Propriedades

1.

EM todo o Triangulo plano o mayor lado ſubtende ao mayor angulo, o menor ao menor; & lados iguaes ſubtendem angulos iguaes, & reciprocamente mayor angulo he oppoſto a mayor lado, menor a menor, igual a igual. Conſta de algũas [r] propoſiçoens do primeiro liv. de Euclides. [r] 18.19.6.prim

2.

Em todo o Triangulo plano ſe qualquer lado for produzido, o angulo externo ſerà [s] igual aos dous internos oppoſtos, & todos os tres do Triangulo ſaõ iguaes a dous rectos. [s] 32. primi.

3.

Em todo o Triangulo plano quaeſquer dous lados em ſomma ſaõ mayores, [a] que o terceiro. [a] 20.prim.

4.

Em todo o Triangulo plano ſe for lançada hũa parallela a qualquer dos lados, cortará [g] os outros dous proporcionalmente; & ſe os cortar proporcionalmente, ſerá parallela a hum dos lados. [g] 2.ſexti.

5.

Em todo o Triangulo plano a linha A B que cortar hum dos angulos pello meyo, produzida cortará [r] a Baſe de tal modo que os ſegmentos CB, B D tenhaõ entre ſi a meſma razaõ que tem os outros lados C A, A D, & ao contrario ſe a linha cortar a Baſe do modo ſobreditto, cortará pello meyo o angulo. [r] 3 ſexti. Fig. 14.

6.

Em qualquer Triangulo rectangulo ſe do angulo recto B ſe lançar hũa perpendicular B D ſobre a Hypotenuſa A C; ſerá a perpendicular B D meya proporcional entre os ſegmẽtos A D, D C da Baſe A C, & tambem qualquer lado como A B ſerà meyo proporcional entre a Hypotenuſa C A, & o ſegmento A D adjacẽte ao ditto lado A B; & o lado B C meyo proporcional entre a meſma Hypotenuſa A C, & o ſegmento C D adjacente ao ditto lado B C. He o Corollario da 8 do ſexto. Fig. 15.

7.

Em qualquer Triangulo rectangulo A B C o quadrado da Hypotenuſa A C (que he o mayor lado oppoſto ao angulo recto) ſe iguala [a] aos quadrados dos lados A B, B C, & tambem qualquer [a] 47. do prim. Fig. 16

e 31.do sexto. fig.rectilinea sobre a Hypotenusa se iguala e às figuras rectilineas semelhantes, & semelhantemente descriptas sobre os lados.

8.

Em qualquer Triangulo obtusangulo; o quadrado do mayor lado A B opposto ao angulo C obtuso he igual aos quadrados dos lados A C, C B, & a dous rectangulos feito cada hum do lado A C junto do angulo obtuso, sobre o qual produzido cahe a perpẽdicular B D, & da linha exterior C D entre a perpendicular, & o ditto angulo obtuso.

Fig. 17. 12.2.

9.

Nos Triangulos acutangulos o quadrado do lado A B, que subtende o angulo agudo A C B he menor que os quadrados dos lados A C, B C, que o comprehendẽ, pella quantidade de dous rectangulos feitos cada hum do lado A C adjacente ao angulo agudo, no qual cahe a perpendicular B D, & da linha D C entre a perpendicular, & o angulo agudo C: ou por outra lingoagem o quadrado de A B junto com dous rectangulos de A C por D C em somma se igualaõ aos quadrados de A C, B C.

13.2. Fig. 18.

10.

Quaesquer Triangulos A B C, A D C, E F H que estejaõ sobre a mesma Base A C, ou sobre iguaes A C, E F, & entre as mesmas parallelas A F, B H saõ entre si iguaes; & ao contrario os Triangulos iguaes, que estaõ constituidos para a mesma parte sobre a mesma, ou sobre iguaes Bases estaõ entre as mesmas parallelas.

Fig. 19. 37. 38. 39. 40. primi.

11.

Se em dous Triangulos for o angulo A do Triãgulo A B C igual ao angulo D do Triangulo D E F & os lados A C, C B à roda do angulo A C B no primeiro proporcionaes aos lados D F, F E à roda do angulo F no segundo; mas com tal condiçaõ que cada hũ dos reliquos angulos B, & E seja ou menor que recto, ou naõ menor que recto, seraõ os taes Triangulos equiangulos.

7. sexti. Figuras. 20.

12.

Dous Triangulos iguaes A B C, D B E que tenhaõ iguaes angulos em B, tem reciprocos os lados á roda dos taes angulos iguaes: quer dizer que tal razaõ tem o lado A B do primeiro, para B E do segundo, como B D do mesmo segundo, para B C do primeiro, & ao contrario Triangulos em q̃ hum angulo de hum he igual a hũ angulo de outro, & os lados á roda delles reciprocos, saõ iguaes.

15. sexti. Fig. 21.

13. Se-

13.

Semelhantes Triangulos eſtaõ entre ſi em duplicada razaõ de ſeus lados homologos: quer dizer, que ſe a quaeſquer dos lados ſemelhantes A C, D F ſe buſcar hũa linha terceira proporcional, a ſaber, que tal proporçaõ ſeja de A C para D F, como de D F para a terceira achada H G; tal proporçaõ terá o Triangulo A B C para o Triangulo D E F, como a primeira linha A C para a terceira H G: o meſmo ſe entende a reſpeito dos outros lados ſemelhantes, & a proporçaõ ſobreditta he a que ſe chama duplicada razaõ. 19. ſexti. Figuras. 22.

14.

Se hum Triangulo equilatero ſe deſcrever dentro de hum circulo; o lado do Triangulo he na potencia triplo do ſemidiametro do circulo; quer dizer que o quadrado do lado do Triangulo he triplo do quadrado do ſemidiametro. 12. 13.

E o diametro he ſexquitertio na potencia do lado do Triangulo. Corol. 12. 13.

15.

O lado do Triangulo equilatero he ſexquitercio na potencia da linha perpendicular, que de qualquer angulo ſe lançar ſobre o lado oppoſto. 12. 14.

16.

A linha que de qualquer angulo do Triangulo equilatero cahe perpendicular no lado oppoſto he tripla da q̃ do centro do Triãgulo ſe lança perpendicular ao meſmo lado. 18. 14.

17.

Se o ſemidiametro C B de hum circulo cortar de qualquer modo hum arco A B D, & ſua Corda A D, os ſegmentos A E, D E da Corda teraõ entre ſi a meſma proporçaõ, que os Senos A F, D H dos ſegmentos A B, D B do arco. Fig. 23. Ptol. dict. 1. c. 12. Clavi 9. in Triang. rectil. prop. 4.

NOTA.

EScrevi as propoſiçoens antecedentes, poſto que naõ ſejaõ preciſamẽte neceſſarias, ou as mais dellas para a ſoluçaõ practica do Triangulos, por duas razoens: a primeira porque as trazem, & ainda outras mais Autores de grande nome: a ſegũda mais principal porque dellas póde o curioſo deduzir algũs problemas curioſos na meſma Trigonometria; & ſaõ as mais dellas propoſiçoens de Euclides notaveis, & que tem muito uſo nas provas; & fabrica de propoſiçoens, & problemas geometricos; & tocaõ eſpecialmente

pecialmente as propriedades de Triangulos que he a materia subjecta.

CAP. II.

De alguns Theoremas necessarios para a resoluçaõ dos Triangulos rectilineos.

SAõ infinitos os Autores, que trattaõ desta materia com grandissima erudiçaõ; porèm como nosso intento seja o fim de achar sómente os lados, angulos, & áreas de qualquer Triangulo rectilineo, que he o necessario para a fortificaçaõ, daremos hũa breve practica para o intento sem theoricas, ou demonstraçoens, assim por se escusarem para este fim, como por naõ se embaraçarem os principiantes com cousas fòra do intento, que levamos; & tambem porque devem preceder alguns livros dos elementos de Euclides, para a intelligencia da theorica.

Consiste pois a resoluçaõ dos Triangulos em que dadas tres quantidades das seis, que tem qualquer Triangulo, a saber tres lados, & tres angulos, se achem algũas das outras tres, que nos pedirem excepto quando sòmente se derem sabidos os tres angulos, porque entaõ naõ se poderaõ saber os lados; mas sòmente a proporçaõ que elles entre si tem na fòrma, que adiante se declarará. Falamos nos Triangulos de linhas rectas, que he o nosso assumpto, porque nos de linhas circulares se podem achar os lados se forem sabidos os angulos.

Isto supposto, proporemos os casos em especial, & proporçoẽs por onde se resolvem, sem nomearmos Autores, pois em todos se acharáõ: mas agora principalmente seguimos a Henrique Gellibrando, & Fr. Bonaventura Cavalerio propondo alguns theoremas, que despois serviráõ de grande uso a quem os souber; antes com elles póde escusar os problemas dos casos especiaes.

THEOREMA I.

Adriano Ulacco lib. 1. Trigon. artificialis cap. 2. propos. 1. Cavalerio in direct. general. part. 2. cap. 2. axiomat. I.

Em qualquer Triangulo rectangulo se o lado, que subtende o angulo recto, & se chama Hypotenusa for feito semidiametro de hũ circulo, o qual semidiametro se diz Radio, seraõ os lados, que comprehendem o angulo recto, Senos dos angulos oppostos.

No

No Triangulo rectangulo A B C dos pontos A,B com o intervallo da hypotenusa A B se descrevaõ os circulos B H D P, A F E G; digo que o lado A C será Seno do angulo A B C, ou do arco A F que o subtende, porque o ditto lado A C cahe perpendicularmẽte do ponto A extremo do arco F A sobre o semidiametro B F que passa pello outro extremo F, pello que conforme a definiçaõ dos Senos que havemos dado o fica sendo do ditto arco A F, & de seu angulo opposto A B C. Ou tambem porque A C he ametade da Corda A E que subtende o arco A F E duplo de A F. A mesma razaõ corre para B C ser Seno do angulo B A C, & de seu arco B H. Fig. 24. Fig. 24.

THEOREMA II.

Em qualquer Triãgulo rectãgulo se do põto angular de qualquer dos angulos agudos, & intervallo do lado proximo, se descrever hum circulo, será o tal lado Radio, o outro lado Tãgente, & a Hypotenusa Secante do angulo agudo, em que se tomou o ponto angular por centro do circulo descripto. Ulac. lib. 1. c. 2. prop. 2. Cavalerio part. 2. c. 2. in 2. part. axiomatis primi.

No Triangulo rectangulo A C B se do ponto angular B com o intervallo do lado proximo B C se descrever a peripheria D C será B C Radio, A C Tangente, B A Secante do angulo A B C. Do mesmo modo se do ponto A com o intervallo A C se descrever a peripheria C E, será A C Radio B C Tangente, A B Secãte do angulo B A C. Figur. 25.

THEOREMA III.

Em qualquer Triangulo os lados tem entre si a mesma proporçaõ que os Senos dos angulos oppostos, & ao contrario os Senos dos angulos a mesma, que dos lados oppostos. Ulacco lib. Triang. artific. propos. 3. Cavalerio in director. part. 2. c. 3. Regiom. lib. 2. propos. 1. Fig. 26

Quando nomeamos Triangulo sem dizer rectangulo entendese qualquer, ou seja, ou naõ seja rectangulo, & para este theorema se toma por lado qualquer das tres linhas, ainda que seja a Hypotenusa no Triangulo rectangulo.

No Triangulo A B C provaõ os Geometras, que assim se ha o lado A B para A C, como o Seno do angulo C opposto ao primeiro lado A B, para o Seno do angulo B, opposto ao segundo lado A C, & da mesma maneira quaesquer outros dous lados do ditto Triangulo: ou alternando, o lado A B para o Seno de seu angulo opposto C, como A C para o Seno de seu opposto B, semelhantemente outros.

THEOREMA IV.

Ulac. lib. 1. c. 2. prop. 4. Cavaler. part. 2. c. 4. axiom. 3.

Em qualquer Triangulo como se ha a somma de dous lados para sua differẽça, assim a Tangente da semisomma dos angulos oppostos, para a Tangente de sua semidifferença.

Fig. 27.

Semisomma quer dizer meya somma, semidifferença ametade da differença. No Triangulo A B C sejaõ por exemplo o angulo B de 70. gr. & o angulo C de 40. gr. cuja somma faz 110. gr. provase pois da Geometria, que assim se ha a somma dos lados A B, A C, que he o mesmo que a linha F A C para C O differença dos dittos lados, como a Tangente da semisomma dos angulos oppostos B C, que he 55. gr. para a Tangente de sua semidifferença, que he 15. gr. O mesmo se entende de outros quaesquer lados em qualquer outro Triangulo.

SCHOLIO.

Tambem se pòde propor o theorema quarto por outro modo, que traz Gellibrando na fòrma seguinte.

Em qualquer Triangulo plano, como se ha a somma de dous lados para o dobro do mayor, assim a Tangente da semisomma dos angulos oppostos para a somma das Tangentes da semisomma, & semidifferença dos angulos.

OU POR OUTRO MODO.

A somma dos dous lados para o dobro do menor, como a Tangente da semisomma dos angulos oppostos para a differença das Tangentes da semisomma, & semidifferença dos angulos oppostos.

Ainda por outro modo se poderà exprimir este problema: a saber Assim se há o lado menor para o lado mayor, como a secante do complemento, ou excesso do angulo comprehendido para hum quarto numero, ou lado proporcional.

Este quarto se confira com a Tangente do complemento, ou excesso; & se o angulo comprehendido for obtuso, a somma; mas se agudo, a differença, será a Tangente do complemento do angulo opposto ao menor lado. A demonstraçaõ se pòde ver em Gellibrando propos. 4. lib. 2. Part. 1.

Tambem por outro modo que traz Frobenio.

A semì somma dos dous lados para a differença entre a mesma semisomma, & qualquer delles; como a Tangente do semicomplemento

mento do angulo dado para dous rectos, ou da ſemiſomma dos angulos oppoſtos para a Tangente de hum arco, pello qual o menor angulo dos buſcados he menor que o ditto ſemicomplemento, & o mayor angulo, mayor.

THEOREMA V.

Em qualquer Triangulo, aſſim ſe ha a Baſe para a ſomma dos lados, como a differença dos lados para a differença dos ſegmentos da Baſe. Ulac. lib. 1. c. 2. prop. 5. Cavalerio part. 2. c. 5 axiom. 4.

No ſentido deſte theorema ſe toma ordinariamente por Baſe o mayor lado, para que aſſim ſeja certo, que em qualquer Triangulo que for ſuppoſto ha de cahir a perpendicular ſobre a Baſe dẽtro no Triangulo. Porèm na nota adiante moſtraremos como ſe pòde tomar por Baſe naõ ſòmente o mayor lado, mas qualquer dos outros dous; & os caſos em que ſe deve variar, & de que maneira a analogia do theorema.

Para a propoſta no ſobreditto; ſeja o Triangulo A B C no qual ſe tome por Baſe o mayor lado B C; & do angulo oppoſto A caya ſobre a Baſe a perpendicular A O, que a partirá nos dous ſegmẽtos B O, C O, & tomando E O igual com B O, ficarà a differença dos ſegmentos E C. Provaſe pois da Geometria, que aſſim ſe ha B C Baſe, para a ſomma dos lados B A, C A, iſto he, para C A F, como K C differença dos lados para E C differença dos ſegmentos da Baſe. Fig. 28.

NOTA.

PARA a analogia do theorema ſobreditto ſe póde tomar por Baſe qualquer lado do Triangulo, ſe a perpendicular, que vier do angulo oppoſto cahir no ditto lado dentro do meſmo Triangulo.

Porém ſe a perpendicular cahir fòra do Triangulo, como quãdo ſe quer tomar por Baſe hum dos menores lados, & hum dos angulos a ella adjacentes he obtuſo, ſe deve propor o theorema na ſeguinte fòrma.

Em qualquer triangulo em que a perpendicular cahir fòra delle na Baſe produzida; aſſim ſe ha a Baſe para a ſomma dos lados, como a differença dos lados para a ſomma dos ſegmentos da Baſe.

Advirto, que neſte caſo por hum ſegmento da Baſe ſe entende a mesma Base continuada atè a perpendicular: por outro o excesso sobre a Base entre o lado do Triangulo,& a perpendicular:como Regiomonte,&Clavio em varios lugares,& he o cõmum sentido. Os cinco primeiros theoremas andaõ demonstrados nos Autores. A analogia q̃ proponho nesta nota demõstro na seguinte fòrma.

Fig..29. No Triangulo obliquangulo A B C seja a Base C A: a somma dos lados A G: a differença dos lados A H, & lançada B E sobre A C produzida até E; seja hum segmento A E, outro C E, ou sua igual E D de tal modo,que o aggregado dos segmentos da Corol. 36.tert. Base seja A D. E porque o rectangulo de A C por A D se iguala ao rectangulo de A G por A H,seraõ seus lados reciprocamente proporcionaes: a saber.

Proporcionaes.		
	A C	Base.
	A G	somma dos lados.
	A H	differença dos lados.
	A D	somma dos segmentos da Base.

Fig.30.

E se a perpendicular B E coincidir com o lado B C do Triangulo será como a Base A C para a somma dos lados A B, B C isto he, para A G: assim A H differença dos lados para a mesma Base A C o que assim demonstro.

