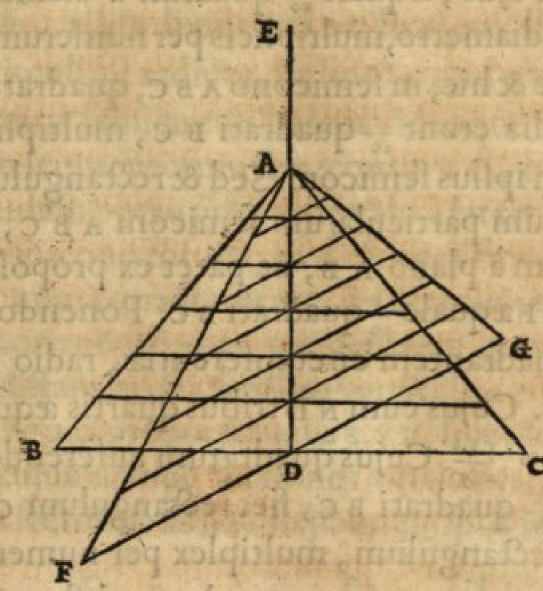
à plano per axem ejus, æquari $\frac{3}{80}$ quadrati à diametro basis, sive $\frac{3}{20}$ quadrati à semidiametro, multiplicis per numerum particularum coni totius. Vnde & hic, in semicono A B C, quadrata distantiarum à plano A B æqualia erunt $\frac{3}{20}$ quadrati B C, multiplicis per numerum particularum ipsius semiconi. Sed & rectangulum H G F, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano A B, ut patet ex propositione 9. Ergo rectangulum H G F æquale $\frac{3}{20}$ quadrati B C. Ponendo autem A B $= a$; B C $= b$; & quadrantem circumferentiæ, radio B C descriptæ, $= q$; fit E B $= \frac{1bb}{3q}$. Cujus cum N D tribus quartis æquetur, fiet proinde N D, sive G F $= \frac{1bb}{4q}$. Cujus quadratum auferendo à rectangulo H G F, quod erat $\frac{3}{20}$ quadrati B C, fiet rectangulum G F H $= \frac{3}{20}bb - \frac{1b^4}{16qq}$. Hoc autem rectangulum, multiplex per numerum particularum semiconi A B C, æquatur quadratis distantiarum à plano M D O. At quadratis distantiarum à plano M D æquantur, ut in cono, $\frac{3}{80}$ quadrati A B, sive $\frac{3}{80}aa$, multiplices per numerum particularum semiconi A B C. Itaque, totum spatium applicandum, æquabitur hic $\frac{3}{80}aa + \frac{3}{20}bb - \frac{1b^4}{16qq}$.

Vnde quidem centrum agitationis invenitur in omni suspensione semiconi, dummodo ab axe qui sit parallelus basi trianguli à sectione A B. Notandum vero, cum figura S Z Y sit ignotæ prorsus naturæ, subcentricam tamen G H, cunei super ipsa abscissi plano per S Y, hinc inveniri. Nam, quia rectangulum H G F æquale erat $\frac{3}{20}bb$, sive quadrati B C, & G F æqualis $\frac{1bb}{4q}$, fit inde G H æqualis $\frac{3}{5}q$.

Porro, etiam semicylindri, & semiconoidis parabolici, centra agitationis inveniri possunt, atque aliorum insuper semisolidorum; quæ aliis investiganda relinquimus.

Quemadmodum autem in figuris planis, ita & hic in solidis figuris locum habet, quod de obliquarum centris agitationis illic diximus, quæ veluti luxatione rectarum constituuntur, quarum centra oscillationis non differunt à centris oscillationis rectarum. Sic, si coni duo fuerint A B C, A F G, alter rectus, alter scalenus; quorum & diametri & bases æquales; hi ex vertice suspensi, vel à quibuscunque axibus, æqualiter à centris eorum gravitatis distantibus, isochroni erunt; dummodo axis, unde conus scalenus suspensus est, rectus sit ad planum trianguli per diametrum, quod planum basi est ad angulos rectos.

De centro Oscillationis.

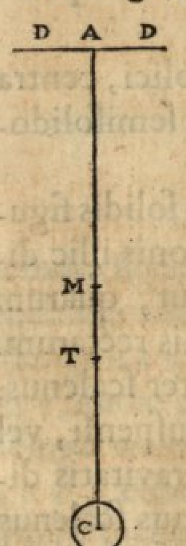


PROPOSITIO XXIII.

Horologiorum motum temperare, addito pondere exiguo ſecundario, quod ſuper virga penduli, certa ratione diviſa, ſurſum deorſumque moveri poſſit.

Vt hoc expediamus, primo penduli ipſius, ex virga gravitate prædita, & appenſo parte ima pondere, compoſiti, centrum oſcillationis inveniendum eſt.

Sit virga, cum appenſo pondere, A C, cujus longitudo dicatur *a*.



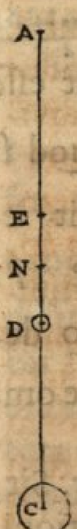
Intelligantur autem, tum virga ipſa, tum pondus appenſum C, in particulas minimas æquales diviſa, earumque particularum virga habeat numerum *b*, pondus vero C numerum *c*, ponendo nempe *b* ad *c*, ſicut gravitas virgæ ad gravitatem appenſi ponderis. Longitudo igitur penduli ſimplicis, dato iſochroni, habebitur, ſi ſumma quadratorum à diſtantiis particularum omnium à puncto ſuſpenſionis A, dividatur per ſummam earundem diſtantiarum *. Secetur A C bifariam in M; tum vero in T, ut A T ſit dupla T C. Quia ergo M eſt centrum gravitatis lineæ A C, & A T ſubcentrica cunei ſuper ipſa abſciſſi plano per A D, perpendicularem ad A C; qui cuneus hîc revera triangulum eſt; erit ſumma quadratorum, à diſtantiis particularum virgæ à puncto A,

* Prop 6. huj. in fine.

