o ângulo formado por 2 perpendiculares à aresta tiradas no mesmo ponto e existentes cada qual na sua face do diedro. Serve para calcular as medidas dos diedros.

Postulado de Euclides — Por um ponto fóra de uma recta só é possivel fazer passar uma paralela a essa recta.

Se a recta fôr paralela a um plano e por ela passar um outro plano que corte o primeiro, a sua intersecção é uma recta paralela à primeira.

Portanto tambem, uma recta paralela a uma recta dum plano, é paralela ao plano.

Destes dois principios deduzem-se as regras seguintes:

1.º — Por uma recta paralela a um plano pode-se fazer passar só um plano que seja paralelo ao primeiro.

2.º — Qualquer plano que corta outro, corta todos os paralelos a esse outro.

3.º—Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos entre si.

Quando duas rectas se encontram no espaço podem ser:

1.º — *Complanas*: Quando existem no mesmo plano.

2.º — *Não complanas*: Quando não existem no mesmo plano.

As rectas ao encontrarem-se formam entre si 4 ângulos iguais 2 a 2 por serem verticalmente opostos;

As duas rectas podem ser	perpendiculares, normais, ortogonais ou rectângulares	os ângulos formados são rectos
	oblîquas —	os ângulos são diferentes: 2 são agudos e 2 obtusos.

Da definição de ângulo de duas rectas, resulta:

1.º — Quando duas rectas são perpendiculares qualquer paralela a uma é perpendicular à outra.

2.º — Por um ponto é possivel conduzir quantas perpendiculares quizermos a uma outra recta dada.

Uma *recta é perpendicular a um plano* quando é perpendicular a todas as rectas existentes no plano.

Deste principio, resulta que:

1.º — Se duas rectas são paralelas qualquer plano perpendicular a uma é perpendicular à outra.

2.° — Se dois planos são paralelos qualquer recta perpendicular a um é perpendicular ao outro.

CAPITULO II

Triedros; relações entre os seus elementos; condições de igualdade

Châma-se *triedro* ou *ângulo triedro* à abertura compreendida entre 3 semi-planos que se encontram.

Os triedros, como quaisquer outros ângulos poliédricos ou ânguloides são no fim de contas superficíes piramidais.

Superficie piramidal — E' a superficie produzida pelo movimento duma recta passando por um ponto e apoiando-se sobre uma poligonal (fig. 17).

elementos da superficie piramidal:
- *Vértice* — E' o ponto O, em torno do qual a recta se move.
- *Geratriz* — E' a recta O G que se move.
- *Arestas* — São as geratrizes que passam pelos vertices da poligonal.
- *Face* — O conjunto das geratrizes que se apoiam num lado da diretriz.

Superficie piramidal fechada — E' aquela cuja directriz é um polígono. Tem tantas arestas, quantas as faces.

Relações entre os elementos dum triedro:

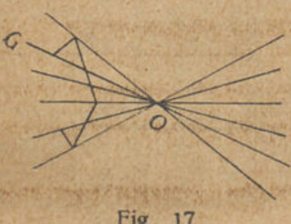

Fig. 17

1.° — Qualquer face é maior que a diferença das outras duas.

2.° — Qualquer face é menor que a soma das outras duas.

3.° — A soma dos diedros dum triedro é maior que 2 rectos e menor que 6.

4.° — Se um triedro tem duas faces iguais tem dois diedros iguais.

5.° — Se um triedro tem as 3 faces iguais tem todos os diedros iguais.

Igualdade de triedros

Dois triedros são iguais, quando teem, semelhantemente dispostos, e respectivamente iguais:

1.° — Duas faces e o diedro por elas formado,
2.° — Uma face e os diedros adjacentes;
3.° — 3 faces;
4.° — 3 diedros.

CAPITULO III

Poliedros; poliedros regulares, prismas e pirâmides

Poliedro — E' o sólido formado por uma superficie poliédrica.

Superficie poliédrica — E' a superficie formada por polígonos planos, tendo 2 a 2 um lado comum.

Poliedro regular — Um poliedro é regular quando tem iguais, todas as faces, diedros e ângulos.

Os poliedros regulares são:

Tetraedro—Tem 4 faces que são triângulos equiláteros (fig. 18).

Hexaedro ou cubo — Tem 6 faces que são quadrados (fig. 19).

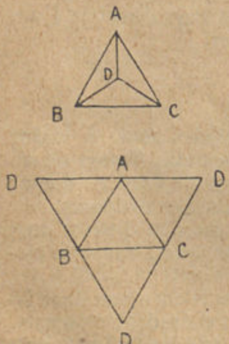

Fig. 18

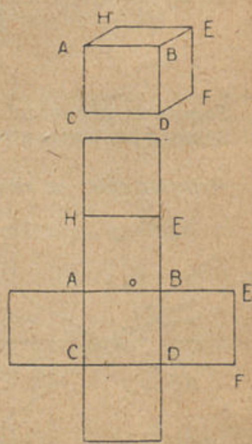

Fig. 19

Octaedro — Tem 8 faces que são triângulos equiláteros (fig. 20).

Fig. 20

Dodecaedro — Tem 12 faces que são pentagonos regulares (fig. 21).

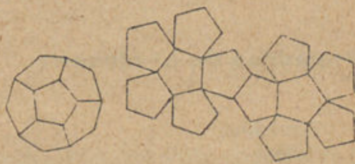

Fig. 21

Icosaedro — Tem 20 faces que são triângulos equiláteros (fig. 22).

Fig. 22

CARACTERISTICAS PRINCIPAIS DOS POLIEDROS

Nomes	Faces	N.º de lados em cada face	Vértices	Arestas	N.ºs de arestas em cada vértice	Diagonais
Tetraedro. .	4	3	4	6	3	0
Hexaedro. . .	6	4	8	12	3	4
Octaedro. . . .	8	3	6	12	4	3
Dodecaedro. .	12	5	20	30	3	100
Icosaedro. . .	20	3	12	30	5	36

Os poliedros podem portanto agrupar-se em 3 classes :

1.º—Poliedros cujas faces são triângulos equiláteros : tetraedro, octaedro e icosaedro.

2.º—Poliedro cujas faces são quadrados : hexaedro ou cubo.

2.º—Poliedro cujas faces são polígonos regulares : dodecaedro.

A'reas dos poliedros

Poliedros da 1.ª classe :

Tetraedro.

