4A
27
23
17

~~24-4-~~ 18 =

2a

24-3-19

Ioannis Kepleri 4-13

HARMONICES MUNDI

LIBRI V. Quorum

Primus [illegible]

Secundus Architectonicus [illegible]

Tertius proprie Harmonicus [illegible]

Quartus [illegible]

Quintus [illegible]

Appendix habet [illegible]

[illegible]

Lincii Austriae,

[illegible]

[illegible]

Anno M. DC. XIX.

Ioannis Keppleri

HARMONICES MVNDI

LIBRI V. QVORVM

Primus GEOMETRICVS, De Figurarum Regularium, quæ Proportiones Harmonicas constituunt, ortu & demonstrationibus.

Secundus ARCHITECTONICVS, seu ex GEOMETRIA FIGVRATA, De Figurarum Regularium Congruentia in plano vel solido:

Tertius propriè HARMONICVS, De Proportionum Harmonicarum ortu ex Figuris; deque Naturâ & Differentiis rerum ad cantum pertinentium, contra Veteres:

Quartus METAPHYSICVS, PSYCHOLOGICVS & ASTROLOGICVS, De Harmoniarum mentali Essentiâ earumque generibus in Mundo; præsertim de Harmonia radiorum, ex corporibus cœlestibus in Terram descendentibus, eiusque effectu in Natura seu Anima sublunari & Humana:

Quintus ASTRONOMICVS & METAPHYSICVS, De Harmoniis absolutissimis motuum cœlestium, ortuque Eccentricitatum ex proportionibus Harmonicis.

Appendix habet comparationem huius Operis cum Harmonices Cl. Ptolemæi libro III. cumque Roberti de Fluctibus, dicti Flud. Medici Oxoniensis speculationibus Harmonicis, operi de Macrocosmo & Microcosmo insertis.

Cum S. C. Mtis. Priuilegio ad annos XV.

Lincii Austriæ,

Sumptibus GODOFREDI TAMPACHII Bibl. Francof.
Excudebat IOANNES PLANCVS.

ANNO M. DC. XIX.

AD
Serenisſimum & Potentisſimum
Principem & Dominum
D. IACOBVM,
Magnę Britanniæ, Franciæ, Hiberniæ Regem, Fidei Defensorem, &c.

Dominum meum Clementisſimum.

CVR hos ego libros Harmonices inter homines vulgandos, ex Imperatoris Auguſtiſſimi, Domini mei aulâ, ex eius Regnis & Prouinciis hæreditariis Auſtriacis, ex ipſâ denique Germaniâ, trans mare ablegarem, tuoq; Rex Inclyte, conſpectui ſereniſſimo ſiſterem: cauſas habui partim præſentes, partim antiquas.

Primùm enim hoc non alienum à meo munere putaui; vt quia Cæſaris in re Mathematicâ ſtipendia mereo, demonſtrarem igitur etiam exteris, quantam gereret prouidentiam, Princeps Reip. Chriſtianæ, diuiniſſimorum ſtudiorum: vt intelligeretur ex curſu non interturbato Pacis ornamentorum per has prouincias, famam inteſtini belli ſiniſtram, cum ipſa re proculdubio breui extinctum iri: Diſſonantiamque hanc paulò duriorem, vt in Patheticâ Melodiâ, iam iamque in ſuauem Clausulam desituram. Quem verò Bonitatis Imperatoriȩ digniorem æstimatorem, Rege magno? quem operis de Cælorum Harmoniâ, Pythagoram redolentis & Platonem, conuenientiorem Patronum, Rege illo legissem, qui Platonicæ sapientiæ studium domesticis monumentis, quȩ subditorum veneratione etiam publica habemus, est testatus? qui Astronomiam Tychonis Brahei, cui opus hoc innititur, puer adhuc, ornamentis ingenii sui dignam censuit? qui denique vir factus, & regni gubernacula tractans, Astrologicam vanitatem publicâ censurâ notauit? quæ sane, libro huius operis IV. detectis veris fundamentis effectuum sideralium, clarissime patescit: Vt nulli dubium esse possit, quin totius huius Operis, omniumque eius partium sis futurus intelligentissimus.

Maior verò mihi causa dedicationis ex antiquo est ista. Cum primum ante annos paulò minus viginti materiam operis animo concepissem, titulumq; nuncupassem, nondum cognitis Planetarum motibus propriis, in quibus tamen inesse Harmonias instinctus Naturæ dictabat: Iam tunc ego patrocinium operis, si quando id succederet, absolutumque esset, Maiestati tuȩ destinaui; hocq; veluti votum meum Legatis tuis ad aulam Imperatoriam semel atque iterum testatum feci. Causas de hoc Harmonicorum meorum patrocinio cogitandi, suppeditabat mihi Dissonantia illa multiplex in rebus humanis, manifesta quidem, vt non possit non offendere; ex concinnis tamen & articulatis interuallis conflata, quorum hæc est natura, vt auditum in mediâ discordantiâ, promissione successuræ suauis concordiæ demulceat, eiusdemq; expectatione sustentet. Enimuerò digna erat homine Christiano persuasio, Deum esse, qui omnem Melodiam vitæ humanæ moderantur, digna magnitudine Dei patientia, non offendi prolixitate dissonantiarum, nec spes abiicere; reputantem, non Dei

proui-

prouidentiam lentè agere, ſed noſtrum ſingulorum æui ſpacium velociter auolare. Docebar equidem ſacris oraculis, omnia à Deo certis & ſalutaribus vſibus eſſe deſtinata: etiam diſſona iſta, ad elucidandam & commendandam Conſonantiæ ſuauitatem. Cur autem à tuâ potiſſimum Harpe Dauidicâ, Rex Inclyte, principium aliquod expectare conſonantiæ reſtaurandæ, deſideria mea me iuberent: etſi non eſt huius loci fuſius explicare, ne prudentum monita contemnere videar: hanc tamen, toto dudum ab orbe confeſſam partem gloriæ, rerum abs Te geſtarum, attingere nemo prohibeat: quod Angliæ regnum, hęreditate & conſenſu populi adeptus, breui illi commune cum Regno Scotiæ, Magnæ Britanniæ nomen dediſti; ex vtraq; prouinciâ Regnum & Harmoniam vnam (nam quid aliud eſt regnum, quam Harmonia) contemperaſti, diſcordiam hęreditariam Nationum infenſiſſimarum fœliciſſimè ſuſtuliſti; memoriam crebrarum & cruentiſſimarum cladium, quibus ceu notis quibuſdam, ſeries ſęculorum erat interſtincta, penitus extinxiſti. Hoc domeſticum tuum opus, omen (inter cętera ponderoſiora) non infidum mihi continere videbatur, fore vt etiam foris, Rex inter Reges, Fidei Defenſor inter Chriſti fideles, maius aliquod & pręſtantius, etiamque durabilius opus perficeres: quod quidem & votis meis tacitis, & ominatione publicâ, libro de ſtellâ nouâ, quæ veluti Carbunculus arderet (notus Scotię verſiculus) ſum proſecutus. Itaque velut iam confecto quod optabam & augurabar, Harmoſtę tam laudabili, meas aliquando Mundanas Harmonias accinere tanto firmius mihi proponebam.

Vellem hic, Diſſonantiam publicam, Vocum trifariam obſtrepentium, paulò mihi mitiorem eſſe, vt audiri publicè ex animi mei ſententiâ poſſem: qua in re viſus fuerit adſpirare votis euentus? quę vulnera capitis, qui-

bus

bus Harmoniis tentata, à quo Medico? & vt etiam hunc ego in libro de ſtella noua, longe antea viuis coloribus depinxerim? At quodnam erit operæ precium, ſi Harmoniam affectans priuato ſtrepitu, nec vincam fremitus publicos, imbecillitate laterum, & moleſtias abſurdi concentus in meis auribus inſuper augeam? Fatendum equidem eſt, proh dolor, tumere adhuc vulnus decuſſatum, an malumus ſacratiori fœlicioriq; vocabulo, cruciforme, tumere inquam, multiplici labro; & nullo illorum conniuente, medicinam hactenus irritam, omnibusque partibus irriſam; propterea quod Medicus, vt ægro deliro pharmacum fallens ingerat, multa ſimul & multa adiicit, quæ à ſana ratione plurimum abire videntur. Recreor tamen hac ipſa cogitatione, quòd ſupremus vulnerum noſtrorum Curator artis ſuæ certus ſit, nec quicquam fruſtra applicet. Ergo qui curam iam eſt aggreſſus, qui iam expediuit, iam mundo monſtrauit, conſolidantia iſta; interim verò per calamitates publicas erodentibus vtitur, quoad conſumptâ carne putridâ & ferâ, charitatis ſcilicet extinctæ, ſenſus aliquis doloris ad viuę carnis profunditatem deſcenderit: idem procul dubio lenientibus etiam vtetur prope diem ad deprimendos tumores; vt conſolidantibus illis denique locus eſſe poſſit: tandemque Diſſonantia hæc diuturna (vt ad propoſitum exemplum reuertar) in meram & durabilem Harmoniam terminetur. Qua in ſpe etiam contra ſpem confirmor non tantum ſucceſſu mearum ſpeculationum Harmonicarum, vt cuius fœlicitas audaciam in quærendo longiſſime ſuperat: ſed etiam hoc ipſo, quod inter cætera, quæ, ad Operis perfectionem neceſſaria, per tot iam annos fuerunt loco priſtino, Maieſtatem etiã Tuam Regiam, cui patrocinium operis, antequam inciperetur, deſtinaueram, huc vſque incolumem & florentem vidi: nec deſinam à Deo Pacis & Concordiæ authore contendere deuotis precibus, vti tibi

tibi & vitam & Maiestatem Regiam, vsque ad optatum illum euentum incolumem tueatur.

Interim Maiest. Tuam Reuerend.ᵐᵐ supplex rogo, vt & hoc opus Harmonices, Nomini suo dedicatum sereno vultu aspiciat, & hanc mei deuotissimi affectus in Se, significationem æqui bonique consulat: contemplatione verò Operum Dei Regium oblectet animum, quantum per necessarias Regni occupationes licebit: & exemplis Concordiæ resplendescentis ex operibus Dei visibilibus, studium in se Concordiæ & Pacis Ecclesiasticæ & Politicæ confirmet excitetq; : denique me meaque studia Regio suo patrocinio clementissimo dignetur. Dabam Lentiis Noricis ad Ripam Danubii, Ididus Februariis, Anno æræ Occidentis M. DC. XIX.

Sereniss. Maiest. Tuam Regiam

Omni cum submißione venerans

Imp. Cæs. Matthiæ, eiusque fideli. Ordinum Archiducatus Austriæ Supr Anisanæ Mathematicus

IOHANNES KEPPLERVS.

IO. KEPLERI
HARMONICES MUNDI
LIBER I.

DE FIGVRARVM REGVLARIUM, QUÆ PROPORTIONES HARMONICAS pariunt, ortu, claſsibus, ordine & differentijs, causâ ſcientiæ & Demonſtrationis.

PROCLUS DIADOCHUS
Libro I. Comment. in I. Euclidis.

Πρὸς δὲ τὴν φυσικὴν θεωρίαν (ἡ μαθηματικὴ) τὰ μέγιστα συμβάλλεται, τήν τε τῶν λόγων εὐταξίαν ἀναφαίνουσα, καθ' ἣν δεδημιούργηται τὸ ΠΑΝ, &c: καὶ τὰ ἁπλᾶ καὶ πρωτουργὰ στοιχεῖα, καὶ πάντῃ τῇ συμμετρίᾳ καὶ τῇ ἰσότητι συνεχόμενα δείξασα, δι' ὧν καὶ ὁ πᾶς οὐρανὸς ἐτελειώθη, σχήματα τὰ προσήκοντα, κατὰ τὰς ἑαυτοῦ μερίδας ὑποδεξάμενος.

Cum S. C. Mtis. Privilegio ad annos XV.

LINCII AUSTRIÆ
Excudebat Johannes Plancus,
ANNO M. DC. XIX.

Prooemium.

CVm a divisionibus circuli in partes aliquotas æquales, quæ fiunt Geometricè & scientificè, hoc est, à figuris planis Regularibus demonstrabilibus, sint nobis petendæ causæ Proportionum Harmonicarum; illud initio significandum duxi; differentias rerum Geometricarum mentales, hodie, quantum apparet ex libris editis, in solidum ignorari. Adeóq; ne ex veteribus quidem, qui has specificas rerum Geometricarum differentias se exactè cognovisse significaverit, præter Euclidem, ejusq; cõmentatorem Proclum, quisq̃ occurrit. Pappi quidem Alexandrini, veterumq;, quos ille sequtur, distributio Problematum, in Plana, Solida & Linearia, satis est apposita ad habitus mentis circa unamq̃q; subjecti Geometrici partem orientes, explicandos: illa tamẽ & brevis est verbis, & ad praxin applicata; de theoria nulla fit mentio: & verò nisi totâ mente in theoriâ hujus rei occupemur, nunq̃ assequi poterimus rationes harmonicas. Proclus Diadochus, libris quatuor in primum Euclidis editis, Philosophum Theoreticum in mathematico subjecto ex professo egit: q̃ si cõmentaria sua in decimum etiam librum Euclidis nobis reliquisset: & nostros Geometras inscitia liberasset non neglectus; & me labore hoc explicandi rerum Geometricarum differentias in solidum sublevasset. Satis enim illi cognita fuisse discrimina ista Entium Mentalium, ex ipso exordio facilè apparet, cùm principia totius essentiæ Mathematicæ statuit eadem, quæ etiam ꝑ omnia Entia vadunt, omniaq; à se gignunt, Finem sc. & Infinitum: seu Terminum & Interminatum: terminum vel cirumscriptionem pro Forma, interminatum pro Materia agnoscens rerum Geometricarum.

Proclus de intellectuali essentia rerum Geometricarū.

Quantitatum n. propria sunt, Figuratio & proportio; figuratio singularum, proportio junctarum. Figuratio ꝑficitur terminis, linea n. recta punctis, sup̃ficies plana lineis, corpus superficiebus terminatur, circumscribitur & figuratur. Quæ igr̃ finita circumscripta & figurata sunt, illa etiam comprehẽdi mente possunt: infinita & indeterminata quatenꝰ talia nullis scientiæ, quę definitionibus, comparatur, nullis demonstrationum repagulis coartari possunt. Prius autem figuræ sunt in Archetypo, quàm in Opere, prius in mente divinâ, quàm in creaturis; diverso q̃dem subjecti modo, sed eâdem tamen essentiæ suæ formâ. Igr̃ quantitatibus figuratio, Mentalis q̃dam essẽtia fit, seu intellectio, earum essentialis differentia. Id multò magis clarum est ex proportionibus. Cum n. figuratio pluribus terminis ꝑficiatur, fit ut pp̃ hanc pluralitatem figuratio proportionibꝰ utatur: Proportio verò quid sit sine mentis actione, id verò intelligi nullatenus potest. Eóque etiam hoc nomine, q̃ quantitatibꝰ terminos dat pro principio essentiali, is figuratas quãtitates intellectualem essentiam habere ponit. Sed non est opus argumẽtatione, legatur totus liber Procli; satis apparebit, ipsi differentias intellectuales rerum Geometricarum probè fuisse cognitas; etsi affirmatum hoc ille non ita seorsim solitariũ in aperto & conspicuo ponit, ut etiam oscitantem ejꝰ admoneat: fluit n. ejus oratio pleno velut alveo, copiosissimis undiqua strata sententijs abstrusioris philosophiæ Platonicæ, quas inter & hoc est, libri hujus argumentum singulare,

Verum

Petri Rami iniqua in Euclidem & imperita censura.

Verùm huic nostro sæculo non vacavit hactenus, ad tam recondita penetrare: lect⁹ est liber Procli Petro Ramo, sed quòd ad nucleum attinet philosophiæ, pariter cum decimo Euclidis cōtempt⁹ & abject⁹: quiq; comētarium in Euclidem scripserat, veluti si apologiam pro eo scripsisset, repudiatus & obmutescere jussus: irritata verò infensi Censoris ira in Euclidem ut reum vertit; damnatus est atroci sententia Euclidis decimus, ut ne legeretur, qui lectus intellectusq;, philosophiæ mysteria pandere poterat. Legite quæso verba Rami, quibus ille nihil unq̄ indignius Ramo protulit: Scholarum Math. lib. 21. *Materies inquit, decimo libro proposita, eo modo est tradita; ut in humanis literis atq; artib⁹ similem obscuritatē nusquam deprehenderim: obscuritatem dico non ad intelligendum, quid præcipiat Euclides (id n. vel indoctis & illiteratis, id solum quod adest, quodq; præsens est, intuentibus, possit esse perspicuum) sed ad perspiciendum penitus & explorandum, quis finis sit & usus operi propositus, quæ genera, species, differentiæ sint rerum subjectarum: nihil n. unquam tam confusum vel involutum legi vel audivi. Quin superstitio Pythagorica in hunc quasi specum inducta videatur &c.* At hercle, Rame, nisi nimiùm facilem ad intelligendum hunc librum credidisses: nunquàm tantam obscuritatem fuisses calumniatus. Labore majore opus est, quiete opus est, sollicitudine opus est, & attentione p̄cipuâ mentis, donec comprehendas intentum scriptoris: ubi eo fuerit enisa mens generosa, tum demum sese in lumine veri versari cernens, incredibili voluptate perfunditur exultans, & ab illâ veluti specula totum Mundū omnesque ejus partium differentias exactissimè perspicit. At tibi, qui hoc loco patronum agis ignorantiæ, vulgique hominum, lucra captantium ex omni re, divinâ, humanâ, vobis inquam sint ista *prodigiosa sophismata*, vobis *ocio fuerit Euclides intemperanter abusus*, vobis *acumina ista locum in Geometria nullum habeant*; vestrum esto, carpere quæ non intelligitis: mihi qui rerum causas indago, præter quàm in decimo Euclidis, semitæ ad illas nullæ patuerunt.

Lazarus Schonerus.

Ramum secutus Lazarus Schonerus, in Geometria sua, fassus est se quinque corporum Regularium usum planè nullum in Mūndo videre potuisse, donec libellum meum, quem Mysterium Cosmographicum inscripsi, perlegerit: in quo Planetarum numerum & intervalla, probo ex corporibus quinque Regularibus esse desumpta. Ecce quid nocuerit Ramus magister Schonero discipulo. Primùm Ramus Aristotele perlecto, qui refutaverat Pythagoricam philosophiam circa Elementorum proprietates ex quinque corporibus deductas, statim animo concepit contemptum totius Philosophiæ Pythagoricæ; deinde cùm sciret Proclum fuisse Pythagoricæ sectæ, non credidit ei affirmanti, quod erat verissimum, sc. Euclidei operis ultimum finem, ad quem referrentur omnes omninò propositiones omnium librorum (exceptis quæ ad Numerum perfectum ducunt) esse quinque corpora regularia. Hinc orta est apud Ramum confidentissima persuasio, Quinque corpora esse removenda à fine librorum Elementariorum Euclidis.