æqualis rectangulo A M T, una cum quadrato A M; hoc eſt, rectangulo T A M, multiplici ſecundum numerum particularum b; hoc eſt, $\frac{1}{3} aab$; quia M A eſt $\frac{1}{2} a$, & T A $\frac{2}{3} a$, ac proinde rectangulum T A M $\infty \frac{1}{3} aa$. Summa vero quadratorum, à diſtantiis particularum ponderis C ab eodem puncto A, æquabitur quadrato A C, multiplici ſecundum numerum particularum ipſius ponderis; hoc eſt, aac. Adeoque ſumma quadratorum omnium, tam à diſtantiis particularum virgæ, quam ponderis C, erit $\frac{1}{3} aab + aac$.

De centro Oscillationis.

Porro, diſtantiæ omnes particularum virgæ A C à puncto A, æquantur $\frac{1}{2} ba$; longitudini ſcilicet virgæ ipſius, quæ eſt a, multiplici ſecundum ſemiſſem numeri particularum quas continet. Et diſtantiæ omnes particularum ponderis C, ab eodem puncto A, ſunt ac. Ita ut ſumma utrarumque diſtantiarum ſit $\frac{1}{2} ab + ac$. Per quam dividendo ſummam quadratorum prius inventam, $\frac{1}{2} aab + aac$, fit $\frac{\frac{1}{3} aab + aac}{\frac{1}{2} ab + ac}$ ſive $\frac{\frac{1}{3} ab + ac}{\frac{1}{2} b + c}$, longitudo penduli iſochroni. Quæ itaque habebitur, ſi fiat, ut dimidia gravitas virgæ, una cum gravitate appenſi ponderis, ad trientem gravitatis virgæ, una cum gravitate ejuſdem appenſi ponderis, ita longitudo A C ad aliam. Oportet autem ſumere longitudinem A C, à puncto ſuſpenſionis A ad centrum gravitatis ponderis C; cum magnitudinis ejus ratio hic non habeatur, ac veluti minimum conſideretur.



Quod ſi jam, præter pondus C, alterum inſuper D virgæ inhærere intelligatur, cujus gravitas, ſeu particularum numerus ſit d: diſtantia vero A D ſit f. Vt pendulum ſimplex huic ita compoſito iſochronum inveniatur, addenda ſunt ad ſummam ſuperiorem quadratorum, quadrata diſtantiarum particularum ponderis D à puncto A, quæ quadrata apparet eſſe dff. Adeo ut ſumma omnium jam ſit futura $\frac{1}{3} aab + aac + ffd$. Item, ad ſummam diſtantiarum, addendæ diſtantiæ particularum ponderis D, quæ faciunt df. Ac ſumma proinde diſtantiarum omnium erit $\frac{1}{2} ba + ca + df$; per quam dividenda eſt iſta quadratorum ſumma, & fit $\frac{\frac{1}{3} aab + aac + ffd}{\frac{1}{2} ab + ac + fd}$, longitudo penduli iſochroni.

Quod ſi vero, hæc longitudo penduli iſochroni, datæ æqualis poſtuletur, quæ ſit p, & reliqua omnia quæ prius data ſint, præter distantiam A D seu f, quæ determinat locum ponderis D: sitque invenienda hæc distantia, id fiet hoc modo. Nempe, cum postuletur $\frac{\frac{1}{3}\,aab+aac+ffd}{\frac{1}{2}\,ab+ac+fd}$ æquale p, orietur ex hac æquatione $ff \propto pf + \frac{\frac{1}{2}\,abp+cap-\frac{1}{3}\,aab-aac}{d}$. Et $f \propto \frac{1}{2}p +$ vel $- \sqrt{\frac{1}{4}pp+\frac{\frac{1}{2}\,abp+cap-\frac{1}{3}\,aab-aac}{d}}$. Vbi animadvertendum, duas esse veras radices, si $\frac{1}{2}\,abp+cap$ minus sit quam $\frac{1}{3}\,aab+aac$; hoc est, si longitudo p minor sit quam $\frac{\frac{1}{3}\,ab+ac}{\frac{1}{2}\,b+c}$, quæ antea inventa fuit longitudo penduli isochroni, sive distantia centri oscillationis à suspensione, in pendulo composito ex virga A C & pondere C.

Vnde patet, si velimus efficere, ut, applicato pondere D, acceleretur penduli motus; posse duobus locis, inter A & C, illud disponi, quorum utrolibet eadem celeritas pendulo concilietur: velut in D vel E. Quæ loca æqualiter distabunt à puncto N, quod abest ab A, semisse longitudinis p, hoc est, semisse penduli simplicis, cui compositum hoc isochronum postulabatur. Apparet autem, quando hæc longitudo p tantum exiguo minor ponitur quam A C, etiam punctum N exiguo superius esse puncto medio virgæ A C.

Porro, ex æquatione superiori, $f \propto \frac{1}{2}p +$ vel $- \sqrt{\frac{1}{4}pp+\frac{\frac{1}{2}\,abp+acp-\frac{1}{3}\,aab-aac}{d}}$ habetur determinatio longitudinis p. Patet enim, $\frac{1}{4}pp+\frac{\frac{1}{2}\,abp+acp}{d}$ non minus esse debere quam $\frac{\frac{1}{3}\,aab-aac}{d}$. Vnde non debebit esse minor quam $\frac{a}{d}\sqrt{\frac{4}{3}\,bd+4cd+bb+4bc+4cc}-\frac{ab-2ac}{d}$. Quod si p æquetur huic quantitati, hoc est, si $\frac{1}{4}pp+\frac{\frac{1}{2}\,abp+acp}{d}$ fuerit æquale $\frac{\frac{1}{3}\,aab-aac}{d}$, erit jam, in eadem superiori æquatione, $f \propto \frac{1}{2}p$, hoc est, $\frac{a}{2d}\sqrt{\frac{4}{3}\,bd+4cd+bb+4bc+4cc}-\frac{ab-2ac}{2d}$. Quo determinatur distantia ponderis D à puncto A, ex qua maxime omnium acceleret motum penduli.