A fórmula que nos dá a área dum triângulo em função do lado é :

$$Ar = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$$

Ora como o tetraedro tem 4 triângulos equiláteros a sua área será :

$$Ar = \frac{4\ l^2 \times \sqrt{3}}{4} = l^2 \times \sqrt{3} = l^2 \times 1{,}732$$

Octaedro.

Aplicando o mesmo princípio, como o octaedro tem 8 triângulos a sua área será :

$$Ar = \frac{8\ l^2 \sqrt{3}}{4} = 2\ l^2 \sqrt{3} = l^2 \times 3{,}464$$

Icosaedro.

Aplicando o mesmo princípio, e lembrando que o icosaedro tem 20 triângulos, a sua área será:

$$Ar = \frac{20\, l^2 \sqrt{3}}{4} = 5\, l^2 \sqrt{3} = l^2 \times 8{,}66$$

Poliedro da 2.ª classe:

Hexaedro ou cubo.

A fórmula que nos dá a sua área, tendo em linha de conta que a área do quadrado é:

$$Ar = l^2$$

e que o cubo tem 6 quadrados, será:

$$Ar = 6\, l^2$$

Poliedro da 3.ª classe:

Dodecaedro.

A fórmula que nos dá a área de um polígono regular é:

$$Ar = \frac{Per}{2} \times ap.$$

Ora, como o dodecaedro tem 12 lados, a sua área será:

$$Ar = \frac{12\ Per}{2} \times ap = 6\ Per \times ap.$$

Prismas e Pirâmides

Prisma — E' a porção de superfície prismática limitada por dois planos não paralelos às arestas. (fig. 23)

Superfície prismática—E' a superfície gerada por uma recta perpendicular ao perímetro de um polígono, posta em movimento ao longo dele.

Elementos do prisma:

- *bases*—Os dois polígonos iguais e paralelos.
- *altura*—A distância entre as duas bases.
- *faces* — Os rectângulos que formam a superfície lateral.

Secção recta de um prisma — O polígono determinado na superfície prismática por um plano perpendicular às arestas laterais.

Prisma recto — E' aquele cujas bases são secções rectas.

Prisma oblíquo—É o que tem as bases oblíquas às faces. (fig. 24)

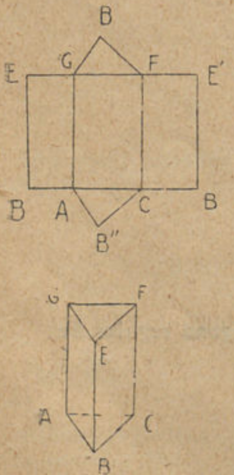

Fig. 23

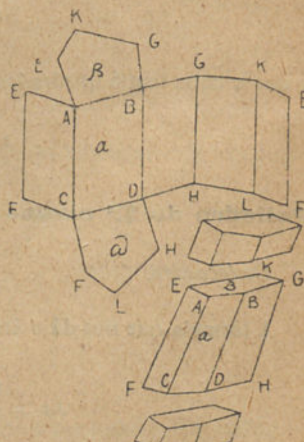

Fig. 24

Prisma regular—E' o prisma recto cujas bases são polígonos regulares.

Paralelipípedo — E' o prisma cujas bases são paralelogramos. (fig. 25)

O paralelipípedo pode ser:

- *recto*—quando as arestas são perpendiculares às bases.
- *oblíquo*—quando as arestas são oblíquas às bases.
- *rectângulo* — quando as bases são rectângulos.
- *romboedro*—quando as faces são rombas.
- *cubo* — quando as bases e as faces são quadrados iguais.

Pirâmide — E' a porção de superfície piramidal limitada por um plano não paralelo às arestas. (fig. 26)

Superfície piramidal — E' aquela cuja directriz é um polígono (veja-se fig. 17 na pág 25).

Altura da pirâmide— E' a distância do vértice ao plano da base.

Pirâmide regular — E' aquela que tem por base um polígono regular.

Fig. 25

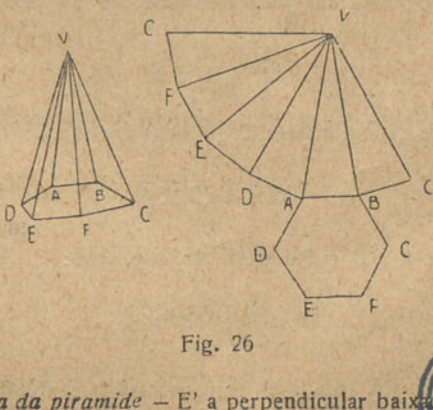

Fig. 26

Apótema da piramide — E' a perpendicular baixada do vértice sobre o meio da aresta da base.

Numa pirâmide há a considerar :

- a *superficie lateral* constituida por :
  - *faces laterais* — tantos triângulos quantas as faces do ângulo sólido a que pertence a superficie piramiral.
  - *arestas laterais*—os lados dos triângulos que existem nas arestas do ângulo sólido.
  - *vertice* — ponto de concorrência das arestas laterais. E' o vértice do ângulo sólido.
- *a base* - poligono plano, resultânte da secção. Nótam-se nela :
  - *arestas* – os lados do poligono base; são tantas quantas as faces laterais.
  - *vértices* – pontos de encontro das arestas das bases. São tantos, quantas as arestas laterais.

A'reas do prisma e da pirâmide

Prisma :

A'rea lateral – Cada uma das faces de um prisma, tem por área :

$$Ar = B \times h$$

Ora o prisma tem *n* faces, logo a sua área será :

$$Ar = n\ (B \times h)$$

Mas como $n \times B$ = Perimetro da base, vem :

$$Ar = Per.\ (B) \times h$$

A'rea total— A área total, tem, necessáriamente, que ser igual ao produto da área lateral, pelas áreas das duas bases ou, o que é o mesmo, pelo dobro da área da base.

$$Ar\ t. = Per\ (B) \times h + \frac{2\ Per\ (B)}{2} \times ap$$

donde vem :

$$Ar\ t. = Per\ (B) \times h + Per\ (B) \times ap$$

ou seja :

$$Ar\ t. = Per\ (B) \times (h + ap)$$

Pirâmide.

