$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4b^2}.$$

452. Com os mesmos dados, e fazendo $p = \frac{a+b+c}{2}$, acha-se

$$\text{a area} = \frac{bh}{2} = \sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}.$$

453. O raio $BE = \frac{abc}{4\sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}}$. (§ 173) Fig. 61.

454. O apothema $DG = \frac{2\sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}}{a+b+c}$. (§ 174) Fig. 51.

455. Quando nas construcções seguintes igualamos huma linha a hum numero, subentende-se, para que isto seja possivel, que este numero he o multiplicador da unidade linear, ou a unidade linear o divisor da linha.

456. Vamos construir o angulo do centro do polygono regular de 17 lados, e feito isso pódé reputar-se construido aquelle polygono.

Tome-se Fig. 164.

$$BC = 1,$$

e sobre a sua continuação

$$CA = 8.$$

Tire-se por C a recta GD perpendicular a AB, e com $AD = AB$ determine-se o ponto D, e será

$$CD = \sqrt{17}.$$

Sobre GD tome-se $CE = CB = 1$ da parte do ponto D, e para a outra parte tome-se tambem $CG = 1$. Serão

$$DE = -1 + \sqrt{17},$$

$$DG=1+\sqrt{17},$$

$$GE=2.$$

Dividão-se DE, DG cada huma em duas partes iguaes, a primeira em F, a segunda em H, e teremos (Arith. Univ. § 565)

$$EF=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}=a,$$

$$DH=\frac{1+\sqrt{17}}{2}=-b.$$

Tire-se por E a perpendicular EI sobre GD, e tome-se sobre ella

$$EI=EF=a.$$

Será

$$GI=\sqrt{(a^2+4)}.$$

Produza-se GI até que se obtenha $IK=a$, e será

$$GK=a+\sqrt{(a^2+4)}.$$

seja L o seu meio, e teremos

$$GL=\frac{a+\sqrt{(a^2+4)}}{2}=c.$$

Tome-se sobre EI

$$EM=DH=-b,$$

será

$$GM=\sqrt{(b^2+4)}.$$

Tome-se sobre GM

$$GN=DH=-b,$$

será

$$MN = GM - GN = b + \sqrt{(b^2 + 4)}.$$

Divida-se MN ao meio em O, e teremos

$$MO = \frac{b+\sqrt{(b^2+4)}}{2} = e = \frac{1}{2} MN.$$

Tome-se sobre ED

$$EP = 2MN = 4e.$$

Sobre EM construa-se EQ media proporcional entre EP e EC; será

$$EQ = \sqrt{(EP \times EC)} = \sqrt{(4e \times 1)}.$$

Com a recta $QR = GL = c$, determine-se sobre EG o ponto R, o que he possivel, por ser (Arith. Univ. § 567) QR ou $c > \sqrt{(4e)}$, ou $> EQ$.

Será

$$ER = \sqrt{(c^2 - 4e)}.$$

Tome-se sobre ED

$$ES = c,$$

será

$$RS = c + \sqrt{(c^2 - 4e)}.$$

Ache-se o seu meio T, e será (Arith. Univ. § 566)

$$RT = \frac{c+\sqrt{(c^2-4e)}}{2} = 2\cos\frac{k\pi}{17}.$$

Busque-se o seu meio V, e será

$$RV = \cos\frac{k\pi}{17}.$$

Com RV, e com a hypothenusa $RX=1$, forme-se o triangulo rectangulo RVX, e será

$$RV=\cos\frac{XRV}{u},$$

sendo u a unidade angular. Logo

$$XRV=\frac{k\pi}{17}\cdot u=\frac{k}{17}\cdot 4qu=\frac{k}{17}\cdot 4r.$$

Por coincidencia (Arith. Univ. § 570) he $k=1$, logo XRV he o angulo do centro do polygono regular de 17 lados.

457. Se, por evitar o calculo dos periodos binarios, se ignora qual delles dá $k=1$, ou se, em consequencia de alguma mudança nas denominações das raizes das equações do segundo gráo, ou por se tratar de outro polygono regular, não acharmos $k=1$, poder-se-ha comtudo construir o angulo do centro, formando com o mesmo vertice R outro angulo $=XRV$ e adjacente, depois outro igual e adjacente ao segundo, e proseguindo até que se tenhão descripto, á roda do centro R, no presente caso, 17 angulos adjacentes, excluindo sempre do angulo total 4 rectos, logo que elle exceder aquella grandeza: entre os differentes angulos obtidos achar-se-ha necessariamente o angulo do centro do polygono regular. Isto póde obter-se sempre, porque a congruencia $kx\equiv 1$ (mod. 17) he sempre possivel, isto he, a equação indeterminada $kx=1+17y$, logo será

$$\frac{kx}{17}\cdot 4r=\frac{1}{17}\cdot 4r+y\cdot 4r,$$

equação que faz ver, que ha hum multiplice de $\frac{k}{17}\cdot 4r$, cujo excesso sobre hum multiplice de $4r$, he o angulo do centro $\frac{1}{17}\cdot 4r$.

Teem pois construcção geometrica todos os polygonos regulares, cujo numero de lados he primo da fórma 2^m+1.

458. Sejão a, b os numeros primos dos lados de dois polygonos regulares, que se possão construir geometricamente.

Será possivel a congruencia $ax \equiv 1 \pmod{b}$, isto he, a equação $ax = 1 + by$; logo teremos

$$ax - by = 1,$$

e

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{a} = \frac{1}{ab},$$

logo

$$x \cdot \frac{1}{b} \cdot 4r - y \cdot \frac{1}{a} \cdot 4r = \frac{1}{ab} \cdot 4r.$$

Isto quer dizer que se podem achar multiplices do angulo $\frac{1}{b} \cdot 4r$ do centro do polygono regular de b lados, e multiplices do angulo $\frac{1}{a} 4r$ do centro do polygono regular de a lados, a differença dos quaes multiplices he o angulo $\frac{1}{ab} \cdot 4r$ do centro do polygono regular de ab lados.

Da mesma maneira, sendo c o numero primo dos lados doutro polygono regular constructivel, será possivel a congruencia

$$abx \equiv 1 \pmod{c},$$

ou

$$abx - cy = 1,$$

ou

$$x \cdot \frac{1}{c} \cdot 4r - y \cdot \frac{1}{ab} \cdot 4r = \frac{1}{abc} \cdot 4r;$$

por consequencia póde achar-se o angulo $\frac{1}{abc} \cdot 4r$ do centro do polygono regular de abc lados, e assim por diante.

Isto he, teem construcção geometrica todos os polygonos regulares, cujo numero de lados he o producto dos numeros primos dos lados doutros polygonos regulares, já construidos.

459. No triedro trirectangulo, ou que tem as tres arestas perpendiculares entre si, huma diagonal ou recta qualquer, tirada pelo vertice dentro do triedro, faz com as arestas tres angulos taes, que a somma das segundas potencias dos seus cosenos he sempre a unidade.

Fig. 161. Seja *ABCD* o triedro, e *AE* a diagonal dada de posição. Por *E* tirem-se os tres planos *EFDG*, *EFBH*, *EGCH* perpendiculares ás tres arestas, que elles encontrão nos pontos *D*, *B*, *C*. Estes tres planos com as tres faces do triedro proposto, determinão hum parallelipipedo rectangulo. Porque sendo os planos *EFDG*, *EFBH* ambos perpendiculares ao plano *ABD*, a sua intersecção *EF* lhe he tambem perpendicular em algum ponto *F*. Da mesma maneira he *EH* perpendicular a *ABC* em *H*, e *EG* a *ADC* em *G*. Temos já oito vertices, entre os quaes *E* foi tomado arbitrariamente. O triedro *EFGH* he supplementario do proposto, logo os seus angulos, assim como os seus diedros são rectos, ou elle he trirectangulo. O angulo *BFD* he a medida de hum destes diedros, cuja aresta he *EF*, por ser *EF* perpendicular ao seu plano; mas por isto mesmo, são rectos *EFB*, *EFD*, logo o triedro, de que *F* he o vertice, será trirectangulo. Da mesma maneira são trirectangulos os triedros, que teem os vertices *G*, *H*.

AB he perpendicular ao plano *FBH* por construcção, logo o angulo *FBH* he recto, por ser a medida do diedro, cuja aresta he *AB* no triedro proposto; mas *ABF*, *ABH* serão tambem rectos, logo o triedro de que *B* he o vertice he trirectangulo. Da mesma fórma se prova que são trirectangulos os triedros, que teem *C*, *D* por vertices. Logo todos os angulos das faces do polyedro *ABCDEFGH* são rectos, logo elle he hum parallelipipedo rectangulo.

Tirem-se as diagonaes *ED*, *EB*, *EC* dos rectangulos das faces. Serão *EDA*, *EBA*, *ECA* angulos rectos, e triangulos rectangulos, porque AD, AB, AC, sendo por construcção respectivamente perpendiculares aos planos que encontrão, o serão ás rectas DE, BE, CE. Por conseguinte

$$AD = AE \cos EAD;\ AB = AE \cos EAB;\ AC = AE \cos EAC.$$

Mas temos

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2,$$

logo

$$\overline{AE}^2 = \overline{AE}^2 \cos^2 EAD + \overline{AE}^2 \cos^2 EAB + \overline{AE}^2 \cos^2 EAC,$$

ou

$$1 = \cos^2 EAD + \cos^2 EAB + \cos^2 EAC.$$

460. Projecção de hum polygono sobre hum plano, he outro polygono formado nesse plano, pelas intersecções deste com outros planos perpendiculares a elle, tirados pelos lados do polygono proposto.

461. A projecção da area de hum polygono he igual á area do polygono proposto multiplicada pelo coseno do diedro formado pelos planos dos dois polygonos o projectado, e a projecção.

Se pelos lados do polygono $ABCD$ se tirão planos perpendiculares ao plano $abcd$, as suas intersecções ab, bc, etc., com este ultimo plano, fórmão hum polygono $abcd$, que he a projecção do primeiro. Seja EF a intersecção dos planos dos dois polygonos mencionados. Tirem-se por todos os vertices A, B, C, D planos perpendiculares a EF. Sejão A, L, B, C, I, D, a, l, b, c, i, d todos os pontos communs a estes planos, e aos lados dos polygonos. Estes pontos, dois a dois, estão em perpendiculares ao plano $abcd$, cada huma das quaes he intersecção de dois planos per- Fig. 162.

pendiculares a este, hum por construcção da projecção, outro por ser perpendicular a EF, que está tambem no plano $abcd$. Os dois polygonos estão divididos pelos planos da construcção em triangulos ADL, BIC, adl, bic; e em quadrilateros $LBID$, $lbid$, os quaes, se não forem parallelogrammos, são trapezios, porque BI, LD são rectas collocadas no mesmo plano, e em planos parallelos por serem perpendiculares a EF, e logo são parallelas, e da mesma sorte o são bi, ld entre si. Estes trapezios mesmo podem ser divididos em triangulos pelas diagonaes LI, li. HF he a altura do triangulo ALD, por ser perpendicular ás parallelas LD, AF, e tambem he altura do triangulo ald, por ser tambem perpendicular ás parallelas ld, aF. Similhantemente GH he a altura dos trapezios $LBID$, $lbid$, ou de seus triangulos, etc. Logo

$$ABCD=\frac{1}{2}LD\times GF+\frac{1}{2}BI\times EH,$$

$$abcd=\frac{1}{2}ld\times GF+\frac{1}{2}bi\times EH,$$

destas equações se conclue

$$ABCD:abcd$$

$$::LD\times GF+BI\times EH:ld\times GF+bi\times EH.$$

Mas todos os triangulos LlH, DdH, BbG, IiG são similhantes, por serem rectangulos, e terem os angulos em G, H iguaes, pois que cada hum delles he a medida do diedro formado pelos planos dos dois polygonos; logo

$$LD=\frac{ld\times LH}{lH},\text{ e } BI=\frac{bi\times LH}{lH},$$

logo

$$ABCD:abcd$$

$$::\frac{ld\times LH\times GF}{lH}+\frac{bi\times LH\times EH}{lH}:ld\times GF+bi\times EH$$

$$::LH:lH::1:\cos LHl;$$

logo

$$abcd=ABCD\cos LHl.$$

462. No tetraedro trirectangulo, ou que tem hum triedro trirectangulo, a segunda potencia do numero que resulta da medida da face não rectangular, he igual á somma das segundas potencias dos numeros que resultão da medida das outras tres faces rectangulares.

No tetraedro $ABCD$ sejão rectos os angulos BAC, CAD, DAB. Fig. 163.

Digo primeiramente que a face BCD, que tomaremos para base, não he rectangular. Porque, se o angulo BCD, por exemplo, fosse recto, sería BD hypothenusa commum aos triangulos BAD, BCD; logo teriamos $\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$; absurdo, porque sendo BC, CD as hypothenusas respectivas aos triangulos BAC, CAD, são maiores do que os lados AB, AD.

Em segundo logar, os diedros feitos pelas faces com a base são agudos. Porque se, por exemplo, o diedro $ACDB$ fôsse recto, então a base BCD não encontraria AB, por ser esta aresta tambem perpendicular á face ACD; absurdo. E se o diedro fosse obtuso, tambem a base não encontraria AB da parte de B; absurdo.

Logo se do vertice principal A, commum ás faces, se abaixa a perpendicular AE sobre a base, esta cahirá dentro da base, e do tetraedro.

Tirem-se por AE os planos EAF, EAG, EAH respectivamente perpendiculares ás tres faces, e sejão AF, AG, AH as suas intersecções respectivas com ellas. Estas intersecções teem logar effectivamente mesmo nas faces, e não em suas continuações, porque os seis diedros formados pelos planos EAB, EAC, EAD com as faces rectangulares, são todos agudos, porque são todos menores do que os diedros rectos formados por estas faces entre si. Tirem-se EF, EG, EH: os primeiros tres planos são perpendiculares á base, porque passão por AE que he perpendicular a esta.

O plano AEF sendo perpendicular á face ABC, e á base BCD, he perpendicular á sua intersecção CB; logo o angulo AFE he a medida do diedro que ellas fórmão. Igualmente AGE, AHE são cada hum a medida de cada hum dos outros dois diedros formados com a base.

Nos triangulos rectangulos AEF, AEG, AEH, abaixadas as perpendiculares EI, EK, EL sobre as suas hypothenusas, será o angulo $AEI = AFE =$ diedro $ABCD$, porque AEI he complemento de IEF, assim como AFE. Temos igualmente $AEK = AGE =$ diedro $ABDC$, e $AEL = AHE =$ diedro $ACDB$.

EI he perpendicular á face ABC, porque está em hum plano perpendicular a esta face, e he ao mesmo tempo perpendicular á sua intersecção AF. Da mesma sorte EK, EL são respectivamente perpendiculares ás outras duas faces. Logo o plano IEK he perpendicular aos dois ABC, ABD, e por conseguinte á aresta AB, sua intersecção. Igualmente os planos KEL, IEL são respectivamente perpendiculares ás duas arestas AD, AC. Logo $EIKL$ he o triedro supplementario do triedro $ABCD$, logo $EIKL$ he hum triedro trirectangulo. Logo teremos

$$\cos^2 IEA + \cos^2 KEA + \cos^2 LEA = 1$$

$$= \cos^2 EFA + \cos^2 EGA + \cos^2 EHA,$$

isto he, a somma das segundas potencias dos cosenos dos diedros sobre a base he igual á unidade.

Cada huma das faces he a projecção da base sobre o plano dessa face. Assim teremos

$$ABC = BCD \cos EFA;$$

$$ABD = BCD \cos EGA;$$

$$ACD = BCD \cos EHA.$$

Logo

$$ABC^2 + ABD^2 + ACD^2$$

$$= \overline{BCD}^2 (\cos^2 EFA + \cos^2 EGA + \cos^2 EHA)$$

$$= \overline{BCD}^2$$

463. Em geral, e com huma similhante demonstração, se provará, que o quadrado da superficie de qualquer polygono he igual á somma dos quadrados das superficies das suas projecções sobre tres planos perpendiculares entre si.

LIVRO 6.º

Geometria circular plana

464. *Curva* he a linha, da qual nenhuma parte he recta.

465. *Curva plana* he aquella, que tem todos os seus pontos em hum plano.

466. *Circulo* he o logar de todos os pontos de hum plano, que distão igualmente de hum mesmo ponto, isto he, que teem o mesmo centro e raio.

467. O circulo tem centro no seu mesmo plano.

Sejão A, B, C, etc., os pontos, de que he logar o circulo, e D o centro d'estes pontos. Fig. 165.

Se D não está no mesmo plano, abaixe-se DE perpendicular sobre o plano dos pontos. Tirem-se DA, DB, DC, etc., que serão iguaes pela hypothese da proposição. Logo E não póde cahir sobre algum dos pontos propostos, porque teriamos então as obliquas a hum plano iguaes á perpendicular. Tirem-se tambem EA, EB, EC, etc. Os triangulos rectangulos AED, BED, CED, etc., são todos identicos, porque teem DE commum, e as hypothenusas iguaes, logo são iguaes EA, EB, EC, etc., ou E he centro dos pontos A, B, C, etc., ou do circulo que he o logar d'elles.

468. O circulo he continuo.

Porque se elle tivesse alguma interrupção, poderia tirar-se, n'este intervallo, e no seu plano a recta, $EF = EA$, e depois DF. Então o triangulo EDF seria tambem rectangulo, e identico com EDA, poisque DE he commum, e são iguaes por construcção os outros dois lados dos angulos rectos; seria portanto $DF = DA$, e F hum ponto com o mesmo centro e raio que *A*, *B*, *C*, etc., isto he, ponto do circulo. Logo não ha n'elle interrupção.

469. O circulo he huma curva plana.

O circulo he huma linha, porque se alguma das suas partes não o fosse, então, visto que elle não póde ser hum systema de pontos destacados, segundo a ultima proposição, só poderia ser huma parte da superficie plana, sobre a qual estão os pontos, de que o circulo he o logar, e por conseguinte poder-se-hia tirar n'esta parte de superficie plana huma recta, e todos os pontos d'esta recta terião o mesmo centro, absurdo (§ 84); pela mesma rasão nenhuma parte do circulo he recta. Logo o circulo he huma curva plana.

470. O circulo não póde ter, fóra de si, centro no seu plano.

Está demonstrado, que o circulo tem centro no seu plano,
Fig. 166. e, se he possivel, esteja este centro *D* fóra do circulo, que passa pelos pontos *A*, *B*, *C*, etc.

Tire-se a recta DA, e produza-se esta da parte de *D* até que seja $DE = DA$; será *E* hum ponto do circulo, e *D* estará entre *A*, e *E*. Da mesma maneira estará *D* entre *B* e hum outro ponto opposto equidistante de *D*, e assim por diante. Logo *D* fica sempre entre pontos do circulo, e logo dentro d'elle, contra a hypothese de que estivesse fóra.

471. O circulo tem hum centro só no seu plano.

Fig. 167. Se he possivel, sejão *A*, *B* dois centros do circulo CDE. Estarão ambos dentro do circulo, pela proposição precedente; logo a recta AB, por elles tirada, encontrará produzida o circulo em dois pontos *C*, *E*.

Porque *A* he centro, será $AC = AE$; logo $BC > BE$; mas porque *B* he centro, deveria ser $BC = BE$: absurdo; logo não ha dois centros no mesmo plano do circulo.

472. Quando se falla de centro do circulo, subentende-se aquelle, que está no seu plano: e da mesma maneira, o raio he a distancia d'este centro a hum ponto qualquer do circulo.

473. Descrever o circulo sobre hum plano determinado, sendo dados o centro e o raio.

No plano dado CDE com o centro dado *A*, e raio AC

igual ao dado, descreve-se o circulo, e a superficie que elle encerra, movendo *A C*, sem mover *A*, no mesmo sentido, e conservando sempre o extremo *C* no plano até que volte á sua posição primitiva. Ou abrindo hum compasso de maneira, que a distancia entre as suas pontas seja igual a *A C*, e fixando huma d'ellas em *A*, a outra sendo applicada sobre o plano proposto descreverá o circulo.

Se o centro dado não he o principal, mas outro fóra do plano dado, póde ainda descrever-se o circulo da mesma fórma, huma vez que a perpendicular abaixada do centro sobre o plano seja menor do que o raio.

474. Sendo dado o circulo, ou tres de seus pontos sómente, achar o seu centro.

Como tres pontos quaesquer do circulo não estão em linha recta, podem ser os vertices de hum triangulo, e o centro d'estes vertices, que he unico no seu plano, será tambem o centro do circulo.

475. Duas linhas planas chamão-se *tangente* huma da outra, quando sendo collocadas no mesmo plano, e produzidas, se he possivel, não se cruzão, nem teem mais de hum ponto commum. Quando se falla da tangente em hum ponto de huma curva plana, subentende-se particularmente a tangente rectilinea.

476. Por hum ponto do circulo tirar a sua tangente.

Seja *A* ponto do circulo *A B C*, pelo qual se quer tirar Fig. 168.
a tangente d'este circulo.

Busque-se o centro *D* do circulo proposto, e tire-se o raio *D A*.

Por *A* tire-se *E F* perpendicular ao raio *D A*, e será *E F* a tangente pedida. Porque qualquer dos seus pontos, diverso de *A*, está mais longe de *D* do que está *A*, e por consequencia todos os outros estão fóra do circulo.

Esta tangente he unica para o ponto *A*. Porque outra recta qualquer tirada por *A* faria agudo hum dos angulos com o raio *A D*, e a perpendicular de *D* sobre ella seria $<$ *A D*; logo o seu pé ficaria dentro do circulo e esta recta produzida cortaria ainda o circulo em outro ponto.

