# HOROLOGII OSCILLATORII

## *PARS QVARTA.*

### *De centro Oscillationis.*

CEntrorum Oscillationis, seu Agitationis, investigationem olim mihi, fere adhuc puero, aliisque multis, doctissimus Mersennus proposuit, celebre admodum inter illius temporis Geometras problema, prout ex litteris ejus ad me datis colligo, nec non ex Cartesii haud pridem editis, quibus ad Mersennianas super his rebus responsum continetur. Postulabat autem centra illa ut invenirem in circuli sectoribus, tam ab angulo quam à medio arcu suspensis, atque in latus agitatis, item in circuli segmentis, & in triangulis, nunc ex vertice, nunc ex media basi pendentibus. Quod eo redit, ut pendulum simplex, hoc est, pondus filo appensum reperiatur ea longitudine, ut oscillationes faciat temporum eorundem ac figuræ istæ, uti dictum est, suspensæ. Simul vero pretium operæ, si forte quæsitis satisfecissem, magnum sane & invidiosum pollicebatur. Sed à nemine id quod desiderabat tunc obtinuit. Nam me quod attinet, cum nihil reperirem quo vel primus aditus ad contemplationem eam patesceret; velut à limine repulsus, longiori investigatione tunc quidem abstinui. Qui vero rem sese confecisse sperabant viri insignes, Cartesius, Honoratus Fabrius, aliique, nequaquam scopum attigerunt, nisi in paucis quibusdam facilioribus, sed quorum tamen demonstrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. Idque comparatione eorum quæ hic trademus manifestum fore spero, si quis forte quæ ab illis tradita sunt, cum nostris hisce contulerit; quæ quidem & certioribus principiis demonstrata arbitror, & experimentis prorsus convenientia reperi. Occasio vero ad hæc denuo tentanda, ex pendulorum automati nostri temperandorum ratione oblata est, dum pondus mobile, præter id quod in imo est, illis applico, ut in descriptione horologii fuit explicatum. Hinc melioribus auspiciis atque à prima origine rem exorsus, tandem difficultates omnes superavi, nec tantum problematum Mersennianorum solutionem, sed alia quoque illis difficiliora reperi, &

De centro Oscillationis.

viam denique, qua in lineis, superficiebus, solidisque corporibus certa ratione centrum illud investigare liceret. Unde quidem, præter voluptatem inveniendi quæ multum ab aliis quæsita fuerant, cognoscendique in his rebus naturæ leges decretaque, utilitatem quoque eam cepi, cujus gratia primo animum ad hæc applicueram, reperta illa horologii temperandi ratione facili & expedita. Accessit autem hoc quoque, quod pluris faciendum arbitror, ut certæ, sæculisque omnibus duraturæ, mensuræ definitionem absolutissimam per hæc tradere possem; qualis est ea quæ ad finem horum adjecta reperietur.

# DEFINITIONES.

## I.

*Pendulum dicatur figura qualibet gravitate prædita, sive linea fuerit, sive superficies, sive solidum, ita suspensa ut circa punctum aliquod, vel axem potius, qui plano horizontis parallelus intelligitur, motum reciprocum vi gravitatis suæ continuare possit.*

## II.

*Axis ille horizontis plano parallelus, circa quem penduli motus fieri intelligitur, dicatur axis Oscillationis.*

## III.

*Pendulum simplex dicatur quod filo vel linea inflexili, gravitatis experte, constare intelligitur, ima sui parte pondus affixum gerente; cujus ponderis gravitas, velut in unum punctum collecta, censenda est.*

## IV.

*Pendulum vero compositum, quod pluribus ponderibus constat, immutabiles distantias servantibus, tum inter se, tum ab axe Oscillationis. Hinc figura qualibet suspensa, ac gravitate prædita, pendulum compositum dici potest, quatenus cogitatu in partes quotlibet est divisibilis.*

## V.

*Pendula isochrona vocentur, quorum Oscillationes, per arcus similes, æqualibus temporibus peraguntur.*

VI.

*Planum Oscillationis dicatur illud, quod per centrum gravitatis figuræ suspensæ duci intelligitur, ad axem oscillationis rectum.*

VII.

*Linea centri, recta quæ per centrum gravitatis figuræ ducitur, ad axem oscillationis perpendicularis.*

VIII.

*Linea perpendiculi, recta in plano oscillationis, ducta ab axe oscillationis, ad horizontis planum perpendicularis.*

IX.

*Centrum oscillationis vel agitationis figuræ cujuslibet, dicatur punctum in linea centri, tantum ab axe oscillationis distans, quanta est longitudo penduli simplicis quod figuræ isochronum sit.*

X.

*Axis gravitatis, linea quævis recta, per centrum gravitatis figuræ transiens.*

XI.

*Figura plana, vel linea in plano sita, in planum agitari dicatur, cum axis oscillationis in eodem cum figura lineave est plano.*

XII.

*Eædem vero in latus agitari dicantur, cum axis oscillationis ad figuræ lineæve planum rectus est.*

XIII.

*Quando pondera in rectas lineas duci dicentur, id ita est intelligendum, ac si numeri lineæve, quantitates ponderum rationemque inter se mutuam exprimentes, ita ducantur.*

## HYPOTHESES.

I.

*Si pondera quotlibet, vi gravitatis suæ, moveri incipiant; non posse centrum gravitatis ex ipsis compositæ altius, quam ubi incipiente motu reperiebatur, ascendere.*

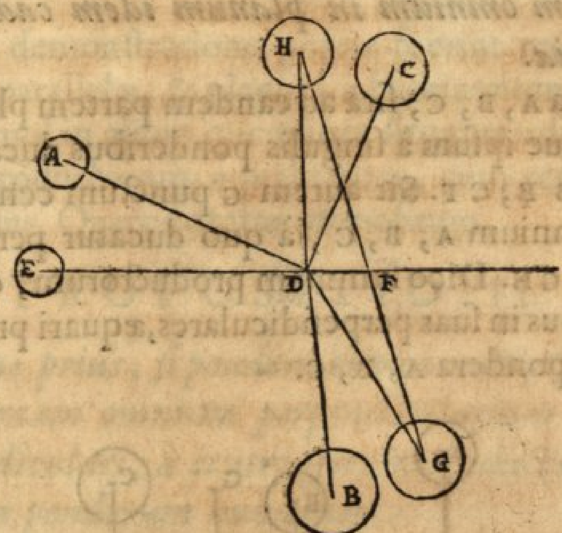
Altitudo autem in his ſecundum diſtantiam à plano horizontali conſideratur, graviaque ponuntur ad hoc planum, ſecundum rectas ipſi perpendiculares, deſcendere conari. Quod idem ab omnibus, qui de centro gravitatis egerunt, vel ponitur expreſſe, vel à legentibus ſupplendum eſt, cum abſque eo centri gravitatis conſideratio locum non habeat.

Ipſa vero hypotheſis noſtra quominus ſcrupulum moveat, nihil aliud ſibi velle eam oſtendemus, quam quod nemo unquam negavit, gravia nempe ſurſum non ferri. Nam primo, ſi unum quodpiam corpus grave proponamus, illud vi gravitatis ſuæ altius aſcendere non poſſe extra dubium eſt. aſcendere autem tunc intelligitur ſcilicet, cum ejus centrum gravitatis aſcendit. Sed & idem de quotlibet ponderibus, inter ſe per lineas inflexiles conjunctis, concedi neceſſe eſt, quoniam nihil vetat ipſa tanquam unum aliquod conſiderari. Itaque neque horum commune gravitatis centrum ultro aſcendere poterit.

Quod ſi jam pondera quotlibet non inter ſe connexa ponantur, illorum quoque aliquod commune centrum gravitatis eſſe ſcimus. Cujus quidem centri quanta erit altitudo, tantam ajo & gravitatis ex omnibus compoſitæ altitudinem cenſeri debere; ſiquidem omnia ad eandem illam centri gravitatis altitudinem deduci poſſunt, nullâ aliâ accerſitâ potentiâ quam quæ ipſis ponderibus ineſt, ſed tantum lineis inflexilibus ea pro lubitu conjungendo, ac circa gravitatis centrum movendo; ad quod nulla vi neque potentia determinata opus eſt. Quare, ſicut fieri non poteſt ut pondera quædam, in plano eodem horizontali poſita, ſupra illud planum, vi gravitatis ſuæ, omnia æqualiter attollantur; ita nec quorumlibet ponderum, quomodocunque diſpoſitorum, centrum gravitatis ad majorem quam habet altitudinem pervenire poterit. Quod autem diximus pondera quælibet, nulla adhibita vi, ad planum horizontale, per centrum commune gravitatis eorum tranſiens, perduci poſſe, ſic oſtendetur.

Sint pondera A, B, C, poſitione data, quorum commune gravitatis centrum ſit D. per quod planum horizontale ductum ponatur, cujus ſectio recta E F. Sint jam lineæ inflexiles D A, D B, D C, quæ pondera ſibi invariabiliter connectant; quæ porro moveantur, donec A ſit in plano E F ad E. Virgis vero omnibus per æquales angulos delatis, erunt jam B in G, & C in H.

Ruſus jam B & C connecti intelligantur virgâ H G, quæ ſecet planum E F in F; ubi neceſſario quoque erit centrum gravitatis binorum istorum ponderum connexorum, cum trium, in E, B, H, positorum, centrum gravitatis sit D, & ejus quod est in E, centrum gravitatis sit quoque in plano E D F. Moventur igitur rursus pondera H, G, super puncto F, velut axe, absque vi ulla, ac simul utraque ad planum E F adducuntur, adeo ut jam tria, quæ prius erant in A, B, C, ad ipsam sui centri gravitatis D altitudinem, suo ipsorum æquilibrio, translata appareat. quod erat ostendendum. Eademque de quotcunque aliis est demonstratio.




Hæc autem hypothesis nostra ad liquida etiam corpora valet, ac per eam non solum omnia illa, quæ de innatantibus habet Archimedes, demonstrari possunt, sed & alia pleraque Mechanicæ theoremata. Et sanè, si hac eadem uti scirent novorum operum machinatores, qui motum perpetuum irrito conatu moliuntur, facile suos ipsi errores deprehenderent, intelligerentque rem eam mechanica ratione haud quaquam possibilem esse.

II.

*Remoto aëris, alioque omni impedimento manifesto, quemadmodum in sequentibus demonstrationibus id intelligi voluimus, centrum gravitatis penduli agitati, æquales arcus descendendo ac ascendendo percurrere.*

De pendulo simplici hoc demonstratum est propositione 9 de Descensu gravium. Idem vero & de composito tenendum esse declarat experientia; si quidem, quæcunque fuerit penduli figura,

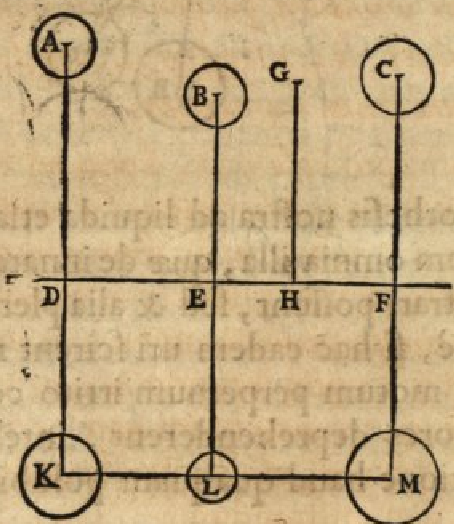
De centro Oscillationis.

æque apta continuando motui reperitur, nisi in quantum plus minusve aëris objectu impeditur.

## PROPOSITIO I.

*Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani existentibus, si à singulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares; hæ singulæ in sua pondera ductæ, tantundem simul efficient, ac perpendicularis, à centro gravitatis ponderum omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia.*

Sint pondera A, B, C, sita ad eandem partem plani, cujus sectio recta D F, inque ipsum à singulis ponderibus ducantur perpendiculares A D, B E, C F. Sit autem G punctum centrum gravitatis ponderum omnium A, B, C, à quo ducatur perpendicularis in idem planum G H. Dico summam productorum, quæ fiunt à singulis ponderibus in suas perpendiculares, æquari producto ab recta G H in omnia pondera A, B, C.




Intelligantur enim perpendiculares, à singulis ponderibus eductæ, continuari in lateram partem plani D F, sintque singulæ D K, E L, F M, ipsi H G æquales; omnesque lineæ, inflexiles virgas referant, ad horizontem parallelas; & ponantur in K, L, M, gravitates ejusmodi, quæ singulæ cum sibi oppositis A, B, C, æquilibrium faciant ad intersectionem plani D E F. Omnes igitur K, L, M, æquiponderabunt omnibus A, B, C. Erit autem, sicut longitudo A D ad D K, ita pondus K ad pondus A, ac proinde D A ducta in magnitudinem A, æquabitur D K, sive G H, ductæ in K. Similiter

ter E B in B æquabitur E L, ſive G H, in L; & F C in C æquabitur F M, ſive G H, in M. Ergo ſumma productorum ex A D in A, B E in B, C F in F, æquabitur ſummæ productorum ex G H in omnes K, L, M. Quum autem K, L, M, æquiponderent ipſis A, B, C; etiam iiſdem A, B, C, ex centro ipſorum gravitatis G ſuſpenſis, æquiponderabunt. Vnde, cum diſtantia G H æqualis ſit ſingulis D K, E L, F M, neceſſe eſt magnitudines A, B, C, ſimul ſumptas, æquari ipſis K, L, M. Itaque & ſumma productorum ex G H in omnes A, B, C, æquabitur productis ex D A in A, E B in B, & F C in C. quod erat demonſtrandum. 

Etſi vero in demonſtratione poſitæ fuerint rectæ A D, G H, C F, horizonti parallelæ, & planum ad horizontem erectum; patet, ſi omnia ſimul in alium quemlibet ſitum tranſponantur, eandem manere productorum æqualitatem, cum rectæ omnes ſint eædem quæ prius. Quare conſtat propoſitum.

## PROPOSITIO II.

*Poſitis quæ prius, ſi pondera omnia* A, B, C, *ſint æqualia; dico ſummam omnium perpendicularium* A D, B E, C F, *æquari perpendiculari, à centro gravitatis ductæ,* G H, *multiplici ſecundum ponderum numerum.*

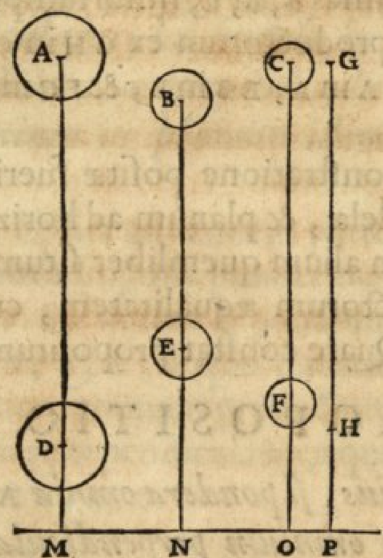
Quum enim ſumma productorum, à ponderibus ſingulis in ſuas perpendiculares, æquetur producto ex G H in pondera omnia; ſitque hic, propter ponderum æqualitatem, ſumma illa productorum æqualis producto ex uno pondere in ſummam omnium perpendicularium; itemque productum ex G H in pondera omnia, idem quod productum ex pondere uno in G H, multiplicem ſecundum ponderum numerum: patet ſummam perpendicularium neceſſario jam æquari ipſi G H, multiplici ſecundum ponderum numerum. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO III.

*SI magnitudines quædam deſcendant omnes, vel aſcendant, licet inæqualibus intervallis; altitudines deſcenſus vel aſcenſus cujuſque, in ipſam magnitudinem ductæ, efficient ſummam productorum æqualem ei, quæ fit ex altitudine deſcenſus vel aſcenſus centri gravitatis omnium magnitudinum, ducta in omnes magnitudines.*

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

Sunto magnitudines A, B, C, quæ ex A, B, C, descendant in D, E, F; vel ex D, E, F, ascendant in A, B, C. Sitque earum centrum gravitatis omnium, dum sunt in A, B, C, eadem altitudine cum puncto G; cum vero sunt in D, E, F, eadem altitudine cum puncto H. Dico summam productorum ex altitudine A D in A, B E in B, C F in C, æquari producto ex G H in omnes A, B, C.




Intelligatur enim planum horizontale cujus sectio recta M P, atque in ipsum incidant productæ A D, B E, C F & G H, in M, N, O, P. Quia igitur summa productorum ex A M in A, B N in B, C O in C, æqualis est facto ex G P in omnes A, B, C *. Similiterque summa productorum ex D M in A, E N in B, F O in C, æqualis facto ex H P in omnes A, B, C; sequitur & excessum priorum productorum supra posteriora, æquari facto ex G H in omnes magnitudines A, B, C. Dictum vero excessum æquari manifestum est productis ex A D in A, B E in B, C F in C. Ergo hæc simul etiam æqualia erunt producto ex G H in omnes A, B, C. quod erat demonstrandum.

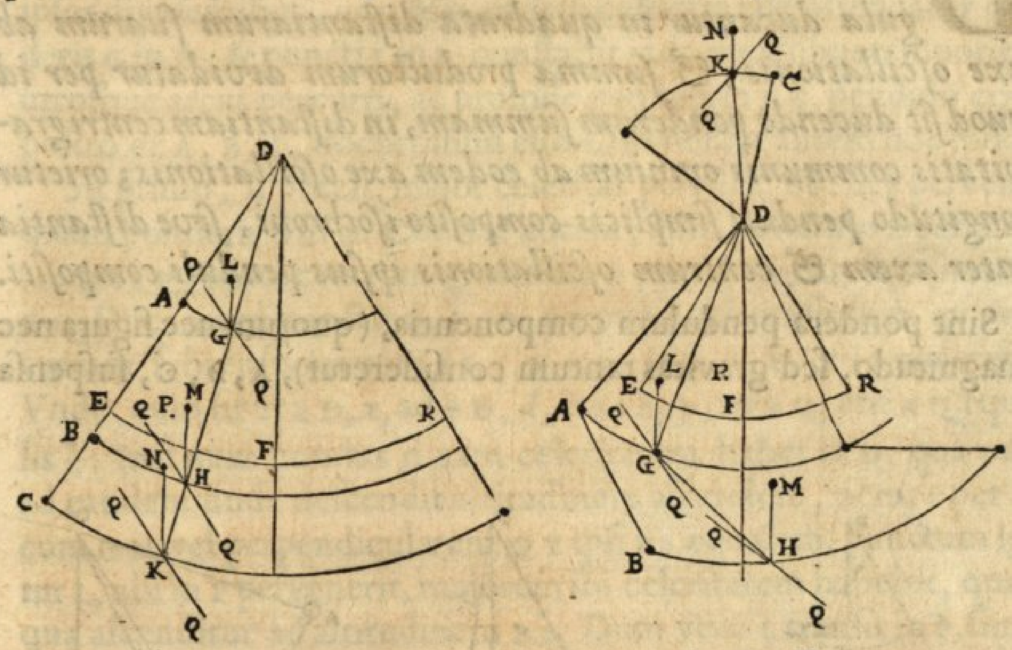
* Prop. 1. huj.