Adempto fine operis, veluti formâ ædificij sublatâ, relinquebatur informis strues propositionum in Euclide, in quam velut in larvam aliquam Ramus totis octo & viginti libris Scholarum invehitur, magna dicendi acerbitate, magna temeritate, tanto viro indignissimâ. Hanc Rami persuasionem secutus Schönerus credidit ecce & ipse, corpora regularia nulli esse usui: nec hoc tantum; sed & Proclum neglexit, aut contempsit, judicium Rami secutus; à quo Proclo discere poterat usum corporum quinque & in Elementis Euclidis & in Mundi fabrica. Et quidem fœlicior erat discipulus Magistro, quia usum corporum à me patefactum in Fabrica Mundi gratulabundus recepit, quem Ramus à Proclo inculcatum repudiaverat. Quid cum enim si Pythagorei figuras has elementis, non verò ut ego, Sphæris Mundi attribuerũt? Annisus esset Ramus, ut errorem hunc ipsorum circa genuinum figurarum subjectum tolleret, ut ego feci; non totam hanc Philosophiam uno verbo tyrannico sustulisset. Quid si Pythagorici hoc idem docuerunt, quod ego, sententiam involucris verborum texerunt? Nonne Copernicana Mundi forma extat in ipsô Aristotele, perperam ab ipso refutata sub nominibus alijs: dum illi Solem Ignem, Lunam Antichthona appellarunt? Si namq; dispositio orbium eadem fuit apud Pythagoreos, quæ apud Copernicum, si nota Corpora quinque, eorumque numeri quinarij necessitas; si constanter omnes docuerunt, corpora quinque esse Mundi partium Archetypos; quantulum superest, ut credamus illorum sententiam sub ænigmate ab Aristotele lectam, quasi sub vero vocabulorum sensu fuisse refutatam: dum Aristoteles legit Terram, cui Cubum dabant; cùm ipsi fortè Saturnum intellexerint, cujus Orbis interpositu Cubi summotus est à Jove. Et terræ quidem quietem vulgus ascribit, Saturnus verò motum tardissimũ, quieti proximum est sortitus, unde etiam ap. Hebræos à Quiete nomen obtinuit. Sic Aëri datum Octaëdron legit Aristoteles, cùm illi fortè Mercurium intellexerint, cujus orbis Octaëdro inclusus est; nec minus velox est Mercurius (quippe omnium velocissimus) quàm mobilis Aër habetur. Ignis vocabulô fortasse Mars fuit insinuatus, cui alias etiam ab igne nomen est Pyrois, atque illi Tetraëdron datum, forte quia includitur ejus orbis hac figura: Et Aquæ sub involucro, cui Icosaëdron attributum, Veneris stella (ut cujus curriculum Icosaëdro continetur) latere potuit, quia Veneri humores subjecti, ipsaque dicitur orta Maris spumâ, unde vox Ἀφροδίτη. Denique Mundi vox potuit significare Terram; & Mundo Dodecaëdron adscribi, quia Terræ curriculum hac figura continetur, duodecim longitudinis partibus distinctum; uti illa figura duodecim toto ambitu planis continetur. Quòd igitur in Mysterijs Pythagoreorum hoc pacto quinq; figuræ distributæ fuerint non inter Elementa, ut Aristoteles credidit, sed inter ipsos Planetas; illud vel maximè confirmat, quòd Proclus finem Geometriæ inter cæteros hunc tradit, quòd doceat, quo modo figuras convenientes cœlum certis sui partibus acceperit.

Lazari Schoneri sententia de quinq; figuris solidis.

Pythagoreorum de quinq; figuris Mystica interpretatio.

Nec dum finis est damni, quod Ramus nobis dedit, ecce sollertissimum Geometrarum hodiernorum Snellium, planè suffragantem Ramo, præfatione in Ludolphi à Cöllen Problemata: primum ait, *ad usum inutilem esse divisionem illam ineffabilium in tredecim species*. Concedo, si nullum ille usum agnoscat, nisi in vita communi, & si nullus contem

Willebrordi Snellij de Binominalibus sententia.

templationum physicarum sit usus ad vitam. At cur non Proclum sequitur, quem allegat, qui agnoscit aliquod majus Geometriæ bonum, quàm sunt artes ad vitam necessariæ? tunc equidem & decimi libri usus apparuisset in æstimandis figurarum speciebus. Allegat Snellius authores Geometras, qui non utantur libro decimo Euclidis. Sanè omnes illi aut linearia tractant problemata, aut solida, & de figuris vel quantitatibus talibus, quæ non habent finem suum intra sese, sed manifestè tendunt ad usus alios, nec sine ijs exquirerentur. At Figuræ regulares propter seipsas exquiruntur ut Archetypi; suam in seipsis habent perfectionem, suntque inter subjecta planorum Problematum, non obstante quod planis hedris solidum etiam clauditur: similiter & decimi libri materia potissimùm ad plana pertinet. Cur igitur allegarentur heterogenea? aut cur vilis æstimatur merx, quam non emit Codrus, ut eâ ventrem pascat, emit verò Cleopatra, ut aures ornet? *Crux tantùm defixa est ingenijs?* Equidem ijs, qui numeris, hoc est effando vexant Ineffabilia. At ego has species tracto non numeris, non per Algebram, sed ratiocinatione Mentis; sanè quia ijs mihi non est opus ad subducendas Rationes mercatuum, sed ad explicandas rerum caussas. Segreganda censet subtilia ista à στοιχειώσει, inque Bibliothecas abstrudenda. Omninò fidum Rami discipulum agit, nec ineptam locat operam: Ramus Ædificio Euclideo formam ademit, culmen proruit, quinque corpora; quibus ablatis, compages omnis dissoluta fuit, stant muri fissi, fornices in ruinam minaces: Snellius igitur etiam Cæmentum aufert, ut cujus nisi ad soliditatem domus sub quinque figuris coagmentatæ nullus est usus. O fœlicem captum discipuli, quàm ille dextrè Euclidem intelligere didicit à Ramo: sc. ideò putant Στοιχεῖα dicta, quòd inveniatur in Euclide propositionum & problematum & Theorematum omnivaria copia, ad omne genus Quantitatum artiumque circa illas occupatarum: cùm liber Στοιχειώσις sit dictus à formâ, quòd semper sequens propositio innitatur præcedenti, usque ad ultimam libri ultimi (partim & libri noni) quæ nullâ priorum carere potest. Ex Architecto saltuarium faciunt aut materiarium, existimantes Euclidem ideò librum suum scripsisse, ut omnibus alijs commodaret, solus ipse propriam domum nullam haberet. Sed plus satis hoc loco de hisce: revertendum est ad caput orationis.

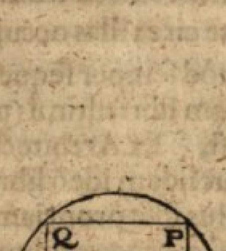
Cùm enim cernerem, veras & genuinas rerum geometricarum differentias, à quibus arcessendæ mihi sunt causæ Harmonicarum Proportionum, vulgò ignorari penitus: Euclidem, qui studio illas tradiderat, Rami cavillis oppressum explodi, strepituque lascivientium obturbante, à nemine exaudiri, aut surdis etiam narrare Philosophiæ mysteria; Proclum, qui mentem Euclidis aperire, abstrusa eruere, difficiliora captu, facilia reddere potuisset, & deridiculo esse, nec Commentaria sua usque ad librum decimum continuasse: vidi hoc omnino mihi faciendum esse; ut initio, ex libro decimo Euclidis exscriberem ea, quæ ad præsens institutum meum præcipuè facerent; seriem etiam rerum illius libri, certis quibusdam interjectis divisionibus, in lucem proferrent

Occasio hujus Libri I.

ferrem, causas indicarem, cur quædam divisionum membra ab Euclide fuerint omissa: tunc demum de figuris ipsis agendum fuit. Ubi quæ fuerunt ab Euclide demonstrata clarissimè; in ijs simplici propositionum allegatione contentus fui: multa quæ sunt ab Euclide demonstrata viâ aliâ, propter finem mihi propositum, scilicet propter comparationem figurarum scibilium & inscibilium, hîc fuerunt repetenda, vel disjuncta conjungenda, vel ordo mutandus. Definitionum, Propositionum, Theorematum seriem continuo Numero sum complexus, ut in Dioptricis feci, propter allegationum commoditatem: in ipsis etiam lemmatibus non accuratus fui, nec nimium de vocabulis sollicitus, magis in res ipsas intentus: quippe qui non jam in Philosophia Geometram, sed in hac Geometriæ parte Philosophum agam. Atque utinam de rebus Geometricis adhuc populariùs, dummodo & clariùs & palpabiliùs disserere potuissem. Sed spero, lectores æquos in utrâque re, & quòd Geometrica populariter trado, & quòd materiæ obscuritatem industriâ vincere non potui, meam operam boni consulturos. Quibus etiam hoc ad extremum do consilij; ut si Mathematicarum rerum penitus imperiti fuerint; transmissis enarrationibus meis, solas legant propositiones, à XXX usque ad finem; & fide propositionibus ipsis adhibitâ sine demonstratione, pergant ad libros cæteros, præsertim ad ultimum; ne difficultate Geometricarum argumentationum absterriti, fructu sese privent Harmonicæ contemplationis jucundissimo. Nunc ad rem accedamus cum Deo.

De Figurarum Regularium demonstrationibus.

I. Definitio.



PLana Figura regularis illa dicitur, quæ omnia latera & omnes angulos, extrorsum versos, æquales habet.

Ut hic QPRO, latera QP, PR, RO, OQ, sunt æqualia, & anguli QPR, PRO, ROQ, OQP, æquales.

II. Definitio.

EArum quædam sunt primæ & radicales, quæ suos ipsæ terminos non excedunt, quibus propriè convenit posita definitio: quædam sunt auctæ, quæ sua veluti latera excedunt, continuatis alicujus radicalis lateribus non contiguis, ad concursum: dicuntur Stellæ.

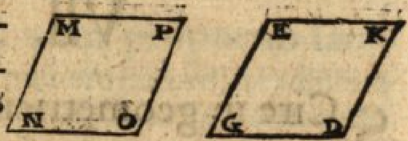
Ut hic

Ut hic ABCDE est perfectum quinquangulum, estque figura prima, non desiderans aliam perfectam, ex qua, continuatione laterum, producatur.

At FGHIK est stella quinquangula, & figura aucta, continuatis lateribus binis, non contiguis, verbi causa AB, & DC, ad concursum I.

III. Definitio.

Semiregulares sunt, quæ angulos variantes, latera quatuor habent æqualia, ut Rhombi *NMPO*; *GEKD*.



IV. Propositio.

Omnes figuræ Regulares angulis suis omnibus simul eidem circulo possunt insistere.

Nam per 21. Tertij Euclidis, Omnes anguli æquales, eidem, & sic etiam ejusdem circuli æqualibus segmentis inscribi possunt, sunt autem omnes anguli Regularis figuræ æquales, omnes igitur unius figuræ anguli æqualibus unius circuli segmentis possunt inscribi. Sed & actu omnes inscribi necesse est, uno inscripto. Nam latera omnia sunt æqualia; quare etiam sunt æqualia segmenta circuli, quæ à binis unius anguli lateribus abscecantur; per 24. Tertij Euclidis: Ergò tam angulus, quàm laterum fines; simul in eundem circulum competunt. Fines verò laterum sunt & ipsi anguli. Secus esset si; quamvis æqualibus angulis, latera non essent æqualia: tunc enim dissolveretur necessitas inscriptionis omnium.

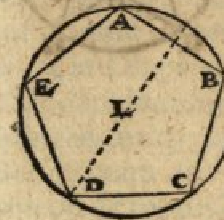
V. Definitio.

Describere Figuram, est proportionem linearum angulis subtensarum, ad anguli crura geometrico actu determinare; ex determinatis, triangula figuræ Elementaria construere, ex triangulis coassatis, figuram ipsam perficere.

Data enim proportione DA ad AE, ED, fiunt triangula DAE, DAC, CAB: ex quibus constat figura.

VI. Definitio.

INscribere Figuram circulo, est proportionem lateris figuræ ad diametrum circuli, cui est inscribenda, Geometrico actu determinare, quâ constitutâ proportione; facilè in circulo figura proposita delineatur.



Ut si detur LD semidiameter, vel ejus dupla diameter, si sciamus, quid faciendo cum eâ, justam longitudinem lateri DE indulgeamus; facilè posteà repetitione ipsius DE, per circumferentiam, consummamus figuram.

VII. Definitio.

SCire in geometricis, est mensurare per notam mensuram; quæ mensura nota in hoc negocio inscriptionis Figurarum in circulum, est diameter circuli.

VIII. Definitio.

SCibile dicitur, quod vel ipsum per se immediate est mensurabile per diametrum, si linea; vel per ejus quadratum, si superficies: vel quod formatur ad minimum ex talibus quantitatibus, certâ & geometricâ ratione, quæ quantumcunque longâ serie, tandem tamen à Diametro, ejusve quadrato dependeant. Græcè dicitur γνώριμον.

IX. Definitio.

DEmonstratio est quantitatis vel describendæ uel sciendæ, ex Diametro deductio, per intermedia possibilia, Græcè Πόρισμα.

Ita demonstratio communiter vel descriptionem parit vel scientiam. Et Descriptio quidem quantitatem nudam, scientia verò insuper & qualitatem, quantitatemvè certam profitetur. Potest autem aliqua linea esse geometricè determinata, Græcè τακτή, quæ tamen actu mentis, qualis sit, nondum sciatur. Potest vicissim alicujus vel aliquarum linearum qualitas aliqua sciri, quæ tamen ipsas nondum determinet, vel necessitet: si nimirum qualitas illa multis alijs rebus, quantitate differentibus sit communis. Est etiam quarundam linearum descriptio facilis, scientia difficilima. Deniq; multa describi possunt actu Geometrico qualicunq; sciri tamen non possunt naturâ suâ: ut quidem scibile suprà descripsimus.

X. De-

X. Definitio.

PRopria demonſtratio eſt, cum numerus angulorum Figuræ vel ipſius, vel ei cognatæ numero laterum duplo aut dimidio, fit medius terminus ad determinandam proportionem lateris, quam id habet ad Diametrum.

Omnis enim figura regularis, eſt aut ipſa triangulum, aut reſolvitur in triangula, ductis diagonalibus. Cùm autem omne tale triangulum habeat tres duobus rectis æquales; in Trigonico igitur angulo eſt pars tertia, in Tetragonici elementaris angulo minimo, pars quarta, in Pentagonici pars quinta, in Heptagonici, pars ſeptima &c: duorum rectorum. Et ab hac quantitate anguli, incipit demonſtratio cujusq.

XI. Definitio.

IMpropria demonſtratio eſt, cum proportio lateris ad diametrum ex ipſo angulorum numero immediatè adhibito nequit determinari Geometricè, niſi adhibeatur latus figuræ alterius, non duplo aut dimidio numero laterum.

XII. Definitio.

GRadus ſcientiæ diverſificant, alij remoti, alij propinqui. Primus & proximus gradus, cùm lineam aliquam ſcio & demonſtrare poſſum, eſſe diametro æqualem, aut planum, licet aliter formatum, quadrato diametri æquale.

Hic menſura nota, perfectè, ſcilicet ſeipsâ & uno actu, menſuram noſcibile.

XIII. Definitio.

SEcundus gradus, cùm diametro in aliquot partes æquales certo numero diviſâ, vel ejus quadrato ſimiliter, linea vel planum propoſitum æquatur tali parti vel partibus. Talis linea dicitur Græcè ῥητὴ μήκει Effabilis longitudine. Planum verò tale ſimpliciter dicitur ῥητὸν, Effabile. Numerus enim eſt Geometrarum ſermo.

Ad hanc ſcientiæ gradum vel per deſcriptionem, inſcriptionemque pervenimus; vel aliter etiam per cognationem cum alia aliqua quantitate, ad quam per illa media perveniebatur. Eoque non determinat hæc qualitas unam aliquam quantitatem; neque enim ſufficit ad determinationem, ut ſciam, aliquid cauſa commenſurationis ſic vel ſic eſſe comparatum; oportet etiam hoc ſcire, quomodo, id eſt, quo numero ſit Effabile.

XIV. Definitio.

Tertius Gradus est hic, cum linea longitudine est Ineffabilis, at ejus quadratum Effabile, & pertinens ad secundum gradum. Dicitur ῥητὴ δυνάμει, Effabilis potentiâ.

XV. Definitio.

Irrationale quid latinis Geometris.

Qui sequuntur gradus, omnes appellantur Ἄλογοι, Ineffabiles. Interpretes Latini verterunt, Irrationales, magno ambiguitatis & absurditatis periculo. Nos sepeliamus hunc vocis usum, quia multæ sunt lineæ, quæ quamvis Ineffabiles, optimis tamen continentur rationibus. Arithmetici consimili translatione appellant Numeros surdos, id est, qui non plus loquuntur quam surdus audit: sed sub hoc nomine tam Effabiles solâ potentiâ, quam ineffabiles quantitates intelligunt. Est igitur quartus in ordine gradus, primus verò ineffabilium, quando nec linea, nec ejus quadratum sunt Effabilia; sed tamen Quadratum in tale Rectangulum transformari potest, cujus latera sint Effabilia saltem potentiâ. Hæc linea dicitur MESE, quia est media proportionalis inter duas Effabiles sola potentiâ commensurabiles: ut si una quidem sit Effabilis longitudine, altera solâ potentiâ; aut si utraque sola potentiâ Effabilis, potentiæ tamen inter se non sint ut quadratus numerus ad quadratum.

Surdi Numeri.

Talis linea non scitur vel mensuratur longitudine certarum partium æqualium diametri, nec ejus quadratum, quadrato diametri; sed nec lineæ mensurantur à Diametro ambæ simul, inter quas MESE est media proportionalis; sed illarum linearum quadrata, hæc demum à quadrato diametri mensurantur.

Quadratum MESES & ipsum MESON dicitur, sive sit formæ quadratæ, seu in Rectangulum transmutetur: estque hoc alterum Plani genus, post Effabile planum: Et hisce duobus planis, Effabili & Meso sequentes species inter se distinguuntur.

XVI. Definitio.

Ad lineas alias singulares transitus est nobis, per copulationem linearum binarum, quæ ipsæ quoque novos gradus scientiæ interponũt. Secetur n. vel diameter, vel aliqua diametro commensurabilis saltem potentiâ & sic Effabilis, aut etiam aliqua Mese; secetur inquam in partes duas inæquales, aut conferantur ex duarum talium sectionibus, duæ quæcunq; partes, vel compositæ ex partibus, vel compositas potentias, diminutasve, ex talibus habentes, duæ inquam in genere inæquales: illæ aut erunt longitudine commensurabiles inter se; aut incomensurabiles qdem longitudine, comensurabiles verò potentiâ. Hic quamvis à commensuratione planè recesserunt singulæ, at junctæ tamen nonnullæ adhuc vel quadratis in unam summam collatis, vel Rectangulo communiter formato, constituunt plana hactenus exnus explicata, non minus quam idem faciunt & illæ, quæ sunt inter se commensurabiles. Cæterum cum multiplex sit talium duarum planè incommensurabilium copulatio, alia aliâ ignobilior: non poterimus omnes bigas in unum gradum referre.

XVII. Definitio.

Sit ergo quintus scientiæ gradus, Cum duæ nec Effabiles ambæ, nec MESÆ, ampliùsque inter se planè incommensurabiles, utrumq; faciunt Effabile, & summam quadratorum, & commune Rectangulum: non minùs quàm utrumq; horum faciunt duæ longitudine Effabiles, per 20. decimi Euclidis, vel etiam duæ solâ potentiâ effabiles, sed inter se tamen longitudine commensurabiles, per eandem. Ut latus de quadrato 2. & latus de quadro 8. sunt inter se in proportione dupla, quia quadra sunt inter se in proportione quadrupla. Sunt ergò longitudine quidem Ineffabiles, at inter se commensurabiles. Earum quadrata 2. & 8. juncta faciunt 10. Effabile planum, Et ipsæ in se multiplicatæ (quod est Rectangulum formare) faciunt rectangulum 4. etiam effabile. Hoc idem inquam, faciunt etiam duæ nec Effabiles nec Mesæ, ampliusq; inter se planè incommensurabiles; eòque non, ut priores illæ, in secundum vel tertium gradum scientiæ sunt referendæ, sed in Quintum.

Nota igitur quòd in hoc gradu mensuremus non lineas ipsas, nec singularum quadrata, sed mensuramus & commune ipsarum Rectangulum, & juncta utriusque quadrata in unam summam; ut quod uni quadrato deest, quo minùs sit effabile, id ab altero quadrato sociato exactè compensetur.

XVIII. Definitio.

Sextus & ignobilior scientiæ gradus est, cum binæ junctæ, quæ nec effabiles, nec Mesæ, ambæ simul, etiamque inter se incommensurabiles, alterutrum saltem Effabile faciunt, reliquum verò Meson. Estque geminus; aut enim summa quadratorum effabilis, Rectangulum Meson; aut illa Meson, hoc effabile est.

Illo Effectu similes sunt Duabus Effabilibus sola potentia commensurabilibus, Nam potentiæ ambæ, hoc est quadrata Effabilia, faciunt etiam summam utriusque Effabilem: Rectangulum verò est Meson, per 22. decimi Eucl.

Hoc verò effectu similes sunt duabus Mesis sola potentiâ commensurabilibus, quæ sunt ad se mutuò, ut duæ Effabiles, inter quas prima ex 2. Mesis, est proportionalis Media; per 26. & 28. decimi Eucl. Nam quia sunt potentiâ commensurabiles: additæ igitur potentiæ faciunt summam partibus commensurabilem. At partes sunt Mesæ; & quod Meso est commensurabile, ipsum etiam est Meson, per. 24. decimi Eucl.

Hic Rectangulum binarum metimur quidem plano quadrato diametri, at non etiam summam quadratorum: nam ei solùm invenimus duas lineas, Rectangulum ei æquale formantes, quarum quadrata metiamur quadrato diametri.

XIX. Definitio.

Septimus adhuc ignobilior scientiæ gradus est, cùm duarum inter se incommensurabilium neuter effectus est effabilis, nec summa quadratorum, nec commune Rectangulum: sed tamen adhuc utrumque Meson.

