ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA.

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA
POR
M. BEZOUT

DA ACADEMIA REAL
DAS SCIENCIAS DE PARIS &c. &c.

TRADUZIDOS DO FRANCEZ.

QUINTA EDIÇAÕ.

COIMBRA:
NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.

M. DCC. LXXXXV.

Por Ordem de Sua Mageſtade.

INDICE

Das materias que se contém nestes Elementos.

Di-

Me-

Das

ELE-

ELEMENTOS
DE
ARITHMETICA.

NOÇÕES PRELIMINARES

Sobre a natureza dos Numeros, e ſuas differentes eſpecies.

1 DAMOS o nome de *Quantidade*, em geral, a tudo aquillo que he capaz de augmento, ou diminuiçaõ; como he, por exemplo, a *extenſaõ*, *duraçaõ*, *pezo &c.* Tudo o que he quantidade pertence ao objecto das *Sciencias Mathematicas*. Mas a *Arithmetica*, que he a primeira parte dellas, e ſerve de porta para todas as outras, trata ſómente da quantidade *diſcreta*, que he a que ſe exprime por numeros.

2 A Arithmetica pois he a *Sciencia de contar*: ella conſidera a natureza, e propriedades dos numeros, e tem por fim enſinar os meios mais faceis, tanto para os repreſentar, como para os compôr, e reſolver, que he o que ſe chama *calcular*.

3 Para ſe formar huma idéa exacta dos nume-

ros he neceſſario ſaber primeiro o que entendemos por *unidade*.

4 A *Unidade* he huma quantidade, que ſe toma (as mais das vezes arbitrariamente) para ſervir de termo de comparaçaõ a todas as outras quantidades da meſma eſpecie. Aſſim, quando dizemos que hum corpo péza *ſinco* libras, a *libra* he a unidade, iſto he, a quantidade, com a qual ſe compara, e pela qual ſe faz idéa do pezo delle. Podiamos igualmente tomar a *onça* para unidade, e entaõ o pezo do meſmo corpo ſeria *oitenta* onças.

5 O *Numero* ſerve pois para exprimir de quantas unidades, ou partes da unidade ſe compóe qualquer quantidade.

Se a quantidade ſe compóe taõ ſómente de unidades, o numero que a exprime ſe chama *inteiro*: porém ſendo compoſta de unidades, e juntamente de partes da unidade, ou ſimpleſmente de partes da unidade, entaõ chamamos o numero *quebrado*, ou *fracçaõ*: aſſim, *tres e meio* fazem hum numero quebrado, ou fraccionario; e *tres quartas*, huma fracçaõ.

6 O numero, de que nos ſervimos, ſem determinar a eſpecie das unidades, como quando dizemos ſimpleſmente *tres*, ou *tres vezes*, *quatro*, ou *quatro vezes*, chama-ſe numero *abſtracto*; porém quando declaramos ao meſmo tempo a eſpecie das unidades, como quando dizemos *quatro libras*, *cem tonelladas*, chama-ſe numero *concreto*.

Ha muitas outras eſpecies de numeros, dos quaes daremos a definiçaõ ao meſmo tempo que delles houvermos de tratar.

Da

Da Numeraçaõ ordinaria, e da Dizima.

7 A *Numeraçaõ* he a arte de exprimir todos os numeros por huma quantidade limitada de nomes, ou de caracteres. Estes caracteres, que saõ as letras da escritura numerica, chamaõ-se *algarismos*. Naõ he necessario dizer aqui os nomes dos numeros, por ser conhecimento familiar a toda a sorte de pessoas. Quanto ao modo de os representar por algarismos, naõ podemos deixar de explicar com toda a exactidaõ os seus principios.

8 Os caracteres, de que usamos na *Numeraçaõ* actual, e os nomes dos numeros, que elles representaõ, saõ estes: (*)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cifra	*hum*	*dous*	*tres*	*quatro*	*sinco*	*seis*	*sete*	*oito*	*nove*

Para exprimir todos os outros numeros com estes mesmos caracteres, se assentou: Que de dez unidades se fizesse huma só, a qual se chamasse *dezena*, e que se contasse por dezenas da mesma sorte, que se conta por unidades, isto he, que se contassem *duas* dezenas, *tres* dezenas &c. até *nove*; e que para representar estas novas unidades se usasse dos mesmos algarismos com que se repre-

(*) Na Arithmetica vulgar usamos tambem de huma figura, que chamamos *Cifraõ*, a qual se escreve pela maior parte como o *Phi* Grego, e algumas vezes desta fórma U. O seu lugar he entre os *milhares*, e as *centenas*, e serve para ler com mais facilidade os numeros, distinguindo-se á primeira vista a casa dos *milhares*, como em 425U372. Tambem serve de abbreviatura, quando os tres ultimos algarismos saõ cifras. Assim 725U he o mesmo, que 725000.

ſentaõ as unidades primitivas, diſtinguindo-as ſómente pelo lugar, que ſe lhes aſſinallou á eſquerda dellas.

Aſſim, para repreſentar *ſincoenta e quatro*, que contém *ſinco* dezenas, e *quatro* unidades, eſcreveremos 54. Para repreſentar *ſeſſenta*, que contém hum numero exacto de dezenas, e nenhuma unidade, eſcreveremos 60; pondo huma cifra na caſa das unidades, para moſtrar que as naõ ha neſte numero, e juntamente determinar a letra 6 a ſignificar dezenas. Deſte modo podemos contar até *noventa e nove* incluſivamente.

9 Pelo que, antes de paſſarmos adiante, notemos eſta propriedade da Numeraçaõ actual, a ſaber: *Que huma letra poſta á eſquerda da outra, ou ſeguida de huma cifra, repreſenta hum numero dez vezes maior, do que havia de repreſentar, ſe eſtiveſſe ſó.*

10 Por huma convençaõ ſemelhante contaremos de 99 até *novecentos e noventa e nove*. Porque de dez dezenas faremos huma unidade, a qual chamaremos *centena*, porque dez vezes dez fazem cem; e contaremos as centenas deſde *huma* até *nove*, eſcrevendo-as com os meſmos algariſmos, ſómente com a differença de as pôrmos á eſquerda das dezenas.

Aſſim, para exprimir *oitocentos e ſincoenta e nove*, que contém *oito* centenas, *ſinco* dezenas, e *nove* unidades, eſcreveremos 859. Se foſſem *oitocentos e nove*, que contém *oito* centenas, e *nove* unidades, ſem dezena alguma, ſeria neceſſario eſcrever 809; pondo huma cifra na caſa das dezenas, que faltaõ. E ſe tambem faltaſſem as unidades, deveriamos pôr duas cifras; de ſorte que para aſſentar *oitocentos*, eſcreveremos 800.

11 Pelo que notaremos tambem: *Que em virtude da mesma convençaõ, qualquer letra seguida de outras duas, ou de duas cifras, mostra hum numero cem vezes maior, de que mostraria estando só.*

12 Com o mesmo artificio contaremos de 999 até *nove mil novecentos e noventa e nove*; formando de dez centenas huma unidade, que se chama *milhar*, porque dez vezes cem fazem mil; contando estas unidades pelo modo, que já dissemos, e representando-as com as mesmas letras, situadas porém á esquerda das centenas.

Assim para assentar *sete mil oitocentos e sincoenta e nove*, escreveremos 7859; para assentar *sete mil e nove*, escreveremos 7009; e para assentar *sete mil*, escreveremos 7000. Donde se vê: *Que huma letra sendo seguida de outras tres, ou de tres cifras, mostra hum numero mil vezes maior, do que mostraria estando só.*

13 Continuando por diante do mesmo modo, fazendo sempre de dez unidades de qualquer ordem huma só unidade, e escrevendo as novas unidades, que se vaõ formando, nas casas consecutivas, caminhando sempre para a esquerda, chegamos a exprimir, e assentar de hum modo uniforme, com os dez algarismos propostos, todos os numeros inteiros, que se podem imaginar.

14 Para lermos com facilidade, ou dizermos o valor de qualquer numero, que conste de quantos algarismos quizermos, dividillo-hemos em classes de tres letras cada huma, exceptuando a ultima da parte esquerda, que conforme a quantidade das letras, de que o numero constar, poderá ser tambem de huma, ou de duas letras. A' primeira, terceira, e todas as mais classes impares,

prin-

principiando da direita para a esquerda, daremos por sua ordem os nomes seguintes, *unidades*, *milhoens*, *billioens*, *trillioens*, *quatrillioens*, *quintillioens*, *sextillioens* &c.; e á segunda, quarta, e todas as mais classes pares, o nome de *milhares*. Feito isto, advertiremos que a primeira letra do cada classe (principiando sempre da parte direita) mostra as unidades proprias da sua classe, conforme os nomes que lhes temos dado, e que a segunda mostra as dezenas, e a terceira as centenas das mesmas unidades respectivas.

Entaõ, principiando da parte esquerda, leremos cada huma das classes, como se estivesse só, applicando-lhe no fim a denominaçaõ respectiva das suas unidades. Assim, por exemplo, para declararmos o valor do numero seguinte:

23'	456'	789'	234'	565'	456
milhares	*billioens*	*milhares*	*milhoens*	*milhares*	*unidades*

Diremos: vinte e tres *mil*, quatrocentos e sincoenta e seis *billioens*; setecentos e oitenta e nove *mil*, duzentos e trinta e quatro *milhoens*; quinhentas e sessenta e sinco *mil*, quatrocentas e sincoenta e seis *unidades*. (*)

15 Da *Numeraçaõ*, que temos explicado, e que he de pura convençaõ, se segue manifestamente:

(*) Nas Contas pecuniarias usamos do termo *conto* em lugar de *milhaõ*; de *conto de contos* em lugar de *milhaõ de milhoens*, ou de hum *billiaõ*. Naõ dizemos *hum milhaõ de reis*, mas *hum conto de reis*, ou simplesmente *hum conto*. Dizemos igualmente *hum conto de ouro*, ou *hum milhaõ de cruzados*. Em tudo o mais naõ contamos senaõ por *milhoens*, pois naõ dizemos hum *conto*, mas hum *milhaõ* de moedas, de arrobas &c.

te : Que á medida que se vaõ seguindo os algarismos de hum numero da direita para a esquerda, representaõ unidades consecutivamente maiores, sendo sempre cada huma dellas dez vezes maior que a precedente ; e por conseguinte : Que para fazer hum numero dez, cem, mil vezes maior &c. basta pôr depois do algarismo das unidades, huma, duas, tres cifras &c. Pela razaõ contraria, quando em hum numero se caminha da esquerda para a direita, os algarismos consecutivos mostraõ unidades cada vez menores, sendo sempre cada huma dellas dez vezes menor que a precedente.

16 Tal he o artificio da *Numeraçaõ* actual: ella serve de base a todos os outros modos de contar, aindaque em muitas artes naõ se guarde sempre a regra de contar unicamente por dezenas, dezenas de dezenas &c.

17 Para assentar o valor das quantidades mais pequenas do que a unidade, que se tem escolhido, divide-se esta em outras unidades mais pequenas. O numero dellas he arbitrario, com tanto que por ellas se possaõ medir as quantidades, que queremos mostrar. Porém o que mais se deve procurar nesta sorte de divisões, he que se façaõ de maneira, que dem aos calculos a facilidade maior que he possivel. Por esta razaõ, em lugar de dividir logo a unidade em hum grande numero de partes, que sejaõ sufficientes para a avaliaçaõ das mais pequenas quantidades, se divide primeiro em hum moderado numero de partes, cada huma das quaes se divide em outras, e estas em outras &c. E esta he a razaõ, porque nas moédas se divide a *libra* em 20 partes, que se chamaõ *soldos*, e o *soldo* em 12 partes, que se chamaõ *dinheiros*. Do mes-

mesmo modo nos pezos divide-se a *libra* em 2 *marcos*, o marco em 8 *onças*, e a onça em 8 *oitavas*; de sorte, que no primeiro caso se faz a divisaõ por *vintenas*, e por *duzias*; e no segundo, por *meios*, e *oitavas* &c.

18 O numero composto de partes, que se reportaõ do modo sobredito a differente especie de unidades, chama-se *Complexo*, *Denominado*, ou *Heterogeneo*; e ao contrario chama-se *Incomplexo* todo aquelle, que involve huma só especie de unidades. Assim 8^{lb}, ou 8 *libras*, he numero incomplexo; e 8^{lb} 17^{s} 8^{d}, ou 8 *libras*, 17 *soldos*, e 8 *dinheiros*, numero complexo.

19 Cada arte tem o seu modo particular de dividir a unidade principal, de que se serve. As divisões da *toesa* naõ saõ as mesmas que as da *libra*; as da *libra* saõ differentes das do *dia*, e da *hora*; e estas differem tambem das do *marco*, e assim as mais. De todas ellas mostraremos o valor, quando tratarmos dos numeros complexos.

20 Porém de todas as divisões, e subdivisões, que se podem fazer da unidade, a que mais contribue sem duvida alguma para a facilidade dos calculos, he a *divisaõ decimal*, na qual se suppõe a unidade dividida em dez partes, cada huma destas em outras dez, e assim por diante. Della se faz hum uso continuo na practica das Sciencias Mathematicas; e tem a vantagem de que a sua numeraçaõ, e o seu calculo he do mesmo modo, que o dos numeros ordinarios e inteiros, como agora se verá.

21 Para assentar pois em *partes decimais* as quantidades mais pequenas que a unidade, imagina-se a mesma unidade, qualquer que ella se-

ja, v. g. *libra*, *toesa* &c., composta de dez partes iguaes, assim como se imagina a *dezena* composta de dez *unidades*, ou a *libra* composta de vinte *soldos*. A estas novas unidades, em contraposiçaõ das *dezenas*, damos o nome de *decimas*; representamo-las com os mesmos algarismos; e porque saõ dez vezes menores que as unidades principais, dar-lhes-hemos lugar á direira dellas.

Para tirar porém o equivoco que podia haver, tomando-se as *decimas* por unidades simples, assentou-se ao mesmo tempo fixar por huma vez a casa das unidades principais, a que o numero todo se reporta, por meio de hum sinal particular. Para isso se usa de huma virgula (ou de hum ponto, ou de huma risca), a qual se póe ao lado direito das unidades, ou entre as unidades e as decimas, que vem a ser o mesmo. Assim, para assentarmos *vinte e quatro unidades* e *tres decimas* partes da unidade, escreveremos deste modo 24,3.

22 Da mesma sorte podemos actualmente considerar as *decimas*, como unidades formadas de outras dez, cada huma dez vezes mais pequena do que ellas; e pela mesma razaõ de analogia, as assentaremos á direita das mesmas *decimas*. Estas novas unidades dez vezes mais pequenas que as decimas, vem a ser cem vezes mais pequenas que as unidades principais, e por isso se chamaõ *centesimas*. Assim, para notar *vinte e quatro unidades*, *tres decimas*, *e sinco centesimas*, escreveremos deste modo 24,35.

23 Igualmente podemos conceber as *centesimas* como formadas de dez partes. Estas seraõ mil vezes mais pequenas que a unidade principal, e por conseguinte se chamaráõ *millesimas*; e por se-

rem

rem dez vezes mais pequenas que as *centesimas*, se assentaráõ á direita dellas. Continuando por diante a dividir do mesmo modo na razaõ decupla, formaremos novas unidades consecutivas, ás quaes daremos os nomes de *decimas-millesimas*, *centesimas-millesimas*, *millionesimas*, *decimas-millionesimas*, *centesimas-millionesimas*, *bimillionesimas* &c., e as assentaremos por sua ordem nas casas seguintes, caminhando sempre para a direita.

24 As partes da unidade, que acabamos de explicar, saõ as *fracções decimais*, a que os nossos Auctores daõ commumente o nome de *Dizima*.

25 O modo de ler, ou dizer o valor dos algarismos pertencentes á *Dizima*, he como nos outros numeros. Depois de se haverem lido as letras que estaõ á esquerda da virgula, lem-se as letras decimais da mesma sorte, applicando-lhes no fim o nome das unidades respectivas, que competem á sua ultima casa. Assim, para declarar o valor deste numero 34,572 diremos, trinta e quatro unidades, e quinhentas e setenta e duas *millesimas*: se, por exemplo, se tratasse de *toesas*, diriamos, trinta e quatro *toesas*, e quinhentas e setenta e duas *millesimas partes* de huma *toesa*.

A razaõ disto he facil de perceber, em se advertindo que no numero 34,572 a letra 5 se póde tomar indifferentemente por sinco *decimas*, ou por quinhentas *millesimas*; porque valendo a *decima* 10 *centesimas* (n. 22), e a *centesima* 10 *millesimas* (n. 23), cada *decima* valerá dez vezes dez *millesimas*, ou 100 *millesimas*; e assim as 5 *decimas* valeráõ 500 *millesimas*. Pela mesma razaõ, a letra 7 mostrará 70 *millesimas*, porque cada *centesima* vale 10 *millesimas* (n. 23).

26 Quanto á denominaçaõ das unidades reſpectivas da ultima caſa dos algariſmos decimais, ſerá ſempre facil de achar, contando ſobre cada huma das letras por ſua ordem, da virgula para a direita, os nomes ſeguintes: *decimas*, *centeſimas*, *milleſimas*, *decimas-milleſimas*, *centeſimas-milleſimas*, *millioneſimas* &c.

27 No caſo de naõ haver unidades, mas taõ ſómente partes decimais da unidade, para evitar toda a equivocaçaõ aſſentaremos huma cifra na caſa das unidades. Aſſim para declarar 125 *milleſimas*, eſcreveremos deſte modo 0, 125. Se quizeſſemos moſtrar 25 *milleſimas*, eſcreveriamos 0,025, aſſentando huma cifra na caſa das *decimas*, naõ ſómente para moſtrar que as naõ ha no dito numero, mas tambem para ficarem os algariſmos ſeguintes no ſeu devido lugar. Pela meſma razaõ, querendo declarar 6 *decimas-milleſimas*, eſcreveremos 0,0006, &c.

28 Suppoſta a intelligencia dos principios precedentes, examinemos as mudanças, que reſultaõ no valor de hum numero, quando a virgula ſe muda do ſeu lugar.

Como a virgula ſerve para marcar a caſa das unidades, e como o valor de cada hum dos algariſmos depende da ſua diſtancia local, e reſpectiva á meſma caſa das unidades, fica evidente, que mudando-ſe a virgula huma, duas, tres caſas &c. para a eſquerda, o numero ſe fará dez, cem, mil vezes &c. mais pequeno; e ao contrario dez, cem, mil vezes &c. maior, ſe a virgula ſe adiantar huma, duas, tres caſas &c. para a direita.

E com effeito, ſe tomarmos o numero 4327,5264, e mudarmos a virgula para a caſa ſeguinte á eſquerquerda, de ſorte que fique 432,75264, he manifeſto, que os *milhares* do primeiro numero paſſaõ no ſegundo para *centenas*, as *centenas* para *dezenas*, as *dezenas* para *unidades*, as *unidades* para *decimas*, as *decimas* para *centeſimas*, e aſſim por diante. Logo cada parte do primeiro numero, e por conſeguinte todo elle, ſe tornou dez vezes menor em virtude da mudança da virgula. Pelo contrario, ſe mudaſſemos a virgula huma caſa para a direita, e eſcreveſſemos 43275,264, os *milhares* do primeiro numero ſe converteriaõ em *dezenas de milhares*, as *centenas* em *milhares*, as *dezenas* em *centenas*, as *unidades* em *dezenas*, as *decimas* em *unidades*, as *centeſimas* em *decimas*, e aſſim por diante; mudança, de que manifeſtamente reſulta hum numero dez vezes maior que o primeiro.

29 Diſcorrendo do meſmo modo acharemos, que mudando a virgula duas, ou tres caſas para a eſquerda, reſulta hum numero cem, ou mil vezes menor; e pelo contrario, cem, ou mil vezes maior, ſe a virgula ſe mudar duas, ou tres caſas para a direita.

30 A ultima obſervaçaõ que faremos ſobre a *Dizima*, he que naõ ſe altera o valor de hum numero, aſſentando depois da ultima letra decimal quantas cifras quizermos. Aſſim 43,25 he o meſmo que 43,250, ou 43,2500, ou 43,25000 &c.

Porque valendo cada *centeſima* o meſmo que 10 *milleſimas*, ou 100 *decimas-milleſimas* &c., ás 25 *centeſimas* valeraõ 250 *milleſimas*, ou 2500 *decimas-milleſimas* &c. Em huma palavra: He o meſmo, como ſe em lugar de 25 moedas de deſaſeis toſtões (25 *piſtoles*) diſſeſſemos 250 *libras de França*;

ʃa ; ou em lugar de 25 *quintais*, diſſeſſemos 2500 *arrateis.* (*)

Das Operações da Arithmetica.

31 SOmar, Diminuir, Multiplicar, e Repartir, ſaõ as quatro operações fundamentaes da Arithmetica, a que os noſſos Eſcritores daõ o nome de *Eſpecies*. Todas as queſtões, que ſe podem propôr ſobre os numeros, ſe reduzem finalmente a praticar alguma deſtas Eſpecies, ou todas ellas. E por iſſo convém muito adquirir o habito de as executar com promptidaõ, e facilidade, procurando alcançar a razaõ em que ellas ſe fundaõ.

32 O fim da Arithmetica, como já diſſemos, he enſinar os meios de calcular facilmente os numeros. Eſtes meios conſiſtem em reduzir o calculo dos numeros compoſtos ao dos numeros ſimples, que ſe exprimem pelo menor numero de letras que he poſſivel, fazendo por partes todas as operações, como logo moſtraremos.

Da eſpecie de Somar, tanto em numeros inteiros, como em decimais.

33 SOmar naõ he outra couſa mais, do que moſtrar o valor total de muitos numeros por meio de hum ſó, que ſeja igual a todos juntos. Eſte numero, que ſe buſca por meio da operaçaõ, chamaſe

(*) O *quintal* de França tem 100 arrateis. Entre nós o *quintal* commum tem 128 arrateis, e o *quintal* da caſa da India 112.

ſe *Soma* ; e os numeros que ſe ajuntaõ , (os quais devem ſignificar todos a meſma eſpecie de unidades) chamaõ-ſe *Addições* , ou *Parcellas*.

Quando os numeros , que ſe haõ de ſomar , ſaõ *digitos* , iſto he , quando naõ ſe eſcrevem com mais do que huma letra , naõ ha neceſſidade de regra alguma para achar a ſua ſoma. Quando porém forem numeros compoſtos , iſto he , quando ſe eſcrevem com muitas letras , uſaremos da regra ſeguinte.

Eſcreveremos as *addições* humas debaixo das outras , de ſorte que fiquem unidades debaixo de unidades , dezenas debaixo de dezenas &c. , e por baixo de todas paſſaremos huma riſca , que as ſepare , e diſtinga da ſoma.

Entaõ ſomaremos primeiramente todos os algariſmos , que eſtaõ na columna das unidades ; ſe a ſoma naõ paſſar de 9 , eſcrevella-hemos por baixo ; ſe paſſar de 9 , como entaõ comprehende dezenas , ſó poremos por baixo o que excede do numero das dezenas , e contaremos eſtas dezenas por outras tantas unidades , e ſomallas-hemos juntamente com os algariſmos da colunna ſeguinte. Nella obſervaremos a meſma regra , como na primeira ; e aſſim por diante de colunna em colunna , até chegar á ultima , debaixo da qual eſcreveremos a ſua ſoma inteira , ou conſte de hum , ou de mais algariſmos. Eſta regra ſe entenderá melhor por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE nos derem para ſomar eſtas duas addições 54925 . . . e 2023 , eſcrevellas-hemos do modo que aqui ſe vê :

54925	
2023	
56948	Soma

E tendo paſſado huma riſca por baixo dellas, começaremos pelas unidades, dizendo: 5 e 3 fazem 8, e eſcreveremos 8 debaixo deſta meſma colunna. Paſſando ás dezenas, diremos: 2 e 2 fazem 4, e eſcreveremos 4 por baixo. Nas centenas diremos, 9 e o fazem 9, e eſcreveremos 9 por baixo. Nos milhares diremos: 4 e 2 ſaõ 6, e eſcreveremos 6 por baixo da riſca. E na colunna ſeguinte diremos finalmente, 5 e o fazem 5, e eſcreveremos 5 na meſma colunna.

He evidente, que o numero achado 56948 he a ſoma dos dous numeros propoſtos, pois que elle contém as unidades, dezenas, centenas, milhares, e dezenas de milhares de ambos elles, as quais ajuntámos por partes na meſma operaçaõ.

Exem-

Exemplo II.

SE nos perguntarem a ſoma dos quatro numeros ſeguintes 6903 . . . 7854 . . . 953 . . . 7327, aſſentallos-hemos do modo que aqui ſe moſtra:

$$
\begin{array}{rl}
6903 & \\
7854 & \\
953 & \\
\underline{7327} & \\
23037 & \text{Soma}
\end{array}
$$

E começando, como no exemplo precedente, pela colunna das unidades, diremos: 3 e 4 ſaõ 7, e 3 ſaõ 10, e 7 ſaõ 17; e como neſta ſoma parcial a letra 7 pertence á caſa das unidades onde eſtamos, e a letra 1 á caſa das dezenas, eſcreveremos 7 debaixo da riſca na colunna das unidades, e guardaremos 1 para o ſomar com os algariſmos da colunna ſeguinte, que he das dezenas.

Paſſando a ella, diremos: 1, que vem da colunna precedente, e 5 (porque naõ he neceſſario ter conta da cifra) fazem 6, e 5 fazem 11, e 2 fazem 13. Pela meſma razaõ eſcreveremos 3 debaixo deſta colunna, e levaremos 1 para a ſeguinte, dizendo: 1 e 9 ſaõ 10, e 8, ſaõ 18, e 9 ſaõ 27, e 3 ſaõ 30. Aſſim poremos o em direito deſta colunna, e levaremos 3 para diante, dizendo do meſmo modo: 3 e 6 ſaõ 9, e 7 ſaõ 16, e 7 ſaõ 23. Deſte numero 23 aſſentaremos a letra 3 debaixo da colunna que temos ſomado; e porque naõ ha mais colunna para onde levemos a letra 2, a eſcreveremos no lugar ſeguinte para a eſquerda;

e

e concluida a operaçaõ, diremos que ſomaõ as addições propoſtas 23037.

34 Se as addições forem acompanhadas de *Dizima*, como neſta ſe procede do meſmo modo que nos numeros ordinarios, contando ſempre por *dezenas* de caſa em caſa da direita para a eſquerda, a regra para as ſomar he abſolutamente a meſma, tendo ſempre a attençaõ de ajuſtar em huma meſma colunna as unidades da meſma ordem, o que ſe conſeguirá, ficando as virgulas em direitura de alto abaixo.

Exemplo III.

SE quizermos ſomar os tres numeros ſeguintes 72,957 . . . 12,8 . . . 124,03, aſſentallos-hemos como aqui ſe moſtra:

72,957	
12,8	
124,03	
209,787	Soma

E praticando a regra, como nos exemplos precedentes, acharemos que ſomaõ 209,787.