## PROPOSITIO IV.

*Si pendulum è pluribus ponderibus compositum, atque è quiete dimissum, partem quamcunque oscillationis integræ confecerit, atque inde porro intelligantur pondera ejus singula, relicto communi vinculo, celeritates acquisitas sursum convertere, ac quousque possunt ascendere; hoc facto, centrum gravitatis ex omnibus compositæ, ad eandem altitudinem reversum erit, quam ante inceptam oscillationem obtinebat.*

Sit pendulum compositum ex ponderibus quotlibet A, B, C, virgæ, vel superficiei pondere carenti, inhærentibus. Sitque suspensum ab axe per D punctum ducto, qui ad planum, quod hic conspicitur, perpendicularis intelligatur. In quo eodem plano etiam centrum gravitatis E, ponderum A, B, C, positum sit; lineaque centri D E, inclinetur ad lineam perpendiculi D F, angulo E D F: attracto, nimirum, eo usque pendulo. Hinc vero dimitti jam ponatur, ac partem quamlibet oscillationis conficere, ita ut pondera A, B, C, perveniant in G, H, K. Unde, relicto deinceps communi vinculo, singula intelligantur acquisitas celeritates sursum convertere, (quod impingendo in plana quædam inclinata, velut Q Q, fieri poterit,) & quousque possunt ascendere, nempe in L, M, N. Quo ubi pervenerint, sit centrum gravitatis omnium punctum P. Dico hoc pari altitudine esse cum puncto E.

De centro Oscillationis.




Nam primum quidem, constat P non altius esse quam E, ex prima sumptarum hypothesium. Sed nec humilius fore sic ostendemus. Sit enim, si potest, P humilius quam E, & intelligantur pondera ex iisdem, ad quas ascenderunt, altitudinibus recidere, quæ sunt L G, M H, N K. Unde quidem easdem celeritates ipsis acquiri constat, quas habebant ad ascendendum ad istas altitudines*, hoc est, eas ipsas quas acquisierant motu penduli ex C B A D in K H G D. Quare, si cum dictis celeritatibus ad virgam superficiemve, cui innexa fuere, nunc referantur, eique simul adhærescant, motumque secundum inceptos arcus continuent; quod fiet, si priusquam virgam attingant, à planis inclinatis Q Q repercussa intelli-

* Propos. 4. part. 2.

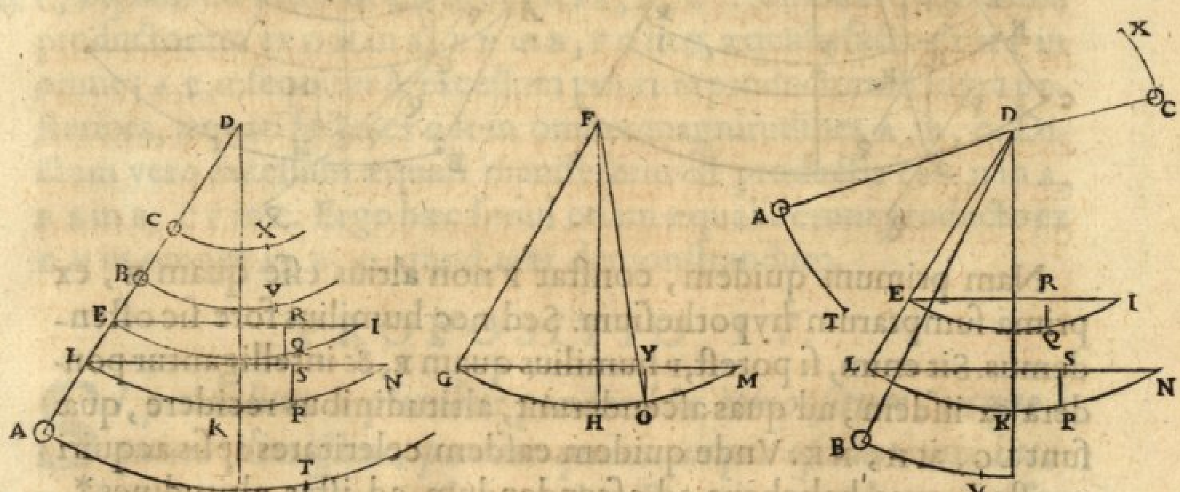
gantur; absolvet, hoc modo restitutum pendulum, oscillationis partem reliquam, æquè ac si absque ulla interruptione motum continuasset. Ita ut centrum gravitatis penduli, E, arcus æquales EF, FR, descendendo ac ascendendo percurrat, ac proinde in R eadem ac in E altitudine reperiatur. Ponebatur autem E esse altius quam P centrum gravitatis ponderum in L, M, N, positorum. Ergo & R altius erit quam P: adeoque ponderum ex L, M, N, delapsorum centrum gravitatis, altius, quam unde descenderat, ascendisset. quod est absurdum *. Non igitur centrum gravitatis P humilius est quam E. Sed nec altius erat. Ergo æque altum sit necesse est. quod erat demonstrandum.

* Hypoth. 1. huj.

## PROPOSITIO V.

*Dato pendulo ex ponderibus quotlibet composito, si singula ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, & summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam, in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem & centrum oscillationis ipsius penduli compositi.*

Sint pondera pendulum componentia, (quorum nec figura nec magnitudo, sed gravitas tantum consideretur), A, B, C, suspensa




ab axe, qui per punctum D, ad planum quod conspicitur, rectus intelligitur. In quo plano sit quoque eorum centrum commune gravitatis E; nam pondera in diversis esse nihil refert. Distantia puncti E ab axe, nempe recta ED, vocetur *d*. Item ponderis A distantia AD, sit *e*; BD, *f*; CD, *g*. Ducendo itaque singula pondera in qua-

drata ſuarum diſtantiarum, erit productorum ſumma $aee + bff$ DE CENTRO OSCILLATIONIS.
$+ cgg$. Et rurſus, ducendo ſummam ponderum in diſtantiam centri gravitatis omnium, productum æquale erit $ad + bd + cd$*. Vnde, productum prius per hoc dividendo, habebitur $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$. Cui longitudini ſi æqualis ſtatuatur longitudo penduli ſimplicis F G, quæ etiam $x$ vocabitur; dico hoc illi compoſito iſochronum eſſe.

* Prop. 1. huj.

Ponantur enim tum pendulum F G, tum linea centri D E, æqualibus angulis à linea perpendiculi remota, illud ab F H, hæc ab D K, atque inde dimiſſa librari, & in recta D E ſumatur D L æqualis F G. Itaque pondus G penduli F G, integra oſcillatione arcum G M percurret, quem linea perpendiculi F H medium ſecabit. punctum vero L arcum illi ſimilem & æqualem L N, quem medium dividet D K. Itemque centrum gravitatis E, percurret ſimilem arcum E I. Quod ſi in arcubus G M, N L, ſumptis punctis quibuſlibet, ſimiliter ipſos dividentibus, ut O & P, eadem celeritas eſſe oſtendatur ponderis G in O, & puncti L in P; conſtabit inde æqualibus temporibus utroſque arcus percurri, ac proinde pendulum F G, pendulo compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe. Oſtendetur autem hoc modo.

Sit primo, ſi poteſt, major celeritas puncti L, ubi in P pervenit, quam ponderis G in O. Conſtat autem, dum punctum L percurrit arcum L P, ſimul centrum gravitatis E percurrere arcum ſimilem E Q. Ducantur à punctis Q, P, O, perpendiculares ſurſum, quæ occurrant ſubtenſis arcuum E I, L N, G M, in R, S, Y. & S P vocetur $y$. Vnde, cum ſit ut L D, $x$, ad E D, $d$, ita S P, $y$, ad R Q; erit R Q æqualis $\frac{dy}{x}$. Iam quia pondus G eam celeritatem habet in O, qua valet ad eandem unde deſcendit altitudinem aſcendere, nempe per arcum O M, vel perpendicularem O Y ipſi P S æqualem; punctum igitur L, ubi in P pervenerit, majorem ibi celeritatem habebit, quam qua aſcenditur ad altitudinem P S. Dum vero L tranſit in P, ſimul pondera A, B, C, ſimiles arcus percurrunt ipſi L P, nimirum A T, B V, C X. Eſtque puncti L celeritas in P, ad celeritatem ponderis A in T, quum vinculo eodem contineantur, ſicut diſtantia D L ad D A. Sed ut quadratum celeritatis puncti L, quam habet in P, ad quadratum celeritatis puncti A in T, ita eſt altitudo ad quam illa celeritate aſcendi poteſt, ad altitudinem quò hac celeritate aſcendi poteſt*. Ergo etiam, ut quadratum diſtantiæ D L, quod eſt $xx$, ad quadratum diſtantiæ D A, quod eſt $ee$, ita eſt altitudo quo aſcenditur celeritate puncti L, quum eſt in P, (quæ altitudo major dicta eſt quam P S ſive $y$,) ad altitudinem quo aſcenditur celeritate ponderis A in T; ſi nempe poſtquam in T pervenit, relicto pendulo,

* Prop 3. & 4. part. 2.

ſeorſim motum ſuum ſurſum converteret. Quæ proinde altitudo major erit quam $\frac{eey}{xx}$.

Eadem ratione, erit altitudo ad quam aſcenderet pondus B, celeritate acquiſita per arcum B V, major quam $\frac{ffy}{xx}$. Et altitudo ad quam aſcenderet pondus C, celeritate acquiſita per arcum C X, major quam $\frac{ggy}{xx}$. Vnde, ductis ſingulis altitudinibus iſtis in ſua pondera, erit ſumma productorum major quam $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. quæ proinde major quoque probatur quam $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$. Nam quia poſita eſt longitudo $x$ æqualis $\frac{aee + bff + cgg}{ad + bd + cd}$; erit $a\,dx + b\,dx + c\,dx$ æquale $aee + bff + cgg$. Et ductis omnibus in $y$, & dividendo per $xx$, erit $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ æquale $\frac{aeey + bffy + cggy}{xx}$. Vnde quod dictum eſt conſequitur. Eſt autem ſumma iſta productorum æqualis ei, quod fit ducendo altitudinem, ad quam aſcendit centrum gravitatis commune ponderum A, B, C, in ſummam ipſorum ponderum, $a + b + c$; ſi nempe ſingula, uti dictum, ſeorſim quouſque poſſunt moveantur. Quantitas vero $\frac{ady + bdy + cdy}{x}$ producitur ex deſcenſu centri gravitatis eorundem ponderum, (qui deſcenſus eſt R Q, ſive $\frac{dy}{x}$, ut ſupra inventum fuit,) in eandem quoque ponderum ſummam $a + b + c$. Ergo quum prius productum altero hoc majus oſtenſum fuerit, ſequitur aſcenſum centri gravitatis ponderum A, B, C, ſi, relicto pendulo ubi pervenere in T, V, X, ſingula celeritates acquiſitas ſurſum convertant, majorem fore ejuſdem centri gravitatis deſcenſu, dum ex A, B, C, moventur in T, V, X. quod eſt abſurdum, cum dictus aſcenſus deſcenſui æqualis eſſe debeat, per antecedentem.

Eodem modo, ſi dicatur celeritatem puncti L, ubi pervenerit in P, minorem eſſe celeritate ponderis G quum in O pervenerit; oſtendemus aſcenſum poſſibilem centri gravitatis ponderum A, B, C, minorem eſſe quam deſcenſum, quod eidem propoſitioni antecedenti repugnat. Quare relinquitur ut eadem ſit celeritas puncti L, ad P tranſlati, quæ ponderis G in O. Vnde, ut ſuperius dictum, ſequitur pendulum ſimplex F G compoſito ex A, B, C, iſochronum eſſe.

## PROPOSITIO VI.

*Dato pendulo ex quotcunque ponderibus æqualibus compoſito; ſi ſumma quadratorum factorum à diſtantiis, quibus unumquodque pondus abeſt ab axe oſcillationis, ap-*

*plicetur ad distantiam centri gravitatis communis ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum ipsorum ponderum numerum, orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni.*

Sint posita eadem quæ prius, sed pondera omnia inter se æqualia intelligantur, & singula dicantur $a$. Rursus vero nulla eorum magnitudo consideretur, sed pro minimis habeantur, quantum ad extensionem.

Itaque penduli simplicis isochroni longitudo, per propositionem antecedentem, erit $\frac{aee + aff + agg}{ad + ad + ad}$. Vel, quia quantitas divisa ac dividens utraque per $a$ dividitur, fiet nunc eadem longitudo, $\frac{ee + ff + gg}{3d}$. Quo significatur summa quadratorum à distantiis ponderum ab axe oscillationis, applicata ad distantiam centri gravitatis omnium ab eodem oscillationis axe, multiplicem secundum numerum ipsorum ponderum, qui hic est 3. facile enim perspicitur numerum hunc, in quem ducitur distantia $d$, respondere necessario ipsi ponderum numero. Quare constat propositum.

Quod si pondera æqualia in unam lineam rectam conjuncta sint, atque ex termino ejus superiore suspensa; constat distantiam centri gravitatis, ex omnibus compositæ, ab axe oscillationis, multiplicem secundum ponderum numerum, æquari summæ distantiarum omnium ponderum ab eodem oscillationis axe*; ac proinde, hoc casu, habebitur quoque longitudo penduli simplicis, composito isochroni, si summa quadratorum à distantiis ponderum singulorum ab axe oscillationis, dividatur per summam earundem omnium distantiarum.

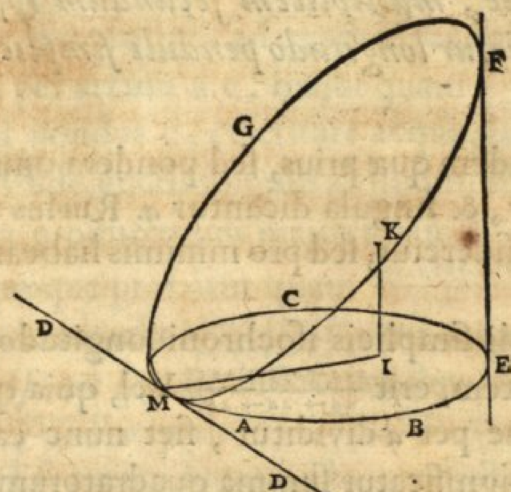
* Prop. 2. huj.

## DEFINITIO XIV.

*Si fuerint in eodem plano, figura quædam, & linea recta quæ ipsam extrinsecus tangat; & per ambitum figuræ alia recta, plano ejus perpendicularis, circumferatur, superficiemque quandam describat, quæ deinde secetur plano per dictam tangentem ducto & ad dictæ figuræ planum inclinato; solidum comprehensum à duobus planis istis, & parte superficiei descriptæ, inter utrumque planum intercepta, vocetur Cuneus super figura illa, tanquam basi, abscissus.*

In schemate adjecto, est ABEC figura data; recta eam tangens

M D; quæ vero per ambitum ejus circumfertur, E F; cuneus au-




tem figura solida planis A B E C, M F G, & parte superficiei, à recta E F descriptæ, comprehensa.

## DEFINITIO XV.

*Distantia inter rectam, per quam cuneus abscissus est, & punctum baseos, in quod perpendicularis cadit à cunei centro gravitatis, dicatur cunei Subcentrica. Nempe in figura eadem, si* K *sit centrum gravitatis cunei, recta vero* K I *ad basin ejus* A B E C *perpendicularis ducta sit, & rursus* I M *perpendicularis ad* A D; *erit* I M, *quam subcentricam dicimus.*

## PROPOSITIO VII.

*Cuneus super plana figura qualibet abscissus, plano inclinato ad angulum semirectum, æqualis est solido, quod fit ducendo figuram eandem, in altitudinem æqualem distantiæ centri gravitatis figuræ, ab recta per quam abscissus est cuneus.*

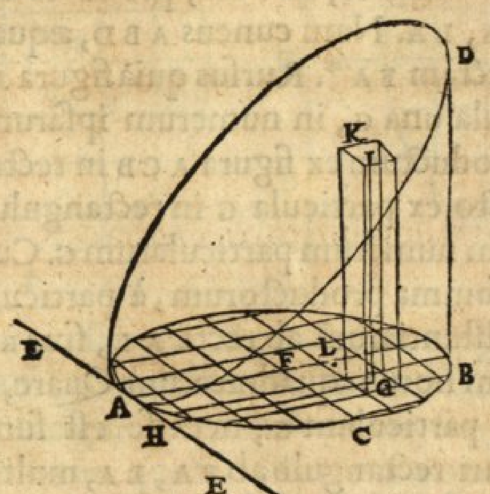
Sit, super figura plana A C B, cuneus A B D abscissus plano ad angulum semirectum inclinato, ac transeunte per E E, rectam tangentem figuram A C B, inque ejus plano sitam. Centrum vero gravitatis figuræ sit F, unde in rectam E E ducta sit perpendicularis F A. Dico cuneum A C B æqualem esse solido, quod fit ducendo figuram A C B in altitudinem ipsi F A æqualem.

Intelligatur enim figura A C B divisa in particulas minimas æquales

les quarum una G. Itaque conſtat, ſi harum ſingulæ ducantur in diſtantiam ſuam ab recta E E, ſummam productorum fore æqualem ei quod fit ducendo rectam A F in particulas omnes *, hoc eſt, ei quod fit ducendo figuram ipſam A C B, in altitudinem æqualem A F. Atqui particulæ ſingulæ ut G, in diſtantias ſuas G H ductæ, æquales ſunt parallelepipedis, vel priſmatibus minimis, ſuper ipſas erectis, atque ad ſuperficiem obliquam A D terminatis, quale eſt G K; quia horum altitudines ipſis diſtantiis G H æquantur, propter angulum ſemirectum inclinationis planorum A D & A C B. Patetque ex his parallelepipedis totum cuneum A B D componi. Ergo & cuneus ipſe æquabitur ſolido ſuper baſi A C B, altitudinem habenti rectæ F A æqualem. quod erat demonſtrandum.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

* Prop. 1. huj.




## PROPOSITIO VIII.

*Si figuram planam linea recta tangat, diviſaque intelligatur figura in particulas minimas æquales, atque à ſingulis ad rectam illam perpendiculares ductæ: erunt omnium harum quadrata, ſimul ſumpta, æqualia rectangulo cuidam, multiplici ſecundum ipſarum particularum numerum; quod nempe rectangulum fit à diſtantia centri gravitatis figuræ ab eadem recta, & à ſubcentrica cunei, qui per illam ſuper figura abſcinditur.*

Poſitis enim cæteris omnibus quæ in conſtructione præcedenti, ſit L A cunei A B D ſubcentrica in rectam E E. Oportet igitur oſtendere, ſummam quadratorum omnium à diſtantiis particularum figuræ A C B æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum particularum numerum.