O rectangulo de A G por A H se iguala [r] ao quadrado da Base A C por tanto saõ proporcionaes [a] A G, A C, A H, isto he q̃ assim se ha A G para A C, como A C,ou F R sua igual para A H logo convertendo,como a Base A C para A G somma dos lados, assim A H differença dos mesmos lados para F R, (isto he) para a mesma Base A C.

r 36.tert.
a 17 sexti.

SCHOLIO.

COM estes cinco theoremas se resolvem todos os casos ordinarios de investigar em numeros, os lados, & angulos dos Triangulos rectilineos;& assim quem bem os souber applicar escusa,que se lhe apontem particularmente as proporçoens para a soluçaõ de cada hum dos casos. Cõ tudo nòs os apontaremos em especial,para os menos versados,& para mais facilitar o uso;& no fim trattaremos outras analogias, que servem para achar as áreas, ou por ellas os lados,que saõ casos de menos uso, mas algũas vezes necessarios, & muito dignos de se saberem, a que chamaremos com Cavalerio problemas extraordinarios.

E posto que sabida a proporçaõ geometrica para a resoluçaõ dos casos se lhe podem applicar os Logarithmos pella regra geral de se somarem os Logarithmos dos dous termos intermedios da proporçaõ, & da somma tirarse o Logarithmo do primeiro, com que ficará o Logarithmo do quarto; todavia apontaremos tambem particularmente outras proporçoens logarithmicas, para que cada hum use da que mais lhe agradar.

NOTA.

AInda que com menos que os cinco theoremas se podem tãbem soltar os casos da Trigonometria rectilinea; todavia com elles fica muito mais facil.

CAP. III.

Da resoluçaõ dos Triangulos rectangulos.

NA soluçaõ de todos os Triangulos as quantidades dadas se significaõ com hũa risquinha; as pedidas, ou buscadas com huns pontinhos, como se vè nas figuras. Nos Triangulos rectangulos o lado que subtende o angulo recto se chama Hypotenusa, os que o comprehendem se nomeaõ lados.

PROBLEMA I.

Dados os lados buscase qualquer angulo.

NO Triangulo rectangulo ABC buscase qualquer angulo.

Dados os lados (AB — 1224. (BC — 606. Theor. 2.

Termos proporcionaes.

Hum lado ———— Fig. 31.
O reliquo lado ————
Radio ————
Tangentes do angulo opposto ao reliquo lado. ——

Advirtase q̃ em todas as analogias deve sempre ficar em quarto lugar o termo do lado, ou angulo buscado. Como na presente.

Supposta a analogia dos termos proporcionaes, que responde a algũ dos cinco theoremas antecedentes, como a presente respõde ao theorema 2. se deve saber, q̃ se se usar dos Senos, Tãgẽtes, & Secantes naturaes, se devem multiplicar entre si os que responderem aos dous termos intermedios, & o producto partirse pello q̃ responder ao primeiro termo,& sahirá no quociente o Seno, Tãgente,ou Secante respondente ao angulo buscado,& se se buscar lado sahirá o mesmo lado.Com advertencia porèm que se algum dos termos intermedios for lado se obrará com o mesmo lado, porqne estes naõ tem Senos, Tangentes, ou Secantes.

Porèm se se usar dos Senos,Tangentes, & Secantes artificiaes que saõ os Logarithmos, se devem sommar os que responderem aos dous termos intermedios; & da somma tirarse o que condiz ao primeiro, & restará o que pertence ao quarto, que buscado nas taboas darâ à margem o tal lado,ou angulo.

EXEMPLO.

Por Senos, & Tangentes naturaes.

Fig.31. PRoponhamos que se busca o angulo A,seraõ por tanto conforme a analogia acima,os termos proporcionaes em que deve ficar em quarto lugar o do ang. buscado na maneira seguinte.

O lado A B —— 1224.
O reliquo lado B C — 606.
O Radio —— 10000000.
Tangente do angulo A opposto ao reliquo lado B C

Multipliquemse pois 606. segundo termo pello Radio terceiro termo 10000000.& o producto 6060000000. se reparta pello primeiro termo 1224. q̃ dará no quociente 4950980. o qual numero buscado nas taboas dos Senos naturaes, ou o que mais proximo a elle se achar,qual he nas taboadas o numero 4949549 debaixo do titulo Tangentes, por ser Tangente o quarto termo da analogia, nos mostrará o tal numero que lhe respondem 26.gr. 20.minut.& de tantos serà proximamente o angulo A buscado.

SCHOLIO I.

MAS porque o tal numero 26.gr.20. minut. naõ he ainda o verdadeiro, pois senaõ achou na taboa o preciso numero, que nos sahio no quociente,que era 4950980. mas outro proximo menor a saber 4949549. quem quizer(por ser escrupuloso, ou porque he necessario para as operaçoens da Astronomia) achar quãtos segundos saõ alem de 26.gr.20.min.por verdadeiro valor do angulo A, deve armar hũa regra de tres na maneira ſeguinte.

Tirará o numero que ſe achou nas taboas a ſaber 4949549. q̃ reſponde aos 26.graos 20.minut. do immediato ſeguinte que he 4953171. o qual reſponde a 26.gr.21.min.& reſtarà 3622. por ſua differença,que deve ficar em primeiro lugar na regra de tres; & em ſegundo lugar ficaráõ 60. ſeg. que he o meſmo que 1. min. que vai de 26.gr.20. min. a 26. gr. 21. min. logo tirar o meſmo numero menor,que reſpondia a 26.gr.20.min.a ſaber 4949549 do que nos tinha ſahido no quociente que era 4950980.& reſtarâ 1431. o qual numero deve ficar em terceiro lugar na ditta regra de tres; de maneira que ſe diſporáõ os numeros na fórma ſeguinte 3622 — 60 — 1431. Multiplicando pois o ſegundo numero 60. pello terceiro 1431.& o producto 85860 . partido pello primeiro 3622. dará no quociente 23.ſeg.& tántos ſegundos ſeraõ alem dos 26.gr.20.min.de modo,que ſerâ a quantidade do angulo A 26.gr.20.min.23.ſeg.

E ſe quizermos ſaber ainda os terceiros, por quanto na ultima partiçaõ ſobejou o numero 2554 . multiplicando eſſe numero outra vez por 60. & o producto 153240. partido pello meſmo partidor 3622. ſahirà no quociente 42 . que ſeraõ terceiros, & aſſim procedendo por diante com o que ſempre ſobejar da ultima partiçaõ, ſahiráõ quartos,quintos,&c.Porém para os calculos da Fortificaçaõ he eſcuſado eſta miudeza, & baſta inveſtigar os angulos em graos,& minutos:ou quando os ſegundos chegarem, ou paſſarem de 30. acreſcentar por elles hum minuto ao numero de graos,ou minutos,que reſponderem à menor Tangente.

E para ſe ſaber facilmente ſe o numero de ſegundos chega, ou paſſa de 30.he boa regra ver ſe o numero do terceiro lugar da regra aurea a ſabet 1431. chega, ou excede a ametade do numero 3622.do primeiro lugar,porque ſe for juſtamente a ametade,ſaõ 30. os ſegundos, ſe paſſar ſaõ mais de 30. ſenaõ chegar ſaõ menos de 30.

SCHOLIO II.

DO modo ſobreditto ſe obra pellos Senos,Tangentes,& Secantes naturaes,mediante a regra de tres chamada regra aurea pellos muitos uſos,& bons effeitos,que de ſua praxe reſultaõ: Po-

Porém se usarmos dos Logarithmos chamados Senos, Tangentes, & Secantes artificiaes, admiravel invento moderno por meyo do qual se escusa o grande, & molesto trabalho das multiplicaçoens, & divisoens, se devem sommar os Logarithmos dos dous termos intermedios, & da somma tirar o Logarithmo do primeiro, & restará o Logarithmo do quarto termo buscado.

EXEMPLO.

PRoposto o mesmo caso em q̃ dados os dous lados A B 1224. B C 606. se busca o angulo A & dispostos os mesmos termos proporcionaes na fòrma seguinte.

Fig. 31.

		Logarithmos.
O lado A B 1224	———	3,0877814
O Reliquo B C 606	———	2,7824726
O Radio	———	1,00000000
	Somma.	12,7824726
		3,0877814
Tangente do angulo A buscado.		96946912

Se devem buscar nas taboas os Logarithmos dos dous termos intermedios: a saber o do lado B C nas taboas dos Logarithmos dos numeros absolutos, defronte do numero 606 (as quaes taboas de que algumas tem por titulo, Chilias Logarithmorum, saõ dos Logarithmos pertencentes aos lados) a que responde o Logarithmo 27824726. & o Logarithmo do Radio, ou Seno todo nas taboas dos Logarithmos dos graos, que he 100000000 & sommando os dous Logarithmos será a somma 12,7824726 da qual somma tirando 30877814. Logarithmo do primeiro termo 1224. achado nas taboas dos numeros absolutos, resta o numero 96946912. Logarithmo da Tangente do ditto angulo A, o qual buscado nas taboas dos graos debaixo do titulo (Logarithmos das Tangentes) ou o que mais proximo a elle se achar qual he o numero 96945656. se verá que lhe respondem os mesmos 26. gr. & 20. min. q̃ se haviaõ achado pellos Senos naturaes.

Mas porque o Logarithmo que nos sahio he algũa cousa mayor que o achado nas taboas se colhe, que o ditto angulo he ainda de mais algũs segundos, que os dittos 26. gr. 20. min. Por onde para se acharem os segundos, ou segundos, & terceiros, &c. que de mais contém, se usará de outra regra de tres, semelhante à que fi-

fizemos com os Senos naturaes: a saber.

Tirese o Logarithmo da Tangente de 26.gr.20.min. achado nas taboas, que he 96945656. de 96948833. num. immediato seguinte que he Logarithmo da Tangente de 26. gr. 21. min. & restará 3177. que deve ficar em primeiro lugar na regra aurea; Tirese logo o mesmo Logarithmo 96945656. de 96946912; que nos tinha sahido por Logarithmo da Tangente do angulo A, na operaçaõ acima, & ficará 1256. para o terceiro lugar, & em segundo ficaraõ 60. seg. que he hum minuto, de modo que será a disposiçaõ para a regra de tres, como se vè 3177 —60— 1256

Multiplicando pois o segundo pello terceiro termo a saber 60 min. por 1256. sahirá no producto 75360; o qual partido pello primeiro 3177. sahe no quociente 23. seg. & sobejaõ da partiçaõ 2289: estes multiplicados outra vez por 60. fazem 137340 o qual numero partido outra vez por 3177. sahem no quociente 43. terceiros; de modo que será a quantidade do angulo A 26 gr. 20. min. 23. seg. 43. terceir. quanto ajustadamente tinhamos achado por via dos Senos naturaes. E semelhantemente se fazem todas as mais operaçoens; pello que nos mais problemas poremos sòmente a analogia nos termos proporcionaes, mediante a qual se resolvem.

NOTA.

DEvese advertir, o que tambem dissemos trattando dos Senos naturaes, de que naõ he necessario a precisaõ de buscar segundos para a Architectura Militar, por onde se o numero, que ficar em terceiro lugar for menor que ametade do que fica em primeiro lugar he indicio que os segundos naõ chegaõ a 30. se for ametade, ou passar de ametade que vem a importar 30. segũdos, ou mais neste caso se acrescente mais hum minuto aos graos, & minutos que se acharem nas taboas, o que no nosso caso se escusa; porque o numero do terceiro lugar 1256; naõ chega a igualar a ametade de 3177. numero do primeiro lugar da regra aurea.

SCHOLIO.

SUpposto que pella regra geral dada, quando se usar dos Logarithmos se devem sempre sommar os dous termos intermedios da analogia, & da ſomma tirarſe o Logarithmo do primeiro termo, para que reſte o do quarto buſcado; ha com tudo outro modo em que ſe ſommaõ tres numeros a ſaber o complemento arithmetico do Logarithmo do primeiro termo,& os Logarithmos dos dous intermedios,& da ſomma ſe corta a primeira letra da maõ eſquerda, & ficará o Logarithmo do quarto termo buſcado.

Complemento arithmetico de hum Logarithmo,he o numero que lhe falta para inteirar o Radio, ou o que reſulta do que vai de cada hũa de ſuas letras para nove começando da parte eſquerda,& ſómente quando ſe chega a ultima da maõ direita, ſe tomará o que della vai para dez.

Exemplo do primeiro modo.

SEJA o Logarithmo do Seno de 30. gr. 25. minut. o numero 97043947; para ſe achar pois o ſeu complemento arithmetico ſe tire o tal numero de 100000000. Logarithmo do Radio, & reſtará 02956053. por ſeu complemento arithmetico.

Exemplo do ſegundo modo.

DA primeira letra da parte eſquerda que he 9. do numero dado, cujo complemento arithmetico ſe buſca, para 9. vai nada; pello q̃ porei em primeiro lugar hũa cifra da parte eſquerda,& de 7. ſegundo numero para 9. vaõ 2. os quaes ſe poraõ em ſegundo lugar;& da terceira letra do numero dado, que he cifra para 9. vaõ 9. por tanto ſe poraõ 9. em terceiro lugar, & ſemelhantemente procedendo com as mais letras,&aſſentando no cõplemento arithmetico o que a cada hũa faltar para 9. & na derradeira vendo o que lhe falta para 10. virá a ſahir o meſmo complemento arithmetico acima achado 02956053.

Tambem he licito começar da parte direita vendo o que falta á primeira letra para 10. & logo a cada hũa das outras para 9. & ſahirá o meſmo numero.

Iſto ſuppoſto ſoltemos o meſmo Triangulo A B C por eſte caminho em que dados os dous lados A B 1224. B C 606. ſe buſca o angulo A, & por quanto eraõ os termos proporcionaes.

O lado A B 1224 ———— 3,0877814
O Reliquo lado B C 606 ———— 2,7824726

Ra-

Radio ———————————— 10,0000000
12,7824726

Tangente do angulo A opposto ao reliquo 3,0877814
BC de 26.gr.20.min. 9,6946912

Busquese nas taboas dos numeros absolutos o Logarithmo de 1224. que he 3087781 4. & pella regra sobreditta será seu complemento arithmetico 69122186, que se deve pôr na primeira regra, como se vè ———————— 6,9122186
E logo o Logarithmo de 606. que he ———— 2,7824726
E em terceiro lugar o Logarithmo do Radio ——— 10,0000000
Os quaes tres numeros sommados fazem ———— 19,6946912
Do qual numero cortada a primeira letra da parte esquerda, que he 1, resta o numero ———— 9,6946912
Logarithmo da Tangente do angulo A como nos avia sahido na primeira operaçaõ.

NOTA I.

HE porèm de advertir que quando o Radio entrar em segũdo, ou terceiro lugar da analogia se escusa sommar o seu Logarithmo com o do termo intermedio, & complemento arithmetico do primeiro, mas sòmente o ditto complemento arithmetico do primeiro com o Logarithmo do outro termo intermedio & neste caso se naõ tira a primeira letra da parte esquerda do numero da somma, porque vem a ser o mesmo Logarithmo do Radio, que se deixou de sommar, & por tanto poremos em cada hũ dos casos tambem a proporçaõ logarithmica, em que entrar o cõplemento arithmetico de algum Logarithmo, mediante o qual se soltaõ os Triangulos sòmente por somma de dous numeros, ou pella somma de tres tirando della a primeira letra esquerda; o que tambem se funda em certo theorema dos Logarithmos, que se escusa referir por trattarmos sò da practica.

NOTA II.

DEvese mais advertir que quando o primeiro termo da analogia for Secante, ou Tangente tal que seu Logarithmo exceda ao do Radio, por seu complemento arithmetico se tomará o que faltar para o duplo Logarithmo do Radio, & se exceder ao duplo Logarithmo do Radio, se tomarà o que faltar para o triplo Logarithmo do Radio, & assim por diante.

NOTA III.

POde ſucceder ſer hum lado do Triangulo taõ pequeno que ſeja menor que a unidade, poſto que o outro ſeja muito grāde; & como nas taboadas naõ ha Logarithmos de numero menor que a ditta unidade, por quanto o Logarithmo de 1. he nada, ou cifra, nos Logarithmos modernos, que nas taboadas ſe coſtuma aſſinar com oito cifras para fazerem hũa fileira igual em caracteres ás fileiras de Logarithmos reſpondentes a outros numeros mayores que 1. & o meſmo he eſcreverſe o Logarithmo de 1. com muitas cifras que com hũa ſò; pois ſempre ſignificaõ nada; ſegueſe que o Logarithmo de menos que 1. a ſaber o de qualquer quebrado, ſerá ainda menos que nada; o que cõ a imaginaçaõ ſe deve conſiderar, porque na realidade naõ ha menos que nada. Eſtas conſideraçoens ſaõ cõmuas aos Algebriſtas, & com numeros fingidos menores que nada ſoltaõ muitas ſutiliſſimas queſtoens de numeros verdadeiros.

Fig. 31. Neſte caſo ſe obra na fòrma ſeguinte. No Triangulo rectangulo A B C ſeja o lado A B os meſmos 1224. palmos, que havemos ſuppoſto, porèm o lado B C ſeja ſómente $\frac{1}{3}$ de palmo. Buſcaſe o angulo B A C.

Reſoluçaõ pellas taboas dos Senos, & Tangentes naturaes com os ſeguintes termos proporcionaes.