Atque hæc ad horologiorum usum sic porro adhibentur. Sit, exempli gratia, pendulum horologii, quod singulis oscillationibus scrupula secunda notet. Virgæ autem gravitas sit $\frac{1}{50}$ gravitatis appensi ponderis in imo pendulo: &, præter hoc, sit aliud exiguum pondus mobile secundum virgæ longitudinem, cujus gravitas eadem ponatur quæ ipsius virgæ. Quæritur jam, quo loco hoc virgæ imponendum, ut uno scrupulo primo acceleretur horologii motus, spatio 24 horarum. Item, ubi collocandum, ut duorum scrupulorum primorum sit acceleratio; item, ut trium, quatuor, atque ita porro.

Ductis viginti quatuor horis sexagies, fiunt 1440, quot nempe scrupula prima una die continentur. Ex his unum aufer, quando unius scrupuli acceleratio quæritur: supersunt 1439. Ratio autem 1440 ad 1439 duplicata, proxime est ea quæ 1440 ad 1438. Ergo, si penduli simplicis, secunda scrupula notantis, longitudo divisa intelligatur in partes æquales 1440, earumque 1438 alii pendulo tribuantur, hoc præcedet alterum illud, in 24 horis, uno scrupulo primo. Adeo ut hic p valeat partes 1438.

Quia autem pendulum horologii, ex virga metallica & pondere appenso compositum, isochronum ponitur pendulo simplici partium 1440; invenienda primum est virgæ illius longitudo, ex æquatione superius posita. Erat nempe $\frac{\frac{1}{3}ab + ac}{\frac{1}{2}b + c}$ æquale longitudini penduli simplicis, quod isochronum composito ex virga habente longitudinem a, gravitatem b, & pondere affixo cujus gravitas c. Ergo si longitudo penduli simplicis isochroni dicatur f. Erit $\frac{\frac{1}{2}bf + cf}{\frac{1}{3}b + c} = a$. positoque, ut hic, $c = 50$; $b = 1$; $f = 1440$; fiet $a = 1444\frac{4}{5}$, longitudo virgæ.

Iam, quia erat $f = \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + \frac{\frac{1}{2}abp + acp - \frac{1}{3}aab - aac}{a}}$, fiet $f = \frac{1}{2}p + \text{vel} - \sqrt{\frac{1}{4}pp + 72962p - 105061210}$. Vnde porro, si p sit, uti diximus, partium 1438; invenietur $f = 1331\frac{1}{2}$, qualium nempe f, seu pendulum simplex, secunda scrupula oscillationibus designans, continet 1440. Cujus longitudo si pedum trium statuatur, quos horarios vocavimus, habebit f uncias 33, & 3 unciarum uncias, quas lineas vocant. Vel, auferendo hanc longitudinem f à tota trium pedum longitudine, supererunt unciæ duæ, lineæ 9, à centro oscillationis penduli compositi sursum sumendæ, ut habeatur locus ponderis D, unius scrupuli primi accelerationem præstans tempore 24 horarum. Eodem modo reliquas distantias, quibus virga dividenda est, calculo investigavimus, aliam atque aliam ponendo longitudinem p: easque subjecta tabella exhibe-

De centro Oscillationis.

mus, secundum cujus numeros etiam virga penduli divisa est, quæ superius in descriptione horologii fuit exhibita. Procedunt autem accelerationes diurnæ, ut jam illic advertimus, per 15 scrupula secunda, seu primorum scrupulorum quadrantes. Ex. gr. si, pondere mobili D hærente in parte 73, 4, inveniatur horologium tardius justo incedere, in 24 horis, differentiâ 15 secundorum scrupulorum; oportebit sursum adducere pondus D, usque ad numerum 85, 6, ut corrigatur.

Acceleratio horologii spatio 24 horarum.		Partes, à centro osc. sursum accipiendæ.
Scrup. pr.	*Sec.*	*Lineæ & decimæ linearum pedis horarii.*
0,	15	7, 0
0,	30	15, 2
0,	45	23, 7
1,	0	32, 6
1,	15	41, 9
1,	30	51, 7
1,	45	62, 2
2,	0	73, 4
2,	15	85, 6
2,	30	99, 0
2,	45	114, 1
3,	0	131, 8
3,	15	154, 3
3,	30	192, 6

Centrum oscillationis altius est centro gravitatis C partibus 1, 4.

PROPOSITIO XXIV.

Centri oscillationis rationem haberi non posse, in pendulis inter Cycloides suspensis; & quomodo hinc orta difficultas tollatur.

Si quis, subtili examine, contulerit ea quæ in superioribus, de pendulo inter cycloides suspenso, demonstravimus, cum his quæ ad centrum oscillationis pertinent; videbitur ei deesse aliquid ad perfectam illam, quam præferimus, oscillationum æqualitatem. Ac primo dubitabit, an, ad inveniendum circulum cycloidis genitorem, penduli longitudo accipienda sit à puncto suspensionis ad centrum gravitatis appensi plumbi, an vero ad centrum oscillationis; quod, ab altero illo, sæpe sensibili intervallo distat, atque eo majore, quo major fuerit sphæra aut lens plumbea. Quid enim, si sphæræ diameter quartam, aut tertiam partem, penduli longitudinis æquet? Quod si ad centrum oscillationis illam longitudinem accipiendam dicamus, non tamen expediet quo pacto ea, quæ de centro oscillationis ostensa sunt, conveniant pendulo continue longitudinem suam immutanti, quale illud quod inter cycloides movetur. Posset enim videri, etiam centrum oscillationis mutari, ad singulas diversas longitudines; quod tamen hoc modo intelligendum non est. Res sane explicatu difficillima, si omnimodam ἀκρίβειαν sectemur. Nam in demonstratione temporum æqualium in cycloide, mobile, per eam delatum, veluti punctum gravitate præditum consideravimus. Sed, si ad effectum spectemus, non magni facienda est difficultas hæc; cum ponderis, quo pendulum constat, magnitudo in horologiis tanta non requiratur (etsi quo majus eo melius) ut differentia centrorum gravitatis, & oscillationis, aliquid hic turbare possit. Quod si tamen effugere prorsus has tricas velimus, id ita consequemur, si sphæram lentemve penduli, circa axem suum horizontalem, mobilem efficiamus: axis extrema utrinque, virgæ penduli imæ, inserendo: quæ idcirco ut bifida hac parte sit necesse est. Fit enim hoc modo, ex motus natura, ut eandem perpetuo positionem, respectu horizontalis plani, sphæra penduli servet, atque ita puncta ejus quævis, æque ac centrum ipsum, cycloides easdem percurrant. Unde cessat hic jam centrorum oscillationis consideratio; nec minus perfectam temporum æqualitatem tale pendulum consequitur, quam si puncto unico omnis ejus gravitas contineretur.