Et constat quidem ex demonstratione præcedenti, altitudines parallelepipedorum singulorum, ut G K, æquales esse distantiis particularum, quæ ipsorum bases sunt, ut G, ab recta A E. Quare, si jam parallelepipedum G K ducamus in distantiam G H, perinde est ac si particula G ducatur in quadratum distantiæ G H. Eodemque modo se res habet in reliquis omnibus. Atqui producta omnia parallelepipedorum in distantias suas ab recta A E, æquantur simul producto ex cuneo A B D in distantiam L A*, quia cuneus gravitat super puncto L. Ergo etiam summa productorum à particulis singulis G, in quadrata suarum distantiarum ab recta A E, æquabitur producto ex cuneo A B D in rectam L A, hoc est, producto ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A. Nam cuneus A B D, æqualis est producto ex figura A C B in rectam F A*. Rursus quia figura A C B æqualis est producto ex particula una G, in numerum ipsarum particularum; sequitur, dictum productum ex figura A C B in rectangulum ab F A, L A, æquari producto ex particula G in rectangulum ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum G. Cui proinde etiam æqualis erit dicta summa productorum, à particulis singulis G in quadrata suarum distantiarum ab recta A E, sive à particula una G in summam omnium horum quadratorum. Quare, omissa utrinque multiplicatione in particulam G, necesse est summam eandem quadratorum æquari rectangulo ab F A, L A, multiplici secundum numerum particularum in quas figura A C B divisa intelligitur. quod erat demonstrandum.

* Prop. 1. huj.

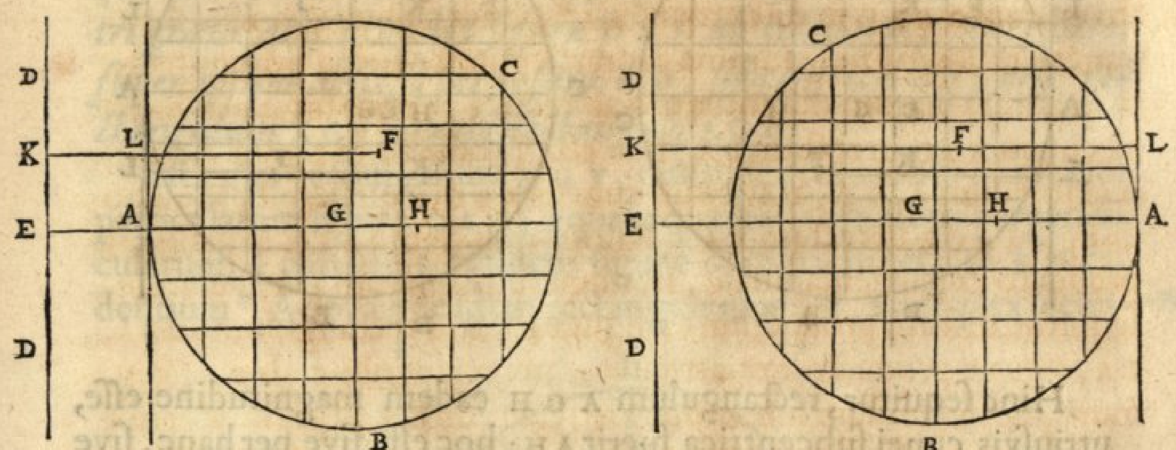
* Prop. præced.

## PROPOSITIO IX.

*Datâ figurâ planâ & in eodem plano lineâ rectâ, quæ vel secet figuram vel non, ad quam perpendiculares cadant à particulis singulis minimis & æqualibus, in quas figura divisa intelligitur; invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus; sive planum, cujus multiplex, secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.*

Sit data figura plana A B C, & in eodem plano recta E D; divisâque figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, intelligantur ab unaquaque earum perpendiculares ductæ in rectam E D, sicut à particula F ducta est F K. Oporteatque invenire summam quadratorum ab omnibus istis perpendicularibus. De centro Oscillationis.

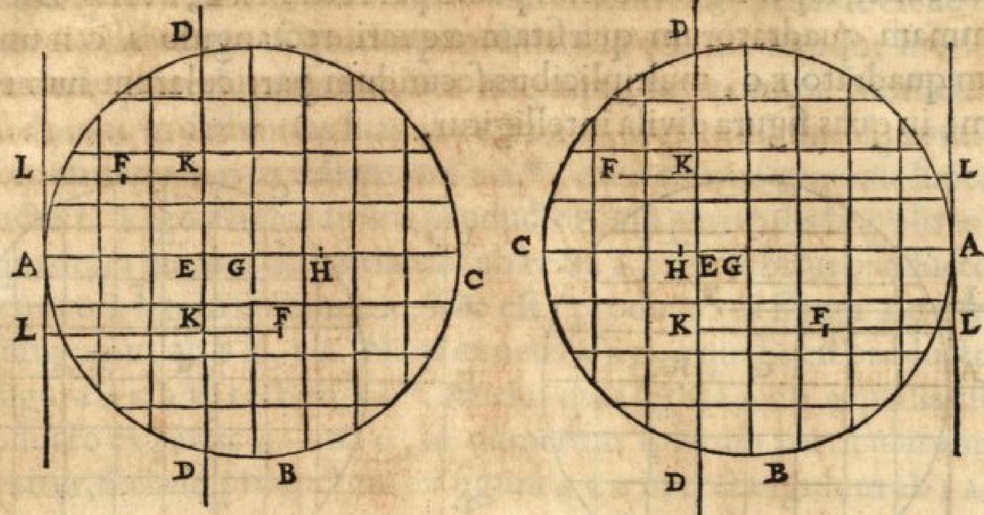
Sit datæ E D parallela recta A L, quæ figuram tangat, ac tota extra eam posita sit. Potest autem figuram vel ab eadem parte ex qua est E D, vel à parte opposita contingere. Distantia vero centri gravitatis figuræ ab recta A L sit recta G A, secans E D in E; & subcentrica cunei, super figura abscissi plano per rectam A L, sit H A. Dico summam quadratorum quæsitam æquari rectangulo A G H una cum quadrato E G, multiplicibus secundum particularum numerum, in quas figura divisa intelligitur.




Occurrat enim F K, si opus est producta, tangenti A L in L puncto. Itaque primum, eo casu quo recta E D à figura distat, & tangens A L ad eandem figuræ partem ducta est, sic propositum ostendetur. Summa omnium quadratorum F K æquatur totidem quadratis K L, una cum bis totidem rectangulis K L F, & totidem insuper quadratis L F. Sed quadrata K L æquantur totidem quadratis E A. Et rectangula K L F æqualia esse constat totidem rectangulis E A G, quia omnes F L æquales totidem G A*. Et denique quadrata L F æquantur totidem rectangulis H A G*, hoc est, totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Ergo quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E A, cum totidem duplis rectangulis E A G, atque insuper totidem quadratis A G cum totidem rectangulis A G H. Atqui tria ista; nempe quadratum E A cum duplo rectangulo E A G & quadrato A G; faciunt quadratum E G. Ergo apparet quadrata omnia F K æquari totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quod erat ostendendum.

* Prop. 2. huj.
* Prop. præced.

Porro in reliquis omnibus casibus, quadrata omnia F K æquantur totidem quadratis K L, minus bis totidem rectangulis K L F, plus totidem quadratis L F; hoc est, totidem quadratis E A, minus totidem duplis rectangulis E A G, plus totidem quadratis A G, cum todem rectangulis A G H. Atqui, omnibus hisce casibus, fit quadratum E A, plus quadrato A G, minus duplo rectangulo E A G, æquale quadrato E G. Ergo rursus quadrata omnia F K æqualia erunt totidem quadratis E G, una cum totidem rectangulis A G H. Quare constat propositum.

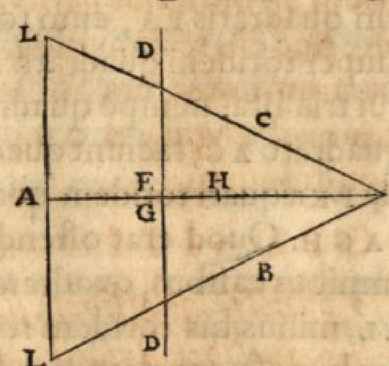



Hinc sequitur, rectangulum A G H eadem magnitudine esse, utriusvis cunei subcentrica fuerit A H; hoc est, sive per hanc, sive per illam tangentium parallelarum A L abscissi. Itaque A G unius casus ad A G alterius, ut H G hujus ad H G illius. Sicut autem rectæ A G inter se, ita in utroque casu cunei per A L abscissi, ut colligitur ex prop. 7. huj. Ergo ita quoque reciproce G H ad G H.

Apparet etiam, dato figuræ planæ centro gravitatis G, & subcentrica cunei, per alterutram tangentium parallelarum A L abscissi, dari quoque cunei, per tangentem alteram A L abscissi, subcentricam.

## PROPOSITIO X.

*Positis quæ in propositione præcedenti; si data recta* E D *transeat per* G, *centrum gravitatis figuræ* A B C; *erit sum-*




*ma quadratorum à distantiis particularum, in quas figura* *divisa intelligitur, ab recta* E D, *æqualis rectangulo soli* A G H, *multiplici secundum ipsarum particularum numerum.*

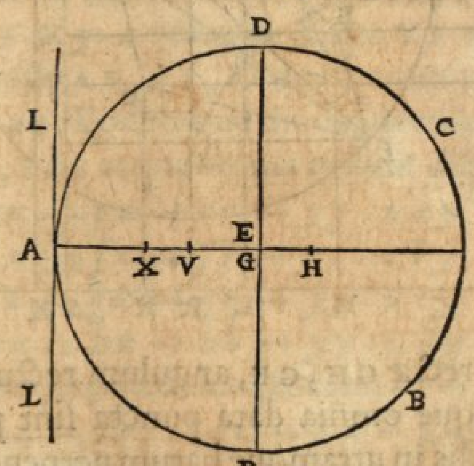


Hoc enim manifestum est, quum nullum tunc sit quadratum E G.

## PROPOSITIO XI.

*Positis rursus cæteris ut in præcedentium penultima; si* D E *sit axis figuræ planæ* A B C, *in duas æquales similesque portiones eam dividens, sitque insuper* V G *distantia centri gravitatis dimidiæ figuræ* D A D *ab recta* E D, *cunei vero, super ipsam abscissi per ipsam* E D, *subcentrica* G X; *erit rectangulum* X G V *æquale rectangulo* A G H.

Est enim rectangulum X G V, multiplex secundum numerum particularum figuræ D A D, æquale quadratis omnibus perpendicularium à particulis ejusdem figuræ dimidiæ in rectam E D cadentium *. Ac proinde idem rectangulum X G V, multiplex secun- * Prop. 8. huj.




dum numerum particularum totius figuræ A B C, æquale erit quadratis perpendicularium, ab omnibus particulis figuræ hujus in rectam E D demissarum; hoc est, rectangulo A G H multiplici secundum eundem particularum numerum, ut constat ex propos. præcedenti. Vnde sequitur rectangula X G V, A G H inter se æqualia esse. quod erat demonstrandum.

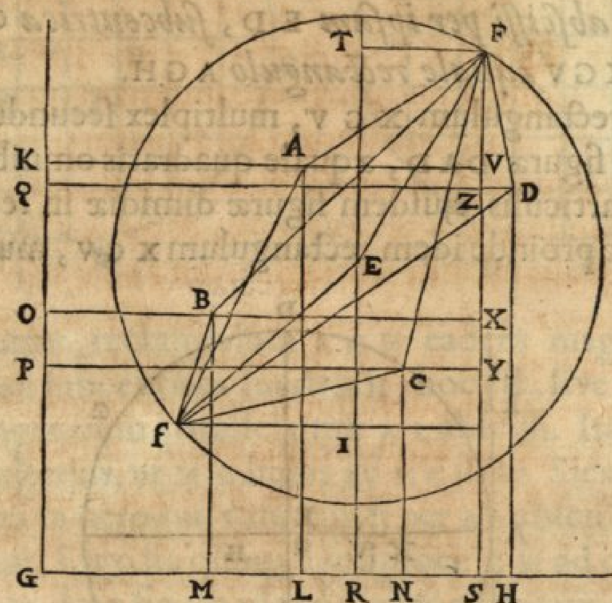
## PROPOSITIO XII.

*Datis in plano punctis quotlibet; si ex centro gravitatis eorum circulus quilibet describatur; ducantur autem ab omnibus datis punctis, ad punctum aliquod in circuli illius*

De centro Oscillationis.

*circumferentia lineæ rectæ; erit summa quadratorum ab omnibus semper eidem plano æqualis.*

Sint data puncta A B C D: centrumque gravitatis eorum, sive magnitudinum æqualium ab ipsis suspensarum, sit E; & centro E describatur circulus quilibet F*f*, in cujus circumferentia sumpto puncto aliquo, ut F, ducantur ad id, à datis punctis, rectæ A F, B F, C F, D F. Dico earum omnium quadrata, simul sumpta, æqualia esse plano cuidam dato, semperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum F sumptum fuerit.




Ducantur enim rectæ G H, G K, angulum rectum constituentes, & quarum unicuique omnia data puncta sint posita ad eandem partem. Et à singulis in utramque harum perpendiculares agantur A L, A K; B M, B O; C N, C P; D H, D Q. A centro autem gravitatis E, & à puncto F, in alterutram duarum, G H vel G K, perpendiculares E R, F S. Et item, à datis punctis, in ipsam F S perpendiculares A V, B X, C Y, D Z. Et F T perpendicularis in ipsam E R. Porro sit jam

| | | |
|---|---|---|
| A L ∞ *a* | A K ∞ *e* | radius E F ∞ *z* |
| B M ∞ *b* | B O ∞ *f* | G S ∞ *x* |
| C N ∞ *c* | C P ∞ *g* | |
| D H ∞ *d* | D Q ∞ *h* | |

Quia autem E est centrum gravitatis punctorum A, B, C, D; si addantur in unum perpendiculares A L, B M, C N, D H, compositaque ex omnibus dividatur in tot partes, quot sunt data puncta; earum partium uni æqualis erit E R*. Similiterque, divisâ in toti-

* Prop. 1. huj.

De centro Oscillationis.

dem partes ſummâ perpendicularium AK, BO, CP, DQ, earum uni æqualis erit perpendicularis, ducta ex E in rectam GK, ſive ipſa RG*. Itaque, ſi ſumma omnium AL, BM, CN, DH, ſive $a + b + c + d$ vocetur $l$: ſumma vero omnium, AK, BO, CP, DQ, ſive $e + f + g + h$, vocetur $m$: & numerus, datorum punctorum multitudinem exprimens, dicatur $\theta$; erit ER $\propto \frac{l}{\theta}$; & RG $\propto \frac{m}{\theta}$. Cumque GS ſit $x$, erit RS ſive FT $\propto x - \frac{m}{\theta}$; vel $\frac{m}{\theta} - x$, ſi GR major quam GS; & ſemper quadratum FT $\propto xx - 2\frac{xm}{\theta} + \frac{mm}{\theta\theta}$. quo ablato ab quadrato FE $\propto zz$, relinquetur quadratum TE $\propto zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}$. Et proinde TE $\propto \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. Erat autem ER $\propto \frac{l}{\theta}$. Itaque TR $\propto \frac{l}{\theta} +$ vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$. quæ TR, brevitatis gratia, dicatur $y$. Colligamus jam porro ſummam quadratorum omnium FA, FB, FC, FD. Quadratum AF æquatur quadratis AV, VF. Eſt autem AV æqualis differentiæ duarum VK, AK, ſive duarum SG, AK; ac proinde AV $\propto x - e$ vel $e - x$; & qu. AV $\propto xx - 2ex + ee$. VF vero æqualis eſt differentiæ duarum FS, VS ſive duarum FS, AL; ac proinde VF $\propto y - a$ vel $a - y$; & qu. VF $\propto yy - 2ay + aa$. Additiſque quadratis AV, VF, fit quadratum FA $\propto xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$. Eodemque modo invenientur quadrata reliquarum FB, FC, FD; atque omnia ordine diſpoſita erunt hæc;

qu. FA $\propto xx - 2ex + ee + yy - 2ay + aa$.
qu. FB $\propto xx - 2fx + ff + yy - 2by + bb$.
qu. FC $\propto xx - 2gx + gg + yy - 2cy + cc$.
qu. FD $\propto xx - 2hx + hh + yy - 2dy + dd$.

Horum vero ſumma; ſi ponamus quadrata $ee + ff + gg + hh \propto nn$; & quadrata $aa + bb, + cc + dd \propto kk$; erit iſta, $\theta xx - 2mx + nn + \theta yy - 2ly + kk$. Siquidem $\theta$ erat numerus datorum punctorum ideoque & quadratorum, poſitumque fuerat $e + f + g + h \propto m$, & $a + b + c + d \propto l$.

In iſta vero ſumma, ſi in terminis $\theta yy$ & $2ly$, pro $y$, ponatur id cujus loco poſitum erat, nempe $\frac{l}{\theta} +$ vel $- \sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$, fiet $+ \theta yy \propto \frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2zm - \frac{mm}{\theta}$.
& $-2ly \propto -2\frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.
vel $+ \theta yy \propto \frac{ll}{\theta} - 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}} + \theta zz - \theta xx + 2zm - \frac{mm}{\theta}$.
& $-2ly \propto -2\frac{ll}{\theta} + 2l\sqrt{zz - xx + 2\frac{xm}{\theta} - \frac{mm}{\theta\theta}}$.

Ac proinde, utroque caſu, pro $\theta yy - 2ly$ habebitur $- \frac{ll}{\theta} + \theta zz - \theta xx + 2xm - \frac{mm}{\theta}$. Quò appoſitis reliquis quantitatibus, ſumma prædi-

* Prop. 2. huj.

cta contentis, $\theta xx - 2xm + nn + kk$, fiet tota ſumma, nempe quadratorum FA, FB, FC, FD, $\infty\ \theta zz + nn + kk - \frac{mmll}{\theta}$. Quod apparet eſſe planum datum, cum hæ quantitates omnes datæ ſint; ſemperque idem reperiri, ubicunque in circunferentia ſumptum fuerit punctum F. quod erat demonſtrandum.

Quod ſi puncta data diverſas gravitates habere ponantur, invicem commenſurabiles, ut ſi punctum A ponderet ut 2, B ut 3, C ut 4, D ut 7, eorumque reperto gravitatis centro, circulus rurſus deſcribatur, ad cujus circumferentiæ punctum, à datis punctis rectæ ducantur, ac ſingularum quadrata multiplicia ſumantur ſecundum numerum ponderis puncti ſui; ut quadratum AF duplum, BF triplum, CF quadruplum, DF ſeptuplum; dico rurſus ſummam omnium æqualem fore ſpatio dato, ſemperque eidem, ubicunque in circumferentia punctum ſumptum fuerit. Patet enim hoc ex præcedenti demonſtratione, ſi imaginemur puncta ipſa multiplicia ſecundum numeros attributæ cuique gravitatis; quaſi nempe in A duo puncta conjuncta ſint, in B tria, in C quatuor, in D ſeptem, atque illa omnia æqualiter gravia.