O lado A B 1224.
O reliquo lado B C $\frac{1}{3}$
Radio
Tangente do angulo A oppoſto ao reliquo lado B C.

Multipliqueſe o ſegundo termo $\frac{1}{3}$ pello terceiro a ſaber pello Radio, iſto he por 10000000; reſulta o producto $\frac{10000000}{3}$. que repartido pello primeiro termo 1224. dá no quociente 2723. $\frac{1144}{3672}$ a que nas taboas de Pitiſco, ou em quaeſquer outras (tirando a parte proporcional) reſpondem 56. ſeg. 10. terceir. quaſi pello valor do ditto angulo A.

Por Logarithmos com os meſmos termos proporcionaes.

O lado A B 1224

O reliquo lado B C $\frac{1}{3}$	— 0,4771212547
Radio	10,0000000000
	9,5228787453
	3,0877814178
Tang. do ang. A opposto a o reliquo lado B C	6,4350973275

Pella regra ordinaria se haviaõ de sommar os Logarithmos dos dous termos intermedios, & da somma tirarse o Logarithmo do primeiro termo. Mas porque o segundo termo $\frac{1}{3}$ he menor que a unidade, se ha de buscar nas taboas o Logarithmo do denominador deste quebrado, a saber de 3. o qual Logarithmo he 0,4771212547; ao qual se ha de applicar da parte esquerda hũa risca que he significativa de ser o tal Logarithmo defectivo, isto he de numero menor que a unidade; qual he $\frac{1}{3}$ & naõ de 3. a que elle responde na taboada; concebendose pello sinal — que o tal Logarithmo he tanto como elle significa menos que nada, quanto sem o tal sinal significa mais que nada, & em lugar de se sommarẽ os Logarithmos do segundo, & terceiro termo, se deve diminuir o segundo termo menor 0,4771212547. do terceiro mayor 10,0000000000, & restaõ embaixo 9,5228787453; que em sustancia vem a ser a sõma dos dittos dous Logarithmos, ainda que pello modo da operaçaõ pareça subtracçaõ, por quanto quando se ajunta Logarithmo defectivo com outro abundante se faz a somma por via de subtracçaõ; pondose na ditta somma hũa * q̃ significa mais, & he o sinal do mayor numero dos dous que se sommaõ hum com o sinal significativo de menos, outro com o sinal * significativo de mais ou de Logarithmo abundante, isto he de Logarithmo respondente a numero mayor que a unidade, como he notorio aos Algebristas.

Tirando agora de 9,5228787453, o Logarithmo de 1224. primeiro termo que he 3,0877814178. resta o numero 6,4350973275. a que nas taboas dos Logarithmos (tirando a parte proporcional) respondem os mesmos 23. seg. & 23. terc. quasi, que vem a ser 13. terc. mais do que pello primeiro calculo por via das taboas dos Senos, & Tangentes naturaes, o que nasce de assim huns como outros naõ serem precisamente os verdadeiros, porque saõ ordinariamente raizes irracionaes que senaõ podem significar em numeros com toda a rigurosa precisaõ, mas sòmente proximos á verdade, tanto mais quanto as raizes se significaõ em mayores numeros, ou Logarithmos respondentes; de que em outra occasiaõ poderemos dar ampla noticia pella doutrina de infinitos Autores, que desta materia tem escritto.

Mas a differença que nos resultou de hũa, & outra operaçaõ he cousa taõ pouca que saõ sòmente os dittos 13. terceiros, que vem a ser pouco mais de hum sexto de segundo; o que calculei taõ miudamẽte para que se veja o modo com que se obra com os Logarithmos defectivos, que produz o mesmo effeito, que obrãdose pellos Senos, Tangentes, & Secantes naturaes entrando os mesmos numeros dados.

Adiante traremos outro exemplo, em que o lado menor que a unidade seja tal quebrado, que não tenha a unidade por numerador como tem $\frac{1}{3}$ que havemos tomado por exemplo; mas que seja o tal numerador numero mayor que a unidade, ainda que todo o numero do quebrado com numerador, & denominador valha menos que a unidade, ou 1. inteiro.

PROBLEMA II.

Dados hum lado, & a Hypotenusa buscase qualquer dos angulos.

NO Triangulo rectangulo A B C buscase qualquer dos angulos agudos A, C dados.

Fig. 32. O lado A B 1140.

A Hypoth. A C 1378.

Termos proporcionaes.

Hypothenusa A C 1378.

Theor. Radio	10,0000000
Lado A B 1140.	3,0569048
	13,0569048
	3,1392492
	9,9176556

Seno do angulo C de 55. gr. 49. min. opposto ao lado dado pello qual angulo C achado se conhece logo o angulo A que será de 34. gr. 11. min. porque ambos se igualaõ com hum recto, ou 90. gr. em razaõ de ser recto pella hypotesi o angulo B.

Segundo modo,

Termos proporcionaes.

O lado A B 1140.

Hy-

Hypothnusa AC 1378. ————	3,1392492
Radio ————	10,0000000
	13,1392492
	3,0569048
Secante do angulo A adjacente ao lado dado,&	10,0823444

dahi o reliquo ang. C por igualaré ambos 90.gr.

SCHOLIO I.

MAS porque em muitas taboas naõ ha Logarithmos de Secantes, para se saber que graos, & minutos respondem ao quarto termo da segunda analogia acima, se nella se obrar por Logarithmos, se armarà a regra seguinte.

Tomese o dobro do Logarithmo do Radio, & delle se tire o numero achado no ultimo termo, & restarà o Logarithmo do Seno de seu complemento, que dará nas taboas os graos, & minutos que lhe respondem, & o que delles faltar para 90. gr. será a quantidade do angulo A; que tambẽ se pòde logo buscar nas mesmas taboas, a saber o complemento do angulo C para os dittos 90.gr. por estarem fabricadas com tal artificio, que mostraõ hum arco, ou angulo, & juntamẽte o cõplemento para quadrante, ou 90.gr.

EXEMPLO.

SOmese o Logarithmo do segundo termo 1378. ————	3,1392492
Cõ o Logarithmo do Radio terceiro termo	10,0000000
E da somma ————	13,1392492
Se tire o Logarithmo do primeiro termo 1140.	3,0569048
E restarà o Logarithmo da Secante do angulo A adjacente ao lado dado, que he ————	100823444
Do duplo Logarithmo do Radio ————	200000000
Se tire o Logarithmo da Secante do angulo A acima achado. ————	100823444
E restarà o Logarithmo do Seno do complemento do angulo A buscado ————	099176556

A que nas taboas respondem, ou o que mais proximo a elle se acha 55 gr. 49. min. & por tanto o complemento para 90.gr. que he 34.gr. 11. min. será a quantidade do ditto angulo A.

SCHO-

SCHOLIO II.

IA que dissemos, que em muitas taboas naõ ha Logarithmos de Secantes daremos hũa regra facil de como se possaõ achar mediante os Logarithmos dos Senos, que nellas saõ cómuns, para q̃ os curiosos os possaõ fabricar, & dispor em taboas.

Tomese o Logarithmo do Seno do complemento do arco, ou angulo de que queremos investigar o Logarithmo da Secante, & se tire do duplo Logarithmo do Radio; & o que restar será o Logarithmo da Secante, que se busca.

EXEMPLO.

PRoponhamos que queremos inquirir o Logarithmo da Secante de hum arco, ou angulo de 20. gr. 40. min. cujo complemento he 69.gr. 20. min. Busquese nas taboas o Logarithmo do Seno de 69.gr.20. min. que se achará ser 9,9711132. este se tire de 200000000. duplo Logarithmo do Radio, & restarà 10,0288868. Logarithmo da Secante dos dittos 20. gr.40.min. A razaõ disto naõ damos agora porque trattamos sómente da practica, mas por mayor apontamos seu fundamento o qual he q̃ o Radio he meyo proporcional entre o Seno de hum arco, & a Secante de seu complemento, como mostra Henrique Briggio liv. 1. Trigon. Britan. cap. 17. & outros infinitos.

PROBLEMA III.

Dados os angulos, & hum lado, buscase o outro lado.

Fig. 33. NO Triangulo rectangulo A B C, buscase o lado B C.

	Dados		(B recto.
O lado A B 1124	(Os angulos	(	C de 61.gr.40.min.
		(	A de 28.gr.20.min.

Termos proporcionaes.

Radio	
Tangente do ang. B A C 28.gr.20.min. opposto ao lado buscado.	9,7317460
Lado dado 1124.	3,0507663
O lado B C inquirido de 606.	2,7825123

Se-

Segunda analogia. Theor. 3

Seno do angulo C de 61.gr.40.min. opposto ao lado dado.	9,9445821
Seno do reliquo angulo A de 28.gr. 20.min.	9,6763281
Lado A B dado 1124.	3,0507663
	12,7270944
	9,9445821
O lado B C inquirido de 606.	2,7825123

SCHOLIO.

NESTE problema que pella primeira analogia se solta entrando por primeiro termo o Radio, & se busca lado, & em outros semelhantes será melhor obrar por Senos, Tangentes, & Secantes naturaes mediante a regra de tres, & invençaõ da Dizima, porque por ficar o Radio em primeiro lugar se poupa a divisaõ, & sahe logo o lado buscado ajustado nas suas partes, & particulas decimaes, o que pello modo cómum naõ sahe no tocante ás particulas; & he necessario inquirilas mediante a regra de tres na conformidade que dissemos no Scholio I. do problema I.

Disse que se poupa a divisaõ porque como o Radio fica sendo partidor, naõ ha mais que tirar tãtas letras da parte direita do numero, q̃ se houver de dividir, como quantas cifras houver no Radio, & as letras que ficarem na partiçaõ, ou da cortadura para a parte esquerda será o quociente, & as que se cortaõ da parte direita os quebrados decimaes, o qual modo he excellente; & muito usado dos modernos em seus calculos, principalmente nos da Architectura militar.

EXEMPLO.

MUltipliquese o numero 5391952. Tangente natural de 28.gr.20.min. segundo termo da primeira analogia acima (que saõ 5.prim.3.seg.9.terc.1.quart.9.quint.5.sext. 2. set. em razaõ de ter o Radio 7. cifras) por 1124. terceiro termo, & resulta no producto 606|0554048; o qual numero saõ settimos, por quanto os 1124. eraõ inteiros, que tem por exponente cifra, conforme o que dissemos na multiplicaçaõ da Dizima, & se deve pòr o exponente de settimos sobre a ultima letra da parte direita, & cortando da mesma banda sette letras (com que fica o mesmo, que feita a divisaõ pello Radio) ſahe no quociente 606. int. o prim. 5.ſeg.5.terc.4.quart.o. quint.4.ſext.8.ſept. que valem o meſmo que $\frac{5}{100}$ ou mais proximo á verdade $\frac{55}{1000}$, oũ approximando mais $\frac{554}{10000}$ &c.

NOTA.

POde hum dos angulos dados ſer taõ pequeno, que o lado que lhe he oppoſto, & ſe pertende achar ſeja tambem taõ pequeno, que o ſeu Logarithmo ſeja defectivo, pello q̃ ſe obrarà quaſi por ſemelhante modo, como diſſemos na nota 3. deſpois do Scholio 3. ao problema 1.

EXEMPLO.

Fig. 33. NO Triangulo rectangulo A B C ſe ſupponha o lado A B de 1124. (no problema I. o ſuppozemos de 1224.) o angulo B A C de 1. min. & por tanto ſerà o angulo A C B de 89. gr. 59. min. Buſcaſe o lado B C oppoſto ao angulo A. Seja primeiro pellos Senos, & Tangentes naturaes, para que ſe veja a concordancia com a operaçaõ Logarithmica.

Por Senos & Tangentes naturaes com os ſeguintes.

Termos proporcionaes.

Radio	
Tangente do ang. B A C de 1. min.	2909
Lado dado 1124.	1124
	11636
	5818
	2909
	2909
	3269716
Lado buſcado	10000000
Iſto he quaſi $\frac{1}{3}$ de palmo, ou pè, &c.	

Por Logarithmos com os meſmos

Termos proporcionaes.

	Logarithmos.
Radio	
Tang. do ang. B A C de 1. min.	6,4637261293
Lado dado 1124.	3,0507663112
	9,51-

	9,51449,24405
	10,00000,00000
Lado buscado a cujo Logarithmo	—0,48550,75595

Responde nas taboas algũa cousa menos de $\frac{1}{3}$ de palmo, ou pé, porq̃ por senaõ poder tirar o Logarithmo do Radio prim. termo q̃ he 10,00000,00000. do numero 9,51449,24405. somma dos Logarithmos dos dous termos intermedios, se ha de diminuir esta daquelle, & resta o numero —0,48550,75595. Logarithmo defectivo, a que se deve applicar da parte esquerda o sinal — significativo de menos; por quanto quando a somma dos dous Logarithmos intermedios he menor que o Logarithmo do Radio primeiro termo, & por tanto senaõ pòde fazer a subtracçaõ direita tirandose este daquella se deve fazer preposteramente, isto he ás avessas, tirando a somma dos Logarithmos dos dous termos intermedios, do Logarithmo do Radio, & o Logarithmo que resta he defectivo de numero menor que a unidade.

E digo que ao tal Logarithmo que resta da subtracçaõ prepostera responde nas taboas menos de $\frac{1}{3}$ porque ainda que nellas se veja que o Logarithmo restante he mayor que o que nellas responde ao num. 3. & menor que o que responde ao num. 4, sabei que os Logarithmos defectivos quanto mayores saõ, tanto respõdem a menores numeros quebrados; pello que se vedes que considerado o tal Logarithmo sem o sinal antecedente — de defectivo he mayor que o que responde ao num. 3. & por tanto respõde ao num. mayor que 3. por isso mesmo sendo defectivo respõde ao num. menor que $\frac{1}{3}$ mas quasi que o iguala como haviamos achado mediante os Senos, & Tangẽtes naturaes entrando o mesmo num. do lado dado por via de multiplicaçaõ, & divisaõ.

PROBLEMA IV.

Dada a Hypotenusa, & angulos buscase qualquer dos lados.

Fig. 34

NO Triangulo rectangulo A B C buscase o lado A B.

Dados

(A Hypotenusa A C 1277	(A C B 61. gr. 40. min.
(Os angul.	(B A C 28. gr. 20. min.

Ter-

Termos proporcionaes.

Theor.1 Radio

Seno do angulo A C B 61.gr.40.min. opposto ao lado buscado.

Hypotenusa A C dada 1277.

Lado buscado 1124|0171878.sept.

Por estar nesta analogia o Radio em primeiro lugar se obre pella Dizima,& Senos naturaes, conforme havemos ensinado, & sahirá o lado buscado como se vè acima.

Outro modo.

Secante do angulo B A C de 28. gr. 20.min. contermino ao lado pertendido.

Radio.

Hypotenusa A C 1277.

Theor.2. Lado buscado A B.

Executese este segundo modo por via de Logarithmos, para o que se devem buscar o Logarithmo da Secante de 28.gr.20. min. pella regra dada no Scholio segundo do problem. 2. deste cap.se nas taboas naõ ouver Logarithmos das Secantes, para o que se busque nellas o Logarithmo do Seno de 61.gr.40.min. complemento de 28.gr.20.min. o qual se achará ser —— 9,9445821

& se tire do duplo Logarithmo do Radio —— 200000000

	99445821
E restará	100554179

Logarithmo da Secante do angulo B A C de 28.gr.20. min que se buscava.

Sõmemse pois os Logarithmos dos dous termos intermedios, & tirese o do primeiro,& restarà o Logarithmo do quarto termo, algũa cousa mayor,que o do numero 1124. & se quizermos saber quantas particulas decimaes lhe respondem alem dos 1124. se deve armar a regra de tres conforme o ditto no Scholio 2.probl. 1.& se achará o mesmo que pella operaçaõ da Dizima feita acima, conforme os termos da primeira analogia.

PROBLEMA V.

Dada a Hypoten.& hũ lado buscase o reliquo lado.

NO Triang.rectang. A B C buscase o lado B C.

Dados (A Hypot. A C 1277. (O lado A B 1124.

Para

Para a soluçaõ, deste problema, & de alguns seguintes pellas regras da Trigonometria se requerem duas operaçoens; a primeira das quaes manifesta hum angulo agudo, o qual sabido se conhece logo o reliquo ang. agudo; a segunda descobre o lado inquirido. Figur. 35.

Primeira Operaçaõ.

Termos proporcionaes.

Hypotenusa dada A C ——— 1277 Theor. 1
Lado dado A B ——— 1124
Radio ———
Seno do angulo C contermino ao lado buscado, & dahi o reliquo angulo A por ser o seu complemento para hum recto.

Segunda Operaçaõ.

Termos proporcionaes. Theor. 1

Radio
Seno do ang. A opposto ao lado buscado.
Hypotenusa A C dada.
Lado B C inquirido.

Ou tambem esta II. Operaçaõ pella seguinte analog.

Radio.
Tangente do ang. opposto ao lado pertendido. Theor. 2
Lado A B dado.
Lado B C buscado.

SCHOLIO.

ESTA operaçaõ se pòde tambem executar pella 47. do primeiro, ou 31. do sext. de Euclides quadrando o num. 1277. conteudos na Hypotenusa A C; & de seu quadrado tirando o quadrado de A B, porque restarà o quadrado do lado B C, do qual tirando a raiz quadra, serà esta o valor do lado B C buscado; pois conforme as dittas proposiçoẽs o quadrado de A C se iguala aos quadrados de A B, B C.