477. Tirar huma tangente a dois circulos dados de grandeza e posição.

Fig. 169. Sejão A, B os centros dos dois circulos dados, e C, D os dois pontos de contacto, ou seja CD a tangente commum aos dois circulos.

Conhece-se AB que he a distancia dos centros, por hypothese; e AC, BD que são os raios dos circulos; sabe-se que os angulos C, D são rectos. Tire-se BE parallela a CD. No triangulo rectangulo ABE conhece-se a hypothenusa AB, e o lado AE igual á differença dos raios; póde pois construir-se o angulo A, ou a posição de AC, e já se vê, que o problema fica resolvido; mas he necessario ajuntar ás condições, que a distancia dos centros seja maior do que a differença dos raios. Vê-se tambem, que se póde tirar outra tangente da outra parte da linha dos centros.

Fig. 170. Querendo que a tangente CD corte a linha dos centros AB, então os triangulos rectangulos similhantes AEC, BED dão

$$BD:AC::BE:AE,$$

ou

$$BD+AC:AC::BA:AE,$$

e conheceremos AE. No triangulo rectangulo AEC, com a hypothenusa AE e o lado AC, póde construir-se o angulo A, e o problema fica resolvido, se entretanto a distancia dos centros A, B, que se compõem de duas hypothenusas, fôr maior do que a somma dos raios AC, BD.

Já se vê que he possivel tirar outra tangente, que corte a distancia dos centros.

478. Para tirar huma tangente ao circulo, que seja parallela a huma recta dada, basta abaixar do centro huma perpendicular sobre essa recta, e ter-se-ha o ponto de contacto.

Fig. 171. 479. Para descrever por dois pontos A, B hum circulo, que toque huma recta dada CD; tire-se a recta AB, e se ella encontrar, sendo produzida, CD em hum ponto E, en-

tão tome-se EF media proporcional entre EA, e EB, e os tres pontos F, A, B determinarão o circulo pedido (§ 474).

Se AB he parallela a CD, levante-se a perpendicular EF no meio de AB, e o ponto F de encontro com CD será o ponto de contacto do circulo ABF. Fig. 172.

480. Para tirar por hum ponto dado A hum circulo, que toque duas rectas dadas, tire-se por A huma recta FG, que faça angulos iguaes com as duas rectas dadas BC, DE e tome-se $GH = AF$; faça-se depois passar pelos dois pontos G, H hum circulo, que toque huma das rectas dadas, e que por consequencia tocará tambem a outra. Fig. 173.

481. Para descrever hum circulo que toque tres rectas dadas; se estas se encontrão duas a duas formando hum triangulo, fica o problema resolvido, buscando o centro dos lados e o apothema, que serão o centro e o raio do circulo pedido.

Se duas AB, CD das rectas AB, BD, CD são parallelas, então da mesma fórma dividão-se ao meio os angulos ABD, BDC pelas rectas BE, DE; e o ponto E de concurso será o centro, e qualquer das perpendiculares EF, EH, EG o raio do circulo pedido. Fig. 174.

Bem se vê que ha outra solução da outra parte da secante BD.

Vê-se tambem que o problema não he possivel, se as rectas dadas são todas parallelas.

482. Dois circulos, nos quaes a distancia dos centros he igual á somma dos seus dois raios, tocão-se exteriormente em hum ponto d'esta distancia.

Sejão AB os centros de dois circulos, cujos raios são respectivamente AD, BE; e seja $AB = AD + BE$. Fig. 175

Tome-se $AC = AD$, será $BC = BE$; logo C he hum ponto commum aos dois circulos, e o unico, porque na recta AB não póde existir outro ponto F commum aos dois circulos, poisque então seria $BC = BF$: absurdo. Nem de qualquer dos lados de AB póde existir hum ponto G commum aos circulos, porque tirando GA, GB, teriamos $GA =$

$A\,C$, como sendo raios do mesmo circulo, e $G\,B = B\,C$, por igual rasão, isto he, seria

$$A\,G + B\,G = A\,B: \text{ absurdo.}$$

Nenhum ponto G de hum dos circulos, do qual B he centro, póde estar dentro do outro, que tem por centro A; porque produzindo $A\,G$ até o encontro do circulo em H, seria $A\,H = A\,C$; mas temos já $B\,G = B\,C$; logo

$$A\,H + B\,G = A\,B,$$

logo

$$A\,G + B\,G < A\,B: \text{ absurdo.}$$

Tambem nenhum ponto F do circulo, de que B he centro, póde estar sobre $A\,C$, ou sobre a sua continuação, como temos visto.

483. Dois circulos, nos quaes a distancia dos centros he igual á differença dos seus raios, tocão-se interiormente em hum ponto unico da recta, sobre a qual estão os centros.

Fig. 176. Sejão A, B os centros de dois circulos, $A\,B$ será a differença dos raios; e seja A o centro do circulo, cujo raio he o maior.

Produza-se $A\,B$ da parte de B, até que tenhamos $A\,C$ igual ao raio maior. Será C ponto commum aos dois circulos, e o unico.

Porque na recta $A\,B$ não póde existir outro ponto commum aos dois circulos, nem á esquerda de A, porque faria menor do que o outro o raio que deveria ser maior, nem á direita de A, porque tornaria desiguaes os raios de hum mesmo circulo. Da mesma sorte não ha ponto commum D de algum dos lados de $A\,B$, porque tirando $A\,D$, $B\,D$, teriamos $A\,D = A\,C$, e $B\,D = B\,C$;

logo

$$A\,D - B\,D = A\,B,$$

ou

$$A\,D = A\,B + B\,D: \text{ absurdo.}$$

Nenhum ponto E do circulo, cujo centro he B, póde existir fóra do circulo, de que A he centro; porque tirando $A E$, esta recta o cortaria em algum ponto F, e seria $A B + B E = A B + B C = A C = A F < A E$: absurdo.

484. Dois circulos, nos quaes a distancia dos centros he menor do que a somma dos dois raios, e maior do que a sua differença, teem dois pontos communs.

Porque a distancia $A B$ dos centros sendo menor do que a somma dos dois raios $A D$, $B D$, e maior do que a sua differença, temos as condições necessarias (§ 69) para a construcção de dois triangulos, que tenhão estes lados, hum acima de $A B$, o outro da parte opposta no mesmo plano; o que dá dois pontos D communs aos circulos, cujos centros são A, B, e os raios $A D$, $B D$. Fig. 177.

485. Dois circulos não podem ter mais de dois pontos communs.

Sejão $A B$ os centros dos dois circulos.

Nenhum dos pontos communs da questão póde existir na recta que une os centros, ou na sua continuação. Porque no primeiro caso, a distancia dos centros seria a somma dos raios, e os circulos se tocarião, e os dois pontos communs deixarião de existir; e no segundo caso, seria $A B$ a differença dos raios, e os circulos não terião da mesma fórma mais do que hum ponto commum.

Vejamos agora se podem existir dois pontos communs aos circulos, do mesmo lado de $A B$. Se existem, não poderão ser C, D, que se achão em linha recta com qualquer A dos dois centros; porque então, sendo por hypothese communs aos dois circulos, serião $A C$, $A D$ raios do mesmo circulo, de que A he centro: absurdo, Sejão pois, se he possivel, D, E estes dois pontos communs. Tirem-se $D B$, $E B$ que serão iguaes, como sendo raios do mesmo circulo, de que B he centro; similhantemente, são iguaes entre si $A D$, $A E$; e poisque $A B$ he commum aos dois triangulos $A B D$, $A B E$, serão estes identicos, e logo iguaes os angulos oppostos aos lados iguaes nos dois triangulos, isto he, ang. DAB = ang. EAB: absurdo. Logo não ha mais do que dois pontos communs, hum de cada parte de AB.

486. Por hum ponto fóra de hum circulo tirar huma tangente ao mesmo circulo.

Fig. 178. Seja A o ponto dado fóra do circulo CBD.

Ache-se o centro E do circulo, tire-se AE, e busque-se o seu meio F. Com o centro F, e o raio FA descreva-se hum circulo. Os dois circulos terão dois pontos communs C, D, mas nenhum d'elles na recta tirada pelos centros, porque a distancia $FE = FA$ dos centros he o raio de hum, e logo menor que a somma dos raios dos dois, e maior que FB, differença d'estes raios. Tirem-se AD, AC, ED. Cada huma das rectas AD, AC he tangente do circulo proposto. Porque o triangulo ADE, que tem o centro dos vertices sobre o lado AE, he rectangulo em D, ou he AD perpendicular sobre o raio ED.

487. *Arco de huma curva* he huma parte d'esta curva. *Corda da curva* ou *do arco* he a recta, cujos extremos são pontos da curva, ou extremos tambem do arco. *Diametro da curva* he a recta que divide em partes iguaes todas as cordas parallelas entre si. *Grandeza do diametro* he a parte d'esta linha, que he tambem huma corda.

488. Tambem se chama *circulo* a parte do plano que elle encerra; e n'este caso, a linha, que se chamava circulo, toma o nome de *circumferencia* ou *peripheria*.

489. A perpendicular a cordas parallelas, tirada pelo centro do circulo, he hum diametro.

Fig. 179. Do centro D do circulo ABC abaixe-se DE perpendicular sobre a corda AB; tirem-se os raios DA, DB. Serão identicos os triangulos rectangulos ADE, BDE, porque teem as hypothenusas iguaes, e o lado DE commum; logo $EA = EB$.

Da mesma maneira se prova, que esta mesma perpendicular divide, pelo meio, qualquer outra corda GH parallela a AB: e quanto á corda tirada pelo centro D, he claro que ella tem este ponto no seu meio. Logo DE he diametro, e FC a sua grandeza.

490. Toda a recta, que passa pelo centro do circulo, he diametro.

Porque de todos os seus pontos, que estão dentro do circulo, podem levantar-se cordas perpendiculares sobre ella, as quaes por consequencia serão parallelas, e divididas igualmente por esta recta qualquer, que passa pelo centro.

491. Hum diametro não divide sómente em partes iguaes as cordas, a que he perpendicular, mas tambem o circulo, a circumferencia, e os arcos, a que as ditas cordas pertencem.

Porque dobrando a figura pelo diametro *F C*, os pontos *A*, *B* coincidem, e da mesma maneira os extremos de outras cordas parallelas a *A B*, o que basta para fazer sentir a verdade da proposição.

492. Cordas parallelas *A B*, *G H* cortão no circulo arcos iguaes *A G*, *B H*.

493. Dois quaesquer dos tres pontos meio da corda, meio do arco, e centro do circulo, determinam a posição do diametro perpendicular á corda.

494. Dividir hum arco dado em duas partes iguaes.

Tire-se a corda do arco, e a perpendicular ao meio da corda. Esta perpendicular divide o arco em partes iguaes.

495. Pertencendo a corda a dois arcos da circumferencia, e a dois segmentos do circulo, subentende-se sempre o menor segmento, isto he, aquelle fóra do qual está o centro, e o menor arco, ou aquelle que pertence ao menor segmento.

496. A corda do circulo tem todos os seus pontos dentro d'elle.

Porque os extremos *A*, *B* da corda estão mais affastados de *D*, do que qualquer outro ponto de *A B* (§ 85). Se a corda he diametro, tambem a proposição he evidente.

497. Duas circumferencias, que teem dois pontos communs, cortão-se.

Porque a corda entre estes dois pontos estará nos dois circulos, logo estes teem commum huma parte da sua superficie, e logo as circumferencias cortão-se mutuamente.

498. O diametro he a maior corda do circulo.

No triangulo ABD temos $AB < AD + BD$, isto he, AB menor do que a somma de dois semidiametros.

499. De duas cordas do circulo, a menor está mais longe do centro; e reciprocamente.

No triangulo rectangulo ABE o quadrado do raio AD he igual á somma do quadrado de DE, distancia perpendicular do centro á corda, e do quadrado da semicorda AE; de sorte que, sendo o raio coñstante, quando DE augmenta he necessario que AE diminua, e por consequencia AB; e reciprocamente.

500. No mesmo circulo, ou em circulos descritos com raios iguaes, cordas iguaes estão a igual distancia do centro; e, reciprocamente, se as cordas estão a igual distancia do centro são iguaes.

501. Arcos iguaes de circumferencia descritas com raios iguaes, são identicos.

Sejão iguaes em comprimento, ou iguaes á mesma recta
Fig. 180. os arcos AB, CD das circumferencias AEB, CKD, com os centros respectivos G, H, e os raios GA, HC iguaes. Applique-se o centro G sobre o centro H, o raio GA sobre o raio HC, e o arco AB sobre o plano CDF da parte de CD.

Todos os pontos de AB cahirão sobre a circumferencia CDF, porque se algum cahisse em I, fóra ou dentro d'esta; então tirando HI, esta recta encontraria, produzida se fosse necessario, a circumferencia CDF em algum ponto K, e seria $HI = GA$, e $HK = HC$, isto he, $HI = HK$: absurdo. Estando pois os pontos do arco AB sobre CDF, e da mesma parte de CD, e sendo $AB = CD$, o outro extremo B cahirá sobre D, e os arcos serão identicos.

502. Com a mesma condição, as circumferencias tambem serão identicas.

503. Com a mesma condição, os arcos iguaes teem cordas iguaes; e reciprocamente.

Para demonstrar esta proposição inversa, faça-se a sobreposição dos triangulos identicos GAB, HCD, e então os arcos, coincidindo e tendo os mesmos extremos, serão iguaes, porque são identicos.

504. As asserções dos §§ 501, 503 teem logar tambem em huma só circumferencia, empregando entretanto na demonstração a segunda circumferencia; porque quantidades iguaes ou identicas com huma terceira, são iguaes ou identicas entre si.

505. *Sector do circulo* he a superficie, que dois raios e o arco interceptado terminam. O angulo dos dois raios chama-se *angulo do sector* ou *do centro.*

506. No mesmo circulo, ou em circulos descritos com raios iguaes os sectores, que teem arcos iguaes, teem os angulos iguaes, e são iguaes; e, reciprocamente, se teem os angulos iguaes, teem iguaes os arcos, e são iguaes.

Sendo iguaes os arcos AB, CD dos sectores GAB, HCD, são iguaes as suas cordas AB, CD; logo são iguaes os triangulos ABG, CDH; logo tambem os angulos G, H, e logo os sectores admittem sobreposição.

Reciprocamente, se os angulos G, H são iguaes, serão iguaes os triangulos ABG, CDH, logo iguaes as cordas AB, CD, e logo iguaes os arcos AB, CD.

507. Com as mesmas condições, os segmentos, que teem os arcos iguaes, ou as cordas iguaes, são iguaes.

508. No mesmo circulo, ou em circulos iguaes os arcos são proporcionaes aos sectores, e aos angulos do centro.

Sejão primeiramente commensuraveis os arcos AB, CD de circulos iguaes, e seja AE a sua medida commum. Tire-se o raio GE. Suppondo os arcos AB, CD divididos em partes iguaes a AE, e tirados raios aos pontos de divisão, ver-se-ha que os sectores, e os angulos do centro são compostos de sectores iguaes, e de angulos do centro tambem iguaes, assim como os arcos AB, CD são compostos de arcos iguaes a AE: e por isso a proposição he verdadeira.

Se os arcos não são commensuraveis, a demonstração he similhante á do § 123.

509. Logo quando se diz que hum arco he a medida do angulo do centro, deve subentender-se que o arco he igual ao angulo do centro dividido pela unidade angular, e multiplicado pela unidade ou medida do arco.

510. O angulo, que tem o vertice em huma circumferencia, tem por medida a metade do arco interceptado pelos lados, ou pelas suas continuações.

Fig. 181. O angulo ABC he metade do angulo do centro ADC (§ 172), logo $ABC = \frac{1}{2} AC$.

O angulo AEF formado pela tangente, e pelo diametro, he recto, logo tem por medida hum quarto da circumferencia, ou a metade da semicircumferencia ABE, comprehendida entre seus lados.

$$\text{O angulo } FEH = FEA + HEA$$

$$= \frac{1}{2} ABE + \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} EBH.$$

O angulo GEB he o supplemento de BEH, logo tem juntos por medida a semicircumferencia; mas o angulo

$$BEH = \frac{1}{2} BAH,$$

logo

$$\text{o ang. } GEB = \frac{1}{2}(BE + EH).$$

$$\text{O angulo } FEG = IEH = \frac{1}{2} HE.$$

O angulo GEI, seja EI tangente ou não, sendo igual ao seu verticalmente opposto, está comprehendido na proposição.

511. O angulo excentrico, ou que tem o vertice entre o centro e a circumferencia, tem por medida a semisomma dos arcos interceptados por elle, e pelo angulo verticalmente opposto.

Fig. 182. He o angulo $BAC = ADC + ACD = \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} ED$.

512. O angulo, que tem o vertice fóra do circulo, tem por medida a semidifferença dos arcos que intercepta.

O angulo $BFC = BDC - DCF$

$$= \tfrac{1}{2} BC - \tfrac{1}{2} DG = \tfrac{1}{2}(BC - DG).$$

513. Se por hum ponto, tomado dentro ou fóra de hum circulo, se tirão duas rectas que cortem a circumferencia em quatro pontos, as partes d'estas rectas, comprehendidas entre o ponto e os quatro da circumferencia, são reciprocamente proporcionaes.

Se o ponto he A dentro do circulo, e as rectas as cordas BD, CE; os triangulos ABE, ADC, que são equiangulos entre si, dão

$$AE : AB :: AD : AC.$$

Se o ponto he F fóra do circulo, e as rectas as secantes FB, FC; os triangulos FBG, FCD, que teem o angulo BFC commum, e

$$FBG = \tfrac{1}{2} DG = FCD,$$

dão

$$DF : GF :: CF : BF.$$

514. Se huma das rectas encontra a circumferencia em hum só ponto, isto he, se he tangente, ella será media proporcional entre a secante, e a sua parte exterior. Fig. 171.

Porque os dois triangulos FEB, FED teem o angulo BFE commum, e o angulo $FBE = FED$, por terem ambos por medida $\frac{1}{2} ED$; logo os triangulos são similhantes, e

$$BF : EF :: EF : DF.$$

515. Fazer hum segmento circular *capaz* de huma corda e de hum angulo dados, isto he, que tenha o vertice do angulo no seu arco, e os extremos da corda sobre os lados do angulo.

Sejão AB a corda, e CDE o angulo dados. Fig. 183.

Faça-se o angulo CDF duplo do angulo agudo CDE dado, voltando este angulo para a outra parte de DE, ou fazendo $EDF = CDE$. Faça-se $DF = DC$. Tire-se CF. Fação-se os angulos A, B cada hum igual a C. Será $G = CDF$, e $GA = GB$. Com o centro G, e o raio GA descreva-se o arco do segmento, dentro do qual esteja G, e ter-se-ha o segmento pedido.

Porque qualquer angulo inscrito n'este segmento, e cujos lados passem por A, e B, será

$$= \frac{1}{2} G = \frac{1}{2} CDF = CDE.$$

Se o angulo dado CDE he obtuso, busque-se o segmento do seu supplemento, e o outro segmento será o pedido. Se o angulo CDE he recto, basta descrever huma semicircumferencia com a corda como diametro.

516. Inscrever em hum triedro dado hum triangulo dado, ou o que he o mesmo, fazer em hum triedro huma secção dada.

Fig. 184. Sejão a, b, c os angulos do triedro. Sobre cada hum dos lados do triangulo dado ABC, como cordas, fação-se os arcos ADB, BEC, CFA, capazes respectivamente dos angulos dados a, b, c; e depois fação-se girar os arcos sobre as suas cordas respectivas, até que tenhão hum ponto commum, que será o vertice do triedro.

517. A recta tirada de hum ponto do plano do circulo á circumferencia, augmenta com o arco interceptado por ella, e pelo ponto da circumferencia mais proximo, determinado pela recta que passa por aquello ponto e pelo centro.

Fig. 185. Sejão A o ponto dado, AC a linha que passa por elle e pelo ponto C, supposto o centro, AB, AD rectas tiradas do dito ponto A á circumferencia, E o ponto da recta infinita CA e da circumferencia, o mais proximo de A.

Temos $\quad CA + AB > CB,$

isto he $\quad AC + AB > CE;$

logo quando A está dentro do circulo será $AB > AE$.

Temos

$$CA - AB < CB,$$

isto he,

$$CA - AB < CE;$$

logo quando A está fóra do circulo, será

$$CE + AE - AB < CE,$$

logo tambem $AB > AE$.

Nos triangulos ACB, ACD que teem AC commum, e $CB = CD$, he $AD > AB$, assim como o arco $ED >$ arco EB.

Temos tambem, estando o ponto A dentro do circulo, $AF > AD$, porque $GA > AE$, e he

$$AF + AE > AD + GA,$$

O mesmo acontece quando A está fóra do circulo; porque no triangulo ADF o angulo opposto a AF he maior que o angulo opposto a AD, poisque

$$\text{ang. } ADF = \tfrac{1}{2} FH + \tfrac{1}{2} HG = \tfrac{1}{2} ED + \tfrac{1}{2} HG,$$

e o angulo $DFA = \frac{1}{2} ED$.

Quando o ponto A está sobre a circumferencia, ou confundido com E, não existe AE, nem AG, porque então está tambem sobre A ou E; mas tem logar tudo o mais, e póde concluir-se, que quando os arcos são menores do que a semicircumferencia, o arco maior tem maior corda, e reciprocamente.

518. A perpendicular abaixada de hum ponto da circumferencia sobre hum diametro chama-se *ordenada* d'esse ponto; *abscissa* he a parte do diametro comprehendida entre a ordenada e o centro; e ambas as linhas são chamadas *coordenadas* do ponto.