## PROPOSITIO XIII.

*SI figura plana, vel linea in plano exiſtens, aliter atque aliter ſuſpendatur à punctis, quæ, in eodem plano accepta, æqualiter à centro gravitatis ſuæ diſtent; agitata motu in latus, ſibi ipſi iſochrona eſt.*

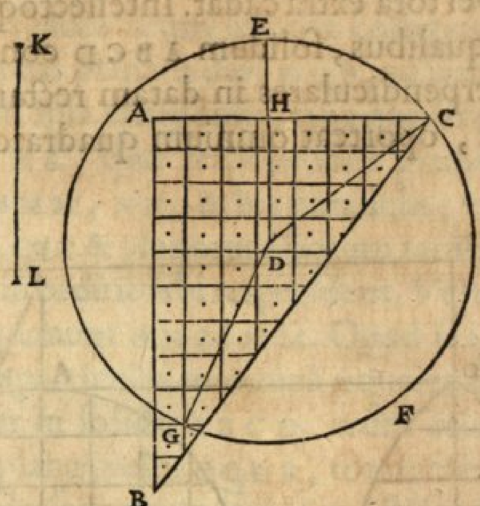
Sit figura plana, vel linea in plano exiſtens ABC, cujus centrum gravitatis D. quo eodem centro, circumferentia circuli in eodem plano deſcribatur, ECF. Dico, ſi à quovis in illa puncto, ut E, C, vel G, ſuſpenſa figura agitetur in latus; ſibi ipſi, ſive eidem pendulo ſimplici, iſochronam eſſe.

Sit prima ſuſpenſio ex E puncto, quando autem eſt extra figuram, ut hic, putandum eſt lineam EH, ex qua figura pendet, rigidam eſſe, atque immobiliter ipſi affixam.

Intelligatur figura ABC diviſa in particulas minimas æquales, à quarum omnium centris gravitatis, ad punctum E, rectæ ductæ ſint; quas quidem manifeſtum eſt, quum moveatur figura motu in latus, eſſe ad axem agitationis perpendiculares. Harum igitur omnium perpendicularium quadrata, diviſa per rectam ED, multiplicem ſecundum numerum particularum in quas figura diviſa eſt, efficiunt longitudinem penduli ſimplicis, figuræ iſochroni *, quæ

* Prop. 6. huj.

quæ ſit K L. Suſpensâ autem figurâ ex punćto G, rurſus longitudo penduli ſimplicis iſochroni invenitur, dividendo quadrata omnia linearum, quæ à particulis figuræ ducuntur ad punćtum G, per rećtam G D, multiplicem ſecundum earundem particularum numerum *. Quum igitur punćta G & E ſint in circunferentia deſcripta centro D, quod eſt centrum gravitatis figuræ A B C, ſive centrum  * Prop. 6. huj.




gravitatis punćtorum omnium, quæ centra ſunt particularum figuræ æqualium; erit proinde ſumma quadratorum à lineis, quæ à dićtis particulis ad punćtum G ducuntur, æqualis ſummæ quadratorum à lineis quæ ab iiſdem particulis ducuntur ad punćtum E *. Hæ vero quadratorum ſummæ, utraque ſuſpenſione, applicantur ad magnitudines æquales: quippe, in ſuſpenſione ex E, ad rećtam E D, multiplicem ſecundum numerum omnium particularum; in ſuſpenſione autem ex G, ad rećtam D G, multiplicem ſecundum earundem particularum numerum. Ergo patet, ex applicatione hac poſteriori, quum nempe ſuſpenſio eſt ex G, fieri longitudinem penduli iſochroni eandem atque ex applicatione priori, hoc eſt, eandem ipſi K L. * Prop. præced.

Eodem modo, ſi ex C, vel alio quovis punćto circunferentiæ E C F, figura ſuſpendatur, eidem pendulo K L iſochrona eſſe probabitur. Itaque conſtat propoſitum.

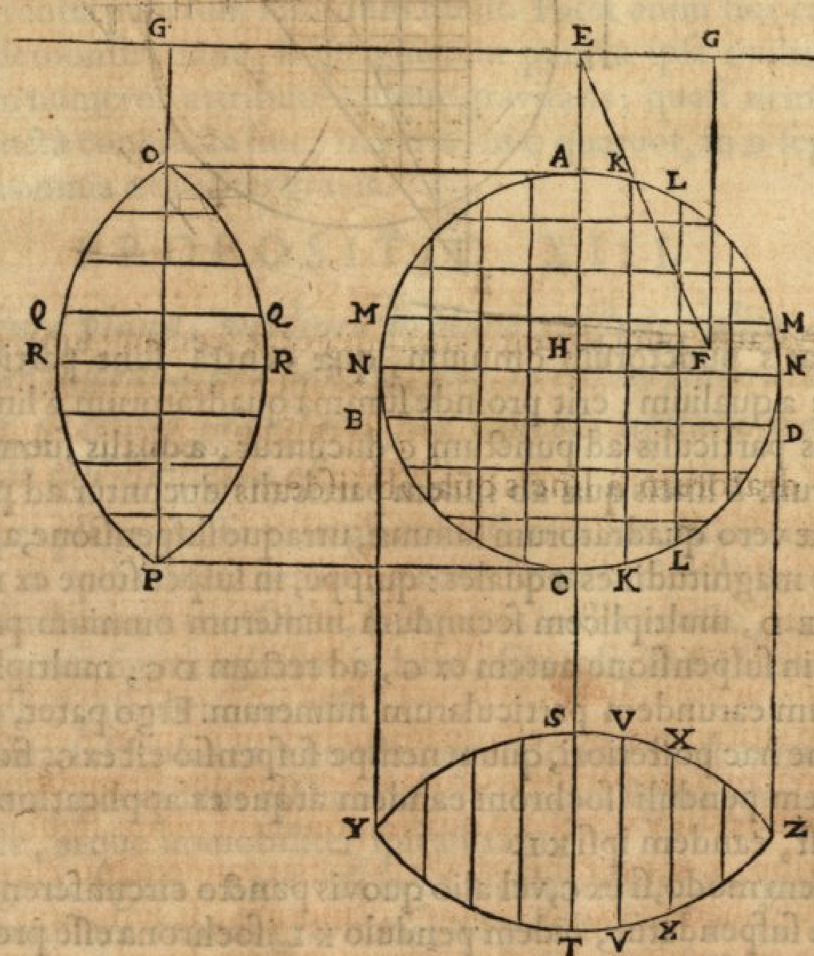
## PROPOSITIO XIV.

*Datâ figurâ ſolidâ, & lineâ rectâ interminatâ, quæ vel extra figuram cadat, vel per eam tranſeat; diviſâque*

De centro Oscillationis.

*figurâ cogitatu in particulas minimas æquales, à quibus omnibus ad datam rectam perpendiculares ductæ intelligantur; invenire summam omnium quæ ab ipsis fiunt quadratorum, sive planum, cujus multiplex secundum particularum numerum, dictæ quadratorum summæ æquale sit.*

Sit data figura solida A B C D, & linea recta quæ, per punctum E transiens, ad planum hujus paginæ erecta intelligatur: quæque vel secet figuram, vel tota extra cadat. Intellectoque, à singulis particulis minimis æqualibus, solidum A B C D constituentibus, velut F, rectas duci perpendiculares in datam rectam per E, quemadmodum hic F E, oporteat omnium quadratorum F E summam invenire.




Secetur figura plano E A C, per dictam datam lineam & per centrum gravitatis figuræ ducto. Item aliud planum intelligatur per eandem lineam datam, perque E G, quæ ipsi est ad angulos rectos.

Constat jam, quadratum rectæ cujusque, quæ à particula dictarum aliqua, ad lineam datam per E perpendicularis ducitur, sicut F E, æquari quadratis duarum F G, F H, quæ, ab eadem particula, in plana per E G & E C ante dicta, perpendiculares aguntur *. Quare, si cognoscere possimus summam quadratorum, quæ fiunt ab omnibus perpendicularibus, quæ à particulis universis cadunt in plana dicta per E G & per E C; habebimus etiam huic æqualem summam quadratorum à perpendicularibus, quæ ab universis iisdem particulis cadunt in rectam datam per E punctum.

* 47. lib. 1. Eucl.

Illa vero prior quadratorum summa colligetur hoc modo. Ponatur primò figuram planam dari O Q P, ad latus figuræ solidæ A B C D, ejusdem cum ipsa altitudinis, quæque sit ejusmodi, ut secta lineis rectis Q Q, R R, quæ respondeant planis figuram solidam A B C D secantibus M M, N N, & his parallelis; eadem sit dictarum linearum inter se, quæ & planorum horum ratio, si nempe sumantur utrinque quæ in ordine sibi respondent. Vt si linea R R sit ad Q Q quemadmodum planum N N ad M M. Quod si igitur figura plana O Q P, in totidem particulas minimas æquales divisa intelligatur, quot intelliguntur in solido A B C D, erunt etiam in unoquoque segmento figuræ planæ, velut Q Q R R, tot numero particulæ, quot sunt in figuræ solidæ segmento M M N N, isti segmento respondente; ac proinde & summa quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ O Q P in planum E G, æquabitur summæ quadratorum, à perpendicularibus omnium particularum figuræ solidæ, in idem planum E G productis. Illa autem quadratorum summa data erit, si dentur in figura O Q P, cuneoque illius, quæ propos. 9. huj. requiri diximus. Ergo his datis, dabitur quoque summa quadratorum, à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ducuntur in planum E G.

Ponatur nunc alia item figura plana S Y T Z, ejusdem cum solido A B C D latitudinis, hoc est, quam includant plana B Y, D Z solidum contingentia, ac parallela plano E A C, quæque sit ejusmodi, ut, secta lineis rectis V V, X X &c. quæ respondeant planis figuram A B C D secantibus, K K, L L, & his parallelis, faciat eandem inter se rationem linearum harum atque illorum planorum, si sumantur quæ sibi mutuo respondent. Itaque rursus quadrata simul omnia perpendicularium, à particulis figuræ S Y T Z in rectam S T cadentium, æqualia erunt quadratis omnibus perpendicularium quæ, à particulis solidi A B C D, ducuntur in planum A C. Illorum autem summa quadratorum data erit, si detur distantia centri gravitatis figuræ S Y T Z ab recta B Y vel D Z; nec non distantia indidem centri gravitatis cunei sui abscissi plano per eandem rectam *. Vel, figura S Y T Z ordinata existente, ut S T sit axis ejus, eadem quadratorum summa dabitur, si detur distantia centri gravitatis figuræ dimidiæ S Z T ab axe S T, item centri gravitatis cunei, super eadem dimidia figura, abscissi plano per axem ducto *. Ergo, his datis, dabitur quoque summa quadratorum à perpendicularibus quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, ductæ intelliguntur in planum E A C. Invenimus autem & summam quadratorum, à perpendicularibus omnibus in planum per E G ductis. Ergo & aggregatum utriusque summæ habebitur, hoc est, per superius ostensa, summa quadratorum perpendicularium quæ, à particulis omnibus solidi A B C D, cadunt in rectam datam per E transeuntem, & ad paginæ hujus planum erectam. quod erat faciendum.

* Prop. 9. huj.

* Prop. 11. huj.

## PROPOSITIO XV.

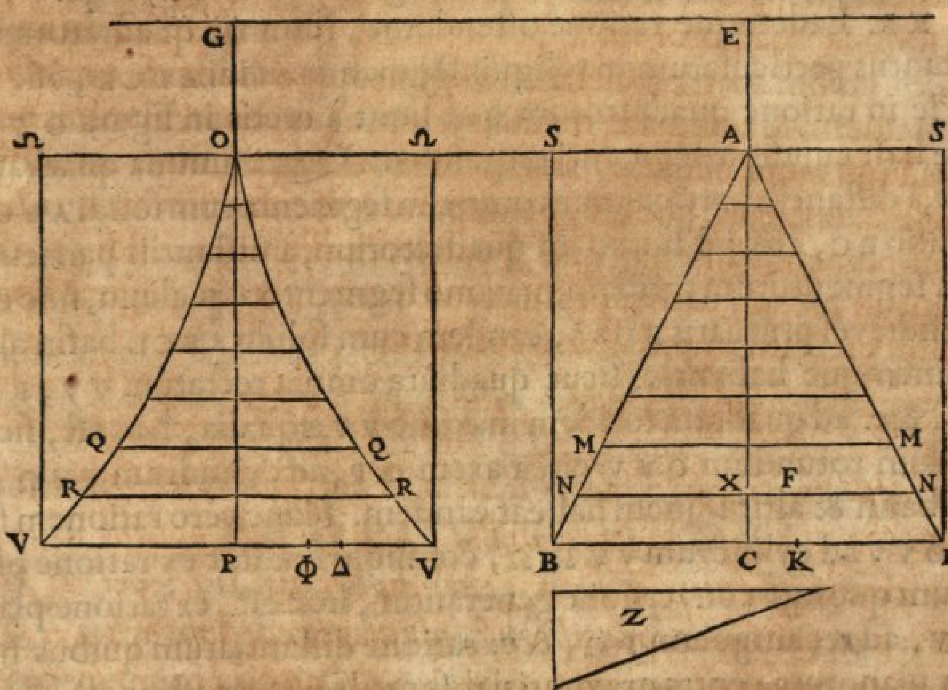
*Isdem positis, si solidum* A B C D *sit ejusmodi, ut figura plana* S Y T Z, *ipsi proportionalis, non habeat notam distantiam centri gravitatis à tangentibus* B Y *vel* D Z, *vel, ut subcentrica cunei super ipsa abscissi, plano per easdem* B Y *vel* D Z, *ignoretur; in figura tamen proportionali, quæ à latere est,* O Q P, *detur distantia* Φ P, *qua centrum gravitatis figuræ dimidiæ* O P V *abest ab axe* O P; *licebit hinc invenire summam quadratorum à distantiis particularum solidi* A B C D *à plano* E C. *Oportet autem ut sectiones omnes,* N N, M M, *sint plana similia; utque per omnium centra gravitatis transeat planum* E C; *quemadmodum in prismate, pyramide, cono, conoidibus, multisque aliis figuris contingit. Atque eorum planorum distantias centri gravitatis, super tangentibus axi oscillationis parallelis, datas esse necesse est; uti & subcentricas cuneorum, qui super ipsis abscinduntur, ductis planis per easdem tangentes.*

Veluti, si maxima dictarum sectionum sit B D, & in B intelligatur recta parallela axi E, hoc est, erecta ad planum quod hic conspicitur, oportet datam esse distantiam centri gr. sectionis B D à dicta linea in B, quæ sit B C; itemque subcentricam cunei, super sectione B D abscissi, plano ducto per eandem lineam in B, quæ subcentrica sit B K.

Etenim his datis, divisâque P V bifariam in Δ, si fiat sicut Δ P ad

P Φ, ita rectangulum B C K ad ſpatium quoddam Z; dico hoc ipſum, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum, à diſtantiis earundem particularum à plano E C.

De centro Oscillationis.




Quadrata enim à diſtantiis particularum planæ ſectionis B D, à plano E C, quod per centrum gravitatis ſuæ tranſit; ſive quadrata à diſtantiis particularum ſolidarum ſegmenti B N N D à plano eodem, æquari conſtat rectangulo B C K, multiplici per numerum dictarum particularum *. Similiter, ſi planæ ſectionis N N diſtantia centri gravitatis, ab recta quæ in N intelligitur axi E parallela, ſit N X; ſubcentrica vero cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per eandem rectam, ſit N F; erunt quadrata à diſtantiis particularum planarum ſectionis N N à plano E C, ſive quadrata à diſtantiis particularum ſolidarum ſegmenti N M M N, à plano eodem, æqualia rectangulo N X F, multiplici per numerum particularum ipſarum ſectionis N N, vel ſegmenti N M M N. Eſt autem B D diviſa ſimiliter in C & K, atque N N in X & F. Ergo rectangulum B C K ad rectangulum N X F, ſicut quadratum B D ad quadratum N N.

* Prop. 8. huj.

Eſt autem & numerus particularum ſectionis B D, ad numerum particularum ſectionis N N, ſicut ſectiones ipſæ; hoc eſt, ſicut quadratum B D ad quadratum N N. Itaque rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum ſectionis B D, ad rectangulum N X F, multiplex per numerum particularum ſectionis N N, dupli-

De centro Oscillationis.

catam habebit rationem quadrati B D ad quadratum N N; hoc eſt, eam quam quadratum V V ad quadratum R R, in figura proportionali. Erit igitur & dicta prior ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmenti B N N D à plano E C, ad ſummam alteram quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmenti N M M N, ut qu. V V ad qu. R R. Eademque ratione oſtendetur, ſummas quadratorum à diſtantiis particularum in reliquis ſegmentis ſolidi A B C D, eſſe inter ſe in ratione quadratorum quæ fiunt à rectis in figura O V V, quæ baſi cujuſque ſegmenti reſpondent. Quare ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum omnium ſegmentorum ſolidi A B C D à plano E C, erit ad ſummam quadratorum, à diſtantiis particularum ſegmentorum totidem, maximo ſegmento æqualium, hoc eſt, cylindri vel priſmatis B D S S, eandem cum ſolido A B C D baſin altitudinemque habentis, ſicut quadrata omnia rectarum V V, R R, Q Q, &c. ad quadrata totidem maximo V V æqualia, hoc eſt, ſicut ſolidum rotundum O V V circa axem O P, ad cylindrum V V Ω Ω, qui baſin & altitudinem habeat eandem. Hanc vero rationem ſolidi O V V ad cylindrum V V Ω Ω, componi conſtat ex ratione planorum quorum converſione generantur, hoc eſt, ex ratione plani O P V, ad rectangulum P Ω, & ex ratione diſtantiarum quibus horum planorum centra gravitatis abſunt ab axe O P; hoc eſt, & ex ratione P Φ ad P Δ. Et prior quidem harum rationum, nempe plani O P V ad rectangulum P Ω, eadem eſt quæ ſolidi A B C D ad cylindrum vel priſma B D S S, hoc eſt, eadem quæ numeri particularum ſolidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel priſmatis B D S S. Altera vero ratio, nempe P Φ ad P Δ, eſt eadem, ex conſtructione, quæ ſpatii Z ad rectangulum B C K. Habebit itaque dicta ſumma quadratorum, à diſtantiis omnium particularum ſolidi A B C D à plano E C, ad ſummam quadratorum, à diſtantiis omnium particularum cylindri vel priſmatis B D S S ab eodem plano, rationem eam quæ componitur ex ratione numeri particularum ſolidi A B C D, ad numerum particularum cylindri vel priſmatis B D S S, & ex ratione ſpatii Z ad rectangulum B C K: hoc eſt, rationem quam habet rectangulum Z, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, ad rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel priſmatis B D S S. Atqui quarta harum magnitudinum æqualis eſt ſecundæ; nempe rectangulum B C K, multiplex per numerum particularum cylindri vel priſmatis B D S S, æquale ſummæ quadratorum, à diſtantiis particularum ejuſdem priſmatis vel cylindri B D S S à plano E C; ſiquidem rectangulum idem B C K, multiplex per numerum particularum ſegmenti B N N D, æquatur quadratis diſtantiarum particularum ejuſdem ſegmenti à plano E C*. Ergo & tertia primæ æquabitur; nempe planum Z, multiplex per numerum particularum ſolidi A B C D, ſummæ quadratorum, à diſtantiis particularum ſolidi ejuſdem A B C D à plano E C*. quod erat demonſtrandum.