Hisce sunt effectu similes, duæ Mesæ potentiâ solâ commensurabiles, quarum una sit ad alteram, ut una earum, quas inter MESE verè est Media proportionalis, commensurabilum sc: solâ potentiâ, ad tertiam aliquam, solâ potentiâ commensurabilem, per 29. Decimi Eucl.

Has tres bigas, duplici genere Planorum distinctas, Euclides ob id potissimùm docet invenire, quia faciunt ad compositionem & constitutionem specierum sequentium.

XX. Definitio.

Ergo scientiæ Gradus Octavus ex præmissis interpositis derivatur, estque linearum iterum singularium, sed quæ compositione duorum nominum, sc. duarum copulatarum ex præcedentibus copulis, vel abstractione unius, Epharmozusæ dictæ, ab altera sociâ, constituuntur, novam speciem facientes. Ut sic in his sciamus seu mensuremus non integras lineas, non integrarum quadrata, non bina unuscujusque Nomina, sed eorum juncta quadrata & commune Rectangulum, ut præcedentibus XVIII. XIX. Et quamvis totidem scientiæ gradus numerare possemus, quot sunt futuræ species, quarum semper prior est posteriore nobilior: quia tamen quælibet compositio vel abstractio ad suum gradum respicit, nec ipso compositionis vel abstractionis opere constituitur ulla diversitas, sed omnes se habent ex æquo ad suas Nominum seu Elementorum bigas: ideò unum solum earum gradum faciemus: sed species ejus sciamus nobilitate distinctas.

XXI. Propositio.

Sciendum est autem, ex duabus inter se longitudine commensurabilibus nihil fieri, quod hîc in censum venire debeat: sive Effabiles illæ fuerint, sive Mesæ, sive Ignobiliores.

Nam si commensurabiles longitudine, tota etiam ex ijs composita, erit partibus commensurabilis. Atqui quæ Effabili commensuratur, Effabilis est: per de-

per definitiones ante 20. decimi Eucl. Quæ verò Mesæ commensurabilis, est Mese per 24. ejusdem. Et quæ cuique ex jam secuturis Ineffabilibus post Mesas, commensurabilis, ejusdem cum illa speciei est, per 66. 67. 68. 69. 70. 103. 104 105. 106. 107. Et sic est etiam cum alijs speciebus remotioribus, ab Euclide non commemoratis, quæ gradus remotiores faciunt. Ac etsi cum ijs non ita esset, id tamen ad nos nihil pertinet. Aut enim recidunt in unam specierum, quas jam constituemus ex incommensurabilibus; & sic non augent numerum: aut faciunt species ignobiliores vel sui vel alterius generis; & sic non sunt hujus loci, ubi gradus struimus, præmissis proximos nobilitate.

XXII. Definitio.

TRansmissis igitur ijs, quæ sunt longitudine commensurabiles, accedamus ad eas, quæ solâ potentiâ sunt commensurabiles. Igitur si componantur tales duæ Effabiles; fit BINOMINIS: sin abstrahantur, ex relicto fit Apotome: utriusque sex sunt species subordinatæ P. 48. 85. libri decimi.

Sin autem tales duæ Mesæ componantur, aut Effabile formantes Rectangulum, aut Meson: fiunt compositione BIMEDIALES, abstractione, MESES APOTOMÆ, illic PRIORES, hic POSTERIORES cognominatæ.

Hîc conjungere non licet Effabilem cum MESE: sunt enim tales duæ simpliciter incommensurabiles, de quo genere jam in sequenti agendum est.

XXIII. Propositio.

REstant igitur planè inter se incommensurabiles. Ex ijs verò aliquæ bigæ requisitos effectus præstare non possunt; ut sunt binæ Mesæ, item una MESE cum una Effabili.

Illæ quidem propter bigæ ignobilitatem, istæ verò propter suas discrepantes Naturas. Vide 71. 108. 109. decimi Eucl. Nulla igitur species compositionis hinc potest arcessi: restantq; nobis Ignobiliores tantùm, exclusis & Effabilibus & Mesis.

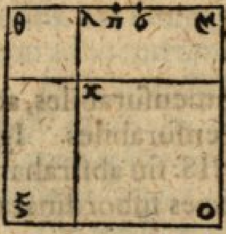
XXIV. Propositio.

EX biga verò primâ talium planè incommensurabilium, scilic. quæ sunt in præmissâ XVII. scibiles gradu quinto, componendo abstrahendove rursum nascitur Effabilis; suntque necessariò BINOMINIS & APOTOME, vide 112. 113. 114. Decimi Euclidis. Ut si & summa quadratorum Binominis & Apotomes, & commune Rectangulum illis est Effabile, oportet Nomina singula unius, Nominibus singulis alterius esse commensurabilia, quod non fit in omnibus BINOMINIBUS & APOTOMIS.

Quòd Binæ tales lineæ, duos requisitos effectus præstantes, necessariò fiant

Binominis & Apotome; demonſtratur ad eundem modum, ad quem 33. decimi eſt demonſtrata, tantùm ut pro duab⁹ ῥηταῖς δυνάμει μόνον, adhibeantur ῥηταὶ μήκει, & ubi vox μέσον occurrit, ῥητὸν ponatur: & ultimò comparetur Definitio Binominis & Apotomes.

Quòd autem ex compoſitione & abſtractione Binominis & Apotomes, duos requiſitos Effectus præſtantium, fiat rurſum Effabilis; ſic patet. Cùm enim ſumma quadratorum ſit Effabilis, & rectangulum Effabile; compoſitarum igitur in unum, quadratum conſtabit ex utriusq. quadrato, & duobus rectangulis communibus, ex duabus ſc. partibus Effabilibus: quare & totum quadratum



Effabile erit: igitur & linea compoſita, potens illud quadratum. Sit Binominis λμ ejus quandum κο, ſit & apotome λθ, ejus quadrum θκ, & ſint θκ, κο, juncta ſimul Effabilia, ſit & Rectangulum ex θλ, λμ, effabile, talium autem duo κμ, κξ complent quadratum totius θμ compoſitæ, quod quadratum eſt θο.

De abſtractione probatur in hunc modum. Si enim compoſita ex θλ, μλ, id eſt θμ, eſt effabilis, erit & dimidia θπ Effabilis, tanquam majus Nomen, & πλ Minus nomen, & altera dimidia πμ; aufer ab ea μσ æqualem ipſi θλ, erit & reſidua πσ Effabilis, & tota λσ, ſc. dupla ipſius πσ. At πσ eſt reſidua poſt ablationem Apotomes μσ, à Binomine λμ. Reſiduum ergò fit Effabile.

XXV. Definitio.

IGitur ex ſecunda biga ſexti gradus Num. XVIII. præmiſſo, linearum inter ſe planè incommenſurabilium, quibus ſumma quadratorum eſt Effabilis, Rectangulum Meſon; compoſitione naſcitur MIZON, ſeu MAIOR dicta; abſtractione ELASSON, ſeu MINOR. Ex tertia, ubi ſumma quadratorum eſt Meſon, Rectangulum Effabile, quæ componendo naſcitur, nomen habet POTENS EFFABILE ET MESON, quæ abſtrahendo, FACIENS CUM EFFABILI MESON TOTUM. Denique ex quarta biga ſeptimi gradus, Num: XIX. præmiſsâ, ubi uterque Effectus fit Meſon; componendo fit POTENS BINA MEDIA, abſtrahendo FACIENS CUM MESO MESON TOTUM.

Et ecce Originem duodecim ſpecierum Euclidearum, earumque Numeri cauſas. Nam ad remotiores, quæ vel ſummam quadratorum, vel Rectangulum commune, vel utrumque, proferunt ultra Effabilia & Meſa, in ignobiliores ſpecies, non cenſuit Euclides ſibi progrediendum eſſe.

XXVI. Definitio & Comparatio.

SVfficere ista poterant etiam nobis ad constituendos gradus Demonstrationum, quibus latera figurarum, nobis ad Harmonica necessariarum, distinguuntur: nisi quibusdam ex recensitis accederent aliæ insuper proprietates, imò nisi prævenirentur hactenus recensitæ proprietates, nobilioribus alijs, quibus cumulantur gradus scientificarum Demonstrationum.

Ventum est ad compositionem & abstractionem; ubi lineas componendas vel abstrahendas laxè sumpsimus, nullâ ijs impositâ certæ quantitatis necessitate. Quòd si jam adstringamus leges, impositâ certâ proportione bigis, non quidem sic datis, ut illæ junctæ unam duodecim specierum fecerunt; sed bigis aliter datis, uni scilicet rectæ datæ, & ejus parti majori inveniendæ, ut sit nimirum vel minor pars ad majorem, ut major ad componendam ex utraque; vel vicissim Major ad minorem, ut minor ad residuam: quod manet abstractione duarum factâ, non semper fiet gradus aliquis remotior, sed pro re nata, recidemus in unam explicatarum specierum; & regressu facto, comparabimus lineam constitutam, quæ per se est octavi gradus, cum lineis quarti gradus.

Quemadmodum enim in quarto gradu defin. XV. duæ rectæ communi operâ planum formabant, ex quo in quadratum redacto nascebatur linea, dicta Mese: sic jam duæ rectæ Tota & pars una, formant ipsam partem alteram subtrahendo, vel duæ partes formant totam addendo. Illic rectæ formantes, erant inter se commensurabiles solâ potentiâ: Hic missâ commensuratione, succedit proportionis identitas inter totum & partes. Illic proportionis similitudo erat inter minorē & faciendam, interq; faciendam & majorem; hic etiam est proportionis similitudo, inter faciendas duas, interque earum unam & propositam totam, in abstractione: in compositione verò inter faciendarum unam & propositam, interque propositam & faciendam alteram: Illic igitur datis duabus, dabatur Rectangulum æquale quadrato faciendæ, & sic planum ante lineam: hic è contrario, factis duabus faciendis, sequitur demum æqualitas inter Rectangulum extremarum & quadratum Mediæ, per 17. sexti & 11. secundi Euclidis.

Illic rectæ formantes, quadrata habebant commensurabilia quadrato Rectæ propositæ: hic docet Euclides, Prop. 30. libri Sexti, & sumere quadratum, propositæ quadrato commensurabile, sc. sesquintuplum ejus: & ab hujus quadrati latere auferre semissem propositæ, ut restet pars in propositâ statuenda, quâ parte de propositâ ablatâ, relinquebatur pars altera requisita, (vel ad totam additâ fiebat etiam tertia requisita). Et tot nominibus partes hæ videntur accensendæ gradui quarto.

In hoc verò puncto nobilior ipsâ Mese redditur linea, quamcunq; occupaverit ista proportio: quòd *M*ese longiori cathenâ, ex quatuor articulis compositâ, dependet ab Effabili propositâ: hujus verò partes situmnituntur proportione suâ, quam habent immediatè ad ipsam Effabilem propositam. Eóque fit ut Mesôn possint esse multæ, eodem omnes gradu distantes ab Effabili; pars verò major in hac proportione ipsius Effabilis una sola fit, & omninò cujusque lineæ post Effabilem, una singularis. Quo nomine æquiparatur ejus demonstratio primo quodammodò gradui.

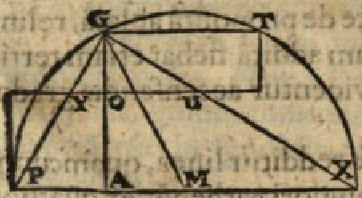
Quando igitur proposita Recta jubetur esse tota, ejusque duæ tales partes quæruntur, tunc hæc Geometris dicitur sectio secundum Extrema & Medium. Nimirum hoc sibi vult Nomen, quòd cùm aliàs vulgaris sectio totius in partes duas, non respiciat proportionem, aut si ad totam aliqua comparetur in eâ proportione, in quâ est minor pars ad majorem, tunc fiant quatuor termini, duo extremi & duo Medij: hic contrà fiant tantum tres termini, tota quidem & pars minor, duo extremi; pars verò major, medius terminus unicus.

Dicitur etiam eâdem de causâ sectio proportionalis. Hodierni & sectionem & proportionem ejus cognominant Divinam, propter admirabile ejus ingenium, & multiplicia privilegia; quorum præcipuum est, quòd semper parte majori ad totam additâ, composita rursum est similiter secta; & quæ pars major erat, jam fit minor; quæ tota, jam major pars fit compositæ, per 5. Tredecimi Euclidis.

XXVII. Propositio.

CVm autem sectio talis in omnibus lineis locum habeat, in Effabili longitudine; in Effabili solâ potentiâ, in Mese, in duodecim reliquis speciebus recensitis, in alijs omnibus: nos in præsenti opere duabus solis ejus speciebus habemus opus, quæ cum speciebus hactenus explicatis coincidunt; secundum duas lineas secandas. Nam aut Effabilis est illa longitudine, aut Mizon. Quòd si Effabilis est longitudine, quæ ad secandum proponitur; sectæ pars major fit Apotome quartæ speciei; & respondet ei Binominis ejusdem quartæ speciei, communia cum ipsâ habens nomina. Sed cave confundaris, pars quidem major illa dicitur, relatione ad propositam; at eadem Apotome hic dicitur, non relatione ad propositam; sed qualitativè. Quod si quæras, cujus sit apotome; respondetur, quòd sit apotome alicujus, quæ solâ potentiâ est commensurabilis propositæ, quæ sc. potest sesquiquartum propositæ.

Sit GA proposita ad secandum, sitque Effabilis longitudine. Fiat rectus angulus GAM & AM sit dimidia ipsius GA, & connexis GM punctis, centro M, intervallo GM scribatur semicirculus PGX, & AM continuetur in ejus circumferentiæ puncta PX. fiat super PA, quadratum PO. Ergò linea GA secta est proportionaliter in puncto O. Hæc igitur AO est pars major sectæ proportionaliter GA; at eadem AO vel ei æqualis AP, est Apotome non ipsius GA, sed ipsius MP vel MG,



quæ

quæ potest tam GA, quàm AM illius dimidiam: ut si potentia ipsius GA sit 4. erit ipsius AM 1. Et ipsius igitur GM potentia erit 5. In quantum igitur AO vel AP est Apotome, respondet ei binominis AX: suntq; nomina ipsius communia MX, vel MP, vel MG, & AM.

Quòd autem AP sit Apotome, & AX Binominis, utraq; quartæ speciei, sic probatur: Est enim utrunque nomen effabile & MX & MA; sunt tamen solâ potentiâ commensurabiles, quia MX (id est MG) potest 5. qualium MA potest 1. At 1. ad 5. non est ut numerus quadratus ad quadratum. Denique differentia potentiarum 1. & 5. est 4. numerus quadratus, cujus latus 2. longitudine Effabile, æquale sc. ipsi GA propositæ. Hæ verò sunt notæ speciei quartæ Binominum, in definitionibus ante P. 74: & Apotomarum, ante pr. 85. decimi Euclidis.

Denique si GA Effabilis secetur proportionaliter, pars ejus major OA & composita ex utraque OA, AG cadunt in gradum scientiæ quintum. Nam quadrata ipsarum juncta, summam faciunt Effabilem, triplum scilicet ipsius GA effabilis, per 4. Tredecimi Euclidis: Rectangulum verò etiam Effabile fit, quia est æquale quadrato ipsius GA effabili, cùm sit GA media proportionalis inter OA partem, & OA, AG compositam, per præmissa.

XXVIII. Propositio.

Vicissim, si aliqua Effabilis longitudine sic proportionaliter fuerit secta, pars ejus minor fit Apotome primæ speciei.

Ut si Effabilis sit GA, ut antea, & ejus sectæ proportionaliter pars major AO, minor OG; erit etiam OG Apotome, per 6. Tredecimi Euclidis.

Rursum a. OG dicitur Apotome qualitativè non relatione ad GA effabilem longitudine, cujus est pars minor; nec relatione ad MG, vel MP, cujus ipsa AO vel AP est Apotome; sed habet GO, Nomina peculiaria. Cùm enim per Prop. 97, decimi Euclidis, quadratum cujuscunque Apotomes, & sic etiam quadratum PO, extensum ad Effabilem (ut hic ad GT, ipsi GA æqualem) faciat latitudinem GO, primæ speciei Apotomen: ipsa vicissim AO erat Apotome speciei quartæ. Illius igitur GO nomen majus, est Effabile longitudine; hujus AO majus nomen MP erat solâ potentiâ effabile. Et vicissim, quia nomina sunt solâ potentiâ commensurabilia; oportet Minus nomen, seu Prosharmozusan ipsius GO, esse solâ potentiâ effabilem: cùm ipsius AO nomen minus AM esset longitudine effabile: utrique tamen hoc manet, quod differentia quadratorum à nominibus descriptorum, fit quadratum alicujus effabilis longitudine.

Quæ autem sint hujus GO, primæ Apotomes Nomina, relinquo alijs quærendum. Prosharmozusa quidem ipsi GO ut Apotomæ Primæ est unica sola per 79. Decimi Euclidis. Quæ debet esse talis, ut ejus quadratum sit Effabile non tamen numero quadrato: ipsa verò cum GO debet facere lineam unam Effabilem longitudine: & per 30. Decimi, si ex hac unâ totâ fiet diameter circuli, verbi causa PX; & si Prosharmozusa, paulò longior quâm PA (si quidem tota esset æqualis ipsi PX) ab uno termino Diametri X, applicetur circumferentiæ XG; tunc quâ signa GP connectit, debet esse ipsi PX toti commensurabilis longitudine.

XXIX. Propositio.

QVando vero secta fuerit proportionaliter aliqua Mizon; cujus quadratum sit æquale rectangulo sub longitudine, compositâ ex propositâ effabili & potente ejus quinq; quartas, & sub latitudine quinque quartas potente; tunc minor pars fit Elasson: ubi Elasson est nomen non comparationis, sed qualitatis: major verò pars fit Mizon alia, rursum qualitativè intellecta, quæcunque ejus sint Elementa.

In schemate fol. 16. *Sit ut prius, propositæ effabilis longitudo dimidia GA, ejusq; rursum dimidia AM; ut qualium GA potest 4. possit AM 1. & sit GAM rectus, poterit igitur MG talium 5. continuetur MA utrinq;, & centro M, intervallo MG, scribatur semicirculus PGX. Est igitur PX dupla ipsius GM; quare & PX poterit quinq; quartas partes de potentiâ propositæ, duplæ ipsius GA. Sed PG, GX quadrata juncta, sunt æqualia quadrato PX, ergò & illa sunt quinq; quartæ de quadrato propositæ effabilis. Porrò si ex PG. GX feceris lineam unam; ejus quadratum constabit ex duobus quadratis PG, GX, & ex duobus Rectangulis sub PG. GX, quibus sunt æqualia duo rectangula sub GA. PX, hoc est, unum Rectangulum, sub propositâ duplâ ipsius GA, & sub PX, effabilibus duabus, sed solâ potentiâ commensurabilibus: quam ob causam rectangulum hoc erit Meson, per 22. decimi Eucl. Cùm ergò quadratum lineæ PGX totius, constet ex quadrato PX effabili, & rectangulo Meso, ejusdem latitudinis PX: quæ duo, quadratum PX, & rectangulum sub duplâ ipsius GA & sub PX, sunt æqualia rectangulo, quod continetur sub PX, effabili, & sub compositâ, ex PX & duplâ ipsius GA, solâ potentiâ commensurabilibus, quarum partium major PX plus potest minore (duplâ ipsius GA) aliquâ sibi commensurabili longitudine (potest enim PX 5. qualium dupla ipsius GA potest 4. excessus igitur 1. est quadratum alicujus, quæ incommensurabilis est ipsi PX, eò quod 1. ad 5. non sit, ut quadratus numerus ad quadratum) quibus de causis dicta composita ex PX & GA duplicatâ, est Binominis quartæ speciei: cùm inquam quadratum totius PGX sit æquale tali rectangulo sub Apotome quartâ & Effabili: linea igitur PGX tota erit Mizon. Elementa ipsam componentia, sunt partes PG, GX. Nam quia PA, est Apotome, & AX Binominis: sunt igitur inter se longitudine Incommensurabiles. Ut verò PA ad AX: sic quadratum PG, ad quadratum GX. Ergò PG, GX sunt potentijs & sic simpliciter incommensurabiles inter se; & faciunt summam quadratorum effabilem, quippe æqualem quadrato PX: rectangulum verò sub PG, GX Meson. Ergò per 39. decimi, composita ex PG, GX est Mizon: Et per 76. Decimi, ablatâ PG, à GX, relinquitur Elasson. Atqui tota PGX est secta proportionaliter in G, Nam ut PA ad AG, sit PG ad XG. At PA est ipsius GA proportionaliter sectæ pars major OA, quia MP potest ipsius MA quintuplum & Apotome AP æqualis est AO per 11. secund. Eucl. Ergò & PG est ipsius GX proportionaliter sectæ pars major; & per 5. Tredecimi, addita PG, pars major, ad GX totam, parit novam totam PGX, proportionaliter sectam in G; ut jam PG sit hujus compositæ pars minor, GX ejus major. Et sic PGX, existens aliqua Mizon, secta est eodem puncto G & in sua Elementa, ex quibus Mizon denominatur, & simul in suas partes proportionis divinæ.*

Dico

Dico easdem partes proportionaliter sectæ, esse simul etiam Elassona & Mizona. Quia enim AP est Apotome quarta; quod igitur sub AP Apotome & PX Effabili, est potentia Elassonis, p 94. decimi Euclidis: & quia AX est Binominis quarta, quod igitur sub hac & PX Effabili, est mizonis potentia: sed quadrata PG, GX, sunt æqualia Rectangulis APX, AXP, singula singulis, ergò PG est Elasson, GX Mizon.