Da eſpecie de Diminuir, tanto em numeros inteiros, como em decimais.

35 D*Iminuir* he huma operaçaõ, pela qual ſe tira hum numero de outro numero. O que della reſulta chama-ſe *reſto*, *exceſſo*, ou *differença*.

Para fazer eſta operaçaõ, aſſentaremos o numero, que queremos tirar, por baixo do outro (que

 ſem-

ſempre deve ſer o maior) do meſmo modo que aſſentamos as addições na regra de ſomar. E paſſando huma riſca por baixo delles , iremos tirando da direita para a eſquerda cada numero inferior do ſuperior , que lhe ficar correſpondente , a ſaber , as unidades das unidades , as dezenas das dezenas &c. , e eſcreveremos cada reſto debaixo da riſca pela meſma ordem , pondo cifra todas as vezes que naõ reſtar nada.

Quando o algariſmo debaixo ſe achar maior que o de ſima , eſte ſe augmentará com dez unidades , tomando para iſſo mentalmente empreſtada huma das unidades do algariſmo vizinho da parte eſquerda , o qual por eſta razaõ ſe deve tratar como diminuido de huma unidade na operaçaõ ſeguinte.

Exemplo I.

QUerendo diminuir 5432 de 8954 , aſſentaremos ambos os numeros deſta maneira :

$$\begin{array}{r l} 8954 & \\ 5432 & \\ \hline 3522 & \text{Reſto.} \end{array}$$

E principiando pela caſa das unidades , diremos : quem de 4 tira 2 , ficaõ 2 , que aſſentaremos debaixo da riſca na meſma caſa das unidades. Depois paſſando ás dezenas , diremos : quem de 5 tira 3 , ficaõ 2 , que aſſentaremos debaixo dellas. Na terceira colunna : quem de 9 tira 4 , ficaõ 5 , que poremos em direitura della. E na quarta finalmente : quem de 8 tira 5 , ficaõ 3 , que eſcre-

escreveremos debaixo do 5 ; e feita a conta , achámos que tirando 5432 de 8954 fica o resto 3522.

Exemplo II.

QUerendo tirar 7987 de 27646 , assentaremos os numeros desta maneira :

27646	
7987	
19659	Resto.

E como de 6 naõ se podem tirar 7 , ajuntaremos a 6 dez unidades , que se formaráõ de huma unidade tirada na casa seguinte ao algarismo 4 , e diremos : tirando 7 de 16 , ficaõ 9 , que escreveremos debaixo do 7. Passando ás dezenas , naõ diremos tirando 8 de 4 ; mas tirando 8 de 3 sómente , porque do 4 já tiramos 1 na operaçaõ precedente ; e porque tambem de 3 naõ se podem tirar 8 , ajuntaremos da mesma sorte a 3 dez unidades , tomando para isso 1 á letra 6 da esquerda , e diremos : tirando 8 de 13 , ficaõ 5 , que assentaremos debaixo do 8. Passando á terceira colunna , diremos do mesmo modo : tirando 9 de 5 naõ póde ser ; mas tirando 9 de 15 (tomada huma unidade do algarismo 7 , como nas operações precedentes) ficaõ 6 , que escreveremos debaixo do 9. Na quarta colunna : tirando 7 de 6 , naõ póde ser , mas tirando 7 de 16 , ficaõ 9 , que poremos debaixo do 7. E como naõ ha nada , que tirar na quinta colunna , escreveremos debaixo della , naõ 2 , porque delle já tirámos 1 para a operaçaõ precedente , mas sómente 1 , que lhe ficou ; e assim o resto total será 19659.

36 Estando cifra na casa, donde havemos de tomar a unidade de emprestimo, naõ a tomaremos della, mas do primeiro algarismo significativo, que depois della se seguir. Neste caso, aindaque realmente se pedem 100, ou 1000, ou 10000 &c., conforme houver huma, duas, ou tres cifras consecutivas &c.: comtudo obraremos sempre, como no exemplo precedente, ajuntando sómente 10, ou 1 da casa vizinha, ao algarismo necessitado. E porque estes 10 saõ huma parte dos 100, ou 1000 &c., tomados do primeiro algarismo significativo, para empregarmos os 90, ou 990 &c., que restaõ, tomaremos as cifras seguintes, como se cada huma fosse hum nove. Isto se entenderá melhor por meio do exemplo seguinte:

Exemplo III.

	99
SE de - - - - -	20064
quizermos tirar - -	17489
	2575 Resto.

Primeiramente, tirando 9 de 14, ficaõ 5. Depois, como de 5 (porque do 6 já tomámos 1) naõ se podem tirar 8, e como naõ podemos tomar 1 da letra seguinte que he 0, tomallo-hemos do 2, e valerá 1000 a respeito da casa, onde fazemos a operaçaõ. Destes 1000 naõ tomaremos senaõ 10 para ajuntarmos a 5, e diremos, de 15 tirando 8, ficaõ 7.

E porque dos 1000 que pedimos só temos usado do de 10, ou de 100 ſó temos uſado de 1, uſaremos do reſto 99, para delle tirarmos os dous algariſmos ſeguintes, que vem a ſer o meſmo que tomar cada huma das cifras, como ſe foſſe hum 9. Aſſim diremos: quem de 9 tira 4, ficaõ 5; quem de 9 tira 7, ficaõ 2; e finalmente, quem de 1 tira 1, fica 0, que naõ he neceſſario aſſentar-ſe, por ſer no ultimo lugar.

37 Se houver *Dizima* nos numeros, ſeguiremos abſolutamente a meſma regra. Porém, para evitar todo o embaraço na applicaçaõ della, faremos com que ambos tenhaõ igual numero de letras decimais, ajuntando as cifras, que forem neceſſarias, ao que menos tiver; preparaçaõ, que lhe naõ altera o valor (n. 30.)

Exemplo IV.

De - - - - - - 5403, 25
Querendo tirar - - - - 385, 6532

Primeiramente ajuntaremos duas cifras á *Dizima* do numero ſuperior. Depois obraremos ſobre os numeros aſſim preparados conforme a regra dos numeros inteiros.

5403, 2500	
385, 6532	
5017, 5968	Reſto.

E feita a operaçaõ, acharemos o reſto 5017, 5968.

Pró-

Próva do Somar, e Diminuir.

38 A *Próva* de huma operaçaõ arithmetica he huma nova operaçaõ, pela qual nos certificamos do reſultado da primeira.

Para provar a conta de *Somar*, ſomar-ſe-haõ de novo todas as colunnas, mudada porém a ordem, iſto he, começando da eſquerda para a direita. O que ſomar a primeira colunna diminuir-ſe-ha do membro que lhe correſponde na Soma total, e ſe aſſentará o reſto por baixo, ſe o houver: eſte como em lugar de dezena ſe tomará com a letra ſeguinte da meſma ſoma para fazer hum novo membro, do qual ſe ha-de diminuir o que ſomar a ſegunda colunna; e aſſim por diante até a ultima, onde feita a diminuiçaõ, naõ deve ficar reſto algum.

Aſſim, tendo achado aſſima que eſtes quatro

numeros - - - - - -	6903
	7854
	953
	7327
Somaõ - - -	23037
	03110
	000

Para verificar eſte reſultado, ſomaremos os meſmos numeros, principiando pela eſquerda, deſte modo: 6 e 7 ſaõ 13, e 7 ſaõ 20, os quaes tirados de 23, ficaõ 3, que com a cifra, que na ſoma ſe ſegue, fazem 30. Na ſegunda colunna:

9

9 e 8 ſaõ 17, e 9 ſaõ 26, e 3 ſaõ 29, e tirados de 30, fica 1, que com a letra ſeguinte 3 fazem 13. Na terceira colunna: 5 e 5 ſaõ 10, e 2 ſaõ 12, e tirados de 13, fica 1, que com a letra ſeguinte 7 faz 17. E na ultima colunna: 3 e 4 ſaõ 7, e 3 ſaõ 10, e 7 ſaõ 17, e tirados de 17, naõ fica nada: donde entenderemos, que a primeira operaçaõ he exacta.

A razaõ que temos para concluir que a primeira operaçaõ tem ſido bem feita todas as vezes que depois deſta próva naõ reſta nada, he porque tendo tirado ſucceſſivamente todos os milhares, centenas, dezenas, e unidades, de que ella deve conſtar, he neceſſario, que naõ reſte couſa alguma.

39 Para provar a conta de Diminuir, ſoma-ſe o reſto achado por meio da operaçaõ com o numero que ſe diminuio; e ſe a operaçaõ foi bem feita, ha-de vir na ſoma o meſmo numero, do qual ſe fez a diminuiçaõ. Aſſim vemos, que no terceiro exemplo aſſima poſto a operaçaõ foi exacta; porque ſomando 17489 (que he o numero que ſe diminuio) com o reſto 2565, ſe acha reproduzido na ſoma o numero 20054, do qual aquelle ſe diminuio.

$$\begin{array}{r} 20054 \\ 17489 \\ \hline 2565 \\ \hline 20054 \end{array}$$

¶ A próva vulgar de ambas as operações precedentes coſtuma fazer-ſe pela regra dos *no-*

ves

ves fóra, a qual tem o partido de ser muito expedita na practica.

Tiraõ-se os *noves* de qualquer numero com summa facilidade, somando os seus algarismos successivamente; e chegando a soma a 9, lança-se fóra, passando de nove, somaõ-se tambem mentalmente as suas letras, e com o que fica se continûa por diante. Deste modo, para tirar os *noves* do numero 86097546 diremos, 8 e 6, 14, nove fóra, 5, e 7 (porque naõ he necessario fallar com a o, nem com o 9) saõ 12, nove fóra, 3; e 5 saõ 8, e 4 saõ 12, nove fóra, 3; e 6 saõ 9, nove fóra, o.

A razaõ disto será facil de entender a quem reflectir sobre os principios da *Numeraçaõ*. Porque v. gr. no numero 6745, a letra 6 vale *mil vezes* 6, isto he, *novecentas e noventa e nove vezes*, e mais *huma vez* 6; porém novecentas e noventa e nove vezes 6 saõ *noves* justos; logo sendo lançados fóra, fica *huma vez* 6. Do mesmo modo a letra 7 mostra *cem vezes* 7, isto he, *noventa e nove vezes*, e mais *huma vez* 7; e por conseguinte, lançando fóra *noventa e nove vezes* 7, fica *huma vez* 7. E como tambem a letra 4 vale *nove vezes* e mais *huma vez* 4, lançando fóra *nove vezes* 4, fica *huma vez* 4. Logo somando-se todas as letras, como se todas estivessem na casa das unidades, a soma 22 será o resto que fica depois de lançados fóra os *noves*, que se contém nas dezenas, centenas, e milhares do numero proposto. E porque este resto ainda comprehende *noves*, pela mesma razaõ se somaráõ as suas letras, e será 4 o resto final, que ficará tirados todos os *noves* do numero 6745.

Isto supposto: para próva da conta de *Somar*, ti-

tiraõ-ſe os *noves* a todas as addições conſecutivamente, como ſe ellas formaſſem hum ſó numero, e aſſenta-ſe o reſto á margem dellas; e o meſmo ſe faz na ſoma. Se o reſto naõ for o meſmo de ambas as partes, he prova infallivel, que a conta eſtá errada (ſuppondo ſempre que o erro naõ eſteja na operaçaõ da meſma próva); pois naõ he poſſivel, que a ſoma ſeja igual ás addições, quando tirando de ambas as partes os *noves* ficaõ reſtos deſiguais. Porém ſe ficarem de ambas as partes reſtos iguais, naõ he próva infallivel de que a conta eſtá certa, mas muito provavel: convém a ſaber, eſtará certa a conta, ſalvo ſe a ſoma tiver de erro *nove*, ou algum dos multiplos de *nove*; e a razaõ he, porque na operaçaõ lançamos fóra os *noves*, ſem haver reſpeito ſe lançamos igual numero delles de ambas as partes; e por iſſo naõ he inteiramente ſegura eſta próva. Como porém o erro dos multiplos de *nove* naõ ſuccede quaſi nunca na practica, ſenaõ ſe errar de propoſito deſſa maneira, por eſſa razaõ ſe dá a conta por certa, quando na próva ſe achaõ reſtos iguais. Aſſim no exemplo aſſima, tirando os *noves* das addições 6903 - - 7854 - - 953 - - 7327, fica de reſto 6; e como ſe acha o meſmo na ſoma 23037, julga-ſe com muita probabilidade, mas naõ com certeza, que a conta eſtá bem feita. E he de advertir, que nem o primeiro methodo aſſim dado, o qual ſe chama *próva real*, tem certeza abſoluta, e infallivel; pois he poſſivel, e ainda factivel, que ao tirar da próva ſe commetta na ſoma de huma colunna hum erro igual e ſemelhante ao que ſe commetteo na primeira operaçaõ; e neſſe caſo ſahirá na próva a conta certa, eſtando errada.

Na

Na conta de *Diminuir* tiraõ-ſe os *noves* ao numero de quem ſe diminuio, e depois aos outros dous numeros juntos. E conforme ficarem de ambas as partes reſtos iguaes, ou deſiguaes, faz-ſe o meſmo juizo, que indicamos a reſpeito do *Somar*. Deſte modo no exemplo aſſima poſto, tirando os *noves* ao numero 20054, fica o reſto 2: e como ſe acha o meſmo nos outros dous numeros 17489 e 2565 tomados juntamente, tem-ſe a conta por certa.

Da eſpecie de Multiplicar, tanto em numeros inteiros, como em decimais.

40 MUltiplicar hum numero por outro he tomar o primeiro tantas vezes, quantas ſaõ as unidades do ſegundo. Aſſim, por exemplo, multiplicar 4 por 3 naõ he outra couſa, ſenaõ tomar *tres* vezes o numero 4.

41 O numero, que ſe ha-de multiplicar, chama-ſe *multiplicando*; o numero, pelo qual ſe ha-de multiplicar, chama-ſe *multiplicador*; e o numero, que reſulta da operaçaõ, chama-ſe *producto*. Os noſſos Arithmeticos antigos daõ ao multiplicando o nome de *multiplicaçaõ*. Mas hoje uſamos deſte termo para ſignificar a meſma operaçaõ do multiplicar.

42 O termo *producto* tem commumente hum ſentido muito mais amplo, e geral. Porém neſte tratado ſómente uſaremos delle para ſignificar o reſultado da multiplicaçaõ.

43 O multiplicador, e o multiplicando chamaõ-ſe tambem *factores* do producto. Aſſim 3

e 4 saõ factores de 12, porque 3 vezes 4 saõ 12.

43 Pela idêa que temos dado da multiplicaçaõ se vê, que ella se póde absolutamente fazer escrevendo o multiplicando tantas vezes, quantas saõ as unidades do multiplicador, e somando ao depois. Assim, por exemplo, para multiplicar 7 por 3 podiamos escrever deste modo:

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

E a soma 21, que resulta das tres addições, seria o producto.

Como porém este modo de multiplicar seria tanto mais longo e trabalhoso, quanto maior fosse o multiplicador, a regra particular da multiplicaçaõ ensina o methodo de chegar ao mesmo resultado por hum caminho mais breve.

44 Em quanto os numeros se consideraõ *abstractamente*, sem attender ás unidades que elles representaõ, he indifferente o tomar qualquer delles para multiplicando, ou para multiplicador. Por exemplo, querendo multiplicar 4 por 3, tanto faz multiplicar 4 por 3, como 3 por 4; porque o producto sempre será 12. E com effeito 3 vezes 4 mostra o triplo de 1 vez 4; e 4 vezes 3, o triplo de 4 vezes 1: e he evidente, que tanto faz 1 vez 4, como 4 vezes 1. O mesmo raciocinio se póde applicar a quaesquer outros numeros.

45 Sendo porém os numeros *concretos*, he preciso

ciſo diſtinguir o multiplicando do multiplicador; principalmente na multiplicaçaõ dos numeros *complexos*, dos quais adiante trataremos.

Eſta diſtinçaõ naõ tem difficuldade. Porque a meſma queſtaõ moſtra ſempre, qual he a quantidade que temos intento de repetir, e qual he a que declara as vezes que queremos fazer a repetiçaõ; e a primeira ſerá o *multiplicando*, a ſegunda o *multiplicador*.

46 Como o multiplicador ſerve de marcar as vezes que ſe ha de repetir o multiplicando, ſerá ſempre hum numero *abſtracto*. Perguntando-ſe v. gr. quanto haõ de cuſtar 52 *toeſas* de obra de carpinteiro, a razaõ de 36 *libras* a *toeſa*: facilmente ſe vê, que o *multiplicando* he 36 *libras*, que ſe haõ de tomar 52 *vezes*; preſcindindo de que o numero 52 ſignifique *toeſas* na queſtaõ, ou qualquer outra couſa.

47 Donde ſe ſegue, que ſendo o *producto* formado da addiçaõ repetida do *multiplicando*, deve moſtrar ſempre unidades da meſma natureza que elle. (*)

Tendo feito eſta reflexaõ ſobre as unidades do *producto* e ſeus *factores*, paſſemos ao methodo de o achar.

48 As regras da multiplicaçaõ dos numeros compoſtos reduzem-ſe á multiplicaçaõ dos numeros ſimples, que conſtaõ de hum ſó algariſmo. Por iſſo he neceſſario ſaber primeiro o producto del-

(*) Deſta regra naõ exceptuamos a multiplicaçaõ geometrica, na qual tambem as unidades do *multiplicador* ſe devem tomar como *abſtractas*; e o *multiplicando* e *producto* devem moſtrar unidades da meſma eſpecie, como havemos de declarar na Geometria.

delles, o qual ſe acha facilmente ajuntando cada numero de 1 até 9 nove vezes conſecutivas a ſi meſmo. Tambem ſe póde uſar da *Taboada* ſeguinte, cuja invençaõ ſe attribue a *Pythagoras*.

Taboada de Pythagoras.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

A primeira colunna deſta *Taboada*, tanto vertical, como tranſverſal, fórma-ſe da addiçaõ ſucceſſiva da unidade 1; a ſegunda do numero 2; a terceira do numero 3; e aſſim por diante.

49 Para achar nella o *producto* de dous numeros ſimples, buſca-ſe hum delles, v. gr. o *multiplican-*

cando, no alto da *Taboada*, e delle ſe deſce pela columna vertical até chegar á caſa fronteira ao multiplicador, que ſe buſca na primeira colunna vertical da parte eſquerda; e o numero que na dita caſa ſe achar será o *producto*. Querendo v. gr. ſaber o producto de 9 por 6, ou quanto he 6 vezes 9, buſcaremos o 9 no alto da *Taboada*, e deſcendo até á caſa fronteira ao 6, nelle acharemos 54, que he o producto delles.

Eis-aqui quanto ſe requer para entrar na multiplicaçaõ dos numeros compoſtos.

Multiplicaçaõ de hum numero compoſto por hum numero ſimples.

50 ESCreva-ſe o *multiplicador*, que aqui ſuppomos ſer de hum ſó algariſmo, debaixo do *multiplicando*. O lugar delle he arbitrario; mas para fixar as idéas coſtuma aſſentar-ſe na caſa das unidades.

E paſſando por baixo delles huma riſca, que diſtingua os *factores* do *producto*, multipliquem-ſe as unidades do multiplicando pelo multiplicador; e ſe o producto conſtar ſómente de unidades, eſcreva-ſe na caſa das unidades, debaixo da riſca; ſe conſtar porém de unidades e dezenas, eſcrevaõ-ſe ſómente as unidades, e guardem-ſe mentalmente as dezenas para ſe ajuntarem ao producto da operaçaõ ſeguinte.

Depois multipliquem-ſe as dezenas do multiplicando pelo meſmo multiplicador; ajuntem-ſe ao producto as dezenas que ficáraõ da operaçaõ precedente, ſe as houver; e eſcreva-ſe a ſoma na caſa

caſa das dezenas, podendo ſer com huma ſó letra; quando naõ, eſcrevaõ-ſe ſómente as unidades, e guardem-ſe as dezenas (que ſaõ realmente centenas) para ſe ajuntarem ao producto ſeguinte, o qual tambem ha de conſtar de centenas.

Continuando deſte modo a operaçaõ, até fallar o multiplicador com todos os algariſmos do multiplicando, o numero que tivermos eſcrito ſerá o producto total.

Exemplo.

PErgunta-ſe quantos *pés* fazem 2864 *toeſas*. (Cada *toeſa* tem 6 *pés*). A queſtaõ ſe reduz a tomar 6 *pés* 2864 vezes, ou (que vem a ſer o meſmo) a tomar 6 vezes 2864 *pés* (n. 44.)

Eſcreveremos pois -	2864	Multiplicando.
	6	Multiplicador.
	17184	- - Producto.

E principiando pelas unidades, diremos: 6 vezes 4, ſaõ 24; e eſcrevendo 4, levaremos 2 para a operaçaõ ſeguinte: 2.° 6 vezes 6 ſaõ 36, e 2 que vem ſaõ 38; aſſentemos 8, e vaõ 3: 3.° 6 vezes 8 ſaõ 48, 3 que vem ſaõ 51; aſſentemos 1, e vaõ 5: 4.° 6 vezes 2 ſaõ 12, e 5 que vem ſaõ 17; que eſcreveremos por inteiro, porque naõ ha mais nada que multiplicar.

O numero 17184 he o producto que ſe pede, ou o numero de *pés*, de que conſtaõ 2864 *toeſas*. Porque nelle ſe contém 6 vezes 4 unidades, 6 vezes 6 dezenas, 6 vezes 8 centenas, e 6 vezes 2 mil;

mil ; e por conſeguinte , 6 vezes todo o numero 2864.

Multiplicaçaõ de hum numero compoſto por outro compoſto.

51 QUando o multiplicador conſtar de muitos algariſmos , por cada hum delles ſe praticará huma operaçaõ , como no primeiro caſo , principiando da direita para a eſquerda.

Primeiramente pois ſe multiplicará todo o multiplicando pelas unidades do multiplicador , e depois pelas dezenas. Eſte producto ſe eſcreverá por baixo do primeiro ; e porque deve moſtrar dezenas , pois por ellas ſe fez a multiplicaçaõ , a ſua primeira letra ſe aſſentará em direitura das dezenas do primeiro , e as outras nas caſas ſeguintes para a eſquerda.

Pela meſma razaõ o terceiro producto , que ſe fizer multiplicando pelas centenas , ſe porá da meſma ſorte debaixo do ſegundo , adiantando-ſe mais huma caſa para a eſquerda ; e o meſmo ſe fará com os outros.

Feitas todas eſtas multiplicações , ſomar-ſe-haõ os productos parciais que ellas deraõ , e a ſoma ſerá o producto total que ſe buſca.

Exem-

Exemplo I.

QUerendo multiplicar - 65487
por - - - - - - 6958

```
    65487
     6958
   ------
   523896
  327435
 589383
392922
---------
455658546 Producto.
```

Primeiramente multiplico 65487 pelo algarismo 8, que está na casa das unidades do multiplicador, e assento o producto 523896 debaixo da risca, procedendo conforme a regra dada para o primeiro caso (n. 50.)

Depois multiplico o mesmo numero 65487 pela segunda letra 5 do multiplicador, e escrevo o producto 327435 debaixo do precedente, porem de sorte que a primeira letra 5 fique correspondente ás dezenas delle.

Do mesmo modo, multiplicando 65487 pela terceira letra 9 do multiplicador, assento o producto 589383 debaixo do precedente, ficando a letra 3 correspondendo á casa das centenas, porque a letra do multiplicador representa centenas.

Multiplicando finalmente o mesmo numero 65487 pela ultima letra 6 do multiplicador, assento o producto 392922 debaixo do precedente, adiantando-o mais huma casa para a esquerda, para que a sua primeira letra 2 fique na casa dos *milhares*, em que está a letra do multiplicador.

Em fim, de todos estes productos faço a soma 455658546, que ferá o producto de 65487 multiplicados por 6958, ou o valor do numero 65487 tomado 6958 vezes; pois que com effeito fe tomou 8 vezes na primeira operaçaõ, 50 vezes na fegunda, 900 vezes na terceira, 6000 na quarta; e por confeguinte 6958 vezes em todas quatro.

52 Se o multiplicando, ou o multiplicador, ou ambos acabarem em cifras, abbrevia-fe a operaçaõ, multiplicando fem fazer cafo dellas, e ajuntando-as depois todas ao producto.

Exemplo II.

Havendo de multiplicar 6500
por - - - - - 350

325
195

2275000 Producto.

Deixando as cifras, multiplico 65 por 35, e ao producto 2275 ajunto as tres cifras, que fe achaõ em ambos os factores.

A razaõ he, porque o multiplicando 6500 reprefenta 65 centenas; e por iffo quando fe multica 65, o producto fe entende fer de centenas. Do mefmo modo o multiplicador 350 moftra 35 dezenas, e por effa razaõ quando fe multiplica por 35, o producto deve fignificar dezenas. Logo multiplicando-fe 65 por 35, o producto moftrará dezenas de centenas, ou milhares; e por confeguinte deve acabar em tres cifras, quantas faõ as dos

fa-

factores; e o mesmo raciocinio se applicará a todos os outros casos.

53 Quando se encontraõ cifras entre os algarismos do multiplicador, como a multiplicaçaõ dellas dá hum producto todo de cifras, he escusado assenta-lo. Immediatamente se passa ao primeiro algarismo significativo, tendo advertencia de assentar sempre a primeira letra do producto na casa correspondente á letra do multiplicador, que falla com o multiplicando nessa mesma operaçaõ.

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar - 42052
por - - - - - 3006

```
      252312
   126156
   ---------
   126408312 Producto.
```

Tendo feito a multiplicaçaõ por 6, e assentado o producto 252312 no seu lugar competente, passaremos logo a multiplicar por 3, mas assentaremos o producto 126156 de sorte que represente milhares, como a letra do multiplicador, o que se consegue ficando a primeira letra 6 na mesma casa della.

Multiplicaçaõ das partes decimais.

54 NA multiplicaçaõ da *Dizima* obſervar-ſe-há a meſma regra dos numeros inteiros, ſem fazer caſo da virgula; e depois de achar o producto, delle ſe cortaráõ por meio da virgula tantas letras de *Dizima* para a direita, quantas ſaõ as que tem os factores ambos juntos.

Exemplo I.

QUerendo multiplicar - - - 54,23
por - - - - - - - - 8,3

16269
43384

450,109

Multiplicaremos 5423 por 83, e acharemos o producto 450109; e porque no multiplicando há duas letras de dizima, e no multiplicador huma, cortaremos tres letras para a direita com a virgula no dito producto, e ficará 450,109, qual deve ſer.

A razaõ deſta regra he facil de entender, obſervando que ſe o multiplicador foſſe 83, o producto ſeria de *centeſimas*, pois ſe teria repetido 83 vezes o numero 54,23, que moſtra *centeſimas*. Como porém o multiplicador he 8,3, iſto he, hum numero dez vezes menor (n. 28) que 83, o producto moſtrará unidades dez vezes menores que as *centeſimas*; logo a ſua ultima letra moſtrará *milleſimas* (n. 23); e por conſeguinte deverá ter tres al-

algarismos de dizima, quantos se achaõ em ambos os factores juntamente.