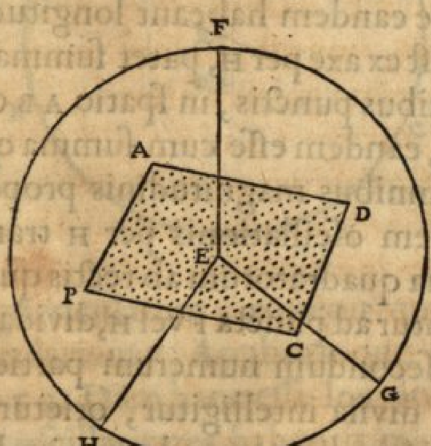
* Prop. 8. huj.

* Prop 14. lib. 5. Eucl.

Notandum vero, quando ſolidum A B D rotundum eſt circa axem A C, fieri ſemper rectangulum B C K æquale quartæ parti quadrati B C; quoniam ſubcentrica cunei, abſciſſi ſuper circulo B D, plano per tangentem in B, nempe recta B K, æquatur $\frac{1}{4}$ radii B C. Vnde, ſi P V æqualis poſita ſit B C, ſequitur, faciendo ut P Δ ad P Φ ita rectangulum B C K, hoc eſt, $\frac{1}{4}$ quadrati B C, hoc eſt, qu. P Δ ad planum aliud Z, fore hoc rectangulo Δ P Φ æquale. Ac proinde tunc ipſum rectangulum Δ P Φ, multiplex ſecundum numerum particularum ſolidi A B D, æquari ſummæ quæſitæ quadratorum à perpendicularibus omnibus, quæ à particulis iiſdem cadunt in planum E C.

## PROPOSITIO XVI.

*Figura quævis, ſive linea fuerit, ſive ſuperficies, ſive ſolidum; ſi aliter atque aliter ſuſpendatur, agiteturque ſuper axibus inter ſe parallelis, quique à centro gravitatis figuræ æqualiter diſtent, ſibi ipſi iſochrona eſt.*




Proponatur magnitudo quævis, cujus centrum gravitatis E punctum, ſitque primo ſuſpenſa ab axe, qui per F intelligitur hujus paginæ plano ad angulos rectos. Itaque idem planum erit & planum oſcillationis. In quo ſi centro E, radio E F, deſcribatur circumferentia F H G, ſumptoque in illa puncto quovis, ut H, magnitudo ſecundò ſuſpendi intelligatur ab axe in hoc puncto infixo, atque agitari, manente eodem oſcillationis plano. Dico iſochronam fore ſibi ipſi agitatæ circa axem in F.

De centro Oscillationis.

Intelligatur enim dividi magnitudo proposita in particulas minimas æquales. Itaque, quia in utraque illa suspensione idem manet oscillationis planum, respectu partium magnitudinis; manifestum est, si ab omnibus particulis, in quas divisa est magnitudo, perpendiculares cadere concipiantur in dictum oscillationis planum, illas utraque suspensione occurrere ipsi in punctis iisdem. Sint autem hæc puncta ea quæ apparent in spatio A B C D.

Quum igitur E sit centrum gravitatis magnitudinis propositæ, ipsaque proinde circa axem, qui per E punctum erectus est ad planum A B C D, quovis situ æquilibrium servet; facile perspicitur, quod si punctis omnibus ante dictis, quæ in spatio A B C D signantur, æqualis gravitas tribuatur, eorum quoque omnium centrum gravitatis futurum est punctum E. Quod si vero, ut fieri potest, in puncta aliqua plures perpendiculares coincidant, illa puncta quasi toties geminata intelligenda sunt, gravitatesque toties multiplices accipiendæ. Atque ita consideratorum, patet rursus centrum gravitatis esse E punctum.

Porro summam quadratorum ab rectis, quæ ducuntur à dictis punctis omnibus ad punctum F, eandem esse patet cum summa quadratorum ab iis rectis, quæ à singulis particulis magnitudinis propositæ ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per F transeuntem; quippe cum lineæ ipsæ, quarum quadrata intelliguntur, utrobique eandem habeant longitudinem. Similiter etiam, cum suspensio est ex axe per H, patet summam quadratorum ab rectis, quæ ab omnibus punctis, in spatio A B C D signatis, ducuntur ad punctum H, eandem esse cum summa quadratorum, ab iis quæ, à particulis omnibus magnitudinis propositæ, ducuntur perpendiculares in axem oscillationis per H transeuntem. Ergo utroque casu, si summa quadratorum ab rectis quæ, à punctis omnibus prædictis, ducuntur ad puncta F vel H, dividatur per rectas E F vel E H, multiplices secundum numerum particularum in quas magnitudo proposita divisa intelligitur, orietur ex applicatione hac longitudo penduli simplicis, quod magnitudini suspensæ ex F vel H isochronum sit. Est autem summa quadratorum utroque casu æqualis*; & rectæ quoque E F, E H, inter se æquales; & particularum idem numerus. Ergo, quum & applicatæ quantitates, & quibus illæ applicantur, utrobique æquales sint, etiam longitudines ex applicatione ortæ æquales erunt, hoc est, longitudines pendulorum isochronorum magnitudini propositæ suspensæ ex F vel ex H. Quare constat propositum.

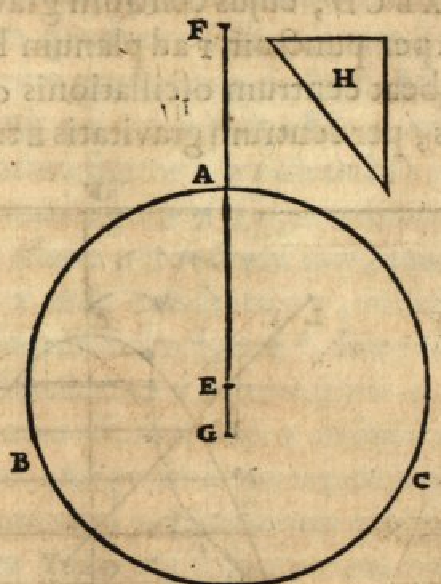
* Prop. 11. huj.

PROP.

## PROPOSITIO XVII.

*Dato plano*, cujus multiplex per numerum particularum, in quas suspensa figura divisa intelligitur, æquetur quadratis omnium distantiarum ab axe oscillationis; si illud applicetur ad rectam, æqualem distantiæ inter axem oscillationis & centrum gravitatis suspensæ magnitudinis, orietur longitudo penduli simplicis ipsi isochroni.*

Sit figura A B C, cujus centrum gravitatis E, suspensa ab axe qui, per F punctum ad planum quod conspicitur, erectus sit. Ponendoque divisam figuram in particulas minimas æquales, à quibus omnibus, in dictum axem, perpendiculares cadere intelligantur: esto, per superius ostensa, inventum planum H, cujus multiplex per nu-




merum dictarum particularum, æquetur quadratis omnibus dictarum perpendicularium. Applicatoque plano H ad rectam F E, fiat longitudo F G. Dico hanc esse longitudinem penduli simplicis, isochronas oscillationes habentis magnitudini A B C, agitatæ circa axem per F.

Quia enim summa quadratorum, à distantiis ab axe F, applicata ad distantiam F E, multiplicem secundum partium numerum, facit longitudinem penduli simplicis isochroni *. Isti vero quadratorum summæ æquale ponitur planum H, multiplex per eundem particularum numerum. Ergo & planum H, multiplex per eundem particularum numerum, si applicetur ad distantiam F E, multiplicem * Prop. 6. huj.

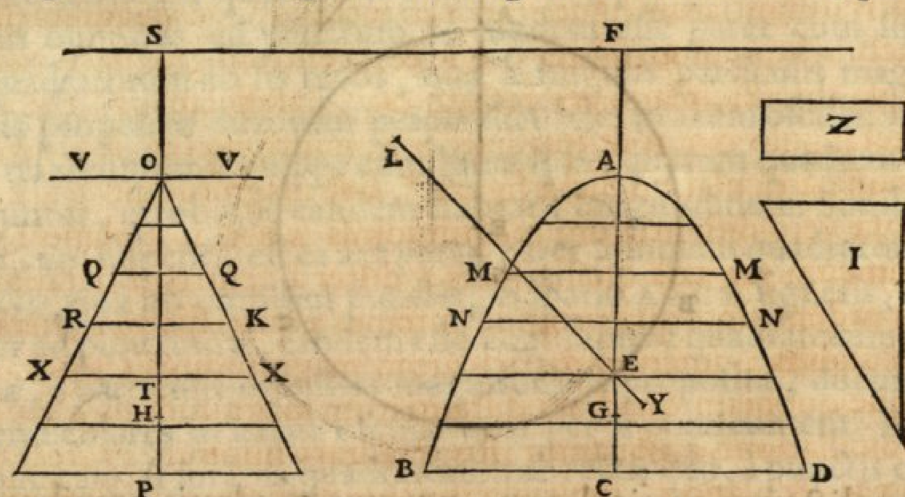
Q

ſecundum particularum numerum; ſive, omiſſa communi multiplicitate, ſi planum H applicetur ad diſtantiam F E; orietur quoque longitudo penduli ſimplicis iſochroni. Quam proinde ipſam longitudinem F G eſſe conſtat. quod erat demonſtrandum.

## PROPOSITIO XVIII.

*SI ſpatium planum, cujus multiplex ſecundum numerum particularum ſuſpenſæ magnitudinis, æquetur quadratis diſtantiarum ab axe gravitatis, axi oſcillationis parallelo; id, inquam, ſpatium ſi applicetur ad rectam, æqualem diſtantiæ inter utrumque dictorum axium, orietur recta æqualis intervallo, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis ejuſdem magnitudinis.*

Eſto magnitudo A B C D, cujus centrum gravitatis E; quæque ſuſpenſa ab axe, qui per punctum F ad planum hujus paginæ erectus intelligitur, habeat centrum oſcillationis G. Porro axi per F intelligatur axis alius, per centrum gravitatis E tranſiens, parallelus.




Diviſaque magnitudine cogitatu in particulas minimas æquales, ſit quadratis diſtantiarum, ab axe dicto per E, æquale planum I, multiplex nempe ſecundum numerum dictarum particularum; applicatoque plano I ad diſtantiam F E, fiat recta quædam. Dico eam æqualem eſſe intervallo E G, quo centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis magnitudinis A B C D.

Vt enim univerſali demonſtratione quod propoſitum eſt comprehendamus: intelligatur plana figura, magnitudini A B C D analoga, ad latus adpoſita, O Q P; quæ nempe, ſecta planis horizontalibus iiſdem cum magnitudine A B C D, habeat ſegmenta intercepta inter bina quæque plana, in eadem inter ſe ratione cum ſegmentis dictæ magnitudinis, quæ ipſis reſpondent; ſintque ſegmenta ſingula figuræ O Q P, diviſa in tot particulas æquales, quot continentur ſegmentis ipſis reſpondentibus in figura A B C D. Hæc autem intelligi poſſunt fieri, qualiſcunque fuerit magnitudo A B C D, ſive linea, ſive ſuperficies, ſive ſolidum. Semper vero centrum gravitatis figuræ O Q P, quod ſit T, eadem altitudine eſſe manifeſtum eſt cum centro gravitatis magnitudinis A B C D; ideoque, ſi planum horizontale, per F ductum, ſecet lineam centri figuræ O Q P, velut hic in S, æquales eſſe diſtantias S T, F E.

Porro autem conſtat quadrata diſtantiarum, ab axe oſcillationis F, applicata ad diſtantiam F E, multiplicem ſecundum numerum particularum, efficere longitudinem penduli iſochroni *; quæ longitudo poſita fuit F G. Illorum vero quadratorum ſummam, æqualem eſſe perſpicuum eſt, quadratis diſtantiarum à plano horizontali per F, unà cum quadratis diſtantiarum à plano verticali F E, per axem F & centrum gravitatis E ducto*. Atqui quadrata diſtantiarum magnitudinis A B C D à plano horizontali per F, æquantur quadratis diſtantiarum figuræ O Q P ab recta S F. Quæ quadrata (ſi O ſit punctum ſupremum figuræ O Q P, & H centrum gravitatis cunei ſuper ipſa abſciſſi, plano per rectam O V, parallelam S F) æqualia ſunt rectangulo O T H & quadrato S T, multiplicibus ſecundum numerum particularum dictæ figuræ*, ſive magnitudinis A B C D. Quadrata vero diſtantiarum magnitudinis A B C D à plano F E, quantumcumque axis oſcillationis F diſtet à centro gravitatis E, ſemper eadem ſunt: quæ proinde putemus æquari ſpatio Z, multiplici ſecundum numerum particularum magnitudinis A B C D.

* Prop. 6. huj.

* Prop 47. lib. 1. Eucl.

* Prop. 9. huj.

Itaque quoniam quadrata diſtantiarum magnitudinis A B C D, ab axe oſcillationis F, æquantur iſtis, quadrato nimirum S T, rectangulo O T H, & plano Z, multiplicibus per numerum particularum ejuſdem magnitudinis; ſi applicentur hæc omnia ad diſtantiam F E ſive S T, orietur longitudo F G penduli iſochroni magnitudini A B C D*. Sed ex applicatione quadrati S T ad latus ſuum S T, orietur ipſa S T, ſive F E. Ergo reliqua E G eſt ea quæ oritur ex applicatione rectanguli O T H, & plani Z, ad eandem S T vel F E.

* Prop. 6. huj.

Quare ſupereſt ut demonſtremus rectangulum O T H, cum plano Z, æquari plano I. Tunc enim conſtabit, etiam planum I, applicatum ad diſtantiam F E, efficere longitudinem ipſi E G æqualem. Illud autem ſic oſtendetur. Rectangulum O T H, multiplex ſecundum numerum particularum figuræ O Q P, ſive magnitudinis A B

*Prop. 10. huj.

CD, æquatur quadratis distantiarum figuræ ab recta XT*, quæ per centrum gravitatis T ducitur ipsi SF parallela; ac proinde etiam quadratis distantiarum magnitudinis ABCD, à plano horizontali KK, ducto per centrum gravitatis E; cum distantiæ utrobique sint eædem. At vero planum Z, similiter multiplex, æquale positum fuit quadratis distantiarum magnitudinis ABCD à plano verticali FE. Ac patet quidem quadrata hæc distantiarum à plano FE, una cum dictis quadratis distantiarum à plano horizontali per E, æqualia esse quadratis distantiarum ab axe gravitatis per E, qui sit axi F parallelus*. Itaque rectangulum OTH una cum plano Z, multiplicia secundum numerum particularum magnitudinis ABCD, æqualia erunt quadratis distantiarum ejusdem magnitudinis à dicto axe per E. Sed & planum I, multiplex secundum eundem particularum numerum, æquale positum fuit iisdem distantiarum quadratis. Ergo planum I æquale est rectangulo OTH & plano Z simul sumptis. quod ostendendum supererat.

*Prop. 47. lib. 1. Eucl.

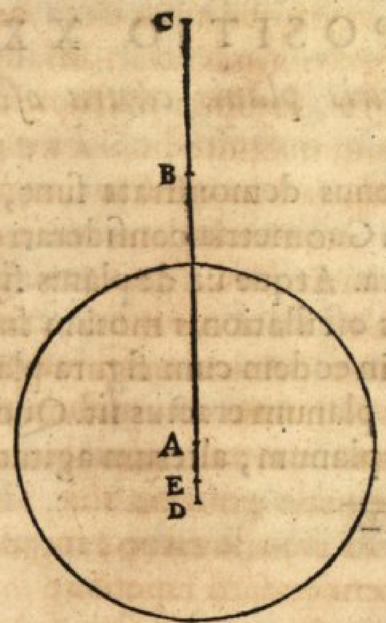
Hinc rursus manifestum fit, quod propositione 16 demonstratum fuit; nempe magnitudinem quamlibet, si aliter atque aliter suspendatur atque agitetur, ab axibus parallelis, qui à centro gravitatis suæ æqualiter distent, sibi ipsi isochronam esse.

Sive enim magnitudo ABCD suspendatur ab axe F, sive ab axe L illi parallelo; patet eadem utrobique esse quadrata distantiarum ab axe per E, qui sit axibus F vel L parallelus. Unde & planum I, cujus multiplex, secundum numerum particularum, æquatur quadratorum summæ, utroque casu idem erit. Hoc vero planum, applicatum ad distantiam centri gravitatis ab axe oscillationis, quæ utroque casu eadem ponitur, efficit distantiam qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis; Ergo etiam hæc distantia utroque casu eadem erit. Velut si, facta suspensione ex L, fuerit dicta distantia EY, erit ipsa æqualis EG; & tota YL æqualis GF; adeoque, in suspensione utraque, idem pendulum simplex isochronum fit magnitudini ABCD.

## PROPOSITIO XIX.

*Si magnitudo eadem, nunc brevius nunc longius suspensa, agitetur; erunt, sicut distantia axium oscillationis à centro gravitatis inter se, ita contraria ratione distantia centrorum oscillationis ab eodem gravitatis centro.*

Sit magnitudo, cujus centrum gravitatis A, suspensa primum atque agitata ab axe in B, deinde vero ab axe in C; sitque in prima suspensione centrum oscillationis D, in posteriori vero centrum oscillationis E. Dico esse ut B A ad C A ita E A ad D A. De centro Oscillationis.




Quum enim, in suspensione ex B, efficiatur distantia A D, qua nempe centrum oscillationis inferius est centro gravitatis, applicando ad distantiam B A spatium quoddam, cujus multiplex secundum numerum particularum minimarum æqualium, in quas magnitudo divisa intelligitur, æquatur quadratis distantiarum ab axe per A, parallelo axi in B *; erit proinde rectangulum B A D dicto spatio æquale. Item, in suspensione ex C, quum fiat distantia A E, applicando idem dictum spatium ad distantiam C A; erit & rectangulum C A E eidem spatio æquale. Itaque æqualia inter se rectangula B A D, C A E; ac proinde ratio B A ad C A eadem quæ A E ad A D. quod erat demonstrandum. * Prop. præced.

Hinc patet, dato pendulo simplici, quod magnitudini suspensæ isochronum sit in una suspensione, datoque ejus centro gravitatis; etiam in alia omni suspensione, longiori vel breviori, dummodo idem maneat planum oscillationis, longitudinem penduli isochroni datam esse.