Há tambem hũa regra de Henrique Briggio cuja demonstraçaõ traz no Cap. 16. & 17. da Arithmetica logarithmica, que facilmente se demonstra, & he a seguinte.

Tomese a somma da Hypotenusa, & lado dado, & a differença do do mesmo lado,& Hypotenusa, & desta somma, & differença se busquem os Logarithmos,que se juntem em hũa somma; a ametade da qual será o Logarithmo do lado buscado.

EXEMPLO.

Hypotenusa A C ——— 1277 ——— 1277
O lado A B ——— 1124 ——— 1124
Somma 2401. resto 0153

Somese o Logarithmo de 2401. que he a somma da Hypotenusa,& lado. ——— 3,3803922
Com o Logarithmo de 153. sua differença ——— 2,1846914
Sahe por somma ——— 5,5650836
Cuja ametade ——— 2,7825418
Será o Logarithmo do lado buscado, a que nas taboas respondem proximamente 606.

PROBLEMA VI.

Dados os angulos, & hum lado, buscase a Hypoth.

Fig.36. NO Triangulo rectangulo A B C, buscase a Hypoth. A C.
Dados (O lado A B 1124 (A C B 61.gr.40.min
(Os angulos (B A C 28.gr.20.min.

Termos proporcionaes.

Theor.3. Seno do ang.C 61.gr.40.min. opposto ao lado dado
Radio,que he o Seno do ang.recto B
Lado A B 1124.
Hypoth. A C buscada 1277.quasi.

Segunda analogia executada pellos mesmos numeros dados, & pello Radio,& Secante naturaes.

Radio
Secante do angulo A 28. gr. 20. min.
adjacente ao lado dado ——— 11361036
Lado A B dado 1124 ——— 1124
Theor.2
45444144
22722072
11361036
11361036
Hypoth. A C buscada 1277.quasi. ——— 1276|9804464

NOTA.

ESTE modo se vè exemplificado á margem pella Dizima cõ a verdadeira quantidade da Hypoten. A C que naõ chega à igualar precisamente os 1277. mas sòmẽte $1276\frac{9}{10}$; ou mais proximo á verdade $1276\frac{98}{100}$; ou $1276\frac{980}{1000}$ que he o mesmo, ou ainda mais proximamente á verdade $1276\frac{9804}{10000}$, & assim por diante, mas nunqua póde inteirar precisamente os 1277; posto que na operaçaõ tomamos este numero pella insensivel differença que faz do verdadeiro.

Usei nesta operaçaõ do mesmo numero dado, & do Radio, & Secante naturaes multiplicando o segundo termo pello terceiro, & partindo o producto pello primeiro que he o Radio, & porq̃ este he 1. com sette cifras fica feita á repartiçaõ com se cortarem sette letras numericas da parte direita no producto, como se vè na operaçaõ.

Tambem obrando por Logarithmos se pòde achar o mesmo numero $1276\frac{9804464}{10000000}$ se se tirar a parte proporcional combinando o Logarithmo que na operaçaõ nos sahir, a que proximamente responderaõ 1277. cõ os q̃ respondem a 1276. & a 1277. precisamẽte, & por suas differenças tirar a ditta parte proporcional.

PROBLEMA VII.

Dados os lados buscase a Hypotenusa.

ESTE probl. se resolve pello modo ordinario por duas operaçoens; na primeira das quaes se investigaõ os angulos agudos; na segunda a Hypotenusa. Figur. 37.

No Triang. rectang. A B C buscase a Hypotenusa.

Dados os lados (A B 1124. (B C 606.

Primeira Operaçaõ.

Termos proporcionaes.

Hum lado. Theor. 2

Reliquo lado.

Radio.

Tangente do ang. opposto a o reliquo lado, & dahi o outro ang.

Seg.

Segunda Operaçaõ.

Termos proporcionaes.

Seno do angulo opposto a hum lado.
Radio
Theor.3 Lado opposto áquelle angulo.
Hypotenusa buscada.

EXEMPLO.

JA se sabe que pello modo geral dos Logarithmos se sommaõ os dous termos intermedios; & da somma tirando o Logarithmo do primeiro, resta o Logarithmo do quarto termo: porèm exemplifiquemos este caso mediante os Logarithmos, usando do complemento arithmetico do primeiro termo, que deve ser sommado com os Logarithmos dos dous intermedios, & da somma tirarse a primeira letra da parte esquerda: mas como hum dos termos intermedios seja o Radio se escusa entrar na somma seu Logarithmo, porque essa he a letra, que despois se havia de cortar da somma, pello que se sommaráõ sòmente o complemento arithmetico do primeiro, & o Logarithmo do termo intermedio, que naõ for Radio.

Primeira Operaçaõ.

O lado AB 1124. de cujo Logarithmo he complemento arithmetico. ———— 6,9492337
O reliquo lado BC 606. cujo Logarithmo he. — 2,7824726
Cuja somma de ambos os Logarithmos he. —— 9,7317063

A que nas taboas dos Logarithmos das Tangentes respondem proximamente 28.gr.20.min. pella quantidade do ang. A; & portanto será o angulo C 61.gr.40.min. complemento para 90.gr.

Segunda Operaçaõ.

Seno de hum angulo opposto a qualquer lado como do mesmo angulo A 28.gr.20.min. de cujo Logarithmo he o complemento arithmet. ———— 0,3236719.
BC 606. lado opposto ao tal ang. cujo Logarith. he 2,7824729
Cuja somma ———— 3,1061445
Mostra nas taboas o num. 1277. proximamente pella quantidade da Hypotenusa.

Scho-

SCHOLIO.

HA outra regra de Gellibrando para ſoltar eſte caſo, a qual he a ſeguinte. Do duplo Logarithmo do mayor lado ſe tire o Logarithmo do menor,& o numero abſoluto, que reſponder á differença dos Logarithmos ſe ajũte ao menor lado; de cuja ſomma ſe buſque o Logarithmo, o qual ſe ſomme com o Logarithmo do menor lado,& ametade da ſomma deſtes Logarithmos ſerá o Logarithmo da Hypotenuſa buſcada A C.

EXEMPLO.

O Duplo Logarithmo de 1124. mayor lado he	6,1015326
O Logarith. do menor lado 606. he —	2,7824726
Tirando o menor do mayor, reſta ——	3,3190600
A que nas taboas reſpondem proximamente —	2085
Ajuntandolhe o menor lado. ——	606
Faz ſomma de ——	2691
Cujo Logarithmo he ——	3,4299137
O meſmo lado 606. ſeu Logarithmo ——	2,7824726
Somma ——	6,2123863
Semiſomma ——	3,1061932

Serà o numero 3 1061932. o Logarithmo da Hypot. a que nas taboas reſpondem proximamente 1277. pella Hypot. A C buſcada.

Tambem pòde ſer a regra de Gellibrando na fôrma ſeguinte. Do duplo Logarith. do menor lado ſe tire o Logarithmo do mayor,& o numero abſoluto que reſponde á differença dos Logarithmos ſe ajunte ao mayor lado; de cuja ſomma ſe buſque o Logarithmo, o qual ſe ſomme com o Logarithmo do mayor lado,& ametade da ſomma ſerá o meſmo Logarithmo da primeira operaçaõ,& moſtrarâ a meſma Hypot. buſcada A C.

Por tanto ſe pòde começar a operaçaõ cõ qualquer dos lados dados,& porque eſta regra naõ he cõmua, & Gellibrando a naõ demonſtra;& nella ſe enganou Frobenio no ſexto problema, que na noſſa ordem he 7. cuidando, que pello primeiro modo ſobreditto ſe buſcava hũa linha, ou numero meyo proporcional entre os lados dados do Triangulo, naõ ſe buſcando ſenaõ huã linha, ou numero terceiro proporcional, nem traz a regra ſe naõ pódo ſòmente em primeiro lugar o dobro do Logarithmo do mayor numero, para della tirar o Logarithmo do menor; nòs a demonſtraremos na ſeguinte fórma.

Demonſtraçaõ.

Fig. 38. No Triangulo rectangulo A B C ſe do duplo Logarithmo do mayor lado A B ſe tirar o Logarithmo do menor B C, ſerá o reſiduo Logarithmo da linha B O terceira proporcional aos dous lados C B, B A; porque de tres numeros, ou linhas proporcionaes quaes ſaõ C B, B A, B O, a ſomma dos Logarithmos das extremas ſe iguala ao duplo Logarithmo da media, por tanto ſe ſe ajuntarem em hũa ſomma os Logarithmos de O C, C B ſerá igual ao duplo Logarithmo de A C; porque tambem ſaõ proporcionaes O C, C A, C B, por onde ametade da ditta ſomma, moſtrarà nas taboas a Hypotenuſa A C do Triang. A B C como mãda a regra.

Podeſe tambem tirar do duplo Logarithmo do menor lado B C o Logarithmo do mayor A B, porque o reſiduo ſerà o Logarithmo da terceira proporcional B D, porque das tres proporcionaes A B, B C, B D a ſomma dos Logarithmos das extremas A B, B D ſe iguala ao duplo Logarithmo da media B C, por tanto ſe ſe ajuntarem em hũa ſomma os Logarithmos de D A, A B ſerá eſta igual ao duplo Logarithmo de A C, porq̃ tambem ſaõ proporcionaes D A, A C, A B, por onde a ametade da ditta ſomma moſtrarà nas taboas a meſma Hypotenuſa A C.

Daqui fica manifeſto, que a ſomma dos Logarithmos O C, C B he a meſma que a ſomma dos Logarithmos D A, A B.

Pella 47. do prim. ſe acharà a meſma Hypotenuſa quadrando cada hum dos numeros dos lados, & ajuntando os quadrados em hũa ſomma, da qual tirando a raiz quadra ſerá eſta a Hypotenuſa A C inquirida.

CAP. IV.

Da dimenſaõ dos Triang. rectilineos obliquangulos.

PROBLEMA I.

Dados dous lados, & hum ang. oppoſto a hum delles, buſcaſe o ang. oppoſto ao reliquo lado.

NO Triang. obliquang. A B C, buſcaſe o ang. obtuſo C B A.

Fig. 39. Dados os lados (A C 3241 (B C 2753.

O an-

O angulo C A B 42.gr.27.min.

Termos proporcionaes.

O lado B C dado 2735. opposto ao angulo A dado.

O reliquo lado A C 3241 ——————— 3,5106790

Seno do ang. A dado 42.gr.27.min. opposto ao lado dado ——————— 9,8292694

13,3399484

3,4369573

Seno do ang. B opposto, ao reliquo lado dado A C 9,9029911

Sahe por Logarithmo do Seno do ang. pertendido o numero, q̃ parece, a que nas taboas respondem proximamẽte 53.gr.7. min. mas porque o angulo que se busca he obtuso pella hypothesi, será sua verdadeira valia o que vai de 53.gr.7.min.para 180.gr. q̃ saõ 126 . gr. 53. min. pois o mesmo Seno, & Logarithmo he de hum ang. que de seu complemento para 180.gr. conforme o que dissemos no Cap.1.§.4.

Cautela.

NESTE problema, em que dados os dous lados, & hum ang. opposto a hum delles se busca o ang.opposto ao reliquo lado, he necessario hũa cautela, a saber se o angulo dado for obtuso, será o lado que se lhe oppoem mayor que qualquer dos outros, & o angulo buscado agudo: porém se o angulo dado for agudo, como supposemos no caso acima, será incerto se o angulo opposto ao mayor lado he obtuso, recto, ou agudo: pello que será necessario para se achar, que se nos dè conhecida sua especie, a saber se he recto, obtuso, ou agudo, como tomamos por hypothesi no problema, suppondo ser obtuso o angulo, que buscamos opposto ao mayor lado.

Ou com Regiomonte lib.1.propos.51.se a perpendicular, que do ponto C cõmum concurso dos dous lados conhecidos cahe sobre o terceiro lado B A, vem a dar fóra delle, como se vè na perpendicular C O a respeito do Triangulo A C B; ou se cahe dentro do Triangulo A C K: pois cahindo fóra he sinal de ser obtuso o angulo A B C opposto ao mayor lado A C, & se cahir dentro como no segundo, será agudo o angulo A K C que tambem se oppoem ao mesmo lado mayor A C.

SCHOLIO.

PODe succederser hum dos lados dados menor que a unidade, & por tanto ser o seuLogarithmo defectivo.Supponhase no mesmo Triangulo o lado B C 2735. o angulo A seu opposto 42 gr.27.min. mas o lado A B sómente $\frac{3}{5}$ de palmo,ou pè,& que se busca o angulo C.

Fig.39. Já temos ditto o modo de se obrar pellos numeros absolutos, Senos,& Tangentes naturaes.Por Logarithmos, em que deve entrar hum defectivo, será pello modo seguinte.

Termos proporcionaes.

Lado B C dado 2735. opposto ao ang. A dado.

O reliquo lado A B $\frac{3}{5}$	——	0,22184,87496
Seno do ang. A dado 42.gr.27.min.	——	9,82926,93848
		9,60742,06352
		3,43695,73307
Seno do ang. C 30. seg. 37. terc.	——	6,1704633045

O Logarithmo 0,22184,87496. do seg. termo A B $\frac{3}{5}$ he defectivo notado com o sinal — significativo de menos, por ser de numero menor que a unidade;por tanto para se sommar com o Logarithmo abundante 9,82926,93848. do ang. A terceiro termo; deve ser a somma por via de subtracçaõ tirando o menor do mayor,& ao residuo 9,60742,06352. applicar o sinal * significativo de mais, ou de Logarithmo abundante,como se entendem todos ainda quando naõ trazem o dito sinal, * se he que naõ trazem o sinal — significativo de menos. Logo da somma do segũdo, & terceiro termo affecta com o sinal * se tire o Logarithmo do primeiro termo na fòrma ordinaria, resta finalmente o Logarithmo 6,1704633045,a que nas taboas tirando a parte proporcional respondem 30. segundos 37. terceiros pello valor do ditto angulo C.

PROBLEMA II.

Conhecidos dous lados,& o ang.por elles comprehendido, investigar qualquer dos outros angulos.

NO Triangulo obliquangulo A B C buscase qualquer dos angulos B C, dados

Os

Os lados (A C 3241.
(A B 717.

O angulo B A C 42.gr.27.min.

Termos proporcionaes.

Somma dos dous lados dados
Differença dos mesmos lados
Tangente da semisomma dos angulos oppostos, ou da ametade do complemento do angulo comprehendido para 180.gr. Figur. 40. Theor. 4
Tangente da semidifferença dos angulos oppostos.

Achada a semidifferença dos angulos se se ajuntar a semisomma dos mesmos angulos, resultarà o mayor angulo, & se se tirar, o menor.

EXEMPLO.

Sommese o mayor lado sabido A C ——— 3241
com o menor sabido A B ——— 0717
Serà a somma ——— 3958
Logo do mesmo mayor lado A C ——— 3241
Se tire o menor lado A B ——— 0717
Será a differença ——— 2524
Despois disto de ——— 180.gr.00.min.
Se tire o ang. dado B A C ——— 42.gr.27.min.
Restará a somma dos outros dous ——— 137.gr.33.min.
E será a semisomma. ——— 68. gr.46. min.30.seg.

Pella qual se tomem 68.gr.47.min. por quanto os segũdos chegaõ a 30. Ficaõ logo exemplificados os termos proporcionaes na forma seguinte.

	Logarithmos.
Somma dos lados 3958.	
Differença dos lados — 2524 ———	34020893
Tang. da semisomma dos ang. a saber 68.gr.47.min.	104109343
Tang. da semidifferença dos mesmos angulos de 58.gr.40.min.	13,8130236
	3,5974758
	10,2155478

Sõmando pois os Logarithmos dos dous termos intermedios, & da somma tirando o Logarithmo do primeiro, resta o Logarithmo do quarto termo, como se vè acima, a que nas taboas correspondem 58.gr. 40. min. que he a semidifferença dos angulos. Esta semidifferença 58. gr. 40. min. sommada com a semisomma dos

dos mesmos angulos 68. gr. 46.min. 30. seg. acima achada faz o mayor ang. de 127.gr.26.min.30.seg.

E da mesma semisomma dos angulos 68.gr.46.min.30.seg. tirada a mesma semidifferença 58.gr.40.min. restará o menor ang. buscado de 10.gr.6.min.30.seg.

SCHOLIO.

HA outras regras de Frobenio no problema 16. para soltar o mesmo problema,que saõ as seguintes.

Primeira analogia.

Semisomma dos lados

Pella quarta analogia do Scholio ao ao Theor.4.

Differença entre a semisomma dos lados,& qualquer delles.

Tang.do semicomplemento do ang. dado para 2. rectos, ou da semisomma dos angulos oppostos.

Tangente de hum arco pello qual o menor angulo dos buscados he menor,que o ditto semicomplemento,& o mayor ang.mayor.

Pello que os graos, & minutos do tal arco achado em quarto lugar, se tirem do ditto semicomplemento,& sahirá,o angul. menor opposto ao menor lado:& juntandose o menor arco achado, ou seus graos, & minutos cõ o mesmo semicompleměto,resultará o mayor angulo opposto ao mayor lado.