Conveniunt igitur hic in unum, nomina qualitatum & nomina proportionum. Nam PG dicitur pars minor, respectu totius PGX proportionaliter sectæ in G; dicitur & linea minor seu Elementum minus ipsius PGX totius, ut hæc est aliqua Mizon qualitativè; dicitur denique græcè Elasson, quod sonat Latinè minor, qualitativè, respectu aliarum duarum linearum, hic non expressarum, quarum subtractione unius ab alterâ, ipsa constituitur.

Eodem modo GX, primò dicitur pars major totius PGX proportionaliter sectæ; secundò dicitur linea vel Elementum majus lineæ totius PGX, ut hæc est qualitativè Mizon suo proprio jure, non minus quam tota PGX suo: sed lineæ facientes ipsam GX Mizona compositione suâ; non sunt hîc expressæ.

Propter hunc concursum sectionis proportionalis, & sectionis Mizonis in sua Elementa, credo indita fuisse his speciebus Nomina qualitativa Mizonis & Elassonis.

Cavendum autem hic est diligenter, ne discrimina rerum confundamus; sectio proportionalis est absoluta proportio, non alligata ad unam aliquam lineam, in notitiâ primam, quæ proposita Effabilis dicitur: species verò istæ Mizonis & Elassonis, sunt figuratæ certis gradibus discessionis suæ à primâ propositâ Effabili. Itaque sectio divina progreditur in infinitum; at non sequitur eam affectio Mizonis & Elassonis: in illâ (sectione) pars quæ modo major erat, proximo gradu fit minor; in hac, Elasson qualitate suâ, nunquàm nulloq; respectu fit Mizon, nec Mizon Elasson. Itaq; si GX Mizon dividatur rursum proportionaliter, pars ejus major erit æqualis ipsi PG, eoq; Elasson manebit qualitativè; nequaquam verò Mizon qualitate fiet, ut fit pars major quantitate: quandiu quidem GA est Effabilis proposita.

Quæris si Mizon sit PGX qualitate, Mizon etiam GX qualitate; cur non etiam ipsius GX Elementum majus possit esse aliqua Mizon, sicut ipsius PGX Mizonis majus Elementum erat GX, Mizon & ipsa? Quia etsi utraque est Mizon, tam PGX, quàm GX; alia tamen illic, alia hîc est formatio. Nam in quadratum PGX venit quadratum PX totum, rectangulum, sub duplici GA & sub PX, totum. At in quadratum GX, ingreditur de quadrato quidem PX, dimidium, sc. quod sub MX, XP, de rectangulo verò sub duplici GA & sub PX, pars solummodo quarta, sc. quod sub AM & sub PX. Alia igr hic est proportio Mesi ad Effabile, alia illic. Nostra verò propositio concursum hunc, sectionis divinæ, & qualitativæ compositionis, in partibus lineæ ijsdem, de priore solùm PGX, eiusq; propriâ proportione Mesi ad Effabile de, mõstrare nititur, non itidem de posteriori.

Nota verò & hoc ad perfectionem analogiæ; quòd sicut GX Mizon compositione proportionis divinæ, fit maior aliqua Mizon, sc. PGX, additâ PG, q̃ est ipsius GX, pars maior in sectione divina: sic è contrario, PG Elasson huj' speciei, sectione proportionis divinæ, dat PY minorem aliq̃ Elassona seipsâ, sc. ipsius PG sectæ partem majorem, vel ipsius GX sectæ partem minorem GV: ut sicut maxima PGX cadit per sectionem divinam, in XG Mizona & GP Elassona, sic secunda Mizon GX, cadat in duas Elassonas XV, VG, æquales sc. ipsis GP, PY: atque ita duæ Elassones componant unam Mizona; Mizon verò & Elasson aliam Majorem Mizona.

XXX. Propositio.

CLasses Figurarum singulas singuli faciunt numeri laterum Primi; & reputantur in classes, quæ habent Numerum laterum continuè duplum numeri sui Primi.

Sequitur hoc ex defin. X. hujus. Nam si omnium figurarum, quæ Numeros laterum habent unius alicujus continuè duplos, eadem est forma demonstrationis propria: omnium igitur illarum eadem est Classis, causâ demonstrationis. Non mutat quippe bisectio genus vel classem, associata earum singulis; propter & simplicitatem & æqualitatem Partium, junctim: ex singulis enim prioris figuræ arcubus facit partes binas tantùm, easq; æquales. At trisectione aut Quinisectione, aut sequentibus, non effugies, quin aut inæquales designes partes, si binæ tantùm esse debeant, aut multas, id est, plures duabus, si æquales. Ut in trisectione arcus 3. vel secatur in 2. 1. binas & inæquales, vel in 1. 1. 1. æquales sed multas.

Antecedens verò sic probatur. Demonstratio petitur à numero laterum; p X. hujus; Jam Primi numeri non communicant aliquâ parte numerosâ, nam unitas qua communicant, divisionem non admittens, non est pars numerosa vel numerus. Ergò etiam demonstrationes per eos factæ, non communicant inter se. Classes igitur singulorum Primorum distinctæ sunt. Harum prima est, in qua sunt figuræ (vel quasi) numeris laterum hisce: 2. 4. 8. 16. 32. & infinitæ: Secunda habet 3. 6. 12. 24. 48. 96. & infinitas: Tertia habet 5. 10. 20. 40. 80. 160. 320. & infinitas. Aliæ infinitæ.

XXXI. Propositio.

CLasses Figurarum singulas singuli faciunt Numeri, laterum duorum Primorum (excepto binario) minimi multiplices.

Sequitur hoc ex definitione XI. hujus. Nam si figura talis ad demonstrationem sui lateris non utitur numero suorum angulorum: est igitur diversa ejus demonstrationis forma à superioribus omnibus, quare etiam diversa classis. Exceptus verò fuit binarius à genesi novæ classis, in Primum aliquem multiplicatus: quia bisectio anguli cùm sit Geometrica, ipsa est, quæ classes singulas ex æquo in infinitum prorogat: quòd nisi esset, classes nullæ essent, sed singulares tantùm figuræ. Harum prima est, 15. 30. 60. 120. 240. 480. &c. multiplicatis 3. in 5. Secunda 21. 42. 84. &c. multiplicatis 3. in 7. Sequuntur infinitæ ut cùm 5. in 7. ducitur. Hinc 35. 70. 140. &c.

XXXII

XXXII. Propositio.

SEd & quadrati Primorum numerorum, excepto Binarij quadrato, & facti à quadratis & alio Primo, Primive quadrato, classes gignunt singulas, & distinctas à prioribus.

Quòd quadratus numeri Primi, non eandem cum Primo classem facit, causa est, quia cùm Primus ipse novam figurarum classem faciat, dividentium circulū totum, per XXX hujus: jam idem Primus, non totum, sed partem circuli dividens, omninò aliam faciet demonstrationem, si quidem illa possibilis fuerit: cùm Pars circuli à Toto multùm differat causâ speciej, figurationisq; absolutæ: in quâ figuratione nunc occupamur, quippe quæ demonstrationem format.

Quòd autem binarij quadratus excipitur; causa est, quia figura, bis duos habens angulos, hoc est, Tetragonus, cadit in classem primam: multiplicatus verò Quaternarius in Primum, cadit in Primi classem, quia quatuor sunt bis duo: omnis verò figura, duplo laterum Numero, eodem refertur, quo figura simple laterum Numero.

Harum prima est, in quâ figuræ 9. 18. 36. 72. 144. 288. laterum & infinitæ.

Secunda, in quâ 25. 50. 100. 200. 400. & infinitæ.

Tertia, in quâ 49. 98. & infinitæ.

Infinitæ aliæ classes à quadratis.

Sic 27. 54. 108. 216. 432. & infinitæ, ex 3. & 9.

Sic 75. 150. 300. & infinitæ, ex 3. & 25.

Sic 147. 294. & infinitæ, ex 3. & 49.

Sic 45. 90. 180. 360 & infinitæ, ex 5. & 9.

Sic 125. 250. 500. 1000. & infinitæ, ex 5. & 25.

Sic etiam 225. 450. 900. & infinitæ ex 9. & 25. duobus quadratis.

Infinitæ aliæ classes, ex Primis in quadratos, aut ex Primorum quadratis in se multiplicatis.

XXXIII. Propositio.

SI a duplo numeri angulorum Figuræ abstuleris quatuor, formabis Numeratorem partium anguli recti, quas valet angulus figuræ: Denominator verò partium est ipse numerus Angulorum.

Ut in Trigono bis tria sunt sex, aufer 4, restant 2. Ergò angulus Trigonicus valet duas tertias Recti. Sic in Icosigono, bis 20. sunt 40, aufer 4. Ergò angulus Icosigonicus valet 36. vicesimas vel 9. quintas unius Recti. Nam cujusq; figuræ anguli distribuuntur in totidem triangula, quot habet latera, duobus minus. At cujuslibet Trianguli anguli valent duos Rectos: ergò cujuslibet figuræ anguli valent duplo plures Rectos, quàm Figura habet angulos, quatuor minùs. Hic verò numerus Rectorum distribuendus est in numerum angulorum figuræ, ergò hic denominat, ille numerat partes unius Recti.

XXXIV. Propoſitio.

CIrculus Geometrica deſcriptione in duo ſecatur æqualia; & linea biſecans illum ſcitur ſcientiâ primi gradus; eſt enim Diameter ipſa.

Principium enim figurationis in circulo eſt, ducere rectam lineam per punctum imperatum, quouſq; eſt opus.

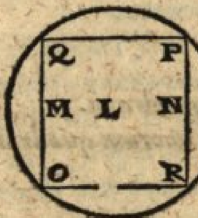
Recta biſecans circulum eſt diameter, ſc. per centrum ducta, quia partium circuli inter ſe æqualium eſt maxima ſemicirculus, linea igitur ſecans in duos ſemicirculos, eſt & ipſa longiſſima, per 14. Tertij Euclidis, & diameter, per 15. & per definitionem.

Porrò diameter eſt illa ipſa Effabilis, propoſita pro Menſurâ cæterarum, & ipſa ſibi æqualis, ſuique Menſura perfecta, principium ſcientiæ Geometricæ.

XXXV. Propoſitio.

TEtragoni latus habet Geometricam deſcriptionem ex angulis, extra circulum, & ſi inſcribatur circulo, Ipſa eſt in gradu ſcientiæ tertio, quadratum ejus in ſecundo, ut & area figuræ.

Tetragonus Eſto OQPR, ejus angulus, per XXXIII hujus, eſt rectus, quare per 46. primi Euclidis, facilè dato latere, deſcribitur Tetragonus.



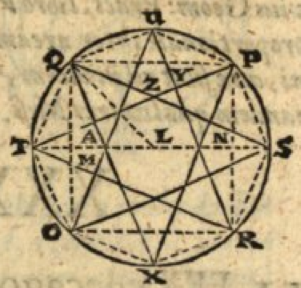
Cùmq; angulos habeat quatuor, lateraque totidem; duo ergò latera coëuntia, duas Circuli quartas intercipiunt, hoc eſt, ſemiſſem circuli. Quare per XXXIV. hujus, extrema laterum contiguorum connectit diameter circuli. Ut QO, QP, angulum OQP rectum in ſemicirculo OQP formantes, extremis O. P. connexa ſunt per diametrum circuli OLP. Quare per 47. primi Eucl. quadrata duorum laterum OQ, QP, æquant quadratum diametri. Et ſi dimidia pars de quadrato diametri redigatur in formam quadratam, per 14. ſecundi Eucl. latus ejus erit latus Tetragonicum. Ita quadratum lateris eſt Effabile.

Et quia quadratum OP eſt ad quadratum OQ, ut 2. ad 1. non verò ut numerus quadratus ad Numerum quadratum; OP verò eſt Effabilis longitudine: ergò latus OQ, eſt Effabilis ſolâ potentiâ, per 9. decimi Euclidis. Area verò tetragoni eſt eadem in hac figurâ, quæ Quadratum lateris, ergò & area Figuræ eſt Effabilis.

XXXVI. Propoſitio.

OCtogoni latus habet Geometricam deſcriptionem ex Angulis, nec minus etiam Octogonicæ ſtellæ latus, ſeu ſubtenſa tribus octavis partibus circuli, ſuntque in gradu ſcientiæ octavo, ſinguli singula, illud quidem Elaſſon, hoc verò Mizon; juncta verò in gradu ſexto, & proportionis cujuſdem ſingularis. Area deniq; Ineffabilis eſt, quippe Meſon.

Sit octogonus VQTOXRSP, ſtella verò VOSQXPTRV: cùm igitur lineæ binæ, verbi cauſa QT. TO, comprehendentes angulum octogonicum QTO, connectantur extremis Q. O. linea connectens eſt latus Tetragoni, quia de Octo ſemis eſt quatuor.



Ergò deſcripto Tetragono (ut alios deſcribendi Octogoni modos omittam) in circulo, ducatur in latus ejus OQ ex centro L, perpendicularis, ſecans latus in M, arcum in T, per 11. primi Eucl. quo facto per 30. Tertij Eucl. erunt quartæ partis circuli OQ, duæ partes, ſc. arcus OT. TQ. æquales. Connexis ergò punctis O & T, erit OT recta latus Octogoni, & connexis O. S. erit OS latus ſtellæ.

Connexo centro L cum Q, quia QML eſt rectus, ergò QL Effabilis longitudine, poteſt QM, & ML. poteſt autem QL. ſemidiameter duplum ipſius QM ſemilateris Tetragonici. Ergò QM & ML ſunt æquales, & utraq. Effabilis ſolâ potentiâ per XXXV hujus. Plus igitur poteſt LQ, quàm LM, potentiâ ipſius MQ, quæ longitudine eſt incommenſurabilis ipſi LQ. Sed ſunt æquales LQ & LS, & LT. Ergo compoſita SM erit Binominis quarta, cujus Nomina ſunt SL, & LM. per definit. ante 48. decimi Euclidis. Reſidua verò MT erit Apotome quarta, cujus Nomina TL, & LM. per definitionem ante 85. decimi Euclidis.

Et quia MS binominis quarta, & ST effabilis, quare per 57. decimi Euclidis, linea QS, quæ poteſt Rectangulum ſub ipſis, eſt Mizon: ſic quia TM eſt Apotome quarta, & TS effabilis; ergò TQ latus Octanguli, potens rectangulum ſub MT, TS eſt Elaſſon, per 94. decimi Eucl.

Elementa illarum ſunt in hac delineatione, PA majus, & AT minus. Nam ad PA addita AT, facit PT latus ſtellæ: rurſum à PA vel TT ablata TA, relinquit AT; id eſt QV latus Octogoni. Scilicet Elaſſon TQ poteſt duplum Proſharmozuſæ TA; & latus Tetragoni QP, poteſt utrumque Elementum PA & AQ, id eſt AT.

Et ſicut PX Mizon ad majus Elementum PA, ſic TQ Elaſſon ad minus Elementum TA, & viciſſim, ut majus elementum PA, ad minus AT, ſic Mizon PX ad Elaſſonem TQ: Ut pars major ad minorem; ſic totum ad differentiam.

Porro hæc latera SQ, QT, non ipſa ſunt tantùm Mizon & Elaſſon; ſed ſunt etiam tales lineæ, ex quibus aliæ tales fiunt addendo vel ſubtrahendo. Primùm enim ſunt inter ſe incommenſurabiles, ſecundò quadrata ipſarum TQ, QS juncta æquantur quadrato effabili ipſius TS. Tertiò Rectangulum ſub TQ, QS eſt Meſon, eſt enim æquale Rectangulo ſub QM ſemilatere Tetragoni, ſolâ potentiâ effabili, & ſub TS effabili longitudine: quam ob cauſam ſunt etiam juncta in gradu ſcientiæ ſexto. Quare per 39 decimi, compoſitæ in unam TQS fiunt Mizon, & per 76. decimi, TQ hoc eſt QZ ablata à QS, relinquit ZS Elaſſonem. Itaq. fieri poteſt, ut Elaſſon & Mizon unius bigæ, fiant Elementa

alte-

alterius bigæ, & Elaßon, ablata à Mizone suâ, relinquat Elaßona alterius.

Quod aream Octogoni attinet, illa constat ex octo talibus trigonis, qualis est LQT. Sed constat Rectangulum QTRS ex talibus quatuor; est ergò semißis Areæ: & est Meson, ut paulò anteà probatum; ergò etiam duplum ejus, scilicet Area Octogoni, Meson est, per porisma Prop. 24. decimi Euclidis. Hinc Clavius Geom: Pract. libro VIII. Prop. 31. demonstrat, aream ejus esse medium proportionale inter aream Tetragoni inscripti & aream circumscripti Tetragoni, quæ sunt ad invicem, ut 1. ad 2. quæ determinatio quantitatis certæ, infert tandem qualitatem Mesi.

XXXVII. Propositio.

HEKKædecagoni latus habet Geometricam descriptionem ex angulis, sed lateris scientia longiùs evagatur, in gradus ignobiliores omnibus præmissis: multóque magis ejus stellarum latera, seu subtensæ tribus, quinque, septem, sedecimis.

Quia bis octo sunt sedecim, ideò per latus Octogoni, figura hæc ex iisdem fundamentis describitur, quibus antea Octogonus per latus Tetragoni.

Esto QO latus non jam Tetragoni, sed Octogoni & QT, TO latera jam sedecanguli, & QP latus stellæ Octangulæ esto: id fuit prius Mizon: ergò & LM ejus dimidia erat Mizon. Quare rectangulum sub ST Effabili & LM Mizone, est speciei planè novæ, cujus inter gradus superiùs explicatos, ut nobiliores, nulla fit mentio. Tale verò novum, ablatum ab eo, quod sub LT, TS, Effabilibus longitudine continetur, relinquit iterum remotiorem aliquam speciem, rectangulum scilicet sub MT, TS æquale quadrato TQ, lateris Hekkædecagoni. Multò magis id verum de pluriangulis hujus Claßis: ut 32. 64. 128. angulorum etc:

Cùm sic habeat cum latere uno, seu subtensâ uni sedecimæ, jam illius potentia ablata à potentiâ diametri, relinquit subtensam, septem sedecimis, est igitur illa gradus remotioris.

Tres verò sedecimæ subtensam habent derivatam à subtensa tribus octavis per bisectionem: sunt igitur in remotiori gradu, quàm illa; Et potentia subtensæ tribus sedecimis, ablata à potentiâ diametri, relinquit potentiam subtensæ quinque sedecimis. Est igitur hæc rursum remotiori gradu.

XXXVIII. Propositio.

TRigoni & Hexagoni latera geometricam habent descriptionem, ex angulis figurarum; & in circulum inscripta, sunt scibilia, illud tertio, hoc secundo gradu; plana verò, seu areæ figurarum sunt Mesa, proportionis inter se duplæ.

Trigo-

Trigoni constructio extra circulum est facilima per 1. primi Euclidis. Inscriptio in circulum expeditissima, ut cæteros modos taceam, fit beneficio Hexagonici lateris. Quia de sex semis sunt tria. Et Hexagoni quidem descriptio & inscriptio sunt libro quarti Euclidis proposit. 15. Sed ostendenda est consecutio quantitatis lateris, ex angulorum rationibus.

Sit Hexagonus BHCGDF. Cùm igitur sint anguli 6, planum etiam Hexagoni dividetur in Triangula sex, verticibus in centro A coëuntia: quale unum est CAG. Quare quatuor Rectorum, centrum A circumstantium, summa divisa in sex vertices, dat uni verticali angulo CAG quatuor sextas, seu duas tertias unius Recti. Atqui trianguli CAG omnes tres anguli juncti sunt æquales duobus rectis, seu sex tertijs unius Recti; Abstracto ergò angulo ad A, 2 tertiarũ, à summâ 6 tertiarũ, restant duobus ad C, & G, summa 4 tertiæ: sunt verò æquales omnes; ergò unicuiq; ad C. & G. manent 2. tertiæ unius Recti, non minùs quàm verticali ad A. Atqui si tres anguli sunt æquales, oportet & latera esse æqualia in Triangulo. Quare CG latus idem & Hexagoni, & trianguli, quod est sexta ejus pars, est æquale semidiametro circuli CA vel AG. Est igr Effabile longitudine lat9 Hexagoni, dimidiũ sc. diametri. Hic vero est Gradus II. per XIII. hujus.