Área lateral — Cada uma das faces duma pirâmide tem por área :

$$Ar = \frac{b}{2} \times h$$

e como h é o apótema da pirâmide, pode escrever-se :

$$Ar = \frac{b}{2} \times Ap$$

Como a pirâmide tem *n* faces iguais, a sua área será :

$$Ar = \frac{n \times b \times Ap}{2}$$

e como :

$$n \times b = \text{Perímetro da base}$$

vem :

$$Ar = \frac{Per\ (B)}{2} \times Ap$$

Área total — A área total será igual à área lateral multiplicada pela área da base :

$$Ar\ t = \frac{Per\ (B)}{2} \times Ap + \frac{Per\ (B)}{2} \times ap$$

ou, pondo :

$\frac{Per\ (B)}{2}$ em factor comum :

$$Ar\ t = \frac{Per\ (B)}{2} \times (Ap + ap)$$

Volumes do prisma e da pirâmide

Prisma — Para demonstrarmos o volume do prisma precisamos de demonstrar o volume do paralelipípedo. Ora, o volume de um paralelipípedo é igual ao produto das suas 3 dimensões. De facto, suponhamos que a unidade cabe um número exacto de vezes nas 3 dimensões do paralelipípedo; fica este dividido em *n* paralelipípedos todos com a unidade como medida de comprimento, de largura e de altura e consequentemente com a unidade de volume (fig. 18 da pag. 26). Logo o paralelipípedo todo há-de ser igual à soma destes paralelipípedos, ou seja, igual ao produto das suas 3 dimensões.

E assim vem :

$$V = Ar\ (B) \times h$$

Ora, se cortamos um paralelipipedo por um plano que siga a direcção das duas rectas diagonais das 2 bases, dividimos este em 2 prismas triangulares, cada um dos quais é equivalente á metade do paralelipípedo e portanto os seus volumes serão iguais á metade do volume do paralelipípedo ou seja para cada prisma triangular.

$$V = Ar\,(B) \times h$$

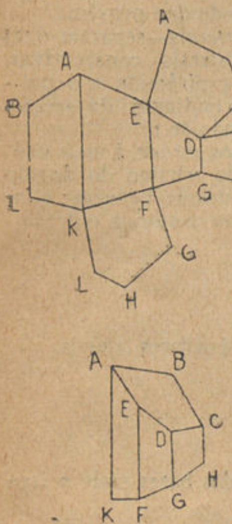

Fig. 27

E como cada prisma se pode decompôr num número certo de prismas triangulares, temos que o volume de qualquer prisma é:

$$V = A^r\,(B) \times h$$

Pirâmide – Todo o **prisma** triangular é decomponivel em 3 pirâmides equivalentes (fig. 19 na pág 26).

Ora, como o volume de qualquer prisma triangular é:

$$V = Ar\,(B) \times h$$

O volume da pirâmide será:

$$V = \frac{1}{3}\,Ar\,(B) \times h$$

CAPITULO IV

Troncos de prisma e de pirâmide. Área da superfície lateral e total destes poliedros

Tronco de prisma — é o sólido que se obtem cortando o prisma por um plano oblíquo. (fig. 27)

Tronco de pirâmide — E' a porção de pirâmide compreendida entre a base e uma secção produzida por um plano cortando todas as arestas laterais. (fig. 28)

Altura do tronco de pirâmide — E' a distância entre os planos das bases.

Fig. 28

Num tronco de pirâmide há a considerar:

- *superficie lateral* — que pertence à superfície da pirâmide e compreende:
  - *faces laterais* — tantos trapézios quantas as faces da pirâmide de que provêm.
  - *arestas laterais*—separam duas faces laterais consecutivas.
- *bases*: a base da pirâmide e o polígono resultante da secção, chamando-se:
  - *superior ou menor*, á mais próxima do vértice do ângulo sólido de que provém; e *inferior* ou *maior*, á outra.

Area do tronco de prisma:

Area lateral — É igual à soma das áreas das faces laterais.

$$Ar = ar\ a + ar\ b + ar\ c...$$

Area total — E' igual à soma das áreas das bases mais a área lateral.

$$Ar\ t. = Ar\ (B) + Ar\ (B') + ar\ a + ar\ b + Ar\ c...$$

Area do tronco de pirâmide.

Area lateral—Como as faces são trapézios, cada área de cada face, será $\frac{a + a'}{2} \times h$ e como h = apótema da pirâmide, teremos $\frac{a + a'}{2} \times Ap$.

Como o tronco tem *n* faces iguais virá:

$$Ar = \frac{n\ (a + a')}{2} \times Ap$$

e como $n \times a = \text{Per (B)}$ e $n \times a' = \text{Per (B')}$ vem :

$$\text{Ar} = \frac{\text{Per (B)} + \text{Per (B')}}{2} \times \text{Ap}$$

Area total — Será igual à área lateral mais as duas áreas das bases, ou seja:

$$\text{Ar t.} = \frac{\text{Per (B)} + \text{Per (B')}}{2} \times \text{Ap} + \frac{\text{Per (B)}}{2} \times \text{ap} + \\ + \frac{\text{Per (B')}}{2} \times \text{ap}$$

ou, pondo Per (B) e Per (B') em facto. comum :

$$\text{Ar t.} = \frac{\text{Per (B)}}{2} \times (\text{Ap} + \text{ap}) + \frac{\text{Per (B')}}{2} \times (\text{Ap} + \text{ap})$$

Volumes dos troncos

Volume do tronco de prisma — E' igual ao produto da área da secção recta pela média aritmética das arestas laterais.

$$V = \text{Ar (s)} \times \frac{a + d + c + d}{2}$$

Volume do tronco de pirâmide — E' igual a um terço do produto da altura pela soma das áreas das bases, com a média geométrica das bases :

$$V = \frac{h}{3} \times \left(\text{Ar (B)} + \text{Ar (B')} + \sqrt{\text{Ar (B)} \times \text{Ar (B')}} \right)$$

CAPITULO V

Homotétia e semelhança no espaço

Chamam-se figuras homotéticas as que teem a mesma forma; Ex: os **cubos** as **esferas**, etc.

As regras são as seguintes:

1.ª—A figura homotética dum triângulo é um triângulo semelhante.

2.ª—A figura homotética de um ângulo, é um ângulo igual.

3.ª—A figura homotética dum plano é um plano paralelo.

4.ª—A figura homotética dum diedro é um diedro igual.

5.ª—A figura homotética dum poliedro é um poliedro de faces paralelas e semelhantes.

6.ª—A figura homotética duma esfera é outra esfera.

7.ª—A figura homotética dum círculo é outro círculo.

Chama-se *razão de semelhança*, á razão entre segmentos homólogos.

A razão das áreas ou dos volumes	de 2 figuras semelhantes é igual	ao quadrado ou ao cubo	da razão de semelhança das mesmas figuras.

Duas figuras iguais são sempre semelhantes, mas duas figuras semelhantes pódem não ser iguais.