519. A ordenada he media proporcional entre os segmentos do diametro do circulo.

Fig. 186. A ordenada CD he metade da corda CF, logo he media proporcional entre AD e DB (§ 513).

520. Reciprocamente, se huma linha plana he tal que todas as perpendiculares abaixadas de seus pontos sobre huma de suas cordas sejão medias proporcionaes entre os seus segmentos respectivos; esta linha será hum circulo, e a corda o seu diametro.

Seja ACB a linha plana proposta, tal que a perpendicular qualquer CD, tirada de algum ponto C sobre a corda AB, seja sempre media proporcional entre AD e DB; digo que esta linha he a circumferencia circular.

Divida-se AB ao meio em E. Tire-se EC.

Pela propriedade da linha proposta, temos

$$CD^2 = AD \times DB = (AE + ED)\,(EB - ED)$$

$$= (AE + ED)\,(AE - ED) = AE^2 - ED^2.$$

Mas pela propriedade do triangulo rectangulo DEC, he

$$CD^2 = CE^2 - ED^2;\ \text{logo}\ CE = AE.$$

Se a perpendicular cahe no ponto E, como GE, então para ser media proporcional entre os segmentos iguaes, he preciso que seja igual a cada hum d'elles. Logo todos os pontos de ACB estão distantes de E, tanto como cada hum dos pontos A, B. Logo a linha proposta he circulo, e tem o centro em E.

521. Dois arcos, que formão juntos o quarto da circumferencia, sendo divididos pela unidade do arco, dão dois numeros que são completamentos hum do outro. (Arithmetica Universal § 288).

Dividindo pela unidade angular u os dois angulos agudos do triangulo rectangulo, resultão dois numeros complementos hum do outro para o numero q: esta unidade he o angulo recto r dividido por q, isto he, $u = \frac{r}{q}$.

Ora a unidade U do arco deve ser o arco que mede u, logo deve estar para o quadrante GCB da circumferencia, que designo por c, como u está para o angulo recto $GEB = r$, isto he:

$$U = \frac{\frac{1}{4} c u}{r} = \frac{\frac{1}{4} c . \frac{r}{q}}{r} = \frac{\frac{1}{4} c}{q}.$$

Logo

$$\frac{GC}{U} + \frac{CB}{U} = \frac{\frac{1}{4} c}{\frac{\frac{1}{4} c}{q}} = q.$$

522. $$\frac{AC}{U} = \frac{\text{ang. } AEC}{u}, \quad \frac{CB}{U} = \frac{\text{ang. } CEB}{u};$$

logo

$$\frac{AC + CB}{U} = \frac{2r}{u} = 2q,$$

isto he, dois arcos, que tomados juntos formão a semicircumferencia, sendo divididos pela unidade do arco, são supplementos hum do outro para $2q$.

523. $CD = EC \text{ sen. } \frac{CED}{u}$; $ED = EC \cos. \frac{CED}{u}$;

logo

$$CD = EC \text{ sen. } \frac{CB}{U},$$

$$ED = EC \cos. \frac{CB}{U}.$$

Assim, quando se diz que o seno de hum arco he a perpendicular abaixada de hum extremo do arco sobre o diametro, que passa pelo outro extremo, subentende-se que o arco deve ser dividido pela sua unidade, e que depois o seno d'este quociente multiplicado pelo raio, dá essa perpendicular. Quando se diz que o coseno de hum arco he a parte do diametro entre o centro e o seno, deve dar-se-lhe huma igual significação, isto he, huma similhante interpretação. N'este sentido, CD, que he tambem o seno do arco AC, he $= \text{sen.} \left(2q - \frac{CB}{U}\right) = \text{sen.} \frac{CB}{U}$, (Arithmetica Universal (§ 294), e ED, considerado como coseno do arco AC, he $=$

$\cos.\left(2q - \frac{CB}{U}\right) = -\cos.\frac{CB}{U}$. (Arithmetica Universal § 295).

524. *Tangente de hum arco de circulo* he a parte da tangente infinita ao extremo do arco, comprehendida entre este ponto, e a continuação do raio que passa pelo outro extremo. *Secante do arco* he este mesmo raio continuado até á tangente.

525. A tangente BH do arco BC he quarta proporcional ao coseno ED, ao seno CD, e ao raio EB.

526. O raio $EB = EC$ he meio proporcional entre o coseno ED, e a secante EH do arco BC.

527. De duas linhas planas fechadas, e que estão no mesmo plano, a exterior he maior do que a interior, se esta he convexa, isto he, se he, tal que não possa ser cortada em tres pontos por huma recta.

Porque para applicar todos os pontos da exterior sobre a interior, he necessario dobrar a primeira, suppondo-a flexivel, sobre a segunda supposta inflexivel.

528. De todas as linhas planas, descriptas no mesmo plano, e tendo os mesmos extremos, a recta he a menor, e depois d'esta he menor aquella que está entre a recta e as outras, huma vez que seja convexa.

Fig. 187. Para a demonstração, basta suppor tres linhas AEB, ACB, AB, das quaes a segunda seja convexa, e a terceira recta. Póde sempre formar-se da outra parte da recta AB hum triangulo ABD com os angulos em A, e B tão agudos, quanto he preciso para que a linha $ACBD$ fique ainda convexa. Então pela proposição precedente, será a linha $AEBDA >$ linha $ACBDA > ABDA$, d'onde tirando a linha quebrada ADB commum, teremos $AEB > ACB > AB$.

529. O seno he menor do que o seu arco. Porque o seno he metade da corda do arco duplo, e este he maior do que a corda.

530. Uma recta qualquer, tirada do extremo de hum arco, até á continuação do raio que passa pelo outro extremo, sem cortar o arco, he maior do que elle.

Seja AB a recta qualquer tirada do extremo do raio DA até á continuação do raio DC, sem cortar o arco AC; digo que $AB > AC$. Fig. 188.

Volte-se o triangulo DAB sobre a outra parta de DB, e seja E o novo logar do ponto A. Estará E na mesma circunferencia ECA, de que AC he hum arco; e será $EC = AC$, $BE = AB$. Mas a linha $EBA > ECA$, logo $BA > AC$.

531. Qualquer recta, tirada da continuação de hum raio até á continuação d'outro, sem cortar o arco, tem a sua parte, interceptada pelos dois raios, maior que este arco. Fig. 189.

Seja DE a recta tirada entre as continuações dos raios AB, AC, sem cortar o arco BC. Pelo centro, e pelo meio G do arco BC tire-se a recta AF até á recta proposta. Por F, e G tirem-se as perpendiculares HI, KL sobre AF, e terminadas nas continuações dos raios.

Será (§ 207) $DE > HI > KL > BC$, como se affirmou, porque KL he composta de duas partes KG, GL, cada huma maior do que o seu respectivo arco, conforme o que precede.

532. No quadrante, os senos crescem em rasão menor do que os arcos correspondentes.

Em quanto os arcos AG, CG são menores do que o quadrante, o maior tem o seno AB maior do que o seno CD do segundo, porque o primeiro he metade da corda de hum arco maior, e o segundo da corda de hum arco menor, e nenhum d'estes dois arcos duplos he maior do que a semicircumferencia. Logo a recta tirada por A, C encontrará em algum ponto F o raio EG produzido, e teremos Fig. 190.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AC + CF}{CF} = \frac{\text{corda } AC}{CF} + 1,$$

logo

$$\frac{AB}{CD} < \frac{\text{arco } AC}{\text{arco } CG} + 1,$$

isto he

$$\frac{AB}{CD} < \frac{\text{arco } AG}{\text{arco } CG}.$$

533. No quadrante, as tangentes crescem em rasão maior do que os arcos respectivos.

Fig. 191. Tire-se por D a perpendicular FG sobre o raio HA. Será

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DF+DG}{DG}=\frac{DF}{DG}+1;$$

logo

$$\frac{AB}{AC}>\frac{\text{arco } ED}{\text{arco } DA}+1,$$

isto he

$$\frac{AB}{AC}>\frac{\text{arco } EA}{\text{arco } DA}.$$

534. *Rectilineo inscrito em hum arco de circulo* he aquelle que tem os mesmos extremos que o arco, e todos os seus vertices no arco. Este rectilineo he huma linha composta de cordas.

Rectilineo circumscrito a hum arco de circulo he aquelle que tem os mesmos extremos do arco, e em cada hum de seus lados hum só ponto do arco. Este rectilineo he huma linha composta de tangentes.

535. Em dois arcos de sectores com o mesmo angulo do centro, inscrever no exterior hum rectilineo que não encontre o arco interior, e circumscrever ao arco interior hum rectilineo que não encontre o primeiro rectilineo, e que seja menor.

Fig. 192. Divida-se o arco AB em hum numero 2^n de partes iguaes AD, DE, etc., sendo n tão grande, que cada huma d'ellas seja $< AC$. Então a corda $AD < AC$. Logo AD não póde encontrar o arco CH correspondente em algum ponto, porque a distancia d'esse ponto ao ponto A he maior do que AC, como he facil de ver; logo este ponto de encontro supposto não poderia estar na corda $AD < AC$. O mesmo póde affirmar-se das outras cordas.

Divida-se o arco CH ao meio no ponto K. Por C, e H tirem-se as tangentes respectivas dos arcos CK, HK, as quaes concorrerão em algum ponto L do raio JK produzido, suppondo que he o ang. AID menor do que dois rectos.

Agora digo que nenhum ponto de CL póde estar sobre a corda AD, poisque aliás haveria hum triangulo com o angulo recto ACL, e cuja hypothenusa seria huma parte de AD, logo $AD > AC$, contra o que se exigia na construcção.

Fazendo a mesma construcção de tangentes dos arcos HM, MN, NG, teremos a linha $CLPQRG$ sómente composta de tangentes, sem encontrar a linha das cordas.

Tirando por K a tangente ST, teremos $CL + HL = ST <$ corda AD. Da mesma maneira $HP + MP < DE$; etc. Logo o rectilineo das tangentes $CLPQRG <$ rectilineo das cordas $ADEFB$.

536. Os sectores equiangulos têem os arcos proporcionaes aos raios.

Se he possivel, não seja Fig. 193.

$$BC : FG :: AB : AE,$$

mas seja a rasão do primeiro arco para o segundo menor do que a dos raios, ou seja

$$BC : FG :: AB : AD.$$

Com o raio AD descreva-se o arco DE. No arco DE inscreva-se a linha das cordas iguaes $DLMNE$, a qual não corte FG. Inscreva-se huma linha similhante em BC; e para isso basta achar os pontos H, I, K, em que os raios AL, AM, AN, produzidos cortão BC, e unil-os.

A similhança dos polygonos $ABHIKC$, $ADLMNE$ dá

$$BHIKC : DLMNE :: AB : AD;$$

logo

$BC : FG :: BHIKC : DLMNE$; absurdo, porque $BC > BHIKC$, e $FG <$ que a linha das tangentes circumscrita, a qual he $< DLMNE$.

Se he possivel, seja a rasão de hum arco BC para outro interior DE, maior do que a dos raios, ou seja

$$BC : DE :: AB : AF.$$

Com o raio AF descreva-se o arco FG. Ao arco FG circumscreva-se huma linha de tangentes, á qual chamaremos tang.' FG, e que não corte a linha das cordas DLM NE. Circumscreva-se huma similhante linha de tangentes a BC. A similhança d'estas figuras dá

$$\text{tang.}\, BC : \text{tang.}\, FG :: AB : AF,$$

logo

$BC : DE ::$ tang. BC : tang. FG; absurdo, porque o arco BC he menor do que a sua linha de tangentes, emquanto que o arco DE he maior do que a sua linha de cordas, a qual he maior do que a linha de tangentes de FG.

537. As circumferencias são proporcionaes aos seus raios.

538. O arco do sector, conservando-lhe sempre o mesmo angulo, póde adquirir a grandeza de huma linha qualquer, por ser huma funcção do raio que póde ir desde zero até ao infinito. O mesmo acontece a respeito da circumferencia.

539. Achar que funcção do raio he a circumferencia.

Fig. 194. Divida-se o quarto BC da circumferencia em duas partes iguaes, huma d'esta tambem em duas partes iguaes, huma d'estas ultimas em duas partes iguaes, e assim por diante, até que se obtenha hum arco DC tão pequeno quanto se quizer, ou menor do que qualquer linha proposta; e supponhamos que isso aconteça quando fôr $DC = \frac{BC}{m}$, sendo m portanto hum numero inteiro potencia de 2.

O arco DC he sempre maior do que o seno geometrico DE, e menor do que a tangente geometrica CF. Mas $CF = \frac{DE}{AE} \times AC$.

Tambem $DE = AD \,\text{sen.}\, \frac{DC}{U} = AC \text{ sen. } \frac{q.DC}{BC} = AC$ sen. $\frac{q}{m}$; e $AE = AC \cos. \frac{q}{m}$. Logo $DC > AC$ sen. $\frac{q}{m}$ e $< AC$ tang. $\frac{q}{m}$, isto é,

$$DC > AC\left(\frac{q}{m} - \frac{1}{6}.\frac{q^3}{m^3} + \text{etc.};\right),$$

$$DC < AC\left(\frac{q}{m} + \frac{1}{3}.\frac{q^3}{m^3} - \text{etc.}\right).$$

Estas desigualdades, suppondo m tão grande quanto se quizer, concorrem para dar $DC = \frac{q}{m} AC$, logo $CB = m$. $DC = q.AC$.

Logo o numero q, achado pelos meios algorithmicos he, a rasão do quadrante para o raio; logo 29, que chamaremos π, he a rasão da circumferencia para o diametro, isto he, $\pi = 3,1415926$ approximadamente; logo o dobro d'este numero multiplicado pelo raio, he a funcção procurada.

540. A area do sector circular he metade do producto do arco e do raio.

Se se nega que $\frac{1}{2} AB \times$ arco $BC =$ sector ABC, seja, se he possivel, Fig. 193.

$$\frac{1}{2} AB \times \text{arco } BC = \text{sector } ADE \text{ (menor)}.$$

Tire-se a perpendicular AP sobre a corda BH.

Será o polygono $ABHIKC >$ sector ADE, isto he, $\frac{1}{2} AP \times BHIKC > \frac{1}{2} AB \times$ arco BC: absurdo, por ser $AP < AB$, e a linha das cordas inscrita menor tambem do que o arco.

Se não he $\frac{1}{2} AD \times$ arco $DE =$ sector ADE, seja, se he possivel,

$$\frac{1}{2} AD \times \text{arco } DE = \text{sector } ABC \text{ (maior)}.$$

Será o polygono $ABHIKC <$ sector ABC, isto he, $\frac{1}{2} AP \times BHIKC < \frac{1}{2} AD \times$ arco DE: absurdo, por ser $AP > AD$, e $BHIKC >$ arco DE.

541. A area do circulo he metade do producto do circumferencia pelo raio.

542. A area do circulo he maior que a area de qualquer polygono, cujo perimetro seja igual á sua circumferencia.

O perimetro do polygono regular, isoperimetro e concentrico com o circulo, corta a circumferencia, porque aliás seria maior, ou menor do que elle, contra a hypothese de lhe ser igual. Por conseguinte o seu apothema, sendo a distancia do centro a cada hum dos lados, he menor do que o raio. Logo a area d'este polygono, que he o producto do seu perimetro pela metade do apothema, he menor do que a do circulo, que he o producto da circumferencia, igual ao perimetro, pela metade do raio.

A superficie d'outro polygono, não regular, mas do mesmo perimetro, he ainda menor.

543. A circumferencia he menor do que o perimetro de hum polygono qualquer, igual em area ao circulo.

O perimetro do polygono regular, concentrico com o circulo e tendo a mesma superficie, corta a circumferencia; logo sendo o seu apothema menor do que o raio, he necessario que o seu perimetro seja maior do que a circumferencia, para que o producto d'este perimetro pela metade do apothema seja igual ao producto da circumferencia pela metade do raio.

O perimetro de hum polygono qualquer não regular, tendo igual area, he ainda maior.

544. Dos angulos inscritos no mesmo segmento, tem huma maior somma de lados aquelle, que os tem iguaes.

Fig. 195. Teremos

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{4}AD\left(\cos.\ \tfrac{1}{4}AD - \cos.\ \tfrac{1}{4}DC\right)$$

$$< \text{sen.}\ \tfrac{1}{4}DC\left(\cos.\ \tfrac{1}{4}AD - \cos.\ \tfrac{1}{4}DC\right);$$

pois sendo $\cos.\ \tfrac{1}{4}AD < \cos.\ \tfrac{1}{4}DC$, são negativos os dois membros d'aquella inequação, e de duas quantidades negativas he menor aquella, que seria maior, se essas quantidades fossem positivas.

Logo

$$2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{4}\,A\,D\cos.\ \tfrac{1}{4}\,A\,D + 2\,\text{sen.}\ \tfrac{1}{4}\,D\,C\cos.\ \tfrac{1}{4}\,D\,C$$

$$< 2\,\text{sen.}\ \tfrac{1}{4}\,A\,D\cos.\ \tfrac{1}{4}\,D\,C + 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{4}\,D\,C\cos.\ \tfrac{1}{4}\,A\,D,$$

isto he,

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,A\,D + \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,D\,C < 2\,\text{sen.}\ \frac{A\,D + D\,C}{4},$$

ou, sendo $A\,B = B\,C$,

$$2\ \text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,A\,D + 2\,\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,D\,C < 2 \times 2\,\text{sen.}\ \tfrac{1}{2}\,A\,B,$$

isto he,

$$\text{corda}\,A\,D + \text{corda}\,D\,C < 2 \times \text{corda}\,A\,B.$$

545. Entre os triangulos $A\,B\,C$, $A\,E\,C$ com o mesmo perimetro, e base, o isosceles tem maior o angulo opposto á base $A\,C$.

Porque para o triangulo $A\,E\,C$ ser isoperimetro com $A\,B\,C$, he necessario que o vertice E esteja fóra do segmento, logo o angulo $E < A\,D\,C$, ou $< A\,B\,C$.

LIVRO 7.º

Dos solidos circulares.

546. *Solidos circulares* são os que podem ser gerados empregando o circulo e a linha recta.

547. *Solidos de revolução* são os gerados pela revolução de huma superficie sobre huma recta.

548. *Superficie curva* he aquella de que nenhuma parte he plana.

549. *Cylindro* he o logar de todos os circulos iguaes e parallelos, os quaes têem os centros na mesma recta. Esta recta chama-se *eixo*. O cylindro he infinito, mas usa-se de huma parte d'elle com o mesmo nome; e n'esse caso chamão-se *bases* os circulos extremos, e *altura* a perpendicular entre as bases. O *cylindro* diz-se *recto* quando o eixo he altura; aliás he *obliquo*.

550. O cylindro he hum solido circular.

O cylindro $CEDGFH$ póde ser gerado pelo circulo CED, e a recta AB, movendo o circulo parallelamente a si mesmo, e conservando sempre o centro na recta AB. Fig. 196

551. A secção feita no cylindro por hum plano parallelo ás bases, he hum circulo igual a cada huma d'ellas.

Porque esta secção he huma das posições do circulo gerador.

552. A superficie do cylindro, terminada pelas circumferencias das bases, ou a superficie continua por ellas comprehendida, he curva.

Porque se tivesse alguma parte plana, a intersecção d'esta parte com hum plano parallelo ás bases seria recta, e ao mesmo tempo circumferencia, ou arco: absurdo.

553. A secção feita no cylindro por qualquer plano, em que esteja o eixo, ou que lhe seja parallelo, he hum parallelogrammo; e as secções assim feitas na superficie curva são rectas iguaes e parallelas ao eixo, que se chamão *lados* do cylindro.

Pelos centros A, B das bases tire-se hum plano qualquer, em que estará o eixo, e que dividirá o cylindro, e terá duas secções FG, CD communs com as bases, com cada huma das quaes este plano tem hum ponto commum. FG, CD são parallelas, porque estão no plano secante e nos planos parallelos das bases, e são iguaes por serem diametros de circulos iguaes. Tirem-se as rectas FC, GD, e será $CDGF$ hum parallelogrammo.

Resta mostrar que qualquer ponto das rectas FC, GD he hum ponto da superficie curva do cylindro, ou que estas rectas são lados d'elle. Para isso, basta tirar de hum ponto I de huma para o eixo a recta IK parallela a CA, porque será $IK = CA$, logo será IK o raio do circulo, igual á base, tendo o centro em K, e logo o ponto I he hum dos da superficie descrita pela circumferencia do circulo gerador.

Qualquer plano parallelo ao eixo, e que corte o cylindro, deve cortar tambem huma das bases, e seja FL a sua intersecção. As intersecções dos planos ABF, ABL com este plano seccante serão rectas parallelas ao eixo, logo são os lados FC, LM do cylindro. Mas estes lados são iguaes e parallelos, logo a secção $FLMC$, feita no cylindro por hum plano parallelo ao eixo, he hum parallelogrammo.

554. A superficie curva do cylindro infinito, he o logar de todas as rectas parallelas ao eixo, tiradas de todos os pontos de huma das circumferencias das bases.

555. *Superficies tangentes* humas das outras, são as que não têem, nem podem ter, produzidas, mais de hum ponto commum, ou huma linha commum, e que não se cortão.

556. O plano, tirado por hum lado do cylindro, e pela recta tangente a huma das bases no extremo d'este lado, he tangente á superficie curva do cylindro.