EXEMPLO.

SOmmese o mayor lado A C conhecido	3241
Com o menor A B tambem conhecido	0717
Será a somma	3958
E a semisomma	1979
Desta se tire o menor lado A B	0717
Resta a differença	1262
Ou do mayor lado A C	3241
Se tire a semisomma	1979
Restará a mesma differença	1262

O complemento do ang. A dado 42.gr.27.min.para 180. he 137.gr.33.min. O semicomplemento 68.gr.46.min.30.seg. pello qual se tomem 68.gr.47.min. por chegarem os segundos a 30. ficaõ logo exemplificados os termos proporcionaes, a saber.

Semisomma dos lados ——— 1979.

Differença entre a semisomma,& qualquer dos lados. 1262.—3,1010593

Tan-

Tangente do ſemicomplemento do angulo dado para 180. gr. o qual ſemicomplemento he 68.gr.46.min.30.ſeg.pello qual ſe tomaõ 68.gr.47.min. ——— 10,4109343

Tangente dos graos, & minutos do arco buſcado, a que nas taboas reſpondem proximamente 58.gr.40.min. ——— 13,5119936
32964458
10,2155478

Tirando pois do ſemicomplemento acima achado. ——— 68.gr.46.min.30.ſeg.
O arco ultimamente deſcuberto. — 58.gr.40.min.00.ſeg.
Reſta o menor angulo buſcado de — 10.gr.06.min.30.ſeg.
E ao meſmo ſemicomplemento — 68.gr.46.min.30.ſeg.
Acreſcentando o meſmo menor arco ultimamente inquirido de ——— 58.gr.40.min. 00.ſeg.
Reſulta o mayor angulo de ——— 127.gr.26. min.30.ſeg.
que he o meſmo que tinhamos achado pella primeira operaçaõ.

Segunda Analogia.

Termos proporcionaes.

Somma dos lados
O dobro do mayor lado
Tangente da ſemiſomma dos angulos oppoſtos.
A ſomma das Tangẽtes da ſemiſomma, & ſemidifferença dos ang.

Pella primeira Analogia do Schol. ao Theor. 4

Pello que do quarto termo achado ſe tire o terceiro, que he a Tangente da ſemiſomma dos angulos, & reſtarà a Tangente da ſemidifferença, a qual ſemidifferença achada em graos, & minutos pellas taboas, & acreſcentada a ſemiſomma dos angulos darà o mayor ang. & tirada, darà o menor.

A ſobreditta ſegunda Analogia ſe entende obrando pellos numeros abſolutos dos lados, & Tangẽtes naturaes dos angulos, que ſe ouvermos de obrar por meyo de ſeus Logarithmos, em ſe achando o quarto termo (que ficarà ſendo Logarithmo da ſomma das Tangentes, da ſemiſomma, & ſemidifferença dos angulos) ſe deve buſcar nas taboas a Tangente, que reſponde ao tal Logarithmo, da qual ſe deve tirar a da ſemiſomma dos angulos, & reſtarà a da ſemidifferença: vendo pois na margem das taboas, que graos, & minutos reſpondem à Tangente da ditta ſemidifferença dos angulos, ſe tirem os dittos graos, & minut. da ſemiſomma dos angulos, & reſtarà o menor ang. ou ſe acreſcentem à ditta ſemiſomma,

ſomma,& reſultará o mayor;como ſe tem ditto;o que eſcuſo exẽplificar,porque os que jà ſouberem executar os calculos precedentes facilmente entenderaõ o ſobreditto.

Terceira Analogia.

Termos proporcionaes.

Somma dos lados.

Pella ſegunda Analog. do Schol.ao Theor.4

O dobro do menor lado.

Tangente da ſemiſomma dos angulos oppoſtos.

Differença das Tangentes da ſemiſomma, & ſemidifferença dos angulos oppoſtos.

Pello que o quarto termo achado ſe tire do terceiro, & reſtarà a Tangente da ſemidifferença dos angulos: vendo pois nas taboas os graos,& minutos,que lhe reſpondem,& acreſcentandoos á ſemiſomma dos angulos,reſultará o mayor,& tirãdoos,o menor.

Iſto ſe entende obrando pellos numeros abſolutos dos lados, & Tangentes naturaes dos angulos,porque avẽdo de ſer por ſeus Logarithmos, em ſe achando o Logarithmo do quarto termo, ſe verà,que Tangente lhe reſponde; & eſta ſe tire da Tangente do terceiro,& reſtará a Tangente da ſemidifferença dos angulos;como ditto he,de que tambem ſe eſcuſa trazer exemplo.

Quarta Analogia.

Termos proporcionaes.

Lado menor.

Lado mayor.

Pella terceira anelogia do Scholio ao Theor.4.

Secante do complemento,ou exceſſo do ang.comprehendido.

Hum quarto numero.

Deſte quarto numero ſe tire a Tangente do complemento do ang. comprehendido, ſe eſte for agudo:& a differença será a Tãgente do complemento do angulo oppoſto ao menor lado,& dahi ſerà logo conhecido o mayor.

Porèm ſe o angulo comprehendido for obtuſo, ao quarto numero achado ſe acreſcente a Tangente do exceſſo do ditto ang. & a ſomma ſerá Tangente do complemento do angulo oppoſto ao menor lado.

No ang. agudo por Tangente do complemento ſe entende a Tangente do que lhe falta para 90.gr.& no obtuſo a Tang.do q̃ paſſa de 90.gr.como advertimos no capit. I § 4.

Mas

Mas tenho por melhor com outros, chamar complemento ao que falta a hum ang. para inteirar 90. gr. & excesso aô que passa de 90. gr.

EXEMPLO.

SEJA proposto o mesmo Triangulo A B C no qual sendo conhecidos

Os lados (A C 3241. (A B 717.

E o angulo C A B 42. gr. 27. min.
Se busca qualquer dos angulos B, C.

Termos proporcionaes.

Lado menor ——— 0717 Figur. 40.
Lado mayor ——— 3241
Secante do complemento do angulo comprehendido 42. gr. 27. min. isto he Secante de 47. gr. 33. min.
Hum quarto numero.

Este modo se deve obrar pellos numeros naturaes, por naõ termos taboas de Logarithmos, que nos possaõ servir para toda a operaçaõ, & serâ difficultoso darse agora regra de se fazerẽ: pello que a Secante do complemento de 42. gr. 27. min. isto he 47. gr. 33. min. terceiro termo se multiplique por 3241. segundo termo. ——— 14815988

3241
14815988
59263952
29631976
44447964

E o producto. ——— 48018617108
Se reparta pello primeiro termo ——— 717
E sahirà no quociente hum quarto numero buscado: a saber ——— 66971571
E porque o ang. comprehendido he agudo de 42 gr. 27. min. se tome seu complemento 47. gr. 33. min. cuja Tangente ——— 10932223
Se tire do sobreditto numero achado no quociente, & restarà. ——— 56039348

Que he a Tang. do complemento do ang. opposto ao menor lado, a que nas taboas respondem proximamente 79.gr. 53.min. cujo complemento 10.gr.7.min.serâ o angulo C buscado opposto ao menor lado, quanto proximamente tinhamos achado pella operaçaõ da primeira analogia.

Pella segunda Analog. do Scholio ao Theor. 4. Porém se o ang. comprehendido fosse obtuso, em tal caso ao 4. num. que sahio no quociente da repartiçaõ se avia de acrescẽtar a Tang. do complemento do ang. comprehendido (a saber do excesso sobre 90.gr.) & resultaria a Tang. do complemento do ang. buscado opposto ao menor lado.

PROBLEMA III.

Dados os lados cada hum per-si conhecer qualquer dos angulos.

Fig. 41. NO Triangulo obliquangulo A B C buscase qualquer dos angulos a saber, o ang. C, dados

Os lados	(A C	2345.
	(A B	1938.
	(B C	1427.

Este problema se solta por duas operaçoens mediante hũa perpendicular que Gellibrando, Ulacco, & cõmumente os mais Autores lançaõ sobre o mayor lado do angul. que lhe está opposto. Nós o soltaremos na nota seguinte mediante a perpendicular lãçada tambem de qualquer dos angulos, com tanto que se conheça se cahe dentro, ou fòra do triangulo, & primeiro com Gellibrando, & Ulacco no seguinte modo.

Theor. 5. Lançando a perpendicular B E se devem primeiro buscar os segmentos da Base, a saber A E, C E.

Termos proporcionaes.

O mayor lado, ou Base A C		2345
A somma dos reliquos lados A B, C B	3365	35269851
A differẽça dos mesmos lados A B, C B	511	27084209
		62354060
A differença A D dos segmentos da Base 733.		33701428
quasi, isto he, 733|268. quasi.		28652632

Achada a porçaõ A D 733|268. differença dos segmentos da Base desprezando as fracçoens juntas se tire do mayor lado A C

2345

2345.& reſtará C D 1612. cuja ametade 806. ſerá o menor ſegmento C E, ou ſeu igual E D;& a meſma ametade 806. junta cõ a differença A D 733. comporá o mayor ſegmento A E 1539. ſabidos pois os ſegmentos A E, C E por quanto o triangulo A B C eſtá repartido nos dous triangulos rectangulos A B E,C B E & em cada hum delles fica conhecida a Hypotenuſa,& hum lado adjacente ao angulo recto, ſe ſaberá facilmente qualquer dos angulos pello ſegundo problema dos rectangulos, como querendo buſcar o ang. C o faremos com os ſeguintes.

Termos proporcionaes.

Hypotenuſa dada B C	1427	
Radio		
Lado achado C E 806.		12,9063350
Seno do angulo C B E ſeu oppoſto 34.gr.23.min.		3,1544240
& dahi o reliquo ang. C 55.gr.37.min.		9,7519110

Semelhantemente ſe obrará para ſe inquirir o outro angulo B A E, com que conhecidos os dous angulos C,A,facilmente ſe alcançará o ang. A B C por [r] ſerem todos tres iguaes a dous rectos. r 32.do prim.

NOTA.

NESTE problema terceiro dos Triangulos obliquangulos, em q̃ dados os lados cada hum per-ſi ſe procura ſaber qualquer dos angulos,onde diſſemos,que eſte problema ſe ſolta communmente por duas operaçoens mediante hũa perpendicular,q̃ ſe lança do mayor ang.ſobre o lado que lhe eſtá oppoſto,buſcandoſe pella primeira operaçaõ a differença dos ſegmentos da Baſe conforme o theorema 5. ſe póde tambem achar a ditta differença dos ſegmentos da Baſe por qualquer dos modos ſeguintes q̃ traz Gellibrando no Cap. 2. ſem demonſtraçaõ, & eu os tenho demonſtrado,os quaes me pareceo eſcrever aqui por Appendiz por terem ſua galanteria,& o naõ ter feito no meſmo theor. 5. onde era ſeu lugar.

Primeiro modo.

Tomeſe a differença dos quadrados dos lados B C, B A, eſta differença ſe divida pella Baſe C A: & o quociente ſerà a porçaõ D A differença dos ſegmentos da Baſe.

Segundo modo.

Quadremſe os lados A B, B C, C A: tireſe o quadrado de A B da ſomma dos outros dous quadrados,& ametade do reſto ſe divida pella Baſe C A; da qual diviſaõ ſahirá no quociẽte o menor ſegmento C E,& tirando o quadrado B C da ſomma dos quadrados A B, C A, & ametade do reſto dividida pella Baſe dará no quociente o mayor ſegmento A E.

SCHOLIO I.

POdeſe tambem inveſtigar qualquer dos angulos pertẽdidos, havendo primeiro deſcuberto os ſegmentos da Baſe pella ſeguinte analogia de Pitiſco [r] como por exemplo ſe buſcarmos o angulo A ſeraõ os

[r] Lib. 3. triag. rectilin.

Termos proporcionaes.

O lado A E	—— 1539.min.		
Hypotenuſa A B	— 1938	——	3,2873538
Radio		——	10,0000000
			132873538
Secante do ang. A adjacente ao ſegmento A E			31872386
37.gr.25.min.40.ſeg.49.terc.38.quart.			101001152

Pello que da ſomma dos Logarithmos dos dous termos intermedios ſe tire o Logarithmo do primeiro, & reſtará o Logarithmo do quarto, & por ſer o que reſta Logarithmo de Secante, ſe houver taboas, em que haja Logarithmos de Secantes, como as de Bonaventura Cavalerio, nellas ſe buſque debaixo de ſeu titulo o ultimo numero, que reſtou, & à margem lhe reſpõderáõ os graos, & minutos do angulo A.

Porèm ſe as taboas naõ tiverem Logarithmos de Secantes, como ſuccede cõmummente, ſe uſara da regra ſeguinte para ſe conhecer o valor do ditto angulo A.

Do duplo Logarithmo do Radio, ſe tire o Logarithmo da Secante do angulo A, ultimamente achada na operaçaõ, & o q̃ reſtar ſerá o Logarithmo do Seno do complemento do ang. pertendido, buſcando por tanto nas taboas o numero que reſtou debaixo do titulo dos Logarithmos dos Senos, ſe verà na cabeceira, & margem o numero de graos, & minutos, que lhe reſpondem, cujo complemento para 90. ſerá o angulo A buſcado.

EXEMPLO.

EXEMPLO.

DO duplo Logarithmo do Radio ——— 20,0000000
Se tire o Logarithmo da Secante do angulo A
ultimamente achado. ——— 101001152

E reſtará o Logarithmo do Seno de ſeu cõplem. —098998848

A que nas taboas reſpondem 52.gr.34. min. 19. ſeg. quaſi, & por tanto o valor do ditto ang. A ſerá o complemento para 90. a ſaber 37.gr.25.min.41.ſeg.quaſi pellos quaes ſe podem tomar 37.gr.26.min.

Semelhantemente para ſe achar o ang. C adjacente ao ſegmẽto C E ſe pôde tambem obrar pella meſma via.

Termos proporcionaes.

Lado C E — 806.
Hypotenuſa B C 1427. ——— 3,1544240
Radio ——— 10,0000000
13,1544240
2,9063350
Secante do ang. C 55.gr.42.min.quaſi. — 10,2480890

Ha outra regra para ſe ſoltar eſte caſo ſem ſe lançar a perpendicular,& por hũa ſò operaçaõ, cujo fundamento moſtrou Henrique Briggio no Cap. 16. da Arithmetica logarithmica, a qual he a ſeguinte.

Da ſemiſomma dos lados ſe tire cada hum delles de per-ſi , & reſtaràõ as differenças entre cada hum dos dittos lados ; & a ditta ſemiſomma ; deſpois ſe tire a ſomma dos Logarithmos da ſemiſomma dos lados , & differença do lado que ſubtende o ang. buſcado,da ſomma dos Logarithmos das differenças dos outros lados,& do duplo Logarithmo do Radio,& ametade do que reſtar ſerà o Logarithmo da Tangente da ametade do ang. buſcado.

EXEMPLO.

Proponhaſe que ſe buſca o ang. C dados os tres lados.

LAdo A C ——— 2345
Lado B C ——— 1427
Lado A B ——— 1938
Somma dos lados ——— 5710 Fig.4ª.

Semisomma dos lados ——— 2855
Lado A C ——— 2345
Differença entre a ditta semisomma, & lado A C
510 cujo Logarith. ——— 2,7075702
Semisomma dos lados — 2855.
Lado B C — 1427.
Differença entre a ditta semisomma, & lado B C
1428. cujo Logarith. ——— 3,1547282
Duplo Logarithmo do Radio ——— 20,0000000
Semisomma dos lados — 2855. — 34556061. — 25,8622984
Lado A B opposto
ao ang. buscado — 1938.
Differença 0917. — 2,9623693
6,4179754 — 64177954
Resta ——— 19,4443230
Cuja ametade ——— 9,7221615

Serà o Logarithmo da Tangente da ametade do ang. buscado, a que nas taboadas respõdem 27.gr.48.min.30.seg.quasi, cujo dobro 55.gr.37.min. quasi he o valor do ang. C buscado; de quanto tambẽ ó achariamos cõforme a primeira Analogia deste Schol.

SCHOLIO II.

PRomettemos no principio deste problema soltalo, posto q̃ a perpendicular se lance de qualquer dos angulos, naõ sò do opposto ao mayor lado, mas com tanto que se conheça se cahe dentro, ou fóra do Triang. Se cahir dentro serve o ditto modo de Gellibrando, Pitisco, & outros muitos Autores. Porèm se cahir fóra (o que succederà quando algum dos angulos na Base for obtuso, como no Triang. A B C em que o ang. C he obtuso, & a perpendicular se lança do angulo B, a qual cahe fòra do Triang. sobre o lado A C produzido atè o ponto D; tomandose por hũ segmento da Base toda a linha A D, & pello outro a porçaõ C D entre o lado B C & a perpendicular B D conforme Regiomonte, Clavio, & outros) neste caso se use da seguinte Analogia que tenho demonstrado na nota ao theor. 5.

Fig. 42.

Termos proporcionaes.

Base A C — 2428.
Somma dos lados A B, B C — 5301 — 37243578
Dif-

Differença dos mesmos lados 2149 ——— 33322364
Somma dos segmentos da Base ——— 70565942
33852487
A linha A E 4692. ——— 36713455

Tirando pois de 4692. quantidade da linha A E o lado A C 2428. resta C E 2264. cuja ametade 1132. he o segmento C D

Conhecido pois o segmento C D cõ o lado B C que he a Hypotenusa no Triang. rectangulo B D C se investigará o angul. D C B pello segundo problema dos rectangulos,& seu complemento para dous rectos será o angulo obtuso A C B.