Jam Trigoni, qui sit BCD, latus BC connectit duo latera Hexagoni CH, HB, coëuntia in H. Cùm ergò BHC sit 2 tertiæ semicirculi, & CG una tertia, arcus ergò BCG est semicirculus, & BG diameter, per A transiens. Ergò BCG angulus in eo est Rectus, per 31. Tertij Eucl. Quadrata igitur BC, CG æqualia sunt quadrato BG, per 47 Primi Eucl. Sed CG. est semidiameter, ejusq; quadratum est hujus quadrati pars quarta; ablatâ igitur quartâ parte de quadrato BG, relinquetur quadratum lateris Tetragonici BC. Est ergò quadratum hoc effabile: sed quia se non habet ad quadratum BG ut numerus quadratus ad quadratum numerum, sed ut 3 ad 4, ideò BC est solâ potentiâ Effabilis. Hic verò est gradus Tertius, per XIV. hujus.

Et quia BC, CD æquales, anguliq; BCD, BDC æquales: ergò BE perpendicularis, demissa in CD, secabit illam in E in æqualia CE, ED. Erat verò Effabilis solâ potentiâ, tota CD; quare & ejus dimidia CE. Rectangulum ergò sub CE, AG solâ potentiâ commensurabilibus, quarum ista est Effabilis longitudine, Meson est. Sed hoc Rectangulum est æquale areæ duorum triangulorum, ipsius CGA æqualium (quorum sunt in Hexagono sex) & sic tertiæ parti Areæ Hexagoni. Area igitur Hexagoni est planum Meson. Et quia BCA & BCH triangula, sunt laterum BA & BH, CA & CH æqualiũ, uno communi BC: habent igitur areas æquales. Sed BCH, BDF, CDG sunt partes Hexagonicæ areæ, quibus illa excedit aream Trigonicam BCD, totidem æqualium triangulorũ, BAC, CAD, DAB. Dupla ergò est area Hexagonica Trigonicæ: Meson igitur est etiam Trigonica area, quia commensurabilis, scil: dupla, Hexagonicæ, quæ erat Meson.

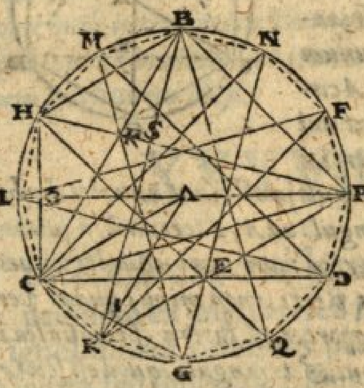
XXXIX. Propositio.

Latera Dodecagoni & Stellæ cognominis seu sub-

tensæ quinque duodecimis partibus circuli Geometricè describi possunt, & inscripta eidem circulo, scibilia sunt, singula gradu octavo nobilioris cognitionis, juncta gradu quinto; Planum verò Dodecagoni est Effabile.

Dodecagonus esto BMHLCKGQDPFN, stella Dodecagonica BKFLDMGNCPHQB.

Quia igitur bis sex sunt duodecim, ideò per latus Hexagoni figura ijsdem ex fundamentis describitur, quibus antea Octogonus per latus Tetragoni, ductâ in HC latus Hexagoni ex A centro perpendiculari, secante latus in O, circulum in L. P. & connexis LH pro latere Dodecagoni, HP pro latere stellæ.



Cùm igitur HC latus sexanguli sit Effabile longitudine; talis erit & dimidia HO, sed AC, æqualis ipsi HC, potest & quod à dimidio sui OC, & quod ab AO, Ergò quadratum ipsius AO se habet ad qdm AC vel AP, ut 3. ad 4. non ut numerus quadratus ad quadratum. Sunt igitur PA, AO, solâ potentiâ inter se commensurabiles, ut & LA, & AO. Et CA, hoc est PA vel AL, major Effabilis, plus potest quam OA minor, aliquo, quod est à CO sibi commensurabili. Ergò per def. ante 48. decimi Eucl: Composita PO est Binominis, & per def. ante 85. OL residua, est Apotome, utraq; Prima cognomine. Nomina sunt AP, Effabilis simpliciter, & AO, Effabilis solâ potentiâ. Sed per 54. decimi Eucl. HP, potens rectangulum sub OP Binomine primâ & PL Effabili, est Binominis, & per 91 ejusdem, HL latus Dodecagoni, potens rectangulum sub OL Apotome primâ & LP Effabili, est Apotome. Ita cadunt singula in gradum scientiæ octavum nobiliorem.

Nomina hujus compositæ PH & diminutæ HL, sunt PS & SH. Cùmq; HB sit sexanguli lat⁹, KP Trianguli, BP, Quadrãguli, illud qdem potest duplum Nominis minoris, sc. HS, & SB, istud duplum majoris, sc. KS, & SP; hoc verò potest utrumq; simul, quodq; semel, sc. BS & SP.

Componitur etiam PH binominis, ex PR latere quadrati, & RH latere Dodecagoni; at propter hanc compositionem non dicitur Binominis; quia per 42 decimi Eucl. præter unum signum, quod hic fuit S, nullum aliud dari potest, quod illam dividat in sua Nomina.

Cùmq; HO, LP sint Effabiles longitudine, rectangulum sub ijs, id est sub LH, HP erit Effabile, & summa quadratorum LH, HP est itidem Effabilis, æqualis quippe quadrato ipsius LP. Ergò hoc nomine, junctæ LH, HP, sunt in gradu scientiæ quinto. Nec quicquam novi faciunt junctæ, nec rursum Binominem vel Apotomen: addita enim LH ad HP, facit Effabilem potentiâ solâ, sc. cujus quadratum est sesquialterum quadrati LP: ablata verò LH, vel HR ab HP, constituit rursum Effabilem potentiâ, PR, lat⁹ quadrati: cuj⁹ quadratum est dimidium quadrati LP.

Cùmq; Area Dodecagoni constet Triangulis 12, qualium est unum LAC, in rectangulo verò LHPD Effabili contineâtur eorum quatuor, id est Triens Areæ totius; ergò & tota area Effabilis est, quantam scil.

creat

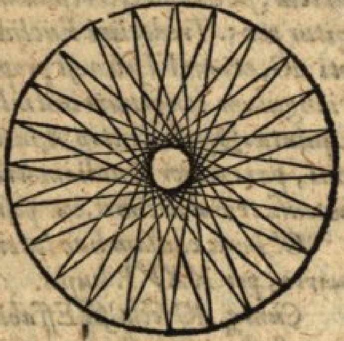
creat ducta HO in LP ter; Est igitur Area Dodrans de quadrato diametri, seu Medium Arithmeticum inter Tetragonum circulo circumscriptum, & Tetragonum eidem inscriptum; sicut Area Octanguli est inter eos Medium Geometricum.

XL. Propositio.

Figura Regularis viginti quatuor laterum, & omnes ab ea, duplicato continuè numero laterum, Geometricas quidem inscriptiones habent, sed laterum scientia evagatur longius, in gradus remotiores ijs qui prius sunt positi: ut & stellarum ejus seu subtensarum 5. 7. 11. vicesimis quartis.

Probatur ut prius Prop. XXXVII. de sedecangulo; hoc tamen discrimine, quod jam hic latus stellæ Dodecagonicæ ejusq; dimidium, sunt Binomines primæ, quare rectangulum sub dimidia & sub diametro, ut Effabili, nondum fit novæ speciei, quia potens illam per 54, est iterum Binominis. At jam hoc rectangulum ablatum ab Effabili sub tota & dimidia Diametro, relinquit novi quid, cujus hactenus non facta est mentio, & ignobilius, quippe magis compositum; & hoc fit potentiâ lateris 24 anguli.

Id multò magis verum de pluriangulis figuris hujus Classis: ut quadragintoctanguli, nonaginta sexanguli, &c.



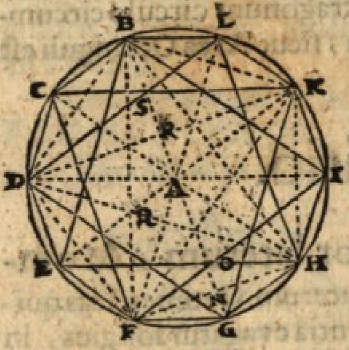
Subtensa quinque vicesimis quartis circuli patescit, bisectione arcus in quo sunt quinque duodecimæ: potentia illius ablata à potentia diametri, relinquit potentiam subtensæ septem vicesimis quartis: sic potentia lateris seu subtensæ uni vicesimæ quartæ, format eadem methodo potentiam subtensæ undecim talibus partibus. Sunt igitur omnes in gradu remotiori.

XLI. Propositio.

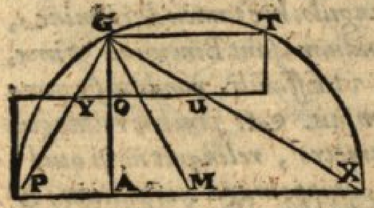
Latera Decagoni & stellæ decagonicæ, seu subtensa tribus decimis partibus Circuli, descriptionem habent Geometricam ex angulis, inscriptionemque in circulum; suntque scibilia, seorsim quidem singula Gradu octavo scientiæ, juncta verò, gradu quinto; & cum semidiametro juncta, gradu quarto.

Sit Decagonus BCDEFGHIKL, & stella ejus BEHLDGKCFIB. Cum ergò sint anguli decem, figuræ planum erit compositum ex decem triangulis coëuntibus in centro A, quale unum est FAG. Distributâ igitur quatuor rectorum summâ, quæ est circa unum A punctum, in decem illorum triangu-

lorum vertices, veniūt singulis 4. decimæ vel 2. quintæ unius recti. Atqui summa trium angulorum hujus trianguli, est 10 quintæ id est 2. Recti; hinc igitur ablato verticali ad A 2. quintis, relinquitur duobus ad basim 8. quintæ: & cum sint æquales; singulis igr 4. quintæ Ita quilibet ad basin duplus est anguli ad verticem. Hoc est vinculum demonstrationis sequentis.



Secto enim angulo AFG in duas partes æquales, per FO lineam, per 9. primi Euclidis; erunt AFO, OFG inter se æquales, & quilibet 2. quintæ Recti; uterque igitur ipsi FAO æqualis. Quare per 3. sexti Euclidis, ut AF ad FG, sic AO ad OG.



Quia verò OFG est 2. quintæ, erat verò OGF (nempe AGF) 4. quintæ erit, igitur & FOG 4. quintæ. Angulis igitur ad O & G æqualibus, latera quoque FG, FO æqualia subtenduntur.

Eodem modo & in triangulo AOF, quia AFO est 2. quintæ, quantus erat & FAO: ergò & AO & FO (hoc est FG latus) æquales erunt. Ut verò AF ad FG, sic AO ad OG, ut jam demonstratum; ergò etiam ut AG ad AO partem, sic hæc ad OG residuum. Secatur igitur Crus AG in O proportionaliter. Igitur per 5. Tredecimi Euclid: O A vel OF, continuatâ in I, ut OI sit æqualis toti AG, etiam FI secta est proportionaliter in O, & connexis AI signis, erit AIO triangulum congruum initiali FAG, eóq; OAI duplus ipsius FAO, & FAI 6. quintæ. Quare centro A, intervallo AG scripto circulo FGI, erit FG latus decagoni, pars major semidiametri AG proportionaliter sectæ, & FI latus stellæ seu subtensa tribus decimis, composita ex FO & OI, latere decagoni & semidiametro.

Ob hanc causam hæc latera, junctâ semidiametro, possunt accenseri gradui quarto, per XXVI. hujus.

Cumq; AG secta, sit Effabilis longitudine, & latus decagoni pars ejus major; latus stellæ, composita ex tota & parte majore; quare per XXVII. hujus, illud est Apotome, hoc Binominis, utrumq; quartæ speciei: hoc respectu sunt in gradu scientiæ octavo, proximè post latus Dodecagoni & stellæ suæ, planéq; in eodem ordine cum latere Octogoni & stellæ suæ.

Et per XXIIX hujus, etiam residua OG, eoq; etiam ejus dimidia NG est Apotoma primæ speciei. Sed cave putes, Nomina ejus esse, Majus AG, minus AN.

Deniq; per eandem XXVII. hujus, latera GF, vel OF & FI. non cum semidiametro, sed secum ipsa juncta, quia & summam quadratorum, & commune Rectangulum habent Effabilia, sunt in gradu scientiæ quinto.

Composita igitur, latus Decagoni cum latere suæ stellæ, faciunt effabilem potentiâ solâ, potentem quinque quartas, de potentiâ semidiametri, quæ in schemate præcedenti ex Pr. XXVII. est PX. composita ex PA (æquali ipsi OA,) & AX: inter quas est media proportionalis GA effabilis.

Vicissim abstractum Decagoni latus OF à latere stellæ FI, relinquit Effabilem OI, sc. semidiametrum. Ita per illa nihil fit novi.

XLII. Propositio.

LAtera Pentagoni & Stellæ Pentagonicæ, seu subtensa duabus quintis partibus Circuli, descriptionem habent Geometricam ex angulis; suntque scibilia; singula octavo gradu; juncta, tam sexto quàm quarto gradu scientiæ.

Descriptio extra circulum est talis: si latus futurum detur longitudine, secabimus illud proportionaliter, per 11. secundi vel 30. sexti Euclidis, eiq; adjungemus partem sectionis majorem: & factis duob⁹ cruribus, compositæ æqualibus singulis ex propositâ verò, factâ Basi, triangulum statuemus, Pentagoni intimum. Cùm enim crus compositum constet ex totâ propositâ, ejusq; parte majori sectionis divinæ; etiam composita sic erit secta, ejusq; pars major erit latus propositum, eoq; Trianguli hujus angulus ad basin, duplus erit ejus ad verticem; ut supra in Decagono: cui super duobus dictis cruribus ut Basibus, adjiciemus duo triangula exteriora; quorum crura sint æqualia proposito lateri.

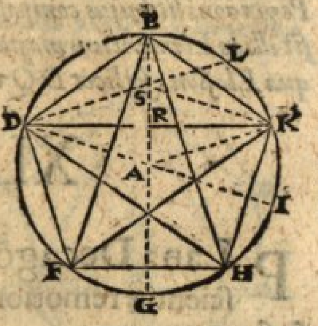
Vt hic FB: BH crura, FH basis.

Vt hic FDB super FB & BKH super BH.

Inscriptio in circulum facilima est per latus Decagoni. Cùm enim de decem semis sit quinque, duorum igitur Decagoni laterum, FG, GH, contiguorum in G, terminos F. H. connectemus, lineaq; FH erit latus Pentagoni, sic & HK: & connexis F. K. terminis, linea FK erit latus stellæ. Sit igitur Pentagon⁹ BDFHK, & stella ejus BFKDHB.

Demonstrat igitur Euclides Prop. 10. Tredecimi quòd FH latus Pentagoni possit latera FA Hexagoni, & FG Decagoni, hoc est semidiametrum AG, et sectæ Majorem partem AO simul. Hæc demonstratio in Euclide difficultatem habet captûs; tentabo igitur hic faciliorem.

A terminis lateris Pentagonici B. D. ducantur per A centrum rectæ BG, & DI: & ut DB subtendit duas decimas, sic proxima DL tres, & DK quatuor subtendat, secantes BG in S. R. punctis. Igitur LDI angulus, id est SDA habet duas quintas unius Recti; quia LI est una quinta pars circuli, sicut & FH, & verò æqualibus arcubus, anguli ad circumferentiam insistunt æquales, per XXI vel XXVII. Tertij Eucl. Est verò DAB, id est DAS quatuor quintæ unius recti, quia DB pars quinta est circuli, mensurantis quatuor rectos circa A. Juncti igitur SAD, ADS sunt sex quintæ unius recti. At omnes tres sunt decem quintæ. Ergò etiam residuus DSA est quatuor quintæ. Est igitur DSA æqualis ipsi DAS, latus igitur DS æquale est lateri DA semidiametro. Ergò per priora, semidiametri DA proportionaliter sectæ pars major æquat SA, est igr SA æqualis lateri Decagoni, per dicta. Et DA est semidiameter, latus sc. Hexagoni. Dico latus Pentagoni DB, posse utramq; & SA, & AD.



Pone O ubi DH, FK & AG se mutuò secant.

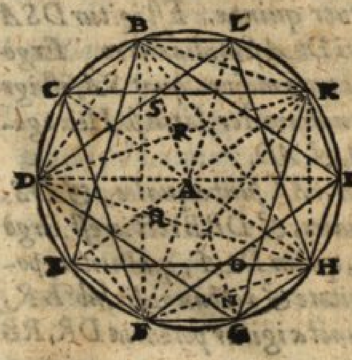
Connexo enim K cum S & cum A, quia DA, AK sunt æquales, & DS, SK iisdem æquales; erunt & partes SR, RA æquales, & DRB rectus est. Ergò DB, potest DR, RB. Atqui DR minus potest, quàm DA, quantitate potentiæ RA; & BR minus potest quàm BA quantitate & rectanguli, sub BR, RA bis, & potentiæ ipsius RA junctorum. Juncta igitur potentia DR, RB *minores sunt junctis potentijs DA, AB, rectangulo sub RA, AB bis, hoc est, rectangulo sub SA, AB semel. Atqui duo rectangula sub SA, AB, & sub SB, BA constituunt totum quadratum BA. Ablato ergò rectangulo sub SA, AB, relinquitur quadratum ipsius DA, & rectangulum sub SB, BA, junctaq; æquantur quadrato DB. Cum verò BA semidiameter sit proportionaliter secta in S, & pars major AS: rectangulum igitur SB, BA est æquale quadrato SA. Ergò latus Pentagoni potest duo quadrata DA & AS; laterum scilicet Hexagoni & Decagoni.*

Quod attinet stellæ Pentagonicæ latus BF: illud est compositum ex BD, vel BQ, latere Pentagoni, & ex QF, ejus secti proportionaliter parte majori: per 8. Tredecimi: quod idem etiam probari potest ex triangulo quinquangulari FBH, ut supra.

Cùm igitur latus Pentagoni possit semidiametrum quæ est Effabilis longitudine, & ejus sectæ proportionaliter partem Majorem, ut in schemate præmisso semicirculari, PG potest PA, & AG, & ut PA est ad AG, sic sit PG latus Pentagoni ad latus suæ stellæ: sit verò ut PA ad AG, sic PG ad GX. Ergò GX est illud latus stellæ, potestque & GA semidiametrum Circuli circa figuram Decangulam, & AX compositam ex PA & AG. Quare per ibi demonstrata GX est Mizon, GP Elasson. Singulæ igitur sunt in octavo gradu scientiæ, ejusque secundo ordine. Quia verò junctæ lineæ PG, GX faciunt quadratorum summam Effabilem, sc. æqualem quadrato PX, quod est ipsius GA Effabilis quadrati quintuplum ⁞ eademq; PG, GX rectangulum formant Meson; hoc nomine junctæ PG, GX sunt in gradu scientiæ sexto, de quo est XVIII. præmissa. Deniq; quia latus Pentagoni & latus stellæ sunt ut sectionis divinæ pars major & tota; ideò sunt etiam in gradu scientiæ quarto, junctæ invicem: vide XXIX. hujus. Consequitur autem has proprietates, ut sicut Pentagoni latus est Elasson, Stellæ Mizon, sic etiam composita ex utroq; sit iterum Mizon, & latus Pentagoni sit hujus compositæ ut Mizonis, elementum minus; Latus verò stellæ sit illius Elementum majus; & ut etiam differentia inter utrumq; latus sit aliqua Elasson, scilicet DQ vel QF. per eandem XXIX. hujus.

XLIII. Propositio.

PLana Decagoni & Pentagoni, cadunt in Gradus scientiæ remotiores, ut & latus Icosigoni, & reliqua hujus classis figurarum.