De centro Oscillationis.

PROPOSITIO XXV.

De mensuræ universalis, & perpetuæ, constituendæ ratione.

Certa, ac permanens magnitudinum mensura, quæ nullis casibus obnoxia sit, nec temporum injuriis, aut longinquitate aboleri aut corrumpi possit, res est & utilissima, & à multis pridem quæsita. Quæ si priscis temporibus reperta fuisset, non tam perplexæ nunc forent, de pedis Romani, Græci, Hebræique veteris modulo, disceptationes. Hæc vero mensura, Horologii nostri opera, facile constituitur; cum sine illo nequaquam, aut ægre admodum, haberi possit. Etsi enim, simplici pendulorum oscillatione, hoc à quibusdam tentatum fuerit, numerando recursus qui tota cæli conversione continentur, vel parte ejus cognita, per fixarum stellarum distantias, secundum ascensionem rectam; nec certitudo eadem hoc modo, quæ adhibitis horologiis, contingit, & labor longe est molestissimus ac tædiosissimus, propter numerandi solicitudinem. Quia autem, præter horologia, aliquid, ad exactissimam hujus mensuræ inquisitionem, etiam centrorum oscillationis notitia confert; ideo hic demum, post eorum tractationem, hanc determinationem subjicimus.

Aptissima huic rei sunt horologia, quorum oscillationes singulæ secunda scrupula, vel eorum semisses, notant, quæque indicibus etiam, ad ea demonstranda, instructa sunt. Postquam enim, ad mediocrem dierum longitudinem, ejusmodi horologium, fixarum stellarum observationibus, compositum fuerit, methodo illa quam in horologii descriptione ostendimus: aliud pendulum simplex, hoc est, sphæra plumbea, aut alia materia gravi constans, ex tenui filo religata, juxta suspendenda est, motuque exiguo impellenda; ac tantisper producenda, aut contrahenda fili longitudo, donec recursus ejus, per quadrantem horæ, aut semissem, una ferantur cum reciprocationibus penduli horologio aptati. Dixi autem exiguo motu impellendum pendulum, quia oscillationes exiguæ, puta 5 vel 6 partium, satis æqualia tempora habent, magnæ vero non item. Tunc, acceptâ mensurâ distantiæ, à puncto suspensionis ad centrum oscillationis penduli simplicis; eâque, si recursus singuli scrupula secunda valeant, in tres partes divisâ; facient hæ singulæ longitudinem pedis, quem Horarium in superioribus vocavimus: quique, hoc pacto, non solum ubique gentium constitui possit, sed & venturo ævo redintegrari. Adeo ut & moduli pedum omnium aliorum, semel ad hunc proportionibus suis expressi, certò quoque in posterum cognosci possint. Sicut jam supra, pedem Parisiensem ad hunc horarium esse diximus, ut 864 ad 881; quod idem est ac si, posito prius pede Parisiensi, dicamus tribus hujusmodi pedibus, cum octo lineis & dimidia, constitui pendulum simplex, cujus oscillationes scrupulis secundis horariis responsuræ sint. Pes autem Parisiensis ad Rhenanum, quo in patria nostra utuntur, se habet ut 144 ad 139; hoc est, quinque lineis suis diminutus, alterum illum relinquit. Atque ita & hic pes, & alii quilibet, perpetuo duraturas mensuras accipiunt.

Quomodo autem centrum oscillationis in sphæra, ex qualibet

longitudine

De centro Oscillationis.

longitudine suspensa, inveniatur, in superioribus demonstratum est. Nempe, si fiat ut distantia inter punctum suspensionis & sphæræ centrum, ad semidiametrum ejus, ita hæc ad aliam; ejus duas quintas, à centro deorsum acceptas, terminari in quæsito oscillationis centro. Facile autem apparet cur necessaria sit hujus centri consideratio, ad accuratam pedis Horarii constitutionem. Nam, si à puncto suspensionis ad sphæræ centrum distantia accipiatur, sphæræ autem magnitudo non definiatur proportione ad fili longitudinem, non erit certa mensura penduli cujus recursus secunda scrupula metiantur; sed quo major erit ejus sphæra, hoc minor invenietur mensura illa, inter centrum sphæræ & punctum suspensionis intercepta. Quia in isochronis pendulis, centra quidem oscillationis à punctis suspensionum æqualiter distant; amplius autem descendit centrum oscillationis infra centrum sphæræ majoris, quam minoris.