CAPITULO VI

Simetria no espaço

Dois pontos dizem-se *simétricos* em relação a um plano quando esse plano é perpendicular à recta que os une e a divide ao meio.

Duas figuras dizem-se *simétricas* em relação a um plano, quando todos os seus pontos são simétricos em relação a ele.

Os elementos simétricos de duas figuras simétricas são homólogos.

As figuras simétricas duma recta e dum plano são respectivamente uma recta e um plano.

As figuras simétricas dum ângulo ou dum diedro são respectivamente um ângulo igual e um diedro igual.

As figuras simétricas de um segmento e dum triângulo são respectivamente um segmento igual e um triângulo igual.

As figuras que são simétricas em relação a uma recta são iguais, isto é, sobreponíveis.

E' o que as distingue das simétricas em relação a um plano ou a um eixo que embora constituídas por elementos iguais não são iguais, como facilmente se reconhece observando-se a imagem dum objecto produzida num espelho plano.

Quando se diz que uma figura é simétrica em relação a outra entende-se que essa simetria é em relação a um plano ou a um ponto e não em relação a uma recta.

Fim da 4.ª classe

Programa da 5.ª classe

Continuação do estudo da geometria no espaço.

a) Superficies cilindricas e cónicas. Cones e cilindros de revolução. Tronco de cone e cilindro. Áreas das superficies laterais e volumes dos cones, cilindros e troncos respectivos.

b) Esfera, plano tangente. Área da superficie da esfera, do fuso esférico, da zona esférica e da calote esférica.

c) Volume da esfera, do sector esférico, da camada esférica e da cunha esférica.

d) Triângulos esféricos, seus elementos. Coordenados esféricos, sistemas de coordenados usadas em cosmografia.

CAPITULO I

Superficies cilíndricas e cónicas. Cones e cilindros de revolução. Troncos de cone e de cilindros. Áreas das superficies laterais e volumes dos cones, cilindros e troncos respectivos

Superficie cilindrica — E' a superficie gerada por uma recta deslocando-se paralelamente a si mesma e apoiando-se numa linha curva. (fig. 29).

Na superficie cilíndrica há a considerar:
Geratriz — É a recta móvel A B.
Directriz — É a linha de apoio A C D.

A superficie cilíndrica pode ser:
Fechada — Quando a directriz é uma linha fechada.
Aberta — No caso contrário.

Châma-se *secção recta*, á secção feita por um plano perpendicular às geratrizes.

Superficie cilíndrica de revolução — É a que se obtem quando a recta gira em tôrno de outra conservando-se paralela a si mesma e sempre à mesma distância.

Neste caso, chama-se *ráio* à distância do eixo à geratriz e chama-se *eixo* à recta fixa em tôrno da qual gira a geratriz.

Cilindro — E' o sólido obtido cortando uma superficie cilíndrica fechada por dois planos paralelos (fig. 30).

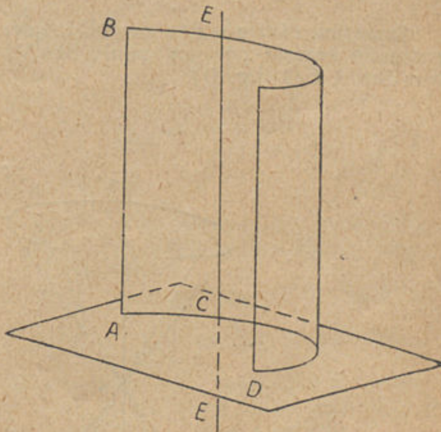

Fig. 29

No cilindro ha a considerar:

1.º — *Superficie lateral* — E' a porção da superficie cilíndrica.

2.º — *Bases* — Os dois segmentos de planos.

3.º — *Altura* — A distância dos planos das bases.

4.º — *Geratrizes* — Segmentos das geratrizes que constituem a superfície lateral.

O cilindro pode ser:
- *recto* — Quando é determinado por 2 secções rectas.
- *oblíquo* — No caso contrário.

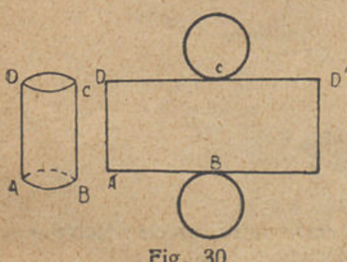

Fig. 30

Cilindro de revolução — E' o cilindro recto de superfície lateral de revolução.

Tronco de cilindro — E' o sólido obtido por um plano não paralelo ás bases do cilindro e cortando todas as geratrizes.

pode ser: { *recto* — Quando uma das bases é uma secção recta. / *obliquo* — No caso contrário.

Superfície cónica — E' a superfície gerada por uma recta A B, passando sempre por um ponto fixo V, e por uma curva também fixa A E D (fig. 31).

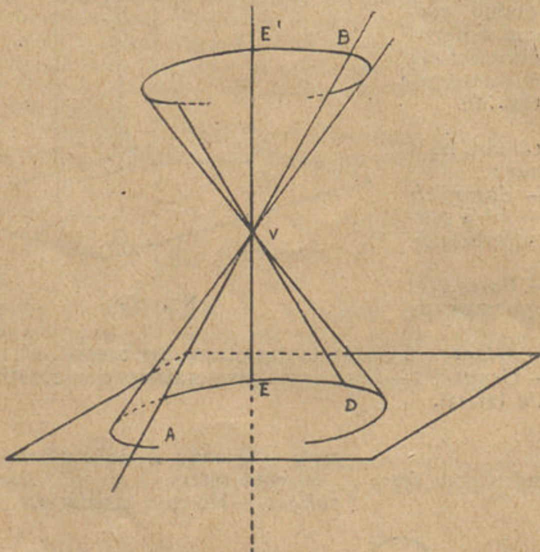

Fig. 31

Os elementos da superfície cónica são:
Geratriz — E' a recta móvel A B.
Vértice — E' o ponto fixo V.
Directriz — E' a linha curva fixa A E D.
Se a directriz tem centro, chama-se *eixo*, à recta determinada pelo centro e pelo vértice da superfície cónica.

Cone — E' o sólido obtido pela secção duma superfície cónica (fig. 32).

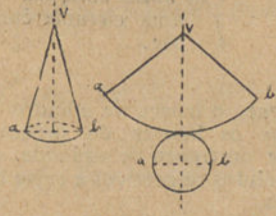

Fig. 32

O cone é constituído por:

- *Vértice* — O vértice da superfície cónica.
- *Superfície lateral* — A porção da superfície cónica.
- *Base* — A figura plana resultante da secção.
- *Altura* — A perpendicular do vértice ao plano da base.
- *Geratrizes* — Os segmentos de geratrizes da superfície lateral compreendidos entre a base e o vértice.