Tire-se LN tangente a FLG. Digo que o plano MLN

he tangente ao cylindro. Porque, se he possivel, supponhamos que este plano encontra a superficie curva do cylindro em outro ponto P fóra da recta $L\,M$. Tire-se no plano $M\,L\,N$ a recta $P\,Q$ parallela a $L\,N$. Será $Q\,P$ perpendicular ao raio $Q\,R$ da secção do cylindro, que passa por Q, e parallela ás bases, por serem os raios $B\,L$, $R\,Q$, parallelos, e o angulo $B\,L\,N$ recto. O plano $P\,Q\,R$ será tambem parallelo ás bases. Logo $P\,Q\,R$ he o plano da secção circular que passa por Q, e $Q\,P$ a sua tangente, e ao mesmo tempo a sua corda, se P pertence á superficie curva: absurdo.

557. Por hum ponto dado fóra da superficie curva de hum cylindro infinito, ou situado n'ella tirar hum plano tangente a esta superficie.

Pelo ponto dado tire-se hum plano parallelo a huma das bases do cylindro, que cortará este produzido indefinidamente. Tire-se então por esse ponto huma tangente ao circulo, que he a intersecção do plano e do cylindro; e o plano, determinado por esta tangente e pelo lado do cylindro, que passa pelo ponto de contacto, será o plano tangente pedido.

Vê-se que se póde tirar outro plano tangente, se o ponto dado estiver fóra do cylindro.

558. Podem tambem tirar-se quatro planos tangentes a dois cylindros, que tenhão parallelos os eixos, e as bases.

Porque póde tirar-se hum plano parallelo ás suas bases, e depois as tangentes rectilineas dos dois circulos, que são as intersecções d'aquelle plano com os cylindros; e então estas tangentes, e os lados dos cylindros correspondentes aos pontos de contacto, determinão os planos tangentes pedidos.

559. O cylindro recto he hum solido de revolução:

O cylindro $C\,F$ sendo recto, o eixo $B\,A$ he perpendicular ás bases, e por conseguinte a todos os seus raios; logo $B\,E\,C\,A$ he hum rectangulo; e movendo-o sobre $B\,A$, o lado opposto $C\,E$ descreve a superficie curva do cylindro, e os outros dois lados $B\,E$, $A\,C$ descrevem as bases, porque em todas as posições do rectangulo, estas rectas, sendo perpendiculares a $B\,A$, se achão sempre em dois planos, perpendiculares a $A\,B$, e descrevem n'elles circulos parallelos e iguaes. Fig. 197.

e de que as rectas BE, AC são os raios, e B, A os centros.

560. *Pyramide conica* he o solido encerrado por hum circulo, e pela parte da superficie gerada por huma recta infinita, que passa sempre por hum ponto determinado fóra do plano do circulo, e por todos os pontos da sua circumferencia; a qual parte de superficie está entre esta circumferencia, e o dito ponto. Este ponto chama-se *vertice;* o circulo *base;* a recta entre o vertice e o centro da base *eixo;* e a perpendicular abaixada do vertice sobre o plano da base *altura da pyramide conica.* He *recta* a pyramide conica quando o eixo he altura, aliás he *obliqua. Lados da pyramide* são todas as rectas tiradas do vertice ó circumferencia da base, as quaes são ao mesmo tempo posições da recta geradora.

561. Na pyramide conica obliqua, os dois lados que estão no plano do eixo, e altura são o maximo e o minimo dos lados; e cada hum d'elles he unico; e cada hum dos outros não têem igual da mesma parte do dito plano, e só tem hum igual da outra parte.

Fig. 198. Na pyramide conica $ABCD$, de que DE he o eixo, e DF a altura, tire-se huma recta qualquer FG do pé F da altura para a circumferencia da base.

Os triangulos DFG, DFC, DFA são rectangulos em F; DF he commum; e teremos (§ 517) $AF > FG > FC$; logo $AD > DG > DC$.

Se o ponto F cahe na circumferencia, ou dentro, acontece o mesmo, porque não póde cahir em E.

562. Na pyramide conica recta todos os lados são iguaes.

Porque todos são hypothenusas de triangulos rectangulos, que têem o eixo ou a altura por lado commum, e cujos outros lados são os raios da base.

563. A pyramide conica recta he hum solido de revolução, gerado por hum triangulo rectangulo, sendo eixo hum dos lados do angulo recto.

A demonstração he similhante á do § 559.

564. A secção feita na pyramide conica por hum plano que passe pelo vertice, he hum triangulo.

Porque, para este plano cortar a pyramide, he necessario que corte a base; logo a sua intersecção com esta he huma corda $C\,G$, e os lados $G\,D$, $C\,D$ da pyramide, tirados dos extremos da corda para o vertice, são rectas que formão com ella hum triangulo, e que têem dois pontos cada huma no plano secante; logo estão n'este plano e na superficie da pyramide conica.

565. A secção feita em qualquer pyramide conica por hum plano parallelo á base, he circulo: e tambem o he na obliqua, se a secção tiver para hum dos lados, maximo e minimo, a mesma inclinação que a base tem para o outro.

Seja primeiramente a secção $G\,H\,I$ feita na pyramide conica $D\,A\,B\,C$ parallela á base $A\,B\,C$. Fig. 199.

Tire-se o diametro $A\,C$ da base, e seja $G\,I$ a intersecção do triangulo $D\,A\,C$ e da secção proposta $G\,H\,I$. Tire-se o eixo $D\,E$, que cortará $G\,I$ em algum ponto F. De qualquer ponto H do perimetro da secção tire-se $H\,F$; e seja $E\,B$ a intersecção do plano $D\,H\,F$ e da base.

Será $E\,B$ parallela a $F\,H$, por estarem no mesmo plano, e em planos parallelos. Logo são similhantes os triangulos $D\,B\,E$, $D\,H\,F$, e será $F\,H$ quarta proporcional ao eixo $D\,E$, ao raio $E\,B$ da base, e á recta $D\,F$; o mesmo acontece em qualquer outro ponto do perimetro $G\,H\,I$; logo todos estes pontos estão a igual distancia de F, e a secção he hum circulo.

Sejão agora $C\,D$ o eixo, $C\,E$ a altura, e $C\,A$, $C\,B$ os dois lados unicos da pyramide conica, isto he, o maior e o menor dos seus lados. No plano d'estas quatro rectas tire-se $F\,G$ que faça com hum dos lados unicos o angulo $C\,G\,F = C\,A\,B$. Tire-se por $F\,G$ hum plano perpendicular ao do eixo e altura, e cuja intersecção com a superficie da pyramide seja $F\,H\,G$. Digo que esta secção he hum circulo. Fig. 200.

Por qualquer ponto H do seu perimetro tire-se hum plano parallelo á base, cuja intersecção $H\,I\,K$ com a pyramide he hum circulo, do qual a intersecção $K\,I$ com o triangulo $C\,A\,B$ he o seu diametro. Conduza-se de H a recta $H\,L$

para a intersecção das rectas FG, HI. Estará HL na intersecção das duas secções FHG, KHI.

Mas estas duas secções são perpendiculares ao plano do eixo e altura, huma por construcção, e a outra por ser parallela á base, á qual he perpendicular aquelle plano; logo HL he perpendicular ao dito plano ACB, logo tambem perpendicular ás rectas FG, KI, que passão pelo seu pé, e estão n'este plano. Temos o angulo $IGL = CAB = FKL$, logo os triangulos ILG, FLK verticalmente oppostos são similhantes, e por tanto

$$FL : LI :: KL : LG, \text{ ou } FL \times LG = LI \times KL;$$

mas $HL^2 = LI \times KL$, logo tambem $LH^2 = FL \times LG$. Porém H he hum ponto qualquer de FHG, logo FHG he hum circulo.

O angulo CGF he a inclinação do lado CB sobre a secção FHG, e o angulo CAB a inclinação do lado CA sobre a base.

566. O mesmo acontece no cylindro obliquo, se se chamarem lados unicos ou principaes aquelles que estão no plano do eixo e altura; e a demonstração he a mesma se se considerarem os dois lados AF, BI como parallelos.

567. Póde tirar-se por hum ponto dado fóra, ou na superficie curva da pyramide conica, infinita das duas partes do vertice, hum plano tangente á pyramide, tirando pelo dito ponto hum plano parallelo á base da pyramide, e depois a tangente do circulo, que he a intersecção, imitando o que se fez no § 557.

Então o plano d'esta tangente e do lado correspondente da pyramide determina o plano tangente pedido.

Se o plano da construcção não encontra a pyramide conica senão no vertice, una-se então o ponto dado, e o vertice por huma recta, tire-se pelo centro da base huma parallela a esta recta, tome-se hum raio perpendicular, e pelo seu extremo tire-se a tangente rectilinea que será parallela ás outras duas rectas, e que com o lado correspondente da pyramide determinará o plano tangente pedido.

Bem se vê que n'este caso póde tirar-se ainda outro plano tangente.

Se o ponto dado he o vertice, as soluções são infinitas.

568. A superficie da pyramide conica entre o vertice e a circumferencia da base he curva.

A demonstração he como a do § 552.

569. O plano de um lado da pyramide conica, e da tangente da base no extremo d'este lado, he tangente á superficie curva.

570. *Esphera* he o solido, limitado por huma superficie, cujos pontos têem todos o mesmo centro.

571. O centro de todos os pontos da superficie da esphera não póde estar fóra d'ella, nem na mesma superficie.

A demonstração he como a do § 470.

572. O centro de todos os pontos da superficie da esphera he unico.

A demonstração he como a do § 471.

573. A distancia de qualquer ponto da superficie da esphera ao centro, chama-se *raio;* e a este centro, *centro da esphera;* e a recta composta de dois raios, he o *eixo* ou o *diametro da esphera.*

574. Sendo dados o centro e raio, descrever a esphera.

Com o centro A e raio AB descreva-se o semicirculo Fig. 201.
BDC, e fazendo a revolução inteira do semicirculo á roda de BC, ficará descrito hum solido de revolução $BDCE$, que he a esphera pedida.

Porque os pontos da sua superficie serão equidistantes de A, como os pontos da semicircumferencia que gera esta superficie.

575. Todas as rectas que passão pelo centro da esphera, e terminão na sua superficie, são eixos de revolução.

576. Qualquer secção feita na esphera, por hum plano, he hum circulo, cujo centro está no eixo que lhe he perpendicular.

Seja FGH esta secção. Todos os pontos do seu perimetro estão em hum plano, que he o plano secante, e a igual distancia de A; logo a secção he circulo (§ 466).

Seja AI o eixo da esphera perpendicular á secção. A pyramide conica que tivesse A por vertice, e FGH por base, teria os seus lados iguaes; logo seria recta, e a sua altura AI seria o eixo, ou I o centro de FGH.

Se a secção passa pelo centro da esphera, as duas partes do enunciado são evidentes.

577. *Polo* de hum circulo da esphera he cada hum dos extremos do eixo, que lhe he perpendicular.

578. Os circulos parallelos da esphera têem os mesmos polos; e reciprocamente, se têem os mesmos polos, são parallelos.

Sendo os circulos DEK, FGH parallelos, o eixo BC tirado perpendicularmente a hum d'elles, será perpendicular ao outro, e os extremos BC do eixo serão polos dos dois circulos.

Reciprocamente, se B, C são polos de ambos, o eixo BC he-lhes perpendicular, e logo estes circulos são parallelos.

579. Qualquer circulo tal como BDC que passa pelos polos d'outro, ou d'outros taes como DEK, FGH, por isso que passa pelo eixo BC, he como este perpendicular aos circulos.

580. Os circulos da esphera, que têem por centro o mesmo centro da esphera, são os maiores; e dos outros he menor aquelle, que dista mais do centro da esphera.

Os circulos, cujo centro he o da esphera, têem por diametro os eixos da esphera, que são iguaes, e por isso são iguaes tambem todos esses circulos.

Seja agora FGH outro circulo, que não passa pelo centro da esphera. Por este centro e por hum dos polos C de FGH tire-se hum circulo qualquer ADC da esphera. Seja FH a intersecção d'estes dois circulos. BC cortará FH em algum ponto I, que será ao mesmo tempo o centro de FGH; logo FH he o seu diametro, e corda do circulo ADC; logo ADC he hum circulo maximo da esphera, e FGH hum menor, e tanto menor quanto mais longe estiver do centro da esphera.

581. O circulo que passa pelos polos d'outro, he hum circulo maximo da esphera, porque o seu centro he o da esphera.

582. Todos os pontos da superficie da esphera, que teem o mesmo centro, mas differente do centro da esphera, pertencem á circumferencia de hum circulo da mesma esphera.

Seja *L* o centro dos pontos *F*, *G*, *H*, etc. Tirem-se *FA*, *FL*, e a perpendicular *FI* sobre *AL*.

O triangulo *AFL*, girando em torno de *AL*, descreve duas pyramides conicas rectas, cuja base commum he o circulo descrito por *IF*. Porque os lados de cada huma d'estas pyramides são iguaes, o ponto *F*, na revolução, passará por todos os pontos da superficie espherica equidistantes de *L*, e por todos os equidistantes de *A*, pois se não passasse em *G*, quando o plano *AFL* chega á posição *AGL*, teriamos então dois triangulos *AFL*, *AGL* distinctos no mesmo plano, com a mesma base, postos da mesma parte, e tendo iguaes correspondentemente os lados que partem dos extremos da base: absurdo.

Logo todos os pontos propostos estão na circumferencia descripta por *F*.

O mesmo tem lugar, se o ponto *L* está na superficie, ou dentro, não estando comtudo em *A*.

583. Todos os pontos da circumferencia de hum circulo da esphera estão a igual distancia de hum mesmo polo, ou tem por centros os polos d'este circulo.

Porque o triangulo rectangulo *BIF*, na sua revolução sobre *BI*, descreve o circulo da esphera com o lado *IF*, e huma pyramide conica recta, cujo vertice he o polo *B*, e cujos lados são iguaes; logo *B* he o centro dos pontos da circumferencia d'este circulo.

584. A superficie da esphera he curva.

A demonstração he como a do § 552.

585. Com huma parte da superficie da esphera, achar o seu diametro.

De hum ponto *C* d'essa parte de superficie, como centro, descreva-se n'ella hum arco *FG*. Será *C* polo do circulo, de que *FG* he arco. Fig. 202.

Com as distancias de tres pontos *F*, *M*, *G* d'este arco, forme-se o triangulo *FMG*, busque-se o seu centro de vertices *I*, e descreva-se o circulo *FGH*. Tire-se o diametro Fig. 203.

Fig. 204. FH. Com FH, com $HC = FC$ distancia ao polo, e com FC forme-se o triangulo FHC.

Estes tres pontos ou vertices F, H, C são pontos de hum circulo maximo da esphera proposta, porque os dois primeiros são os extremos do diametro de hum circulo da mesma esphera, e o ultimo he polo d'este mesmo circulo. Logo o diametro do circulo circumscrito ao triangulo FHC, he o diametro da esphera. Mas como já temos o ponto I, e sabemos que CI he parte do diametro do circulo maximo, bastará tirar HB perpendicular sobre HC, até encontrar CI produzida, e será BC o diametro pedido.

Esta ultima construcção he superflua, quando aconteça que $CI = IF$. Então he hum circulo maximo da esphera aquelle, de que FH he diametro, por ser I n'esse caso o centro da esphera. Tambem temos então iguaes CH, BH, e os arcos a que estas cordas pertencem, são quadrantes do circulo maximo.

586. Empregando graus para denotar d'aqui por diante os angulos rectos, e os quadrantes circulares, segue-se que hum circulo maximo passa a 90° de cada hum de seus polos, sendo contados estes graus no circulo maximo que passa pelos polos.

587. Descrever o circulo maximo da esphera, que passe por dois pontos da sua superficie, os quaes não estão em linha recta com o centro.

Como se sabe achar o diametro do circulo maximo, póde achar-se a corda de hum arco de 90°.

Com duas d'estas cordas, fixando hum extremo de cada huma em cada hum dos dois pontos dados, ajustem-se successivamente os outros extremos em dois pontos da superficie da esphera, hum de huma parte do plano que passa pelos pontos dados, e o segundo da outra parte. Estes dois ultimos pontos serão os polos do circulo maximo, que passa pelos pontos propostos, e com qualquer d'estes polos como centro, e huma das ditas cordas descreve-se na superficie da esphera a circumferencia do circulo pedido.

Os extremos das cordas da construcção não podem reunir-se senão em dois pontos, porque aliás estes pontos, sendo em numero maior, determinarião a circumferencia de hum circulo da esphera, de que os propostos serião polos, e estarião por consequencia em linha recta com o centro, contra a hypothese.

588. Tirar por hum ponto dado em hum arco de circulo maximo ou fóra d'elle, mas na superficie da esphera, outro arco de circulo maximo perpendicular ao proposto.

Busque-se hum dos polos do arco proposto, e por elle e pelo ponto dado tire-se hum arco de circulo maximo, que será o arco pedido.

589. Sendo dado hum arco de qualquer circulo da esphera, achar os seus polos, completar o circulo, e tirar por hum de seus pontos, ou por hum ponto fóra d'elle, hum arco perpendicular.

Dado o arco *F G* com tres dos seus pontos, busque-se o Fig. 203.
seu diametro *F H*. Ao meio de *F H* levante-se a perpendicu- Fig. 204.
lar *B C*; sobre esta linha marque-se o ponto *A* á distancia *A F* do ponto *F* igual ao raio da esphera; tomem-se *A B*, *A C* iguaes ao mesmo raio; serão *B*, *C* os polos do circulo, de que *F H* he diametro, e *F G* arco. Com os extremos de *F C*, *C H* applicados aos pontos *F*, *G* da superficie da esphera, determine-se o polo *C* na mesma superficie, e com *C* como centro, e *C F* como raio, descreva-se o circulo inteiro *F G H* na mesma superficie.

O circulo maximo tirado por *C* e por *G*, ou por outro qualquer ponto, será perpendicular a *F G H*.

590. O plano que tem hum ponto na superficie da esphera, e he perpendicular ao raio d'esse ponto, he tangente á esphera.

Porque todos os outros pontos do plano têem distancias do centro da esphera, maiores do que este raio perpendicular, e logo maiores do que as distancias d'este mesmo centro dos outros pontos da esphera.

Este plano he o unico que toca a esphera no dito ponto, porque para outro plano, inclinado ao raio n'este mesmo ponto, a perpendicular abaixada do centro sobre elle seria menor do que o raio, logo o seu pé ficaria dentro da esphera, isto he, achar-se-hia dentro d'ella hum ponto d'este plano, que cortaria por consequencia a esphera, e a sua superficie.

O problema pois de tirar hum plano tangente á superficie da esphera em hum de seus pontos, consiste em tirar o raio d'este ponto, e depois hum plano perpendicular ao raio n'este mesmo ponto.

591. Por huma recta infinita, dada de posição fóra de huma esphera, tirar hum plano tangente a esta.

Fig. 205. Pelo centro A da esphera tire-se hum plano DEF perpendicular á recta proposta BC, que a corte no ponto F. Com o diametro AF e no plano DEF descreva-se o circulo AEF, e seja E hum dos pontos da sua circumferencia, e da superficie da esphera. Tirem-se as rectas EF, EA que serão perpendiculares entre si. Será BEC o plano pedido. Porque os dois planos AEF, BCE são perpendiculares entre si, por construcção, e AE está n'hum, e ao mesmo tempo he perpendicular á intersecção EF dos dois planos, segue-se que AE he perpendicular a BEC, o qual por consequencia he tangente á esphera.

Bem se vê que da outra parte do diametro AF ha outro plano tangente, com a mesma condição de passar por BC.

592. Por hum ponto dado convenientemente, tirar hum plano tangente a duas espheras dadas.

Fig. 206. Sejão A o ponto dado; B, C os centros das duas espheras; D, E os pontos de contacto com o plano ADE.

São pois dadas AB, AC, BC, BD, CE; logo serão conhecidos os triangulos ABD, ACE rectangulos em D e E. Serão parallelas BD, CE, por serem perpendiculares ao plano tangente ADE. Logo o quadrilatero $BDEC$ he plano, tem rectos os angulos BDE, CED, e tres lados conhecidos, logo póde achar-se DE, e o angulo DBC. Conhecendo no triangulo ADE os lados, conhecer-se-hão os angulos. Logo o triedro $DBAE$ tem os tres angulos conhecidos, a saber, ADE, e ADB, EDB que são rectos; e logo póde construir-se o diedro $EDBA$. Com este diedro, e os angulos DBC, DBA póde construir-se o triedro $BADC$, e determinar-se o ponto D; e similhantemente se achará E; ou antes tirar-se-ha por AD o plano tangente da esphera, cujo centro he C (§ 591).

Vê-se que se póde construir outro plano tangente da outra parte da linha dos centros.

Querendo que o plano tangente corte a linha dos centros, ou passe entre as duas espheras; então sendo ainda A o Fig. 207.
ponto dado; B, C os centros das espheras; D, E os seus pontos de contacto com o plano ADE; conhecer-se-hão da mesma maneira AB, AC, BC, BD, CE, por hypothese. Os triangulos ABD, ACE rectangulos em D, E são pois conhecidos. BD, CE serão parallelas, por serem perpendiculares ao plano tangente ADE; logo os quatro pontos B, D, C, E estão n'hum plano, e logo as rectas BC, DE cortão-se n'hum ponto F. Os triangulos rectangulos similhantes BDF, ECF dão

$$CE+BD:BD::CB:BF.$$

Póde portanto achar-se o angulo DBF. O triangulo rectangulo ADB dá o angulo DBA, e o triangulo ABC dá o angulo ABC; póde-se por consequencia construir o triedro $BDAC$, e achar o ponto D, etc. Bem se vê que he possivel tirar ainda pelo ponto dado outro plano tangente entre as duas espheras.