E o mesmo raciocinio se póde applicar a qualquer outro caso.

Exemplo II.

Se tivessemos de multiplicar - 0,12
por - - - - - - 0,3

0,036

Multiplicar-se-hia, como no exemplo precedente, 12 por 3, e sahirá o producto 36. Como porém a regra neste caso ordena, que se separem com a virgula tres letras para a dizima, ficaria hum principiante embaraçado, vendo que o producto naõ tem mais do que duas. Mas applicando a este caso o raciocinio que fizemos no exemplo precedente, he facil de ver, que se deve meter huma cifra entre a virgula e 36. Com effeito, he evidente que se multiplicassemos 0,12 por 3, o producto devia ser 0,36; logo multiplicando por 0,3, o que he dez vezes menor que 3, o producto será dez vezes menor que 0,36; e por conseguinte (n. 27, 28) será 0,036 supprindo-se o lugar com huma cifra, para haver tantas casas de dizima no producto, como em ambos os factores juntamente.

55 Como na *Dizima* se intenta ordinariamente a facilidade das operações, substituindo em lugar de hum calculo rigoroso huma *approximaçaõ* sufficiente, e de menos trabalho; naõ será fóra de proposito, que expliquemos aqui hum meio de abbre-

breviar a multiplicaçaõ, quando nos baſtar ſaber o producto até hum gráo determinado de exactidaõ.

Supponhamos v. gr. que havemos de multiplicar o numero 45,625957 por 28,635, e que nos baſta hum producto exacto até a caſa das milleſimas. Primeiramente aſſentaremos os numeros, como aqui abaixo ſe moſtra; iſto he, inverteremos a ordem dos algariſmos de hum delles, e o aſſentaremos debaixo do outro, de ſorte que o algariſmo que era das unidades ſique correſpondendo ao algariſmo do numero ſuperior, que eſtiuer duas caſas mais para a direita do que aquella, até onde queremos o producto exacto. Entaõ faremos a multiplicaçaõ, advertindo que cada letra do multiplicador naõ há de fallar com as letras do multiplicando que ficaõ para a direita da colunna em que eſtá, e que os productos, que ſe forem achando, ſe haõ de aſſentar de maneira, que as primeiras letras de todos da parte direita fiquem em huma colunna vertical. Na ſoma deſtes productos riſcaremos as ultimas duas letras á direita, com a advertencia de ajuntar huma unidade á ultima que ficar, ſe as duas, que ſe riſcaõ, paſſarem de 50. E feito iſto, aſſentaremos a virgula no lugar que pedem os algariſmos da dizima, que queremos no producto.

Exem-

Exemplo III.

SE quizermos multiplicar 45,625957
por - - - - 28,635

E ſe for baſtante achar o producto exacto até a caſa das milleſimas ; eſcreveremos os numeros deſta maneira

45,625957
53682
91251914
36500760
2737554
136875
22810
1306499(13

E ſerá o producto - 1306,499

Se fizeſſemos a operaçaõ por extenſo, achariamos o producto 1306,499278695, com o qual ſe ajuſta o precedente até a caſa das milleſimas, como ſe intentava.

Se o multiplicando naõ tiver tantas letras de dizima, quantas ſaõ preciſas para que a letra das unidades do multiplicador correſponda á caſa que deve, conforme a regra, ſupprir-ſe-há ajuntando ao multiplicando as cifras neceſſarias.

Exem-

Exemplo IV.

Havendo de multiplicar 54,236
por - - - - - 532,27

e querendo o producto exacto até a casa das centesimas, assentaremos os numeros deste modo:

54,236000
72235

271180000
16270800
1084720
108472
37961

2886819(53

E o producto será . . . . 28868,20 . . . ajuntando huma unidade á ultima letra 9, porque as duas supprimidas 53 excedem 50.

Exemplo V.

Querendo multiplicar 0,227538917
por - - - - 0,5664178

de sorte, que o producto venha exacto até o setimo algarismo da dizima, assentaremos os numeros do modo seguinte:

0,227538917

```
0,227538917
   87146650
-----------
    . . . .0
  113769455
   13652334
    1365228
      91012
       2275
       1589
        176
-----------
 1288820(69
```

E o producto ferá - - 0,1288821

55 Para qũem naõ eftá exercitado na *Taboada* há hum methodo de *multiplicar* por meio unicamente do *fomar*, o qual ajuntaremos aqui, e he da maneira feguinte.

Forme-fe á parte huma colunna, na qual primeiramente fe affentará o *multiplicando* defronte da unidade; depois fomar-fe-há comfigo mefmo, tomando cada algarifmo duas vezes, e a foma fe efcreverá por baixo defronte do numero 2; efta foma fe ajuntará outra vez com o mefmo multiplicando, e a nova foma fe affentará por baixo da precedente defronte do numero 3, e affim por diante até 10: e fe defronte de 10 vier huma foma, que feja o mefmo multiplicando augmentado de huma cifra, fervirá de prova que todas as fomas da colunna eftaõ certas. Pela conftrucçaõ defta colunna fe ve, que nella fe tem formado os productos do multiplicando por todos os numeros fimples de 1 até 9.

Pre-

Preparada deste modo a columna, passar-se-há á multiplicaçaõ, e por cada huma das letras do *multiplicador* se tomará o producto que na dita columna lhe corresponde, o qual se assentará de fórma que a primeira letra á direita fique na casa que compete á letra do mesmo multiplicador; e a soma de todos estes productos dará o producto total que se busca. O exemplo seguinte mostrará claramente a fórma da operaçaõ.

Se quizermos multiplicar o numero 79856345 pelo numero 9605843, assenta-los-hemos ao modo ordinario, como aqui se mostra.

Pode ser.

79856345	1	79856345
9605843	2	159712690
	3	239569035
239569035	4	319425380
319425380	5	399281725
638850760	6	479138070
399281725	7	558994415
479138070	8	638850760
718707105	9	718707105
767087512623835	10	798563450

N

Depois, transferindo o multiplicando para o lado direito defronte de 1, o somaremos comsigo mesmo, e assentaremos a soma por baixo defronte do 2; do mesmo modo ajuntaremos esta soma com o multiplicando, e escreveremos a nova soma por baixo defronte do 3; e assim por diante.

Fei-

Feita a colunna como ſe vê no exemplo, paſſaremos á multiplicaçaõ. E porque a primeira letra do multiplicador he 3, tomaremos da colunna o numero que lhe correſponde, e o aſſentaremos no ſeu lugar. O meſmo faremos a reſpeito das letras ſeguintes 4, 8, 5, 6, e 9; e fazendo a ſoma acharemos o producto 767087512623835.

Eſte methodo he indirecto, e mais longo que o ordinario; mas na multiplicaçaõ dos numeros grandes tem a vantagem de que naõ requer taõ grande attençaõ, nem he taõ ſujeito ao erro. Quando porem tivermos, como ſuccede muitas vezes, de multiplicar ſucceſſivamente hum meſmo numero por muitos outros, como entaõ feita huma vez a colunna ſerve para todas as operações, he eſte methodo naõ ſomente o mais expedito, e ſeguro, mas tambem o mais abbreviado de todos. ʃʃ

Uſo da Multiplicaçaõ.

56 NAõ he noſſa tençaõ moſtrar aqui todos os uſos que ſe pódem fazer da multiplicaçaõ. Sómente indicaremos alguns, que ſerviráõ de encaminhar para todos os mais.

Serve a Multiplicaçaõ, em geral, para achar o valor total de muitas unidades, quando ſe conhece o valor de cada huma. Se v. gr. nos perguntarem 1.º *Quanto devem cuſtar* 5842 *toeſas de obra, a razaõ de* 54^{lb} *a toeſa*? Multiplicaremos 54^{lb} por 5842, ou (n. 44.) 5842^{lb} por 54; e teremos 315468^{lb} pelo preço total que ſe pede. 2.º *Quan-*

to

to pezaõ 5954 *pês cubicos* (*) *de agua* ; *ſuppondo que cada pé tem* 72 *libras ?* Multiplicaremos 72^{lb} por 5954, ou 5954^{lb} por 72 ; e teremos 428688 libr. pelo peſo total que ſe pergunta.

57 Serve tambem a multiplicaçaõ para converter as unidades de qualquer eſpecie em unidades de outra eſpecie menor ; como, por exemplo, para reduzir as *libras* em *ſoldos*, e éſtes em *dinheiros* ; as *toeſas em pés*, eſtes em *pollegadas*, e eſtas em *linhas* ; os *dias* em *horas*, eſtas em *minutos*, e eſtes em *ſegundos* &c. Muitas vezes há neceſſidade deſta ſorte de reducções ; e por iſſo as moſtraremos praticadas em alguns exemplos.

Se quizermos converter em *dinheiros* a quantia de 8^{lb} $17^{ſ}$ 7^{d} ; como a *libra* vale $20^{ſ}$, multiplicaremos as 8^{lb} por 20 (n. 52) e teremos $160^{ſ}$, aos quais ajuntando os $17^{ſ}$ teremos $177^{ſ}$; depois multiplicaremos eſtes por 12 (porque cada *ſoldo* vale 12 *dinheiros*), e teremos 2124^{d}, aos quais ajuntando os 7^{d}, teremos 2131^{d} pelo valor total da quantia 8^{lb} $17^{ſ}$ 7^{d} reduzida a *dinheiros*.

Se nos perguntarem quantos minutos tem o anno commum, a ſaber 365^{d} 5^{h} 48^{m}, ou 365 dias, 5 horas, e 48 minutos ; como o dia he de 24 horas, multiplicaremos 24^{h} por 365, e ao producto 8760^{h} ajuntaremos 5^{h} ; depois multiplicaremos (n. 52) o total 8765 por 60 (porque a hora tem 60 minutos), ao producto 525900^{m} ajuntaremos os 48^{m}, e o total 525948^{m} ſerá o numero-

(*) O *pé cubico* he huma medida que tem hum *pé* de comprido, de largo, e de fundo, pela qual ſe avalia a capacidade dos corpos, como ſe verá na Geometria.

ro de minutos, que no annno commum ſe contém.

58 O multiplicar abbreviado, que aſſima explicámos (n. 52), póde ſervir para reduzir prontamente em *libras* qualquer numero de *tonnelladas*. Como a *tonnellada* peza 2000 *libras*, ſe tivermos v. gr. 854 *tonnelladas* para reduzir, naõ he neceſſario mais do que duplicar 854, e pôr tres cifras adiante do producto; e teremos 1708000 pelo numero de *libras* que pezaõ 854 *tonnelladas*. Obſervem os principiantes que *duplicar*, *triplicar*, *quadruplicar* &c. he o meſmo que multiplicar por por 2, 3, 4, &c.

Da eſpecie de Repartir, tanto em numeros inteiros, como em decimais.

59. REpartir ou *Dividir* hum numero por outro, naõ he outra couſa mais do que buſcar *quantas vezes* o primeiro delles contêm o ſegundo; e a operaçaõ, com que ſe buſca chama-ſe *Repartiçaõ*, ou *Diviſaõ*. Aſſim, repartir 12 por 4 he o meſmo que buſcar em 12 quantas vezes ha 4; que ſaõ 3 vezes.

O numero, que ſe toma para ſe dividir, chama-ſe *Dividendo*, e vulgarmente *Partiçaõ*; o numero, pelo qual ſe divide, chama-ſe *Diviſor*, ou *Partidor*; e o numero, que moſtra as vezes que o dividendo contém o diviſor, chama-ſe *Quociente*.

A Diviſaõ naõ ſe faz ſempre com a tençaõ de ſaber quantas vezes hum numero contém outro, mas

mas a operaçaõ procede em todos os casos, como se unicamente se dirigisse a esse fim; e por esta razaõ he, que ella se póde considerar em geral, como huma operaçaõ pela qual se acha quantas vezes o dividendo contém o divisor (*).

§§ Pela noçaõ precedente da *Divisaõ* se entenderá facilmente, que ella se póde fazer por meio da *Subtracçaõ*, tirando successivamente o divisor do dividendo; pois he evidente, que quantas vezes delle se poder tirar, tantas nelle se contem. Assim para dividir 21 por 7 podemos obrar deste modo:

$$\begin{array}{rl} 21 & \\ \underline{7} & \\ 14 & \text{- - 1.º resto.} \\ \underline{7} & \\ 7 & \text{- - 2.º resto.} \\ \underline{7} & \\ 0 & \text{- - 3.º resto.} \end{array}$$

E tendo achado, que tirando-se 3 vezes consecutivas o divisor 7 do dividendo 21, naõ sobrou nada, conheceremos que 7 se contem *tres vezes* exactamente em 21, e por conseguinte, que o quociente he 3.

Po-

(*) Na prática vulgar considera-se o dividendo como huma quantia, que se ha-de repartir em partes iguais por tantos *companheiros*, quantas saõ as unidades do partidor, ás quais se costuma dar o mesmo nome de *companheiros*; e no quociente se procura saber quanto cabe a cada hum delles.

Porém como este methodo seria tanto mais longo e trabalhoso, quanto maior fosse o quociente, pela regra particular da *Divisaõ*, como por hum *Diminuir abbreviado*, chegamos com maior prontidaõ, e facilidade a alcançar o mesmo resultado. ſſ

Da mesma noçaõ se segue evidentemente; *Que multiplicando-se o divisor pelo quociente deve vir no producto o dividendo*; porque nisso se naõ faz outra cousa mais do que tomar o divisor tantas vezes, quantas elle se contém no mesmo dividendo; e isto he geral, quer seja o quociente numero inteiro, quer fraccionario.

Quanto á especie das unidades que o *quociente* deve mostrar, he de advertir que naõ póde determinar-se nem pela especie das unidades do dividendo, nem do divisor, nem de ambos juntos. Porque ficando o dividendo, e o divisor sempre os mesmos, o quociente, que será tambem sempre o mesmo numericamente, póde ser muito differente em quanto á especie das suas unidades, conforme a nutureza da questaõ o determinar.

Por exemplo: Se procurarmos saber quantas vezes 8^{lb} contém a 4^{lb}, o quociente será hum numero *abstracto*, que mostrará 2 *vezes*. Porém se quizermos saber quanta obra se ha de fazer por 8^{lb}, a razaõ de 4^{lb} a *toesa*, o quociente será hum numero *concreto*, que mostrará 2 *toesas*, cuja especie naõ diz respeito algum ás unidades do dividendo, nem do divisor. Por onde se vê, que sómente a questaõ, que conduz á divisaõ actual de que se trata, he a que decide a natureza das unidades, que deve mostrar o quociente.

Di-

Divisaõ de hum numero composto por hum numero simples.

60 A Operaçaõ, que agora entramos a mostrar, suppõe que cada hum sabe achar por si mesmo quantas vezes se contém hum numero simples em outro simples, ou composto taõ somente de dois algarismos. Este conhecimento se adquire ao mesmo tempo que se apprendem os productos dos numeros simples; faltando o qual, póde fazer-se uso da *Taboada*, que assima temos proposto (n. 48.) Se v. gr. quizermos saber em 74 quantas vezes há 9, buscaremos o divisor 9 no alto da *Taboada*, e pela sua colunna vertical desceremos até encontrar ou o numero dado 74, ou o que for proximamente menor, como neste caso he o numero 72; e á casa delle corresponderá na primeira colunna vertical á esquerda o quociente, que he neste exemplo o numero 8.

Isto supposto, eis-aqui o methodo de executar a *Divisaõ* de hum numero composto por hum numero simples, á qual se dá vulgarmente o nome de *meiò partir*.

Assenta-se o divisor ao lado direito do dividendo, separando-os por meio de huma risca perpendicular. Por baixo do divisor se passe tambem huma risca, debaixo da qual se escreveráõ os algarismos do quociente á medida que se forem achando.

Entaõ tomar-se-há o primeiro algarismo á esquerda do dividendo, ou os primeiros dous, quando o primeiro só for menor que o divisor; e fazendo delles hum dividendo parcial, buscar-se-ha

quan-

quantas vezes o diviſor nelle ſe contém, e o numero das vezes ſe aſſentará no lugar do quociente. O quociente achado ſe multiplicará pelo diviſor, e o producto ſe aſſentatá debaixo do reſpectivo dividendo, do qual ſe diminuirá; e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará outro dividendo parcial.

Neſte ſe praticará a meſma operaçaõ. A letra, que ſe achar para o quociente, ſe aſſentará á direita da primeira; depois ſe multiplicará pelo diviſor, e o producto ſe eſcreverá debaixo do reſpectivo dividendo parcial, do qual ſe diminuirá; e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará de novo outro dividendo parcial, com o qual ſe praticará a meſma operaçaõ; e aſſim por diante, até ſe acabarem as letras do dividendo.

Eſta Regra ſe entenderá mais claramente por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

SE quizermos repartir 8769 por 7, assentaremos estes dous numeros como aqui se mostra:

Dividendo	Divisor
8769	7
7	
17	1252 $\frac{5}{7}$ Quociente.
14	
36	
35	
19	
14	
5	

E começando pela esquerda do dividendo, deveriamos dizer em 8 *mil* quantas vezes ha 7; mas basta que digamos em 8 quantas vezes ha 7? ha 1; e assentaremos 1 no quociente. Este 1 he realmente *mil*; mas naõ he necessario attender ao seu valor local, pois que elle será determinado pelas letras seguintes do quociente, que havemos de achar. Agora multiplicaremos o quociente 1 pelo divisor 7, e assentaremos o producto 7 debaixo do dividendo parcial 8; e feita a diminuiçaõ, fica 1. Este resto 1 he a parte de 8 que naõ foi dividida, e vale por huma *dezena* a respeito da letra 7 que se segue no dividendo, a qual abaixaremos para junto do dito resto, e teremos outro dividendo parcial 17.

En-

Entaõ diremos do mesmo modo ; em 17 que vezes ha 7 ? ha 2 ; e escreveremos 2 no quociente á direita da outra letra 1 , que achámos pela primeira operaçaõ. Depois multiplicaremos o novo quociente 2 pelo divisor 7 , e escreveremos o producto 14 debaixo do membro dividendo 17 ; e feita a diminuiçaõ , teremos o resto 3 , que he a parte do dividendo que naõ foi repartida : pelo que lhe ajuntaremos a letra seguinte 6 , e teremos o novo dividendo parcial 36.

Continuando a mesma operaçaõ , diremos : em 36 que vezes ha 7 ? ha 5 ; e assentaremos 5 no quociente. Depois multiplicando 5 pelo divisor 7 tiraremos o producto 35 do dividendo 36 , e ficará o resto 1 , ao qual ajuntaremos a letra seguinte do dividendo , que he a ultima 9 , e teremos ainda para partir 19. Pelo que diremos : em 19 que vezes ha 7 ? ha 2 ; e escreveremos 2 no quociente.

Depois multiplicaremos o mesmo 2 pelo divisor 7 , e diminuindo o producto 14 do dividendo 19 , ficará por ultimo o resto 5.

Assim achamos pois , que 8769 contém a 7 tantas vezes , quantas mostra o quociente , isto he , 1252 vezes , e que além disso ainda restaõ 5.

Pelo que respeita a este resto , bastará por ora dizer , que se assenta á direita do quociente , assim como se vê no exemplo ; isto he , que se escreve em sima de huma risca , ficando-lhe o divisor por baixo ; expressaõ , que quer dizer *sinco setimas* partes da unidade , como adiante mostraremos , quando tratarmos dos *quebrados*.

61 Se no decurso da operaçaõ se achar algum dividendo parcial menor que o divisor , o qual por conseguinte o naõ chegará a conter 1 vez , pôr-se-

ha cifra no quociente, e deixando a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, e ſe formará outro dividendo parcial, com o qual ſe continuará a operaçaõ.

Exemplo III.

SUpponhamos que havemos de repartir 14464 por 8.

14464	8
8	1808
64	
64	
064	
64	
0	

Neſte exemplo faremos o primeiro dividendo parcial das duas letras 14, porque a primeira 1 he menor que o diviſor.

Entaõ partindo 14 por 8, cabe ſómente 1, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, fica o reſto 6, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo 4, e teremos para partir 64.

Partindo pois 64 por 8, cabem 8, que aſſentaremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica nada de reſto; pelo que eſcreveremos cifra, e para junto della traremos a letra ſeguinte do dividendo 6. Agora como temos o dividendo parcial 6, e eſte he menor que o di-

vi-

viſor, aſſentaremos o no quociente, e abaixaremos immediatamente a letra ſeguinte do dividendo 4, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 64. Entaõ partindo 64 por 8, cabem 8, que eſcreveremos no quociente, e fazendo a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, naõ fica reſto algum. E por iſſo entenderemos, que 8 ſe contém em 14464 exactamente 1808 vezes.

Diviſaõ de hum numero compoſto por outro compoſto.

62 QUando o diviſor conſtar de muitos algariſmos, que he o caſo a que vulgarmente ſe dá o nome de *partir por inteiro*, praticar-ſe-ha a Diviſaõ deſta maneira.

Tomem-ſe da parte eſquerda do dividendo tantas letras, quantas baſtarem para fazer hum dividendo parcial, que naõ ſeja menor que o diviſor. E porque ſeria muito difficultoſo buſcar, quantas vezes o dito dividendo contém o diviſor inteiro, como no primeiro caſo; baſtará achar quantas vezes a primeira letra do diviſor á eſquerda ſe contém na parte ſuperior do meſmo dividendo, que lhe correſponde; e o quociente aſſim achado ſe aſſentará no ſeu lugar.

Entaõ multiplicar-ſe-ha o meſmo quociente por todo o diviſor; e conforme ſe forem achando as letras do producto, ſe iraõ aſſentando debaixo do dividendo parcial da direita para a eſquerda. Depois tirar-ſe-ha eſte producto do meſmo dividendo reſpectivo, e ao reſto ſe ajuntará a letra ſeguinte do dividendo principal, com a qual ſe for-

ma-

mará outro dividendo parcial, que ſe repartirá da meſma maneira; e aſſim por diante.

Paſſemos a illuſtrar eſta regra com alguns exemplos, e a prevenir juntamente os caſos, em que póde haver algum embaraço.

Exemplo I.

Querendo repartir 75347 por 53.

$$
\begin{array}{r|l}
75347 & 53 \\
\underline{53} & \overline{1421\,\frac{34}{53}} \\
223 & \\
\underline{212} & \\
114 & \\
\underline{106} & \\
87 & \\
\underline{53} & \\
34 &
\end{array}
$$

Faremos o noſſo primeiro dividendo parcial dos dous algariſmos 75, porque eſtes baſtaõ para elle naõ ſer menor que o diviſor; e em lugar de dizermos em 75 que vezes ha 53, diremos ſómente em 7 que vezes ha 5? ha 1, que eſcreveremos no quociente.

Depois multiplicaremos o quociente 1 por todo o diviſor 53, e aſſentaremos o producto debaixo do dividendo reſpectivo 75; do qual o diminuiremos, e ficará o reſto 22, que com a letra ſeguinguinte do dividendo 3 formará outro dividendo parcial 223. Neſte tambem, em lugar de dizer em 223 que vezes ha 53, diremos ſómente, em 22 que vezes ha 5? ha 4, que aſſentaremos no quociente; e multiplicando 4 pelo diviſor, eſcreveremos o producto 212 debaixo do dividendo reſpectivo 223, do qual o diminuiremos, e ao reſto 11 ajuntaremos a letra ſeguinte 4 do dividendo principal, e teremos para repartir de novo 114. Partindo pois 11 por 5, cabem 2, que aſſentaremos no quociente; depois multiplicaremos pelo diviſor; tiraremos o producto 106 do dividendo reſpectivo 114; ao reſto 8 ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo 7; e teremos o novo dividendo parcial 87. E fazendo nelle finalmente a meſma operaçaõ, acharemos 1 para o quociente; e feita a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, ficará o reſto 34, que aſſentaremos á direita do quociente, do modo que aſſima indicámos (n. 60.)

63 Na operaçaõ precedente devia, em rigor, buſcar-ſe quantas vezes cada hum dos dividendos parciais continha o diviſor inteiro. Porém como eſta indagaçaõ pediria grande força de attençaõ, contentamo-nos, do modo que ſe tem viſto, com buſcar quantas vezes a parte maior do dividendo contém a maior parte do diviſor. He verdade, que deſte modo naõ acertamos ſempre com o verdadeiro algariſmo, que deve aſſentar-ſe no quociente, pois procedemos meramente por huma tentativa. Mas, além de que eſta tentativa conduz pela maior parte ao conhecimento do verdadeiro quociente, e quando naõ, ſempre nos indica hum algariſmo pouco diſtante delle, a multiplicaçaõ, que immediatamente ſe faz, logo moſtra o defeito que

ſe

ſe tem commettido, e ſerve para o corrigir.

E com effeito, ſe o dividendo contiveſſe realmente o diviſor *tres vezes*, e nós, julgando pelas primeiras letras de ambos elles, entendeſſe-mos que o continha *quatro*; he facil de ver, que multiplicando o diviſor por 4, achariamos hum producto maior que o dividendo, por quanto ſe tomaria o diviſor mais vezes do que realmente ſe continha no meſmo dividendo, e por conſeguinte naõ poderia fazer-ſe a ſubtracçaõ. Neſte caſo ſe diminuirá o quociente ſuppoſto de huma, duas unidades &c., até que venha hum producto que poſſa diminuir-ſe do reſpectivo dividendo. Ao contrario, ſe no meſmo caſo figurado puzeſſemos 2 no quociente, poderia ſim diminuir-ſe o producto do dividendo, mas ficaria hum reſto maior do que o diviſor, por onde ſe conheceria que elle ſe continha no dividendo mais vezes, do que ſe tinha julgado; e por conſeguinte, que o quociente 2 ſe tinha tomado menor, do que devia ſer. Com o exercicio ſe adquire em pouco tempo o habito de prever quanto ſe deve augmentar, ou diminuir o algariſmo achado pela primeira próva, no caſo de ſe achar defeituoſo.

Exem-

Exemplo II.

HAvendo de repartir 189492 por 375?

189492	375
1875	
1992	$505\frac{117}{375}$
1875	
117	

Em primeiro lugar: Tomaremos as primeiras quatro letras do numero propoſto para fazermos dellas o noſſo primeiro dividendo parcial, porque as tres primeiras fazem hum dividendo menor que o diviſor.

Depois, diremos: em 18 quantas vezes ha 3? ha 6 realmente, naõ havendo reſpeito ás letras ſeguintes; como porém multiplicando o diviſor por 6, ſahe hum producto maior que o dividendo reſpectivo, aſſentaremos ſómente 5 no quociente, e feita a multiplicaçaõ e ſubtracçaõ, ficará o reſto 19, ao qual ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo principal 9, e teremos de novo para repartir 199.

E como em 1 naõ ha vez alguma 3, aſſentaremos huma cifra no quociente, e teremos a letra ſeguinte do dividendo principal 2, com a qual ſe formará o novo dividendo parcial 1992. Repetindo nelle a meſma operaçaõ, acharemos que 3 ſe contém em 19 realmente 6 vezes; mas pela razaõ já declarada eſcreveremos ſómente 5 no quociente; e acabando a operaçaõ, ſobraráõ 117.