Secção recta — E' a secção feita na superfície cónica por um plano perpendicular ao eixo.

Cone de revolução — E' o cone cuja superfície lateral pertence a uma superfície de revolução e cuja base é uma secção recta (fig. 32).

Tronco do cone — E' o sólido obtido pela secção do cone por um plano cortando todas as geratrizes (fig. 33).

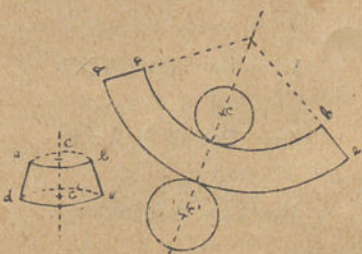

Fig. 33

pode ser:
- *de bases paralelas* — As suas secções são circunferências.
- *de bases obliquas* — Uma das secções é uma circunferência; a outra uma elipse.

O cilindro, o cone, o tronco de cilindro e o tronco de cone podem considerar-se os limites do prisma, da pirâmide, do tronco de prisma e do tronco de pirâmide, variáveis, inscritos e circunscritos aos sólidos respectivos e cujas bases teem por limites as bases daqueles.

Areas das superfícies laterais e totais, do cilindro cone e troncos respectivos

Cilindro:

Como dissemos anteriormente, o cilindro é o limite para que tendem os prismas inscritos e circunscritos quando se dobra indefinidamente o número dos seus lados, e assim temos que a sua

Area lateral

será o limite da área lateral do prisma

$$Ar = \lim \; Per\,(B) \times h$$

e como

$$\lim \; Per\,(B) = 2\,\pi\,R$$

e

$$\lim h = g \text{ (geratriz)}$$

vem

$$Ar = 2\,\pi\,R \times g$$

Area total

Pelos motivos apontados, a área total do cilindro será :

$$Ar = \lim \ Per\,(B) \times (h + ap)$$

e como $\lim ap = r$

vem $Ar = 2\pi R \times (g + R)$

Cone:

Sendo o cone o limite para que tendem as pirâmides inscritas e circunscritas quando se dobra indefinidamente o número dos seus lados, a sua

Area lateral

será o limite da área lateral da pirâmide:

$$Ar = \lim \ \frac{Per\,(B)}{2} \times Ap$$

e como $\lim Per\,(B) = 2\pi R$

$\lim Ap = g$ (geratriz)

vem $Ar = \dfrac{2\pi R}{2} \times g$

ou $Ar = \pi R \times g$

Area total

Pela mesma razão a área total do cone será:

$$Ar = \lim \frac{Per\ (B)}{2} \times (Ap + ap)$$

e como $\lim ap = r$

vem $$Ar = \frac{2\ \pi\ R}{2} \times (g + r)$$

ou seja $\pi\ R \times (g + r)$

Tronco de cilindro

Um tronco de cilindro é equivalente a um cilindro cuja base é a secção recta e cuja altura é o eixo do tronco e assim teremos que a sua

Area lateral

será igual ao perímetro da base multiplicado pelo eixo:

$$Ar = 2\ \pi\ R \times e$$

Tronco de cone

Como o tronco de cone de bases paralelas é o limite dos troncos de pirâmide inscritos e circunscritos quando se dobra indefinidamente o número dos seus lados, temos que, a sua

Area lateral

será: $$Ar \lim \frac{Per\ (B) + Per\ (B')}{2} \times Ap$$

e como $$\lim \mathrm{Per}\,(B) = 2\,\pi\,R$$

e $$\lim \mathrm{Per}\,(B') = 2\,\pi\,R'$$

e $$\lim \mathrm{Ap} = g \text{ (geratriz)}$$

vem: $$\mathrm{Ar} = \frac{2\,\pi\,R + 2\,\pi\,R'}{2} + g$$

ou seja: $$\mathrm{Ar} = (\pi\,R + \pi\,R') \times g$$

ou ainda: $$\mathrm{Ar} = (R + R') \times \pi\,g$$

Area total:

Por igual razão, a sua área total será:

$$\mathrm{Ar} = \lim \quad \frac{\mathrm{Per}\ (B)}{2} \times (\mathrm{Ap} + \mathrm{ap}) + \frac{\mathrm{Per}\,(B')}{2} \times (\mathrm{Ap} + \mathrm{ap}')$$

e como: $$\lim \mathrm{ap} = R$$

e: $$\lim \mathrm{ap}' = R'$$

vem: $$\mathrm{Ar} = \frac{2\,\pi\,R}{2} \times (g + R) + \frac{2\,\pi\,R'}{2} \times (g + R')$$

ou seja: $$\mathrm{Ar} = \pi\,R \times (g + R) + \pi\,R' \times (g + R')$$

Volumes dos cilindros, cones e troncos respectivos

Cilindro :

Recordando o que dissemos sôbre as áreas vem :

$$V = \lim \ Ar\ (B) \times h$$

e como : $\lim \ Ar\ (B) = \pi R^2$

e : $\lim h = g$ (geratriz)

vem : $V = \pi R^2 \times g$

Cone :

Pela mesma razão vem :

$$V = \lim \frac{1}{3} Ar\ (B) \times$$

e como : $\lim Ar\ (B) = \pi R^2$

$$\text{vem} = \frac{1}{3} \pi R^2 \times h$$

Tronco de cone.

Pelos motivos apontados :

$$V = \lim \frac{1}{3} h \times Ar\ (B) + Ar\ (B') + \sqrt{Ar\ (B) \times Ar\ (B')}$$

ou seja

$$V = \frac{1}{3} h \times \left(\pi R^2 + \pi R'^2 + \sqrt{\pi R^2 \times \pi R'^2}\right)$$

e portanto :

$$V = \frac{1}{3} h \times (\pi R^2 + \pi R'^2 + \pi R R')$$

ou ainda :

$$V = \frac{1}{3} h \pi \times (R^2 + R'^2 + R R')$$

CAPITULO II

Esfera, plano tangente. Área da superfície da esfera, do fuso esférico, da zona esférica e da calote esférica. Volume da esfera, do sector esférico, da camada esférica e da cunha esférica

Chama-se *esfera* à superfície gerada por uma circunferência posta em movimento de rotação em tôrno do diâmetro.