## PROPOSITIO XX.

*Centrum Oscillationis & punctum suspensionis inter se convertuntur.*

In figura superiori, quia, posita suspensione ex B, centrum oscillationis est D; etiam invertendo omnia, ponendoque suspen-

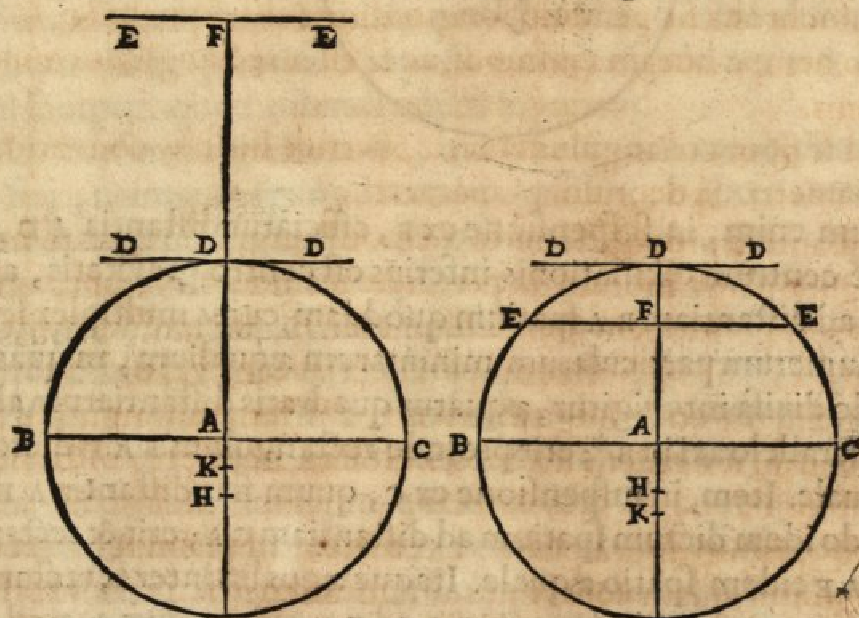
De centro Oscillationis.

sionem ex D, erit tunc centrum oscillationis B. Hoc enim ex ipsa propositione præcedenti manifestum est.

## PROPOSITIO XXI.

*Quomodo in figuris planis centra oscillationis inveniantur.*

Intellectis quæ hactenus demonstrata sunt, facile jam erit in plerisque figuris, quæ in Geometria considerari consueverunt, definire oscillationis centra. Atque ut de planis figuris primum dicamus; duplicem in iis oscillationis motum supra definivimus; nempe, vel circa axem in eodem cum figura plano jacentem, vel circa eum qui ad figuræ planum erectus sit. Quorum priorem vocavimus agitationem in planum, alterum agitationem in latus.




Quod si priore modo agitetur, nempe circa axem in eodem plano jacentem, sicut figura B C D circa axem E F; hic, si cuneus super figura intelligatur abscissus, plano quod ita secet planum figuræ, ut intersectio, quæ hic est D D, sit parallela oscillationis axi; deturque distantia centri gravitatis figuræ ab hac intersectione, ut hic A D; itemque subcentrica cunei dicti super eadem intersectione, quæ hic sit D H. Habebitur centrum oscillationis K, figuræ B D C, applicando rectangulum D A H ad distantiam F A; quoniam ex applicatione hac orietur distantia A K, qua centrum oscillationis inferius est centro gravitatis. Est enim rectangulum D A H, multiplex secundum numerum particularum figuræ B C D, æquale quadratis distantiarum ab recta B A C, quæ per centrum gravitatis A parallela ducitur axi oſcillationis E F *. Quare, applicando idem rectangulum ad diſtantiam F A, orietur diſtantia A K, qua centrum oſcillationis inferius eſt centro gravitatis A *.

* Prop. 10. huj.
* Prop. 18. huj.

Hinc manifeſtum eſt, ſi axis oſcillationis ſit D D, fieri centrum oſcillationis H punctum; adeoque longitudinem D H, penduli ſimplicis iſochroni figuræ B C D, eſſe tunc ipſam ſubcentricam cunei, abſciſſi plano per D D, ſuper ipſam D D. Quod unum ab aliis ante animadverſum fuit, non tamen demonſtratum.

Quomodo autem centra gravitatis cuneorum ſuper figuris planis inveniantur, perſequi non eſt inſtituti noſtri, & jam in multis nota ſunt. Velut, quod ſi figura B C D ſit circulus, erit D H æqualis $\frac{5}{8}$ diametri. Si rectangulum, erit D H » $\frac{2}{3}$ diametri. Vnde & ratio apparet cur virga, ſeu linea gravitate prædita, altero capite ſuſpenſa, iſochrona ſit pendulo longitudinis ſubſeſquialteræ. Conſiderando nempe lineam ejuſmodi, ac ſi eſſet rectangulum minimæ latitudinis.

Quod ſi figura triangulum fuerit, vertice ſurſum converſo, fit D H $\frac{3}{4}$ diametri. Si deorſum, $\frac{1}{2}$ diametri.

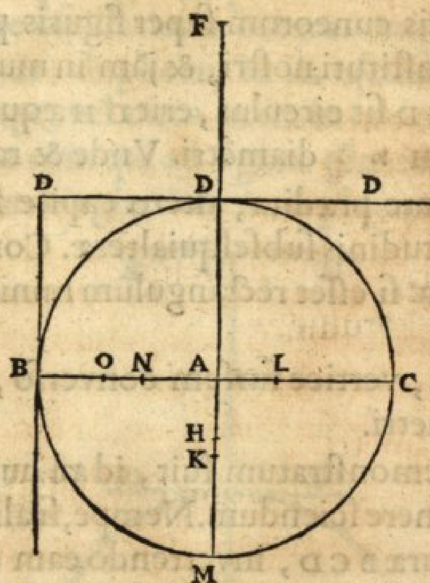
Quod autem propoſitione 16 demonſtratum fuit, id ad hujuſmodi figuræ planæ motum ita pertinere ſciendum. Nempe, ſi aliam atque aliam poſitionem demus figuræ B C D, invertendo eam circa axem B A C, ut vel horizonti parallela jaceat, vel oblique inclinetur, manente eodem agitationis axe F E, etiam longitudo penduli iſochroni F K eadem manebit. Hoc enim ex propoſitione illa manifeſtum eſt.

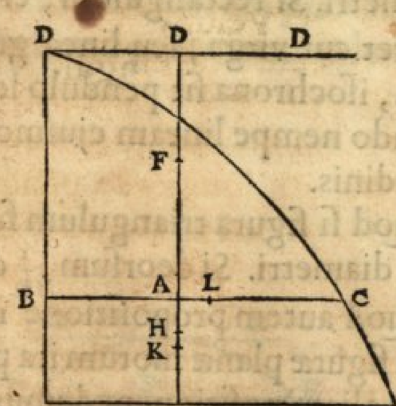
Porro quando figura plana, circa axem ad planum figuræ erectum, agitatur; quam vocavimus agitationem in latus; velut ſi figura B C D moveatur circa axem, qui per punctum F intelligitur ad planum D B C erectus; hic jam præter cuneum ſuper figura, qui abſcinditur plano ducto per D D, tangentem figuram in puncto ſummo, alter quoque conſiderandus cuneus, qui abſcinditur plano per B D, tangentem figuram in latere, quæque tangenti D D ſit ad rectos angulos. Oportetque dari, præter figuræ centrum gravitatis A, ſubcentricamque H D cunei prioris, etiam ſubcentricam L B cunei poſterioris. Ita enim nota erunt rectangula D A H, B A L, quæ ſimul ſumpta faciunt hic ſpatium applicandum, quod deinceps etiam Rectangulum oſcillationis vocabitur. Quod nempe, applicatum ad diſtantiam F A, dabit diſtantiam A K, qua centrum oſcillationis K inferius eſt centro gravitatis A.

Si vero F A ſit axis figuræ B C D, poteſt, pro cuneo abſciſſo per

B D super figura tota, adhiberi cuneus super figura dimidia D B M abscissus plano per D M. Nam, si cunei hujus subcentrica super D M sit O A, distantia vero centri gr. figuræ planæ D B M ab eadem D M sit N A, æquale esse constat rectangulum O A N rectangulo B A L*. Itaque rectangulum O A N, additum rectangulo D A H, constituet quoque planum applicandum ad distantiam F A, ut fiat distantia A K.

* Prop. 11. huj.




Et horum quidem manifesta est demonstratio ex præcedentibus, quippe cum rectangula D A H, B A L, vel D A H, O A N, multiplicia secundum numerum particularum figuræ, æqualia sint quadratis distantiarum à centro gravitatis A; sive, quod idem hic est, ab axe gravitatis axi oscillationis parallelo; ac proinde rectangula dicta, ad distantiam F A applicata, efficiant longitudinem intervalli A K*.

* Prop. 18. huj.

## *Centrum Oscillationis Circuli.*

Et in circulo quidem rectangula D A H, B A L, inter se æqualia esse liquet, simulque efficere semissem quadrati à semidiametro. Unde, si fiat ut F A ad semidiametrum A B, ita hæc ad aliam, ejus dimidium erit distantia A K, à centro gravitatis ad centrum oscillationis. Si igitur circulus ab axe D, in circumferentia sumpto, agitetur, erit D K æqualis tribus quartis diametri D M.

Ad hunc modum & in sequentibus figuris planis centra oscillationis quæsivimus, quæ simpliciter adscripsisse sufficiet. Nempe,

*Centrum*

De centro Oſcillationis.

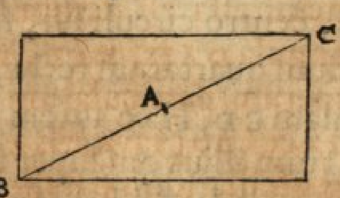
### *Centrum oſcillationis Rectanguli.*

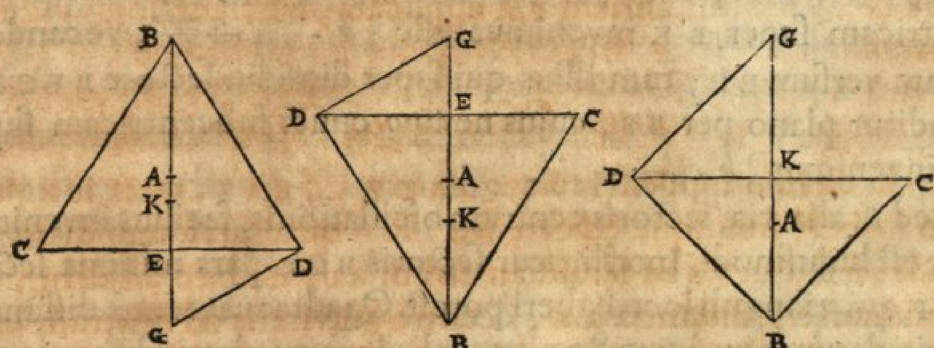
In rectangulo omni, ut C B, ſpatium applicandum, ſive rectangulum oſcillationis, invenitur æquale tertiæ parti quadrati à ſemidiagonio A C. Vnde ſequitur, ſi rectangulum ab aliquo angulorum ſuſpendatur, motuque hoc laterali agitetur, pendulum illi iſochronum eſſe $\frac{2}{3}$ diagonii totius.

### *Centrum oſcillationis Trianguli iſoſcelis.*

In triangulo iſoſcele, cujuſmodi C B D, ſpatium applicandum æquatur parti decimæ octavæ quadrati à diametro B E, & vigeſimæ quartæ quadrati baſeos C D. Vnde, ſi ab angulo baſeos ducatur D G, perpendicularis ſuper latus D B, quæ occurrat productæ diametro B E in G; ſitque A centrum gravitatis trianguli; diviſoque intervallo G A in quatuor partes æquales, una earum A K apponatur ipſi B A; erit B K longitudo penduli iſochroni, ſi triangulum ſuſpendatur ex vertice B. Cum autem ex puncto mediæ baſis E ſuſpenditur, longitudo penduli iſochroni E K æquabitur dimidiæ B G.

Atque hinc liquet, triangulum iſoſceles rectangulum, ſi ex puncto mediæ baſis ſuſpendatur, iſochronum eſſe pendulo longitudinem diametro ſuæ æqualem habenti. Similiterque, ſi ſuſpendatur ab angulo ſuo recto, eidem pendulo iſochronum eſſe.




### *Centrum oſcillationis Parabolæ.*

In parabolæ portione recta, ſpatium applicandum æquatur $\frac{12}{175}$ quadrati axis, una cum quinta parte quadrati dimidiæ baſis. Cum-

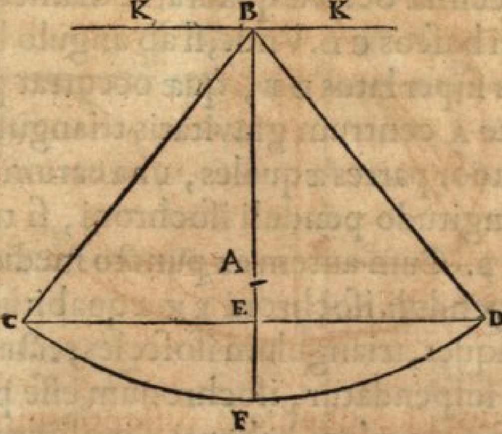
R

De centro Oscillationis.

que parabola ex verticis puncto ſuſpenſa eſt, invenitur penduli iſochroni longitudo $\frac{5}{7}$ axis, atque inſuper $\frac{1}{3}$ lateris recti. Cum vero ex puncto mediæ baſis ſuſpenditur, erit ea longitudo $\frac{4}{7}$ axis, & inſuper $\frac{1}{2}$ lateris recti.

## *Centrum oſcillationis Sectoris circuli.*

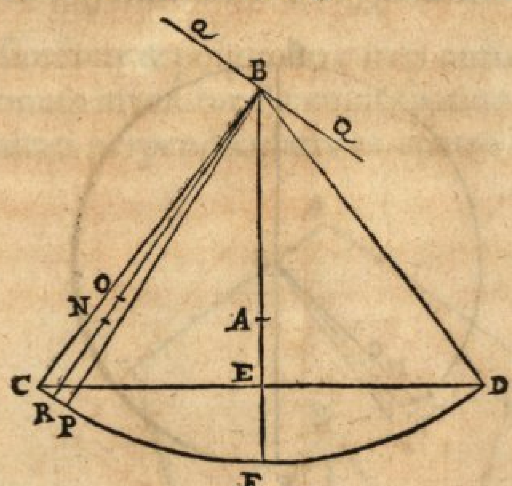
In circuli ſectore B C D, ſi radius B C vocetur $r$: ſemi arcus C F, $p$: ſemiſubtenſa C E, $b$: fit ſpatium applicandum æquale $\frac{1}{2} rr - \frac{4bbrr}{9pp}$, hoc eſt, dimidio quadrati B C, minus quadrato B A; ponendo




A eſſe centrum gravitatis ſectoris. Tunc enim B A $\propto \frac{2br}{3p}$. Si autem ſuſpendatur ſector ex B, centro circuli ſui, fit pendulum ipſi iſochronum $\frac{3pr}{4b}$, hoc eſt, trium quartarum rectæ, quæ ſit ad radium B F ut arcus C F D ad ſubtenſam C D. Hæc autem inveniuntur cognitis ſubcentricis cuneorum; tum illius qui ſuper ſectore toto abſcinditur, plano ducto per B K parallelam ſubtenſæ C D, cujus cunei ſubcentricam ſuper B K invenimus eſſe $\frac{3}{8} r - \frac{3}{8} a + \frac{3pr}{8b}$, vocando $a$ ſinum verſum E F; tum illius qui ſuper dimidio ſectore B F C abſcinditur plano per B F, cujus nempe cunei ſubcentricam ſuper B F invenimus $\frac{3}{8} b - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$.

Sed & alia via, ſectoris centrum oſcillationis, facilius invenitur, quæ eſt hujuſmodi. Intelligatur ſectoris B C D pars minima ſector B C P, qui trianguli loco haberi poteſt. Quadrata autem, à diſtantiis particularum ejus à puncto B, æqualia ſunt quadratis diſtantiarum ab recta B R, bifariam ſectorem dividente, una cum quadratis diſtantiarum ab recta B Q, quæ ipſi B R eſt ad angulos rectos. Sed, horum quadratorum ad illa, ratio quavis data eſt major, quoniam angulus C B P minimus; ideoque illa pro nullis habenda ſunt.

Positâ vero B O duarum tertiarum B R, hoc est, posito O centro gravitatis trianguli B C P; & B N trium quartarum B R; ut nempe N sit centrum gravitatis cunei, super triangulo B C P abscissi plano per B Q. His positis, constat quadrata, à distantiis particularum trianguli B C P ab recta B Q, æquari rectangulo N B O multiplici secundum particularum ejusdem trianguli numerum. Itaque rectangulum N B O, ita multiplex, æquale censendum quadratis distantiarum à puncto B particularum trianguli B C P. Sunt autem quadrata



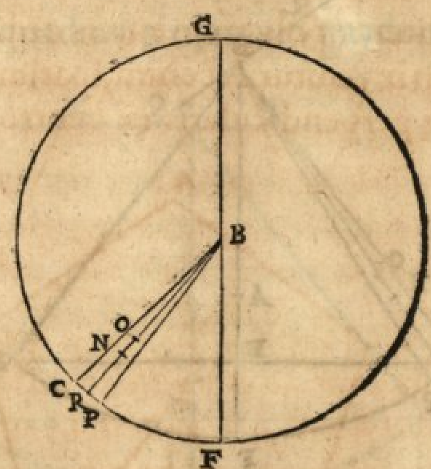

distantiarum harum, ad quadrata distantiarum totius sectoris B C D, sicut sector B C P ad sectorem B C D, hoc est, sicut numerus particularum sectoris B C P, ad numerum particularum sectoris B C D; hoc enim facile intelligitur, eo quod sector B C D dividatur in sectores qualis B C P. Ergo rectangulum N B O, multiplex secundum numerum particularum sectoris B C D, æquale erit quadratis distantiarum particularum ejus à puncto B. Ideoque rectangulum N B O, applicatum ad B A, distantiam inter suspensionem & centrum gravitatis sectoris, dabit longitudinem penduli isochroni, cum sector ex B suspenditur *. Est autem rectangulum N B O $\infty$ $\frac{1}{2}$ $rr$: distantia autem B A, ut jam ante diximus, $\infty$ $\frac{2br}{3p}$. Vnde, facta applicatione, oritur $\frac{3pr}{4b}$, longitudo penduli isochroni, ut ante quoque inventa fuit. *Prop. 17. huj.

*Centrum oscillationis Circuli, aliter quam supra.*

Eodem modo etiam simplicissime, in circulo, centrum oscillationis invenire licet. Sit enim circulus G C F, cujus centrum B; sectorque in eo minimus intelligatur B C P, sicut ante in sectore B C D.

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

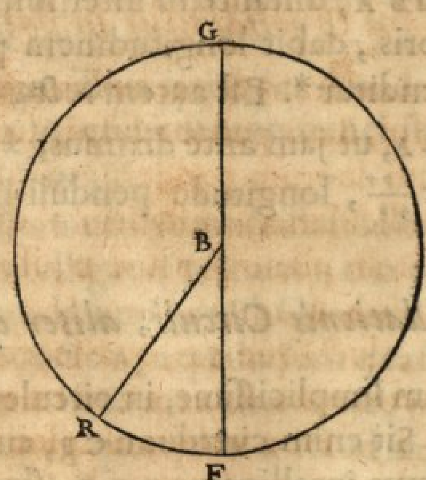
Cum igitur, ſecundum modo expoſita, quadrata, à diſtantiis particularum ſectoris B C P ad centrum B, æquentur rectangulo N B O, hoc eſt, dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum ſectoris ipſius particularum numerum; circulus autem ex ejuſmodi ſectoribus componatur; erunt proinde quadrata, à diſtantiis particularum circuli totius ad centrum B, æqualia dimidio quadrato radii, multiplici ſecundum numerum earundem circuli particularum.