593. Construir o plano tangente a tres espheras dadas.

Sejão A, B, C os centros das tres espheras, E, D, F os Fig. 208.
pontos de contacto com o plano DEF. Serão dadas AB, AC, BC, e os raios AD, BE, CF, que são perpendiculares ao plano tangente, e portanto parallelos entre si. Logo serão planos os quadrilateros $ABED$, $ACFD$, $BCFE$, e poder-se-hão achar os lados ED, DF, EF, e os seus angulos. São pois conhecidos todos os angulos da figura, e por consequencia os triedros, que resolvem o problema.

Quando não he possivel resolver o problema com hum triangulo tangente, que fique todo da mesma parte a respeito do triangulo dos centros, construir-se-ha o plano tangente entre as espheras, e vê-se por que meios se obterão os angulos; e qual o numero das soluções.

594. Duas espheras, nas quaes a distancia dos centros he igual á somma dos raios, tocão-se exteriormente em hum ponto d'esta distancia.

Porque se não tivessem este ponto commum, então tirando qualquer plano pelos centros das duas espheras, como as intersecções d'elle com as espheras, serião dois circulos com as condições do § 482, e tambem estes circulos não terião esse ponto commum: absurdo, pela mesma proposição.

E se as duas espheras tivessem mais do que este ponto commum, então o plano, que passasse por hum d'estes pontos e pelos dois centros, formaria da mesma maneira dois circulos nas espheras, que satisfarião ás condições da proposição (§ 482), e não á sua conclusão: absurdo.

Similhantemente, se prova que nenhum ponto de huma das espheras póde estar dentro da outra.

595. Duas espheras, nas quaes a distancia dos centros he igual á differença dos raios, tocão-se interiormente n'hum ponto da recta que passa pelos centros.

A demonstração faz-se por meio da proposição do § 483, como se fez a precedente por meio da do § 482.

596. As superficies de duas espheras, nas quaes a distancia dos centros he maior do que a differença dos raios, e menor do que a sua somma, tem só commum a circumferencia de hum circulo.

Porque as suas intersecções com hum plano que passe pelos centros, são circumferencias com dois pontos communs, hum de cada parte da recta dos centros, e qualquer d'elles descreve a circumferencia de hum circulo, na revolução dos circulos sobre a recta dos centros, a qual circumferencia está nas duas superficies esphericas; e nenhum outro ponto póde ser commum a estas superficies, poisque qualquer ponto que dista tanto de cada hum dos centros das espheras, como cada ponto d'aquella circumferencia, está necessariamente situado n'ella (§ 582).

597. Duas superficies esphericas, que têem commum a circumferencia de hum circulo, cortão-se.

Porque o circulo, a que esta circumferencia pertence, he secção commum ás duas espheras, logo ellas têem huma parte do seu volume commum, e logo as superficies cortão-se.

598. O circulo maximo divide a esphera em dois segmentos iguaes, que se chamão por isso *hemisphericos;* cujas superficies curvas são tambem iguaes.

Prova-se pela sobreposição, e nenhum ponto de huma das superficies curvas póde deixar de cahir na outra, porque aliás chegar-se-hia ao absurdo de haver raios desiguaes, como no § 501.

599. Dos dois segmentos, em que hum circulo da esphera a divide, o maior he aquelle em que está o centro, tanto em superficie como em volume.

Vê-se, tirando o circulo maximo parallelo áquell'outro circulo.

600. Chama-se *base do segmento da esphera* o circulo, que he a sua face plana; subentende-se o menor dos dois segmentos a que esta base he commum. *Tronco do segmento espherico* he a parte que se lhe corta, do lado da base, por hum plano, ou por hum circulo parallelo á base.

601. *Sector de hum solido circular* he a sua parte interceptada por hum diedro, ou angulo polyedro, cujas arestas são eixos.

Designa-se como o diedro, ou o angulo polyedro.

602. No cylindro, e na pyramide conica não ha outros sectores senão os formados por diedros, cuja aresta he o eixo.

603. Na esphera as arestas rectilineas do sector, sendo eixo, concorrem no centro; e a superficie curva do sector he fechada por arcos de circulos maximos, que se chamão lados, e esta superficie polygono espherico; e em particular bilatero espherico, triangulo espherico, etc., conforme são dois, tres, etc., os lados do polygono espherico; e cada hum d'estes polygonos se designa pelas letras dos vertices, ou encontros dos lados.

604. Os lados do polygono espherico, são cada hum a medida do angulo correspondente da face do angulo polyedro, que determina o polygono; e os angulos do polygono espherico são os angulos formados pelos planos dos lados, ou os diedros respectivos do angulo polyedro.

605. O angulo do polygono espherico, ou simplesmente o angulo espherico tem por medida o arco do circulo maximo, de que o vertice he polo, interceptado pelos seus lados.

Fig. 201. Produzão-se os arcos CF, CG, que são os lados do angulo proposto, sobre as suas circumferencias, até encontrarem em D, E o circulo DEK, de que C he o polo.

O angulo proposto he o dos planos EAC, DAC, que he medido pelo angulo EAD das perpendiculares EA, DA a AC no ponto A da sua intersecção; e o angulo EAD tem por medida o arco ED interceptado pelas circumferencias, de que CG, CF são arcos.

606. Os lados do bilatero espherico são iguaes, e cada hum $= 180°$.

Fig. 209. Os lados do bilatero espherico AB são arcos de circulos maximos, por conseguinte a sua intersecção passa pelo centro da esphera e por A, B; logo a recta AB he diametro de ambos, e portanto os arcos, que são os lados do bilatero, serão semicircumferencias dos circulos maximos.

607. As especies de bilateros, formados por hum arco de circulo menor, e outro de circulo maximo, são iguaes na mesma esphera ou em espheras iguaes, quando os arcos dos circulos menores são identicos.

Fig. 210. Seja ACB hum arco de circulo menor da esphera, e ADB hum arco de circulo maximo. Digo que na mesma esphera não póde formar-se, com o mesmo arco ACB de circulo menor, e hum arco AEB de circulo maximo, outro bilatero d'esta especie.

Porque a ser isso possivel, então no bilatero $ADBE$ serião ADB, AEB semicircumferencias de circulos maximos, pela proposição precedente, e a recta AB o eixo da esphera, e ao mesmo tempo corda do circulo menor, de que ACB he arco: absurdo.

608. São iguaes os angulos verticalmente oppostos, formados por arcos de circulos da esphera, que se cortem, por aquelles serem os angulos dos planos d'estes arcos. Todos os angulos formados por circulos maximos, da mesma parte de hum arco de circulo tambem maximo, valem juntos $180°$, e os angulos em torno de hum vertice commum valem todos juntos $360°$.

609. O triangulo espherico não póde ter hum lado de $180°$.

Seja no triangulo espherico $A\,B\,C$, se he possivel, $A\,B = 180°$. Produza-se $B\,C$ até o encontro de $A\,B$, que será em A, porque todos os lados do triangulo espherico são arcos de circulos maximos; logo será o arco $B\,C\,A = 180°$. Fig. 211.

Então se esta continuação coincide com o lado $A\,C$, não existirá triangulo, contra a hypothese, e senão coincide, será no bilatero $A\,C$ cada hum dos lados $= 180°$: absurdo, porque teriamos $B\,C + A\,C = A\,C$.

610. No triangulo espherico, quando he absolutamente considerado como formado por tres arcos de circulos maximos, sem relação com os angulos de hum angulo polyedro, póde existir um lado $> 180°$, mas não dois; porque se cortarião antes de formarem o triangulo. Porém hum tal triangulo espherico, que se chama *gibboso*, e que tem tambem hum angulo $> 180°$, não será discutido, nem he preciso que o seja, porque o triangulo, formado pelo resto da circumferencia do lado maior, e pelos outros dois lados, faz conhecer as partes do triangulo gibboso.

611. *Triangulos esphericos diametralmente oppostos* são aquelles que têem os vertices nos extremos dos mesmos diametros da esphera.

612. Os triangulos esphericos diametralmente oppostos, têem todas as partes de hum, isto he, os tres lados e os tres angulos, iguaes ás do outro, cada huma a cada huma; mas não admittem superposição, porque essas partes estão em ordem inversa em cada hum a respeito do outro.

Complete-se o circulo, a que pertence o lado $B\,C$ do triangulo espherico $A\,B\,C$, e produzão-se os outros dois la- Fig. 212.

dos até se encontrarem em D. Elles cortarão o circulo descripto em dois pontos E, F.

Será $DFA = 180° = BAF$; logo $DF = AB$; da mesma maneira he $DE = AC$. Tambem temos

$$EFC = 180° = FCB;$$

logo

$$EF = BC.$$

O angulo

$$D = FAE = CAB.$$

O angulo

$$DFE = BFC = ABC;$$

e da mesma fórma $DEF = ACB$.

Mas sobrepondo o lado EF, com o triangulo DEF, ao lado BC do triangulo ABC, de maneira que os dois triangulos fiquem da mesma parte de BC, visivelmente elles não poderão coincidir

Esta proposição corresponde á do § 234.

613. Dois lados com o angulo comprehendido, determinão as outras partes do triangulo espherico.

Nos dois triangulos ABC, GHI, sejão

$$G = BAC,$$

$$HG = AB,$$

$$GI = AC.$$

Póde sobrepôr-se o triangulo GHI ao triangulo ABC, ou ao triangulo diametralmente opposto DEF, imitando o que se fez com os seus triedros correspondentes no § 235, de que a proposição actual não he senão huma traducção.

614. A lados iguaes são oppostos, no triangulo espherico, angulos iguaes.

Se o triangulo espherico ABC tiver os lados AB, AC iguaes, póde sobrepôr-se a DEF, o que prova que o angulo $DEF = ABC$; mas he $DEF = CEB = ACB$, logo $ABC = ACB$.

615. Dois angulos com o lado adjacente, determinão as outras partes do triangulo espherico.

Sejão $BC = HI$, $ABC = H$, $ACB = I$.

Prova-se pela sobreposição do triangulo GHI no triangulo ABC, ou no seu diametralmente opposto DEF, que com as condições do enunciado, as outras partes de hum são iguaes ás do outro, cada huma a cada huma, isto he, as adjacentes ou oppostas a partes iguaes.

616. A angulos iguaes são oppostos, no triangulo espherico, lados iguaes.

Se no triangulo ABC são iguaes os angulos ABC, ACB, os angulos DEF, DFE serão tambem iguaes; e os dois triangulos, diametralmente oppostos, podem sobrepôr-se, e acharemos $AB = DE$; mas $DE = AC$, logo $AB = AC$.

617. Os tres lados determinão as outras partes do triangulo espherico.

Juntem-se dois triangulos ABC, BCD na superficie da esphera pelo lado commum, BC, e supponhamos alem d'isso iguaes os lados que têem hum vertice commum, isto he, $AB = BD$, $AC = CD$. Fig. 213.

Se dois d'estes lados iguaes não estão no mesmo circulo maximo, tire-se o arco AD de circulo maximo, que cortará BC, ou a sua continuação em E.

Os triangulos esphericos ABD, ACD são ambos isosceles, logo o angulo $BAD = BDA$, $CAD = CDA$; e logo são iguaes os angulos BAC, BDC, por serem as sommas ou as differenças de angulos iguaes; por consequencia os triangulos BAC, BDC têem as suas partes iguaes.

Se dois lados, na união dos triangulos, formão hum só arco de circulo maximo como AD, então temos logo $A = D$, Fig. 214.
e os triangulos determinados.

Se os dois triangulos não podem applicar-se pelo lado commum, de sorte que fiquem situados em posições oppostas, e que os lados iguaes tenhão um vertice commum, então deve recorrer-se ao triangulo diametralmente opposto a hum d'elles.

618. Os tres angulos determinão as outras partes do triangulo espherico.

Colloquem-se oppostos n'hum dos vertices, sobre a super-
Fig. 215. ficie da esphera, dois triangulos ABC, ADE, que alem dos angulos verticalmente oppostos, tenhão $EDA = ABC$, $DEA = ACB$.

Produzão-se ED, BC até concorrerem em F, G.

Os triangulos BDF, BDG têem as partes iguaes entre si, porque o lado BD he commum, $BDF = DBG$ por hypothese, e $DBFBDG$, por serem estes ultimos supplementos dos primeiros; logo $DF = BG$. Pela mesma rasão, nos triangulos CEF, CEG temos $FE = CG$. Logo tirando esta equação da precedente, resulta $ED = BC$. Logo os triangulos propostos têem todas as partes iguaes.

Se DF, e BF ficarem no mesmo plano, faltarão então os triangulos da demonstração, mas n'este caso será DFB a semicircumferencia de hum circulo maximo, e CFE tambem; e tirando a parte BFE commum, teremos ainda $ED = BC$.

Se os triangulos da questão não poderem situar-se, como se fez, substitua-se então a hum d'elles o seu diametralmente opposto.

619. Dois lados, dos quaes hum só he de 90°, com o angulo opposto a este, determinão as outras partes do triangulo espherico.

Fig. 216. Se he possivel formar dois triangulos ACB, ACD com o lado AC não $= 90°$, o angulo C commum, e os lados AB, AD iguaes cada hum a 90°, então A será polo do arco DC, e logo $AC = 90°$, contra a hypothese.

Nas hypotheses do theorema só poderá pois haver dois triangulos esphericos que não coincidão quando um d'elles for o verticalmente opposto do outro; mas n'esse caso tambem as partes de hum são iguaes ás do outro, postoque em ordem invertida.

620. Dois angulos, dos quaes hum só he de 90°, com o

lado opposto a este, determinão as outras partes do triangulo espherico.

Se fosse possivel formar dois triangulos, não os diametralmente oppostos, $A\,B\,C$, $A\,D\,C$ com o lado $A\,C$, e o angulo C não recto, communs, e com os angulos rectos D, $A\,B\,C$; então A seria pólo de $B\,C$, e logo recto o angulo C, contra a hypothese.

621. Tres partes que determinem as outras, determinão tambem a superficie do triangulo espherico, na mesma esphera, ou em espheras iguaes.

Nos triangulos $A\,B\,C$, $D\,E\,F$ sejão $A\,B = D\,E$, $A\,C =$ Fig. 217.
$D\,F$, $B\,C = E\,F$, sendo estes lados ou dados immediatamente, ou determinados por outras partes dadas.

Se os triangulos não admittirem sobreposição, fação-se passar, pelos vertices de cada hum, dois circulos menores.

Estes circulos serão iguaes, porque podem suppor-se circumscritos a triangulos rectilineos identicos, formados pelas cordas dos arcos dos triangulos esphericos, que sendo iguaes dois a dois, teem cordas iguaes. Estes triangulos esphericos estão nas superficies curvas dos menores segmentos, em que cada hum d'estes circulos menores divide a esphera a que pertence, porque aliás o triangulo espherico seria gibboso. As superficies curvas d'estes segmentos são iguaes. Mas temos tambem (§ 607) ōs bilateros $A\,B = D\,E$, $A\,C = D\,F$, $B\,C = E\,F$; logo tirando a somma dos primeiros, n'estas equações, da superficie curva do seu segmento, e a somma dos segundos da superficie do seu segmento tambem, resulta a superficie $A\,B\,C = D\,E\,F$.

622. *Triangulo espherico supplementario* de outro, he aquelle cujos lados são supplementos dos angulos do segundo, e cujos angulos tambem são supplementos dos lados d'este.

623. *Triangulo supplementario* de outro, he aquelle que tem quatro partes, que são supplementos de quatro partes do segundo, e as outras ou iguaes, ou communs. Taes são os triangulos esphericos, que formão juntos hum bilatero.

624. No triangulo espherico, que tem dois angulos de 90° cada hum, e por consequencia dois lados, e reciprocamente; dois dos tres subsupplementarios, são supplementarios d'aquelle.

Fig. 218. Sejão rectos os angulos $A B C$, $B A C$ do triangulo espherico $A B C$; será tambem $A C = 90° = B C$.

Formem-se os subsupplementarios $A C D$, $B C E$, isto he, produzão-se $A B$, $A C$ até E, e $B A$, $B C$ até D. Digo que $A C D$, que he sempre subsupplementario do proposto, he agora seu supplementario.

Serão rectos D, e $D A C$; $C D = 90° = A C = B C$. Logo he $A D$ a medida do angulo $A C D$; logo he $A D$ supplemento do angulo $A C B$, e os outros dois lados de $A D C$, por serem de $90°$ cada hum, são supplemento dos angulos rectos do proposto.

O angulo $A C D$, sendo medido por $A D$, he supplemento de $A B$, e os outros dois angulos do triangulo $A C D$, sendo rectos, são supplementos dos outros dois lados do proposto, cada hum dos quaes he $= 90°$.

O mesmo tem logar no subsupplementario $B C E$.

Deve observar-se que nos dois supplementarios $A C D$, $B C E$ de $A B C$, nem todos os vertices dos primeiros são polos dos lados do ultimo.

625. Dado hum triangulo espherico, que não tenha angulo recto algum, ou que tenha hum só, construir o seu triangulo supplementario.

Se o triangulo proposto não tem angulo algum recto, complete-se o circulo de hum qualquer dos seus lados; e se tem hum angulo recto, complete-se o circulo do lado opposto a este angulo.

Este circulo divide a esphera em dois hemispherios, em hum dos quaes fica o triangulo proposto, e no outro só podem existir tres pólos, hum de cada hum dos tres lados do triangulo. Sejão estes polos D, E, F respectivamente de $A B$, $B C$, $A C$.

Fig. 219. Tirem-se os arcos $D A$, $D B$, $E B$, $E C$, $F A$, $F C$, cada hum dos quaes será de $90°$. Tirem-se tambem os arcos $D E$, $E F$, $D F$; e será $D E F$ o triangulo supplementario pedido.

Os vertices A, B, C serão tambem polos respectivos dos arcos DF, DE, EF. Em torno do pólo D estão formados na superficie da esphera, quatro angulos esphericos adjacentes, dois dos quaes ADF, BDE são rectos; logo os outros dois, o angulo EDF do triangulo EDF, e o angulo ADB, são supplementos hum do outro. Mas ADB tem por medida AB, logo o angulo EDF he supplemento do lado AB. O mesmo póde affirmar-se dos outros angulos de EDF, e dos lados respectivos do triangulo proposto.

Em torno de A estão tambem formados quatro angulos esphericos, dois dos quaes são rectos, e logo os outros dois DAF, BAC são supplementos hum do outro. Mas DF he a medida do angulo DAF, logo DF he supplemento do angulo BAC do triangulo proposto. O mesmo póde affirmar-se dos outros lados de EDF, e dos angulos respectivos do triangulo ABC.

626. A somma de dois lados quaesquer do triangulo espherico, he maior do que o terceiro lado.

Seja $ABCD$ o sector espherico, cuja superficie curva he o triangulo proposto BDC. Será Fig. 220.
ang. BAD : ang. BAC : ang. CAD :: $BD : BC : CD$; logo

$$BAD + BAC : CAD :: BD + BC : CD.$$

Mas o primeiro antecedente he maior do que o seu consequente, logo tambem $BD + BC > CD$.

627. No polygono espherico, a somma de todos os lados, excepto hum, he maior do que este.

A demonstração he analoga á dos polygonos rectilineos.

628. Em geral, toda a linha tirada na superficie espherica he maior do que o arco de circulo maximo, que tem os mesmos extremos, comtanto que este arco seja $\leqq 180°$.

Seja DC hum arco de circulo maximo correspondente a hum angulo do centro CAD não $> 2r$, e seja DBC huma linha qualquer, com os mesmos extremos, descrita na superficie da mesma esphera, sem ser outro arco de circulo maximo. Fig. 221.

A superficie $ADBC$ descrita pelo raio AD, suppondo o extremo A immovel, e que o outro descreve a linha DBC, he maior do que o sector CAD; porque vê-se, que suppondo-a flexivel, e deixando-a cahir sobre o sector, conservando sempre os pontos da orla DBC á mesma distancia do centro, e as outras duas orlas nos seus logares, he necessario, para applicar todos os pontos d'esta superficie sobre o sector, dobral-a, e por consequencia tambem DBC se dobra sobre o arco DC, e logo he $DBC > DC$.

Como o genero de demonstração que acabâmos de empregar he susceptivel de abuso, e por conseguinte sujeito a objecções, provaremos d'outro modo a nossa proposição, quando CBD for arco de circulo menor.

Fig. 222. Leve-se CBD ao mesmo plano do arco CD, e da mesma parte da corda commum. Na perpendicular AFB ao meio da corda CD estarão os dois centros A, E dos dois arcos CFD, CBD; mas para que o raio ED do arco CBD seja $< AD$, he preciso que E fique situado entre A e o arco, como na figura.

Temos

$$AE + ED > AD,$$

isto he

$$AE + EB,$$

ou

$$AB > AF.$$

Logo o arco CBD envolve entre si e a corda o arco DFC, e logo he maior do que elle.

Mas por isso mesmo que o arco CBD do circulo menor he maior que DFC, o resto da sua circumferencia será menor do que o resto da circumferencia de DFC. Logo he preciso n'este caso, para a verdade da proposição, que o arco DFC do circulo maximo seja $< 180°$, não podendo ser igual a $180°$, e ao mesmo tempo ter os extremos communs com hum arco de circulo menor da mesma esphera.

629. Dividir hum angulo espherico em duas partes iguaes.

Fig. 223. Seja BAC o angulo proposto. Tome-se o lado $AC = AB$, e tire-se o arco BC. Divida-se BC em partes iguaes

em D. Tire-se o arco $A\,D$, e o angulo ficará dividido, como se pede. Porque os angulos $B\,A\,D$, $C\,A\,D$ são iguaes, por causa da igualdade das partes dos triangulos $B\,A\,D$, $C\,A\,D$.

630. Fazer hum angulo espherico igual a outro dado $< 180°$, e com hum lado e vertice dados.

Sejão A o angulo, $B\,G$ o lado, e B o vertice dados. Fig. 224.