Hinc necesse fuit illis, qui, ante hanc centri oscillatorii determinationem, mensuræ universalis constituendæ rationem inierunt; quod, jam inde à prima Horologii nostri inventione, nobilis illa Societas Regia Anglicana sibi negotium sumpsit, & recentius doctissimus Astronomus Lugdunensis, Gabriel Moutonus; his, inquam, necesse fuit designare globuli suspensi diametrum, vel proportione certa ad fili longitudinem, cujus nempe tricesimam vel aliam partem æquaret; vel mensurâ quadam cognita, ut digiti vel pollicis. Sed hoc posteriore modo, ponitur jam certi aliquid, quod id ipsum est quod quærendum est: etsi scio vix sensibilem errorem fore, dummodo sphæræ istam, quam jam dixi, magnitudinem non multum excedant. Priore autem posset quidem aliquo pacto res explicari; sed ita, ut numerandarum oscillationum labor subeundus sit, calculoque etiam utendum. Quamobrem præstat, centra oscillationis adhibendo, certam rationem sequi, nullisque præter necessitatem legibus obligari. atque hic jam majoribus sphæris quam exiguis potius utendum, quod illæ occursu aëris minus impediantur.

Cæterum, non sphæræ tantum ex filo suspensæ, sed & coni, cylindri, aliaque omnia solida, planaque, quorum centra oscillationis superius exhibuimus, ad hanc mensuram investigandam apta sunt; quoniam, à puncto suspensionis ad centrum oscillationis, certum idemque omnibus isochronis pendulis est intervallum. Neque etiam illa duntaxat horologia, quæ secunda scrupula aut eorum semisses singulis penduli recursibus indicant, ad hæc usur-

De centro Oscillationis.

pare possumus; sed & aliâ quâcunque penduli longitudine instructis propositum obtinebitur, dummodo ex rotarum proportionibus, seu dentium numero, cognoscatur numerus oscillationum certo tempore peragendarum. Invento enim pendulo simplici, cujus librationes singulæ conveniant vel singulis, vel binis ternisve recursibus horologii, constabit jam hinc, quot penduli illius vices horæ spatio transigantur. Quarum numerus si quadretur, erit ut quadratum è 3600, numero scrupulorum secundorum horam unam efficientium, ad quadratum illius numeri, ita longitudo penduli simplicis inventi, (quæ longitudo semper à puncto suspensionis ad centrum oscillationis accipienda est) ad longitudinem penduli illius horarii tripedalis, quod diximus. Hoc enim inde constat, quod duorum quorumvis pendulorum longitudines sunt inter se, sicut quadrata temporum quibus singulæ oscillationes transeunt; ideoque contrariam rationem habent quadratorum à numeris, quos efficiunt oscillationes æqualibus temporum intervallis peractæ. Nam, cum hactenus experientiâ tantum comprobatum fuerit Theorema illud, de pendulorum longitudinibus; eas nempe duplicatam habere rationem temporum, quibus oscillationes singulæ peraguntur; nunc ejus demonstratio ex superius traditis manifesta est. Cum enim ostenderimus, singulos recursus penduli, inter cycloides suspensi, ad casum perpendicularem, è dimidia penduli longitudine, certam rationem habere; eam scilicet quam circumferentia circuli ad diametrum suam; facile hinc colligitur, tempora oscillationum in duobus pendulis esse inter se, sicut tempora descensus perpendicularis ex dimidiis eorum altitudinibus. Quæ altitudines dimidiæ, sive etiam totæ, cum habeant rationem duplicatam temporum, quibus ipsæ descensu perpendiculari percurruntur *; eædem quoque duplicatam rationem habebunt temporum, quæ oscillationes singulas metiuntur. Ab oscillationibus autem minimis penduli, inter cycloides suspensi, non differunt sensibiliter oscillationes minimæ penduli simplicis, cujus eadem sit longitudo. Itaque & pendulorum simplicium longitudines, duplicatam rationem habebunt temporum, quibus oscillationes minimæ transiguntur.

* Prop. 3. Part. 2.

Quod siquis oscillationum numerandarum, quæ horæ aut semihoræ tempore transeunt, laborem non defugiat; horologiumque adsit, cujus index secunda scrupula demonstret; quæcunque accipiatur penduli simplicis longitudo, ejus numerus oscillationum, quæ hora una continentur, hoc modo cognoscetur; atque inde longitudo penduli tripedalis, ad secunda scrupula, ut antea, calculo prodibit.

PROPOSITIO XXV.

Spatium definire, quod gravia, perpendiculariter cadentia, dato tempore percurrunt.

Hanc menſuram quicunque hactenus inveſtigarunt, experimenta conſulere neceſſe habuerunt; quibus, prout hactenus inſtituta fuere, non facile ad exactam determinationem pervenitur, propter velocitatem cadentium, ſub finem motus acquiſitam. Ex noſtra autem prop. 25, de Deſcenſu gravium, cognitaque longitudine penduli ad ſecunda ſcrupula, abſque experimento, per certam conſequentiam, rem expedire poſſumus. Ac primo quidem ſpatium illud inquiremus, quod unius ſcrupuli ſecundi tempore grave præterlabitur; ex quo quælibet alia deinde colligere licebit. Quia igitur penduli, ad ſecunda ſcrupula, longitudinem diximus eſſe pedum Horariorum 3: tempus autem unius oſcillationis minimæ, eſt ad tempus deſcenſus perpendicularis ex dimidia penduli altitudine, ut circumferentia circuli ad diametrum, hoc eſt, ut 355 ad 113: ſi fiat, ut numerus horum prior ad alterum, ita tempus unius ſecundi ſcrupuli, ſive ſexaginta tertiorum, ad aliud; fient $19'''\frac{1}{10}$, tempus deſcenſus per dimidiam penduli altitudinem, quæ nempe eſt pedis unciarum 18. Sicut autem quadrata temporum, ita ſunt ſpatia illis temporibus peracta, quemadmodum ſuperiori propoſitione fuit oſtenſum. Ergo, ſi fiat ut quadratum ex $19'''\frac{1}{10}$ ad quadratum ex $60'''$, hoc eſt, ut 36481 ad 360000, ita 18 unciæ ad aliud, fient ped. 14. unc. 9. lin. 6, altitudo deſcenſus perpendicularis, tempore unius ſecundi. Cum autem pes Horarius ſit ad Pariſienſem, ut 881 ad 864; erit eadem altitudo, ad hanc menſuram reducta, proxime pedum 15 & unciæ unius. Atque hæc cum accuratiſſimis experimentis noſtris prorſus conveniunt. in quibus punctum illud temporis, quo caſus finitur, non aurium aut oculi judicio diſcernitur; quorum neutrum hic ſatis tutum eſt; ſed ſpatium deſcendendo peractum, alio modo, quem hic exponere tentabimus, abſque ullo errore cognoſcitur.