64 Eis-aqui huma reflexaõ, que em muitos caſos nos póde livrar de fazermos tentativas inuteis. Como pela maior parte ſe erra no juizo que ſe faz do quociente, quando a ſegunda letra do diviſor paſſa muito de 5; neſſe caſo accreſcentaremos mentalmente 1 á primeira letra do meſmo diviſor, e veremos quantas vezes aſſim augmentada ſe contém na parte correſpondente do dividendo. Porque deſte modo faremos hum juizo mais ſeguro do algariſmo, que devemos aſſentar no quociente.

Exemplo III.

SUpponhamos, que nos daõ para repartir 1832 por 288.

1832	288
1728	
	$6\frac{104}{288}$
104	

Neſte caſo em lugar de dizer em 18 que vezes ha 2, diremos: em 18 que vezes ha 3. Porque o diviſor 288 ſe chega muito mais para 300 do que para 200. Aſſim acharemos que ha 6, e com effeito eſte he o verdadeiro quociente; e da outra ſorte achariamos 9, e por conſeguinte fariamos tres tentativas inuteis, paſſando de 9 a 8, de 8 a 7, e de 7 a 6.

Modo de abbreviar a Diviſaõ.

65 PAra que melhor ſe entendeſſe o methodo da operaçaõ antecedente, mandámos até agora

eſcreefcrever fempre os productos, que refultavaõ da multiplicaçaõ do divifor pelos algarifmos do quociente que fe hiaõ achando, debaixo dos dividendos refpectivos, dos quais fe haviaõ de diminuir. Porém como na Arithmetica fe deve attender muito a reduzir, e abbreviar as operações, quanto he poffivel; devemos notar, que podemos deixar de efcrever os ditos productos, fazendo a fubtracçaõ juntamente com a multiplicaçaõ. O exemplo feguinte baftará para moftrar como ifto fe executa.

Exemplo.

QUerendo repartir 756984 por 932.

$$\begin{array}{r|l} 756984 & 932 \\ 1138 & \overline{} \\ 2064 & 812\frac{200}{932} \\ 200 & \end{array}$$

Tomaremos as quatro primeiras letras do dividendo, porque as tres fazem hum membro menor que o divifor; e partindo 75 por 9, acharemos que cabem 8, os quais affentaremos no quociente. Entaõ em lugar de multiplicar 8 por 932, e efcrever o producto debaixo do membro 7569, para delle fer diminuido, faremos tudo junto, dizendo: 8 vezes 2 faõ 16, que tirados de 9, naõ póde fer, mas tirados de 19, ficaõ 3, que efcreveremos debaixo do 9.

Para defcontar a dezena, que tomámos da letra 6, a fim de que o 9 valeffe 19, em lugar de tratarmos a mefma letra 6 como diminuida de huma unidade, da maneira que praticámos na conta

de

de *Diminuir*, guardaremos essa unidade para a juntarmos ao producto seguinte. Assim continuando a operaçaõ, diremos: 8 vezes 3 saõ 24, e 1 que guardámos saõ 25, que tirados de 6, naõ póde ser, mas tirados de 26, fica 1, que assentaremos debaixo do 6. Deste modo fica descontada a unidade, que tinhamos pedido ao 6, porque lhe tirámos huma de mais na diminuiçaõ que acabamos de fazer; e do mesmo modo descontaremos os 2, que agora tomámos do 5, para que o 6 valesse 26. Assim diremos: 8 vezes 9 saõ 72, e 2 que vem (porque na operaçaõ antecedente diminuimos de 26) saõ 74, que tirados de 75, fica 1, que escreveremos debaixo do 5.

Ao resto 113 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo 8, e continuaremos do mesmo modo, dizendo: em 11 que vezes ha 9? ha 1, que assentaremos no quociente; depois, 1 vez 2 he 2, que tirados de 8 ficaõ 6, que assentaremos debaixo do 8; 1 vez 3 he 3, que tirados de 3 naõ fica nada, e por isso poremos cifra debaixo do 3; 1 vez 9 he 9, que tirados de 11, ficaõ 2, que assentaremos por baixo. Ao resto 206 ajuntaremos a letra seguinte do dividendo que he 4, e diremos: em 20 quantas vezes ha 9? ha 2, que assentaremos no quociente; e fazendo a multiplicaçaõ, diremos: 2 vezes 2 saõ 4, que tirados de 4, fica 0; 2 vezes 3 saõ 6, que tirados de 6, fica 0; e em fim 2 vezes 9 saõ 18, que tirados de 20, ficaõ 2.

66 Póde succeder no decurso das divisões parciais, de que consta esta operaçaõ, que o dividendo contenha o divisor mais de 9 vezes. Neste caso entenderemos, que na operaçaõ precedente se tomou para o quociente huma letra menor do que de-

ſdevia ſer, pois que a ella certamente pertencerá a dezena, que ſe achar involvida no quociente actual.

67 Se o dividendo e o diviſor acabarem ambos em cifras, antes de fazer a diviſaõ podem cortar-ſe em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver. Por exemplo, para repartir 8000 por 400, dividiremos ſómente 80 por 4; porque he evidente, que 80 centenas contém a 4 centenas tantas vezes, quantas 80 unidades contém a 4 unidades.

Diviſaõ das partes decimais.

68 PAra que nos naõ demoremos com diſtinções eſcuſadas, reduziremos a diviſaõ dos numeros acompanhados de *dizima* a huma ſó regra, que he deſta maneira:

Preparem-ſe os numeros propoſtos de ſorte que tenhaõ ambos igual numero de algariſmos decimais, ajuntando as cifras neceſſarias ao que menos tiver, o qual por iſſo naõ muda de valor (n. 30); ſupprima-ſe a virgula, e pratique-ſe a diviſaõ como ſe os numeros foſſem inteiros: e o quociente ſerá o que ſe buſca, ſem haver nelle algariſmos decimais.

Exem-

Exemplo I.

SE houvermos de repartir 12, 52 por 4, 3;

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \cline{2-2} 392 & 2\frac{392}{430} \end{array}$$

Primeiramente reduziremos os numeros dados a igual numero de decimais, ajuntando huma cifra ao divisor, que ficará 4, 30. Depois supprimindo a virgula partiremos 1252 por 430, e acharemos o quociente 2, e o resto 392; e por conseguinte o quociente total $2\frac{392}{430}$.

Porém, como usamos da *dizima* com o fim principal de evitarmos as fracções ordinarias, em lugar de assentarmos o resto em fórma de fracçaõ, como fizemos no exemplo dado, continuaremos a operaçaõ para acharmos a *dizima* do quociente, como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo II.

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \cline{2-2} 3920 & \\ 500 & 2,9116 \text{ \&c.} \\ 700 & \\ 2700 & \\ 120 & \end{array}$$

Tendo achado o quociente inteiro 2, como no primeiro exemplo, ao resto 392 ajuntaremos huma ma cifra, que realmente o tornará dez vezes maior, e teremos para partir 3920. Feita a operaçaõ, acharemos a letra 9 para o quociente, a qual assentaremos, tendo primeiro marcado o lugar das unidades por meio da virgula, que poremos junto ao 2. Deste modo o 9 mostrará sómente *decimos*, e desfará o que se tinha supposto no dividendo, fazendo-se dez vezes maior, pois he manifesto, que, se partindo 3920 por 430 vem ao quociente 9, partindo 392 por 430 deve ser o quociente dez vezes menor, isto he 0,9. Agora fazendo a multiplicaçaõ, e subtracçaõ, teremos o resto 50, ao qual ajuntaremos tambem outra cifra, que vem a ser o mesmo, como se ao principio tivessemos ajuntado duas ao dividendo. Mas porque a letra 1, que havemos de achar para o quociente, se ha-de assentar á direita do 9 na casa das *centesimas*, com isso desfaremos a supposiçaõ, que tinhamos feito, de hum dividendo cem vezes maior.

Deste modo continuaremos a operaçaõ até onde quizermos, havendo sempre respeito á natureza da questaõ, a qual mostrará quantos algarismos de *dizima* saõ bastantes. Bem entendido: que se pararmos em dous, naõ poderá chegar o defeito do quociente a huma *centesima* parte da unidade; nem a huma *millesima*, se pararmos no terceiro algarismo decimal; e assim por diante: pois he manifesto, que naõ póde accrescentar-se, nem diminuir-se huma unidade ao ultimo algarismo achado, sem que o quociente se faça maior, ou menor, do que deve ser.

Da mesma maneira se podem converter em dizima todos os restos da Divisaõ, quando ella se pratica em numeros inteiros.

Resta

Resta mostrar a razaõ porque supprimindo a virgula tanto no dividendo, como no divisor, naõ se altéra nada o quociente, no caso de haver igual numero de letras decimais em ambos elles. Isto será facil de entender, advertindo que no exemplo assima o dividendo 12,52 vale o mesmo que 1252 *centesimas*, e o divisor 4,30 o mesmo que 430 *centesimas*, porque as unidades principais contém cem *centesimas* (n. 22); e he claro, que 1252 *centesimas* contém 430 *centesimas* tantas vezes, quantas 1252 unidades contém a 430 unidades: logo he escusado attender á virgula, todas as vezes que ambos os numeros acabaõ na mesma casa decimal.

69 Algumas vezes, conforme a natureza da questaõ, basta achar o quociente até hum grão determinado de exactidaõ. Nestes casos podemos abbreviar muito a operaçaõ, usando do methodo, que agora mostraremos.

Primeiramente supponhamos, que nos he bastante o quociente exacto até a casa das unidades (porque depois mostraremos como se deve applicar o mesmo methodo a outros casos). Eis-aqui a regra.

Supprimaõ-se no dividendo tantas letras, menos huma, da parte direita, quantas saõ as do divisor; e depois pratique-se a divisaõ ao modo ordinario. Se naõ ficar resto, ajuntem-se ao quociente tantas cifras, quantas saõ as letras supprimidas no dividendo, e teremos o quociente pedido. Porém ficando algum resto, este se partirá pelo divisor, no qual para isso se supprimirá o ultimo algarismo á direita. Feita esta divisaõ, o resto que ficar se tornará a partir pelo divisor da operaçaõ pre-

precedente, ſupprimindo-lhe o ultimo algariſmo á direita; e aſſim por diante. A praxe deſta regra ſe facilitará por meio dos exemplos ſeguintes.

Exemplo I.

QUerendo repartir 8789236487 por 64423, e baſtando ſaber o quociente exacto até á caſa das unidades, deixaremos os quatro ultimos algariſmos do dividendo, porque o diviſor tem ſinco, e partiremos 878923 por 64423.

878923	64423
234693	136430
41424 . .	6442
2772 . .	644
196 . .	64
4 . .	6

E tendo achado pela regra ordinaria o quociente 13, e o reſto 41424; dividiremos eſte por 6442, ſupprimindo o ultimo algariſmo á direita no diviſor primitivo; e acharemos a letra 6 para o quociente, a qual aſſentaremos á direita das duas 13 antecedentemente achadas; e ficará o reſto 2772. Do meſmo modo partiremos eſte por 644, ſupprimindo mais huma letra no diviſor primitivo, e virá ao quociente 4, ficando o reſto 196. Partindo eſte por 64, caberá ao quociente 3, e ficará o reſto 4; e finalmente partindo eſte por 6, tocará cifra ao quociente, a qual nelle aſſentaremos. Aſſim repartindo 8789236487 por 64423, teremos o quociente 136430 exacto até á caſa das unidades. E com effeito ſe fizeſſemos a diviſaõ por extenſo achariamos $136430\ \frac{6597}{64423}$.

Naõ he neceſſario eſcrever os novos diviſores defronte dos reſtos, que por elles ſe haõ de repartir, como aqui fazemos a fim de que melhor ſe entenda o modo da operaçaõ. Mas baſta, que ſe vaõ marcando com hum ponto, ou com huma riſca, as letras do diviſor primitivo, conforme ſe forem ſupprimindo no decurſo da operaçaõ.

70 Se o reſto da primeira diviſaõ ſe achar menor que o diviſor que lhe compete, aſſentar-ſe-há cifra no quociente; ficará o meſmo reſto; e no diviſor ſe ſupprimirá outra letra. Se o meſmo reſto ainda for menor que o novo diviſor, aſſentar-ſe-há outra cifra no quociente; e aſſim por diante.

Exemplo II.

HAvendo de repartir 55106054 por 643, e baſtando ſaber o quociente exacto até á caſa das unidades, deixaremos as duas ultimas letras do dividendo, e partiremos ao modo ordinario 551060 por 643.

```
551060 | 643
  3666 | 85701
   4510
    009 . . 64
      9 . . 6
      3
```

Feita a operaçaõ ordinaria, acharemos o quociente 857, e o reſto 9, o qual conforme a regra pre-

prefente devia repartir-fe por 64. Porem como fe acha o dito refto menor que o feu competente divifor, affentaremos cifra no quociente, e conferaremos o mefmo refto 9, o qual dividiremos pelo novo divifor 6, e affim teremos o quociente 85701 exacto até á cafa das unidades, conforme fe bufcava.

71 Quando no principio da operaçaõ fe fupprimem no dividendo as letras que a regra ordena, fe as que ficarem naõ forem baftantes para conftituirem hum numero maior, ou ao menos igual ao divifor; entaõ cortar-fe-haõ nefte tantas letras á direita, quantas forem precifas, para que as reftantes poffaõ caber ao menos huma vez no dividendo.

Exemplo III.

Havendo de repartir 1611527 por 64524, e requerendo-fe o quociente exacto até á cafa das unidades.

Primeiramente devemos fupprimir no dividendo as quatro ultimas letras 1527. Depois, como o refto 161 faz hum numero menor que o divifor primitivo 64524, nelle tambem fupprimiremos as tres ultimas letras 524, que faõ as que baftaõ para que o refto 64 poffa caber em 161. Entaõ, fazendo a operaçaõ como nos exemplos precedentes, partiremos 161 por 64;

161	64
	25
33 . .	6
3	

e acharemos que da repartiçaõ de 1611527 por 64524 resulta o quociente 25, sem defeito de huma só unidade. E na verdade o quociente exacto he 24 $\frac{62951}{64524}$, o qual se chega muito mais para 25 do que para 24.

72 A' medida que se vaõ supprimindo as letras do divisor, para maior exactidaõ, convem ajuntar huma unidade á ultima das que ficaõ, se a letra supprimida for 5, ou maior que 5. E do mesmo modo se ajuntará huma unidade á ultima letra que ficar no dividendo, quando as letras nelle supprimidas passarem de 5, ou 50, ou 500 &c., conforme se supprimir huma, duas, tres &c.

Exemplo IV.

SUpponhamos que se pede o quociente do numero 8657627 repartido por 1987, com a condiçaõ de ter a mesma exactidaõ, que se tem procurado nos exemplos precedentes.

Conforme a reflexaõ ultima que temos feito, tomaremos pois para repartir 8658 por 1987, como aqui se mostra:

$$\begin{array}{r|l} 8658 & \underline{1987} \\ & 4357 \\ 710 \;..\; & 199 \\ 113 \;..\; & 20 \\ 13 \;..\; & 2 \end{array}$$

Onde, em lugar de partir o resto 710 por 1987, partiremos por 199, por quanto a letra 7 supprimida no divisor he maior que 5. Do mesmo modo do na operaçaõ ſeguinte em lugar de 19 tomaremos 20 para diviſor, porque ſe ſupprime hum 9. E finalmente na operaçaõ ſeguinte, como o diviſor 2 he hum pouco maior do que devia ſer, e eſte ſe contém 6 vezes e $\frac{1}{2}$ no reſto 13, aſſentaremos antes 7 no quociente, do que 6; e acabada a operaçaõ diremos que o quociente pedido he 4357.

73 Agora ſerá facil de entender o que ſe deve praticar, quando ſe requer o quociente com maior exactidaõ do que até á caſa das unidades.

Por exemplo: Se quizermos o quociente exacto até á caſa das *decimas-milleſimas*, naõ he neceſſario mais do que ajuntar ao dividendo tantas cifras quantas ſaõ as caſas da dizima que pertendemos, v. gr. quatro no exemplo propoſto. Entaõ ſe fará a diviſaõ ſegundo o methodo preſente; e tendo achado o quociente exacto até á caſa das unidades, nelle ſe cortaráõ para a dizima por meio da virgula tantas letras, quantas ſe determinaraõ achar no principio da operaçaõ.

Exemplo V.

PEde-ſe o quociente do numero 6927 dividido por 4532 com a condiçaõ de ſer exacto até a caſa das *decimas-milleſimas*.

Como as *decimas-milleſimas* pertencem á quarta caſa da dizima, ajuntaremos quatro cifras ao dividendo; e a queſtaõ ſerá reduzida a buſcar o quociente do numero 69270000 dividido por 4532, exacto até á caſa das unidades, como nos exemplos precedentes. Aſſim fazendo a applicaçaõ do me-

methodo actual, teremos para repartir 69270 por 4532, da maneira seguinte:

```
69270 | 4532
      |------
      | 15285
23950
 1290 . . 453
  384 . . 45
   24 . . 5
```

E achando o quociente 15285, nelle cortaremos para a dizima quatro letras, pois tantas cifras ajuntámos ao dividendo; e será o quociente pedido 1,5285.

Havendo dizima no dividendo, no divisor, ou em ambos, deveráõ primeiro repartir-se de sorte, que se possa desprezar a virgula, como assima fica declarado (n. 68), e depois se procederá á operaçaõ como neste ultimo exemplo.

Pelo methodo presente póde reduzir-se facilmente á dizima qualquer *fracçaõ* ordinaria, havendo respeito ao que assima dissemos (n. 71).

Querendo v. gr. reduzir á dizima a fracçaõ $\frac{4253}{9678}$ de sorte que se represente o seu valor exactamente até á casa das millesimas, devemos partir (n. 73) o numero 4253000 por 9678; que vem a ser o mesmo que dividir (n. 69) o numero 4253 por 9678, ou (n. 71) o numero 4253 por 968, conforme o methodo até agora declarado. Feita a operaçaõ, virá ao quociente 439: e teremos 0,439 pelo valor da fracçaõ proposta, com a exactidaõ que se intentava.

55 O methodo que assima ajuntámos no fim da *Multiplicaçaõ*, para se fazer esta operaçaõ por meio unicamente do *Somar*, tambem se póde applicar á *Divisaõ*, de sorte que alem do *Somar* naõ se careça de outra cousa mais que do *Diminuir*. A sua praxe he desta maneira.

Primeiramente forma-se huma colunna da addiçaõ successiva do *divisor*, do mesmo modo que para multiplicar a formámos da addiçaõ do *multiplicando* (pag. 37).

Depois toma-se no dividendo á esquerda hum membro de tantas letras, quantas bastarem para que na colunna se ache hum numero igual, ou proximamente menor. O algarismo, que este tiver defronte, se assenta no quociente, e o numero debaixo do dividendo parcial, do qual se diminue, e ao resto se ajunta a letra seguinte do dividendo principal; e assim resulta outro dividendo parcial, o qual se busca na colunna, e na sua falta o numero proximamente menor; e assim por diante. Quando na colunna se naõ achar o dividendo parcial, nem algum numero proximamente menor, assentar-se-há eifra no quociente, e se ajuntará ao dito dividendo a letra seguinte do dividendo total para se continuar a operaçaõ.

Se quizermos v. gr. repartir 220188745725 por 236743, primeiramente assentaremos estes numeros do modo ordinario, como aqui se mostra.

220188745725

220188745725	236743	1 . . 236743
2130687	———	2 . . 473486
———	930075	3 . . 710229
712004		4 . . 946972
710229		5 . . 1183715
———		6 . . 1420458
1775572		7 . . 1657201
1657201		8 . . 1893944
———		9 . . 2130687
1183715		———
1183715		10 . . 2367430
———		
0000000		

Depois faremos a colunna ſubſidiaria por meio da addicçaõ ſucceſſiva do diviſor , como ſe vê no exemplo ; e com ella entraremos a executar a diviſaõ , que naõ involve mais difficuldade alguma.

Tomando pois para o primeiro dividendo parcial as primeiras ſete letras 2201887 , porque ſeis fariaõ hum dividendo menor que o diviſor , acharemos que na colunna lhe toca o numero proximamente menor 2130687 defronte da letra 9. Pelo que aſſentaremos 9 no quociente , e o dito numero debaixo do dividendo reſpectivo , do qual o diminuiremos , e ao reſto ajuntaremos a letra ſeguinte do dividendo , que he 4 , e teremos para partir 712004. Naõ achando eſte numero na colunna , tomaremos o que ſe acha proximamente menor , defronte da letra 3 , a qual ſe aſſentará no quociente , e o dito numero ſe diminuirá do dividendo , ajuntando ao reſto a letra ſeguinte 5 , de ſorte que ficará para partir 17755.

Co-

Como porem eſte numero ſe naõ acha na colunna, nem outro que ſeja proximamente menor, poremos cifra no quociente, e ajuntando a letra ſeguinte 7 teremos para dividir 177557. E como eſte numero ainda he menor que os da colunna, poremos outra cifra no quociente, e ajuntando outra letra teremos para repartir 1775572. Entaõ acharemos na colunna o numero proximamente menor 1657201 defronte da letra 7, a qual paſſaremos ao quociente, e diminuiremos o numero do dividendo reſpectivo, ajuntando ao reſta a letra ſeguinte do dividendo principal, que he a ultima 5, e teremos para repartir 1183715. Eſte numero ſe acha na colunna defronte da letra 5, a qual aſſentaremos no quociente; e por que feita a diminuiçaõ naõ ſobra nada, ſerá o quociente exacto 930075.

Sobre o uſo deſte methodo deve aqui entenderſe o meſmo, que já declaramos a reſpeito da multiplicaçaõ (pag. 49) 55

Prova da Multiplicaçaõ, e Diviſaõ.

74 DA meſma definiçaõ, que temos dado deſtas duas operações, ſe póde conhecer a *prova* dellas, que vulgarmente ſe chama *real*.

Como na Multiplicaçaõ ſe toma o multiplicando tantas vezes quantas ſaõ as unidades do multiplicador, he evidente, que ſe procurarmos quantas vezes o producto contém o multiplicando, iſto he, (n. 59), ſe dividirmos o producto pelo multiplicando, deve ſahir o multiplicador no quociente. E como he indifferente tomar o multitiplicando para multiplicador, e reciprocamente (n. 44), ſegue-ſe em geral: *Que dividindo o producto de qualquer multiplicaçaõ por hum dos factores deve ſahir o outro no quociente.*

Por exemplo, tendo achado aſſima (n. 50) que o numero 2864 multiplicado por 6 dá o producto 17184; ſe dividirmos eſte por 2864, teremos no quociente 6; e ſe o dividirmos por 6, teremos no quociente 2864.

Do meſmo modo: Por quanto o quociente de qualquer diviſaõ denota quantas vezes o diviſor ſe contem no dividendo, manifeſtamente ſe ſegue, que ſe o diviſor ſe tomar tantas vezes quantas denota o quociente, iſto he (n. 40) ſe o diviſor ſe multiplicar pelo quociente, deve ſahir no producto o dividendo, no caſo de ter ſido feita a diviſaõ ſem ficar reſto algum; e que tendo havido reſto, ſe o diviſor ſe multiplicar pelo quociente, e ao producto ſe ajuntar o reſto, deve reſultar o meſmo dividendo.

Por exemplo: Temos achado aſſima (n. 63), que o numero 189492 repartido por 375 dá o quociente 505, e o reſto 117. E multiplicando 375 por 505, teremos o producto 189375, ao qual ajuntando-ſe o reſto 117, reſultará o meſmo dividendo 189492.

Donde ſe ve, que a *prova real* da Diviſaõ ſe faz pela Multiplicaçaõ, e da Multiplicaçaõ pela Diviſaõ.

Porém eſtas operações pódem verificar-ſe por hum meio muito mais facil e expedito, que agora moſtraremos; advertindo que naõ devem por iſſo deſprezar-ſe as reflexões que acabamos de fazer, por quanto ſerviraõ para muitas outras couſas.

Pro-

Prova pela regra dos noves.

75 PAra moſtrarmos o uſo deſta regra por meio de hum exemplo, ſupponhamos que tendo multiplicado 65498 por 454, e achado o producto 29736092, queremos verificar eſte reſultado. Eis-aqui a operaçaõ.

Somaremos as letras do multiplicando 6,5,4,9,8, ſem attender ao ſeu valor local, como ſe todas eſtiveſſem na caſa das unidades, e lançaremos fóra *nove*, á medida que elle ſe achar na ſoma. Por fim teremos hum reſto, que neſte exemplo he 5, o qual aſſentaremos ao lado do meſmo multiplicando.

Do meſmo modo ſomaremos todas as letras do multiplicador 4, 5, 4, lançando fora os *noves*, e teremos o reſto 4, que aſſentaremos ao lado do meſmo multiplicador.

Entaõ multiplicaremos os dous reſtos hum pelo outro, e do producto, que neſte exemplo he 20, lançaremos fora os *noves* que elle tiver; e ficará hum reſto, que no caſo preſente he 2.

Ora ſe o producto aſſima dito he exacto, he neceſſario que ſomando do meſmo modo todas as letras delle 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, e lançando fóra os *noves*, naõ fique tambem ſenaõ 2, como ſe acha com effeito.

Eſta regra ſuppõe que para haver o reſto da ſubtracçaõ de todos os *noves*, que em qualquer numero ſe contém, naõ he neceſſario mais do que ſomar todas as ſuas letras, e lançar fóra na ſoma dellas os *noves* que ſe acharem, como ſe demonſtra facilmente reflectindo ſobre os principios da Numemeraçaõ (n. 39 §§). Isto supposto eis-aqui a razaõ da prova na Multiplicaçaõ.

Como o multiplicando 65498 he composto de hum certo numero de *noves* e do resto 5, e como o multiplicador 454 he tambem composto de hum certo numero de *noves* e do resto 4, he manifesto que sómente pelo producto de 4 por 5 ou por 20, hade deixar o producto total de ser divisivel por 9; ou (tirando os *noves* de 20) que sómente por 2 hade deixar de ser divisivel por 9. Logo estando o dito producto exacto deve ficar nelle o mesmo numero, que fica no producto dos dous restos, depois de serem lançados fóra os *noves* que elle contém.

A prova da Multiplicaçaõ se applica facilmente á Divisaõ. Como o producto do divisor pelo quociente com o resto, quando o houver, he igual ao dividendo (n. 74), naõ he necessario mais do que tirar os noves ao divisor, e ao quociente; multiplicar os dous restos; do producto lançar fóra os noves, se os tiver; somar o resto com o que ficar depois de tirados os noves ao resto da divisaõ; e da soma lançar fóra os noves, se os tiver; e o resto será o que se deve achar tambem no dividendo, depois de lançados fóra os noves.

Por exemplo; Tendo achado o quociente 812, e o resto 200, da repartiçaõ de 756984 por 932, tiraremos os noves ao divisor 932, e ficará o resto 5, depois ao quociente 812, e ficará 2. Entaõ multiplicaremos os dous restos, e do producto 10 lançando fora 9, fica 1; e tirando tambem os noves ao resto da divisaõ 200, ficaõ 2, que somados com o resto precedente 1 fazem 3; isto he o que deve restar no dividendo depois de se tirarem os no-

noves estando a operaçaõ exacta, como se acha com effeito.