Forme-se hum triangulo qualquer $D\,A\,E$, de que A seja hum dos angulos. Tome-se $B\,F = A\,E$, e com as cordas dos arcos $A\,D$, $D\,E$, fixando dois de seus extremos respectivamente em B, F, determine-se na superficie da esphera, em que está $B\,G$ que deve ser a mesma de $D\,A\,E$ ou sua igual, o ponto G de encontro dos outros extremos; então os arcos de circulo maximo tirados de G para B, F, formarão o triangulo $G\,B\,F$, identico com $D\,A\,E$, e por conseguinte será o angulo $B = A$.

631. Fazer hum angulo espherico igual a outro dado, e que tenha hum lado dado, e de que o outro lado passe por hum ponto dado na superficie da esphera, tal que a sua distancia em graus, ao arco dado não seja maior do que o angulo dado se este for agudo.

Busquem-se os polos H, I respectivos aos arcos $A\,E$, $B\,C$. Com o centro H, e a corda $I\,G$, descreva-se hum circulo menor, que encontrará o lado $A\,D$ pelo menos em hum ponto D. Produza-se o arco $H\,D$ até E, será $D\,E = G\,F$. Sobre $G\,F$ forme-se hum triangulo identico com $D\,E\,A$, e teremos o que se pede, isto he, $B = A$, e o lado $B\,G$ passando por G.

632. No triangulo espherico, ao maior angulo he opposto o maior lado, e reciprocamente.

No triangulo espherico $A\,B\,C$, seja $A\,C\,B > A$. Fig. 225.

No angulo maior, faça-se $A\,C\,D = A$.

Será $C\,D = A\,D$.

Mas

$$C\,D + D\,B > B\,C,$$

logo

$$A\,D + D\,B, \text{ ou } A\,B > B\,C.$$

A inversa demonstra-se como a proposição do § 67.

633. De dois triangulos esphericos e isosceles, com a mesma base, aquelle que tem o angulo do vertice menor, tem o perimetro maior; e reciprocamente.

Fig. 226. Seja o angulo $ACB < ADB$. Descreva-se o arco CD de circulo maximo. Os triangulos ACD, BCD serão iguaes, por terem os lados iguaes entre si; logo o angulo

$$BCD = \frac{1}{2} ACB,$$

e

$$BDC = \frac{1}{2} ADB;$$

logo

$$BD < BC.$$

Reciprocamente; se $BD < BC$, será $BCD < BDC$, ou o angulo $ACB < ADB$.

634. De dois triangulos esphericos e isosceles, sobre a mesma base, aquelle que envolve o outro tem o perimetro maior.

Fig. 227. Sejão $AEBC$, $AEBD$ os dois triangulos isosceles.

Descreva-se o arco CDE. Os dois triangulos ADC, BDC são iguaes; logo o angulo $ACD = BCD$, e logo ACD he agudo.

Tambem o angulo $ADC = BDC$; logo os supplementos ADE, BDE são iguaes e agudos; logo ADC he obtuso, e por consequencia $AC > AD$.

De dois triangulos esphericos e isosceles, com a mesma base, aquelle que tem o angulo do vertice menor, he maior, e tem maiores os angulos sobre a base.

De dois polygonos esphericos regulares e equilateros entre si, aquelle que tem mais lados he maior, e tem os angulos maiores.

Porque dividindo cada hum dos dois polygonos em triangulos isosceles, tendo por bases os lados, e por vertice commum o centro do polygono, aquelle que tem mais lados será composto de hum numero maior d'estes triangulos, tendo os angulos do vertice menores.

635. No triangulo espherico, o supplemento de hum angulo he maior do que a differença entre os outros dois.

No triangulo espherico ABC, seja $B > ACB$. Fig. 228.

Faça-se $BCD = B$. Será $DC = DB$; logo $DC > DA$, e logo $DAC > ACD$, isto he o supplemento do angulo BAC maior do que a differença ACD entre BCD ou B, e BCA.

636. Se dois triangulos esphericos teem dois lados de hum iguaes separadamente a dois lados do outro, aquelle que tem maior o angulo comprehendido tem o terceiro lado maior; e reciprocamente.

A demonstração he como a do caso analogo dos triangulos rectilineos.

Se os dois triangulos não podem collocar-se da mesma parte da superficie a respeito do lado commum, deve, para a demonstração, substituir-se a hum d'elles o seu diametralmente opposto.

637. Se a somma de dois lados do triangulo espherico he $\gtreqless 180°$, tambem a somma dos angulos oppostos será respectivamente $\gtreqless 180°$; e reciprocamente.

Seja ABC o triangulo proposto. Forme-se o bilatero Fig. 229.
BD. Então, como o arco $BAD = 180°$, se for

$$AB + AC \gtreqless 180°,$$

será

$$AC \gtreqless AD;$$

logo

$$D = B \gtreqless ACD.$$

Logo

$$B + ACB \gtreqless ACD + ACB,$$

isto he

$$B + ACB \gtreqless 180°.$$

638. A somma dos tres lados do triangulo espherico he $< 360°$.

Temos

$$BA + AD + BC + CD = 360°,$$

e

$$AC < AD + CD:$$

d'onde se deduz

$$BA + BC + AC < 360°.$$

639. A somma de todos os lados do polygono espherico saliente he $< 360°$.

Porque produzindo hum primeiro, e hum terceiro lado até se encontrarem para a parte do lado intermedio, em que se acha o polygono, ficará formado, por esses lados prolongados e pelo seu intermedio, hum triangulo espherico, que encerrará o polygono, e terá maior perimetro do que elle, visto o polygono ser saliente.

640. A somma dos tres angulos do triangulo espherico he $> 180°$.

Se fôr $ACD > D$, teremos

$$BAC > ACD - D, \text{ ou } > ACD - B;$$

logo

$$BAC + B > ACD,$$

e

$$BAC + B + ACB > ACD + ACB, \text{ ou } > 180°.$$

Se for $ACD \leqq D$, então $D + ACB$, ou

$$B + ACB \geqq ACD + ACB,$$

isto he

$$B + ACB \geqq 180°;$$

logo

$$B + ACB + BAC > 180°.$$

Assim temos sempre a somma dos tres angulos do triangulo ABC maior que $180°$.

641. A somma de todos os angulos do polygono espherico saliente, poisque póde ser dividido em $n-2$ triangulos esphericos, sendo n o numero dos seus lados, será sempre $> (n-2)\ 180°$.

642. Os angulos do polygono espherico regular são maiores do que os angulos do polygono rectilineo regular do mesmo numero de lados, e por consequencia maiores do que os angulos do polygono rectilineo, que tiver por vertices os do polygono espherico.

643. Se por hum ponto A da superficie da esphera, que Fig. 230.
não seja pólo do circulo CBD, se faz passar a semicircumferencia perpendicular a CBD, o dito ponto A a dividirá em dois arcos, dos quaes o menor AD he o minimo, e o maior AC o maximo de todos os arcos entre A e CBD.

O meio E de CAD he pólo de CBD, logo hum arco EB qualquer he perpendicular sobre CBD, logo ABD he agudo, e ABC obtuso. Mas D e C são rectos, logo $AB > AD$, e $AB < AC$.

644. Todos os angulos como DFA, oppostos ao arco minimo AD, são agudos; e os oppostos ao arco maximo AC, como AFC, são obtusos.

645. Todos os arcos, tirados de A para a semicircumferencia CBD, são desiguaes, e augmentão desde AD até AC.

Porque o angulo AFB obtuso, e ABF agudo fazem $AB > AF$.

646. Para a circumferencia CBD não podem tirar-se de hum ponto A, que não seja o seu pólo, mais do que dois arcos iguaes, hum para a semicircumferencia CBD, e outro para a parte não descrita. Mas os dois arcos perpendiculares AD, AC não têem iguaes, ou são unicos.

647. Com tres partes dadas do triangulo espherico, cada huma $< 180°$, construil-o quando fôr possivel.

1.° caso. Com dois lados, e o angulo comprehendido.

Imite-se o que se fez, em igual caso, com os triangulos rectilineos.

2.° caso. Com dois angulos e o lado adjacente.

Imite-se o que se fez, em igual caso, com os triangulos rectilineos.

3.° caso. Com tres lados, taes que a somma de dois seja $>$ e a differença $<$ que o terceiro; e a somma de todos tres $< 360°$.

Imite-se o que se fez, em igual caso, com os triangulos rectilineos; procurando o terceiro vertice na superficie da esphera por meio das cordas dos arcos dados.

4.° caso. Com tres angulos; sendo a sua somma $> 180°$, e o supplemento de hum qualquer $>$ que a differença dos outros dois.

Com os supplementos dos angulos propostos em graus, como lados, faça-se hum triangulo, como no caso precedente, e construa-se depois o triangulo supplementario d'este, que será o triangulo pedido.

O triangulo pedido he possivel, se designando por A, B, C os seus angulos, cuja somma $> 180°$ e sendo C o menor, tivermos

$$180° - A > B - C,$$

porque será

$$180° - B > A - C;$$

e porque C he supposto o menor, a sua differença para $180°$ he maior do que a differença dos outros dois, isto he, teremos tambem

$$180° - C > B - A, \text{ e } > A - B.$$

O primeiro triangulo que se construe he possivel, porque a somma de dois quaesquer de seus lados he sempre $>$ do que o terceiro, por exemplo,

$$(180° - A) + (180° - B) > (180° - C),$$

poisque esta expressão vale o mesmo que

$$180° - A > B - C.$$

Tambem a somma dos seus tres lados he $< 360°$. Porque

$$(180° - A) + (180° - B) + (180° - C),$$

$$= 360° + 180° - (A + B + C) < 360°,$$

sendo pela outra condição $A + B + C > 180°$.

5.° caso. Com dois lados e o angulo opposto a hum d'elles.

Sejão AB, AC os lados, e B o angulo dados. Fig. 231.

Com o angulo B, o lado AB, e a corda do arco AC, fixando em A hum dos seus extremos, busque-se com o outro o ponto C no lado BF do angulo B, e ficará feito o triangulo requerido, se o problema fôr possivel, ou se não fôr indeterminado.

Para que o problema seja possivel, he necessario que o arco AC dado não aconteça ser menor do que o menor dos arcos perpendiculares, que se podem tirar de A sobre o circulo de BC, poisque este he o minimo, nem maior do que o arco perpendicular maximo. Tambem he preciso que BC não chegue nunca a ser $= 180°$. Porém se BC fòr $> 180°$, então o triangulo se torna gibboso, e deve construir-se outro com os mesmos lados, e o supplemento do angulo dado.

Se fòr $B = 90° = AB$, será A pólo do circulo de BC, e então será preciso, para que os dados não sejão incompativeis, que seja $AC = 90°$. Mas n'estas circumstancias, todos os arcos como AE, tirados de A para pontos do circulo BC, são cada hum $= 90°$, e são infinitos os triangulos que satisfazem, e a indeterminação he absoluta.

Se acontece haver dois arcos iguaes AC, AD cada hum da sua parte do arco perpendicular AE, ambos no bilatero BF, ha então dois triangulos ABC, ABD com os mesmos dados, ou ha duas soluções do problema.

Estas duas soluções estão ligadas pela condição de que o angulo não dado, e opposto ao lado dado he em hum dos triangulos supplemento de hum similhante angulo do outro, porque ACB he o supplemento de $ACD = ADB$.

O problema tem huma só solução nos exemplos seguintes:

1.° exemplo. Se fôr $A\,C = 90°$, e não $A\,B$;

2.° exemplo. Sem ser $A\,C = 90°$, póde existir ainda hum caso determinado, ou hum só triangulo, quando aconteça que $A\,C$ coincida com o arco $A\,E$ perpendicular a $B\,C$;

3.° exemplo. O problema he tambem determinado, quando os lados dados são iguaes, porque então não se póde tirar de A para o circulo $B\,C$ outro lado igual; não sendo A pólo.

Mais geralmente; o problema he determinado, quando sendo possivel, e não sendo indefinido alguma das condições (§§ 616, 632 e 637) exclue huma das soluções.

Porque sendo o angulo $B < 90°$ e $A\,B < 90°$, he preciso, para que o triangulo $A\,D\,B$ seja determinado, ou para que não exista outro arco $A\,C$ igual, entre o arco perpendicular menor $A\,E$, e $A\,B$, que seja $A\,D > A\,B$; logo $B > A\,D\,B$, ou $A\,D\,B < 90°$, pela condição (§ 632).

Sendo B ainda o mesmo, e $A\,B > 90°$, he preciso, para que o triangulo $A\,C\,B$ seja determinado, ou para que não haja outro arco $A\,D$ igual, entre o arco perpendicular minimo $A\,E$ e $A\,F$, que seja $A\,C > A\,F$;
logo

$$A\,C + A\,B > 180°,$$

logo

$$A\,C\,B + B > 180°, \text{ ou } A\,C\,B > 90°,$$

pela condição (§ 637), porque a outra (§ 632) só exige $A\,C\,B > B$, o que póde ter logar, e não obstante ficar ainda $A\,B\,C < 90°$.

Quando $B > 90°$, demonstra-se da mesma maneira por meio do arco perpendicular maximo, que o problema sendo determinado, o será por huma das duas condições (§§ 632 e 637).

Quando $B = 90°$, então sendo $A\,B$ o mesmo arco perpendicular a $B\,C$, não podem existir no mesmo bilatero dois arcos iguaes $A\,C$, $A\,D$, e o problema he determinado.

Do que precede podem deduzir-se as conclusões seguintes:

1.° Que as duas condições (§§ 632 e 637) são essencialmente diversas.

2.° Que he preciso, quando huma não determine o problema, empregar a outra.

3.° Que se nenhuma das duas condições determina o problema, elle he indeterminado.

6.° caso. Com dois angulos, e o lado opposto a hum d'elles.

Com os supplementos dos angulos, como lados, e com o supplemento do lado, como angulo opposto respectivamente, faça-se a construcção, como no caso antecedente, de hum ou de dois triangulos; construa-se depois o supplementario ou os supplementarios d'estes, e será esta a construcção pedida.

As condições para a determinação, ou indeterminação, são aqui as mesmas do caso antecedente, applicando-as aos supplementos dos angulos que passão a ser lados, e aos supplementos dos lados que passão a ser angulos.

648. Pergunta-se de quantas maneiras póde cobrir-se a superficie da esphera, com polygonos esphericos regulares e dispostos symetricamente, excepto o bilatero espherico.

Os vertices S communs aos polygonos são tantos, quantos os angulos solidos do polyedro inscripto, com os mesmos vertices; os lados communs L tantos, quantas as arestas do polyedro; e os polygonos P tantos quantas as faces do polyedro; logo teremos $S=L-P+2$.

A somma de todos os angulos esphericos em torno de hum vertice commum sendo 360°, ou $4\,r$, vê-se que não podem existir senão tres especies de polygonos esphericos regulares, porque os seus angulos são maiores ainda do que os dos polygonos rectilineos inscritos (§ 642), que são as faces do polyedro acima dito.

Sejão pois x, x', x'' os numeros dos lados de cada hum d'estes diversos polygonos esphericos; y, y', y'' os numeros respectivos d'estes polygonos; será

$$L=\frac{xy+x'y'+x''y''}{2};\ P=y+y'+y'';$$

logo $S=\frac{xy+x'y'+x''y''}{2}-y-y'-y''+2.$

Sejão m, n, p respectivamente os numeros de vezes que cada hum dos angulos polygonos x, x', x' he repetido em torno de hum vertice commum; teremos

$$mS=xy,\ nS=x'y',\ pS=x''y'';$$

isto he

$$mxy+mx'y'+mx''y''-2my-2my'-2my''$$
$$+4m-2xy=0;$$
$$nxy+nx'y'+nx''y''-2ny-2ny'-2ny''$$
$$+4n-2x'y'=0;$$
$$pxy+px'y'+px''y''-2py-2py'-2py''$$
$$+4p-2x''y''=0.$$

Vejamos quantas soluções admittem estas equações indeterminadas em numeros inteiros e positivos; attendendo a que os angulos compostos, ou com hum vertice commum, não podem exceder a 4 rectos; que os angulos pertencentes aos polygonos esphericos de maior numero de lados são tambem maiores; que quando elles são diversos nos angulos compostos, não ha polygonos esphericos cujo numero de lados seja impar, o que se demonstra como no § 402; que havendo só hum par da mesma especie no angulo composto, os polygonos que lhe pertencem não podem ter o numero dos lados impar, como se demonstra imitando o que se fez (§§ 403 e 404).

Seja pois

$$m=n=p=1;$$

então as tres equações dão

$$xy=x'y'=x''y'',$$

ás quaes se satisfaz com os valores

$$y=qx'x'',\ y'=qxx'',\ y''=qxx',$$

e cada huma das tres equações se torna

$$q(xx'x''-2xx'-2xx''-2x'x'')+4=0.$$

Se fizermos

$$x=4,\ x'=6,\ x'=8,$$

teremos

$$q=\tfrac{1}{4},\ \text{e}\ y=12,\ y'=8,\ y''=6;$$

isto he, que se póde compor a superficie da esphera com 12 quadrados esphericos, 8 hexagonos esphericos regulares e 6 octogonos esphericos regulares, ou que o polyedro inscripto he o primeiro semiregular.

Póde ainda fazer-se

$$x=4,\ x'=6,\ x''=10,$$

e teremos $q=\frac{1}{2}$; logo

$$y=30,\ y'=20,\ y''=12;$$

isto he, 30 quadrados, 20 hexagonos e 12 decagonos: solução que corresponde ao 2.° polyedro semiregular.

Se supposermos $m=2$, $n=1$, $p=1$; as tres equações dão

$$xy=2x'y'=2x''y'',$$

a que se satisfaz com

$$y=2qx'x'',\ y'=qxx'',\ y''=qxx',$$

logo

$$q(xx'x''-2x'x''-xx''-xx')+2=0.$$

Sómente póde fazer-se $x=4$, $x'=3$, $x''=5$; logo

$$q=1,\ y=30,\ y'=20,\ y''=12;$$

isto he 20 triangulos, 30 quadrados, e 12 pentagonos, o que corresponde ao polyedro semiregular 8.°

Se se considerão só duas especies de polygonos esphericos, então as tres equações se reduzem ás duas seguintes

$$mxy+mx'y'-2my-2my'+4m-2xy=0$$

$$nxy+nx'y'-2ny-2ny'+4n-2x'y'=0;$$

e fazendo-se $m=2$, $n=1$, não poderá x ser impar, e teremos

$$xy=2x'y',$$

a que se satisfaz com $y=2qx'$, $y'=qx$, e resulta por conseguinte

$$q(xx'-2x-4x')+4=0.$$

Escolhendo $x=4$, $x'=3$; será $q=\frac{1}{2}$, $y=3$, $y'=2$, isto he, 3 quadrados e 2 triangulos, o que corresponde ao prisma triangular equilatero

Sendo $x=4$, $x'=5$; $q=\frac{1}{2}$, $y=5$, $y'=2$; 5 quadrados e dois pentagonos; e assim successivamente a serie dos prismas equilateros inscritos; porque se vê que emquanto $x=4$, será sempre $q=\frac{1}{2}$, e $y=x'$, $y'=2$.

Acharemos tambem successivamente:

$x=6$, $x'=3$, $q=\frac{4}{6}$, $y=4$, $y'=4$; 4 triangulos e 4 hexagonos; o 3.° semiregular;

$x=6$, $x'=4$, $q=1$, $y=8$, $y'=6$; 6 quadrados e 8 hexagonos; o 4.° semiregular;

$x=6$, $x'=5$, $q=2$, $y=20$, $y'=12$; 12 pentagonos e 20 hexagonos; o 5.° semiregular;

$x=8$, $x'=3$, $q=1$, $y=6$, $y'=8$; 8 triangulos e 6 octogonos; o 6.° semiregular;

$x=10$, $x'=3$, $q=2$, $y=12$, $y'=20$; 20 triangulos e 12 decagonos; o 7.° semiregular.

Se se fizer $m=3$, $n=1$; teremos $xy=3x'y'$, que he satisfeita por $y = 3qx'$, $y' = qx$, e será

$$q(xx' - x - 3x') + 2 = 0.$$

$x = 3$, $x' = 4$, $q = \frac{2}{3}$, $y = 8$, $y' = 2$; 8 triangulos e 2 quadrados, o que corresponde ao deutoprisma quadrangular equilatero.

$x = 3$, $x' = 5$, $q = \frac{2}{3}$, $y = 10$, $y' = 2$; 10 triangulos e 2 pentagonos, o que corresponde ao deutoprisma pentagonal.

Continuando, teriamos a serie infinita dos deutoprismas, excepto o octaedro.

Teremos tambem:

$x = 4$, $x' = 3$, $q = 2$, $y = 18$, $y' = 8$; 8 triangulos e 18 quadrados, o 9.º semiregular;

Seja $m = 2$, $n = 2$; será $xy = x'y'$, que se satisfaz com $y = qx'$, $y' = qx$; e teremos

$$q(xx' - 2x - 2x') + 4 = 0.$$

$x = 3$, $x' = 4$, $q = 2$, $y = 8$, $y' = 6$; 8 triangulos e 6 quadrados; o 10.º semiregular;

$x = 3$, $x' = 5$, $q = 4$, $y = 20$, $y' = 12$; 20 triangulos e 12 pentagonos; o 11.º semiregular;

Seja $m = 4$, $n = 1$; será $xy = 4x'y'$, que se satisfaz com $y = 4qx'$, $y' = qx$; e teremos

$$q(3xx' - 2x - 8x') + 4 = 0.$$

$x = 3$, $x' = 4$, $q = 2$, $y = 32$, $y' = 6$; 32 triangulos e 6 quadrados; o 12.º semiregular;

$x = 3$, $x' = 5$, $q = 4$, $y = 80$, $y' = 12$; 80 triangulos e 12 pentagonos; o 13.º semiregular.