Penduli, ad parietem tabulamve erectam, ſuſpenſi dimidia oſcillatio moram temporis, cadendo abſumpti, indicat. Cujus ſphærula, ut eodem momento ac plumbum caſui deſtinatum dimittatur, utraque filo tenui connexa tenentur, quod admoto igne inciditur. Sed prius, caſuro plumbo, funiculus alius adnectitur, ejus longitudinis, ut, cum totus exierit à plumbo tractus, nondum ad parietem illidatur pendulum. Funiculi ejus caput alterum, regulæ chartaceæ, aut ex tenui membrana paratæ, cohæret; ita ad parietem tabulamve applicatæ, ut trahentem funem facile ſequi poſſit, rectáque ſecundum longitudinem ſuam deſcendere; eo loci tranſiens, quo penduli ſphæra ad tabulam accidet. Abſumpto igitur funiculo toto, pars inſuper regulæ deorſum trahitur à cadente plumbo, priuſquam pendulum ad tabulam pertingat. Quæ quanta ſit pars, ſphæra fuligine leviter infecta, regulamque præterlabentem ſignans, indicat. Huc autem addita funiculi longitudine, ſpatium cadendo emenſum certò definitum habetur.

Aëris autem occurſum, quaſi nullus eſſet in his intelligimus, ut menſura cadentibus corporibus præfixa cum experimentis exacte conſentiat. Nec ſane tantus eſt ille, ut in altitudinibus his, quò aſcendere datur, ſenſibile diſcrimen inducere poſſit; dummodo ſolida corpora è metallo, aut, ſi leviore materia conſtent, mole grandiuſcula accipiantur. Levitas enim materiæ, in iis quæ cadendo aërem ſecant, ita magnitudine corporis penſatur, ut ſphæra lignea, vel etiam è ſubere formata, paria faciat cum plumbea: quando nimirum diameter harum ad plumbeæ diametrum eam rationem habuerit, quam gravitas plumbi propria ad ligni ſuberiſve gravitatem. Tunc enim gravitates ſphærarum erunt inter ſe ſicut earum ſuperficies. Veruntamen, ut æquali celeritate, quantum ſenſu percipi poteſt, decidant corpora, quæ multum intrinſeca gravitate differunt, nequaquam opus eſt ut proportio illa diametrorum ſervetur. Poſſunt enim inter ſe æqualia eſſe, dummodo utraque ſatis magna ſint; aut ex non nimia altitudine decidant. Etenim illud quoque hic animadvertendum eſt, tantam vel altitudinem eſſe poſſe; vel, in mediocri etiam altitudine, tantam projecti corporis levitatem; ut ob aëris renitentiam, acceleratio motus tandem ab illa, quam in ſuperioribus demonſtravimus, proportione plurimum receſſura ſit. Namque in univerſum, corpori cuilibet, per aërem aliudve liquidum labenti, certus celeritatis modus, pro ratione ponderis ac ſuperficiei ſuæ, conſtitutus eſt; quem excedere, aut potius ad quem pervenire nunquam poſſit. Quæ nempe celeritas ea eſt, quam ſi aër, aut liquor ille ſurſum tendens, haberet, ſuſpenſum corpus idem ſibi innatans ſuſtinere poſſet. Verum de his, alias fortaſſe, pluribus agendi occaſio erit.

HOROLOGII OSCILLATORII

PARS QVINTA.

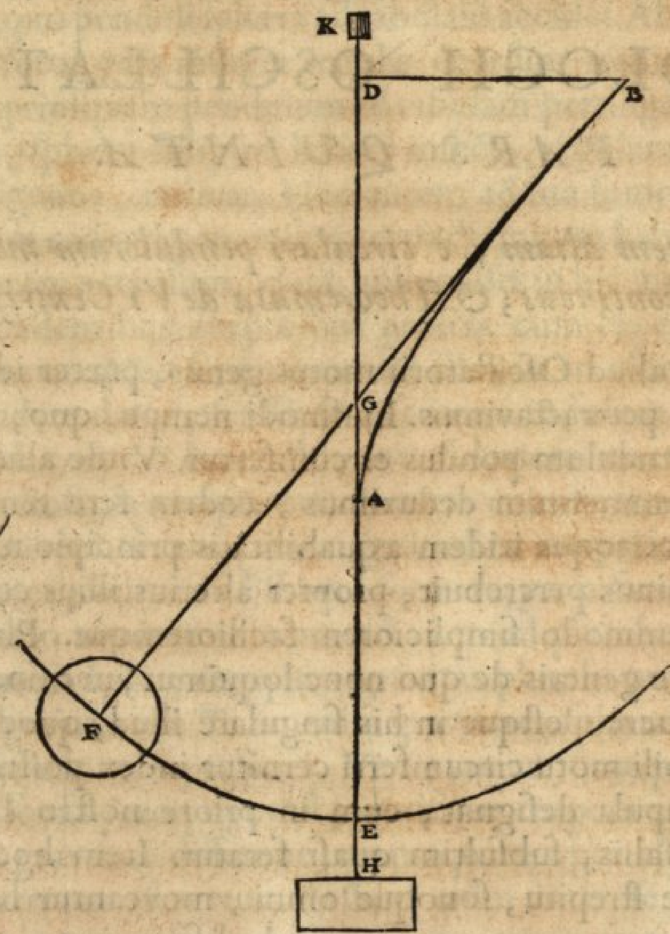
Constructionem aliam, è circulari pendulorum motu deductam, continens; & Theoremata de Vi Centrifuga.