Tomando a cousa em rigor, esta verificaçaõ naõ he infallivel. Porque se na multiplicaçaõ, por exemplo, nos enganassemos de sorte, que fizessemos qualquer algarismo do producto maior huma, duas, ou mais unidades, e depois puzessemos outras tantas de menos em qualquer outro: como isto naõ influiria sobre o resto que fica depois de lançados fóra os noves, he claro que hum erro semelhante naõ serà descuberto pela prova. Porem como para isso saõ necessarios dous erros, e dous erros iguais, e contrarios, que mutuamente se destruaõ, que vem a ser o mesmo que commetter o erro de 9, ou dos multiplos de 9, he facil de ver que os casos, em que a prova póde faltar, haõ de ser rarissimos na pratica.

55 A prova, que se faz por meio dos *noves*, igualmente podia fazer-se por meio de qualquer outro numero: mas escolheo-se o nove, por ser mais facil de lançar fóra. Como porem temos notado, que os *onzes* se pódem tirar de qualquer numero quasi com a mesma facilidade, e como isto mostra huma propriedade notavel da Numeraçaõ actual, que por outra parte póde servir de utilidade, será conveniente que a ajuntemos neste lugar, e he da maneira seguinte.

Se o primeiro algarismo de qualquer numero, o terceiro, e os mais pelas casas impares da direita para a esquerda se ajuntarem, lançando fóra da soma o numero onze quando nella vier, e notando o resto final que resultar; e se depois se ajuntar do mesmo modo o segundo algarismo, o quarto, e os mais pelas casas pares; e se o resto

se

ſe tirar do primeiro (ao qual ſendo neceſſario ſe ajuntará para iſſo o numero onze), o que ficar ſerá o reſto que ſobra do numero propoſto, lançados fóra todos os *onzes*.

Aſſim, por exemplo, para tirarmos os *onzes* do numero 7543945, diremos: 5 e 9 ſaõ 14, menos onze ſaõ 3, e 4 ſaõ 7, e 7 ſaõ 14, memos onze, ficaõ 3; depois, 4 e 3 ſaõ 7, e 5 ſaõ 12, menos onze, fica 1; tirando eſte ſegundo reſto 1 do primeiro 3, ficaõ 2, que he o reſto que ſobra tirados os onzes do numero 7543945. E para os tirarmos do numero 527381, diremos: 1 e 3 ſaõ 4, e 2 ſaõ 6, primeiro reſto; depois 8 e 7 ſaõ 15, menos onze, ſaõ 4, e 5 ſaõ 9, ſegundo reſto; e porque eſte naõ póde diminuir-ſe do primeiro 6, ajuntar-lhe-hemos 11, e ſerá 17; do qual tirando 9, ficaõ 8: e eſte he o reſto que fica tirados os *onzes* do numero 527381.

Eſta notavel propriedade com igual razaõ póde ſervir de prova ás quatro operaçóes de Arithmetica; prova que ſómente faltará, quando o erro commettido na operaçaõ for onze, ou algum dos multiplos de onze. E ſe eſta prova ſe ajuntaſſe com a dos noves, muito mais provavel ſeria o juizo que ſe fizeſſe da certeza da operaçaõ, pois que entaõ ſómente eſcaparia o erro de 99, ou dos multiplos de 99. ſſ

Uſo da Diviſaõ.

76 A Diviſaõ ſerve naõ ſómente para achar quantas vezes hum numero contém outro, mas tambem para partir qualquer numero em partes iguais. Tomar a ametade, a terça, a quarta,

a

a quinta, vigeſima, trigeſima parte &c. de hum numero, he o meſmo que dividi-lo por 2, 3, 4, 5, 20, 30 &c., ou parti-lo em 2, 3, 4, 5, 20, 30 partes iguais &c., para tomar huma dellas.

A Diviſaõ ſerve tambem para converter as unidades de qualquer eſpecie em outras de eſpecie ſuperior; como, por exemplo, para reduzir hum certo numero de *dinheiros* a *ſoldos*, e eſtes a *libras*. Para reduzir 5864 *dinheiros* a *ſoldos*, notaremos que como ſaõ neceſſarios 12 *dinheiros* para fazer hum *ſoldo*, quantas vezes houver 12^{d} em 5864^{d}, tantos *ſoldos* haverá na dita quantia. He neceſſario pois dividir 5864 por 12, e acharemos no quociente 488ſ, e 8^{d} de reſto. Para reduzir a *libras* os 488ſ, dividiremos 488 por 20, porque ſaõ neceſſarios 20ſ para fazer 1 *libra*, e teremos no quociente 24^{lb}, e de reſto 8ſ; e aſſim a quantia propoſta ſerá reduzida a 24 *libras*, 8 *ſoldos*, e 8 *dinheiros*.

Por occaſiaõ deſta repartiçaõ por 20, notaremos que havendo de dividir qualquer numero por outro que acaba em cifras, podemos abbreviar a operaçaõ, ſeparando no dividendo da parte direita tantas letras quantas ſaõ as cifras do diviſor, e dividindo as que ficarem a eſquerda pelas letras ſignificativas do meſmo diviſor; ſe houver algum reſto, á direita delle ſe ajuntaráõ as letras ſeparadas no dividendo, para ter o reſto total da diviſaõ; e naõ havendo reſto, as meſmas letras ſeparadas ſeraõ o unico reſto da operaçaõ.

Por exemplo: havendo de dividir 5834 por 20, ſeparаremos a ultima letra do dividendo 4, e repartiremos por 2 a parte que fica 583. Feita a operaçaõ, teremos o quociente 291, e o reſto 1, ao qual ajuntaremos a letra feparada 4, e ferá o refto total 14, de forte que o quociente completo ferá 291 $\frac{14}{20}$.

Efta abbreviaçaõ póde applicar-fe á reducçaõ da carga de hum navio a *tonelladas*. Sabendo v. gr. que a carga he de 2584954 *libras*, para a reduzir em *tonelladas*, ifto he, para a dividir por 2000, deveremos feparar as tres ultimas letras á direita, e tomar a ametade das que ficarem; e affim teremos 1292 *tonelladas*, e 954 *libras*.

O mefmo fe applicará a muitos outros cafos, conforme a natureza da queftaõ o permittir.

Dos Quebrados.

77 DAmos na Arithmetica o nome de *Quebrados*, ou *Fracções*, aos numeros, pelos quais fe exprimem as quantidades menores que a unidade.

78 Para fe formar huma idea clara delles, he neceffario conceber a mefma quantidade, que fe tem efcolhido para unidade, como compofta de outras unidades mais pequenas; affim como fe concebe, por exemplo, a *libra* compofta de 20 partes, ou unidades, que fe chamaõ *foldos*.

Huma, ou muitas deftas partes, nas quais fe divide a unidade, ou das quais fe entende compofta, formaõ o que fe chama *quebrado*, ou *fracçaõ* da unidade. E o mefmo nome fe dá aos numeros, com que ellas fe reprefentaõ.

79 Ha duas differenças na expreffaõ dos quebrados, e ambas ellas recebidas na pratica.

A primeira confifte em reprefentar as partes

da

da unidade á maneira dos numeros inteiros, tomando-as como unidades de outra eſpecie, e dando-lhes hum nome particular.

Aſſim, para moſtrar *ſete* partes, das quais entraõ vinte em huma *libra*, damos primeiramente ás ditas partes o nome de *ſoldos*; e preſcindindo da *libra*, ou da unidade principal, as declaramos como unidades abſolutas com a letra 7, á qual ajuntamos a letra inicial das unidades que ſignifica, deſte modo 7ſ; expreſſaõ que em ſi meſma he inteira e abſoluta, mas a reſpeito da *libra* he huma fracçaõ.

Eſta differença de quebrados tem lugar nos numeros complexos, dos quais adiante fallaremos.

80 Como porem naõ he poſſivel dar nomes em particular a todas as diviſões que ſe pódem fazer da unidade, faz-ſe neceſſaria a ſegunda differença de quebrados, em cuja expreſſaõ ſe uſa de dous numeros, o primeiro dos quais ſe aſſenta em ſima de huma riſca, e moſtra as partes da unidade de que ſe compóe a quantidade, que queremos ſignificar; e o ſegundo debaixo da riſca, para denotar quantas deſſas partes formaõ a unidade. Aſſim, para pôr em figura as *ſete* partes da *libra*, de que ha pouco fallamos, deveremos aſſentar os dous numeros deſta maneira $\frac{7}{20}$.

81 Para dizer o valor de hum quebrado, primeiramente ſe lê o numero que eſtá em ſima da riſca, o qual ſe chama *Numerador*, e depois o que eſtá por baixo, o qual ſe chama *Denominador*; e a eſte ſe ajunta a addiçaõ *avos* (*). Aſſim para de-

F cla-

(*) Eſta addiçaõ *avos* naõ ſignifica couſa alguma per ſi meſma Ho.

clarar o valor de $\frac{7}{20}$, diremos *sete vinte-avos*, e de $\frac{11}{100}$, diremos *onze cem-avos* &c.; advertindo, que *onzes cem-avos* quer dizer *onze* partes tais, que dellas sejaõ necessarias *cem* para formar a unidade.

Sendo o denominador de 2 até 8 naõ se usa da addiçaõ *avos*, mas dos nomes, *meios*, *terços*, *quartos*, *quintos*, *sextos*, *setimos*, e *oitavos*; ou *ametades*, *terças*, *quartas* partes &c. Tambem de 9 para sima se usa hoje dos nomes ordinais da lingoa Latina, como $\frac{3}{1000}$ *tres mil-avos*, ou *tres millesimas* partes da unidade.

82 Mostra pois o numerador de quantas partes da unidade se compõe a quantidade, que se declara pelo quebrado; e o denominador determina a grandeza e valor dessas partes, mostrando quantas dellas formaõ a unidade. Por isso se chama denominador, porque dá o nome ás partes da fracçaõ, e faz v. gr. nestes dous quebrados $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, que as partes do primeiro sejaõ *quintas*, e as do segundo *setimas*.

83 Tanto o numerador como o denominador se

He a terminaçaõ de *oitavos*, até onde os nossos Arithmeticos antigos davaõ nome *ordinal* proprio ao denominador. Dahi por diante, ou por arrecearem usar dos *ordinais* da lingoa Latina, ou para maior facilidade na leitura dos quebrados, usáraõ dos *cardiais*, ajuntando-lhes a terminaçaõ do mesmo nome *oitavos*, para os fazerem ser equivalentes aos *ordinais*. Deste modo *onze-avos* tem o lugar de hum nome que se formaria de *onze*, assim como *oitavos* se fórma de *oito*; que seria *onzavos*. Assim dous *onze-avos* he como se dissessemos dous *onzavos*, tres *cem-avos* o mesmo que tres *centavos* &c.

ſe chamaõ tambem *termos* do quebrado, que por elles ſe repreſenta. E em dous quebrados, ambos os numeradores, ou ambos os denominadores chamaõ-ſe termos *homologos*; e o numerador de hum com o denominador do outro, termos *heterogeneos*.

Dos numeros inteiros conſiderados em fórma de quebrados.

84 AS operações, que ſe fazem ſobre os quebrados, conduzem muitas vezes a reſultados fraccionarios, cujo numerador ſe acha igual, ou maior que o denominador, como v. gr. $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$ &c.

As expreſsões deſta ſorte naõ ſaõ fracções propriamente tais, mas numeros inteiros, ou inteiros com quebrados, repreſentados em forma de fracções.

85 Para extrahir os inteiros, que ſe achaõ incluidos nellas, he neceſſario dividir o numerador pelo denominador. O quociente moſtrará os inteiros, e o reſto da diviſaõ; ſe o houver, ſerá o numerador de huma fracçaõ propriamente tal, que ſe ha-de ajuntar aos ditos inteiros, ficando o meſmo denominador. Aſſim $\frac{27}{5}$ ſe reduzem a $5\frac{2}{5}$ iſto he, ſinco unidades, e dous quintos da unidade.

A razaõ he, porque na expreſſaõ $\frac{27}{5}$ o denominador 5 moſtra que a unidade ſe tem dividido em 5 partes : logo quantas vezes houver 5 em 27 ; tantas unidades inteiras haverá no valor da fracçaõ $\frac{27}{5}$.

86 As multiplicações, e divisões dos numeros inteiros acompanhados de fracções requerem, ao menos para maior facilidade das operações, que os ditos inteiros se reduzaõ á fórma de quebrados. Isto se faz multiplicando o inteiro pelo denominador da fracçaõ, á qual se quer reduzir, e o producto será o numerador.

Por exemplo : Querendo reduzir o numero 8 a huma fracçaõ que tenha 5 por denominador, multiplicaremos 8 por 5, e o producto 40 será o numerador ; donde teremos $\frac{40}{5}$. A razaõ he, porque havendo de reduzir o numero 8 a *quintos*, cada unidade se considera composta de 5 partes : logo 8 unidades se converteráõ em 40 das ditas partes. Do mesmo modo o numero misto $7\frac{4}{9}$ convertido em *nove-avos* dará $\frac{67}{9}$, porque o inteiro 7 vale $\frac{63}{9}$, e ajuntando os $\frac{4}{9}$, teremos $\frac{67}{9}$.

Quando se ha-de reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, e naõ importa que tenha certo denominador, o mais simples de tudo he tomar para isso a unidade, a qual se subentende sempre como denominador natural de todos os numeros inteiros. Porque assim como por $\frac{8}{3}$ entendemos oito *terços*, e por $\frac{8}{2}$ oito *meios*, assim por $\frac{8}{1}$ entenderemos oito *unidades*.

Das

Das mudanças, que se pódem fazer nos termos de hum quebrado, sem lhe alterar o valor.

87 HE manifesto, que em quantas mais partes se conceber a unidade dividida, tantas mais seraõ necessarias para representar huma mesma quantidade. Lea-se

88 Donde se vê, que pode fazer-se o denominador de huma fracçaõ duplo, triplo, quadruplo &c., sem lhe mudar o valor, com tanto que ao mesmo tempo se faça tambem o seu numerador duplo, triplo, quadruplo &c.

Logo pode dizer-se em geral: *Que hum quebrado naõ muda de valor, quando se multiplicaõ ambos os seus termos por hum mesmo numero,*

Assim $\frac{3}{4}$ he o mesmo que $\frac{6}{8}$, $\frac{9}{12}$ &c.; e $\frac{1}{2}$ a mesma cousa que $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$ &c.

89 Por huma razaõ semelhante se entende, que quanto menos partes se suppuzerem na unidade, tanto menos seráõ precisas para formar huma mesma quantidade.

Pelo que he manifesto, que sem mudar o valor de hum quebrado podemos fazer o seu denominador 2, 3, 4 &c. vezes menor, com tanto que façamos igualmente o numerador 2, 3, 4 &c. vezes menor.

Donde em geral se póde dizer: *Que hum quebrado naõ muda de valor todas as vezes que ambos os seus termos se dividem por hum mesmo numero.*

Para se ver distintamente a verdade destas duas pro-

propoſições, baſta reflectir ſobres as noções que temos dado do numerador, e denominador.

Pelo que devemos notar, que multiplicar ou dividir os termos de hum quebrado por hum meſmo numero, he couſa muito diverſa de multiplicar ou dividir o meſmo quebrado; porque as ditas operações ſe fazem ſem elle mudar de valor, como temos declarado.

Os dous principios, que acabamos de expôr, ſervem de baſe ás duas Reducções ſeguintes, que ſaõ de grande uſo na pratica dos quebrados.

Reducçaõ dos Quebrados ao meſmo denominador.

90 1.° PAra reduzir duas fracções ao meſmo denominador, multiplicar-ſe-haõ os dous termos da primeira pelo denominador da ſegunda, e os dous termos deſta pelo denominador daquella.

Supponhamos, por exemplo, que temos para reduzir ao meſmo denominador os dous quebrados $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira fracçaõ 2 e 3 pelo denominador da ſegunda 4, e teremos $\frac{8}{12}$ que (n. 88) he do meſmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da ſegunda 3 e 4 pelo denominador da primeira 3, e reſultará $\frac{9}{12}$ do meſmo valor que $\frac{3}{4}$. E aſſim as fracções $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ ſeraõ mudadas

em

em $\frac{8}{12}$, e $\frac{9}{12}$ que tem refpectivamente o mefmo valor, e fe achaõ reduzidas ao mefmo denominador.

He facil de ver, que por efte methodo teraõ fempre as novas fracções o mefmo denominador, porque em cada huma das operações fe fórma efte da multiplicaçaõ dos denominadores primitivos.

91 2.° Sendo mais de duas as fracções, reduzir-fe-haõ ao mefmo denominador, multiplicando os dous termos de cada huma pelo producto dos denominadores de todas as outras.

Tendo v. gr. para reduzir ao mefmo denominador eftas quatro fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$.

Primeiramente multiplicaremos os dous termos da primeira 2 e 3 pelo producto dos denominadores das outras 4, 5, e 7; producto que acharemos multiplicando primeiro 4 por 5, e o feu producto 20 por 7, que dá 140. Affim multiplicando 2 e 3 por 140, teremos os productos 280, e 420, dos quais refultará a fracçaõ $\frac{280}{420}$, que (n. 88) he do mefmo valor que $\frac{2}{3}$. Depois multiplicaremos os dous termos da fegunda 3 e 4 pelo producto dos denominadores das outras 3, 5, e 7, ifto he, por 105, e teremos a fracçaõ $\frac{315}{420}$ igual a $\frac{3}{4}$. Paffando á terceira multiplicaremos os feus termos 4 e 5 por 84, producto dos tres dominadores das outras 3, 4, e 7, e teremos a fracçaõ $\frac{336}{420}$ em lugar de $\frac{4}{5}$. E na quarta em fim multi-

pli-

plicaremos ambos os ſeus termos 5 e 7 por 60, que he o producto dos denominadores 3, 4, 5 das tres primeiras, e teremos $\frac{300}{420}$ em lugar de $\frac{5}{7}$.

Deſte modo temos convertido as quatro fracções $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, e $\frac{5}{7}$ neſtas quatro $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, e $\frac{300}{420}$, menos ſimples na verdade, mas do meſmo valor que ellas, e pela razaõ de ſerem reduzidas ao meſmo denominador, mais ſuſceptiveis das operações da Addiçaõ, e Subtracçaõ, como adiante moſtraremos.

He manifeſto pela meſma operaçaõ da reducçaõ, que as fracções que reſultaõ ſaõ reſpectivamente iguais ás fracções dadas, porque em cada huma deſtas ſe multiplicaõ ambos os termos por hum meſmo numero (n. 88). E como o denominador de cada huma das novas fracções he formado do producto de todos os denominadores primitivos, naõ pódem deixar de ficarem todas com o meſmo commum denominador.

Nada até § 1-5 95.

55 Como pelo methodo antecedente ſe reduzem ſim os quebrados ao meſmo commum denominador, mas nem ſempre ao mais ſimples que elles pódem ter, pela qual razaõ ſeria neceſſaria outra reducçaõ, e eſſa muito trabalhoſa, para os trazer á maior ſimplicidade, que permitte a condiçaõ de ficarem com a meſma denominaçaõ; ſerá muito conveniente procurar, que logo ſe reduzaõ ao mais pequeno denominador commum, que he poſſivel. Iſto ſe conſeguirá, praticando da maneira ſeguinte.

Se os denominadores dos quebrados que ſe haõ haó de reduzir á meſma denominaçaó, cada hum dos quais ſe ſuppõe abbreviado aos ſeus menores termos, naó tiverem diviſor commum, a reducçaó ſe praticará ſimplesmente da maneira aſſima declarada; e o denominador commum, que ſe achar, ſerá o menor que os ditos quebrados podem ter.

Porem ſe os denominadoras tiverem diviſor commum, dividir-ſe-haó todos por elle, ou pelo maior delles quando forem muitos; e os quebrados ſe converteráó em outros tantos, que ſeraó de differente valor, mas depois ſe reſtituiráó ao meſmo. Eſtes ſe reduziráó á meſma denominaçaó, conforme a regra aſſima dada; e o denominador commum delles ſe multiplicará pelo meſmo diviſor, pelo qual foraó divididos os denominadores primitivos. Deſte modo ſe tornaráó a fazer os quebrados reduzidos iguais aos quebrados da queſtaó, e ficaráó álem diſſo com o menor denominador commum que he poſſivel.

Quando ſómente alguns dos denominadores tiverem diviſor commum, por elle ſe dividiráó os ditos denominadores, e ſe multiplicaráó tambem os numeradores dos outros quebrados, cujos denominadores por elle ſe naó pódem dividir, e aſſim ſe formaráó os novos quebrados ſubſidiarios, que ſe haó de reduzir ao meſmo denominador, o qual ſe multiplicará pelo dito diviſor, para ſe reſtituirem ao valor dos quebrados propoſtos. Do meſmo modo, quando todos os denominadores primitivos tem diviſor commum, e feita a diviſaó reſultaó quebrados, nos quais alguns denominadores ainda tem diviſor entre ſi, ſobre elles ſe praticará o meſmo que no caſo antecedente, e

aſſim

aſſim por diante. E no fim o denominador commum dos quebrados reduzidos ſe multiplicará pelo producto de todos os diviſores, que ſucceſſivamente ſe empregáraõ. Os exemplos ſeguintes moſtraráõ claramente a praxe deſtas regras.

Exemplo I. Querendo reduzir á meſma denominaçaõ os dous quebrados $\frac{5}{18}$, $\frac{7}{27}$; como os denominadores 18 e 27 tem o maior diviſor commum 9, parti-los-hemos ambos por 9, e reſultaráõ os dous quebrados $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{3}$; os quais ſendo reduzidos ao meſmo denominador daráõ $\frac{15}{6}$, $\frac{14}{6}$; e multiplicando o denominador commum delles 6 pelo diviſor 9, ſe mudaráõ em $\frac{15}{54}$, $\frac{14}{54}$; quebrados iguais aos da queſtaõ, e os mais ſimples que ſaõ poſſiveis. Se a reducçaõ ſe fizeſſe ao modo ordinario, em lugar delles achariamos $\frac{135}{486}$, $\frac{126}{486}$.

Exemplo II. Havendo de reduzir ao meſmo denominador os quebrados $\frac{1}{26}$, $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{39}$; como os denominadores 26, 13, 39, tem o diviſor commum 13, por elle os dividiremos todos, e reſultaráõ os quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{4}{3}$, ſobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita eſta, acharemos que ſe reduzem a $\frac{3}{6}$, $\frac{12}{6}$, $\frac{8}{6}$; e multiplicando o denominador commum 6 pelo diviſor 13, ficaráõ os quebrados propoſtos reduzidos $\frac{3}{78}$, $\frac{12}{78}$, $\frac{8}{78}$,

com

com o menor denominador commum que he poſſivel. Se praticaſſemos a regra ordinaria, achariamos $\frac{507}{13182}$, $\frac{2028}{13182}$, $\frac{1352}{13182}$.

Exemplo III. Se tivermos de reduzir á meſma denominaçaõ os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{1}{30}$; como os tres denominadores 7, 15, 30, naõ tem diviſor commum, mas taõ ſómente os dous ultimos, eſtes ſe dividiráõ pelo ſeu maior diviſor 15, e pelo meſmo ſe multiplicará o numerador 2 do primeiro quebrado, cujo denominador naõ podemos dividir. Aſſim reſultaráõ outros tres quebrados $\frac{30}{7}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{1}{2}$, ſobre os quais executaremos a reducçaõ. Feita a qual, acharemos que ſe reduzem a $\frac{60}{14}$, $\frac{56}{14}$, $\frac{7}{14}$; e multiplicando o denominador 14 pelo diviſor 15, ficaráõ os quebrados da queſtaõ reduzidos a $\frac{60}{210}$, $\frac{56}{210}$, $\frac{7}{210}$. Se obraſſemos do modo ordinario achariamos $\frac{900}{3150}$, $\frac{840}{3150}$, $\frac{105}{3150}$.

Exemplo IV. Pede-ſe, que reduzamos ao meſmo denominador os quebrados $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{55}$, $\frac{5}{77}$, $\frac{1}{154}$. Primeiramente, como todos os denominadores ſaõ diviſiveis por 11, feita a diviſaõ mudaremos os quebrados em $\frac{3}{1}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{1}{14}$. Depois, como neſtes ultimos os denominadores 7, e 14, ainda tem o diviſor commum 7, por elle os dividiremos,

mos, e pelo mesmo multiplicaremos os numeradores 3, e 7, cujos denominadores se naõ poderaõ dividir; e assim resultaráõ novamente os quebrados $\frac{21}{1}$, $\frac{49}{5}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{2}$, sobre os quais praticaremos a reducçaõ. Feita a operaçaõ, acharemos que se reduzem a $\frac{210}{10}$, $\frac{98}{10}$, $\frac{50}{10}$, $\frac{5}{10}$; e multiplicando o denominador commum 10 por 77, que he o producto dos divisores 7, e 11, teremos os quebrados da questaõ reduzidos respectivamente a $\frac{210}{770}$, $\frac{98}{770}$, $\frac{50}{770}$, $\frac{5}{770}$, da fórma mais simples que he possivel. Se neste caso usassemos da regra ordinaria achariamos $\frac{1956570}{7174090}$, $\frac{913066}{7174090}$, $\frac{465850}{7174090}$, $\frac{46585}{7174090}$, quebrados muito compostos, que careceriaõ de huma operaçaõ muito trabalhosa, para se reduzirem á simplicidade da primeira fórma, sendo para isso necessario procurar primeiro o maior divisor commum entre o denominador e os quatro numeradores, como abaixo se mostrará. ¶¶

Reducçaõ dos Quebrados á expressaõ mais simples que he possivel.

92 HUma fracçaõ he tanto mais simples, quanto os seus termos saõ menores. Muitas vezes he possivel reduzir huma fracçaõ dada a menores termos; e isto succede todas as vezes que o numerador, e denominador se podem dividir ambos por

por hum meſmo numero. Como eſta operaçaõ naõ lhe altera o valor (n. 89), he huma ſimplificaçaõ que ſe naõ deve omittir, pois naõ ſómente contribue para a elegancia da expreſſaõ, mas tambem para ſe formar melhor conceito do valor. Porque ſem embargo de que v. gr. a fracçaõ $\frac{27}{63}$ tem o meſmo valor que $\frac{3}{7}$, por eſta ſegunda comtudo ſe fórma huma idea mais clara da quantidade que por ambas ellas ſe repreſenta, naõ ſe diſtrahindo a attençaõ com taõ grande numero de partes, como na primeira.

Para ſe fazer pois a reſoluçaõ preſente, ou para *abbreviar quebrados*, eis-aqui o methodo que ſe ha-de ſeguir.

93 Primeiramente dividir-ſe-haõ ambos os termos por 2, e eſta operaçaõ ſe continuará em quanto ſe puder fazer ſem reſto. Depois ſe paſſará a dividir por 3, e dahi por 5, 7, 11, 13, 17 &c., iſto he, por todos os numeros *primos*, que ſaõ aquelles que naõ tem diviſor exacto, ſenaõ a ſi meſmos, ou a unidade.