Chama-se *plano tangente à esfera* ao plano que tem apenas um ponto de contacto com a esfera e contêm as tangentes a todas as linhas traçadas na superfície da esfera e que passam pelo ponto de contacto.

Segmento esférico é todo o sólido resultante da secção feita na superfície esférica por um plano.

Chama-se *calote esférica* à porção de superfície esférica de um segmento.

Hemisférios — são as duas partes iguais em que um círculo máximo divide a esfera.

Círculo máximo — é o círculo que passa pelo centro da esfera.

Camada esférica — é o sólido de revolução gerado por uma corôa circular girando em tôrno dum dos diametros das circunferências concêntricas que a formam.

Chama-se *espessura da camada esférica* à diferença dos raios das duas esferas.

Cunha esférica—é a porção de esfera compreendida entre dois semi-círculos máximos.

Quando a esfera é cortada por dois planos que passam pelo centro, estes dividem a esfera em 4 cunhas que são iguais 2 a 2.

Quadrante esférico—é cada uma das 4 cunhas iguais em que a esfera fica dividida por 2 planos perpendiculares,

Zona esférica—é a porção de superfície esférica compreendida entre 2 círculos bases. Obtem-se cortando a esfera por 2 planos paralelos.

Lúnula ou fuso esférico—é a porção de superfície esférica duma cunha.

Numa superfície esférica há a considerar:

1.º—A esfera é o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes do centro.

2.º—Todos os raios da esfera são iguais.

3.º—Todos os diâmetros da esfera são iguais.

Areas da superfície da esfera, do fuso esférico, da zona esférica e da calote esférica

Área da esfera—é igual ao quádruplo da área dum círculo máximo.

$$Ar = 4 \pi R^2$$

Area da zona esférica—é igual ao produto da altura pela circunferência do círculo máximo da esfera a que a zona pertence.

$$Ar = 2 \pi R \times H$$

Com efeito, se consideramos a zona esférica cortada por planos paralelos de forma que fiquem todas as secções com o mesmo raio R e tendo por alturas h, h', h'' e considerando os planos equidistantes, teremos que a sua área se transforma desde que se unam os extremos respectivos numa série de áreas de troncos de cone.

portanto :

$$Ar = \lim Ar\,(I) + Ar\,(II) + Ar\,(III)\ldots$$

e assim :

$$Ar = \lim 2\pi h\, m_n + 2\pi h'\, m_n + 2\pi h''\, m_n\ldots$$

e ainda :

$$Ar = \lim 2\pi m_n\,(h + h' + h'')\ldots = \lim 2\pi H\, m_n$$

ora, sendo : $H = h + h' + h''$

vem : $Ar = 2\pi H \times \lim m_n = 2\pi R \times H$

A'rea da calote—A expressão da área da zona aplica-se igualmente à calote e assim :

$$Ar = 2\pi R \times H$$

A'rea da lúnula ou fuso esférico — Fácilmente se reconhece que a área das lúnulas da mesma esfera são proporcionais às suas amplitudes.

É evidente que a superfície de uma esfera se pode considerar uma lúnula de 360° ou 2π radianos.

$$Ar = 4\pi R^2$$

A lúnula de n° terá portanto :

$$Ar = \frac{4 \pi R^2}{360°} \times n°$$

ou :

$$Ar = \frac{\pi R^2}{90°} \times n°$$

Volume da esfera, do sector esférico, da camada esférica e da cunha esférica

Volume da esfera — É igual a $\frac{4}{3}\pi$ pelo cubo do raio.

De facto, uma esfera pode considerar-se um tronco esférico cujas bases são pontos, e assim, ficariamos com : $r = o$; $r' = o$; $h = 2\,r$.

e portanto :

$$V = \pi \times 2\,r\,\frac{(2\,r)^2}{6}$$

ou :

$$V = \pi \times \frac{2\,r \times 4\,r^2}{2}$$

ou ainda :

$$V = \pi \times \frac{8\,r^3}{6}$$

logo :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Volume do sector esférico — É o sólido gerado pela rotação de um sector circular em tôrno de uma recta do seu plano. O seu volume é igual à terça parte do produto da área da sua superfície esférica pelo raio.

Designando por **e** a medida da superfície esférica do sector, isto é, fazendo:

$$2 \pi R H = e$$

teremos:
$$V = \frac{1}{3} e \times r$$

Volume da camada esférica — Como já vimos, a camada esférica é o sólido de revolução limitado por duas superfícies esféricas concêntricas.

Ora, sendo r e r' os raios, interior e exterior da esfera a que pertence a camada, e $r' - r = e$ (espessura da camada) teremos que o volume da esfera interior será:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

e que o volume da esfera exterior será:

$$V = \frac{4}{3} \pi r'^3$$

logo, o volume da camada será a diferença das duas esferas:

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi r'^3$$

ou seja:

$$V = \frac{4}{3} \pi (r^3 - r'^3)$$

e como:
$$r' - r = e$$

será : $$e + r = r'$$

e portanto :

$$V = \frac{4}{3} \pi \left[(r + e)^3 - r^3 \right]$$

ou seja :

$$V = \frac{4}{3} \pi (r^3 + 3 r e^2 + 3 e r^2 + e^3 - r^3)$$

logo : $$V = \frac{4}{3} \pi e (3 r e + 3 r^2 + e^2)$$

Volume da cunha esférica — Um plano perpendicular ao diâmetro que serve de aresta da cunha, corta as faces desta determinando um ângulo $\hat{\alpha}$ e corta a superfície esférica da cunha segundo uma circunferência cuja amplitude é igual à do ângulo-giro $\hat{\beta}$; assim será :

$$\frac{\text{Vol. da cunha}}{\text{Vol. da esfera}} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$$

logo : $$V = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} \text{ vol. da esfera.}$$

Volume do segmento esférico — Como o segmento se pode considerar um tronco esférico, tendo como uma das bases um ponto, temos :

$$r' = 0$$

e portanto : $$V = \pi h \left(\frac{r^2}{2} + \frac{h^2}{6} \right)$$

e designando por r_1 a medida do raio da esfera vem:

$$r^2 = (2\,r_1 - h)\,h$$

e portanto:

$$V = \pi\,h^2 \left(\frac{2\,r_1 - h}{2} + \frac{h}{6}\right)$$

ou seja:
$$V = \pi\,h^2 \times \frac{6\,r - 2\,h}{6}$$

logo:
$$V = \frac{1}{3}\,\pi\,h^2 \times (3\,r - h)$$

Volume do tronco esférico — Como para a demonstração dalguns volumes necessitámos conhecer a fórmula do volume do tronco esférico, julgamos oportuno indical-a:

$$V = \pi\,h \left(\frac{r^2 + r'^2}{2} + \frac{h^2}{6}\right)$$

CAPITULO III

Triângulos esféricos, seus elementos. Coordenadas esféricas; sistemas de coordenadas usados em cosmografia

Triângulo esférico — E' a figura obtida, unindo por arcos de círculo máximo, menores que uma semi-circunferência, três pontos de uma superfície esférica.