Nam latus Pentagoni FH, ductum in AN facit duplum FAH quintæ partis Areæ Pentagonicæ. Est verò FH Elasson, & AN est talis, quæ potest Effabile AF, diminutum potentiâ Elassonis FN. Si autem quod est ab Elassone, auferatur ab eo, quod est ab Effabili, relinquitur nova species lineæ, quæ potest tale residuum. Rectanguli verò contenti sub tali lineâ novâ & sub Elassone, species adhuc remotior erit; area verò Pentagoni erit ei commensurabilis, scilicet ut

5. ad

quinque ad duas, quare & ipsa erit speciei adeò remotæ. Sic latus Decagoni FG, ductum in suam Perpendicularem ex centro, facit duplum FAG partis decimæ de Plano Decagonico, id est unam quintam. Est verò FG Apotome quarta; & perpendicularis ex centro in illam, potest ejus quartâ parte minus quàm semidiameter. At si quod est ab Apotomâ, auferatur ab eo, quod est ab Effabili, linea quæ residuum potest, fit novæ speciei, ultra recensitas; & si talis linea cum Apotomâ faciat rectangulum, illud erit speciei adhuc remotioris, & cum eo etiam quintuplum ejus, sc. Area Decagoni.

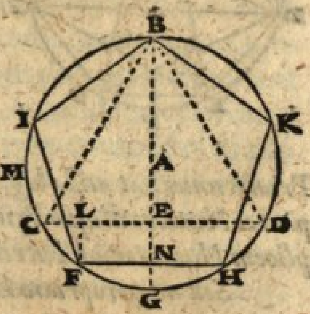
Denique cùm semilatus Decagoni sit Apotome quarta; potentia verò Apotomes extensa secundùm Diametrum, (Effabilem longitudine) faciat latitudinem, Apotomen primam, scilicet sagittam decimæ partis Circuli: Latus certè Icosigoni potest & semilatus Decagoni, Apotomen quartam, & hanc sagittam, Apotomen primam. Planum verò compositum ex Apotomis diversarum specierum, eoq; incommensurabilibus, poterit nulla linea priùs recensitarum; sed aliqua planè novæ speciei: eoq; & ignobilioris.

Quantò magis id obtinebit in Tessaracontagono & cæteris hujus classis?

XLIV. Propositio.

PEntekædecagoni, ejusque stellarum latera, putà subtensæ duabus, vel quatuor, vel septem quindecimis, Geometricam quidem descriptionem habent, sed non extra circulum; & in circulo quoque non ex angulis, eoque impropriam, & scientiam heterogeneam, gradus remotioris, quàm omnia antecedentia. Triacontagonus & reliquæ hujus classis sunt adhuc remotiores.

Describitur enim ex se prioribus figuris, quas oportet habere numerum laterum alium quàm subduplum, quia 15. est impar, non habens partem dimidiam numericam: scilicet ex Trigono BCD & Pentagono BIFHK, ab eodem B puncto inceptis. Nam si tertiam BC auferas à duabus quintis BIF, id est 5. decimasquintas à 6 decimisquintis, manet CF, 1 decimaquinta. Connexis ergò C. F. angulis, linea CF erit latus. Hic ad actum descriptionis non accerso quantitatem anguli, aut numerum Angulorum figuræ propositæ; nec secundùm hunc numerum formo aliquod triangulum, ut in figuris superioribus factum. At nec potest aliter describi. Ergò etiam scientia ejus est remota & vilis.



Cùm enim latus Pentagoni FH, sit lateri Trigonico CD parallelum, propterea quòd utraque figura imparilatera ab eodem B puncto est incepta: ducatur igitur ex F. perpendicularis in L, & ex B, diameter per centrum A, secans lineas in E. N. G. Ergò latus CF potest quantum & CL & FL juncta; sed CL est excessus ipsius CE Effabilis Potentiâ, super FN, hoc est super LE, Elassona: est igitur CL speciei planè Novæ. Vicissim AN est linea quæ potest residuum de Effabili plano, cùm ab eo fuerit ablatum planum Elassonis: est igitur novæ speciei. Sed EN est residuum hujus no-

jus novæ, post ablatam Effabilem longitudine AE. Est igitur EN bis remotiori gradu. Deniq; CF latus Pentekædecagoni potest CL, & LE novas species; est igr illic bis, hic ter, & sic quinquies remotius. Præterea q; componuntur diversarum Classium, Trigonicæ & Pentagonicæ, proprietates in unum, est igitur scientia heterogenea. Quid jam de Triacontagoni latere sentiendum? cum semper augeatur gradus remotionis, cum ipsa duplicatione laterum prioris.

At subtensa septem quindecimis, hoc est 14 Tricesimis, utitur latere Triacontagonico, est igitur eo posterius. Subtensa vero 7 Tricesimis est ab illâ, per bisectionẽ; eademq; gignit subtensam 8 Tricesimis, id est 4 quindecimis, à quâ est etiam subtensa 2 quindecimis, per bisectionem. Quanquam hæc habet ortum etiam alium; verbi causâ, subtensa MF, quadratum habet compositum ex quadrato CF lateris Pentekædecagonici, & rectangulo sub eodem CF & FI latere Pentagonico. Utroq; modo posterior est superioribus figuris.

M repone medio loco inter I. C.

XLV. Propositio.

HEptagonus & figuræ ab eo omnes, quæ numerum laterum ex Primis (sic dictis) unum habent, earumque stellæ, totæque adeò classes ab ijs derivatæ, extra circulum descriptione Geometricâ carent: in circulo, etsi laterum quantitas est necessaria, illam tamen ignorari æquè necesse est.

Magna res agitur, per hunc enim effectum stetit, quo minus Heptagonus, & cæteræ hujus generis figuræ, à Deo fuerint adhibitæ ad ornatum Mundi, ut sunt quidem adhibitæ scibiles figuræ in superioribus explicatæ.

Sit igitur Heptagonus BCDEFGH, & connectantur anguli omnes cum omnibus, & sit A centrum circuli, & Diameter BAP, & A connectatur cum E.

Primum igitur tales figuræ impropriam suprà dictam demonstrationem nullam nanciscuntur: est enim earum numerus laterum & angulorum, ex Primis unus: at nulla biga figurarum præmissarum, totum circulum dividit in partes Numero aliquo Primo numerabiles: sed sortiuntur illæ Numerum Multiplicem Numerorum utriusq; figuræ.

Sed neq; propriam habent hujusmodi figuræ demonstrationem ex angulorum numero: quia quicquid ex hoc elicitur, id vagum & multiplex minimèque determinatum est.

Secetur enim Heptagonus in sua triangula quinq;, duo extrema æquicrura Obtusangula BDC, BGH, unum intimum æquicrurum Acutangulum BEF, & duo Scalena interjecta BED, BFG. Cum igitur circumferentia, super quâ stant crura anguli, ad circumferentiæ partem oppositam facti, admetiatur angulo suam quantitatem, angulus BEF stat super tribus circumferentiæ partibus, BH, HG, GF: angulus BFE similiter super tribus, BC, CD, DE; at EBF super unâ EF. Ergò BEF est tale triangulum, quod habet utrumq; angulum ad basin triplum ejus qui ad verticem. Eodem modo probatur Scalenum BED habere angulos

in pro-

in proportione continuè duplâ. Simplum enim est, angulus B, duplum E, quadruplum D, hoc est ipsius E duplum.

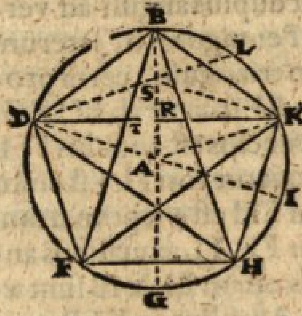
Quòd si hæc figura descriptionem suam certam habet extra circulum, non minus quàm habebat suprà quinquangulum, oportet, (ut jam olim monuerunt Campanus & Hieronymus Cardanus, & Candalla Flussas) ante omnia talia triangula dari posse, sicut ante Pentagonum dabatur triangulum, cujus uterque ad basin erat duplus anguli ad verticem. Atqui dabatur nobis in illo Triangulo Pentagonico, laterum proportio certa ex angulis: in hoc Heptagonico triangulo, certa proportio nulla datur. Sint enim I. K signa, quibus BF secatur ab EH, EG, trisecantibus angulum BEF. Igitur in FEI, quia bisectus est angulus FEI: ut igitur in eo FE ad EI, sic FK ad KI. Sed EF æquatur toti FI. Est enim FEI partium 4 septimarum unius recti, qualium EFI est 6 septimarum, ergò EIF est etiam 4. septimarum. Crura igitur FE, FI, æqualibus angulis opposita, sunt æqualia. Eâdemque de causa etiam EI, & IB sunt æquales: quare etiam ut FI ad IB, sic FK ad KI. Amplius, in KEB, quia angulus KEB bisectus est per EIH: ut igitur KE ad EB; sic KI ad IB. At KE & FE sunt æquales, quia KEF æquicrurum & simile ipsi EBF; erat verò EF æqualis ipsi IF, & EB est æqualis ipsis FB; quare etiam ut IF ad FB sic KI ad IB. In eâdem igitur BF subtensâ tribus septimis circuli, duæ sunt inventæ proportiones, partium trium: primùm ut media KI, ad minimam KF; sic maxima IB ad IF compositam ex utrâque minore, hoc est ad FE latus septanguli: iterum ut maxima IB ad mediam IK: sic tota BF ad FI compositam ex 2. minimis. Hæc proportio speciem quidem præ se fert necessariæ determinationis ad certam & unam proportionem ipsius EF ad FB; imposuitque Cardano, qui cùm tale quid in lateribus Scaleni trianguli BED animadvertisset, quod Proportionem Reflexam appellavit, de invento septanguli latere frustrà gloriatus est. Nam nulla certa sequitur quantitas, ipsius EF vel IF; quia id quod putamus nos nancisci novum in secunda vice, coincidit cum primo. Quotiescunque enim sunt 4. Proportionales, in quibus duæ primæ æquant tertiam: fit etiam, ut sicut prima est ad tertiam, secunda ad quartam, sic sit & tertia ad compositam ex tertia & quarta, quæ composita fit numero quinta. Horum verò Casuum sunt infiniti, tam in terminis commensurabilibus, quam in incommensurabilibus. Et nominatim commensurabilium terminorum casus totidem sunt, quot proportiones superparticulares, scilicet quot quadrati Numeri impares. Cardani proportio Heptagonica Reflexa.

	BF.	BI.	IK.	KF.
	9.	6.	2.	1.
vel	25.	15.	6.	4.
vel	49.	28.	12.	9.
vel	81.	45.	20.	16.
vel	121.	66.	30.	25. &c.
Et quot superpartientes	49.	35.	10.	4.
vel	64.	40	15.	9. &c.

e Nam

Nam ut 15. ad 9, sic 40. ad 24, compositum ex 15 & 9. Et ut 40, ad 15, sic 64 (constans ex 40. 15. & 9) ad 24. compositum ex 15. & 9.

Ecce communem affectionem multarum proportionum, quæ cõstitutum quidem septangulum necessariò consequitur; sed ex qua solâ datâ, triangulum septangulare strui neqt. Causa cur in Pentagono proportio lateris certa pendeat ex angulis, etiam extra circulum; in Heptagono & reliquis talibus non item; facile ex dictis patet. In Pentagonico triangulo BFK per bisectionem BKF anguli statim venitur ad æquicrura BKT & KTF duo ejus elementa, sequiturq; æquales eorum angulos BFK, BKT, æqualitas laterum BK, KT, TF; at in Heptagonico, per trisectionem anguli, tria fiunt trianguli elementa, duo æquicrura triangula BEI, KEF, & unum scalenon IEK; neque sequitur in eo proportionem angulorum, proportio laterum, ut notum est in Geometria. Cum igitur anguli hujus figuræ non doceant quicquam ulterius extra circulum; non struitur igitur triangulum requisitum extra circulum. Non est igitur hæc figura in circulum inscriptilis, per aliquid se prius in scientia vel descriptione, sed ipsâ demum inscriptione qualicunq;, vaga ista proportio cogitur ad unici casus angustias, & sic principium petitur, ut n. id possit inveniri, per quod perficitur inscriptio, jubemur adhibere ipsam inscriptionem, quasi jam antea possibilem.



In Schem. fol. 51.

Latet igitur proportio Lateris EF ad latus stellæ FB, latet inquam in materiâ quantitativâ, sic ut causâ quidem principij quantitatum materialis, quod est, magnitudo indeterminata, possibile sanè sit, constituere latus septanguli in justa proportione ad circuli diametrum: cum detur aliquid, septanguli latere certò majus, aliquid minus, in ipso Circulo: & amplius, sectione in infinitum progrediente, semper aliquid majus latere EF, vel eo minus aliquid dari potest: at causâ ejus, quod est in quantitatibus formale, simpliciter est impossibile, quia figura septanguli & similium, medijs omnibus, quibus aliqua lateris certa proportio demonstretur inveniaturvè, & sic formatione seu determinatione noscibili penitus caret. Quod cum ita sit, quare neque figura 14. angulorum in circulum, cujus semidiameter sit AP inscribi potest, latere EP, neque ejus duo latera contigua unâ rectâ EF subtẽdi possunt, quæ sit latus Heptagoni in illo circulo: neque latus hoc cum diametro comparari poterit, cùm sit Naturâ suâ comparationis ignotæ ad Diametrum.

Itaque nullum unquam Regulare Septangulum à quoquam constructum est, sciente & volente, & ex proposito agente: nec construi potest ex proposito: sed benè fortuitò construi posset: & tamen ignorari necesse est, sit ne constructum an non.

Algebra. Objiciat hic mihi aliquis doctrinam Analyticam, ab Arabe Gebri denominatam Algebram, Italico vocabulo Cossam: videntur enim in ea determinari posse omnis generis Polygonorum

latera

latera. Verbi causâ in Septangulo sic procedit Justus Byrgius, Mechanicus Cæsaris & Landgravij Hassiæ; qui in hoc genere ingeniosissima & inopinabilia multa est commentus. Primò ille diametro circuli BP numerum 2. assignat, ut AB sit unitas totalis, quâ in partes infinitâ sectione divisâ, per illas longitudo lateris BC enumeretur. Deinde ponit, notam esse proportionem ipsius AB ad BC, quæ tamen proportio demum quæritur. In hac proportione continuitatem fingit, ut sicut est AB 1. ad BC 1 ℞, sic sit 1 ℞ ad 1 ȝ, & 1 ȝ ad 1 cℭ, & 1 cℭ ad 1 ȝȝ, & 1 ȝȝ ad 1 ȝcℭ & sic perpetuò, quod nos commodius signabimus per apices sic, 1. *1 j. 1 ij. 1 iij. 1 iiij. 1 v. 1 vj. 1 vij.* &c.

Cossa Byrgij. In schemat. fol. 32. præmisso.

Hisce sic positis consideratur primò quadrangulum BEDC. Cum igitur demonstratum sit à Ptolemæo, Copernico, Regiomontano, Pitisco, & cæteris qui de doctrina sinuum scripserunt; quòd in quadrangulo circuli quocunq; rectangulum unum Diagoniorum CE, DB, æquet juncta duo rectangula oppositorum laterum, scilicet, quod sub DC & EB, & quod sub CB & DE: Rursumq; cùm sit certum ex Geometria, CO dimidiam subtensæ CH, & OB sagittam, junctis potentijs, æquare potentiam lateris CB.

Pone O ad sectionem mutuam CH & BP.

Sit igitur BP 2. CB 1 j, quadrm 1 ij, quod divide per BP, prodibit BO 1 ij divisum per 4, quadrm 1 iiij divisum per 4, quod aufer à q̃dto CB 1 ij, restat 4ij -- 1 iiij divisum per 2, quadratum CO. Cùm autem CH sit ipsius CO dupla, erit quadratum ipsius CH 16 ij -- 4 iiij divisum per 4. id est 4 ij -- 1 iiij.

Cùm ergò habeatur qdm CH vel BD, id est, rectangulum sub BD & CE, multiplica CB in DE, ut sit rectangulum sub ijs 1 ij, quod aufer à rectangulo sub BD, CE 4 ij -- 1 iiij, restat rectangulum sub CD, BE 3 ij -- 1 iiij, id in 1 j divide, sc. in CD, prodibit BE 3 j -- 1 iij.

Pergimus ulterius ad Quadrangulum DBHE. Et quia BE est 3 j -- 1 iij, erit rectangulum sub BE, DH, id est, quadratum à BE, 9 ij -- 6 iiij + 1 vj: aufer rectangulum sub BH, DE 1 ij, restabit rectangulum sub BD, EH 8 ij -- 6 iiij + 1 vj. quod divide per EH, 3 j -- 1 iij, prodibit BD 8 ij -- 6 iiij + 1 vj, divisum p 3 j -- 1 iij: ejus quadratum 64 iiij -- 96 vj + 52 viij -- 12 x + 1 xij, divisum p 9 ij -- 6 iiij + 1 vj, quod priùs erat 4 ij -- 1 iiij: in hoc duc illius denominatorem, & æquabuntur

36 iiij -- 33 vj + 10 viij -- 1 x, cum 64 iiij -- 96 vj + 52 viij -- 12 x + 1 xij
Ergo etiam 63 vj + 11 x cum 28 iiij + 42 viij + 1 xij
Ergò etiam 63 ij + 11 x cum 28 iiij + 42 viij + 1 xij. Hic æquatio prodit quantitatem lateris Heptagonici.

Vel pergimus ulterius ad DB, EG. Est n. quadrm DG, EB 9 ij -- 6 iiij + 1 vj. At q̃dm DB, EG est 4 ij -- 1 iiij, aufer hoc ab illo, erit rectangulum sub DE, BG 5 ij -- 5 iiij + 1 vj, quod divide in DE 1 j, erit BG, 5 j -- 5 iij + 1 v, cujus quadratum 25 ij -- 50 iiij + 35 vj -- 10 viij + 1 x, quod prius erat 4 ij -- 1 iiij
Æquantur igitur 49 iiij + 10 viij cum 21 ij + 35 vj + 1 x
Ergò etiam 49 ij + 10 vj cum 21 + 35 iiij + 1 viij.

Hic iterum æquatio prodit quantitatem lateris Heptagonici: sed Byrgius oculos avertit ab integritate circuli, eumq; considerat tantummodò ut arcum dividendum in 7. Cum igr subtensa partib⁹ 2. habeatur hoc processu cossicè, quærit jam subtensam partib⁹ 4, eamq; invenit (eâdem methodo qua suprà) quòd sit Radix de 16 ij -- 20 iiij + 8 vj -- 1 viij. Jamq; hac

Diagonali in novo quadrilatero, cujus latera ſint, ſubtenſæ tribus partibus, eóq; earum Rectangulum 9 *ij* -- 6 *iiij* + 1 *vj*, quod ablatum à Rectangulo 16 *ij* -- 20 *iiij* + 8 *vj* -- 1 *viij*, relinquit reliquorum laterum rectangulum 7 *ij* -- 14 *iiij* + 7 *vj* -- 1 *viij*. Hac ille ſubtenſâ utitur, comparans eam, vel cum numero, quo certi arcûs ſeptiſecandi ſubtenſa enunciatur, vel cum figurâ nihili, ſi totus circulus, ut hîc, eſt ſeptiſecandus: & tunc illi vel numero, vel figuræ nihili æquè valent quantitates hæ:

7 *j* -- 14 *iij* + 7 *v* -- 1 *vij* vel 7 -- 14 *ij* + 7 *iiij* -- 1 *vj*.

Prodit a, illi ex æquatione, quam juvat mechanicè, valor radicis non unus, ſed in Quinquangulo duo, in Septangulo tres, in Nonangulo quatuor, & ſic conſequenter: unus enim valor eſt BC, alter BD, tertius BE.

Ut igitur appareat, hoc genus inveſtigandi latera figuræ, planè nihil commune habere cum Definitionibus noſtris, Numero I, II, III. præmiſſis: notabis primò, quid profiteatur hæc coſſica ſubtenſa Byrgij? Nimirum hoc illa profitetur, ſi conſtituantur ſeptem inter ſe continuè proportionales in eâ proportione, quam habet latus ſeptanguli ad ſemidiametrum circuli, quarum proportionalium prima ſit ipſum ſeptanguli latus: tunc ſeptem primas cùm ſeptem quintis, tantundem efficere, quantum quatuordecim tertias cum unâ ſeptimâ.

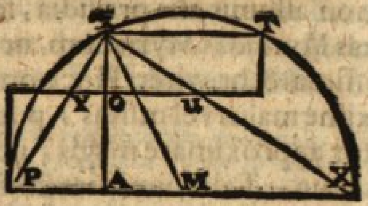
Hoc enunciatum quidem eſt Geometricum & demonſtrabile, non minùs quàm in ſuperioribus, quando demonſtratum fuit, planum Octanguli eſſe Meſon, aut latus Dodecagoni eſſe alicujus lineæ Apotomen. Illic enim de plano aut de lineâ aliquid enunciabatur, hic de proportione linearum aliquid enuntiatur.