Se se quizer cobrir a esphera com huma unica especie de polygonos, teremos então só

$$(m-2)xy-2my+4m=0.$$

Fazendo:

$m=3$, $x=3$, será $y=4$; 4 triangulos esphericos, o que corresponde ao tetraedro regular;

$m=4$, $x=3$, será $y=8$; 8 triangulos esphericos, o que corresponde ao octaedro regular;

$m=5$, $x=3$, será $y=20$; 20 triangulos esphericos, o que corresponde ao icosaedro regular;

$m=3$, $x=4$, será $y=6$; 6 quadrados esphericos, o que corresponde ao cubo;

$m=3$, $x=5$, será $y=12$; 12 pentagonos esphericos, o que corresponde ao dodecaedro regular.

Da superficie dos solidos circulares.

649. De duas superficies não interrompidas, a exterior he maior do que a interior, se esta fôr convexa, isto he, senão podér ser encontrada em mais de dois pontos por huma recta infinita, que atravesse o solido que ella encerra.

Porque para applicar todos os pontos da exterior supposta flexivel sobre a interior supposta inflexivel, he preciso dobrar a primeira.

650. De todas as superficies que terminão em huma linha plana, convexa e fechada, a plana he menor, e de duas outras, he menor a convexa que está entre a plana e a outra.

Fig. 232. Das tres superficies $ACBF$, $ACBE$, ACB que terminão na linha plana, convexa e fechada ACB, seja a segunda convexa e a terceira plana.

He sempre possivel chegar a hum ponto D tão proximo da superficie plana ACB, e collocado na parte opposta ás outras superficies, que descrevendo huma superficie com huma recta que passe por elle e pelo perimetro ABC, fique sempre convexa a superficie composta $DACBE$, e por consequencia tambem $DACB$. Logo, pelo theorema precedente, teremos a superficie $DACBF > DACBE > DACBA$; e tirando de cada d'estas tres superficies a superficie commum $DACB$, teremos $ACBF > ACBE > ACB$.

651. De dois solidos, hum exterior e outro interior, o primeiro chama-se *circumscrito*, e o outro *inscrito*, quando no primeiro não ha face em que não esteja ou hum vertice, ou huma aresta do segundo.

652. A superficie curva do sector cylindrico he maior do que a porção da superficie do prisma inscrito no sector interceptada pelos triedros, que têem os vertices nos centros das bases do cylindro; e he menor do que a superficie do prisma circumscrito ao sector, interceptada pelos mesmos triedros.

Para provar a primeira parte da proposição, basta considerar o prisma triangular $ABCD$ inscrito no sector cylindrico $ABCED$; poisque podem reduzir-se a taes sectores e a taes prismas qualquer sector cylindrico, e qualquer prisma inscrito n'esse sector. Fig. 233.

Digo que he a superficie curva $CEF >$ parallelogrammo CF. Porque $CEF + 2.CED > CF$; e no sector cylindrico, cujo eixo he $n.AB$, a superficie será $n.CEF$, e o parallelogrammo correspondente será $n.CF$, e os segmentos CED, GHF ficarão sempre os mesmos, e teremos tambem

$$n.CEF + 2\,CED > n.CF.$$

Agora nego que seja $CEF < CF$, porque se assim fosse teriamos

$$n(CF - CEF) < 2.CED$$

absurdo, sendo n qualquer, poisque de qualquer grandeza $CF - CEF$ ha sempre multiplos $n(CF - CEF)$ que excedão huma grandeza qualquer proposta $2.CED$.

Digo mais que não póde ser $CEF = CF$, porque se suppõe n infinito, então o termo $n.CEF$ não poderá ser augmentado por $2\,CED$, e a inequação se reduz a esta $n.CEF > n.CF$, ou a $CEF > CF$, como deve ser.

Para demonstrar a segunda parte da proposição, bastará tambem considerar o prisma quadrangular $ABCID$ circumscrito ao sector cylindrico $ABCED$.

A superficie quebrada GIF, composta de dois parallelogrammos, e os dois triangulos iguaes CID, GKF, tudo junto, são maiores do que a superficie curva CEF, mais os dois segmentos iguaes CED, GHF; isto he

$$GIF+2CID>CEF+2CED;$$

e discorrendo como no caso antecedente, teremos

$$n.GIF+2(CID-CED)>n.CEF,$$

e conclue-se da mesma fórma que $GIF>CEF$.

O caso mais desvantajoso n'esta segunda parte da proposição, he quando os dois parallelogrammos GI, IF são tangentes á superficie curva; mas então elles são iguaes, e o plano das parallelas IK, BA divide o sector e a superficie, o prisma e a sua superficie em partes iguaes, e a proposição tem logar igualmente no sector cylindrico, e prisma triangular circumscrito, que são então cada hum metades respectivas do sector proposto, e do prisma quadrangular da construcção, e com mais rasão em qualquer outro prisma triangular circumscrito ao sector cylindrico.

653. Das superficies curvas dos sectores cylindricos, com o mesmo eixo e diedro, he maior aquella que pertence ao cylindro de raio maior.

Póde inscrever-se no sector maior hum prisma, e circumscrever ao menor outro prisma, nos perimetros de cujas bases entrem no primeiro huma linha de cordâs inscrita em
Fig. 234. DE, e no segundo huma linha de tangentes circumscrita a FG, e taes estas linhas que se não cortem, e que seja a primeira maior do que a segunda. As duas superficies prismaticas lateraes, que têem estas linhas por bases, chamem-se respectivamente S, s. Finalmente se vê que $S>s$. Logo a superficie $CDE>S>s>$ superficie HFG.

654. Com a superficie curva do sector cylindrico, sem mudar nem de eixo nem de diedro, se póde representar a grandeza de qualquer superficie, por ser a primeira huma funcção do raio, que póde ir desde zero até o infinito.

655. A superficie curva do sector cylindrico recto he igual ao producto do arco pelo lado.

Se $AD \times$ arco ABC não he o valor da superficie curva DBC do sector cylindrico recto $DAECB$, seja, se he possivel, o valor da superficie curva FH do sector cylindrico recto concentrico e menor. Fig. 235.

Inscreva-se no sector maior o prisma $DACE$, cuja superficie DC, composta de hum ou de muitos rectangulos, não corte FH.

Será $DC > FH$, isto he

$$AD \times AC > AD \times \text{arco } ABC\text{: absurdo.}$$

Se he possivel, seja agora $FG \times$ arco GH, a superficie curva DC de hum sector cylindrico maior do que o proposto FGH.

Circunscreva-se ao menor hum prisma $FGHE$, cuja superficie $FGIH$, composta de dois ou mais rectangulos, não corte a superficie quebrada inscrita em DC. Será $FGIH$ menor do que a superficie curva DC, isto he

$$FG \times (GI + IH) < FG \times \text{arco } GH\text{:}$$

absurdo igualmente.

656. A superficie curva do cylindro recto he o producto do lado, eixo ou altura pela circumferencia de huma das bases.

657. A superficie curva do sector conico recto, he maior do que a porção de superficie da pyramide inscrita no sector, interceptada pelo triedro que tem o vertice no centro da base; e menor do que a porção da superficie da pyramide circumscrita ao sector, interceptada pelo mesmo triedro.

Para provar a primeira parte da proposição, basta considerar a pyramide triangular $ACED$, inscrita no sector Fig. 236
conico recto $ABCED$.

Digo que a superficie curva $DABC$, he maior do que o triangulo isosceles DAC.

Opposto ao sector circular AEC, póde imaginar-se outro sector conico e recto $ABCEF$, tendo a altura $EF = ED$, e circumscrito a outra pyramide triangular $ACEF$. Póde demonstrar-se por meio da superposição, que os dois sectores conicos são identicos, assim como as duas pyramides, porque os triedros $EACD$, $EACF$ o são, e teem as arestas iguaes entre si. Logo será a superficie curva $DABC$ = superficie curva $FABC$, e o triangnlo $DAC = FAC$. Mas DE, FE estão em direitura, sendo ambas perpendiculares á base commum, logo as faces DAE, FAE estão no mesmo plano, ou formão huma só face; e o mesmo he de DCE, FCE. Logo o solido $DACF$, composto de duas pyramides triangulares, he hum tetraedro, e por consequencia he convexo; e sendo interior a respeito do duplo sector conico, a sua superficie he menor, e tirando as duas faces communs, fica a superficie quebrada $DACF <$ superficie curva $DABCF$, logo $DAC < DABC$.

Similhantemente se demonstra a segunda parte da proposição, por meio da pyramide quadrangular $FEAGC$ opposta á circumscrita $DEAGC$, comparadas com os segmentos conicos rectos inscritos $FEABC$, $DEABC$.

O caso mais desvantajoso, n'esta segunda parte da proposição, he quando os triangulos DAG, DCG são tangentes á superficie curva; mas então elles são iguaes, e o plano GDE divide o sector e a superficie, a pyramide e a sua superficie em partes iguaes, e a proposição tem logar ainda no sector conico recto, e pyramide triangular circumscrita, que são então metades do sector proposto, e da pyramide quadrangular, e com mais rasão em outra qualquer pyramide triangular circumscrita á metade do sector conico.

658. Das superficies curvas dos sectores conicos rectos, com o mesmo eixo e diedro, he maior a que pertence á pyramide conica de maior raio da base.

Póde inscrever-se no sector maior huma pyramide, e circumscrever-se ao menor outra, nos perimetros de cujas bases entrem no primeiro a linha de cordas inscrita em DE,
Fig. 237. e no segundo a linha de tangentes circumscrita a FG, taes que estas linhas não se cortem, e que a primeira seja maior

do que a segunda. Sejão S, s as duas superficies lateraes pyramidaes, que estão sobre estas linhas respectivamente por bases. Será $S > s$. Logo a superficie curva $BDIE > S > s >$ superficie curva BFG.

659. Com a superficie curva do sector conico recto, sem mudar de eixo nem de diedro, póde representar-se a grandeza de qualquer superficie, por ser a primeira huma funcção do raio da base, que augmenta desde zero até o infinito.

660. A superficie curva do sector conico recto, he metade do producto do lado pelo arco.

Porque se he possivel, não seja

$$\frac{1}{2}\, BE \times \text{arco } DIE = \text{superficie } BDIE,$$

e seja

$$\frac{1}{2}\, BE \times \text{arco } DIE = \text{superficie } BFG \text{ (menor)}.$$

Inscreva-se na maior, sobre a linha das cordas, huma superficie pyramidal que não corte a menor. A perpendicular BK a qualquer das cordas iguaes será $< BE$, e a linha das cordas $DE < DIE$. A superficie pyramidal lateral e parcial BDE, he $>$ superficie curva BFG, isto he

$$\frac{1}{2}\, BK \times DE > \frac{1}{2}\, BE \times \text{arco } DIE:$$

absurdo, por ser

$$BK < BE, \text{ e } DE < DIE.$$

Se he possivel, seja $\frac{1}{2}\, BG \times \text{arco } FG$ o valor da superficie conica $BDIE$ maior. Circumscreva-se a BFG sobre a linha das tangentes, huma superficie pyramidal que não corte a maior. Será a linha das tangentes $FHG >$ arco FG; BG perpendicular a GH; e todas as outras perpendiculares ás tangentes serão cada huma $= BG$, ou o que

he o mesmo, serão lados da pyramide conica recta. Será a superficie $BFHG < BDIE$,
isto he

$$\tfrac{1}{2}\, BG \times (FH + HG) < \tfrac{1}{2}\, BG \times \text{arco}\, FG:$$

absurdo, poisque o factor

$$(FH + HG) > \text{arco}\, FG.$$

661. A superficie curva da pyramide conica recta he metade do producto do lado pela circumferencia da base.

662. *Pyramide conica truncada* ou *tronco da pyramide conica* he o solido que d'ella fica depois de se lhe cortar outra pyramide conica por hum plano parallelo á base. Chamão-se *bases do tronco* os dois circulos que são as suas faces planas; *eixo* a recta que une os centros das bases; *altura* a perpendicular ás bases, terminada nos seus planos; *lados do tronco*, as rectas tiradas entre pontos das circumferencias das bases, sem cortarem o tronco, ou que estejão cada huma com o eixo no mesma plano. O *tronco* he *recto* quando o eixo he igual á altura, aliás he *obliquo*.

663. A superficie curva da pyramide conica truncada recta, he o producto de hum lado pela circumferencia media, isto he, a que divide os lados igualmente.

Fig. 238. Complete-se a pyramide conica ABC, de que DBC he o tronco.

A superficie curva do tronco, ou a descrita por DB, fazendo-se girar o trapesio $DEFB$ em torno de EF, he a differença entre as superficies curvas das duas pyramides conicas, descritas respectivamente por AB, AD, isto he, a superficie curva DAC, que chamo $S = \frac{1}{2} AB \times$ circumferencia, cujo raio he BF, $- \frac{1}{2} AD \times$ circumferencia, cujo raio he DE,

$$= \pi (BA \times BF - AD \times DE)$$

$$= \pi (BD \times BF + AD \times BF - AD \times DE).$$

Mas temos

$$AD : AB :: DE : BF,$$

logo

$$AD \times BF = AB \times DE = AD \times DE + BD \times DE.$$

Substituindo pois e reduzindo, teremos

$$S = \pi . BD(BF + DE).$$

Se pelo meio G de BD se tira HG parallela a DE, será

$$GH = \tfrac{1}{2}(BF + DE);$$

logo

$$S = 2\pi . BD \times GH = BD \times \text{circumferencia},$$

cujo raio he GH.

664. Designaremos por circ. AB o circulo, de que AB he o raio, ou de cuja circumferencia AB he arco. Similhantemente circumf. AB significa a circumferencia, de que AB, he arco ou raio.

665. A superficie curva ou de pyramide conica, ou do seu tronco, ou de hum cylindro, descrita por qualquer dos lados de hum polygono, na revolução inteira do polygono sobre hum dos seus lados como eixo, he igual á projecção sobre o eixo, do lado gerado d'essa superficie, multiplicada pela circumferencia, cujo raio he a perpendicular levantada no meio do lado gerador, e terminada no eixo.

Seja $ABCDE$ o polygono, AE o eixo de revolução, e BC parallelo ao eixo. Fig. 239.

BC descreve a superficie curva de hum cylindro recto, CD a de huma pyramide conica recta truncada, e DE a de huma pyramide conica recta, na revolução do polygono em torno do eixo.

Sejão AF, FG, GE as projecções orthogonaes respectivas de BC, CD, DE sobre o eixo; e HI, HK, HL perpendiculares respectivas ao meio de cada hum d'estes ultimos lados.

A proposição não precisa ser demonstrada para a superficie cylindrica descrita por BC.

Para demonstrar os outros dois casos, tirem-se HD, e as perpendiculares ao eixo KM, LN; e a parallela DP.

Os triangulos HKM, CDP são similhantes, por terem os lados perpendiculares entre si;
logo

$$KM : HK :: DP \text{ (ou } FG) : CD;$$

logo

$$KM \times CD = HK \times FG.$$

Mas a superficie do tronco descrita por CD, que chamo

$$S = 2\pi . KM \times CD;$$

logo

$$S = 2\pi . HK \times FG = FG \times \text{circumf. } HK.$$

Os triangulos HLN, DGE são tambem similhantes, pela mesma rasão de terem os lados perpendiculares, e dão

$$HL \times GE = LN \times DE;$$

e a superficie que DE descreve, he

$$= \pi . DG \times DE = 2\pi . LN \times DE$$

$$= 2\pi . HL \times GE = GE \times \text{circumf. } HL.$$

666. *Zona* he a superficie curva do segmento espherico, ou do seu tronco. *Arco da zona* he aquelle que a descreve; e zon. AB significa zona cujo arco he AB, ou zona da esphera cujo raio he AB. *Zonas correspondentes* chamo áquellas cujos arcos, em espheras concentricas, correspondem ao mesmo angulo do centro.

667. A zona he maior do que a superficie descrita pela linha de cordas, inscrita no seu arco; e menor do que a superficie descrita pela linha de tangentes, circumscrita ao seu arco.

Dos extremos do arco abaixem-se as perpendiculares AB, DC sobre um dos eixos. Na revolução do polygono $ABCDGF$ com o arco e a linha das cordas, descrevem-se tres solidos, cujas superficies estão no caso do § 649; e tirando d'estas superficies circ. BA, e circ. DC, que são communs a todas tres, restão a superficie descrita por $AFGD >$ zon. $AD >$ superficie descrita por AED. Fig. 240.

668. De zonas correspondentes he maior a que tem maior arco.

Inscreva-se no arco maior huma linha de cordas BFC, e circumscreva-se ao arco menor huma linha de tangentes $DGHIE$, sem que estas linhas se cortem, e seja a primeira $BFC >$ segunda $DGHIE$. A projecção LM do arco maior e linha das cordas, he maior do que a projecção NP do arco menor e linha das tangentes, porque Fig. 241.

$$AM : AP :: AC : AE :: AB : AD :: AL : AN;$$

logo

$$AM - AL : AP - AN :: AM : AP \text{ ou } :: AB : AD,$$

isto he,

$$LM : NP :: AB : AD.$$

Por consequencia será maior a superficie descrita pela linha das cordas BFC do que a descrita por $DGHIE$, porque a primeira tem maior projecção sobre o eixo, e maior perpendicular AQ abaixada do centro sobre huma das cordas iguaes que a compõem, e a linha das tangentes menor projecção, e menor perpendicular sobre qualquer das tangentes, por ser ella o raio menor. Ora d'estas projecções e perpendiculares dependem as superficies descritas.

Assim zon. BC he maior do que cada huma d'estas duas superficies, e zon. DE menor. Logo a zona de maior arco, ou de maior raio, he maior, sendo o mesmo o angulo BAC do sector.

669. Com a zona, sem mudar o angulo do sector circular correspondente, póde representar-se a grandeza de huma superficie qualquer, por ser aquella huma funcção do raio da esphera, que vai de zero ao infinito.

670. *A* zona he o producto da projecção do seu arco pela circumferencia de hum circulo maximo da sua esphera.

Seja, se he possivel, $LM \times$ circumf. AB não o valor da zona descrita por BC, mas de uma zona menor descrita por DE, ou seja

$$LM \times \text{circumf. } AB = \text{zon. } DE.$$

Inscreva-se no arco da zona maior a linha das cordas BFC, que não corte o arco menor.

Será superficie descrita por $BFC >$ zon. DE, isto he

$$LM \times \text{circumf. } AQ > LM \times \text{circumf. } AB:$$

absurdo, por ser

$$AQ < AB.$$

Seja, se he possivel, $NP \times$ circumf. AD o valor não da zon. DE, mas d'outra maior zon. BC, ou seja

$$NP \times \text{circumf. } AD = \text{zon. } BC.$$

Circumscreva-se ao arco menor a linha das tangentes $DGHIE$, tal que não encontre o arco maior. Será superficie descrita por $DGHIE <$ zon. BC, isto he

$$NP \times \text{circumf. } AD < NP \times \text{circumf. } AD: \text{ absurdo.}$$

671. A superficie da esphera, he o producto do eixo pela circumferencia de hum circulo maximo, logo he igual á superficie de quatro dos seus circulos maximos; e igual

á superficie curva do cylindro circumscrito á esphera, isto he, do cylindro recto, que ella toca em todas as faces e lados.

672. Chamão-se *similhantes* as superficies do mesmo nome que só differem em grandeza, quando estão entre si, como os quadrados das linhas do mesmo nome, que as fazem differir em grandeza, ou de que são funcções.

673. As zonas correspondentes são similhantes.

Temos

$$\text{zon.}\,BC : \text{zon.}\,DE :: 2\pi.\,AB \times LM : 2\pi.\,AD \times NP.$$

Mas he

$$LM : NP :: AB : AD;$$

logo

$$\text{zon.}\,BC : \text{zon.}\,DE :: \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2.$$

674. As superficies curvas dos diedros esphericos, ou as superficies dos bilateros esphericos estão entre si como os seus angulos.

Se os bilateros $ABCD$, $AECD$ são commensuraveis, ou se têem hum bilatero que seja sua medida commum, he claro que o angulo d'este bilatero se contém nos angulos dos bilateros propostos tantas vezes, quantas o bilatero nos outros, e a proposição he verdadeira, e por consequencia o he tambem no caso de incommensurabilidade. Fig. 242.

675. A superficie do bilatero está para a da sua esphera, como o angulo do bilatero para quatro angulos rectos.

676. A superficie do triangulo CBD, formado por hum arco BD de circulo menor ou maximo, e por dois arcos de circulo maximo que lhe sejão perpendiculares, está para a zona que o circ. BD termina, e em que existe o triangulo, como BD para circumf. BD.

677. A superficie do triangulo espherico está para a superficie da sua esphera, como o excesso da somma dos seus angulos sobre dois rectos está para oito rectos.

Produza-se o lado BC do triangulo espherico x, até completar o seu circulo, e os outros lados no sentido do vertice A até se encontrarem em D. Ficará fóra do hemispherio do triangulo proposto, outro triangulo igual a este. Fig. 212.