EST & aliud Oscillatorii motus genus, præter id quod hactenus pertractavimus. Ejusmodi nempe, quo, per circuli ambitum, pendulum pondus circumfertur. Vnde aliud quoque horologii commentum deduximus, eodem fere tempore quo prius illud; certoque itidem æquabilitatis principio nixum; sed cujus usus minus percrebuit, propter alterius illius constructionem, quodammodo simpliciorem facilioremque. Plura tamen hujus quoque generis de quo nunc loquimur, nec sine successu, constructa fuere: estque in his singulare illud, quod continuo atque æquabili motu circumferri cernitur index postremus, qui secunda scrupula designat; cum in priore nostro horologio, omnibusque aliis, subsultim quasi feratur. Item hoc quoque, quod absque strepitu, sonoque omni, moveantur hac ratione constructa automata. quanquam, ad observationes astronomicas, sonus ad singula secunda scrupula repetitus, utilitate non careat. Et constitueram quidem, descriptionem horum cum iis demum edere, quæ ad motum circularem & Vim Centrifugam, ita enim eam vocare libet, attinent; de quo argumento plura dicenda habeo, quam quæ hoc tempore exequi vacet. Sed, ut nova nec inutili speculatione maturius fruantur harum rerum studiosi, neve casu aliquo intercidat, hanc quoque partem, præter destinatum, cæteris adjunxi, qua machinæ hujus fabrica breviter exponitur, simulque Theoremata traduntur, ad vim centrifugam pertinentia; demonstratione ipsorum in aliud tempus dilata.

Horologii secundi constructio.

Non necessarium duxi, ut rotarum, quibus interiora horologii constant, dispositionem hic exhiberem; cum ea ab artificibus fa-

SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO. cile ordinari, variisque modis mutari possit; sed eam partem explicari satis esse, quæ motum ejus certa ratione moderatur. Cujus partis hic figura expressa est.



Axis D H ad horizontem erectus intelligendus est, ac super polis duobus mobilis. Huic ad A affixa est lamina, latitudine aliqua prædita, curvataque secundum lineam A B; quæ est paraboloides illa de qua ostendimus, propos. 8. partis 3, evolutione ejus, postquam ipsi recta quædam juncta fuerit, describi parabolam. Ea recta hic est A E; parabolam vero, ex evolutione totius B A E descriptam, refert linea E F. Filum curvæ B A applicatum, cujus extremo puncto parabola describitur, est B G F. Pondus illi affixum F. Dum autem axis D H in sese vertitur, filum B G F, in rectam lineam extensum, sphærulam F una circumducit, ita ut circulos horizonti parallelos percurrat; qui majores minoresve erunt, prout majori aut minori vi axis D H, ab rotis horologii in tympanidium K agentibus, incitabitur: sed ita, ut omnes in superficie conoidis parabolici contineantur. Atque hoc ipso æqualia semper circuitus tempora evadent, ut ex iis, quæ de hoc motu poſtea dicemus, apparebit. Quod ſi circuitus ſingulos, ſecundorum ſcrupulorum ſemiſſes notare velimus, oportet latus rectum parabolæ E F eſſe $4\frac{1}{2}$ unciarum pedis Horarii noſtri, hoc eſt dimidium longitudinis penduli, cujus ſingulæ oſcillationes ſemiſcrupulum ſecundum impenderent. Ex parabolæ autem latere recto, pendet magnitudo lateris recti paraboloidis A B; quippe quod illius $\frac{17}{6}$ continet: atque item longitudo A E, quæ lateris recti parabolæ dimidium eſt. Si vero ſecunda ſcrupula unoquoque circuitu expleri deſideremus, quadrupla priorum accipienda ſunt, tum latera recta, tum linea A E.

SECUNDI HOROLOGII DESCRIPTIO.

Porro, etſi filum B G F veluti unicum ac ſimplex hactenus deſignavimus, ſciendum tamen longe præſtare ut parte ſuperiori duplex ſit, ac verſus F in angulum coeat, 20 vel 30 partium. In quem finem & laminæ A B latitudo ad B tanta eſſe debet, quanta iſti filorum divaricationi ſufficit, vel & ipſa bifida facienda. Hoc pacto enim motus circularis ponderis F, abſque alio ullo adminiculo, continuatur, ac filum utrumque ſibi annexum in rectum extendit; quod non faceret, ſi unico tantum filo teneretur. Vbi tamen vim illam ab horologii rotis, vel pondere vel alia potentia motis, ad continuationem hujus motus circularis requiri ſciendum. Quæ nempe vis per tympanidium K ad axem K H pervenit, ac minimo niſu, motum ſphæræ F ſemel inditum, conſervat.

Hoc autem quo facilius poſſit, liberrimam axis K H revolutionem eſſe oportet. Quod nulla ratione melius perfici compertum, quam ſi, parte ſui ima, durato chalybe conſtet, ſuppoſitamque habeat adamantis ſuperficiem planam; cujus minima quævis particula hic ſufficit, ſubter laminam perforatam collocanda.

Cæterum in locum fili B G F, qua parte curvæ A B applicari debet, catenulam tenuem ex auro, aliove metallo, adhibere licebit, quo melius invariata ſervetur longitudo. Atque hoc in priore quoque horologio, ubi pendulum inter cycloides ſuſpenſum eſt, experti ſumus. Sed ibi flexus catenulæ continuus, attritu annulorum, perexiguo licet, non parum impedit liberam penduli agitationem.

DE VI CENTRIFUGA ex motu circulari, Theoremata.

I.

SI mobilia duo æqualia, æqualibus temporibus circumferentias inæquales percurrant; erit vis centrifuga in ma-

De vi Centrifuga. *jori circumferentia, ad eam quæ in minori, sicut ipsæ inter se circumferentiæ, vel earum diametri.*

II.