At ſicut non ſufficit mihi ad ſcientiam & ad menſurationem plani, ſcire illud eſſe Meſon, non ad lineæ menſurationem, ſcire quòd illa ſit alicujus Apotome: cùm & multæ ſint hujuſmodi, & deſcriptio ex hac notitiâ generali nulla, quantitas plani vel lineæ nulla certa & determinata eruatur, ſed conſequantur tantummodò hæ affectiones, anteà conſtitutas & deſcriptas quantitates: ſic etiam hic, non ſufficit ut ſciam, quid ſit futurum, factis ſeptem continuè proportionalibus in proportione, quam deſidero: ſed cùm eam proportionem nondum habeam ullo geometrico actu deſcriptam: illud igitur expectabam, ut quis me doceret priùs illam proportionem conſtituere. Sic enim in omnibus præmiſſis figuris præcedebat deſcriptio, inſcriptio, determinatio certæ quantitatis, certusque actus Geometricus, quo perficeretur hæc determinatio; ſequebatur demum ſcientia proprietatum illarum, quæ faciebant ad comparationem inter ſe figurarum.

Ut clariùs appareat diſcrimen utriuſq; rei; videamus Pentagonicum latus, cujus deſcribendi modus in ſuperioribus hic erat, ut conjunctis quadratis duobus, uno ſemidiametri, altero ejus dimidiæ partis, in formam quadratam, ab hujus quadrati latere auferremus dimidiam partem ſemidiametri; Relictæ lineæ quadratam rurſum cum quadrato ſemidiametri compoſitum in formam redigeremus quadratum, hujus n. quadrati latus fore latus Pentagoni. Hæc omnia erant factu & poſſibilia, & faciliora quam dictu, ut norunt qui circinos tractant. Quid n. facilius

cilius

cilius, quàm rectum angulum GAM facere, & in ejus cruribus signare ut lubet AM, ejusque duplam AG, & posito pede circini uno in M, altero in G extenso, scribere circulum GP, continuatâ MA in P, deniq; GP circino comprehendere, & in alium circulum, cujus GA semidiameter, inferre?



At vide nunc, quid nobis de latere Pentagonico dicat Cossa Byrgiana. Illa methodo prius deductâ, prodit numerum 5 *i* -- 5 *iij* + 1 *v* æqualem subtensæ nullæ; id est; si quinque fiant ordine continuo proportionales, quarum prima sit latus Pentagoni; proportio verò sit illa, quæ est lateris Pentagonici ad semidiametrum; tunc quinque primas cum unâ quintâ, fore æquales quinque tertijs.

Rursum, ut in septangulo, non docet constituere continuam proportionem, in quâ hoc fiat, nec exprimit longitudinem proportionalium per ante nota, sed docet, eâ constitutâ, quæ sequatur affectio. Jubeor igitur repræsentare affectionem, fore enim, ut habeam & proportionem. At quomodo repræsentabo affectionem, quo actu Geometrico? Nullo alio id doceor facere, quam usurpando proportionem, quam quæro; principium petitur: & miser Calculator, destitutus omnibus Geometriæ præsidijs, hærens inter spineta Numerorum, frustrà cossam suam respectat. Hoc unum est discrimen inter Cossicas & inter Geometricas determinationes.

Alterum est, quòd tota hæc ratio Byrgiana innititur essentiæ quãtitatis discretæ seu numerorum; & dividit diametrum in particulas certas, quoties & quàm diu vult, generaliter in partes duas; cui numero totus processus innititur, mutareturque, si nomen Diametro aliud, seu numerus alius daretur. At non sic Geometria figurarum, superiùs tradita, quæ latera, Effabilia longitudine, signat sanè Numeris; at ineffabilia, nequaquam numeris consectatur, sed per suas certas species distributa sic enunciat, ut appareat, non de discretis, sed de continuis quãtitatibus agi, de lineis & superficiebus.

Tertiò hactenus & lateri Figuræ, & lateri stellæ cognominis, cuique sua certa erat descriptio; in hac Algebraicâ Analysi, illud maximè mirum est, (quamvis Geometram præcipuè absterreat); quod non unâ viâ præstari potest, quod imperatur. Quanquàm id non omni lege solutum est, sed, ut suprà dici cæptum, tot sunt numeri facientes imperatum, quot sunt in figurâ subtensæ seu Diagonij, longitudine differentes, ut in quinquangulo duo, in septangulo tres, unus pro latere, reliqui pro subtensis angulo. Itaq; quicquid enunciatur tandem de proportione figuræ propriâ, id commune est omnium ejus linearum proportionibus ad diametrum.

Quartò, posito, quod una sola proportio faciat imperatum; illam tamen non doceor absolvere, sed saltem venari eminus. Cùm enim species linearum causâ scientiæ versentur in genere Ineffabilium (id est non numerabilium, seu numeros respuentium) eoque nulla unquam multitudine consummetur ratio, quin semper aliquid in incerto relinquatur: hæc contrà ratio, ut loco ſecundo dictum, præter numeros non aſſumit alia præſidia, ſed diametrum variè ſemper dividit in multas Myriadas Myriadum, ut exactior fiat ratio; at ſic nunquam fit exactiſſima; & breviter: Hoc non eſt ſcire rem ipſam, ſed ſaltem aliquid proximè majus vel minus; poteſtque ſemper poſterior aliquis computator approximare magis; pervenire ad punctum ipſum, nulli unquam datur. Talia nimirum ſunt omnia, quæ latent in ſolâ poſſibilitate materiæ quantitativæ; neque formationem habent ſcibilem, quâ in actum quandoq; ſcibilitatis humanæ conſtituantur.

Quintò, ut in ſpecie de ſeptangulo, figuriſque hujus generis conſequentibus agamus, cum per eas ordine ſuo ſeſe conſequentes, proportionalitas continua extendatur cum ipſo numero laterum: ergò ſi maximè innoteſceret ultima, ut in ſeptangulo, proportionalium ſeptima; non tamen per eam haberi poſſent intermediæ. Nam inter duas, quæ non habent proportionem inter ſe, quam duo numeri proportionalitatis continuatæ, ut cubicæ, ſurſolidæ, &c: nequeunt Geometricè conſtitui continuè proportionales intermediæ quotcunque, ſed ſolum una vel tres vel ſeptem vel quindecim &c, duæ verò vel quatuor quinq;, ſex, octo, novem, &c. conſtitui tunc non poſſunt in plano; cum hic de planis figuris agamus.

Jam verò inter ſemidiametrum 1 & ſeptimam proportionalem 1 *vij* proportionis ſeptangularis, ſunt mediæ proportionales ſex, & eſt 1 ad 1 *vij* non ut numerus, ad numerum proportionis continuæ æquè longæ; non eſt ſcilicet proportio ſemidiametri ad latus ſeptanguli ſecundum duos numeros, hoc eſt, non Effabilis eſt. Nam ſi eſſet Effabilis, caderet in ſpecies prius explicatas, claſſium priorum, & ſeptem anguli non eſſent ſeptem, ſed tres vel quatuor, quod contradictionem involvit. Ex angulis enim primarum figurarum erat laterum proportio. Oporteret igitur uno actu omnes ſex medias proportionales conſtitui, inter ſcilicet 1 & 1 *vij*. Viciſſim ſi daretur 1 *vj* quantitate; tunc inter 1. & 1 *vj* quinque mediæ caderent. Quod ſi tunc 1 ad 1 *vj* eſſet ut cubicus numerus, ad cubicum, tunc primò conſtitui poſſent uno actu 1 *ij* & 1 *iiij* deinde inter 1. 1 *ij*. 1 *iiij*. 1 *vj*. tribus actibus tres mediæ proportionales. Sin autem 1 *v*. daretur quantitate, rurſum omnes quatuor intermediæ uno actu conſtitui deberent; quod fieri non poſſet, niſi in proportione Effabili, ut prius. Cætera ſecundum hæc ſubintelligantur.

Concludimus igitur, Analyſes iſtas Coſſicas, alienas eſſe à præſenti contemplatione; nec ullum conſtituere gradum ſcientiæ, cum iis comparabilem, quos explicavimus in ſuperioribus.

Hæc ne blaſphemè dicta putētur, omitti poſſe cenſuit amicorum unus, Mathematicorum peritiſſimus. Atq; nihil eſt vul

Illud autem obiter monendi ſunt Metaphyſici, occaſione hujus coſſæ, conſiderent, ſi quid hinc tranſſumere poſſint ad explicationem illius Axiomatis, cùm *Non Entis nullæ dicuntur eſſe conditiones, nullæ proprietates*. Nam hic quidem verſamur nos in Entibus ſcientialibus; & pronunciamus rectè, quod latus Septanguli ſit ex *Non Entibus*; puta ſcientialibus; Cum enim ſit impoſſibilis ejus formalis deſcriptio; neque igitur ſciri poteſt à mente humana, cum ſcientiæ poſſibilitatem præcedat deſcriptionis poſſibilitas: neque ſcitur à Mente Omniſcia actu ſimplici

plici æterno: quia suâ Naturâ ex inscibilibus est. Et tamen hujus non Entis scientialis sunt aliquæ proprietates scientiales; tanquam Entia conditionalia. SI enim ESSET Septangulum descriptum in circulo; laterum ejus proportio tales haberet affectiones Sufficiat monuisse.

gatius apud Theologos quàm impossibilia esse, quæ contradictionem involvunt: & Dei scientiam ad talia impossibilia se non extendere, prælertim cum hæ formales rerum Geometricarum rationes nihil sint aliud, quàm ipsa Essentia Dei; quia quicquid in Deo est ab æterno, id una individua est essentia divina: esset igitur seipsum quodammodo alium scire; quàm est; si quæ sunt incommunicabilia, sciret ut communicabilia. Et quæ hæc adulatio, propter imperitos librum non lecturos, defraudare cæteros.

Sunt & aliæ propositiones falsæ Geometrarum, de lateribus hujusmodi figurarum, sed quas vel ipsa sollertior Mechanica refutet; cùm tamen Mechanices causâ obtrudantur juventuti: ut cum Septanguli latus AC ab Alberto Durero ponitur æquale semilateri Trigonico A B ejusdem circuli. Hoc verò nimium breve esse, etsi vel ipsa Mechanica docet: tamen ne cui imponat experimentatio manuaria nimiùm rudis; is vel hac solâ ratiocinatione falsum ante manuum accommodationem deprehendere poterit. Trigonicum latus ex numero angulorum probatur esse Effabile potentiâ; quare sic etiam ejus dimidium; Heptagoni latus non est Effabile potentiâ, eò ipso, quia Heptagonus est: & quia septem neque sex sunt, neque quinque, neque tria. Numeri enim Primi gignunt species; at species sunt incommensurabiles inter se, nec una est alia.

Alb. Dureri definitio lat. Septanguli.

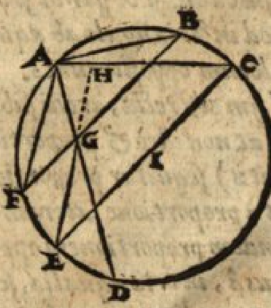
De Caroli Mariani Cremonensis & Francisci Flussatis Candallæ paralogismis circa Heptagonum vide Chr. Clavium Geometriæ Practicæ lib. VIII. prop. 30, & in commentarijs in Euclidis lib. IV. Pr. 16.

Aliorum.

Excitavit hæc palæstra etiam Illustrissimum D. Marchionem de Mala Spina, Legatum anno 1614. Ser^mi Ducis Parmensis ad aulam Cæsaream; qui diagrammate ingeniosissimo omnes omnium descriptiones superavit; existimans, subtensam tribus decimis quartis circuli, æqualem esse quinque quartis semidiametri, & sic effabilem longitudine: demonstrationis apparatus tantæ fuit sollertiæ, ut vel ipsum Euclidem lateret, assumtum aliquid fuisse indemonstratum.

Undecangulum.

Pro latere Hendecagoni circumfertur talis descriptio: In circulo ab eodem puncto A, ducatur latus Tetragoni AC, ad unam partem circumferentiæ, Trigonicum AD, ad contrariam; Hexagonicum AB, AF ad utramque: & duorum illorum Hexagonicorum angulus F A B subtendatur alio Trigonico latere BF, quod secabit prius Trigonicum A D in G: ducatur etiam à fine Tetragonici C diameter CE per I centrum, & à fine altero diametri E, per sectionem Trigonicorum G, ducatur recta E G, secans Tetragonicum A C in H: linea G H inter has duas sectiones, dicitur esse latus Undecanguli. Est verò nimis longa, vel Mechanicâ docente. At sollers Geo-



metra

metra speciem lineæ considerat, quæ necessariò communicat aliquid ex Trigonico & Tetragonico lateribus, quantumvis remoto gradu. Atqui numerus 11, Primus existens, nullo modo ad has figuras ducit, cùm sit Primus, nihil cum 3. & cum 4. comune habens. Securus igitur est Geometra, falsam esse descriptionem; & potest facilè supersedere labore computandi.

Manet igitur per omnes objectiones, per omnes omnium frustraneos conatus, latera figurarum hujusmodi suapte Naturâ esse ignota & inscibilia. Ut nihil mirum sit, id quod in Archetypo Mundi non potuit inveniri, neque etiam expressum esse in conformatione ipsius Mundi partium.

XLVI. Propositio.

SEctio circuli arcus cujuscunque in æqualia tria, quinque, septem, &c. & in quacunque ratione, quæ non sit antedemonstratarum continuè dupla, non est de possibilitate Geometricâ tali, quæ scientiam generet.

Sectio arcûs in duo, & quatuor, & octo, &c. continuè scilicet dupla, Geometrica sanè est, fuitq; hactenus adhibita. In tria contingit secari & totum Circulum per Trigonum; & Semicirculum, ut in Hexagono; & quartam partem, ut in Dodecagono; & quintam, ut in Pentekædecagono; & arcum 135 Graduum, ut in Octogono; & arcum 108 graduum, ut in Decagono. In quinque verò contingit secari similiter & totum circulum, per Pentagonum; & semicirculum, ut in Decagono; & tertiam circuli partem, ut in Pentekædecagono; & arcum 150 graduum, ut in Dodecagono. Idem verum est de horum arcuum semissibus, quadrantibusque, & cæteris partibus proportionis continuè subduplæ. At hoc non fit propter Trisectionis & Quinisectionis ingenium, sed per accidens, & propter alias figurarum proprietates, de quibus hactenus.

At promiscuam trisectionem, aut sectionem in aliâ quacunq; ratione propositâ, quæ non sit continuè dupla, impossibilem esse, patet ex comparatione bisectionis possibilis. In eâ medium ad arcum, & quem ille mensurat, angulum bisecandum, est linea recta, subtensa arcui, quæ in duo æqualia secari potest Geometricè: cùm æqualitatem harum partium sequatur æqualitas partium arcus cujuscunq;, sive parvi sive magni, respectu totius circuli: ex quo fonte & hoc est, quòd in Triangulo ab æqualitate laterum licet argumentari ad æqualitatem angulorum oppositorum. Hoc verò medium nos in cæteris sectionibus deserit. Nam etsi recta, arcui subtensa, secari potest in partes quotlibet, idq; Geometricè; at non ideò & proportionem ullam partium subtensæ (post proportionem æqualitatis) sequitur proportio partium arcus; quemadmodum neq; in Triangulo licet à proportione laterum quacunq; (præter unam æqualitatis) argumentari ad eandem proportionem oppositorum angulorum. Nam si subtensa arcus, verbi causâ, in tria æqualia, secetur; si quæ secant, perpendiculares in subtensam fuerint, media pars arcûs erit minor lateralibus; sin ex centro arcûs fuerint egressæ sectrices, media pars arcûs erit major lateralibus. Igitur inter distantiam infinitam

finitam & centrum circuli, punctū est, ex quo eductæ duæ sectrices, & subtensam & arcum ejus in tria æqualia secarent. Id verò punctum semper tantò remotius est ab arcu circuli, quanto minor arcus circuli trisecandus est, proportione tamen non constanti. Cum igr arcus circuli minui possint in infinitum, distantia etiam hujus puncti excurret in infinitum; Infiniti verò, seu varietatis infinitæ nulla est scientia. Et hæc difficultas tenet Trisectionem, quæ adhuc simplicior est & æqualitati propior. Multò major oritur difficultas in sequentibus sectionibus alicujus arcus, verbi causâ, in 5, 7, 9, 11 &c. partes æquales. Tunc n. ne puncti quidem identitas amplius est possibilis, ex quo eductæ rectæ, quæ subtensam secant in partes æquales imperatas, eædem & arcum in æquales secent.

Quicquid verò præsidiorum ad promiscuam sectionem possumus afferre, deductum ex numero, qui sectionem denominat, id necesse est esse generale, & commune cujuscunque arcûs subtensis, tam magni qui multùm à suâ subtensâ differt, quàm parvi, qui parùm. Atqui vagam relinquere proportionem partium subtensæ, ad partes arcûs sui; id verò non est determinare scientificè. Atque hoc præcipuè dictum esto de Trisectione vel quinisectione, &c: Byrgianâ Analyticâ, de quâ in præcedenti Propositione egimus copiosè. Etsi verò omnia ibi dicta, habent etiam hic locum; quædam tamen illic dicta, sunt hujus loci magis propria, fiuntque illustriora & admirabiliora in sectione arcuum, quàm in sectione totius circuli. Nam ut omittam illa communia, quòd principium petatur, imperato eo, ut faciamus, quod quomodo faciendum sit, quærebatur: quòd affectiones quantitatis continuæ non scientificè prodantur per quantitates discretas seu Numeros; quòd quicunque numerus elicitur pro latere, determinante partem arcus imperatam, ille non possit quicquam docere, quàm quòd illud sit vel majus vel minus debito: eòque sicut se habet materia rudis & indigesta ad formatum quid; sicut quantitas indeterminata & indefinita ad figuram; sic etiam se habeat Analytica ista ad determinationes Geometricas: illud imprimis excellens & nobile est in hac Cossâ semimechanicâ, degener verò & abjectum in Geometriâ scientificâ: quòd cùm unaquæque subtensa minor diametro, duobus circuli arcubus inæqualibus accenseatur, quorum alter minor semicirculo, alter major; eoque partis aliquotæ de minore, minor sit subtensa, partis æquè quotæ de majori, major: Analytica ista Byrgiana non tantum de duabus hisce inæqualibus, sed etiam de pluribus alijs circuli subtensis, generale quid præcipit, quod utile sit ad illas omnes numeris proximè exprimendas. Verbi causâ, in trisectione lex hæc est: Si datus sit arcus (sit 48 graduum) ejusque subtensa; & is arcus sit in tres partes secandus, quamlibet 16 graduum; hoc est, invenienda sit subtensa hujus partis, seu ejus proportio ad subtensam totius, graduum 48: tunc jubeor facere ut subtensam totius, ad quæsitam subtensam partis, sic hanc ad secundam, & secundam ad tertiam proportionalem: jam jubeor triplicare subtensam partis, & ab eâ auferre tertiam proportionalem: quod relinquitur, id dicitur valere subtensam totius. Hoc est, De subtensâ datâ, pars tertia multiplicetur cubicè, ut fractio, numerus factus addatur ad totum: aucti sic, tertia pars est paulò minor subtensâ quæsitâ. Nam si rursum hæc ipsa, cubicè multiplicata, ad totam addatur; sic auctæ tertia pars propius ad verum venit; & hoc continuè, usq. in infinitum. Hoc quidem processu venitur paulatim propè subtensam Graduum 16.

Sectionis arcus in partes aliquotas Byrgiana quod sit ingenium.

f *At si*

At si majore n constituas numerum cubicè multiplicandum, & omnino tantum ferè, quantum circinus indicat deberi tertiæ parti de residuo circuli, post ablatos Gr. 48, sc: Gr. 312, cujus tertia est 104: tunc etiam subtensam arcus 104, & complementi 256. hoc modo perficies. Neque hoc tantum; sed si etiam ad 48. & ad 312. adjeceris circulum integrum 360. invenies etiam pro summarum istarum 408, 672. trientibus, scilicet 136, & 224. subtensam aliam, per idem Nomen Cossicum. Et in genere, quot restant unitates in numero sectionis, binario ablato, toties licet addere circulum integrum, vel arcum secandum propositum, ut eodem nomine cossico novorum arcuum subtensæ indagentur. Ex quo apparet ingens discrimen nominum horum cossicorum, & scientificorum graduum, quos in superioribus explicavi.

An verò non possit aliqua nobilior ars inveniri, quâ sectiones arcuum omnimodæ perficiantur? Respondeo, si omnes subtensæ arcuum dividendorum sub communi notione considerentur, & si illa tantum habemus præsidia, quæ sunt omnibus quæsitis subtensis communia: ut sunt, illarum in proportione quæsitâ, continuè proportionales quotcunque: tunc nobilius aliquid haud quisquam comminiscetur, actumque agit, quicunque hic annititur; & oppositum in adjecto statuit, confusus. Ex communibus enim, nihil cuique proprium concludetur.