A unica difficuldade, que ſe offerece neſte methodo, he ſaber quando ſe póde dividir ſem reſto por 2, 3, 5, &c. para naõ fazer debalde a diviſaõ. Para iſſo ajudaráõ muito os principios ſeguintes.

94 Todo o numero, cuja ultima letra á direita ſignifica numero par, he diviſivel por 2.

Todo o numero, cujos algariſmos ſomados fizerem 3, ou hum numero multiplo de 3, he diviſivel por 3. Aſſim v. gr. o numero 54231 póde dividir-ſe exactamente por 3, porque a ſomma

dos

dos ſeus algariſmos 5, 4, 2, 3, 1, faz 15, que he multiplo de 3, pois contem 5 vezes 3 exactamente.

Do meſmo modo, ſe a ſoma dos algariſmos fizer 9, ou hum multiplo de 9, ſerá o numero diviſivel por 9.

Todo o numero que acabar em 0, ou em 5, ſerá diviſivel exactamente por 5.

¶¶ E todo o numero, cujos algariſmos das caſas impares da direita para a eſquerda fizerem huma ſoma igual a dos algariſmos das caſas pares; ou tambem deſigual, com tanto que a differença das duas ſomas ſeja 11, ou hum multiplo de 11 ſerá diviſivel por 11. Aſſim ſerá diviſivel por 11 o numero 89452, porque as letras das caſas impares 2, 4, 8, fazem a meſma ſoma que as letras das caſas pares 5 e 9. Do meſmo modo o numero 8452719 ſerá diviſivel por 11, porque as letras das caſas pares 9, 7, 5, 8, fazem a ſoma 29, e as das pares 1, 2, 4, a ſoma 7; ſendo a differença das duas ſomas 22, que he multiplo de 11. ¶¶

Em quanto ao numero 7, e aos mais *primos*, ainda que ſeria facil achar regras ſemelhantes, como o exame que ellas ſe ſuppõe ſeria mais trabalhoſo que a meſma diviſaõ, milhor he que eſta ſe experimente.

Supponhamos v. gr. que queremos abbreviar o quebrado $\frac{2016}{5796}$. Primeiramente dividiremos ambos os termos por 2, porque ambos elles acabaõ em algariſmo par, e teremos $\frac{1008}{2898}$. Depois tornaremos a dividir por 2, e reſultará $\frac{504}{1449}$. E porque

que naõ póde mais fazer-ſe a diviſaõ por 2, e pelo que fica dito ſe ve que póde fazer-ſe por 3, dividiremos por 3, e teremos $\frac{168}{483}$. Tornando a dividir por 3, reſultará $\frac{56}{161}$; e porque naõ póde mais caber a diviſaõ por 3, experimentaremos por 7, e como ſuccede ſem reſto, ficará o quebrado propoſto finalmente reduzido a $\frac{8}{23}$.

A razaõ porque neſta operaçaõ naõ experimentamos a diviſaõ, ſenaõ pelos numeros *primos* 2, 3, 5, 7, &c., he porque depois de exhaurida v. gr. a diviſaõ por 2, he eſcuſado tentar faze-la por 4, por quanto ſe eſta pudeſſe fazer-ſe ſem reſto, muito milhor ſe poderia fazer aquella.

95 De todos os meios, que ſe pódem applicar para abbreviar hum quebrado, o mais directo he dividir logo ambos os ſeus termos pelo maior diviſor commum, que elles pódem ter. Eis-aqui a regra para o achar.

Divida-ſe o termo maior pelo menor. Se eſta diviſaõ ſe fizer ſem reſto, o termo menor ſerá o maior diviſor commum de ambos elles. Ficando porem algum reſto, por elle ſe dividirá o termo menor, que ſervio de diviſor na operaçaõ antecedente. Entaõ, ſe naõ houver reſto, o reſto precedente que ſervio de diviſor ſerá o maior diviſor que ſe buſca; e ſe houver reſto, por elle ſe dividirá o que foi diviſor na operaçaõ antecedente; e aſſim por diante, até chegar a huma diviſaõ exacta; e o diviſor della ſerá o que ſe buſca. Se o diviſor da ultima operaçaõ for a unidade, he ſinal de que a fracçaõ naõ póde reduzir-ſe a menores termos.

Sup-

Supponhamos v. gr. que temos para abbreviar o quebrado $\frac{3760}{9024}$. Primeiramente buſcaremos o maior diviſor commum de ambos os termos, dividindo 9024 por 3760, donde virá o quociente 2, e o reſto 1504. Por eſte reſto dividiremos 3760, e teremos o quociente 2, e o reſto 752; pelo qual dividiremos o reſto precedente 1504. E como eſta diviſaõ ſe faz exactamente, ſerá o diviſor della 752 o maior diviſor commum dos termos do quebrado propoſto; o qual por conſeguinte, feita a diviſaõ, ſe reduzirá a $\frac{5}{12}$.

E com effeito, pela operaçaõ achamos que 752 he diviſor exacto de 1504; logo tambem o he de 3760, que ſe compõe de duas vezes 1504, e 1 vez 752; e por conſeguinte o deve ſer igualmente de 9024, que ſe compõe de 2 vezes 3760, e 1 vez 1504.

Além diſto he facil de ver, que 752 he o maior diviſor commum, que podem ter os numeros 9024 e 3760. Porque naõ póde haver diviſor commum entre 9024 e 3760, que o naõ ſeja ao meſmo tempo entre 3760 e 1504; nem tambem entre eſtes dous, ſem que o ſeja igualmente entre 1504 e 752; porém he evidente, que entre eſtes dous ultimos numeros naõ póde haver maior diviſor commum do que 752: Logo &c.

§§ Se forem mais que dous os numeros entre os quais devemos achar o maior diviſor commum, uſaremos do methodo ſeguinte.

Buſque-ſe o maior diviſor commum entre o primeiro e o ſegundo, entre o ſegundo e o terceiro, entre eſte e o quarto &c., de qualquer ſorte que

que os numeros eſtiverem diſpoſtos. Pratique-ſe o meſmo ſobre os diviſores achados, e aſſim por diante, até chegar a hum ſó diviſor, o qual ſerá finalmente o maior diviſor commum dos numeros propoſtos. Se em alguma parte da operaçaõ ſahirem dous ou mais diviſores iguais, hum delles ſómente ſe tomará para a operaçaõ ſeguinte; e ſe todos alguma vez ſahirem iguais, ſerá eſcuſado continuar a operaçaõ, porque ella virá a acabar em hum diviſor igual a elles, ſe ſe levar ao fim conforme a regra, e por conſeguinte qualquer delles ſerá o maior diviſor que intentamos achar. Encontrando-ſe na operaçaõ dous numeros, quaisquer que ſejaõ, os quais naõ tenhaõ diviſor commum ſenaõ a unidade, tambem os numeros propoſtos o naõ teraõ.

Exemplo. Pede-ſe o diviſor maior commum dos numeros . . . 7174090 . . . 1956570 . . . 913066 . . . 465850 . . . 46585. Primeiramente buſcaremos o maior diviſor commum entre o primeiro e o ſegundo, entre o ſegundo e o terceiro &c., e acharemos os numeros . . . 652190 . . . 130438 . . . 18634 . . . 46585; depois ſobre eſtes faremos a meſma operaçaõ, e ſahiráõ os diviſores . . . 130438 . . . 18634 . . . 9317; ſobre eſtes praticaremos do meſmo modo, e ſahiraõ os diviſores . . . 18634 . . . 9317; e finalmente achando o maior diviſor commum deſtes dous ultimos, que he 9317, eſte ſerá o maior diviſor commum dos cinco numeros propoſtos. §§

Outro modo de considerar os quebrados, e consequencias que delles resultaõ.

96 A Idêa, que até agora temos dado dos quebrados, he que o denominador mostra de quantas partes se suppõe composta a unidade; e o numerador, de quantas dessas partes consta a quantidade, que pelo quebrado se representa.

Agora mostraremos, como se podem tomar em outro ponto de vista. Póde o numerador considerar-se, como representando huma certa quantidade, que se ha-de repartir em tantas partes quantas saõ as unidades do denominador, para se tomar huma dellas.

Assim v. gr. no quebrado $\frac{4}{5}$ póde considerar-se o numerador 4, como representando *quatro* cousas, v. gr. *libras*, que se haõ de repartir em *cinco* partes, para se significar huma dellas. Porque he evidente, que tanto faz dividir 4 *libras* em 5 partes para tomar huma dellas; como dividir a *libra* em 5 partes para tomar 4.

97 Pelo que póde considerar-se o numerador de hum quebrado como hum *dividendo*, e o denominador como hum *divisor*. E por isto se vê o que querem dizer os restos da divisaõ reduzidos ao modo fraccionario, que assima lhes demos (n. 60).

98 Donde se segue, que hum numero inteiro póde sempre reduzir-se a huma expressaõ fraccionaria, fazendo delle o numerador, e dando-lhe a unidade por denominador. Assim 3 e $\frac{3}{1}$, 5 e $\frac{5}{1}$ representaõ huma mesma cousa.

99 Segue-ſe tambem, que para converter em *dizima* qualquer quebrado, naõ he neceſſario mais do que conſiderar o numerador como hum reſto de diviſaõ, em que o denominador tenha ſervido de diviſor, e obrar como aſſima fica declarado (pag. 62), tendo advertencia de pôr huma cifra primeiro na caſa das unidades. Deſte modo ſe achará, que $\frac{3}{5}$ vale 0, 6, que $\frac{5}{9}$ vale 0, 5555 &c., que $\frac{1}{25}$ vale 0, 04, e aſſim dos mais.

Deſta maneira ſe pódem tambem reduzir á *dizima* os numeros *complexos*.

Se, por exemplo, quizermos reduzir $3^T\ 5^P\ 8^p\ 7^l$ a partes decimais da *toeſa*, de modo que ſe naõ deſpreze ametade de huma *linha*, obſervaremos que a *toeſa* contém 864 *linhas*, e por conſeguinte 1728 *meias-linhas*. Pelo que, para naõ deſprezar ametade de huma *linha*, ſerá neceſſario que a *dizima* paſſe da caſa das milleſimas, ou que chegue até ás decimas-milleſimas.

Iſto ſuppoſto, converteremos $5^P\ 8^p\ 7^l$ tudo em *linhas* (n. 57), e acharemos 823^l, ou $\frac{823}{864}$ de huma *toeſa*. E reduzindo eſte quebrado á *dizima*, como aſſima diſſemos, reſultará 0,9525, e por conſeguinte o numero propoſto ficará reduzido a 3^T, 9525.

§ As fracções particulares da *dizima* pódem reduzir-ſe ás ordinarias de dous modos diverſos.

Porque em primeiro lugar, ſe as quizermos conſervar na forma decimal, reduzir-ſe-haõ á maneira dos numeros inteiros, cuja natureza imitaõ (n. 86, 98). Se v. gr. quizermos pôr em figura de quebrado eſta expreſſaõ 0,23, baſtará eſcrever $\frac{0,23}{1}$; e ſe a quizermos reduzir ao denominador 7, praticando como nos inteiros, teremos $\frac{1,61}{7}$ (n. 86).

Querendo porém tirar-lhes a fórma decimal, as letras da *dizima* ſerviráõ de numerador, e para denominador ſe tomará a unidade com tantas cifras adiante, quantas eraõ as caſas da dizima. Aſſim 0,23 he o meſmo que $\frac{23}{100}$; 0,0071 o meſmo que $\frac{71}{10000}$ &c.

Póde alem diſto reduzir-ſe facilmente a hum quebrado ordinario a meſma *dizima* continuada ao infinito, com tanto que depois de certos intervallos tornem a vir as meſmas letras, e pela meſma ordem; *dizima*, que chamamos *periodica*. Deſte modo he a expreſſaõ 0,321321321 &c., na qual ſe ſuppõe o periodo dos tres algariſmos 321 repetido infinitamente.

E com effeito, ſe os periodos começarem logo deſde a virgula, tomar-ſe-ha hum delles para numerador, e o denominador ſerá hum numero compoſto de tantos 9, quantas forem as caſas de cada periodo. Aſſim acharemos que 0,321321321 &c. vale exactamente $\frac{321}{999}$; que 0,013201320132 &c. vale $\frac{132}{9999}$; e que 0,777777 &c. fracçaõ igualmente periodica, cujos periodos conſtaõ de huma ſó letra, ſe reduz a $\frac{7}{9}$.

Po-

Porém, ſe os periodos naõ começarem logo deſde a virgula, ſerá ſempre o denominador compoſto de tantos 9 como ſaõ as caſas de cada periodo, mas eſſes ſeguidos de tantas cifras quantas ſaõ as caſas decimais antes do primeiro periodo. E para acharmos o numerador, multiplicaremos as letras antecedentes ao primeiro periodo pelo denominador, no qual naõ attenderemos ás cifras que ſe lhe ajuntáraõ; e ao producto ajuntaremos hum dos periodos. Para reduzirmos v. gr. a hum quebrado ordinario eſta expreſſaõ 1,357121212 &c., como cada periodo conſta de duas letras, e antes do primeiro ſe achaõ tres caſas da *dizima*, ſerá o denominador 99000. E multiplicando os algariſmos 1357, que precedem ao primeiro periodo, pelo denominador 99, cortadas as cifras; teremos o producto 134343, ao qual ajuntando o periodo 12, ſerá o numerador 134355; e por conſeguinte o quebrado que ſe buſca $\frac{134355}{99000}$. Do meſmo modo acharemos, que 0,00473473473 &c. ſe reduz a $\frac{463}{99900}$; que 0,633333 &c. vale $\frac{57}{90}$; aſſim dos mais. ʃʃ

Das Operações Arithmeticas ſobre os Quebrados.

100 O Calculo dos quebrados ſe pratica por meio das meſmas quatro operações, que já temos moſtrado nos numeros inteiros. As duas primeiras de *Somar* e *Diminuir* requerem pela maior parte huma operaçaõ preparatoria, as outras duas naõ carecem de preparaçaõ alguma. *De*

De Somar Quebrados.

101 SE os quebrados tiverem a meſma denominaçaõ, para ſaber a ſua ſoma naõ he neceſſario mais do que ſomar os numeradores, e dar á ſoma delles o meſmo denominador.

Por exemplo: Havendo de ſomar os quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, como todos ſaõ da meſma denominaçaõ, ajuntaremos os numeradores 2, 3, 5, e a ſoma 10 ſerá o numerador, que com o meſmo denominador 7 dará a ſoma total que ſe buſca $\frac{10}{7}$ a qual ſe reduz a $1\frac{3}{7}$ (n. 85).

102 Se os quebrados propoſtos forem de differente denominaçaõ, primeiramente ſe reduziráõ ao meſmo denominador como aſſima moſtrámos (n. 90, 91); e depois ſe ſomaráõ como no primeiro caſo.

Tendo de ſomar, por exemplo, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, transformaremos primeiro os ditos quebrados em $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$; depois buſcaremos a ſua ſoma, que he $\frac{133}{60}$, ou $2\frac{13}{60}$ (n. 85).

De Diminuir Quebrados.

103 SEndo ambos os quebrados da meſma denominaçaõ, diminuir-ſe-ha o numerador de hum do numerador do outro, e ao reſto ſe dará o meſmo denominador. Aſſim

Aſſim, para diminuirmos $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, tiraremos o numerador 5 do numerador 8, e o reſto 3 daremos o meſmo denominador 9; donde ſerá o reſto que buſcamos $\frac{3}{9}$, que ſe reduz a $\frac{1}{3}$ (n. 93).

104 Se de 9 $\frac{5}{8}$ quizermos tirar 4 $\frac{7}{8}$, como $\frac{7}{8}$ naõ pódem diminuir-ſe $\frac{5}{8}$, tomaremos huma unidade do inteiro 9, a qual reduzida a oitavos, e ſomada com $\frac{5}{8}$ faz $\frac{13}{8}$ (n. 86). Entaõ, tirando $\frac{7}{8}$ de $\frac{13}{8}$, ficaráõ $\frac{6}{8}$; e tirando 4 de 8 (attendendo-ſe á unidade já tirada do numero 9) ficaráõ 4. E aſſim ſerá o reſto total 4 $\frac{6}{8}$, ou 4 $\frac{3}{4}$ (n. 93).

105 Sendo os quebrados de differente denominaçaõ, primeiro ſe reduziráõ ao meſmo denominador (n. 90); e feita eſta preparaçaõ, ſe obrará como no primeiro caſo.

Aſſim, para diminuirmos $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, converteremos eſtes quebrados em $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$; e feita a diminuiçaõ, reſultará o reſto $\frac{1}{12}$.

De

De Multiplicar Quebrados.

106 A Multiplicaçaõ dos quebrados ſe executa por meio da regra ſeguinte : *Multipliquem-ſe os dous numeradores hum pelo outro , e da meſma ſorte os denominadores ; o producto dos primeiros ſerá o numerador , e o dos ſegundos o denominador do producto que ſe buſca.*

Querendo , por exemplo, multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, multiplicaremos o numerador 4 pelo numerador 2 , e acharemos 8 para numerador ; depois multiplicaremos os denominadores 5, e 3, e acharemos 15 para denominador do producto , o qual por conſeguinte ſerá $\frac{8}{15}$.

Para ſe entender a razaõ deſta regra , he neceſſario trazer á lembrança , que multiplicar dous numeros he tomar hum delles tantas vezes quantas ſaõ as unidades do outro. Em virtude deſta meſma difiniçaõ , multiplicar $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ vem a ſer o meſmo que tomar $\frac{2}{3}$ de huma vez o quebrado $\frac{4}{5}$, ou tomar duas vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$.
Multiplicando pois 5 por 3 , os *quintos* de $\frac{4}{5}$ ſe ſe mudaõ em 15 *avos* , iſto he , em partes *tres vezes* menores ; e multiplicando 4 por 2 , tomaõ-ſe *duas vezes* eſſas novas partes : logo toma-ſe duas ve-

vezes a terça parte de $\frac{4}{5}$; e por conſeguinte ſe multiplica effectivamente $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$.

107 Havendo de multiplicar-ſe quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro ſe reduzirá a quebrado, dando-lhe a unidade por denominador, e a operaçaõ entrará na regra geral aſſima dada.

Por exemplo: Se quizermos multiplicar 9 por $\frac{4}{7}$, reduziremos o inteiro 9 á fórma de quebrado $\frac{9}{1}$, e multiplicando $\frac{9}{1}$ por $\frac{4}{7}$ acharemos o producto $\frac{36}{7}$ o qual ſe reduz a $5\frac{1}{7}$ (n. 85).

Donde ſe vê, que para multiplicar quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, a operaçaõ ſe reduz a multiplicar o inteiro pelo numerador do quebrado.

108 Se forem *mixtos* os numeros, que ſe haõ de multiplicar, iſto he, ſe forem compoſtos de inteiro e quebrado, cada hum dos inteiros ſe reduzirá á denominaçaõ do ſeu quebrado, e ſe ſomará com elle (n. 86); e aſſim entraráõ na meſma regra aſſima dada (n. 106).

Por exemplo: Se tivermos de multiplicar $12\frac{3}{5}$ por $9\frac{3}{4}$, reduziremos primeiro o multiplicando a $\frac{63}{5}$, e o multiplicador a $\frac{39}{4}$; e depois multiplicaremos $\frac{63}{5}$ por $\frac{39}{4}$, e teremos o produ-

cto

cto $\frac{2457}{20}$, o qual ſe reduz a 122 $\frac{17}{30}$ (n. 85).

55 Na multiplicaçaõ dos quebrados póde logo attender-ſe a que o producto ſe ache já reduzido aos termos mais ſimples.

Para iſſo he primeiramente neceſſario, que os meſmos quebrados, que ſe haõ de multiplicar, ſe reduzaõ aos menores termos. Depois, deverá advertir-ſe ſe os termos *heterogeneos*, iſto he, o numerador de hum quebrado com o denominador do outro, tem algum diviſor commum, e por elle ſe partiráõ, ou pelo maior delles, quando forem muitos. Os quebrados que deſte modo reſultarem, ſe multiplicaráõ hum pelo outro, e o producto ſerá o meſmo, que o dos quebrados propoſtos, abbreviado aos ſeus menores termos.

Querendo v. gr. multiplicar $\frac{3}{5}$ por $\frac{5}{7}$, reflectiremos que o denominador do primeiro quebrado, e o numerador do ſegundo podem ambos partir-ſe por 5, e ficaráõ reduzidos a 1; e aſſim conheceremos logo, ſem fazer operaçaõ alguma, que o producto he $\frac{3}{7}$.

Outro exemplo. Se houvermos de multiplicar $\frac{18}{13}$ por $\frac{26}{63}$, obſervaremos, que o numerador do primeiro quebrado com o denominador do ſegundo tem ambos o diviſor maior commum 9, ſendo pelo qual divididos ſe reduzem a 2, e 7; e que o denominador de primeiro com o numerador do ſegundo tambem tem diviſor commum 13, pelo que ſe reduzem a 1, e 2. Deſte modo ſe tornaráõ

os

os quebrados propoſtos em $\frac{2}{1}$, $\frac{2}{7}$, cujo producto $\frac{4}{7}$ he o que ſe buſca, reduzido á fórma mais ſimples, o qual pela operaçaõ ordinaria ſahiria neſtes termos $\frac{468}{819}$, que dariaõ mais trabalho para ſe reduzirem á ſimplicidade daquelles. ʃʃ

De Repartir Quebrados.

109 PAra ſe dividir hum quebrado por outro a regra he deſta maneira: *Mudem-ſe os termos do diviſor, paſſando o numerador para denominador, e o denominador para numerador; multiplique-ſe o dividendo pelo diviſor aſſim preparado; e o producto ſerá o quociente que ſe buſca.*

Querendo v. gr. partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, primeiramente mudaremos os termos do diviſor $\frac{2}{3}$, o qual ficará $\frac{3}{2}$; depois multiplicaremos $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$ (n. 106), e producto $\frac{12}{10}$, ou I $\frac{1}{5}$ (n. 75, 93), ſerá o quociente que buſcamos.

Para ſe entender a razaõ deſta regra, deve obſervar-ſe que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$ he buſcar quantas vezes ſe contém $\frac{2}{3}$ em $\frac{4}{5}$. Iſto ſuppoſto, he facil de ver que 2 *terços* ſe devem conter

em

em $\frac{4}{5}$ tres vezes mais do que 2 unidades. He tambem evidente, que $\frac{4}{5}$ contem a unidade $\frac{4}{5}$ de huma vez, e que por conseguinte contem 2 unidades ametade de $\frac{4}{5}$ de huma vez. Logo deve o quebrado $\frac{4}{5}$ dividir-se primeiro por 2, e depois multiplicar-se por 3, ou tomar-se tres vezes a ametade de $\frac{4}{5}$, que vem a ser o mesmo que multiplicar por $\frac{3}{2}$, quebrado inverso do divisor $\frac{2}{3}$.

110 Se houver de partir-se quebrado por inteiro, ou inteiro por quebrado, o inteiro se reduzirá a quebrado, tomando a unidade por denominador, e a divisaõ se praticará conforme a mesma regra.

Tendo v. gr. de partir 12 por $\frac{5}{7}$, a operaçaõ se reduzirá a dividir $\frac{12}{1}$ por $\frac{5}{7}$, ou (n. 109) a multiplicar $\frac{12}{1}$ por $\frac{7}{5}$, e o quociente será $\frac{84}{5}$, ou 16 $\frac{4}{5}$. Do mesmo modo, se quizermos partir $\frac{3}{4}$ por 5, dividiremos o quebrado por $\frac{5}{1}$, ou multiplicaremos por $\frac{1}{5}$, e será o quociente $\frac{3}{20}$

Don-

Donde ſe vê, que para dividir hum quebrado por hum inteiro, a operaçaõ ſe reduz ſimpleſmente a multiplicar o inteiro pelo denominador do quebrado.

111 Quando os inteiros forem acompanhados de quebrados, cada hum ſe reduzirá á denominaçaõ do ſeu quebrado (n. 86), e a operaçaõ ſe fará como nos exemplos antecedentes.

Havendo v. gr. de partir $54\frac{3}{5}$ por $12\frac{2}{3}$, o dividendo ſe reduzirá a $\frac{273}{5}$, e o diviſor a $\frac{38}{3}$. Depois partir-ſe-há $\frac{273}{5}$ por $\frac{38}{3}$, ou (n. 109) multiplicar-ſe-há por $\frac{3}{38}$; e ſerá o quociente $\frac{819}{190}$, ou $4\frac{59}{190}$ (n. 85).

¶ Na diviſaõ dos quebrados, ſerá tambem conveniente ter cuidado de achar logo o quociente, abbreviado aos menores termos poſſiveis.

Iſto ſe conſeguirá: Primeiramente, reduzindo os meſmos quebrados propoſtos aos ſeus menores termos, ſe o naõ eſtiverem; e depois, dividindo os termos *homologos*, iſto he, ambos os numeradores, ou ambos os denominadores, pelo ſeu maior diviſor commum, quando o tiverem. Deſte modo reſultaráõ outros dous quebrados; que daráõ o meſmo quociente dos primeiros, e já reduzido aos termos mais ſimples.

Havendo v. gr. de partir $\frac{5}{7}$ por $\frac{5}{6}$, advertiremos logo que ambos os numeradores ſaõ di-

vi-

viſiveis por 5, e ſe reduzem a 1; e por tanto veremos, ſem fazer operaçaõ alguma, que o quociente he $\frac{6}{7}$.

Do meſmo modo, ſe houveſſemos de partir $\frac{3}{5}$ por $\frac{4}{5}$, como os denominadores ſe reduzem a 1, logo conheceriamos ſem calculo algum que o quociente he $\frac{3}{4}$.

Outro exemplo. Se nos pedirem o quociente de $\frac{22}{39}$ *avos* partidos por $\frac{11}{13}$, advertiremos que os numeradores ſe pódem ambos dividir por 11, e ſe reduzem a 2, e 1; e que os denominadores partidos por 13, ſe reduzem tambem a 3, e 1. Por conſeguinte teremos para repartir $\frac{2}{3}$ por $\frac{1}{1}$ e ſerá o quociente pedido $\frac{2}{3}$, o qual pela regra ordinaria ſe acharia em termos muito compoſtos $\frac{286}{429}$. ¶¶

Uſ.

Uso dos Quebrados.

112 PElo que assima dissemos (n. 96), he facil de ver, como se ha-de mostrar o valor de huma fracçaõ por meio das divisões estabelecidas da unidade da questaõ.

Pergunta-se v. gr. quanto valem $\frac{5}{7}$ de huma *libra*. Como $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem o mesmo que $\frac{1}{7}$ de 5 *libras* (n. 96), reduziremos 5 *libras* a *soldos* (n. 57), e teremos 100 *soldos*, dividindo estes por 7, sahiraõ no quociente 14*s*, e sobraráõ 2*s*. Reduzindo tambem estes a *dinheiros*, teremos 24^d, que repartidos por 7 daráõ $3^d\,\frac{3}{7}$. E deste modo diremos, que $\frac{5}{7}$ de huma *libra* valem 14 *soldos*, 3 *dinheiros*, e $\frac{3}{7}$ de hum *dinheiro*.