Si duo mobilia æqualia, æquali celeritate ferantur, in circumferentiis inæqualibus; erunt eorum vires centrifugæ in ratione contraria diametrorum.

III.

Si duo mobilia æqualia in circumferentiis æqualibus ferantur, celeritate inæquali, sed utraque motu æquabili, qualem in his omnibus intelligi volumus; erit vis centrifuga velocioris, ad vim tardioris, in ratione duplicata celeritatum.

IV.

Si mobilia duo æqualia, in circumferentiis inæqualibus circumlata, vim centrifugam æqualem habuerint; erit tempus circuitus in majori circumferentia, ad tempus circuitus in minori, in subdupla ratione diametrorum.

V.

Si mobile in circumferentia circuli feratur ea celeritate, quam acquirit cadendo ex altitudine, quæ sit quartæ parti diametri æqualis; habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem; hoc est, eadem vi funem quo in centro detinetur intendet, atque cum ex eo suspensum est.

VI.

In cava superficie conoidis parabolici, quod axem ad perpendiculum erectum habeat, circuitus omnes mobilis, circumferentias horizonti parallelas percurrentis, sive parvæ sive magnæ fuerint, æqualibus temporibus peraguntur: quæ tempora singula æquantur binis oscillationibus penduli, cujus longitudo sit dimidium lateris recti parabolæ genitricis.

VII.

Si mobilia duo, ex filis inæqualibus suspensa, gyrentur ita ut circumferentias horizonti parallelas percurrant, capite altero fili immoto manente; fuerint autem conorum, quorum superficiem fila hoc motu describunt, altitudines æquales; tempora quoque circulationum æqualia erunt.

VIII.

VIII.

De vi Centrifuga.

Si mobilia duo, uti prius, motu conico gyrentur, filis æqualibus vel inæqualibus suspensa; fuerintque conorum altitudines inæquales; erunt tempora circulationum in subduplicata ratione ipsarum altitudinum.

IX.

Si pendulum, motu conico latum, circuitus minimos faciat; eorum singulorum tempora, ad tempus casus perpendicularis ex dupla penduli altitudine, eam rationem habent, quam circumferentia circuli ad diametrum: ac proinde æqualia sunt tempori duarum oscillationum lateralium, ejusdem penduli, minimarum.

X.

Si mobile in circumferentia feratur, circuitusque singulos absolvat eo tempore, quo pendulum, longitudinem semidiametri circumferentiæ ejus habens, motu conico circuitum minimum absolveret, vel duplicem oscillationem minimam lateralem: habebit vim centrifugam suæ gravitati æqualem.

XI.

Penduli cujuslibet, motu conico lati, tempora circuitus æqualia erunt tempori casus perpendicularis, ex altitudine penduli filo æquali; cum angulus inclinationis fili, ad planum horizontis, fuerit partium 2. scrup. 54, proxime. Exacte vero, si anguli dicti sinus fuerit ad radium, ut quadratum circulo inscriptum ad quadratum à circumferentia ejus.

XII.

Si pendula duo, pondere æqualia, sed inæquali filorum longitudine, motu conico gyrentur, fuerintque conorum altitudines æquales; erunt vires, quibus fila sua intendent, in eadem ratione quæ est filorum longitudinis.

XIII.

Si pendulum simplex oscillatione laterali maxima agitetur, hoc est, si per totum circuli quadrantem descendat: ubi ad punctum imum circumferentiæ pervenerit, triplo majori vi filum suum trahet, quam si ex illo simpliciter suspensum foret.

FINIS.

CORRIGENDA.

Pag. 5. *versu* 9. *à fine*, *pro* N *lege* R; *quæ litera in figura omissa est.*

Pag. 6. *v.* 4. *à fine*, *pro* X *scribe* a.

Ibidem v. ult. pro z *scribe* e. *Et sic quoque pag. sequ. versu* 2.

Pag. 7. *v.* 2. *à fine*, *pro* M K *scribe* K.

Pag. 16. *v.* 13. *post*, tricesimamve, *adde* aut etiam minorem.

Pag. ead. v. 23. & 24. *citantur literæ* A, B, C, *quæ in figura omissa sunt. ubi lineâ hac eâdem* 24. *post*, à puncto autem C, *adde* centro oscillationis.

Pag. 26. *v.* 3. *lege* quadrato.

Pag. 56. *v.* 7. *à fine pro* O Λ *lege* S Λ.

Pag. 81. & 84. *in figurarum altera quæ est ad sinistram*, *non ex* T *ducenda erat* T X, *sed ex* V *recta* V X *parallela* L K.

Pag. 85. *v.* 11. *à fine*, *post* K M, L N, *adde*, quarum hæc major erit.

Pag. 86. *v.* 1. *pro* $a\,a\,x$ *lege* $a\,x\,x$, & *dele* ∞ y.

Pag. 87. *v.* 10. *à fine*, *pro* F D *scribe* B D.

Ibidem v. 2. *à fine*, *pro* F H K *scribe* A R I.

Item v. 3. *à fine*, *lege* continuatæ.

Pag. 95. *v.* 1. *pro* B *scribe* G.

Pag. ead. v. à fine 5. *lege* volumus.

Pag. 99. *v.* 12. *dele* velut Q Q.

Pag. 104. *v.* 10. *pro* A D *lege* M D.

Pag. 107. *in fig. quæ ad dextram*, *debebat punctum* H *esse ad alteram partem puncti* e.

Pag. 111. *v. à fine* 4. 6. & 7. *pro* $2\,z\,m$ *lege* $2\,x\,m$.

Pag. 112. *v.* 2. *pro* $\frac{mmll}{8}$, *lege* $\frac{mm-ll}{8}$.

Pag. 123. *v.* 10. *pro* & H centrum gravitatis, *lege*, & O H subcentrica.

HVGEN
DE
MOTV
PENDV