Sin autem de differentijs specificis linearum, quæ dividendis arcubus subtenduntur, sermonem instituimus: jam mutatur status quæstionis, & pro sectione arcûs omnivariâ, substituitur sectio totius circuli, per figuram Regularem, quæ propositæ subtensæ suam specificam proprietatem conciliat: de quibus figuris Regularibus nos jam suprà egimus, & in sequentibus amplius agemus: quippe qui hac ipsâ in quæstione medium quærebamus, quo figurarum illarum aliquas describere possemus. Cùm itaque tale medium naturâ debeat esse prius re ipsâ, per hoc medium efficiendâ; principium utique peteremus, si Medio nostro expediendo præsidium à figuris Regularibus peteremus.

Pappi & Clavij sectiones arcuum omnifariæ.

Verùm hic adversarius aliquis objecerit mihi: quòd Pappus Alexandrinus libro quarto Mathematicarum collectionum, Proposit. XXXI. Tripartitam anguli sectionem tradat per Hyperbolam; & Proposit. XXXV, Datâ quâcunque ratione angulum secare, Per Quadraticem & Helicem: Et Clavius Geometriæ Practicæ lib. XIII. proposit. 25. præstat idem per Conchoidea Nicomedis,

Verum illorum authorum inventa nullam stabiliunt possibilitatem Omnivariæ sectionis Geometricæ scientificæ. Ut hoc appareat; primum Pappi machinationes circa trisectionem explicabo: deinde differentiam inter illas & descriptiones scientificas, in luce locabo.

Pappi trisectio anguli.

Primùm ipse Pappus in præambulo ante propositionem 31. dividit problemata; (quæ generaliori significatu vocabuli, Geomeometrica, appellat, cùm nobis, Geometricum, specialem sensum habeat) in Plana, Solida, & Linearia: fateturque, Trisectionem anguli, per Plana (quæ mihi sunt speciali sensu Geometrica, scientifica, graduum explicatorum) expediri non posse, eâq. de causa coarguit antiquas Geometras inconsulti conatus, qui hic frustrà desudaverint.

Ipse igitur trisectionem suam expedit per Solida, omnivariam verò sectionem, per lineas figuratas.

Tri-

Trisectionis modus est talis. Proposito angulo trisecando, demissâ ex puncto cruris unius perpendiculari in crus alterum, quæ longitudinem crurum intelligatur determinare, & ei crurialteri breviori facto, perpendiculoq; , ductis parallelis, illi ex puncto primo, huic ex proposito angulo, sic ut concurrentes rectum & ipsæ faciant angulum: jam per punctum, in quod demissa perpendicularis, facit transire superficiem Coni, figuræ solidæ; deinde sic applicatum Conum inclinat, seu annuere facit, quoadusq; is cum eâdem suâ superficie, sectionem Hyperbolen dictam in plano designet, ductarum parallelarum, ut Asymptotôn, propriam: tunc ex puncto illo, in quod est demissa perpendicularis, intervallo, quod sit duplum cruris primi, describit in plano arcum, secantem sectionis Conicæ lineam; & connexo centro arcus cum hac communi sectione, rectam ei parallelam ex angulo proposito ducit; eoq; facto, demonstrat, abscectam esse ab angulo partem tertiam.

Solidum quidem hoc pacto problema facit Pappus, usu Coni, figuræ solidæ. At quatenus inter datas Asymptotos (ductas perpendiculares) angulum rectum facientes, per punctum intra illas datum, sectio Conica, dicta Hyperbola, etiam sine Cono, delineari in plano potest: problema idem videtur etiam inter Linearia referendum. Gignitur enim talis linea motu Geometrico, & mutatione continuâ intervallorum, hoc est, repræsentatur per puncta quotvis, indeterminato numero; idque non minus, quàm Quadratrix & Helix, quibus lineis Proposit. 35. & Ternariam & Omnivariam sectionem perficit. Sic habet Pappi machinatio.

Quid igitur dicemus? Nonne inter datas Asymptotos, per punctum datum, una sola scribitur Hyperbola, sive id fiat annutu Coni, sive punctorum infinitorum continuatione? Nonne una sola sectio circuli cum Hyperbola ex unâ plagâ? Nonne una sola & certa inclinatio est lineæ, puncta Hyperbolæ connectentis, ad figuræ diametrum?

Equidem fateor, hæc omnia necessaria & certa esse, si quidem Hyperbola jam sit descripta. Erat enim etiam priùs in analyticâ Byrgij trisectione, tertiæ constitutæ partis subtensæ certa & necessaria longitudo seu proportio, ad subtensam toti arcui. At quia non de hoc quærimus, quid sit, re jam factâ; sed quomodò, ut sit quidque, rès nondum facta, sit facienda demum: ideò nihilò plus habemus ex Problematibus Solidis & Linearibus veterum, quod ad quæsitam linearum scientiam faciat; quàm priùs ex doctrina Analyticâ modernorum. Est sanè una sola Hyperbolæ linea, inter Asymptotos positas, per punctum propositum, in earum plano ductilis. At eâ nondum ductâ, Conum jubeor tantisper inclinare super puncto applicationis, donec existat illa, ductaq; sit: vel sine Cono; lineas, quæ Hyperbolam delineant per continuata puncta, jubeor tantisper mutare, donec satis prolongata sit Hyperbola: & quæ partes inter facta puncta cadunt intermediæ, eas jubeor imaginari factas: jubeor utrinque, id quod est potestate divisionis infinitæ, actu seu motu uno transire; ut hoc transitu etiam id attingatur, quod latet in illâ infinitate potestativâ, sine perfectæ scientiæ luce, qualem habent problemata à veteribus Plana cognominata.

Hujusmodi postulatis crebrò utuntur Franciscus Vieta Gallus, & Geometræ Belgici hodierni, in solutionibus eorum problematum, quæ suapte naturâ non sunt solubilia, nisi inartificialiter, per numeros, aut per motus Geometricos, infinitate quâdam mutationum gubernandos.

Nam ubi omnia fuerint in promptu, quæ facere putabuntur ad certificandam mentem: tenebimus determinationem ejus, quod requæsitâ vel majus sit vel minus proximè, semperque propius: ut prius etiam de trisectione Analytica dixeramus.

A Planis ad solida non est transitus scientificus.

Verum esse de hoc problemate solido Trisectionis, quod dico, vel ipsa solidi vox admonet. Nam nisi solidorum proportio fuerit data talis, qualis est inter duos numeros cubicos: mensurare solidum propositum alio solido noto non poterimus, ad mentem informandam: quia duæ intermediæ proportionales exactè in plano constitui non possunt: in cubis etsi possunt inesse, at à planis ad Cubos illos quoscunque formandos, non datur transitus sine ipsis duabus medijs, veluti ponte abrupto. Et duas medias proportionales invenire, docent alij per motum Geometricum, imperantes quod est impræstabile, quoad certitudinem actus Geometrici adæquati: docet & ipse Pappus, per sectiones Conicas, beneficio duarum proportionalium expediendas, cum & Conus sit solidum quid. Ita semper principium petitur; & pons jacet in adversâ ripâ.

Duas medias proportionales scientificè invenire impossibile.

XLVII. Propositio.

FIguræ numero laterum impari, maiori quam 5, (excepto Pentekædecagono) cum subtensis aliquot partium, totæq; ades Classes, omnes eodem censu sunt, quo Heptagonus & cæteræ figuræ, numero laterum Primo.

Nam si numerus laterum est impar, non ex Primis unius: is aut est duorum Primorum imparium minimus multiplex; aut alicujus Primi quadratus: aut est Primi unius, & quadrati Primi alterius multiplex, aut multiplicium quadratorumve seorsim vel junctim multiplex.

Quod si essent hæ figuræ descriptiles & inscriptiles, & scibiles; tunc aut propriam haberent demonstrationem ex angulis, aut impropriam ex comparatione figurarum, quibus communicant. At propriam non habent; quia non sunt numero laterum Primo, ex quo formaretur demonstratio: impropriam non habent, neque primæ, verbi causâ, Unetvigintangulum, quia figuræ ijs communicantes vel ambæ vel alterutra, ut hic Heptagonus (post Trigonum & Pentagonum ex quibus Pentekædecagonus) nullam propriam habent, per XLV præmissam; neque secundæ, v. c. Nonangulum, quia non datur sectio arcus aliquoti, puta Trientis, in totidem partes æquales, quot accepit circulus integer, per XLVI præmissam: neque tertiæ, neque quartæ, quia priores ijs communicantes indemonstrabiles sunt.

Nonanguli latus non scibile.

De Enneagono, cujus numerus 9, est quadratus primi imparis inter Primos, sc. ternarij, certatum est hactenus inter Geometras, plerisque annitentibus, ut etiam hujus figuræ latus demonstrarent, omnes tamen frustrà fuerunt, nec unquam hoc problema fuissent aggressi, si discrimen scibilium & inscibilium attendissent.

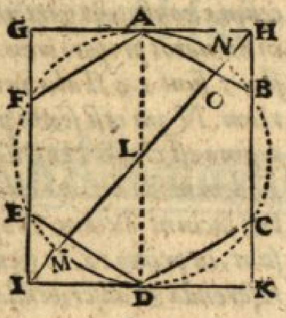
Campanus de Nonangulo.

Campanus Nonangulum demonstrare voluit per Trisectionem anguli, quam patuit inscibilem esse, in præmissâ XLVI. Etsi verò viâ Pappi & Clavij necessariò trisecatur, posito sc. motu Geometrico: at quid hoc ad planas figuras, de quibus nos hic agimus; cum solidis opus sit ad faciendas trisectionis administras

lineas

lineas, Hyperbolam, Quadratricem, Helica, Conchoidea? Ipse quidem Campanus trisectionem tentans, non animadvertit, se sumere tertiam anguli partem veluti jam certam, quæ erat demum quærenda. Extat locus in meo exemplari ad finem Operis Euclidei fol. 586. pertinens ad finem libri IV.

Jordanus Brunus Nolanus in sexanguli ABCDEF opposita latera BC, EF, continuata utrinq;, ducit perpendiculares GH, IK, circulum in A.D. contingentes: ductâ igitur facti parallelogrammi diagonio IH, circulum putabat secari sic, ut inter AD Puncta contactuum & sectiones M. N. existant Nonæ partes circuli AN, DM. Atqui demonstratur ex diagrammate, quòd cùm semidiagonij illius LH, quadratum sit effabile, scil. 7 decimæ sextæ de quadrato diametri, (est enim ABH 60. ergò BH semissis de AB, vel AL: & ejus potentia igitur, quadrans de potentiâ AL; Igitur AH potentia, dodrans de potentiâ AL: Sed potentia LH æquat potentias LA, AH) sinus igitur graduum 40, hoc est dimidia subtensa duarum Nonarum circuli, futurus fuerit Effabilis potentiâ, scilicet radix de tribus vicesimis octavis, quadrati diametri: Demissâ enim perpendiculari AO ex A in LH, erit sicut LH potentia, 7 sedecimæ, ad HA potentiam, 3 sedecimas: sic LA potentia, 4 sedecimæ, ad AO potentiam, 12 septimas de unâ sedecimâ, id est, tres vicesimas octavas. Ita hæc nonangularis anguli subtensa esset nobilior aliquibus præmissis, & communicans ijs: cum tamen sit numero laterum impari, scilicet numero aliquo, Primi 3 quadrato, nihil communicans cum Tetragono & Trigono, per bisectionem arcuum, quarum figurarum proprius est hic nobilitatis gradus.



Jordani Bruni Nonangulum.

XLVIII. Corollarium.

SEquitur igitur, Notionis, Scientiæ, Determinationis, Descriptionis, & Demonstrationis metas intra primos figurarum Ordines consistere: ut sint Classes figurarum scibilium non plures quàm quatuor: tres, proprias demonstrationes habentium, in quib' capita sunt familiarum, in primâ, Tetragonus, post diametrum circuli, cujus character numerus 2; in secundâ, Trigonus, cujus character 3; in tertiâ, Pentagonus, charactere 5: una verò impropriarum demonstrationum, cujus numerus est multiplex duorum 3 & 5; scilicet 15: prima enim ejus classis figura est Pentekædecagonus.

XLIX. Propositio.

CVm autem bisectio (qua propria utitur classis prima), communis sit tam secundæ quam tertiæ classi: patet, alio jure degere classem primam, alio duas reliquas; ita ut prima familiaritatem habeat ad utramque reliquarum; at illæ figurationibus contra se distin-

diſtinguantur, adeò, ut earum, quæ proprias demonſtrationes habent, quodammodo duo tantum ſint Genera.

Nam Tetragonus & Octogonus ſtatim ſe quaſi totas Trigonicæ ſectæ applicant; quia pars circuli ſexta & duodecima junctæ, faciunt quartam, pars duodecima & viceſima quarta, compoſitæ, faciunt partem Octavam. Et Tetragonus ſe Pentagonicæ ſectæ quadamten' accommodat; quia quinta circuli pars, addita viceſimæ, conſtituit partem quartam. Cauſa eſt, quia Numeri 3. & 5. dividi poſſunt in numeros proportionis continuè duplæ: Nam partes ipſius 3. ſunt 1.2. partes ipſius 5 ſunt 1.4. Talis verò communio non eſt inter claſſes, Ternariam & Quinariam. Nam etſi ſexta pars circuli, addita triceſimæ, conſtituit quintam; at triceſima eſt claſſis Pentekædecagonicæ, quæ non habet propriam demonſtrationem. Eodem modo decima circuli, addita quindecimæ (ecce admixtionem claſſis quartæ) faciunt ſextam. Propter hanc dualitatem Generum, numeri characteriſtici ſunt, in primo 12, in ſecundo 20, vel ejus dimidium 10. Hæc igitur infrà libr. III referenda & adſcribenda ſunt ad diſtinctionem generum cantus.

L. Comparatio Figurarum ſeu diviſionum circuli.

PRimas tenet diameter; eſt enim effabilis longitudine. Secundum eſt latus Hexagonicum, æquale ſemidiametro, & ſic Effabile longitudine. Tertio loco ſtant Tetragonus & Trigonus, quia latera habent Effabilia ſolâ potentiâ. Quartum tenent ordinem latera Dodecagoni, Decagoni, eorumq; ſocia ſtellarum latera; ſunt n. ex ineffabilib⁹ potētiâ, & Compoſitis primæ ſpeciei, ſunt ſc. Binomines & Apotomæ, Dodecagoni q̃dem, Primæ, Decagoni verò, Quartæ. Quinto loco ſuccedūt latera Pentagoni & ſtellæ ej⁹, ſic & latera Octogoni & ſtellæ ejus, ſunt n. ex quartâ compoſitorum ſpecie, Mizon & Elaſſon dictæ.

Ne qua verò bona nota in Decangulo præjudicet Quinquangulo: aut ne ſpecies eadem lateris Octāgularis, æquet ſuam figuram Quinquāgulo vel Decangulo; nova quinquangulo accedit virtus in ortu ipſo; quòd per hanc Sectam, Denario cōmunicantem, regnat undiq; proportio Divina: quæ immediatè ineſt ipſis lateribus Quinquangulari ejuſq; ſtellæ; at Decangulari cum ſuâ ſtellâ non competit, niſi mediante latere Sexanguli; Octangulari planè non competit.

Præter has laterum proprietates, alius inſup cenſus eſt nobilitatis, quòd figuræ diſtinguuntur ex aptitudine & perfectione areæ, q̃ ſepit figura. Hic poſt diametrum (cujus area nulla, & quæ ſola circuli aream, ut Ptolemæus monet, in duo æqualia ſecat, non minus q̃ circumferētiam) principem locum obtinēt Tetragonus & Dodecagon⁹, q areã habēt Effabilem, & Tetragonus quidem eximiâ prærogativâ; quia eadem illi eſt area, quæ & lateris quadratum, qppe areæ ſpecies eſt quadrata: itaq; ſepit dimidium de quadrato diametri: Dodecagon⁹ verò ſtat poſt principia, ſepiens dodrantem de quadrato diametri. Proximo loco ſuccedunt Trigonus, Sexangulum & Octogonus, quibus eſt area ex ſpecie Meſôn. Pētagoni & Decagoni areæ nulla dum habēt nomina notionum.

FINIS Libri I.

Joann

IO: KEPPLERI HARMONICES MUNDI LIBER II.

De Congruentia Figurarum Harmonicarum.

Prooemium.

ESsentiam singularum Figurarum Regularium Mentalem seu νοερὰν hactenus explicavi: sequitur earum junctarum Proprietas, & veluti Effectus intra Geometriam, qui est Congruentia vel Insociabilitas. Non sunt enim ejusdem latitudinis, Demonstrabilitas & Congruentia, cùm illa singularum sit, & cum ipsâ duplicatione continuâ laterum unius figuræ in infinitum excurrat; ista certis coartata legibus, quibus plures figuræ in unam societatem vocantur, ob angulorum incrementa seipsam præpediens, citò desinat. Et quamvis delectus sit graduum scientiæ demonstrationisque, & plurimùm differant nobilitate, illæ quas nos explicavimus, ab ijs quas dimisimus sine nomine: non tamen ne cum hac quidem demonstrationis nobilitate, Congruentia planè pari passu ambulat: adeoque unum alterius causa non est, sed utrumque ex eadem communi causa (quæ est angulorum figuræ aptitudo), quodque tamen suis legibus, dependet. Quantoperè verò necessaria sit nobis hæc quoque speculationis pars, ex ipso totius operis instituto videre est. Cùm enim originem Harmonices, ejusque Effectus in toto Mundo præstantissimos, explicandos sumpserimus; quomodo de congruentiâ figurarum, quæ sunt proportionum Harmonicarum scaturigines, verba nulla faciamus? cùm idem sonet Latinis Congruere & Congruentia; quod Græcis ἁρμόττειν & ἁρμονία? cùm hic figurarum effectus intra Geometriam, intraque Architectonices partem illam, quæ circa Archetypos versatur, sit quædam velut imago & præludium Effectuum extra Geometriam, extraque mentis conceptus, in ipsis rebus naturalibus & cœlestibus? cùm proprietas hæc congruētiæ, quæ in structuram & corporationem aliquam exit, talis sit, ut vel ipsa Mentem speculatricem invitet ad aliquid etiam foris faciendum, creandum, corporandum: utque latens inde ab æterno in superbenedictâ mente divinâ, per Idearum ordines, tanquam bonum summum, sui communicativum, contineri in suâ abstractione non potuerit

quin

quin in Creationis opus prorumperet, Deumque Creatorem efficeret corporum ſub ijſdem figuris concluſorum. De hac igitur figurarum Congruentia paucis agam; cùm demonſtrationes difficiles nequaquam ſint, neç alio penè apparatu, quàm ipsâ fignrarum picturâ indigeant.

De Figurarum Regularium Congruentia.

I. DEFINITIO.

CONgruentia alia planitiei eſt, alia in ſolido. In Plano Congruentia eſt, cum anguli figurarum plurium ſinguli ſic ad punctum unum concurrunt, ut nullus relinquatur hiatus.

II. DEFINITIO.

HÆc perfecta dicitur, cum figuræ cujuſque concurrentis anguli omnes eâdem ſpecie concurrunt, ut ita omnes concurſus inter ſe ſimiles ſint, & concurſuum ordo in infinitum continuari poſſit.

III. DEFINITIO.

PErfectiſſima, cùm etiam figuræ concurrentes in plano ſunt ejuſdem ſpeciei.

IV. DEFINITIO.

IMperfecta, cum major quidem figura undique ſimilibus concurſibus ſepitur, neque tamen datur continuatio in infinitum, aut datur quidem, ſed non ſine admixtione diverſarum concurſus ſpecierum. Imperfecta deterioris gradus, cùm major figura non omnibus angulis ſimili ſpecie concurrere apta eſt.

V. DEFINITIO.

SOlida congruentia eſt, & figura ſolida, cùm anguli ſinguli plurium planarum figurarum, angulum conſtituunt ſolidum, aptatiſq; figuris regularibus vel ſemiregularibus, nullus reſtat hiatus inter latera figurarum, obviantia ſibi in oppoſitâ ſolidæ figuræ parte, qui non claudi poſſit figurâ ſpeciei unius ex adhibitis, vel ſaltem Regularibus.

Nota, quòd ſit alia congruentia, non planarum figurarum ad figuram ſolidam formandam, ſed ipſarum ſolidarum figurarum inter ſe, ad locum ſolidum circa unum punctum explendum: hujuſmodi figuræ corporeæ ſunt tantùm duæ,