Eſt autem B centrum gravitatis circuli. Ergo dictum dimidium quadratum radii, hic erit ſpatium applicandum diſtantiæ inter ſuſpenſionem & centrum B, ut habeatur intervallum, quo centrum oſcillationis inferius eſt ipſo centro B *. quod & ſupra ita ſe habere oſtendimus.

* Prop. 18. huj.

### *Centrum oſcillationis Peripheriæ circuli.*

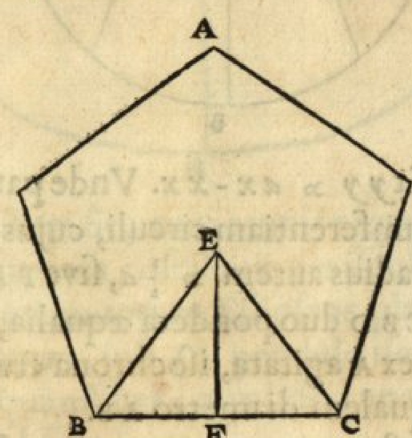



Facilius etiam, centrum oſcillationis circumferentiæ circuli, hoc pacto reperitur. Esto enim circumferentia descripta centro B, radio B R. Quadratum igitur B R, multiplex secundum numerum particularum in quas circumferentia divisa intelligitur, æquatur quadratis à distantiis omnium earum particularum ad centrum B. Quare quadratum B R erit hic spatium applicandum *. Patetque hinc, si suspensio sit ex G, puncto circumferentiæ, penduli isochroni longitudinem æquari diametro G F.

* Prop. 18. huj.

## *Centrum oscillationis Polygonorum ordinatorum.*

Haud absimiliter & polygono cuivis ordinato, ut A B C, pendulum isochronum invenitur. Fit enim, spatium applicandum, æquale semissi quadrati perpendicularis ex centro in latus polygoni, una




cum vigesima quarta parte quadrati lateris. At, si perimetro poligoni pendulum isochronum quæratur, fit spatium applicandum æquale quadrato perpendicularis à centro in latus, cum duodecima parte quadrati lateris.

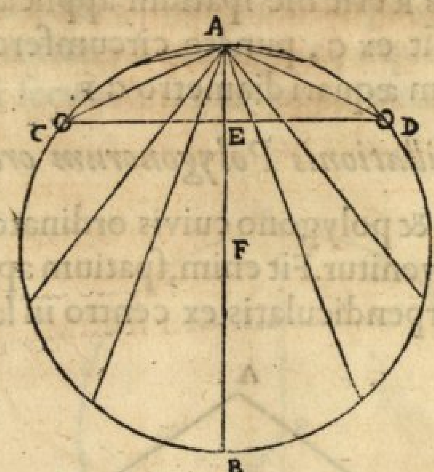
## *Loci plani & solidi usus in hac Theoria.*

Est præterea & Locorum contemplatio in his non injucunda. Vt si propositum sit, dato puncto suspensionis A, & longitudine A B, invenire locum duorum ponderum æqualium C, D, æqualiter ab A & à perpendiculari A B distantium, quæ agitata circa axem in A, perpendicularem plano per A C D, isochrona sint pendulo simplici longitudinis A B.

Ponatur A B ∞ $a$, ductâque C D, quæ secet A B ad angulos rectos in E, sit A E indeterminata ∞ $x$: E C vel E D ∞ $y$. Ergo quadratum A C ∞ $xx + yy$. Hoc vero multiplex secundum numerum particularum ponderum C, D, quæ hic minima intelliguntur, æquatur quadratis distantiarum earundem particularum ab axe

De centro Oscillationis. suspensionis A. Ergo quadratum A C, sive $xx + yy$, applicatum ad distantiam A E, quæ nempe est inter axem suspensionis & centrum gravitatis ponderum C, D, efficiet $\frac{xx+yy}{x}$, longitudinem penduli isochroni *; quam propterea oportet æqualem esse A B sive $a$.

*Prop. 17. huj.



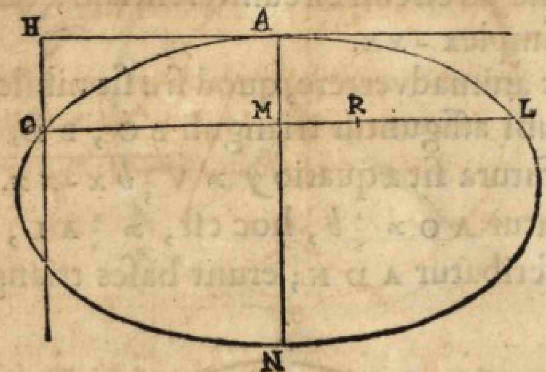

Itaque $\frac{xx+yy}{x} \propto a$. Et $yy \propto ax - xx$. Vnde patet, locum punctorum C & D, esse circumferentiam circuli, cujus centrum F, ubi A B bifariam dividitur, radius autem $\propto \frac{1}{2}a$, sive F A. Ergo, ubicunque in circumferentia A C B D duo pondera æqualia, æqualiter ab A distantia, ponentur, ea, ex A agitata, isochrona erunt pendulo longitudinem habenti æqualem diametro A B.

Atque hinc manifestum quoque, & circumferentiam A C B D, si gravitas ei tribuatur, & quamlibet ejus portionem, æqualiter in A vel B divisam, & ab axe per A suspensam, eidem pendulo A B isochronam esse.

Loci vero solidi exemplum esto hujusmodi. Sit A N linea inflexilis sine pondere. Propositumque sit, ad punctum in ea acceptum, ut M, affigere ipsi ad angulos rectos lineam, seu virgam, pondere præditam O M L, ad M bifariam divisam, cujus in latus agitatæ oscillationes, ex suspensione A, isochronæ sint pendulo simplici longitudinis A N.

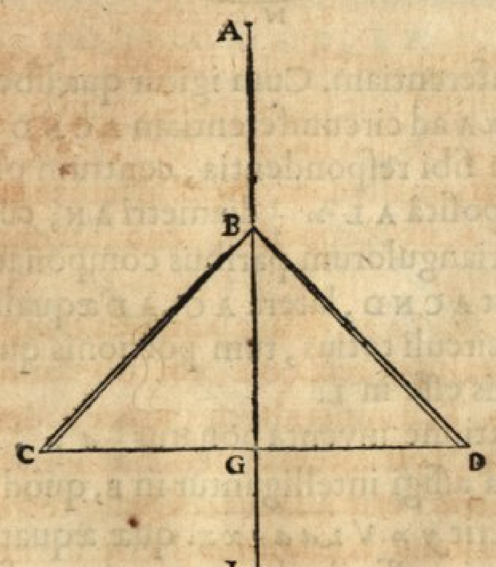
Ducatur O H parallela A N, & A H parallela O M, & sit O R æqualis $\frac{2}{3}$ O L. Itaque cunei super recta O L, abscissi plano per O H ducto, subcentrica erit O R. Sed cunei alterius super eadem O L, abscissi plano per rectam A H, (est autem cuneus hic nihil aliud quam rectangulum) subcentrica erit ipsa A M. Quare rectangulum illud, quod supra Oscillationis vocavimus, erit solum rectangulum O M R. quod nempe, applicatum ad longitudinem A M, dabit distantiam centri oscillationis lineæ O L, ex A suspensæ, infra punctum M.

Sit jam A N $\infty$ $a$: AM $\infty$ $x$: M O vel M L $\infty$ $y$. Est ergo rectangulum O M R $\infty$ $\frac{1}{3}yy$. quo applicato ad A M, fit $\frac{1yy}{3x}$. quæ longitudo itaque ipsi M N æqualis esse debebit, cum velimus centrum oscillationis virgæ O L esse in N. Fit ergo æquatio $\frac{1yy}{3x} + x \infty a$. Vnde $y \infty \sqrt{3ax - 3xx}$. Quod significat puncta O & L esse ad Ellipsin, cujus axis minor A N; latus rectum vero, secundum quod possunt ordinatim ad axem hunc applicatæ, ipsius A N triplum.




Hinc vero manifestum fit, cum omnis virga ipsi O L parallela, & ad Ellipsin hanc terminata, oscillationes isochronas habeat pendulo simplici A N, etiam totum Ellipseos planum, ex A suspensum & in latus agitatum, ipsi A N pendulo isochronum fore. Sed & partem Ellipseos quamlibet, quæ lineis una vel duabus, ad A N perpendicularibus, abscindetur.

Cæterum adscribemus & aliud loci plani exemplum, in quo nonnulla notatu digna occurrunt.



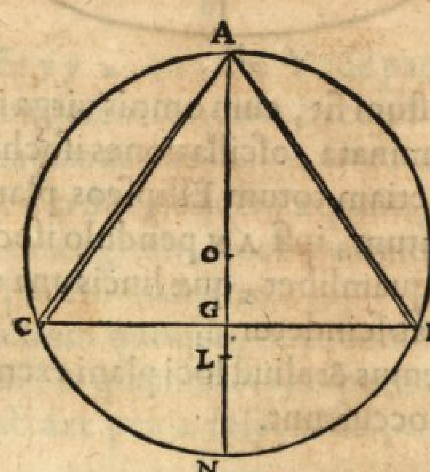

Sit virga A B ponderis expers, suspensa ex A; oporteatque, ad da-

De centro Oscillationis.

tum in ea punctum B, affigere triangula duo paria, & paribus angulis ab axe A B recedentia, quorum anguli ad B minimi, sive infinite parvi existimandi, quæque, ita suspensa ab A, oscillationes isochronas faciant pendulo simplici datæ longitudinis A L.

Hic, ducta C G perpendiculari in B G, & ponendo A B $\propto a$; A L $\propto b$; B G $\propto x$; C G $\propto y$: invenitur æquatio $y \propto \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$. ex qua patet, bases triangulorum C, & D, quæ bases hic ut puncta considerantur, esse ad circuli circumferentiam; quia nempe habetur terminus simplex $-xx$.

Licet autem hic animadvertere, quod si $a$ sit nihilo æqualis, hoc est, si punctum, ubi affiguntur trianguli B C, B D, sit idem cum puncto A; tum futura sit æquatio $y \propto \sqrt{\frac{4}{3}bx - xx}$. Ac proinde, hoc casu, si sumatur A O $\propto \frac{2}{3}b$, hoc est, $\propto \frac{2}{3}$ A L, centroque O per A circulus describatur A D N; erunt bases triangulorum A C,

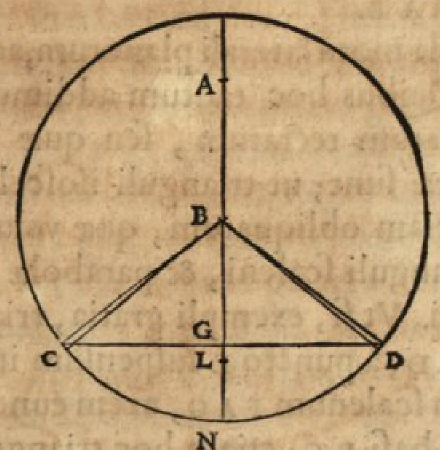



A D, ad illius circumferentiam. Cum igitur quælibet duo triangula acutissima, quæ ex A ad circumferentiam A C N D constituuntur, magnitudine & situ sibi respondentia, centrum oscillationis habeant punctum L, posita A L $\propto \frac{3}{4}$ diametri A N; cumque circulus totus ex ejusmodi triangulorum paribus componatur; uti & portio ejus quælibet, ut A C N D, latera A C, A D æqualia habens; manifestum est, tum circuli totius, tum portionis qualem diximus, centrum oscillationis esse in L.

Rursus, si in æquatione inventa ponatur $\frac{8}{3}a \propto \frac{4}{3}b$, seu $2a \propto b$; hoc est, si triangula affigi intelligantur in B, quod longitudinem A L secet bifariam, erit $y \propto \sqrt{2aa - xx}$. quæ æquatio docet, quod si centro B, radio qui possit duplum B A, circumferentia describatur, ea erit locus basium triangulorum acutissimorum B C, B D,

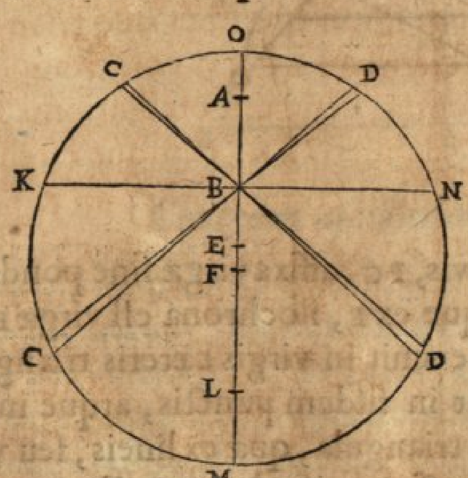
quorum

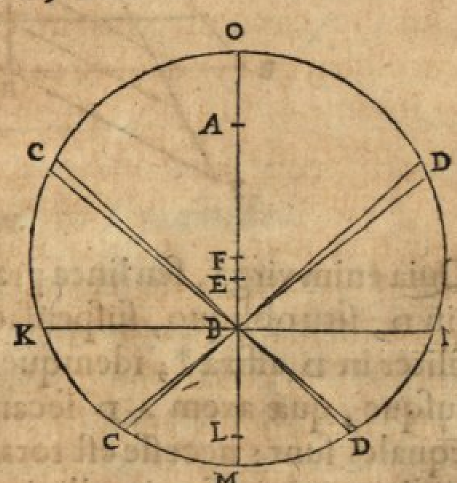
quorum nempe, ex A suspensorum, centrum oscillationis erit L punctum. Cumque & circulus totus, & sector ejus quilibet, axem habens in recta A L, ex hujusmodi triangulorum paribus componatur, manifestum est & horum, ex A suspensorum, centrum oscillationis esse punctum L.




Adeoque quilibet circuli sector, suspensus à puncto quod distet, à centro circuli sui, semisse lateris quadrati circulo inscripti, pendulum isochronum habebit toti eidem lateri æquale. Atque ita, hoc uno casu, absque posita dimensione arcus, pendulum sectori isochronum invenitur.

Porro, ad universalem constructionem æquationis primæ, $y \;\infty\; \sqrt{2ab - 2aa - \frac{8}{3}ax + \frac{4}{3}bx - xx}$, dividatur A L bifariam in E, & adponatur ad B E pars sui tertia E F; eritque F centrum describendi circuli; radius autem F O æqualis sumendus ei, quæ potest duplum differentiæ quadratorum A E, E F.



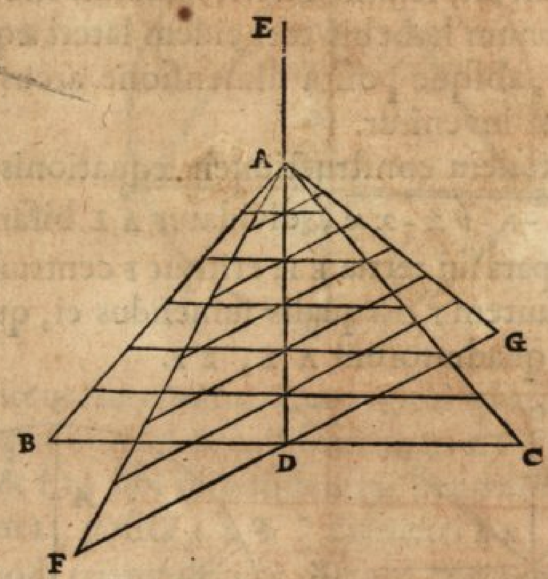




Si itaque, ex puncto B, ad descriptam circumferentiam triangula duo parii acutissima constituantur, ut B C, B D; illorum, ex A

DE CENTRO OSCILLATIONIS.

ſuſpenſorum, centrum oſcillationis erit L. Quare & portionis cujuſlibet deſcripti circuli, cujus portionis vertex ſit in B, axis vero in recta AL, quales ſunt utraque CBD; poſita ſuſpenſione ex A; centrum oſcillationis idem punctum L eſſe conſtat. Atque adeo etiam circuli ſegmentorum KON, KMN, quæ facit recta KBN perpendicularis ad AB.

Et hæc quidem de motu laterali planorum, ac linearum, animadvertiſſe ſufficiat. Quibus hoc tantum addimus; inventis centris oſcillationis figurarum rectarum, ſeu quæ æqualiter ad axem utrinque conſtitutæ ſunt; ut trianguli iſoſcelis, vel parabolicæ ſectionis rectæ; etiam obliquarum, quæ velut luxatione illarum efficiuntur, ut trianguli ſcaleni, & parabolæ non rectæ, centra oſcillationis haberi. Ut ſi, exempli gratia, triangulum BAC iſoſceles, cujus axis AD, à puncto E ſuſpenſum intelligatur; ſit vero & aliud triangulum ſcalenum FAG, axem eundem habens AD, & baſin FG æqualem baſi BC; etiam hoc triangulum, ex E ſuſpenſum, priori BAC iſochronum eſſe dico.



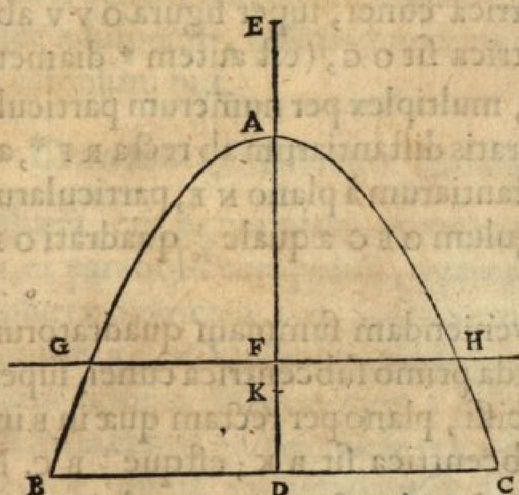

Quia enim virga, ſeu linea gravis, FG, affixa virgæ ſine pondere ED in D, ſitu obliquo, ſuſpenſaque ex E, iſochrona eſt virgæ BC, ſimiliter in D affixæ*; idemque evenit in virgis cæteris trianguli utriuſque, quæ axem AD ſecant in iiſdem punctis, atque inter ſe æquales ſunt: neceſſe eſt tota triangula, quæ ex lineis, ſeu virgis iiſdem compoſita intelligi poſſunt, iſochrona eſſe. In aliis figuris ſimilis eſt demonſtratio.

*Prop. 16. huj.