Para se descubrir o ang. A se considere o Triang. rectangulo A D B no qual se daõ sabidos

O lado A D,Somma de A C, C D ——— 3560
A Hypotenusa A B ——— 3725

Pello que se conhecerá o ang. A pello mesmo segundo problema dos rectang.com que descubertos os dous angulos A C B,C A B, se conhecerá o terceiro C B A,por ser o complemento para dous rectos. Pella 32. do 1.

PROBLEMA IV.

Conhecidos os angulos, & hũ lado buscase qualquer dos outros lados.

NO Triang. obliquang. A B C buscase qualquer dos lados a saber O lado B C.

Dados (O lado A C 1237. Fig. 43.
E os ang. (B A C 38.gr.29.min.
(A C B 29.gr.22.min.
(A B C 112.gr.9.min.

Termos proporcionaes.

Seno do ang. opposto ao lado dado qual he A B C 112.gr.9.min isto he Seno de 67.gr.51.min. q̃ he o seu complemento para 180 gr. por ser o mesmo Senõ de hum angul. ou arco,quẽ de seu complemento para semicirculo. Theor. 3. Cap. §. 1.

Seno do ang. B A C 38.gr.29.min. opposto ao lado buscado ——— 9,7939907

Lado

Lado A C dado 1237|0 ——— 3,0923697

12,8863604

9,9667048

Lado B C pertendido 831|1 ——— 2,9196556

PROBLEMA V.

Dados dous lados com o ang. por elles comprehendido inquirir o outro lado.

NO Triang. obliquang. A B C buſcaſe o lado A C.

Dados os lados (C B 328
(A B 259

Fig. 44 O angulo (A B C 97.gr.28.min.

Eſte problema ſe reſolve por duas operaçoens primeiramente ſe buſcaõ os angulos A, C, pello ſegundo problema, ou qualquer das analogias dittas no ſeu Scholio, & deſpois o lado pello quarto probl. antecedente. Exemplificaloemos pella practica do ditto probl. ſeg. com os ſeguintes termos proporcionaes, buſcando qualquer dos angulos incognitos, porque deſcuberto hum fica o outro conhecido. Seja por exemplo o angulo A.

Termos proporcionaes.

Somma dos lados

Sua differença

Tangente da ſemiſomma dos angulos oppoſtos aos dittos lados, ou da ametade do complemento do angul. comprehendido para 180.gr.

Tangente da ſemidifferença dos angulos oppoſtos.

Achada a ſemidifferença dos angulos nas taboas pella Tang. que ſae no quarto termo, ou por ſeu Logarithmo ſe â ditta ſemidifferença ſe ajuntar a ſemiſomma dos meſmos angulos, reſultará o angulo A buſcado oppoſto ao mayor lado C B, & ſe ſe tirar reſtará o angulo C oppoſto ao menor A B.

EXEMPLO.

SOmmeſe o mayor lado conhecido C B ——— 328

Com o menor ſabido A B ——— 259

Será a ſomma ——— 587

Logo do mayor lado C B ——— 328

Se

Se tire o menor A B ——— 259
Será a differença ——— 069
Despois disto de ——— 180.00
Se tire o angulo dado A B C ——— 97.28
Restará a somma dos outros dous ——— 82.32
Será a semisomma ——— 41.16

Ficaõ logo exemplificados os Termos proporcionaes.

Somma dos lados 587
Differença dos lados 69 ——— 1,83884,90907
Tangente da semisomma dos angulos oppostos, a saber de 41.gr. 16 ——— 9,94324,27703
Tangente da semidifferença dos mesmos angulos, a que nas taboas de Ulacco q̃ saõ mais miudas respõdẽ 5.gr.53.min.20.seg.29.terc. 11,78209,18610
2,76863,81012
9,01345,37598

Esta semidifferença dos angulos — 5.gr.53.min.20.seg.29.terc.
Sommada com a semisomma achada acima ——— 41.gr.16.min.00.seg.00.terc.
Faz o mayor angulo A buscado de 47.gr.09.min.20.seg 29.terc.
E da mesma semisomma — 41.gr.16.min.00. seg.00. terc.
Tirada a mesma semidifferença — 5.gr. 53. gr. 20. seg. 29. terc.
Restarà o menor ang. C — 35.gr.22.min.39. seg. 31. terc.

Achados os angulos se inquira logo o lado A C pello 4. probl. do seguinte modo.

Termos proporcionaes.

Seno do ang. opposto a qualquer dos lados dados; seja por exẽplo do ang. A achado de 47.gr. 9.min.20. seg. 29. terc. opposto ao lado dado B C.

Seno do angulo B opposto ao lado A C buscado, que por ser o ditto ang. dado de 97. gr. 28. min. he o seu Seno o mesmo que de seu complem. para 180.gr. a saber de 82.32. 9,9963017550
Lado dado B C 328 ——— 2,5158738437
12,5121755987
9,8652249402
Lado A C buscado 443|55825.quasi — 2646950658̣5

SCHOLIO.

HA outra regra de Alberto Girardo para dados os dous lados com o angulo por elles comprehendido se achar logo o ter-

terceiro lado sem ser necessario lançar perpendicular, nem investigar primeiro os dous angulos incognitos, ou algum delles como pellas analogias propostas para a soluçaõ deste problema; a qual regra he a seguinte.

Termos proporcionaes

Radio

Seno verso do ang. dado

Duplo do producto dos lados

Hum quarto numero, que he o quociente desta analogia.

A este quarto numero se ajunte o quadrado da differença dos lados, & deste aggregado se tire a raiz quadra, que será o lado buscado.

Com isto damos fim á Trigonometria practica rectilinea no q̃ toca à invençaõ dos lados, & angulos incluindose no que temos escritto os casos ordinarios, & necessarios.

Mas porque nós havemos dado a practica largamente, & supponho, que o leitor ficarà nella bastantemente instruido, & despois de o estar lhe basta hum resumo dos casos, que havemos trattado, que lhe sirva como de memorial para buscar a proporçaõ mais ordinaria por onde se resolve, quando lhe esqueçaõ os theoremas, proporei em summa os dittos casos, & suas analogias na fórma, & ordem de Ulacco, que me parece os ha disposto brevissima, & facillimamente escusando applicarlhe exemplos, pois os havemos posto largamente na doutrina antecedente.

Tambem despois do ditto resumo trattaremos da invẽçaõ das àreas dos Triangulos, & mais figuras planas rectilineas.

Re-

Resumo dos casos ordinarios da Trigonom. rectil.

§. 1.

Da dimensaõ dos Triangulos rectangulos.

PROBLEMA I.

Em hum Triangulo rectangulo, dados os lados. Buscase qualquer dos angulos.

Termos proporcionaes.

Hum lado.
O reliquo lado. Theor. 2.
Radio.
Tangente do angulo opposto ao reliquo lado.

PROBLEMA II.

Dados hum lado, & a Hypotenusa buscase qualquer dos angulos.

Termos proporcionaes. Theor. 3

Hypotenusa dada
Lado dado
Radio
Seno do ang. opposto ao lado dado; cujo complemento he o reliquo angulo.

PROBLEMA III.

Dados os angulos, & hũ lado buscase o reliquo lado.

Termos proporcionaes.

Radio.
Tangente do ang. contermino ao lado dado.
Lado dado
Lado buscado. Theor. 2.

Por outra Analogia.

Termos proporcionaes.

Seno do angulo opposto ao lado dado.
Seno do reliquo angulo.
Lado dado. Theor. 3
Lado buscado.

PROBLEMA IV.

Dados a Hypotenusa, & angulos buscase qualquer dos lados.

Termos proporcionaes.

Radio.
Seno do angulo opposto ao lado buscado.
Hypotenusa dada.
Lado buscado. Theor. I

Por outra Analogia.

Termos proporcionaes.

Secante do angulo opposto ao lado buscado.
Tangente do mesmo angulo.
Hypotenusa dada.
Lado buscado.

Ainda por outra analogia.

Termos proporcionaes.

Secante do ang. contermino ao lado buscado.
Radio.
Hypotenusa dada.
Lado buscado.

PROBLEMA V.

Dados a Hypot. & hũ lado buscase o reliquo lado.

PARA a soluçaõ deste problema, & de alguns outros saõ necessarias duas operaçoens: a primeira para achar hum angulo: a segunda para achar o lado pertendido.

Termos proporcionaes.

Primeira Operaçaõ pello Problema segundo.

Hypotenusa dada.
Lado dado.
Radio.
Seno do angul. contermino ao lado buscado.

Segunda Operaçaõ.

Radio.
Seno do ang. contermino ao lado dado.
Hypotenusa dada.
Lado buscado.

Por outro segundo modo; ou pello Problema terceiro.

Radio.
Tangente do angulo contermino ao lado dado.
Lado dado.
Lado buſcado

Ou tambem.

O quadrado do lado dado ſe tire do quadrado da Hypotenuſa, & o reſiduo ſerá o quadrado do lado buſcado; cuja raiz ſerá ſua quantidade, pella 47. do prim. ou 31. do ſexto de Euclides.

Podeſe tambem obrar por via de Logarithmos pella regra de Hérique Briggio que trouxemos na ſoluçaõ deſte meſmo probl.

PROBLEMA VI.

Dados os angulos, & hũ lado, buſcaſe a Hypotenuſa.

Termos proporcionaes.

Seno do angulo oppoſto ao lado dado.
Radio.
Lado dado. Theor.
Hypotenuſa buſcada.

Por outra analogia.

Radio.
Secante do angulo contermino ao lado dado. Theor. 2
Lado dado.
Hypotenuſa buſcada.

PROBLEMA VII.

Dados os lados, buſcaſe a Hypotenuſa.

Termos proporcionaes.

Primeiro para ſe achar qualquer dos angulos.

Hum lado.
O reliquo lado. Theor. 2
Radio.
Tangente do ang. oppoſto ao reliquo lado.

Segundo para achar a Hypotenuſa.

Seno do ang. oppoſto ao reliquo lado.
Radio.
Lado oppoſto ao meſmo angulo. Probl. 6.

Hypotenusa buscada.

Ou tambem.

A somma dos quadrados dos lados he igual ao quadrado da Hypotenusa, cuja raiz será sua quantidade: pella 47. do prim. ou 31 do sexto de Euclides.

§. 2.

Da dimensaõ dos Triangulos planos obliquangulos.

PROBLEMA I.

Dados dous lados, & hum angulo opposto a hum delles, buscase o angulo opposto ao reliquo lado.

Termos proporcionaes.

Theor. 3 Hum lado.
O reliquo lado.
Seno do ang. opposto aõ primeiro lado.
Seno do angulo opposto ao reliquo lado.

NOTA.

SE o angulo dado for obtuso, o lado a elle opposto será mayor que qualquer dos outros dous; & os angulos a elles oppostos seraõ agudos; & por tanto agudo o buscado.

Mas se o angulo dado for agudo, he necessario que conste da specie do buscado; a saber se he obtuso, ou agudo, para se saber seu valor, porque com as mesmas supposiçoens dadas póde o angulo buscado ser agudo, ou ser obtuso.

PROBLEMA II.

Dados dous lados com o ang. por elles comprehendido buscase qualquer dos outros angulos.

Termos proporcionaes.

Somma dos lados.
Theor. 4. Differença dos lados.
Tangente da semisomma dos angulos oppostos.
Tangente de sua semidifferença.

Achada a semidifferença dos angulos, se esta se ajuntar a semisomma

ſomma dos angul. cõpora o mayor,& ſe ſe tirar, reſtará o menor.

Quem quizer póde ver outras analogias q̃ trouxemos no theorema 4. para ſoluçaõ deſte problema.

PROBLEMA III.

Dados cada hũ dos lados de per-ſi buſcaſe qualquer dos angulos.

PARA a ſoluçaõ deſte problema ſe requerẽ duas operaçoens a primeira para achar hum ſegmento da Baſe,que ſerá o mayor lado lançando ſobre elle hũa perpendicular do angulo vertical (podeſe tambem tomar por Baſe qualquer dos outros lados, como advertimos na reſoluçaõ deſte problema) A ſegunda operaçaõ para achar o angulo pertendido.

Primeiro para o ſegmento da Baſe.

Termos proporcionaes.

Baſe,ou lado maximo.
Somma dos reliquos lados.
Differença dos meſmos reliquos lados.
Differença dos ſegmentos da Baſe.

Achada a differença dos ſegmentos da Baſe ſe tire da meſma Baſe,& ametade do reſto ſerá o ſegmento menor : Mas a meſma differença junta com ametade do meſmo reſto compoem o ſegmento mayor.

Segundo para inveſtigar qualquer dos angulos.

Termos proporcionaes.

Lado menor do Triangulo dado.
Segmento menor da Baſe já achado.
Radio.
Seno do ang. oppoſto ao ſegmento menor; cujo complemento para 90 gr. he o ang. contermino ao lado menor do Triang. dado.

Ou Lado mayor (a Baſe ſe chama maximo.)
Segmento mayor da Baſe já achado.
Radio.
Seno do ang. oppoſto ao ſegmẽto mayor; cujo complemẽto para 90 gr he o ang. contermino ao lado mayor do Triang. dado

Mas o ang. oppoſto a Baſe ou lado maximo ſe ſabe juntãdo em hũa ſóma os dous ang. primeiro achados

Póde

Pôde quem quizer ver as mais analogias,que dissemos na soluçaõ deste problema.

PROBLEM IV.

Dados os angulos, & hum lado, buscase qualquer dos reliquos lados.

Termos proporcionaes.

Seno do angulo opposto ao lado dado.
Theor. 3 Seno do angulo opposto ao lado buscado.
Lado dado.
Lado buscado.

PROBLEMA V.

Dados dous lados com o ang. por elles comprehendido buscase o reliquo lado.

PARA a soluçaõ deste problema saõ necessarias duas operaçoens: a primeira para achar os reliquos angulos, pello segũdo problema: a segunda para despois de achados os angulos achar o lado pertendido pello problema 4. He escusado exemplo. Tambem se solta pella regra do Schol. ao probl. 5. dos Triangul. obliq. sem ser necessario lançar perpendicular.

CAP. V.

Da dimensaõ das âreas dos Triangulos rectilineos rectangulos.

NEste, & no seguinte Capit. se ensinarà a medir as âreas dos Triangulos rectilineos, que saõ as superficies, ou planos inclusos entre seus lados começando primeiro pellos Triangulos rectangulos, & despois os obliquangulos.

Para este intento executaremos os problemas seguintes, advertindo porém que quando naõ tivermos algum dos casos exemplificados nos dittos problemas, mas outras quantidades dadas differẽtes das que nelles se suppoem; que em tal caso se devẽ primeiro buscar pellos problemas antecedentes as quantidades, que nos forem necessarias, para que os casos fiquem inclusos nos seguintes problemas.

PRO-

PROBLEMA I.

Dados os dous lados de hum Triangulo rectangulo achar a área.

NO Triangulo rectangulo A B C buscase a área. Fig. 45.

Dados os lados, a saber (A B 1124 (B C 606

Resoluçaõ.

Multipliquese hũ lado por outro, & sahirà no producto 681144 cuja ametade 340572. será a área buscada. Ou tambẽ se se multiplicar hum lado por ametade do outro sahirà no producto a mesma área buscada 340572.

NOTA.

NAM trazemos modo de buscar as àreas por Logarithmos, porque como de ordinario nas taboas não haja Logarithmos que respondaõ aos numeros das áreas, ou de seu dobro, quãdo saõ mayores, que 10000, ou 20000, ou 100000, que saõ os numeros atè os quaes hei visto taboadas com Logarithmos respondentes, antes de ordinario as naõ trazem mais, que os que respondem até 10000, & será difficil para os principiantes buscar numero, que condiga com o Logarithmo mayor que o que se acha nas taboas, sendo muito mais facil, & expedito resolver estes problemas pellos numeros ordinarios dos lados do Triangulo, por tanto deixamos o uso dos Logarithmos nesta parte de investigar as áreas, & usaremos sòmente dos numeros ordinarios.

PROBLEMA II.

Dado hum lado, & a Hypotenusa buscar a àrea.

NO Triangulo rectangulo A B C buscase a área.

Dados os lados a saber. (O lado A B 1124. (Hypot. A C 1277.

Primeira Praxe.

Investiguese o lado B C pello problema 5. do Capit. 3. que se acharâ de 606. & logo pello antecedente se busque a ârea que sahirá de 340572. Fig. 46.

Segunda Praxe.

Do quadrado de A C que he 1630729. ſe tire o num. 1263376 quadrado de A B, & reſtará o numero 367353. quadrado de B C, cuja raiz quadra 606. multiplicada por 1124. valor do lado A B dará 681144. dobro da área buſcada, por onde ſua metade que he 340572. ſerá o valor da dita área.

Terceira Praxe.

Tomeſe a ſomma da Hypotenuſa,&lado dado,& eſta ſe multiplique pella differença entre a meſma Hypotenuſa,& lado dado, & do producto ſe tire a raiz quadra, a qual multiplicada pello lado dado gera o dobro da área.