Um triângulo esférico pode ser como um triângulo plano; isósceles, escaleno, equilátero, rectângulo, etc.

As medidas dos lados e ângulos dum triângulo esférico podem fazer-se pelas faces e diedros do triedro ao centro correspondente, visto serem iguais.

Caracteristicas mais importantes dos triângulos esféricos	1.º — Qualquer lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a sua diferença. 2.º — A soma dos lados é menor que 4 rectos. 3.º — A soma dos ângulos está compreendida entre 2 e 6 rectos.

Deste último principio se conclue que os triângulos esféricos podem ser rectângulos, bi-rectângulos e tri-rectângulos.

Chama-se *excesso esférico* dum triângulo à diferença entre a soma dos seus ângulos e dois rectos.

Igualdade de triângulos esféricos

Dois triângulos são iguais:	1.º — Quando teem dois lados e o ângulo por eles formado, iguais. 2.º — Um lado e os ângulos adjacentes iguais. 3.º — Três lados iguais. 4.º — Três ângulos iguais.

A'rea do triângulo esférico - Para determinar a área do triângulo esférico temos que estabelecer primeiro os seguintes principios:

1.º — Dois triângulos esféricos simétricos são equivalentes.

2.º — Quando 3 arcos de circulo máximo se cortam, a soma de dois triângulos opostos pelo vértice é equivalente à lúnula definida pelos arcos que se cruzam nesse vértice e contém um dos triângulos.

A área do triângulo esférico é igual ao producto do arco de circulo máximo, pela razão do excesso esférico para 180°.

$$Ar = \pi R^2 \frac{\varepsilon}{180}$$

sendo ε = excesso esférico.

Coordenadas esféricas. Sistemas de coordenadas usadas em cosmografia

A posição de um ponto numa esfera pode ser definida pelas circunferências de dois círculos máximos perpendiculares entre si.

Qualquer que seja o sistema que utilizemos, um dos círculos é tomado como *círculo primário cu primitivo* e na circunferência há um ponto fixo a partir do qual se conta a origem.

O outro círculo, que se chama *circulo secundário* passa pelo ponto e pelos *polos* do círculo primário.

Na cosmografia utilizam-se 3 sistêmas de coordenadas: horisontais, equatoriais e ecliticas, conforme o círculo primário fôr o horizonte astronómico, o equador celeste ou a eclítica celeste.

I.º sistema: Coordenadas horisontais — O círculo fundamental é, como dissemos, o horisonte astronómico, e como a esfera celeste está a uma tal distância de nós que a podemos considerar no infinito, é indiferente tomarmos o horizonte astronómico, ou o visual, visto que sendo todos paralelos, se encontram no infinito.

As coordenadas horisontais são duas: *Altura e azimute*

Chama-se *altura*, ao arco de vertical que passa pelo astro, compreendido entre este e o horizonte.

Chama-se *vertical de um astro*, ao circulo máximo que passa pelo astro e pelo zenite e nadir.

Chama-se *azimute*, ao arco de horizonte compreendido entre o ponto Sul e o ponto de interseção do horizonte com o vertical do astro.

Chama-se *ponto Sul*, ao ponto em que a projecção do polo sul encontra o horizonte.

Chama-se *distância zenital*, ao arco de vertical compreendido entre o astro e o zenite.

A distância zenital é complementar da altura, isto é:

$$\text{distância zenital} + \text{altura} = 90^\circ$$

As coordenadas horizontais são de grande emprego por ser muito fácil a sua determinação, visto rápidamente se poder calcular em qualquer altura a posição do horizonte astronómico; têem, porêm, o inconveniente de variarem com o lugar de observação.

2.º *sistema : Coordenadas equatoriais* — O círculo fundamental é, como já vimos, o equador celeste. Este é determinado pela interseção do plano do equador terrestre com a esfera celeste.

As coordenadas equatoriais são duas : *Declinação* e *ascenção recta*

Chama-se *declinação*, ao arco de circulo horário compreendido entre o astro e o equador.

Chama-se *círculo horário* ou meridiano celeste, ao círculo máximo que passa pelo astro e pelos polos do mundo.

Chamam-se *polos do mundo*, aos pontos onde o eixo da terra encontra a esfera celeste. Teem como os polos da terra a designação de polo norte e polo sul.

Chama se *ascenção recta*, ao arco de equador compreendido entre o ponto vernal e a intercesão do equadôr com o circulo hórario do astro.

Chama-se *ponto vernal*, ao ponto onde a eclítica intercepta o equador no equinócio da primavera; tambem se lhe dá o nome de *primeiro ponto de Aries*. Representa-se pela letra γ ou pelo sinal ♈.

O outro ponto onde a eclítica intercepta o equadôr no equinócio do outono chama-se *primeiro ponto de libra* ou *da balança*.

Representa-se pelo sinal ♎

Chama-se *distância polar*, ao arco de círculo horário compreendido entre o astro e o polo.

A distância polar é complementar da declinação, isto é :

$$\text{distância polar} + \text{declinação} = 90^\circ$$

As coordenadas equatoriais não têem o inconveniente das horisontais, mas, como o equador devido ao movimento de percessão dos equinócios desliza sobre a eclítica 5'' por ano, visto o movimento de percessão dos equinocios se realizar em 22.000 anos, dá lugar a erros

3.º *sistema : Coordenadas eclíticas* — O circulo fundamental é a eclítica.

As coordenadas eclíticas são duas: *Latitude* e *longitude celestes*.

Chama-se *latitude celeste*, ao arco de círculo de latitude compreendido entre o astro e o equador.

Chama-se *circulo de latitude*, ao círculo máximo que passa pelos polos da eclítica

Chamam-se *polos da eclitica*, aos pontos onde a perpendicular ao centro da eclítica encontra a esfera celeste. Designam-se por: *polo superior* e *polo inferior*; o primeiro corresponde ao polo norte, o segundo ao polo sul.

Chama-se *longitude celeste*, ao arco de eclítica compreendido entre o ponto de intercessão desta com o círculo de latitude do astro e o ponto vernal.