Se nos perguntassem quanto valem $\frac{5}{7}$ de 24 *libras*, he visivel que podiamos buscar primeiro o valor de $\frac{5}{7}$ de huma *libra* como acabamos de mostrar, e multiplica-lo depois por 24. Porem he mais expedito o multiplicar logo as 24 *libras* por $\frac{5}{7}$, e sahirá o producto $\frac{120}{7}$ de huma *libra* (n. 107), ou 17 *libras* e $\frac{1}{7}$ de huma *libra*. Este ultimo quebrado reduzido a *soldos* e *dinheros* dará

2*s*

$2^{f}\ 10^{d}\ \frac{2}{7}$; e por conseguinte o valor total de $\frac{5}{7}$ *de* 24 *libras* será $17^{lb}\ 2^{f}\ 10^{d}\ \frac{2}{7}$.

113 As fracções decimais, como naõ tem denominador, ainda saõ mais faceis de reduzir ás partes da unidade, estabelecidas pelo uso ordinario.

Querendo saber, por exemplo, quanto valem 0,532 de huma *toesa* em partes da divisaõ vulgar da mesma *toesa*: como esta consta de 6 *pés*, multiplicaremos 0,532 por 6, e o producto 3,192 mostrará 3 *pés*, e 0,192 de hum *pé*. Depois, como o *pé* contem 12 *pollegadas*, multiplicaremos 0,192 por 12, e o producto 2,304 dará 2 *pollegadas*, e 0,304 de huma *pollegada*. Finalmente, como a *pollegada* se compõe de 12 *linhas*, multiplicaremos 0,304 por 12, e o producto 3,648 mostrará 3 *linhas*, e 0,648 de huma *linha*. Peloque diremos, que o valor total de 0,532 de huma *toesa* he 3 *pés*, 2 *pollegadas*, 3 *linhas*, e 0,648 de huma *linha*; e assim se procederá em outros casos semelhantes.

114 A avaliaçaõ dos quebrados nos conduz naturalmente a fallar dos *quebrados de quebrados*. Por este nome entendemos huma serie de fracções separadas humas das outras pela particula *de*, como v. gr. $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, &c. Porque qualquer quebrado naõ sómente póde reportar-se á unidade, ou a hum numero inteiro, como $\frac{3}{4}$ *de huma libra*, $\frac{3}{4}$ *de vinte libras*, mas tambem a qualquer outro quebrado, cujo valor se póde conceber como hum todo, e dividir em

qual

qualquer numero de partes, para significar algumas dellas. Assim de $\frac{3}{4}$ podemos mostrar $\frac{2}{3}$; e depois concebendo dous terços de tres quartos como hum todo, podemos dividi-lo em *seis* partes, e dellas tomar *cinco*, donde resultaõ $\frac{5}{6}$ *de* $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$.

Estes quebrados successivamente relativos huns aos outros podem converter-se em hum só, que unicamente se reporte á unidade principal, multiplicando todos os numeradores huns pelos outros, e da mesma sorte os denominadores. Assim $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ vale o mesmo que $\frac{6}{12}$, ou $\frac{1}{2}$; e $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ o mesmo que $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

E com effeito he facil de ver que tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ nada mais he que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, ou tomar *duas* vezes a *terça* parte do quebrado $\frac{3}{4}$. Do mesmo modo, tomar $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ vem a ser o mesmo que tomar $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$, porque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ fazem $\frac{6}{12}$; e pelo que témos dito $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$ se reduzem a $\frac{30}{72}$, ou $\frac{5}{12}$.

Se nos pedirem o valor $\frac{3}{4}$ de $5\ \frac{3}{8}$, reduziremos o inteiro 5 á denominaçaõ do ſeu quebrado (n. 86), e teremos $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$, que ſe reduzem a $\frac{129}{32}$, ou $4\frac{1}{32}$.

115 Quando huma fracçaõ involve termos algum tanto conſideraveis, e naõ póde abbreviar-ſe pelo methodo aſſima dado (n. 95), ſe a natureza da queſtaõ permittir que nos contentemos com hum valor approximado, mas reduzido a termos mais ſimples, poderemos uſar do methodo ſeguinte, pelo quál acharemos alternadamente valores ora maiores, ora menores, mas cada vez mais convergentes para o verdadeiro, até cahirmos finalmente na meſma fracçaõ propoſta.

Tomemos por exemplo a fracçaõ $\frac{100000000}{314159265}$, a qual, como ſe moſtrará na Geometria, repreſenta proximamente a *razaõ* entre o *diametro* e a *circunferencia* do circulo, e ſupponhamos que a queremos transformar em outras fracções menos exactas na verdade, mas reduzidas a termos mais ſimples.

Primeiramente dividiremos ambos os termos da dita fracçaõ pelo numerador, e a reduziremos a eſta fórma $\cfrac{1}{3\frac{14159265}{100000000}}$; a qual, deſprezando a fracçaõ que acompanha o denominador inteiro 3, ſe reduzirá a $\frac{1}{3}$, que he o primeiro valor appro-

xixamado da fracçaõ dada, o mais exacto que he poſſivel em termos taõ ſimples, mas maior do que o verdadeiro.

Para acharmos outro valor mais chegado ao verdadeiro, na fracçaõ junta ao denominador inteiro 3, partiremos ambos os termos pelo numerador, e a reduziremos a eſta fórma $\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{7\,\cfrac{885145}{14159265}}}$;

a qual, deſprezando a fracçaõ junta ao denominador inteiro 7, ſe reduz a $\cfrac{1}{3\,\frac{1}{7}}$, ou (n. 86) a $\cfrac{1}{\frac{22}{7}}$, ou

(n. 109) a $\frac{7}{22}$; que he outro valor mais exacto, que o precedente $\frac{1}{3}$, mas algum tanto menor que o verdadeiro.

Se quizermos maior exactidaõ, dividiremos pelo numerador ambos os termos da fracçaõ junta ao denominador 7, e a fracçaõ primitiva ficará reduzida a eſta fórma $\cfrac{1}{3\,\cfrac{1}{7\,\cfrac{1}{15\,\cfrac{882090}{885145}}}}$; a qual, deſprezando a fracçaõ que acompanha o denominador 15, ſe reduz a $\frac{106}{333}$, valor mais exacto que os precedentes, mas algum tanto maior que o verdadeiro. Porem ſe aqui houvermos de ſuſpender a operaçaõ, naõ deſprezaremos a fracçaõ junta ao denominador 15, mas advertindo que ella vale quaſi huma unidade, ajuntaremos 1 ao dito denominador, e teremos $\cfrac{1}{3\cfrac{1}{7\frac{1}{16}}}$; expreſſaõ, que ſe reduz a $\frac{113}{355}$. Eſte he hum valor da fracçaõ propoſta muito mais exacto que os precedentes, mas ainda alguma couſa menor que o verdadeiro, pois para igualar a fracçaõ propoſta lhe falta $\frac{611}{22305307815}$, ou proximamente $\frac{1}{36506232}$.

55 Os quebrados reduzidos á fórma, que ſe tem dado á fracçaõ propoſta pela diviſaõ ſucceſſiva das fracções juntas aos denominadores inteiros, chamaõ-ſe *quebrados continuos.*

E deve notar-ſe, que a diviſaõ que fazemos neſta operaçaõ he a meſma que praticamos, quando buſcamos o maior diviſor commum dos termos de hum quebrado, para o abbreviarmos exactamente, ſendo poſſivel. Por iſſo achando finalmente que elles naõ tem diviſor commum ſenaõ a unidade, podemos ſervir-nos logo dos quocientes

acha-

achados, diſpondo-os em fracçaõ continua com a unidade por numerador; e nella deſprezaremos os termos que permittir a exactidaõ que buſcamos.

Por exemplo; Querendo reduzir o quebrado $\frac{964}{5141}$, e buſcando o diviſor maior commum dos ſeus termos, acharemos que naõ tem outro que naõ ſeja a unidade. Porem como pela operaçaõ achamos os quocientes 5, 3, e 321, delles faremos a expreſſaõ $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{321}}}$, que he exactamente igual ao quebrado propoſto; e deſprezando a fracçaõ junta ao denominador 3, que com tanto mais razaõ ſe deſpreza quanto he mais pequena, ficará $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3}}$, que ſe reduz a $\frac{3}{16}$; quebrado muito abbreviado, ao qual naõ falta mais do que $\frac{1}{82250}$ para igualar ao quebrado propoſto.

Dos numeros complexos.

116 AInda que as regras, que até agora temos dado, ſe pódem igualmente applicar aos numeros *complexos*, ou *heterogeneos*, naõ deixará com tudo

tudo de ſer conveniente que delles tratemos em particular, porque muitas vezes a diviſaõ da unidade nelles eſtabelecida ſerve de facilitar as operações.

Há muitas eſpecies deſtes numeros, em que ſe uſaõ differentes diviſões, das quais principalmente dependem as regras do calculo. Mas naõ he neceſſario, que as pratiquemos todas aqui, porque os exemplos de humas ſe applicaõ a todas as mais, em ſe ſabendo a natureza das ſuas diviſões. Eis-aqui as mais uſadas entre nós.

§§ O dinheiro de França pela maior parte ſe conta por *libras*. A *libra* conſta de 20 *ſoldos*, e o *ſoldo* de 12 *dinheiros*. Eſtas differentes eſpecies ſe diſtinguem com as letras iniciais dos ſeus nomes. Aſſim $32^{lb}\ 15^{ſ}\ 7^{d}$ quer dizer 32 *libras*, 15 *ſoldos*, e 7 *dinheiros*.

A *libra* de peſo, ou *arratel*, quaſi em toda a parte ſe divide em 2 *marcos*, o *marco* em 8 *onças*, a *onça* em 8 *oitavas*, a *oitava* em 3 *ſcropulos*, o *ſcropulo* em 24 *grãos*. Para os peſos maiores uſamos de *quintais*. O *quintal* ſe divide em 4 *arrobas*, e a *arroba* em 32 *arrateis*.

As medidas das couſas ſecas em Portugal ſe reduzem a *moyos*. O *moyo* conſta de 15 *fangas*, a *fanga* de 4 *alqueires*, e o *alqueire de* 4 *quartas*; medidas, que alguma couſa differem entre ſi conforme os lugares.

Nas medidas dos liquidos uſamos de *pipas*. A *pipa* tem 25 *almudes*, o *almude* 12 *canadas*, e a *canada* 4 *quartilhos*; medidas, que tambem variaõ de grandeza conforme os lugares.

As diſtancias locais, ſendo maiores, medem-ſe por *eſtadios*, *milhas*, *legoas* &c. Nas meno-

res

tes ſe uſa da *toeſa*. Cada *toeſa* tem 6 *pés*, o *pé* 12 *pollegadas*, a *pollegada* 12 *linhas*, e a *linha* 12 *pontos*: eſpecies que por ſua ordem ſe aſſentaõ deſta maneira: $72^{T}\ 3^{P}\ 7^{P}\ 10^{l}\ 5^{pts}$. A *braça* Portugueza tem 10 *palmos craveiros*, e o *palmo* 8 *pollegadas*.

A medida natural do tempo he o *dia*. Cada *dia* ſe devide em 24 *horas*, a *hora* em 60 *minutos*, o *minuto* em 60 *ſegundos* &c., e eſtes numeros por ſua ordem ſe coſtumaõ notar deſte modo: $223^{d}\ 13^{h}\ 40'\ 53''$ &c.

Hum circulo celeſte divide-ſe em 12 *ſignos*, o *ſigno* em 30 *gráos*, o *gráo* em 60 *minutos*, o *minuto* em 60 *ſegundos* &c. Os ſignos marcaõ-ſe com a letra *s*, os gráos com a letra o, os minutos primeiros, ſegundos &c. com huma, duas riſcas &c. deſta maneira: $11^{s}\ 23^{o}\ 43'\ 52''\ 23'''$ &c.

Tambem ſe tem imaginado diviſões particulares para avaliar a qualidade de algumas couſas, como temos o exemplo na conta do ouro, e da prata.

O ouro na ſua maior pureza, ſem liga alguma de outro metal, ſuppõe-ſe conſtar de 24 *quilates*, o quilate de 4 *gráos*, e o *gráo* de 8 *oitavas*. Qualquer quantidade deſte metal v. gr. hum *marco*, ſendo puro, vale como de 24 *quilates*; ſendo ametade de ouro, e a outra ametade de outro metal, como de 12 *quilates*; ſendo 5 partes de ouro, e huma de outro metal, como de 20 *quilates* &c. Deve diſtinguir-ſe o *gráo* do *quilate* do *gráo* de peſo. Ao *gráo* do *quilate* damos o nome de *gráo de Lei*, porque tem hum valor fixo e determinado pela Lei, e o *gráo* de peſo tem differente valor, conforme he mais ou menos puro o ouro, que nelle ſe contem.

Pela Lei 4 de Agosto de 1688 se fixou neste Reino o valor de hum marco de ouro de 22 quilates em 96U000 reis; e esta he a Lei da nossa moéda. Repartindo o dito valor por 22, acharemos que cada quilate em hum marco vale 4U363 $\frac{7}{11}$, cada *grão* de Lei 1U090 $\frac{10}{11}$ &c.; e conseguintemente, que o marco de 24 quilates vale 104U727 $\frac{3}{11}$ reis. Pela mesma Lei se ordenou, que os Bate-folhas usassem do ouro de 23 quilates, e que os Ourives fizessem as suas obras de 20 quilates e meio. Nestas, supposto o valor fundamental do marco de 22 quilates, deveria sahir o marco a razaõ de 89U454 $\frac{6}{11}$ reis, a onça a razaõ de 11U181 $\frac{9}{11}$, e a oitava a razaõ de 1U397 $\frac{8}{11}$. Porem para evitar o embaraço dos quebrados, a mesma Lei regulou o marco a 89U600 reis, a 11U200 a onça, e a 1U400 a oitava.

A prata, sem liga alguma, suppõe-se constar de 12 *dinheiros*, cada *dinheiro* de 24 *grãos de Lei*, e cada *grão* de 4 *quartas*. E por esta divisaõ se regula o valor de qualquer quantidade de prata, a qual sendo pura valerá como 12 *dinheiros*; tendo ametade de liga, como de 6 *dinheiros* &c.

Pela mesma Lei já citada se fixou neste Reino o valor de hum marco de prata de 11 *dinheiros*, que he a Lei da moéda, em 6U000 reis. Em consequencia deste valor fundamental, vale cada *dinheiro* em hum marco U545 $\frac{5}{11}$; o marco de 12 *dinheiros*, que he á Lei dos Bate-folhas, vale 6U545

6U545 $\frac{5}{11}$. Pela mesma razaõ o marco de 10 *dinheiros* e 6 *grãos*, que he a Lei dos Ourives da prata, deveria valer exactamente 5U590 $\frac{10}{11}$. Porem, para evitar o embaraço dos quebrados, a mesma Lei reduzio o dito marco a 5U600 reis.

He de advertir, que o dinheiro de ouro e prata alem do valor da Lei, que chamamos intrinseco, tem tambem hum valor de sinal, procedido dos direitos da casa da moéda. A peça de meia onça de ouro de 22 *quilates* tem de peso 6U000 reis, e pelo cunho vale 6U400; e o cruzado novo, que tem meia onça de prata de 11 *dinheiros*, pésa U375 reis, e corre por U480 reis. §§

De Somar os numeros complexos.

117 PAra fazer esta operaçaõ, escrevem-se todas as addições, humas debaixo das outras, de maneira que as unidades da mesma especie fiquem dispostas em huma colunna vertical; e tendo passado huma risca por baixo, principia-se a operaçaõ pelas unidades da infima especie da direita para a esquerda. Se a soma dellas naõ chegar a fazer huma unidade da especie proximamente maior, escrever-se-há debaixo da risca; e se chegar a fazer huma, ou mais das ditas unidades, escrever-se-há sómente o que ficar, tiradas essas unidades, ou cifra naõ ficando resto; e as tais unidades se levaráõ para a colunna seguinte, na qual se praticará o mesmo, e assim por diante.

Exem-

Exemplo I.

Querendo ſomar - 227^{lb} $14^{ſ}$ 8^{d}

	2549	18	5
	184	11	11
	17	10	7
	2979^{lb}	$15^{ſ}$	7^{d} Soma.

Ordenadas as addições, como ſe vê no exemplo principiaremos pelos *dinheiros*, cuja ſoma faz 31^{d}, nos quais ſe contem 2 vezes 11^{d}, iſto he 2ſ, e alem diſto ſobraõ 7^{d}. Por tanto aſſentaremos os 7^{d} na columna reſpectiva, e levaremos 2ſ para a columna dos *ſoldos*. Neſta acharemos, que as unidades fazem 15, do qual numero aſſentaremos logo a letra 5 debaixo das unidades reſpectivas, e levaremos a dezena 1 para a ſomar com as dezenas dos meſmos *ſoldos*, as quais acharemos que fazem 5. E porque cada duas dezenas de *ſoldos* fazem huma *libra*, partiremos mentalmente o 5 por 2, e teremos por quociente 2^{lb}, ficando o reſto 1, que he 1 dezena de *ſoldos*; pelo que aſſentaremos eſta dezena no ſeu lugar, e levando 2^{lb} para a columna ſeguinte, acharemos finalmente que a ſoma total he 2979^{lb} $15^{ſ}$ 7^{d}.

Exemplo II.

SE quizermos ſomar as quatro addições ſeguintes - - -

	54^T	2^P	3^P	9^l
	12	5	4	11
	9	4	11	11
	8	2	9	10
	85^T	3^P	6^P	5^l

Principiaremos pelas *linhas*, que daõ 41^l, ou $3^P\ 5^l$; e por conſeguinte aſſentaremos ſómente as 5^l, e levaremos as 3^P para a columna ſeguinte. Eſta dará a ſoma 30^P, ou $2^P\ 6^P$; e por iſſo aſſentaremos nella as 6^P, e levaremos os 2^P para a columna ſeguinte; cuja ſoma acharemos ſer 15^P, ou $2^T\ 3^P$. Pelo que aſſentando nella 3^P, e levando 2^T para a columna ſeguinte, teremos a ſoma total $85^T\ 3^P\ 6^P\ 5^l$.

Exemplo III.

HAvendo de ſomar

23^d	13^h	$43'$	$52''$	
35	0	12	41	
0	23	0	24	
12	14	23	5	
72^d	3^h	$20'$	$2''$	Soma

Na columna dos *ſegundos* acharemos que as unidades fazem 12, e logo eſcreveremos $2''$, e levaremos a dezena 1 para a ſomarmos com as dezenas, as quaes fazem 12. E como 6 dezenas de *ſegundos* fazem hum *minuto*, partiremos mentalmenmente 12 por 6, e o quociente moſtrará $2'$, os quais levaremos para a colunna ſeguinte, e como naõ ficou reſto algum da dita diviſaõ, naõ eſcreveremos nada nas dezenas dos *ſegundos*. Na colunna ſeguinte as unidades daõ 10, e logo aſſentaremos a 0, e levaremos a dezena 1 para a ſomarmos com as dezenas, as quais fazem 8; e partindo-as por 6 o quociente ſerá 1^h que guardaremos para a colunna das *horas*, e ficaráõ 2, que aſſentaremos na caſa das dezenas dos minutos. Na colunna das *horas* acharemos a ſoma total 51^h, que ſaõ $2^d\ 3^h$; e por conſeguinte aſſentando as 3^h, e levando os 2^d para a ſua reſpectiva colunna, acharemos que as addiçóes propoſtas ſomaõ $72^d\ 3^h\ 20'\ 2''$.

Exemplo IV.

SE tivermos para ſomar

11^s	23^o	$43'$	$53''$
0	12	22	4
7	21	3	12
3	0	25	37
10^s	27^o	$34'$	$46''$ Soma.

Somaremos os *ſegundos* e *minutos*, como no exemplo precedente. E chegando ás unidades dos *gráos*, logo aſſentaremos a ſoma dellas 7^o na meſma caſa, e paſſaremos ás dezenas, cuja ſoma he 5; e porque 3 dezenas de *gráos* fazem hum *ſigno*, na caſa das dezenas aſſentaremos 2, e levaremos huma unidade para a colunna dos *ſignos*. Eſta dá a ſoma 22; mas porque no calculo deſtes numeros ſe lançaõ fóra os circulos inteiros, ou 12^s, to-

todas as vezes que os houver na ſoma, de 22^s tiraremos 12^s, e aſſentaremos o reſto 10^s; donde a ſoma que buſcamos ſerá $10^s\ 27^{\circ}\ 34'\ 46''$.

De Diminuir os numeros complexos.

118 PAra diminuir hum numero complexo de outro, ambos ſe aſſentaráõ, como no ſomar, e a operaçaõ ſe principia tambem pela menor eſpecie. Se o numero inferior ſe póde tirar do ſuperior, feita a ſubtracçaõ, o reſto ſe eſcreve por baixo da riſca. Porem naõ ſe podendo tirar, o numero ſuperior ſe aumentará com o que produzir huma unidade da eſpecie immediatamente maior reduzida ás unidades da columna em que eſtamos. Entaõ feita a ſubtracçaõ, ſe eſcreverá o reſto por baixo; e o numero de quem ſe tomou a unidade ſe tratará mentalmente ſem ella na operaçaõ ſeguinte, na qual ſe procederá do meſmo modo, e aſſim por diante.

Exemplo I.

SE do numero - -	143^{lb}	$17^{ſ}$	6^d
quizermos tirar -	75	12	9
	68^{lb}	$4^{ſ}$	9^d Reſto.

Como de 6^d naõ ſe pódem tirar 9^d, de $17^{ſ}$ tomaremos mentalmente $1^{ſ}$, que vale 12^d, e ajuntando eſtes com os 6^d, teremos 18^d dos quais tirando 9^d, ficaõ 9^d, que aſſentaremos por baixo. E no lugar ſeguinte naõ tiraremos $12^{ſ}$ de $17^{ſ}$,

mas

mas de 16ſ, por cauſa da unidade que já tiramos dos 17ſ; e eſcreveremos o reſto 4ſ. Finalmente tirando 75^{lb} de 143^{lb} ficaõ 68^{lb}; e por conſeguinte o reſto total ſerá 68^{lb} 4ſ 9^d.

Exemplo II.

SE de - - - - - -	163^{lb}	0ſ	5^d
houvermos de tirar -	84	18	9
	78^{lb}	1ſ	8^d Reſto.

Naõ podendo tirar 8^d de 5^d, e naõ havendo na caſa dos *ſoldos* numero, do qual tomemos huma unidade, toma-la-hemos de 163^{lb}, a qual valerá 20ſ. Deſtes deixaremos mentalmente 19 no lugar vazio dos *ſoldos*, e converteremos ſómente 1 em *dinheiros*, os quais ajuntaremos com os 5^d; e feita a operaçaõ, como no exemplo antecedente, acharemos o reſto 78^{lb} 1ſ 8^d.

Exemplo III.

55 SE do numero	7^s	12^o	$20'$	$42''$
quizermos tirar	4	23	36	23
	2^s	18^o	$44'$	$19''$ Reſto.

Em chegando ás dezenas dos *minutos* acharemos para diminuir 3 de 1; e como iſto naõ póde ſer, tomaremos huma unidade dos 12^o, a qual vale 6 dezenas de *minutos*, e com 1 fazem 7, das quais tiraremos as 3. Do meſmo modo nas dezenas dos *gráos*, acharemos 2 para tirar de 0; e por iſſo

isso tomaremos huma unidade dos 7^s, a qual nos lembraremos que vale 3 dezenas de *gráos*; e acabando a operaçaõ, teremos o resto $2^s\ 18^\circ\ 44'\ 19''$.

No calculo destes numeros muitas vezes se diminue hum numero maior de outro menor, porque a este se póde ajuntar para esse effeito hum circulo inteiro, ou 12^s.

Exemplo IV.

SE de - - - - -	3^s	0°	$12'$	$27''$	
houvermos de tirar	9	15	27	22	
	5^s	14°	$45'$	$5''$	Resto.

Primeiramente nas dezenas dos *minutos*, sendo necessario tomar huma unidade da casa dos *gráos*, que a naõ tem, toma-la-hemos dos 3^s, a qual valerá 30°, e destes deixaremos 29° na mesma casa dos *gráos*, e tomaremos sómente 1°, que converteremos em 6 dezenas, para fazermos a subtracçaõ. Continuando a operaçaõ teremos finalmente para diminuir 9^s de 2^s, pelo que ajuntaremos 12^s a 2^s, e feita a subtraccaõ será o resto que buscamos $5^s\ 14^\circ\ 45'\ 5''$. ʃʃ

Multiplicaçaõ dos numeros complexos.

119 A Praxe desta operaçaõ póde reduzir-se em geral á multiplicaçaõ dos quebrados ordinarios, conforme a regra que assima temos dado (n. 106).

Por-

Porque v. gr. ſe quizermos ſaber o feitio, que deve pagar-ſe por 45^T 3^P de obra tendo-ſe ajuſtado a *toeſa* a razaõ de 42^{lb} 17ſ 8^d; podemos converter o multiplicando 42^{lb} 17ſ 8^d todo em *dinheiros* (n.57); que dará 10292^d. E porque o *dinheiro* he $\frac{1}{240}$ de huma *libra*, reduzir-ſe-há o multiplicando a $\frac{10292}{240}$ da meſma *libra*. Igualmente o multiplicador 54^T 3^P convertido todo em *pés* dará 327^P; e porque o *pé* he $\frac{1}{6}$ da *toeſa*, ficará o dito multiplicador reduzido a $\frac{327}{6}$ da meſma *toeſa*. Por conſequencia, a queſtaõ ſe reduz a multiplicar a fracçaõ $\frac{10292}{240}$ de huma *libra* por $\frac{327}{6}$ (n.106); donde reſulta o producto $\frac{3365484}{1440}$ da meſma *libra*, o qual ſe reduz finalmente (n. 112) a 2337^{lb} 2ſ 10^d.

Eſte methodo ſe extende a toda a ſorte de numeros complexos. Porem, como o que agora moſtraremos ſe executa com menos trabalho, naõ nos demoraremos mais com elle.

120 O numero, que ſe contém em outro algumas vezes exactamente, chama-ſe parte *aliquota* delle; e o que ſe naõ contém exactamente, parte *aliquanta*. Aſſim 3 he parte *aliquota* de 12, e *aliquanta* de 8.

Multiplicar, como ja diſſemos, nada mais he que tomar o multiplicando hum certo numero de vezes. Se v. gr. qualquer numero ſe houver de mul-

multiplicar por 8 $\frac{3}{4}$, devemos toma-lo 8 vezes, e alem disso $\frac{3}{4}$ de huma vez. Ora de dous modos podemos tomar os $\frac{3}{4}$ de hum numero; ou buscando hum *quarto* delle, e repetindo-o 3 vezes; ou tomando primeiramente a sua ametade, e depois ametade da mesma ametade. Assim v. gr.