## PROPOSITIO XXII.

*Quomodo, in ſolidis figuris, oſcillationis centra inveniantur.*

In ſolidis porro figuris facile quoque, per ante demonſtrata, centrum oſcillationis invenire licebit. Si enim ſit ſolidum A B C, ſuſpenſum ab axe, qui, per punctum E, intelligitur hujus paginæ plano ad rectos angulos; centrum autem gravitatis ſit F: ductis jam per F planis E F D, G F H, quorum poſterius ſit horizonti parallelum, alterum vero per axem E tranſeat; inventiſque, per propoſitionem 14, ſummis quadratorum à diſtantiis particularum ſolidi A B C à plano G F H, itemque à plano E F D; hoc eſt, inventis rectangulis utriſque, quæ, multiplicia ſecundum numerum dictarum particularum, æqualia ſint dictis quadratorum ſummis; rectangula hæc applicata ad diſtantiam E F, qua nempe axis ſuſpenſionis diſtat à centro gravitatis, dabunt intervallum F K, quo centrum agitationis K inferius eſt centro gravitatis F. Hoc enim patet ex propoſitione 18. Dabimus autem & horum exempla aliquot.

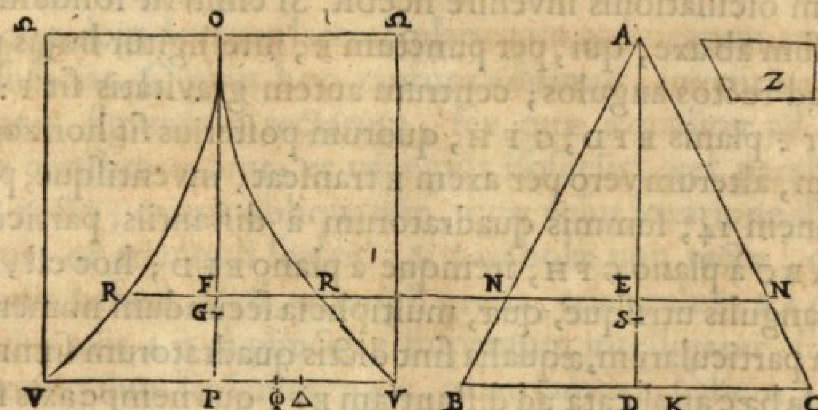



*Centrum oſcillationis in Pyramide.*

Sit primum A B C pyramis, verticem habens A, axem A D, baſin vero quadratum, cujus latus B C. ponaturque agitari circa axem qui, per verticem A, ſit hujus paginæ plano ad angulos rectos.

Hic figura plana proportionalis O V V, à latere adponenda, ſecundum propoſitionem 14, conſtabit ex reſiduis parabolicis O P V, quæ nempe ſuperſunt, cum, à rectangulis Ω P, auferuntur ſemiparabolæ O V Ω, verticem habentes O.

Sicut enim inter se sectiones pyramidis B C, N N, ita quoque rectæ V V, R R, ipsis in figura plana respondentes. & sicut centrum gravitatis E distat, à vertice pyramidis, tribus quartis axis A D, ita quoque centrum gravitatis F, figuræ O V V, distabit tribus quartis diametri O P à vertice O.




Intellecto porro horizontali plano N E, per centrum gravitatis pyramidis A B C, quod idem figuram O V V secet secundum R F; inventâque subcentricâ cunei, super figura O V V abscissi plano per O Ω, quæ subcentrica sit O G, (est autem $\frac{4}{5}$ diametri O P) erit rectangulum O F G, multiplex per numerum particularum figuræ O V V, æquale quadratis distantiarum ab recta R F *, ac proinde quoque quadratis distantiarum à plano N E, particularum solidi A B C. Fit autem rectangulum O F G æquale $\frac{3}{80}$ quadrati O P, vel quadrati A D.

* Prop.10.huj.

Deinde, ad inveniendam summam quadratorum à distantiis à plano A D, noscenda primo subcentrica cunei, super quadrata basi pyramidis B C abscissi, plano per rectam quæ in B intelligitur axi A parallela; quæ subcentrica sit B K; estque $\frac{2}{3}$ B C. Noscenda item distantia centr. gr. dimidiæ figuræ O P V ab O P; quæ sit Φ P; estque $\frac{3}{10}$ P V. Inde, divisâ bifariam P V in Δ, si fiat ut Δ P ad P Φ, hoc est, ut 5 ad 3, ita rectangulum B D K, quod est $\frac{1}{12}$ quadrati B C, ad aliud spatium Z; erit hoc, multiplex secundum numerum particularum solidi A B C, æquale quadratis distantiarum à plano A D *. Apparet autem, fieri spatium Z æquale $\frac{1}{20}$ quadrati B C.

* Prop.15.huj

Itaque, totum spatium applicandum, æquatur hic $\frac{3}{80}$ quadrati A D, cum $\frac{1}{20}$ quadrati B C. Unde, si suspensio, ut hic, posita fuerit in A, vertice pyramidis, ideoque distantia, ad quam applicatio facienda, A E æqualis $\frac{3}{4}$ A D; fiet hinc E S, intervallum quo centrum agitationis inferius eſt centro gravitatis, æquale $\frac{1}{20}$ A D, atque inſuper $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. ſive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, præter dictam $\frac{1}{15}$ tertiæ proportionalis. De centro oscillationis.

## *Centrum oſcillationis Coni.*

Quod ſi A B C conus fuerit, omnia eodem modo ſe habebunt, niſi quod ſpatium Z hic ſit æquale rectangulo Δ P Φ *, hoc eſt $\frac{3}{20}$ quadrati P V vel B D, ſive $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Quare, totum ſpatium appplicandum, in cono erit $\frac{3}{80}$ quadrati A D, una cum $\frac{3}{80}$ quadrati B C. Ac proinde, poſita ſuſpenſione ex vertice A, fiet E S, qua centrum agitationis inferius eſt centro gravitatis, æqualis $\frac{1}{20}$ A D, & $\frac{1}{10}$ tertiæ proportionalis duabus A D, B C. ſive tota A S æqualis $\frac{4}{5}$ A D, una cum $\frac{1}{5}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B. Atque hinc manifeſtum eſt, ſi A D, D B æquales ſint, hoc eſt, ſi conus A B C ſit rectangulus, fieri A S æqualem axi A D.

* Prop. 15. huj.

Sequitur quoque porro, ex propoſitione 20, conum hunc rectangulum, ſi ex D centro baſeos ſuſpendatur, iſochronum fore ſibi ipſi ex vertice A ſuſpenſo, quemadmodum & de triangulo rectangulo ſupra oſtenſum fuit.

## *Centrum oſcillationis Sphæræ.*

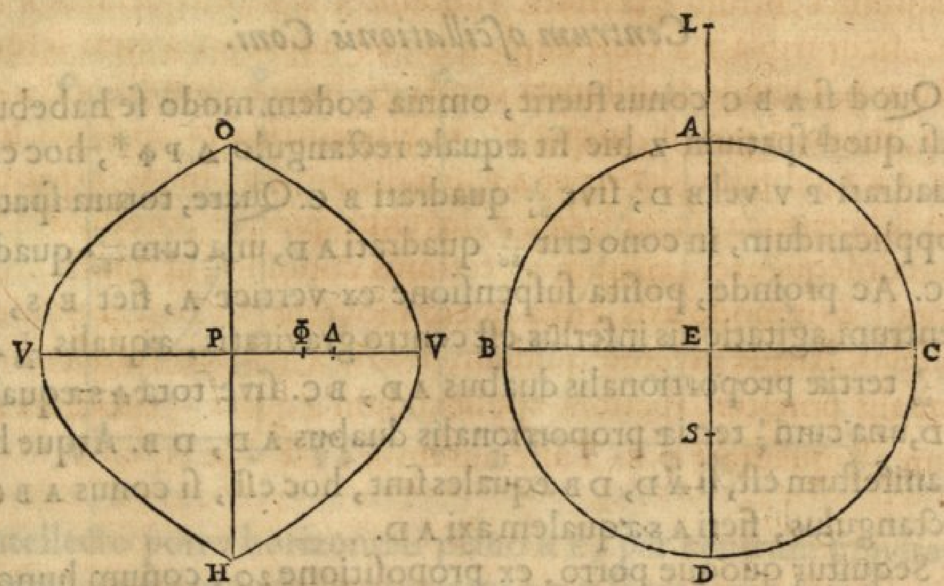
Si A B C ſit ſphæra, erit figura plana proportionalis, à latere adponenda, O V H, ex parabolis compoſita, quarum baſis communis O H, æqualis ſphæræ diametro A D. Sectâ vero ſpherâ planis per centrum E, quorum B C ſit horizonti parallelum, A D vero verticale: ut inveniatur ſumma quadratorum à diſtantiis à plano A D, noſcenda eſt diſtantia centri gr. parabolæ O V H ab O H, quæ ſit Φ P, eſtque $\frac{2}{5}$ V P. Deinde, diviſâ P V bifariam in Δ, conſtat rectangulum Δ P Φ, multiplex per numerum particularum ſpheræ A B C, æquari quadratis diſtantiarum à plano A D *. Eſt autem rectangulum Δ P Φ æquale $\frac{1}{5}$ quadrati P V, vel quadrati B E.

* Prop. 15. in fine.

Atqui, quadrata diſtantiarum à plano B C, æqualia eſſe liquet quadratis diſtantiarum à plano A D, ac proinde eidem rectangulo Δ P Φ, multiplici per dictum particularum numerum. Ergo ſpatium applicandum, in ſphera A B C, erit duplum rectanguli Δ P Φ; ideoque æquale $\frac{2}{5}$ quadrati à radio E B.

Itaque, ſi ſphera ſuſpenſa ſit ex puncto in ſuperficie ſua A, erit

ES, à centro sphæræ E ad centrum agitationis S, æqualis $\frac{2}{5}$ semidiametri AE. Totaque AS æqualis $\frac{7}{10}$ diametri AD. Si vero ex puncto alio, ut L, sphera suspensa sit; erit ES æqualis $\frac{2}{5}$ tertiæ proportionalis duabus LE, EB.




*Centrum oscillationis Cylindri.*

In cylindro, invenimus spatium applicandum æquari $\frac{1}{12}$ quadrati altitudinis, una cum $\frac{1}{4}$ quadrati à semidiametro basis. Vnde si cylindrus à centro basis superioris suspendatur, fit longitudo penduli isochroni æqualis $\frac{2}{3}$ altitudinis, una cum semisse ejus, quæ sit ad semidiametrum basis ut hæc ad altitudinem.

*Centrum oscillationis Conoidis Parabolici.*

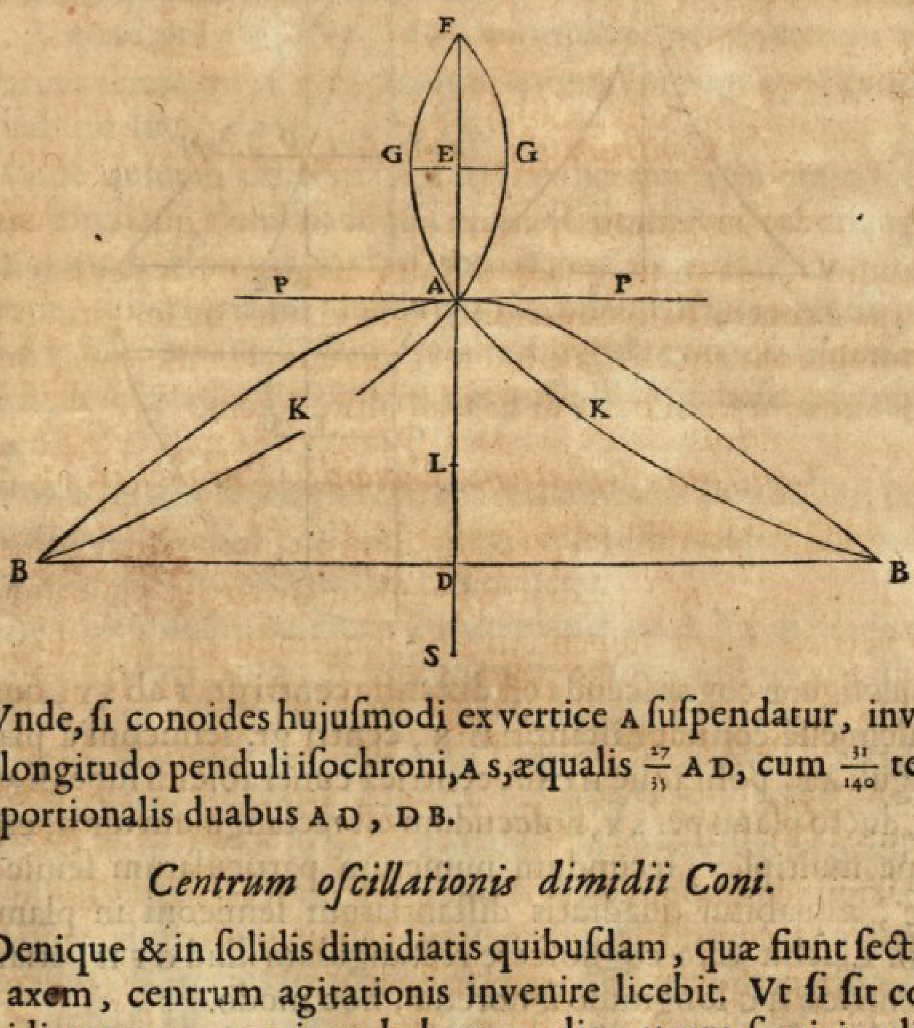
In conoide parabolico, rectangulum oscillationis est $\frac{1}{18}$ quadrati altitudinis, cum $\frac{1}{6}$ quadrati à semidiametro basis. Vnde, si à puncto verticis fuerit suspensum, fit longitudo penduli isochroni $\frac{3}{4}$ axis, cum $\frac{1}{4}$ ejus quæ sit ad semidiametrum basis, sicut hæc ad axem, id est, una cum $\frac{1}{4}$ lateris recti parabolæ genitricis.

*Centrum oscillationis Conoidis Hyperbolici.*

In conoide quoque hyperbolico centrum oscillationis inveniri potest. Si enim, exempli gratia, sit conoides cujus sectio per axem, hyperbola BAB; axem habens AD, latus transversum AF: erit figura plana ipsi proportionalis BKAKB, contenta basi BB,

& parabolicæ lineæ portionibus similibus A K B, quæ parabolæ per verticem A transeunt, axemque habent G E, dividentem bifariam latus transversum A F, ac parallelum basi B B. Et hujus quidem figuræ B K A K B, centrum gravitatis L, tantum distat à vertice A, quantum centrum gravitatis conoidis A B B; estque axis A D ad A L, sicut tripla F A cum dupla A D, ad duplam F A cum sesquialtera A D. Deinde & distantia centri gr. figuræ dimidiæ A D B K, ab A D, inveniri potest, atque etiam subcentrica cunei super figura B K A K B, abscissi plano per A P, parallelam B B; hujus inquam cunei subcentrica, super ipsa A P, inveniri quoque potest; atque ex his consequenter centrum agitationis conoidis, in quavis suspensione; dummodo axis, circa quem movetur, sit basi conoidis parallelus. Atque invenio quidem, si axis A D lateri transverso A F æqualis ponatur, spatium applicandum æquari $\frac{1}{10}$ quadrati A D, cum $\frac{31}{100}$ quadrati D B. Tunc autem A L est $\frac{7}{10}$ A D.

DE CENTRO OSCILLATIONIS




Vnde, si conoides hujusmodi ex vertice A suspendatur, invenitur longitudo penduli isochroni, A S, æqualis $\frac{27}{35}$ A D, cum $\frac{31}{140}$ tertiæ proportionalis duabus A D, D B.

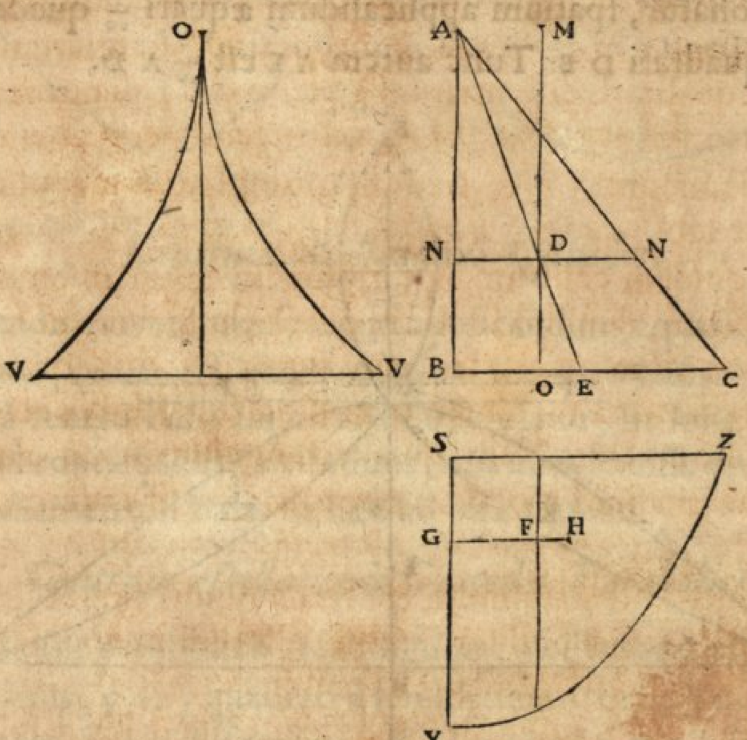
*Centrum oscillationis dimidii Coni.*

Denique & in solidis dimidiatis quibusdam, quæ fiunt sectione per axem, centrum agitationis invenire licebit. Vt si sit conus dimidiatus A B C, verticem habens A, diametrum semicirculi ba-

De centro Oscillationis.

ſeos B C: ejus quidem centrum gravitatis D notum eſt, quoniam A D ſunt $\frac{3}{4}$ rectæ A E, ita dividentis B C in E, ut, ſicut quadrans circumferentiæ circuli ad radium, ita ſint $\frac{2}{3}$ C B ad B E. Tunc enim E eſt centrum gravitatis ſemicirculi baſeos, ideoque in A E centra gravitatis omnium ſegmentorum ſemiconi A B D, baſi parallelorum.

Et figura quidem porro proportionalis à latere ponenda, O V V, eadem eſt quæ in cono toto ſupra deſcripta fuit: per quam nempe invenietur ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum ſemiconi à plano horizontali N D, per centrum gravitatis ducto. Verum quadrata diſtantiarum, à plano verticali M D O, ut colligantur, altera quoque figura proportionalis S Y Z, ſicut ſupra prop. 14. adhibenda eſt, cujus nempe ſectiones verticales, exhibeant lineas proportionales ſectionibus ſibi reſpondentibus in ſemicono A B C.




& hujus figuræ cognoſcenda eſt diſtantia centri gr. F ab S Y, quam æqualem eſſe conſtat diſtantiæ D N, centri gr. ſemiconi à plano trianguli A B. poſitâque H G ſubcentricâ cunei abſciſſi ſuper figura S Z Y, ducto plano per S Y, noſcendum eſt rectangulum G F H, cujus nempe multiplex, ſecundum numerum particularum ſemiconi A B C, æquabitur quadratis diſtantiarum ſemiconi in planum M D O. Licebit vero cognoſcere rectangulum illud G F H, etiamſi ſubcentricæ H G longitudo ignoretur, hoc modo.

Diximus ſupra, cum de cono ageremus, quadrata diſtantiarum à plano