Tambẽ ſahirá logo a meſma área ſe a ditta raiz quadra ſe multiplicar por ametade do lado dado,ou eſte por ametade daquella

EXEMPLO.

Hypotenuſa A C	1277
Lado A B	1124
Somma	2401
Hypotenuſa A C	1277
Lado A B	1124
Differença	0153

Demaneira que a ſomma he 2401. a Differença 153. multiplicando pois hum numero por outro gera no producto 367353 cuja raiz quadra 606 multiplicada por 1124. valor do lado A B produz 681144. dobro da área pertendida;por onde ſua ametade 340572. nos moſtra a ditta área. Ou tambem ſe multiplicarmos a raiz quadra 606. por 562. ametade do lado A B; ſahirá logo a meſma área;como tambem multiplicando 303. ametade da raiz quadra pello lado 1124. gera o meſmo producto.

NOTA.

DEveſe advertir que por quanto 606. naõ he a juſta, ou preciſa raiz quadra do numero 367353. por quanto eſte numero a naõ tem preciſa, mas proximamẽte mayor,ou menor,que a verdadeira,& o ditto numero 606. he proximamente menor,

que

que a ditta precisa, ou verdadeira raiz (que por ser irracional senaõ póde explicar em numeros) daqui nasce, que a área inquirida não he precisamente a verdadeira, mas só proximamente menor, que a verdadeira. E por tanto para os curiosos Arithmeticos advirto, que se quizerem aproximar a ditta raiz acrescentãdo binarios de cifras como se ensina na Arithmetica, lhe sahirà cada vez mais proxima á verdade, conforme mayor numero de binarios acrescẽtarem, & a ditta raiz assim approximada, multiplicada pello lado supposto dará mais precisamente o dobro da ditta área, ou ametade da raiz pello lado, ou ametade deste por aquella gerará logo a mesma área.

Disse acrescentando binarios de cifras, porque ainda que haja outros modos de se approximarem as raizes fica por esta via o negocio reduzido á Dizima; por quanto se se acrescentar hum binario, resultaõ primos, se dous segundos, se tres terceiros, &c. tirando pois de 36735300,00,00,00,00, a raiz approximada cõ cinco binarios de cifras acrescentados ao numero principal sahirâ a ditta raiz 606|09652. quintos, o qual numero multiplicado pello lado dado 1124. resultará no producto 681252|48848. cuja ametade 340626|24424. serà a àrea bem approximada, & mayor que a que tinhamos achado por 54.gr.pès, ou palmos, ou outra qualquer medida de que se tratta, & mais 24424. quintos.

Quarta Praxe.

Do quadrado da Hypotenusa A C se tire o quadrado do lado A B dado, & o que restar se multiplique pello mesmo quadrado do lado A B conhecido, & deste producto se tire a raiz quadra, a qual serà o dobro da àrea do Triangulo.

NOTA.

SEmpre he necessario que se dem dous lados, ou hum lado, & a Hypotenusa, como nos dous problemas antecedentes, para se inquirir a área do Triangulo, que se senaõ derem; será necessario buscalos primeiro pellos problemas da Trigonometria.

CAP. VI.

Da dimensaõ das àreas dos Triangulos rectilineos obliquangulos.

PARA a dimensaõ das áreas dos Triangulos obliquangulos he necessario conhecerse hũa perpẽdicular lançada de qualquer dos angulos sobre o lado opposto chamado Base, por nelle cahir a ditta perpendicular: assim mesmo darse conhecida a ditta Base, porque multiplicandoa por ametade da perpendicular, ou esta por ametade da Base, resultarà a área do Triangulo, como tãbem multiplicando toda a Base por toda a perpendicular sahirà o dobro da àrea. Mas todavia se se derem sabidos os tres lados se pòde conhecer a àrea sem à ditta perpendicular, como adiante se dirá.

Isto que dissemos da perpendicular serà sempre, ou ella caya dentro do Triangulo, como succede quando os angulos na Base saõ agudos, ou fóra quando hum dos angulos na Base he obtuso,
Fig.47. segundo parece nos dous Triangulos A B C, no primeiro dos quaes a perpendicular A D cahe dentro no Triangulo por serem agudos os angulos B, C, no segundo cahe fòra por ser obtuso o angulo B multiplicando pois a perpendicular A D por ametade
Fig.48. da Base B C, ou toda a Base B C por ametade da perpendicular A D, resultará no producto a área do Triangulo, como tambem multiplicando toda a Base por toda a perpẽdicular se gera o dobro da área, cuja ametade serà sua quantidade.

Mas se a ditta perpendicular, & Base não forem dadas serà necessario que se conheçaõ tres quãtidades taes, que mediante ellas se descubraõ as dittas perpendicular, & Base, segũdo os preceitos que havemos dado no Trigonometria.

E se nenhũa quantidade do Triangulo nos derem sabida em tal caso será necessario medir practicamente a perpendicular, & Base por hũa cadea, que chamaõ Metatoria, ou com hum cordel de pedreiro, ou linha de pescador.

O modo com que se lançará a cadea de hum angulo perpendicularmente sobre o lado opposto de hum Triangulo grande de terreno, cuja área intentamos medir não tem difficuldade mediãte a Esquadra, ou outro qualquer instromento. Mas exemplifiquemos alguns casos, ainda que hum bastava por exemplar para os que tem habilidade.

PROBLEMA I.

Dados dous lados com o angulo por elles comprehendido buscar a área.

NO Triang. obliquang. A B C buscase a área dados.

Os lados (A C 34.
(B C 56.

O ang. C por elles comprehendido de 35.gr. 28.min.

Lancese a perpendicular sobre hum dos lados dados do angulo que lhe está opposto, a saber a perpendicular A D sobre o lado B C, ou B O sobre A C produzida se necessario for, como no caso presente, se nos quizermos valer da perpẽdicular A D cõsiderese o Triangulo rectangulo A D C em que fica o angulo C dado, & nelle saõ conhecidos, a saber o lado A C dado de 34. o angulo C 35.gr. 28 min. & o ang. A D C recto, & se conhece tambem o ang. D A C por ser complemento para 90. a saber de 54 gr. 32. min. pello que se busque a perpendicular A D pello problema 4 dos Triangulos rectangulos por via dos Senos naturaes com os seguintes. Fig. 49.

Termos proporcionaes.

Radio
Seno do ang. C ——— 35.gr. 28.min.
Hypotenusa A C ——— 34.
Perpendicular A D 19|7277928. que de tantos sahirá feita a operaçaõ na fòrma ordinaria, obrando pellos Senos naturaes, ou se obrarmos pellos Logarithmos tirando a parte proporcional (segundo havemos ensinado) para alcãçar os quebrados de mais dos 19. inteiros. Achada pois a perpendicular A D 19|7277928 se multiplique por 28. ametade da Base B C que era 56. & sahirá no producto 552|3781984. quantidade da área pertendida.

Mas se quizermos alcançar a mesma área mediante a perpendicular B O, considerese o Triangulo rectangulo B O C em que fica o mesmo ang. C sabido de 35.gr. 28.min. & o lado dado B C 56. que agora fica servindo de Hypotenusa, & se inquira a ditta per-

perpendicular B O pello mesmo problema 4. dos Triangulos na fòrma seguinte.
Radio
Seno do angulo C 35 gr. 28.
Hypotenusa B C 56.
Perpendicular B O 32|4928352. que de tãtos sahirá feita à operaçaõ, a qual multiplicada por 17. ametade da Base A C resultarà no producto 552|3781984. pello valor da área, quãto tinhamos achado pella primeira operaçaõ.

SCHOLIO.

r Trigon. plan. Pag. 108.

PARA a soluçaõ deste mesmo problema traz Adriano [r] Metio outra regra facil, & curiosa sem ser necessario lançar perpendicular sobre algum dos lados, & posto que elle a não demonstra, não tem a demonstraçaõ difficuldade, que escuso trazer por tratar sòmente da practica.

A regra he, que em qualquer Triangulo rectilineo, assim se há o Radio para a ametade do producto, ou rectangulo dos lados, como o Seno do angulo comprehendido para a àrea do Triang.

Sejaõ os mesmos suppostos do Triangulo obliquangulo A B C o lado A C 34. o lado B C 56. o angulo C por elles comprehendido de 35. gr. 28. min. Buscase a àrea.

O rectangulo, ou producto de hũ lado por outro monta 1904 cuja ametade he 952: por tanto obrando por via dos Senos, & numeros absolutos com os seguintes.

Termos proporcionaes.

Radio	
952	952
Seno de 35. gr. 28.	5802292
	1904
	8568
	1904
	1904
	76160
	4760
Sahe a àrea do Triangulo	552|3781984

Por Logarithmos,

Radio

952	———————	2,9786369
Seno de 38.gr.28.min.	———————	9,7635996
Area do Triang. a cujo Logarith.	———	12,7422365

Respondem nas taboas (tirando a parte proporcional) os mesmos 552\|378. & quasi mais quebrados asaber 552\|3784344. por quanto pella parte proporcional, não se tira precisa, & infalivelmente o que responde ao Logarithmo acima; mas haviase de buscar o numero que precisamente lhe responde pellas regras da fabrica dos Logarithmos. Porèm vese que ainda assim se ajustaõ os numeros achados por hũa, & outra via atè terceiros que saõ milessimos de hum inteiro na conta da Dizima; sendo a differença sómente 2360. partes de hum palmo, ou pé repartido em 10. contos que saõ 10. milhoens, ou 236. a respeito do ditto palmo, ou pé repartido em hum milhaõ de partes,

Corollario.

Daqui se segue que se em qualquer Trapezio se derem sabidos os quatro lados, & dous angulos oppostos, se saberà a sua areá pella mesma regra, sem ser necessario valer de perpendiculares; porque lançada hũa Diagonal de angulo a angulo incognitos, resultará o Trapezio repartido em dous Triangulos; em cada hum dos quaes ficaõ sabidos os dous lados com o angulo comprehendido, & pella analogia antecedente se investiguem suas áreas que sommadas daraõ a de todo o Trapezio.

PROBLEMA II.

Dados dous lados, & hum angulo opposto a hum delles inquirir a área.

NO Triang. obliquang. A B C buscase a área dados.

Os lados (A B 48\|000. (C B 62\|000. Fig. 50.

O ang. C 43.gr.29.min.

Para a soluçaõ deste problema he necessario investigaremse primeiro os outros dous angulos por tantò pello problema primeiro dos Triangulos obliquangulos se busque o angulo C A B mediante a seguinte analogia.

La-

Lado A B — 48
Lado B C — 62
Seno do ang. C 43.gr.29.min.
Seno do ang. B A C 62.gr.43.min.40.seg. que de tantos sahirá proximamente feita a operaçaõ, & dahi o reliquo angulo B 73. gr.47.min.20.seg.

Achados os angulos deitese a perpendicular A O sobre hum dos lados dados, & considerese o Triangulo rectangulo A O B no qual ficaõ sabidos os angulos, & a Hypotenusa A B, por onde se busque a perpendicular A O pello problema 4. dos rectangulos com a seguinte

Analogia.

Radio
Seno do ang. B 73.gr.47.min.20.seg.
Hypotenusa A B 48.
Perpendicular A O 46|0915008. que de tãtos sahirà feita a operaçaõ. Isto he obrando pellos Senos naturaes, que se se obrar por Logarithmos sahirá a perpẽdicular A O buscada de 46|0923982 a respeito que muitos dos Senos, & Logarithmos saõ proximos á verdade, & não os precisos por serem irracionaes: mas a differẽça he taõ pouca que vem a ser sòmente de 00|0008974. cousa totalmente insensivel, pello que procedamos com a primeira acima achada.

Multiplicando pois a ditta perpendicular achada A O 46.0915008. por ametade da Base, que he 31. darà no producto 1428|8365248. pella área pertendida.

O mesmo sahiria se se lançasse a perpendicular C K sobre o outro lado A B sabido, & se considerasse o Triangulo rectangulo C K B em que ficaria sendo Hypotenusa C B, & conhecidos os angulos, com os quaes suppostos se buscasse a ditta perpendicular C K, & se multiplicasse por ametade da Base C B na fórma exẽplificada na segunda Parte do Problema antecedente.

PROBLEMA III.

Dados os tres lad. de hũ Triang. investigar a àrea.

NO Triang. obliquangulo A B C buscase a àrea.

Dados

Dados os lados	(A C — 47
	(B C — 59
	(A B — 36

Eſte problema cuja demonſtraçaõ he dificil, mas engenhoſa traz Pedro Ramo lib. 2. Cap. 9. o inſigne Pedro Nunes na ſua Algebra parte 3. caſo 37. onde o demonſtrou elegantiſſima, & engenhoſamente: Clavio na Geometria practica lib. 3. cap. 2. Cavalerio no directorio parte 2. Cap. 6. Henrique Briggio na Arithmetica Logarithmica Cap. 16. & outros, que o ſoltaõ com a ſeguinte regra.

Da ametade da ſomma dos lados ſe tire cada hum delles de per-ſi, & reſtaráõ as tres differenças entre a ditta ſemiſomma, & cada hum dos lados: logo ſe multiplique a ſemiſomma, & as tres differenças hũas por outras, a ſaber a primeira quantidade pella ſegunda, & o producto pella terceira, & o que ſe gerar deſta ſegũda multiplicaçaõ ſe multiplique pella quarta, & ultima quantidade, de cujo ultimo producto ſe tire a raiz quadra a qual ſerà à área do Triangulo.

EXEMPLO.

Lados dados	(A C 47
	(B C 59
	(A B 36
Somma	142
Semiſomma	071
Lado A C	047
Differença do lado A C	024
Semiſomma	071
Lado B C	059
Differença do lado B C	012
Semiſomma	071
Lado A B	036
Differença do lado A B	035

A ſemiſomma dos lados he 71. da qual tirando cada hum delles ficaõ as tres differenças 24. 12. 35. Diſponhaõſe pois em ordem a ſemiſomma 71. & as tres differenças de modo que fiquem em carreira os quatro numeros ſeguintes 71. 24. 12. 35. Multiplicando pois o primeiro deſtes quatro numeros pello ſegundo reſulta no producto 1704: eſte multiplicado por 12. terceiro termo gera 20448, o qual numero multiplicado pello ultimo 35 produz finalmente 715680. do qual acrescentado com cinco pares de cifras se tire a raiz approximada, a saber 845|97872. q̃ será a área pertendida, & não importa, que se comece a multiplicaçaõ dos quatro numeros por qualquer delles, que se quizer tomar em primeiro lugar; pois sempre sahirá o mesmo conforme o demonstra Clavio no Scholio da 19. do 8. de Euclides.

CAP. VII.

Da dimensaõ da âreas das figuras regulares.

SE a fig. regular for Triangulo se inclue sua mediçaõ nos problemas, que havemos dado.

Sendo a fig. de 4. lados, & os angulos rectos he já sabido, que se deve multiplicar hum lado por outro dos dous, que comprehendem hum angulo recto, & resultará a àrea da figur. como por exemplo, multiplicando 4. palmos contheudos no lado A B por 6. que se contèm no lado A C resultará a àrea do parallelogramo rectangulo A B C D de 24. palmos quadrados superficiaes segũdo se vè na fig. junta.

Mas se a fig. for de muitos lados como Pentagono, Hexagono, Heptagono, &c. & for dado cada hũ dos lados, ou o semidiametro do circulo circunscripto á tal fig. se acharà sua á rea resolvendose em Triangulos com linhas tiradas do centro, até os angulos, os quaes ficaõ sendo semidiametros do circulo circunscripto. Fig. 52.

EXEMPLO.

SEJA dado o Pentagono regular A B C D E no qual se suponha cada hum dos lados de 30. palmos. Do centro K aos angulos se lancem as linhas K A, K B, K C, &c. que os dividem pello meyo conforme a demonstraçaõ da 12. do 4. de Euclides: & porque o angulo E A B he [r] de 108. gr. fica sabido o ang. K A B sua ametade de 54. & pella mesma razaõ o angulo K B A de outros 54. & daqui sabido [t] o angulo B K A no centro de 72 lançando pois do centro K a perpendicular K G sobre o lado sabido A B conciderese o Triangulo rectangulo A G K; no qual ficaõ conhecidos todos os angulos, & o lado A G (pois no Triãg. Fig. 53.

[r] Schol. 32. prim. exclav.

[t] 32. prim. Euclid.

Isosceles, qual he K A B a perpendicular, que cahe do angulo cõprehendido dos dous lados iguaes sobre a Base a divide pello meyo; por tanto feito A G Radio, será a perpendicular K G Tãgente do angulo K A G de 54. gr. conforme o Theorema 2. Cap. 2. da Trigonometria, & por elle, ou pello Theorema 3. practicados no problema 3. dos rectangulos se achará a perpendicular K G, & seja pello Theorema 2. com a seguinte analogia.

Radio
Tangente do ang. K A G 54.
Lado A G ———— 15
Perpendicular K G 20|64573. que de tantos sahirá; feita a operaçaõ.

Multiplicando pois a ditta perpendicular K G por 15. ametade da Base A B lado do Pẽtagono, resulta o num. 309|68595. pello valor do Triang. K A B, o qual numero multiplicado por 5. [por serem 5. os Triangulos iguaes em que se reparte o Pentagono regular] darà no producto 1548|42975. quantidade da àrea do Pentagono.