Se tivessemos de multiplicar 84
por - - - - - - - $8\frac{3}{4}$

$$\begin{array}{r} 672 \\ 42 \\ 21 \\ \hline 735 \end{array}$$ Producto.

Primeiramente, multiplicando pelo inteiro 8, teriamos o producto 672. Depois para tomarmos com mais facilidade os $\frac{3}{4}$ de 84, resolveriamos o quebrado $\frac{3}{4}$ em $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$. E assim tomando a ametade de 84, que he 42, e a ametade desta que he 21, e reunindo os tres productos parciais, achariamos o producto total 735.

121 Para isto se applicar aos numeros complexos, devemos notar que as differentes unidades, de que elles se compõem, saõ quebrados tanto entre si, como a respeito da unidade principal; e que para se multiplicarem com mais facilidade, he por conseguinte muito conveniente resolve-las em partes aliquotas tanto da unidade principal,

como humas das outras. Quando por esta resoluçaõ naõ se puderem haver partes aliquotas, que facilitem o calculo, supprir-se-ha com productos subsidiarios; da maneira, que mostraremos nos exemplos seguintes.

Exemplo I.

PErgunta-se, quanto devem custar $54^T\ 3^P$ de obra, a razaõ de 72^{lb} por *toesa*?

Deveremos pois multiplicar -	72^{lb}	
por - - - - - - -	$54^T\ 3^P$	
	$288^{lb}\ 0^f\ 0^d$	
	360	
	36	
	$3924^{lb}\ 0^f\ 0^d$	Prod.

E primeiramente multiplicaremos 72^{lb} por 54, conforme a regra costumada da multiplicaçaõ. Depois, para multiplicarmos por 3^P, reflectiremos que este numero representa meia *toesa*, e por conseguinte deve custar ametade do preço della; pelo que assentaremos por baixo 36, ametade do multiplicando, e somando os tres productos parciais, teremos o producto que se pede 3924^{lb}.

Exemplo II.

PEde-se o producto de - 72^{lb}
por - - - - - - - 54^{T} 5^{P}

$$\begin{array}{r}
288^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d} \\
360\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\
36\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\
24\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\
\hline
3948^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}
\end{array}$$ Producto.

Em primeiro lugar multiplicaremos 72^{lb} por 54, como no exemplo antecedente. Depois como 5^{P} saõ $\frac{5}{6}$ de huma *toesa*, resolveremos este quebrado em $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$, e $\frac{2}{6}$ ou $\frac{1}{3}$. E assim tomando de 72^{lb} primeiramente a ametade 36, depois a terça parte 24, e somando os productos parciais, acharemos o producto total 3948^{lb}.

Exemplo III.

QUerendo-se multiplicar - 72^{lb}
por - - - - - - - - - 5^{T} 4^{P} 8^{p}

$$\begin{array}{r}
360^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d} \\
36\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\
12\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\
4\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\
4\phantom{^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}} \\
\hline
416^{lb}\ 0^{s}\ 0^{d}
\end{array}$$ Prod.

Feita primeiramente a multiplicaçaõ por 5^T, multiplicaremos depois por 4^P, e para isso resolveremos este numero em 3^P e 1^P. Por 3^P tomaremos ametade do multiplicando, que he 36^{lb}; e por 1^P observaremos que elle he hum terço de 3^P, e por conseguinte tomaremos o terço de 36^{lb}, que he 12^{lb}. Para multiplicarmos por 8^P, em lugar de compararmos as *polegadas* com a *toesa*, será melhor que as comparemos com o *pé*; e resolvendo 8^P em 4^P e 4^P, veremos que cada huma destas partes he hum terço do *pé*, e por isso dará 4^{lb}, que he o terço do producto que acabamos de achar para 1^P. Reunindo finalmente todas estas partes, será o producto total 416^{lb}.

122 Se tambem o multiplicando for numero complexo, far-se-ha a operaçaõ, como se mostra no exemplo seguinte.

Exemplo IV.

PAra multiplicar 72^{lb} 6^{s} 6^{d}
por - - - - 27^T 4^P 8^P

504^{lb}	0^{s}	0^{d}	
144			
6	15	0	
1	7	0	
0	13	6	
36	3	3	
12	1	1	
4	0	4 $\frac{1}{3}$	
4	0	4 $\frac{1}{3}$	
2009^{lb}	0^{s}	6^{d} $\frac{1}{3}$	Product.

Ten-

Tendo multiplicado 72^{lb} por 27, paſſaremos tambem a multiplicar $6^{ſ}$, para o que reſolveremos eſte numero em $5^{ſ}$ e $1^{ſ}$. E porque $5^{ſ}$ fazem hum *quarto* da *libra*, multiplicar $5^{ſ}$ por 27 ſerá o meſmo que tomar 27 *quartos* da *libra*, ou hum *quarto* de 27 *libras*, que he $6^{lb}\ 15^{ſ}$. E para multiplicarmos $1^{ſ}$ por 27, como $1^{ſ}$ he hum *quinto* de $5^{ſ}$, tomaremos hum *quinto* do producto antecedente $6^{lb}\ 15^{ſ}$, que he $1^{lb}\ 7^{ſ}$. E finalmente, para multiplicarmos 6^{d} pelo meſmo numero 27, advertiremos que 6^{d} fazem ametade de $1^{ſ}$, e conſeguintemente tomaremos ametade do producto $1^{lb}\ 7^{ſ}$, que achamos competir a $1^{ſ}$, a qual ſerá $13^{ſ}\ 6^{d}$.

Até aqui temos multiplicado todo o numero multiplicando pela primeira parte do multiplicador 27^{T}. Agora para o multiplicarmos tambem por 4^{P}, praticaremos como no exemplo antecedente. E reſolvendo 4^{P} em 3^{P} e 1^{P}, por 3^{P} tomaremos ametade do multiplicando, a ſaber 36^{lb} $3^{ſ}$ e 3^{d}, e por 1^{P} tomaremos hum terço da dita ametade, que he $12^{lb}\ 1^{ſ}\ 1^{d}$. Do meſmo modo reſolveremos 8^{P} em 4^{P} e 4^{P}, e por cada huma deſtas partes tomaremos hum terço do producto, que achamos para 1^{P}, a ſaber $4^{lb}\ 0^{ſ}\ 4^{d}\ \frac{1}{3}$. E recebendo todas as ditas partes, teremos o producto total $2009^{lb}\ 0^{ſ}\ 6^{d}\ \frac{2}{3}$.

123 Nos exemplos precedentes tem ſido muito faceis de tomar as partes do multiplicando, por cauſa da ſua ſimplicidade. Quando forem mais compoſtas, uſaremos do artificio que ſe moſtra nos exemplos ſeguintes.

Exem-

Exemplo V.

PErgunta-ſe, quanto devem cuſtar 17^T de obra, a razaõ de 34^{lb} 10ſ 2^d a *toeſa* ?

Será pois o multiplicando	34^{lb}	10ſ	2^d
e o multiplicador - -	17^T		
	238^{lb}	0ſ	0^d
	34		
	8	10	
	.	..	
	0	17	
	0	2	10
	586^{lb}	12ſ	10^d Prod.

E em primeiro lugar multiplicaremos 34^{lb} por 17, e depois 10ſ, os quais fazendo meia *libra* daráõ 17 meias *libras*, ou ametade de 17 *libras*, que he 8^{lb} 10ſ. Entaõ para multiplicarmos 2^d por 17, obſervaremos que 2^d fazem huma ſexta parte de 1ſ, e conſeguintemente huma ſexta de huma decima, ou (n. 114) huma ſexagеſima parte de 10ſ. Pelo que por 2^d deveriamos tomar huma ſexageſima parte do producto 8^{lb} 10ſ, que temos achado competir a 10ſ. Mas para facilitar o calculo tomaremos primeiro a decima parte do dito producto, que he 0^{lb} 17ſ, e a marcaremos com pontos, ou riſcas, para denotar que he hum producto ſubſidiario, que ao depois naõ havemos de ſomar. Delle porém tomaremos a ſexta parte 2ſ 10^d que vem a ſer a ſexageſima parte de 8^{lb} 10ſ, e ſomando todos os productos parciais, ſerá o producto que ſe pergunta 586^{lb} 12ſ 10^d.

Exem-

Exemplo VI.

Pergunta-ſe, quanta obra ſe deve fazer por 34^{lb} 10ſ 2^{d}, a razaó de 17^{T} por 1^{lb}?

Multiplicaremos pois - - - - - - - -						
- - - -	17^{T}					
por - -	34^{lb} 10ſ		2^{d}			
	68^{T}	0^{P}	P0	0^{l}	0^{pts}	
	51					
	8	3				
	·	·	·	·	·	
	0	5	1	2	4 $\frac{4}{5}$	
	0	0	10	2	4 $\frac{4}{5}$	
	586^{T}	3^{P}	10^{P}	2^{l}	4^{pts} $\frac{4}{5}$	Producto.

E tendo multiplicado 17^{T} por 34^{lb}, paſſaremos a multiplicar por 10ſ; e porque 10ſ fazem meia *libra*, pelo producto correſpondente tomaremos ametade de 17^{T}, que he 8^{T} 3^{P}. Para multiplicarmos por 2^{d}, buſcaremos o producto que deveria dar 1ſ, tomando a decima parte do producto antecedente, a ſaber 0^{T} 5^{P} 1^{P} 2^{l} 4^{pts} $\frac{4}{5}$; producto ſubſidiario, que marcaremos com pontos, e de que nos ſerviremos, para delle tomarmos a ſexta parte 0^{T} 0^{P} 10^{P} 2^{l} 4^{pts} $\frac{4}{5}$; que aſſentaremos por baixo; e ſomando todos os productos parciais, acharemos que o producto pedido he 586^{T} 3^{P} 10^{P} 2^{l} 5^{pts} $\frac{4}{4}$.

Te-

Temos dado eſte exemplo para confirmar o que aſſima diſſemos (n. 45) ; que era neceſſario diſtinguir o *multiplicando* do *multiplicador* , quando ambos foſſem *concretos*. E com effeito nos dous exemplos antecedentes temos os meſmos *factores* 17^{T}, e 34^{lb} $10^{ſ}$ 2^{d} : e com tudo reſultaõ productos differentes.

¶ He porém de advertir , que a dita differença he ſómente na expreſſaõ ; e que na realidade ſe declara pelo primeiro producto o meſmo numero de *libras* , que de *toeſas* pelo ſegundo ; ſendo ſómente diverſos os algariſmos , porque ſaõ diverſas as divisões da *toeſa* , e da *libra*. Para iſto ſe provar baſta reduzir as partes da *libra* no primeiro, e as da *toeſa* no ſegundo , a huma fracçaõ da unidade principal , e ambos ſe acharaõ concordes , ſendo hum $586^{lb} \frac{77}{120}$, e o outro $586^{T} \frac{77}{120}$.

Advirta-ſe tambem , que nos exemplos aſſima dados ſe ſuppõe ſempre que a unidade principal he a da maior eſpecie , mas que póde ſervir igualmente de principal qualquer das outras. Póde v. g. perguntar-ſe quanta obra ſe deve fazer por 34^{lb} $10^{ſ}$ 2^{d} , a razaõ de 17^{T} por $1^{ſ}$. Neſte caſo , por 2^{d} teriamos o producto 2^{T} 5^{P} , por $10^{ſ}$ teriamos 170^{T}, e por 34^{lb} finalmente 11560^{T} ; donde ſeria o producto total 11732^{T} 5^{P}. ¶

Diviſaõ de hum numero complexo por hum numero incomplexo.

124 SE o dividendo ſómente for complexo, e ſe ao meſmo tempo o dividendo e o diviſor moſtrarem unidades de diverſa ſpecie , a operaçaõ ſe praticará da maneira ſeguinte. Di-

Dividir-ſe-haõ primeiramente as unidades principais do dividendo, conforme a regra dada para os numeros inteiros. O que ficar deſta diviſaõ reduzir-ſe-ha ás unidades da eſpecie immediatamente inferior (n. 57), e ſe ajuntará com as unidades ſemelhantes que no dividendo houver, e o total ſe partirá do meſmo modo. O reſto deſta diviſaõ ſe tornará a reduzir ás unidades da eſpecie ſeguinte, e ſe ajuntará com as do dividendo, e a ſoma ſe tornará a repartir; e aſſim por diante, até chegar á infima eſpecie.

Exemplo.

PAgando-ſe 4783 *libras*, 3 *ſoldos*, e 9 *dinheiros* pelo jornal de 87 *toeſas* de obra, queremos ſaber a quanto ſahe cada *toeſa*.

Para iſſo repartiremos $4783^{lb}\ 3^{ſ}\ 9^{d}$ por 87^{T}, da maneira ſeguinte:

$$
\begin{array}{r|l}
4783^{lb}\ 3^{ſ}\ 9^{d} & 87^{T} \\
\cline{2-2}
433 & 54^{lb}\ 19^{ſ}\ 7^{d} \\
85 & \\
\cline{1-1}
1703^{ſ} & \\
833 & \\
50 & \\
\cline{1-1}
609^{d} & \\
000 &
\end{array}
$$

Principiando pelas *libras*, partiremos pois 4783^{lb} por 87 (n. 65), e viráõ ao quociente 54^{lb}, ficando de reſto 85^{lb}. Eſte reſto convertido em *ſoldos* com os $3^{ſ}$ do dividendo primitivo faz $1703^{ſ}$;

e

e partindo esta soma por 87, sahiráõ no quociente 19ſ, e sobraráõ 50ſ. Do mesmo modo reduzindo este resto a *dinheiros*, e ajuntando-lhe os 9^d do dividendo, teremos 609^d; os quais sendo finalmente repartidos por 87, daraõ no quociente 7^d, sem resto algum; e conseguintemente será o quociente total que buscamos 54^{lb} 19ſ 7^d.

125 No caso porém de mostrarem unidades da mesma especie tanto o dividendo, como o divisor, antes de fazer a divisaõ he necessario examinar, se o quociente deve, ou naõ deve ser da mesma especie que elles; exame, que facilmente se decide pelo estado da questaõ.

126 Mostrando pois o dividendo unidades da mesma especie que as do divisor, e devendo ao mesmo tempo conformar-se o quociente com as unidades de ambos elles, a divisaõ se praticará inteiramente como no primeiro caso.

Sabendo, por exemplo, que 1243^{lb} produziraõ de lucro 7254^{lb}, pergunta-se quanto cabe a cada *libra*. He claro nesta questaõ, que o quociente deve mostrar unidades da mesma especie que as do dividendo, e do divisor, isto he que se deve achar em *libras*, e partes da *libra*. Pelo que dividiremos 7254^{lb} por 1243, e convertendo o resto em *soldos* tornaremos a dividir por 1243, e assim por diante; e acabada a operaçaõ, acharemos que o quociente pedido he 5^{lb} 16ſ 8^d $\frac{760}{1243}$.

127 Mostrando porém o dividendo unidades da mesma especie que as do divisor, e devendo o quociente mostrar unidades de differente especie que as de ambos elles, antes de fazer a divisaõ será necessario reduzir tanto o dividendo como o di-

divisor ás unidades da infima especie que no mesmo dividendo se contém (n. 57). Depois disso praticar-se-ha como no exemplo precedente, tratando as unidades do dividendo assim reduzido, como se fossem da mesma especie das que devem sahir do quociente.

Pergunta-se v. gr. quantas *toesas* de obra se devem fazer por 7954 *libr.* 11 *sold.* e 7 *dinh.* a razaõ de 72 *libras* a *toesa*? Pela mesma questaõ entenderemos, que o quociente deve sahir em *toesas*, e partes da *toesa*. E por isso reduziremos 7954^{lb} 11^{s} 7^{d} tudo em *dinheiros*, e teremos 1909099^{d}; o mesmo faremos ao divisor 72^{lb}, que dará 17280^{d}; e mudando no dividendo a denominaçaõ de *dinheiros* para *toesas*, teremos para dividir 1909099^{T} por 17280, donde resultará o quociente 110^{T} 2^{P} 10^{P} 6^{l} $\frac{19}{20}$.

Divisaõ de hum numero complexo, por outro complexo.

128 SEndo tambem complexo o divisor, reduzi-lo-hemos primeiro ás unidades da sua infima especie (n. 57), e multiplicaremos o dividendo pelo numero das vezes que entra a unidade da dita infima especie na unidade principal do mesmo divisor. Deste modo a operaçaõ será reduzida ao caso precedente de hum divisor incomplexo.

Exemplo.

TEndo custado 854^{lb} 17^{s} 11^{d} huma obra de 57^{T} 5^{P} 5^{P}, pergunta-se a como sahe a *toesa*? Deve-veremos pois dividir 854^{lb} 17^{s} 11^{d} por 57^{T} 5^{P} 5^{P}. Para isso reduziremos o divisor a *pollegadas*, que fará 4169^{P}; e como saõ necessarias 72^{P} para fazer huma *toesa*, que he a unidade principal do divisor, multiplicaremos o dividendo por 72 (n.121), e teremos 61552^{lb} 10^{s}. Por tanto partiremos o numero 61552^{lb} 10^{s} por 4169, da maneira seguinte:

$$\begin{array}{l|l} 61552^{lb}\ 10^{s} & 4169 \\ \quad 19862 & \overline{14^{lb}\ 15^{s}\ 3^{d}\ \frac{1833}{4169}} \\ \quad\ \ 3186 & \\ \hline 63730^{s} & \\ 22040 & \\ \quad 1195 & \\ \hline 14340^{d} & \\ \ 1833 & \end{array}$$

Primeiramente as 61552^{lb} partidas por 4169 daõ no quociente 14^{lb}, e 3186^{lb} de resto. Este reduzido a *soldos* com os 10^{s} do dividendo faz 63730^{s}; os quais sendo partidos por 4169 daõ no quociente 15^{s}, ficando de resto 1195^{s}. Este reduzido a *dinheiros* faz 14340^{d}, os quais sendo finalmente partidos por 4169 daõ 3^{d}, e sobraõ 1833^{d}; pelo que será o quociente pedido 14^{lb} 15^{s} 3^{d} $\frac{1833}{4169}$.

He clara a razaõ desta regra. Porque reduzindo-se o divisor 57^{T} 5^{P} 5^{P} a 4169^{P}, e sendo 1^{P} hum 72-*avo* da *toesa*, o mesmo divisor se reduzirá a esta fracçaõ da *toesa* $\frac{4169}{72}$. Ora para dividir por huma fracçaõ he necessario inverter-lhe primeiro os termos, e depois multiplicar por ella (n. 109) Logo no exemplo proposto deveremos multiplicar por $\frac{72}{4169}$; que vem a ser o mesmo que multiplicar primeiro por 72, e depois dividir por 4169, como a regra prescreve.

Como a divisaõ por hum numero complexo se reduz á divisaõ por hum numero incomplexo, do modo que temos visto: sobre as unidades do quociente se guardará o mesmo que assima dissemos (n. 126, 127).

Aqui se poderia fallar tambem da multiplicaçaõ, e divisaõ geometrica, pelas quais se calculaõ as medições *Geodeticas* e *Stereometricas*. Mas estas operações pelo que respeita á fórma do calculo naõ differem em nada das que temos exposto. Sómente faltaria explicar a natureza das unidades dos factores, e do producto; porém reservamos isso para a Geometria, onde se entenderá com mais facilidade.

Da formaçaõ dos numeros quadrados, e extracçaõ das suas raizes.

129 CHama-se *quadrado* de hum numero o producto, que resulta da multiplicaçaõ delle por si mesmo. Assim 25 he o quadrado de 5 porque resulta da multiplicaçaõ de 5 por 5.

130 *Roiz quadrada* de qualquer numero he o numero que multiplicado por si mesmo produz o dito numero. Assim 5 he a raiz quadrada de 25, e 7 a raiz quadrada de 49 &c.

131 He pois o numero que se *quadra* multipli-

plicando e multiplicador ao meſmo tempo ; e por conſeguinte he duas vezes factor do producto (n. 42) Donde vem, que o dito producto, ou quadrado ſe chama tambem *ſegunda potencia* do meſmo numero.

Para achar o quadrado de hum numero naõ he neceſſario mais do que multiplica-lo por ſi meſmo, conforme as regras ordinarias da Multiplicaçaõ. Mas para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, ou para vir pelo quadrado no conhecimento da raiz, he neceſſario hum methodo particular, principalmente quando o numero conſtar de mais que dous algariſmos.

Se o numero propoſto conſtar de hum ou dous algariſmos, a ſua raiz, em numero inteiro, ſerá algum dos numeros digitos.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

cujos quadrados ſaõ

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81.

Aſſim v. gr. a raiz quadrada de 72, em numero inteiro, ſerá 8; porque eſtando 72 entre 64 e 81, a ſua raiz tambem ſe achará entre as raizes dos ditos numeros, que ſaõ 8, e 9; e por conſeguinte ſerá 8 com hum quebrado. Eſte quebrado porém nunca ſe póde determinar exactamente, mas póde approximar-ſe continuamente, como mais abaixo ſe moſtrará.

132 A raiz quadrada de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-ſe numero *ſurdo*, *irracional*, ou *incommenſuravel*.

¶ Temos alguns principios derivados da Lei da Numeraçaõ, pelos quais podemos muitas vezes conhecer, que hum numero propoſto certamente naõ he quadrado, e ſaõ os ſeguintes.

To-

Todo o numero cuja ultima letra á direita for 2, 3, 7, ou 8, naõ póde ſer quadrado.

E todo o numero, que acabar em huma, tres, cinco, ou geralmente em numero impar de cifras, naõ ſerá quadrado.

Se de qualquer numero lançarmos fóra os *noves*, e ficar no reſto 2, 3, 5, 6, ou 8, conheceremos que naõ he quadrado. E o que deixar de reſto 3, ou 6, naõ ſómente naõ ſera quadrado, mas naõ terá raiz racional de qualquer gráo que ella ſeja.

Do meſmo modo, ſe de hum numero tirarmos os *onzes*, e tivermos de reſto 2, 6, 7, 8, ou 10, naõ poderá ſer quadrado.

Os numeros, que naõ forem incluidos neſtas regras, poderaõ ſer quadrados, mas naõ ſe ſegue por iſſo que o ſejaõ neceſſariamente. ¶¶

133 Em quanto aos numeros de mais letras que duas, obſervando o que ſe paſſa na formaçaõ do quadrado, acharemos o methodo inverſo de lhes extrahir a raiz.

Para quadrar qualquer numero, por exemplo 54;

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Primeiramente, multiplicaremos o 4 ſuperior pela 4 inferior, e o producto ſerá evidentemente o *quadrado das unidades* do dito numero.

Depois, multiplicaremos o 5 ſuperior pelo 4 in-

inferior, e teremos neſta operaçaõ o *producto das dezenas pelas unidades.*

Entaõ multiplicaremos o 4 ſuperior pelo 5 inferior, donde reſultará o producto das unidades pelas dezenas, ou (n. 44) *o producto das dezenas pelas unidades.*

Finalmente multiplicaremos o 5 ſuperior pelo 5 inferior, e teremos por eſta operaçaõ o *quadrado das dezenas.*

Somando eſtes productos parciais, achamos que o numero propoſto produz o quadrado 2916, o qual vemos que ſe compõe do *quadrado das dezenas, de dous productos das dezenas pelas unidades, e do quadrado das unidades* da ſua raiz 54.

134 Sendo iſto que acabamos de obſervar huma conſequencia immediata das regras da Multiplicaçaõ, he manifeſto que naõ pertence ſómente ao numero 54, mas a todo o numero compoſto de dezenas e unidades. Pelo que diremos em geral, que o quadrado de todo o numero compoſto de dezenas e unidades contém as tres ſobreditas partes, a ſaber, o quadrado das dezenas, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades.

135 Iſto ſuppoſto, como o quadrado das dezenas faz centenas (por quanto 10 vezes 10 fazem 100) he claro que o quadrado das dezenas naõ ſe contém nas duas ultimas letras do quadrado total. E como o producto das dezenas pelas unidades he neceſſariamente de dezenas, tambem he claro que o duplo deſte producto ſe naõ contém na ultima letra do quadrado total.

136 Para voltarmos pois do quadrado 2916 a procurar a ſua raiz, podemos diſcorrer deſta maneira.

Exem-

Exemplo I.

2916	54 Raiz
416	
104	
000	

Comecemos pelas dezenas da meſma raiz. A formaçaõ do quadrado nos tem moſtrado, que o quadrado dellas faz huma parte de 2916, e que nada delle ſe acha nas duas ultimas letras 16; logo eſtará o dito quadrado incluido em 29. E como a raiz quadrada de 29 naõ póde ſer maior que 5, concluiremos que 5 he o numero das dezenas da raiz, e o aſſentaremos á direita do numero propoſto, como ſe moſtra no exemplo.

Entaõ quadraremos o 5, e tiraremos o ſeu quadrado exacto 25 de 29, e ficará o reſto 4, para junto do qual abaixaremos as outras duas letras 16 do numero propoſto.

Para acharmos agora as unidades da raiz, reflectiremos no que contem finalmente o reſto 416. Pelo que aſſima moſtramos ſe vê que naõ contem mais que duas partes, a ſaber, dous productos das dezenas pelas unidades, e o quadrado das unidades da meſma raiz. A primeira deſtas nos baſtará para acharmos a letra que agora buſcamos; pois ſendo ella formada do duplo das dezenas multiplicado pelas uuidades, ſe a dividirmos pelo dobro das dezenas que ja conhecemos, o quociente moſtrará as unidades (n. 74). Falta pois ſaber, em que parte do reſto 416 ſe contem o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades; e como, pelo que assima notamos, nada delle se contem na ultima letra do dito resto, necessariamente se achará em 41. Pelo que dividiremos 41 pelo dobro das dezenas 10, o qual escreveremos debaixo, e o quociente 4 mostrará as unidades da raiz, que por conseguinte será 54.

He porem de advertir, que, sem embargo de termos neste exemplo achado o quociente 4 justamente como convinha, póde algumas vezes succeder que o quociente achado desta maneira seria maior do que convem; porque 41 (isto he, a parte restante depois de separada a ultima letra) naõ sómente contem o dobro das dezenas multiplicado pelas unidades, mas tambem as dezenas que podem resultar do quadrado das unidades. Por esta razaõ, para naõ haver duvida sobre a letra que temos achado, usaremos da verificaçaõ seguinte.

Depois de ter achado a letra das unidades 4, e de a ter escrito na raiz, tambem a assentaremos á direita do divisor 10, que ficará 104, e multiplicaremos este numero pela mesma letra 4, tirando os productos sucessivos das partes correspondentes de 416, como praticaremos na divisaõ; e como naõ resta nada, concluiremos que a raiz he com effeito 54.

Se ficasse porem algum resto, naõ deixaria por isso a raiz de ser exacta até á casa das unidades, com tanto que o dito resto naõ fosse igual, ou maior que o dobro da raiz achada aumentado de huma unidade; mas isto he o que se naõ pode recear, pois pelo methodo assima exposto sómente podemos errar tomando o quociente maior do que convem.

A verificaçaõ, que temos ensinado, he fundada