Note-se que o ponto vernal é fixo na eclítica e não variável como sucede no equador.

Chama-se *distância ao polo da eclitica*, ao arco de círculo de latitude compreendida entre o astro e o polo da eclítica. E' complementar da latitude, quer dizer:

$$\text{distância ao polo da eclítica} + \text{latitude} = 90^\circ$$

As coordenadas eclíticas são as únicas de absoluta segurança, mas como as mais fáceis de obter são as horizontais, na prática, obteem-se as horizontais e transporta-se depois para as equatoriais ou para as eclíticas.

Assim, na fig 34 o astro A tem como coordenadas horisontais:

$$\text{Altura} = A\,a_1$$

$$\text{Azimute} = S\,a_1$$

e como:

$$\text{distância zenital} = A\,Z$$

Se determinarmos a altura do polo Pn encontramos:

$$\text{Altura} = Pn\;H$$

e portanto:

$$90^\circ - Pn\ H = Pn\ Z \text{ (distância zenital do polo)}$$

Ora as coordenadas equatoriais do mesmo astro A serão:

$$\text{Declinação} = A\ a_2$$

$$\text{Ascensão recta} = \gamma\ a_2$$

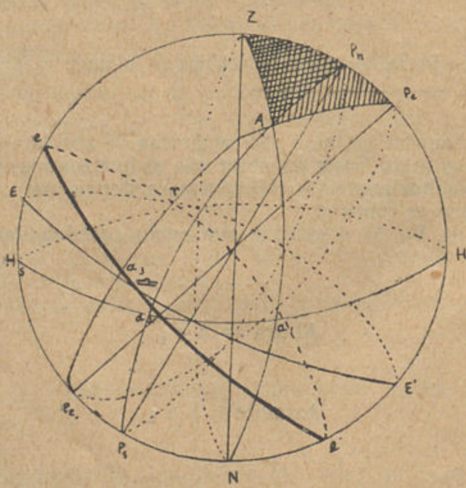

Fig. 34

mas como $Pn\ A = 90^\circ - A\ a_2$, temos que conhecidos $\overline{Z\ A}$ e $\overline{Z\ Pn}$ das coordenadas horisontais e conhecido o ângulo Z do triângulo esférico Z A Pn está determinado o valor de Pn A e como

$$Pn\ A = 90^\circ - A\ a_2$$

teremos:

$$A\ a_2 = 90^\circ - Pn\ A$$

e assim obtivemos a declinação do astro sem ser necessário medil-a e trabalhando só com as coordenadas horisontais.

Se quizessemos a latitude do astro, teriamos então que medir a altura do polo da eclítica Pe e teriamos:

$$\text{Altura} = Pe\ H$$

e

$$\text{Distância zenital} = Pe\ Z$$

ora, como

$$90^\circ - Pe\ H = Pe\ Z$$

ficariamos com o triângulo esférico A Z Pe de que são conhecidos:

$\overline{A\ Z}$ = distância zenital do astro

Pe Z = distância zenital do polo da eclítica e o ângulo Z

consequentemente, fica determinado o valor de Pe A que é a distância ao polo da eclítica; e como:

$$90^\circ - Pe\ A = A\ a_3$$

obteremos a latitude sem ser necessário medil-a e só utilizando coordenadas horisontais.

Coordenadas terrestres

A terra é considerada teóricamente como sendo uma esfera, e assim, tambem é por coordenadas que se determina a posição de qualquer lugar na esfera terrestre.

As coordenadas são: latitude e longitude.

A latitude mede-se, achando a altura do polo acima do horisonte.

A longitude determina-se pela diferença hóraria, entre o lugar considerado e o meridiano principal.

Fim da 5.ª classe.

ÍNDICE

LIVROS AUXILIARES

Resumo de Geometria de 1.º e 2.º anos dos liceus, dos compêndios dos srs. Andréa e Luís Passos, com 439 problemas resolvidos.................................... 2$50

Quadros de Botânica, de 1.º a 5.º anos dos liceus, em harmonia com os novos programas, por J. P. 7.ª edição, aumentada (1928).. 2$00

Sinopse da Gramática francesa--por J. Lobato........ 1$50

Compêndio de História da Literatura Portuguesa, para uso dos alunos dos liceus, por A. Aflalo .... 2$50

Traducção do The english juvenile reader and grammar, 2.ª classe, por T. Botelho................ 1$00

Traducção do The english juvenile reader and grammar, 3.ª a 5.ª classes, idem........................ 2$50

Resolução de todos os problemas d'Algebra do 3.º ano d'Andréa, por Peixoto Lindoso.................. 3$00

Resolução de todos os exercícios e problemas de Algebra da 4.ª e 5.ª classes dos Liceus, de Santos Andréa, resolvidos por tábuas de 5 e 7 decimais, por A. J. Peixoto Lindoso (com os juros compostos e anuidades).. 5$00

Dicionário de verbos irregulares, defectivos e impessoais franceses, traduzidos e conjugados nos tempos simples e compostos com os respectivos auxiliares, para uso dos estudantes da língua francesa, por J. P., 1 volume de 152 pág. 2.ª edição aumentada contendo mais de **400 verbos**, cartonado .... 5$00

Resumo de Química para o 3.º ano dos liceus com os 29 problemas resolvidos, da última edição (1927). .... 2$00

Resumo de Química do 4.º ano, (nova edição com 60 problemas resolvidos) (1928).............................. 2$50

Resumo de Química do 5.º ano, da última edição, com os 100 problemas resolvidos, 2.ª edição correcta (de 1926) . 3$00

Resumo de Química do 6.º ano da última edição, com os problemas resolvidos e mais 12 problemas sobre a mesma matéria, (edição de 1926) .... 5$00

Resumo de fisica, (com figuras e 85 problemas resolvidos) 5.ª edição, actualizada, (edição de 1928)............ 3$50

Quadros de Zoologia do 1.º e 2.º anos dos liceus, (edição nova) .... 1$50

Quadros de Zoologia 3.º a 5.º anos dos liceus......... 2$50

» » **Geografia** de 1.º a 3.º anos e de **História Universal**, 4.º e 5.º anos, **edição de 1926** .... 5$00

História de Portugal, para o curso dos liceus, pelo Dr. Arsénio A. Torres de Mascarenhas, 1 vol. ilustrado, (9.ª edição actualizada) **edição de 1926**, cartonada......... 8$00

Tip Henrique Torres — R. S. Bento, 279