Porèm senaõ fosse dado o lado A B, mas K A hum dos semidiametros, se buscaria a mesma perpendicular K G pello probl. 4. dos Triangulos rectangulos, como tambem o lado A G; & se obraria como està ditto para se achar o mesmo Triang. K A G ou sem se buscar A G se podia logo achar a ditta àrea pella segũda, & terceira praxe do probl. 2. do Cap. 5.

Corollario.

Daqui se segue hũa regra comũa de se acharẽ as sobredittas àreas de qualquer fig. regular, porque sendo dados os lados se deve sò investigar a perpendicular, que do centro da fig. cahir sobre hum delles, & esta multiplicada pella ametade da somma dos lados darà a àrea pertendida. Porèm não se dando sabidos os lados, mas o semidiametro do circulo circunscripto, que he a linha, que do centro vai a hum dos angulos da fig. serà necessario por elle, & pellos angulos conhecidos inquirir a perpendicular ou lado, ou bastarà que se investigue qualquer delles, pois o ditto Radio fica servindo de Hypotenusa como K A no mesmo Pentagono, & a perpẽdicular K G, & segmento A G de lados no Triangulo rectangulo A G K cuja àrea se pòde achar por algũa das praxes do probl.

 2.

2. Cap.5. ſem que ſeja neceſſario deſcubrir primeiro ambos os lados comprehendentes do angulo recto.

Achada a ditta àrea, multiplicandoſe por hum numero igual ao dos Triangulos ſemelhantes,que ouver na fig. (como no noſſo Pentagono exemplificado ha dez Triangulos igual cada hum ao Triangulo A K G) ſe multiplicará a área do ditto Triangulo por 10. para que reſulte a de todo o Pentagono , & porque eſtas couſas ficaõ bem claras, a quem já eſtá nos Problemas da Trigonometria,& nos antecedentes das áreas o não exemplifico mais.

CAP. VIII.

Da dimenſaõ das àreas das figuras quadrilateras irregulares.

NAõ trattamos das figuras trilateras irregulares,porque a medição de ſuas áreas ſe inclue nos problemas dos Cap.5.&6 aſſim que trattamos neſte das quadrilateras irregulares, & no ſeguinte o faremos das de mais lados, a que chamamos com Clavio multilateras, naõ obſtante que tambem o ſejaõ as de quatro lados, mas porque deſtas faremos particular mençaõ neſte Cap. as nomeamos pello nome individuo de quadrilateras.

As figuras quadrilateras irregulares ſaõ de tres eſpecies,a ſaber Rhombo, Rhomboide,& Trapezio. O Rhombo,& Rhomboide naõ tem algum angulo recto,ſegundo conſta de ſuas definiçoens, mas o Trapezio póde ter hum,ou dous angulos rectos, mais não, & muitas vezes nenhum recto. Pòde tambem ter dous lados oppoſtos parallelos, ou nenhum parallelo ; pello que ſegundo eſtas conſideraçoens trattaremos nos §§. ſeguintes da invençaõ de ſuas áreas, com Stevino,Clavio,Tartaglia, & outros muitos Autores.

§. 1.

Da invençaõ das àreas do Rhombo, & Rhõboide.

SE os lados do Rhombo,& Rhomboide forem conhecidos ſe produz ſua área da multiplicaçaõ da perpendicular,pello lado em que ella cahe,como no Rhombo A B C D da multiplicação da perpendicular A F, ou D E por C B, como tambem da

Fig.54.

per-

perpendicular A O por C D, ou D I por B A: ſemelhantemente no Rhomboide L M R S da multiplicaçaõ da perpendicular L G ou S T por R M; & de M K, ou P S por S R, ou L M. Fig.55.

A perpendicular ſe deve achar pella cadea metatorea, que havemos ditto, ou por Petipè; mas ſe ſe der ſabido algum dos angulos acharſehà pellos preceitos da Trigonometria; pois por quanto no Rhombo, & Rhomboide ſaõ cada dous angulos oppoſtos iguaes entre ſi, & todos quatro iguaes a quatro rectos, conſorme Euclides, conhecido hum angulo ficaõ logo conhecidos os outros, como por exemplo conhecido o angulo B do Rhombo he logo conhecido o ſeu oppoſto, & igual A D C, & tambẽ cada hũ dos outros dous: por onde ſe quizermos ſaber por exẽplo a perpendicular A O, conſidereſe o Triangulo rectangulo A O D em que ſe conhecẽ todos os angulos, & a Hypotenuſa A D lado dado do Rhombo, cõ os quaes ſuppoſtos ſe inveſtigarà a ditta perpendicular, ou ſe ſe conſiderar o Triangulo rectangulo C E D por ſer ſabido o angulo D C B obtuſo, fica conhecido [r] o ſeu cõplemento para dous rectos que he o ang. D C E, & o complemẽto deſte para 90. gr. ſerá [a] o valor do ang. D por ſer recto o ang. C E D; por onde ſaõ já conhecidos todos os angulos, & o lado C D dado do Rhombo, que fica ſervindo de Hypotenuſa no ditto Triangulo rectangulo C E D, com as quaes noticias ſe inquirirá facilmente a perpendicular D E pellos problemas dos Triãgulos rectangulos. Semelhantemente ſe entende na Romboide.

r 13.prim. Euclid.

a 32.prim. Euclid.

Porém ſe nem ſe medir a perpendicular pella cadea metatorea na campanha, ou pello petipè no papel, nem for dado algum dos angulos, ſerá neceſſario inquirilos pella fita gradual, que havemos enſinado no Cap.6. Parte primeira Secçaõ primeira do Methodo Luſitanico, ou por outro inſtromento.

§. 2.

Da invençaõ das âreas dos Trapèzios.

SE o Trapezio tiver os lados conhecidos, & dous delles parallelos como o Trapezio A D B C, geraſe a área da multiplicaçaõ da perpẽdicular A O, ou B F entre os taes lados parallelos por ametade da ſua ſomma, & a ditta perpendicular A O ſe acharà, ou por medida, ou por calculo, ſendo dado o angulo C: a perpendicular Fig.56.

pendicular B F sendo dado o angulo D, & quando senaõ dem sabidos se investiguem pello instrumento.

Mas não tendo o Trapezio alguns lados parallelos, & sendo todos conhecidos, como nos Trapezios H M L K, D C B F, lancemse as diagonaes M K, D B, qualquer das quaes se deve medir
Fig.57. pello petipé, ou cadea metatorea, & porque a diagonal M K divide o primeiro trapezio nos dous Triangulos M H K, M L K em cada hum dos quaes ficaõ conhecidos todos os lados, se devẽ investigar suas áreas pello problema 3. Cap.5. ou 6. as quaes jũtas em hũa somma daraõ a área do Trapezio. O mesmo se entende dos Triangulos D F B, D C B em que a diagonal D B divide o segundo Trapezio.

Fig.58. Porèm se senaõ quizer medir a diagonal K M, investiguemse pello instrumento os angulos H, L, com que em cada hum dos Triangulos ficaráõ conhecidos os dous lados dados, & o angulo
Fig.57. comprehendido descuberto pello instrumento, & se achará a diagonal K M pello problema 5. dos Triangulos obliquangulos, a qual sabida se investigará a área de cada hum dos dittos Triangulos H K M, M L K pello problema 3. Cap.6. ou sò com os dous lados dados, & angulo comprehendido pello problema 1. do mes
Fig.58. mo Cap. O mesmo se entende no segundo Trapezio D F B C descubrindose pello instrumento os angulos F, C.

Pello mesmo caminho se descubrirá a área de qualquer outro
Fig.59. Trapezio irregular ainda que tenha algum ang. virado para fóra que Stevino chama reverso [& nôs reintrante no trattado da Fortificaçaõ;] qual he o Trapezio A B C D, que tem o angulo C virado para fòra, pello qual se deue lancar a diagonal A C, & obrarse, como està ditto.

CAP. IX.

Da dimensaõ das áreas das figuras multilateras irregulares.

POR havermos dado ás figuras irregulares quadrilateras, ou quadrangulares o nome particular de Trapezios seguindo a Euclides, ficando já as trilateras incluidas na dimensaõ dos Triãgulos, entendemos aqui por multilateras aquellas, que passaõ de 4. lados.

 Estas

Estas se medem pello mesmo caminho dos Trapezios a saber resolvendoas em Triangulos, & medindo as áreas de todos elles pello mesmo caminho, as quaes juntas em hũa somma faraõ a área da fig. pertendida.

Seja dado o Heptagono irregular A B C D E F G o qual se resolva em cinco Triangulos, como parece nas figuras juntas, cujas àreas se investigaraõ do seguinte modo.

Quando todos os lados dos Triangulos podem ser conhecidos medindose practicamente por cadea metatorea no campo, ou Petipé no papel, lancemse dos angulos aos lados oppostos, na prim. fig. as perpendiculares G H, F I, F N, D M, B L, & na segunda a o, f p, f q, r, c s (hũa, & outra figur. he a mesma, & a repetimos por mostrar a variedade com que se póde resolver em Triangulos, & lançaremse as perpendiculares, porque de qualquer modo sempre sahirá a mesma àrea da figura irregular, ainda que as dos Triangulos sejaõ varias;) & se investiguem as àreas de todos os Triangulos, como se disse das do Trapezio, que juntas em hum aggregado daraõ a do Heptagono irregular proposto. Fig. 60. Fig. 61.

Podemse tambem investigar as áreas dos ditos Triangulos sendo conhecidos todos seus lados, ou por medida, ou por Petipé, sẽ que se lancem as perpendiculares, pello problema 3. do Cap. 6.

NOTA.

Devese advertir que quando succeder cahirem duas perpẽdiculares sobre hũa Base, que he cõmũa a dous Triangulos, como na primeira figura as perpendiculares B C, F I que ambas cahem sobre A C Base cõmũa dos dous Triangulos A F C, A B C; & na segunda fig. as perpendiculares A O, F P, que ambas cahem sobre G B cõmũa aos dous Triangulos G F B; G A B, & tambem as perpendiculares F R, C S que cahem na Base B D de outros dous Triangulos D F B, D C B, que em tal caso se escusa medir de per-si cada àrea dos dous Triangulos, que tem a Base cõmua, porque mais facilmente se achará logo a somma das àreas dos ditos Triangulos se se ajuntarem em hũa somma as perpendiculares, & esta se multiplicar por ametade da Base, ou a Base por ametade da somma das perpẽdiculares, de que escuso trazer exẽplo por ser isto de facil inteligencia, aos que já estaõ nas regras antecedentes.

SCHOLIO.

SCHOLIO.

SUccede muitas vezes que na campanha ſenaõ poſſaõ medir os lados dos Triangulos interiores, em que eſtá repartida a figura principal por linhas imaginarias de angulo a angulo, ainda que ſe poſſaõ medir os lados exteriores, & iſto por razaõ de arvores, boſques, ſilvados, lagoas, & outros ſemelhantes impedimentos, q̃ impedem lançarſe a cadea, ou cordel de hum a outro angulo.

Neſte caſo pois ſe devem dar ſabidos os lados exteriores da fig. ou concederſe, que ſe poſſaõ medir, pello que ſe devem inveſtigar pello inſtrumento os angulos, & conſideraremſe as linhas imaginarias, & interiores de angulo a angulo para ficar repartida pella imaginaçaõ em Triangulos, como ſe havia feito, & acharẽſe as taes linhas interiores, & perpendiculares pellos preceitos da Trigonometria, & dahi as âreas pellas regras dadas.

EXEMPLO.

POrque ſe daõ ſabidos os dous lados A G, F G, ou ſe concede, que ſe poſſaõ medir, lanceſe com a imaginaçaõ a linha A F, & com o inſtrumento ſe inveſtigue o angulo A G F, com os quaes ſuppoſtos ſe podem inveſtigar a Baſe imaginaria A F, a perpendicular G H, os angulos A F G, F A G, & a área do Triãgulo G A F. Semelhantemente ſe obre com os mais Triangulos B A C, D F C, F E D deſcubrindo ſeus lados, angulos, & áreas, pellos preceitos dados. Na prim. fig.

Mas a área do Triangulo interior A F C ſerá conhecida por ſeus tres lados já inquiridos pellas primeiras operaçoens conforme o problema 3. do Cap. 6. ou tambem porque ſendo deſcuberto o ang. G A B pello inſtrumento, & pellas operaçoens os angulos G A F, & B A C, tirada a ſomma deſtes de todo o angulo G A B ficará conhecido o ang. F A C com os dous lados comprehendentes F A, A C: por tanto pello primeiro problema do ditto Cap. 6. ſe inveſtigará a área do ditto Triangulo A F C, que junta com as áreas dos outros Triangulos comporá a de todo o Heptagono irregular.

E porque os que já ſabem a Trigonometria dos lados, angulos, & âreas dos Triangulos entenderão iſto facilmente, & ainda deſcubrirão outros ſemelhantes caminhos, o não exemplificamos em em numeros,& deixamos ao engenho de cada hum a melhor disposiçaõ, & mais breve via de conseguir o intento; advirtindo sòmente,que havẽdo alguns lados curvos se devem repartir em particulas pequenas,para que pouco defiraõ de linhas rectas,& formaremse varios Triangulos, em que o lado curvo por pequeno diffira pouco da linha recta,& assi não saya erro sensivel na quantidade da àrea.

CAP. X.

Da dimensaõ da solidade,ou corporea quantidade de algũas figuras corporeas.

§.1.

Medir as àreas corporeas dos Parallelepipedos.

CHamamos tambem àreas,as quantidades corporeas dos solidos com Clavio;mas com esta differença, que a área da fig. plana he superficie,& da solida he corpo:& assim quãdo dizemos que hũa superficie tem tantos palmos,se entendem quadrados de área superficial;& que cada lado de hum dos quadrados tem hum palmo. Assim tambem se o corpo se diz que tem tantos palmos se entendem cubicos de área corporea,de que cada lado de hum dos cubos tem hum palmo quadrado de superficie , & este,hum de linha por seu lado ; seis dos quaes palmos quadrados superficiaes saõ os lados,ou termos que fechaõ, ou terminaõ hum palmo cubico,& o palmo superficial he fechado, ou terminado com quatro linhas que saõ quatro lados,cada hũa de hum palmo; porque o corpo he terminado com superficies,ou superficie; & esta com linhas,ou linha: semelhantemente se entende de qualquer outra medida.

Parallelepipedo he hũa fig. solida contenda de 6.figuras planas quadrilateras das quaes cada duas oppostas saõ parallelas. Tal he hũa trave quadrilatera de uniforme grossura , ainda que a largura,grossura,& altura sejaõ desiguaes.

Para se medir pois sua área se deve considerar a Base , a qual será,ou quadrado,ou Rhombo,ou parallelogrãmo rectangulo,ou Rhomboide. De qualquer maneira que seja,se deve medir a área superficial de sua Base pellos preceitos dados , esta multiplicada Fig.62.

pella altura do parallelepipedo darâ ſua àrea corporea. Inveſtiguese a àrea da Baſe H F E G, & eſta ſe multiplique pella altura E C, & ſahirá a área corporea do parallelepipedo H F E G B C D A.

O cubo que tambem he parallelepipedo ſe mede pello meſmo caminho, a ſaber porque cada ſuperficie he quadrada, ſe o ſeu lado for 2.v.g.ſe multiplique em ſi, & faz 4. o qual numero outra vez multiplicado por 2. que tantos he tambem a altura, gera 8.àrea corporea do cubo.

§.2.

Medir as àreas corporeas dos Priſmas.

PRiſma he hũa figura ſolida conteuda de alguns planos, dos quaes dous oppoſtos ſaõ iguaes, ſemelhantes, & parallelos, & os de mais parallelogrãmos, qual he o ſolido A B H L, cujas Baſes ſaõ os Pentagonos A F K B C, H G D L M parallelos, ſeme-
Fig.63. lhantes, & iguaes, & os mais planos parallelogrammos, que ſempre ſeraõ tantos, quantos forem os lados da Baſe, como no ſobreditto Priſma por ſer a Baſe de 5. lados, ha os 5. parallelogrãmos A F G H, F K D G, K B L D, B C M L, C A H M. O meſmo ſe entende do Priſma hexagonico na ſeg. fig. N P R X cujas Baſes
Fig.64. ſaõ os Hexagonos N O P Q S E, R T X Z V Y, iguaes ſemelhãtes, & parallelos, & ſobre os lados da Baſe ſe levantaõ 6. parallelogrãmos N E Y R, E S V Y, Q S V Z, P Q Z X, O P X T, N O T R.

A área pois deſte, & de qualquer outro Priſma ſe acharà ſe ſe inquirir a Baſe ſuperficial, & eſta ſe multiplicará pella altura cõforme ſe diſſe dos parallelepipedos. Iſto ſe entende ainda que os lados dos parallelogrãmos cayaõ em angulos rectos ſobre os da Baſe, ou em angulos obliquos. A altura he ſempre a linha perpẽdicular, que cahir de qualquer ponto do plano ſuperior perpendicularmente na Baſe, ou nella produzida ſe a ditta perpendicular cahir fóra do Priſma.

NOTA.

SUppomos, que para a mediçaõ das Baſes deſtes corpos ſe devem dar ſabidos os requiſitos neceſſarios, ou inveſtigaremſe mediante o inſtrumento, ou cordel, pois ſenaõ póde achar a àrea ſu-