Seja s a superficie da esphera, teremos

$$x+a:s::ACB:4r;$$

$$x+b:s::ABC:4r;$$

$$x+c:s::BAC:4r;$$

$$a+b+c+x=\frac{1}{2}s;$$

logo

$$3x+a+b+c=\frac{s(ACB+ABC+BAC)}{4r};$$

logo

$$2x+\frac{1}{2}s=\frac{s(ACB+ABC+BAC)}{4r};$$

logo

$$x=\frac{s(ACB+ABC+BAC-2r)}{8r}.$$

678. A superficie do triangulo espherico trirectangulo que pela proposição precedente, ou por superposição, he a oitava parte da superficie da esphera, he por consequencia metade da superficie de hum circulo maximo, ou o producto de hum quadrante da circumferencia de circulo maximo pelo raio. Suppondo pois que o quadrante e o raio se subentendem ou se supprimem, substituindo-os por 1, como já se fez; então tambem o triangulo trirectangulo deve ser considerado como unidade de superficie, ou $=1$, e da mesma fórma $r=1$, e $s=8$; e a expressão do triangulo espherico se reduz a

$$x=ABC+ACB+BAC-2;$$

a qual traduzida em termos communs abreviados quer dizer, que a superficie do triangulo espherico he igual á somma dos seus angulos menos o numero 2. O que realmente significa, que os numeros que resultão da comparação de seus angulos com hum recto se sommem, que d'esta somma se tire 2, e que o resto se multiplique pela superficie do triangulo trirectangulo; e o producto será a superficie do triangulo espherico.

679. A superficie do polygono espherico saliente de n lados, porque póde dividir-se em $n-2$ triangulos esphericos, será igual á somma dos seus angulos menos o numero $2(n-2)$, segundo o mesmo scholio.

680. A superficie do menisco ou lunula formada por hum arco de circulo maximo e outro de circulo menor, acha-se tirando de BCD o triangulo espherico que tem os mesmos vertices. Fig. 242.

681. A superficie do menisco ou lunula formada por dois arcos de circulo menor, he a differença de duas lunulas como as do corollario antecedente, e exige que se calculem as superficies de dois triangulos esphericos proprios, e de dois improprios como BCD.

682. Já se vê, que se póde achar a superficie de hum polygono não espherico, mas descrito na superficie da esphera, em o qual entrem lados que sejão arcos de circulos menores, reduzindo-o primeiro a polygono espherico, pondo arcos de circulos maximos entre os extremos dos arcos de circulos menores, e tendo conta depois com as superficies dos meniscos assim formados.

Volumes circulares

683. O sector de hum cylindro qualquer he o producto da altura pelo sector circular, que lhe serve de base.

Seja A a altura. Se $A\times AECB$ não he o valor do sector cylindrico $DABCE$; seja, se he possivel, o valor de outro sector cylindrico menor $FHGE$, isto he, seja Fig 235.

$$A\times AECB=FHGE.$$

Inscreva-se no maior hum prisma, cuja linha das cordas AC, com os raios AE, CE formem o perimetro da base. Este prisma he maior do que $FHGE$, isto he,

$$A\times AEC>A\times AECB\text{: absurdo.}$$

Seja, se he possivel, $A \times HEG$ o valor de hum sector cylindrico $DABCE > FHGE$.

Circumscreva-se ao menor hum prisma $FGIHE$, cuja base tenha por perimetro a linha das tangentes GIH, e os dois raios GE, EH.

He este prisma $<$ que o sector cylindrico maior, isto he,

$$A \times GIHE < A \times GEH \text{: absurdo.}$$

684. O cylindro he o producto da base pela altura.

685. O sector de huma pyramide conica qualquer, he o terço do producto da altura pelo sector circular que lhe serve de base.

Fig. 237. Seja A a altura. Se $\frac{1}{3} A \times DIEA$ não he o valor do sector conico $BDIEA$, seja, se he possivel, o valor d'outro sector conico menor $BFGA$, isto he, seja

$$\frac{1}{3} A \times DIEA = BFGA.$$

Inscreva-se no maior huma pyramide, de que a linha das cordas DE, e os raios DA, EA formem o perimetro da base. Esta pyramide he $> BFGA$, ou

$$\frac{1}{3} A \times DEA > \frac{1}{3} A \times DIEA \text{: absurdo.}$$

Seja, se he possivel, $\frac{1}{3} A \times FGA$ o valor de hum sector conico $BDIEA >$ sector $BFGA$.

Circumscreva-se pois ao menor sector huma pyramide $BFHGA$, cuja base tenha por perimetro a linha das tangentes FHG, e os raios FA, GA. Esta pyramide he menor do que o sector conico maior, isto he

$$\frac{1}{3} A \times FHGA < \frac{1}{3} A \times FGA \text{: absurdo.}$$

686. A pyramide conica he o terço do producto da base pela altura.

687. O tronco da pyramide conica he a somma de tres pyramides conicas, todas da mesma altura do tronco, e tendo por bases respectivas as duas bases do tronco, e huma meia proporcional entre ellas.

Esteja o tronco T entre os circulos parallelos, de que BF, DE são os raios; KI seja a sua altura, se elle he obliquo, a qual he a differença entre a altura AI total, e AK altura da pyramide parcial. Será Fig. 238.

$$T = \frac{1}{3}(AI.\text{circ.}\,BF - AK.\text{circ.}\,DE)$$

$$= \frac{1}{3}\left(KI.\text{cir.}\,BF + AK(\text{circ.}\,BF - \text{circ.}\,DE)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(KI.\text{circ.}\,BF + \pi.AK(\overline{BF}^2 - \overline{DE}^2)\right).$$

Mas temos

$$AI : AK :: AB : AD :: BF : DE;$$

logo

$$AI - AK\,(\text{ou}\,KI) : AK :: BF - DE;$$

logo

$$AK = \frac{DE \times KI}{BF - DE};$$

logo

$$T = \frac{1}{3}\left(KI.\text{circ.}\,BF + \pi.KI(BF \times DE + \overline{DE}^2)\right).$$

Tomando GH meia proporcional entre BF e DE, será

$$T = \frac{1}{3}\,KI.\text{circ.}\,BF + \frac{1}{3}\,KI.\text{circ.}\,GH + \frac{1}{3}\,KI.\text{circ.}\,DE.$$

688. Na revolução de hum triangulo sobre hum eixo que esteja no seu plano, e em que tenha hum vertice, o solido

KK

gerado pelo triangulo he o terço do producto da perpendicular tirada d'este vertice sobre o lado opposto, pela superficie gerada por este lado.

Fig. 243. Ha tres casos. O triangulo AFE na revolução sobre o eixo AE descreve hum volume composto de duas pyramides conicas rectas, as quaes têem por base commum o circulo descrito pela perpendicular DF sobre o eixo de revolução, isto he, o solido gerado por AFE, ou

$$\text{sol.}\, AFE = \tfrac{1}{3}\, AE \times \text{circ.}\, DF = \tfrac{1}{3}\, AE \times \pi \overline{DF}^2.$$

Seja AG perpendicular sobre EF produzido sendo necessario.

Pela similhança dos triangulos AGE, DFE, ou pela proposição § 130, temos

$$AE \times DF = EF \times AG;$$

ogo

$$\text{sol.}\, AFE = \tfrac{1}{3}\, AG \times \pi .\, DF \times EF.$$

Mas EF he o lado de huma das pyramides conicas, e $2\pi .\, DF$ a circumferencia da base. Logo a superficie gerada por EF, ou

$$\text{sup.}\, EF = \pi .\, DF \times EF;$$

e

$$\text{sol.}\, AFE = \tfrac{1}{3}\, AG \times \text{superf.}\, EF.$$

Da mesma fórma

$$\text{sol.}\, AHE = \tfrac{1}{3}\, AG \times \text{sup.}\, HE.$$

No segundo caso

$$\text{sol.}\, AHF = \text{sol.}\, AHE - \text{sol.}\, AFE =$$

$$\tfrac{1}{3}\, AG\,(\text{sup.}\, HE - \text{sup.}\, EF) = \tfrac{1}{3}\, AG \times \text{sup.}\, HF.$$

Terceiro caso, sendo KH parallelo ao eixo. Então o solido gerado por AKH he a differença entre hum cylindro recto, que tem a altura KH, e cujos raios das bases são cada hum igual a AI, e a somma de duas pyramides conicas, com as mesmas bases e alturas IK, IH, e que ambas juntas fazem o terço do cylindro. Logo

$$\text{sol.}\, AKH = \frac{2}{3}\, KH \times \text{circ.}\, AI = \frac{2}{3}\, KH \times \pi . \overline{AI}^2$$

$$= \frac{1}{3}\, AI \times \text{sup.}\, KH.$$

689. *Sector conico-espherico* he a porção da esphera descrita por hum sector de circulo maximo, na revolução em torno de hum dos lados do sector circular. *Segmento do seetor conico-espherico* he o segmento feito por hum plano que passe pelo centro da esphera, ou vertice do sector; e a secção d'este plano no sector conico-espherico he tambem hum sector de circulo maximo.

690. O sector conico-espherico he o terço do producto do raio da sua esphera pela zona, que he sua base espherica.

Se $\frac{1}{3}\, AB \times \text{zon.}\, BC$ não he o valor do sector conico- Fig. 241.
espherico descrito pelo sector circular ABC em torno de AC, ou de AB; seja, se he possivel, o valor de outro sector correspondente menor, descrito por ADE em torno do mesmo eixo, isto he, seja

$$\frac{1}{3}\, AB \times \text{zon.}\, BC = \text{sector con. esph.}\, ADE.$$

Inscreva-se no arco maior huma linha de cordas iguaes BFC, que não corte o menor. Será, na revolução sobre o mesmo eixo,

$$\text{sol.}\, ABFC > \text{sect. con. esph.}\, ADE,$$

isto he,

$\frac{1}{3}\,AQ$ sup. $BFC > \frac{1}{3}\,AB$ zon. BC: absurdo, por ser $AQ < AB$, e sup. $BFC <$ zon. BC.

Seja, se he possivel, $\frac{1}{3}\,AD$ zon. DE o valor de hum sector conico-espherico maior descrito por ABC na mesma revolução.

Circumscreva-se ao arco menor DE huma linha de tangentes, tal que não corte o maior, como $DGHIE$.

Será

$$\text{sol. } ADGHIE < \text{sect. con. esph. } ABC$$

isto he

$\frac{1}{3}\,AD$ sup. $DGHIE < \frac{1}{3}\,AD$ zon. DE: absurdo, por ser sup. $DGHIE >$ zon. DE.

691. O solido que resta depois de tirar hum sector conico-espherico d'outro, he o producto da sua zona pelo terço do raio.

692. A esphera he o terço do producto da superficie pelo raio, e chamando ao raio r, he esphera $= \frac{4}{3}\,\pi\, r.^3$.

693. Chamão-se *similhantes aos volumes do mesmo nome, que só differem em grandeza quando estão entre si, como os cubos das linhas do mesmo nome*, que os fazem differir em grandeza, ou de que são funcções. Assim são similhantes todas as espheras.

694. Os sectores conico-esphericos correspondentes, ou cujas zonas são similhantes, são similhantes.

Temos sect. con. esph. ADE : sect. con. esph. ABC :: $\frac{1}{3}\,AD$ zon. DE : $\frac{1}{3}\,AB$ zon. BC. Mas é

$$\text{zon. } DE : \text{zon. } BC :: \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2;\ \text{logo}$$

$$\text{sect. con. esph. } ADE : \text{sect. con. esph. } ABC :: \overline{AD}^3 : \overline{AB}^3.$$

695. O diedro finito ou espherico, he o terço do producto do bilatero pelo raio.

Porque o diedro D está para a esphera S, como a superficie curva d do diedro está para a superficie s da esphera; logo

$$D = \frac{Sd}{s} = \frac{1}{3}\ \text{raio} \times \frac{sd}{s} = \frac{1}{3}\, r\, d.$$

696. O sector $GBCD$ do sector conico-espherico he o terço do producto do raio pela superficie espherica do triangulo BDC formado do arco BD de circulo menor, e de outros dois perpendiculares a este, e por consequencia maximos. Fig. 242.

Porque facilmente se demonstra, que $GBCD$: sol. con. esph. GBC :: BD : cir. BD :: BCD : zon. BC, isto he,

$$GBCD = \frac{1}{3}\,\frac{GB\ \text{zon.}\ BC \times BCD}{\text{zon.}\ BC} = \frac{1}{3}\, GB \times BCD.$$

697. O sector triedro espherico he o terço do producto do raio pela superficie do triangulo espherico que lhe serve de base.

Prova-se como em o § 677, que hum sector triedro espherico T he para a sua esphera S, como o seu triangulo espherico t he para a superficie s da esphera; mudando na demonstração citada as palavras bilateros em diedros, triangulo em triedro, lados em faces, e superficies em solidos. Assim temos

$$T = \frac{St}{s} = \frac{1}{3}\, r\, t.$$

698. O polyedro espherico he o terço do producto do raio pelo polygono espherico, que he sua superficie curva.

699. O segmento do solido conico-espherico he o terço do producto do raio pela lunula, que he sua superficie espherica.

700. O segmento espherico he o terço do producto do

circulo, cujo raio he a sua altura, pela differença entre o triplo do raio da esphera, e a mesma altura.

Fig. 244. O segmento espherico descrito por CBE he a differença entre o sector conico-espherico descrito por CAB, e a pyramide conica descrita por ACE, isto he

$$\text{Segm. } BCE = \text{sol. con. esph. } CAB - \text{pyram. } ACE$$

$$= \tfrac{1}{3}\, AB \text{ zon. } CB - \tfrac{1}{3}\, AE \text{ circ. } EC$$

$$= \tfrac{1}{3}\, AB \times EB \text{ circumf. } AC - \tfrac{1}{3}\, AE \text{ circ. } EC$$

$$= \tfrac{\pi}{3}\,(2EB \times \overline{AB}^2 - AE \times \overline{EC}^2)$$

$$= \tfrac{\pi}{3}\Big(2EB \times \overline{AB}^2 - (AB - EB)(2AB - EB)EB\Big)$$

$$= \tfrac{\pi}{3}\,(3AB - EB)\overline{EB}^2 = \tfrac{1}{3}\,(3AB - EB) \text{ circ. } EB.$$

701. Eliminando da expressão $\frac{\pi}{3}(3AB - EB)\overline{EB}^2$ o raio AB da esphera, resulta

$$\text{segm. } BCE = \tfrac{1}{3}\,(3\overline{EC}^2 + \overline{EB}^2)\,\tfrac{1}{4} \text{ circumf. } EB$$

$$= \tfrac{1}{6}\, EB\,(3\pi\overline{EC}^2 + \pi\overline{EB}^2)$$

$$= \tfrac{1}{6}\, EB\,(3 \text{ circ. } EC + \text{circ. } EB).$$

O que fornece as seguintes regras. Para achar a capacidade do segmento espherico, somme-se o triplo do quadrado do raio da sua base com o quadrado da sua altura, multiplique-se esta somma pela circumferencia, de que he raio a altura, e divida-se o producto pelo numero 12. Ou a trez vezes a base junte-se o circulo de que a altura he raio, multiplique-se esta somma pela altura, e divida-se o producto pelo numero 6, para ter o solido do segmento.

702. O tronco do segmento espherico, ou o segmento de duas bases, he o triplo da somma d'ellas, junto com o circulo cujo raio he a altura, multiplicado o todo pela sexta parte da altura.

O tronco T descrito por $FGEC$ he a differença dos segmentos descritos por FGB, CEB, isto he,

$$T=\tfrac{1}{6}\pi(3\overline{GF}^2\times BG+\overline{BG}^3-3\overline{EC}^2\times BE-\overline{BE}^3)$$

$$=\tfrac{\pi}{6}(3\overline{GF}^2\times GE+3\overline{GF}^2\times BE+\overline{GE}^3$$

$$+3\overline{GE}^2\times BE+3\,GE\times\overline{BE}^2-3\overline{EC}^2\times BE).$$

Mas por ser

$$AB=\frac{\overline{EC}^2+\overline{EB}^2}{2EB}=\frac{\overline{FG}^2+\overline{BG}^2}{2BG},$$

e pondo $GE+BE$ em logar de BG, como se acaba de fazer, e multiplicando por 3, será

$$3EB\times\overline{FG}^2+3EB\times\overline{GE}^2+3GE\times\overline{EB}^2$$

$$-3BE\times\overline{EC}^2=3GE\times\overline{EC}^2;$$

logo

$$T=\tfrac{\pi}{6}(3\overline{GF}^2+3\overline{EC}^2+\overline{GE}^2)GE.$$

703. A esphera he os dois terços do cylindro circumscrito.

704. O segmento espherico de duas bases, equivale á metade de dois cylindros com as mesmas bases e altura do segmento, mais a esphera de que esta altura he o diametro.

Maximos e minimos dos solidos circulares e das suas superficies

705. O cylindro recto tem menor superficie do que o obliquo da mesma base e altura.

Porque circumscrevendo ao primeiro, e inscrevendo-lhe dois prismas, cujas superficies respectivas sejão c, i; e fazendo o mesmo ao segundo, sobre as mesmas bases, com dois prismas, cujas superficies sejão respectivamente C, I; e chamando s, S ás superficies respectivas do primeiro e segundo cylindros: estará s entre c e i, e S entre C e I. Mas he $c > i$, e $C > I$; $c < C$, $i < I$. Tambem se podem multiplicar as faces dos prismas tanto, que se torne I tão pouco diverso de C, que seja $I > c$. Logo exprimindo por numeros, não os valores absolutos, mas sómente a ordem de grandeza d'estas superficies, então a

$$c,\ s,\ i,\ C,\ S,\ I \text{ correspondem}$$

$$3,\ 2,\ 1,\ 6,\ 5,\ 4,\ \text{logo } s < S.$$

706. O cylindro recto tem menor superficie do que o prisma de igual base e altura.

Porque mesmo no caso mais desvantajoso do prisma ser recto, e ter base regular, em que a sua superficie he a menor, a circumferencia da base do cylindro he tambem menor do que o perimetro da base do prisma; logo a superficie curva menor do que a lateral do prisma; e logo toda a superficie do cylindro he menor do que a do prisma.

707. O maior cylindro recto que se póde formar com a somma dada da altura e diametro da base, he aquelle em que a altura he igual ao raio da base, sendo ao mesmo tempo cada hum o terço d'esta somma.

Seja x o raio da base, e y a altura do cylindro; e c a somma dada, ou

$$2x + y = c.$$

O cylindro será $=\pi x^2 y=\pi x^2 (c-2x)=\frac{\pi}{4} z^2 (c-z)$, fazendo $z=2x$; $z^2 (c-z)$ he a expressão que deve ser um maximum; logo

$$z=\frac{2}{3}c, \text{ e } x=\frac{1}{3}c=y.$$

708. O maior cylindro recto que se póde formar com a somma dada da altura e raio da base, he aquelle em que a altura he metade do raio, e ao mesmo tempo o terço d'esta somma.

Seja x o raio da base, y a altura do cylindro e c a somma dada ou

$$x+y=c.$$

O cylindro será $=\pi x^2 (c-x)$, e a expressão que deve ser um *maximum* será $x^2 (c-x)$; logo

$$x=\frac{2}{3}c;\ y=\frac{1}{3}c;\ y=\frac{1}{2}x.$$

709. De dois cylindros rectos, aquelle cuja altura he igual ao diametro da base, tem menor superficie com o mesmo volume do segundo; e maior volume com a mesma superficie.

Porque fazendo para os cylindros actuaes a mesma construcção que para os cylindros do § 705, e empregando as mesmas denominações, e porque c he menor do que C, tiraremos a mesma conclusão para a primeira parte da proposição. Quanto á segunda, as mesmas denominações applicadas aos volumes respectivos dos cylindros e dos prismas, tambem a demonstrão. Advirta-se que he $c<C$, porque a superficie lateral que faz parte de c, he quadrupla da base do prisma circumscrito a que pertence, ou tem altura dupla do apothema da base.

710. De todos os cylindros rectos do mesmo volume, o que tem menor superficie, ou da mesma superficie, o que tem maior volume he aquelle cuja superficie curva he quadrupla de huma de suas bases.

Porque, sendo x o raio da base, ella será πx^2, e como pela ultima proposição, a altura deve ser $y=2x$, será a superficie curva $=2\pi x y=4\pi x^2$.

711. As superficies curvas de duas pyramides conicas rectas são proporcionaes aos volumes, quando a perpendicular tirada do centro da base sobre hum dos seus lados he a mesma em cada huma.

Sejão v, V as duas pyramides; s, S as superficies curvas respectivas; r, R os raios das bases; a, A as alturas; l, L os lados; e p a perpendicular tirada do centro da base sobre o lado, e a mesma em ambas as pyramides. Será $p\,l=r\,a$, e $p\,L=R\,A$; logo

$$s:S::\pi r l:\pi R L::\frac{\pi r^2 a}{p}:\frac{\pi R^2 A}{p}$$

$$::\frac{\pi r^2 a}{3}:\frac{\pi R^2 A}{3}::v:V.$$

Fig. 153. **712.** São proporcionaes aos volumes as superficies totaes das pyramides conicas rectas, quando a perpendicular CD sobre o lado UT, abaixada de hum ponto C da altura UA, he a mesma nas duas pyramides, sendo $CD=CA$.

Deve observar-se que póde sempre determinar-se $CD=CA$, porque tomando $TD=AT$, e levantando CD perpendicular a UT, será $CD=CA$.

Sejão agora s, S as superficies totaes; $p=CD$; e o mais como se suppoz na proposição antecedente. Teremos nas duas pyramides $p\,l=(a-p)\,r$; $p\,L=(A-p)\,R$; logo

$$s:S::\pi r l+\pi r^2:\pi R L+\pi R^2::\pi\left(\frac{a-p}{p}r^2+r^2\right)$$

$$:\pi\left(\frac{A-p}{p}R^2+R^2\right)::\frac{\pi r^2 a}{3}:\frac{\pi R^2 A}{3}::v:V.$$

713. Chamamos a CD, ou CA *catheto da pyramide conica recta.*

714. As superficies ou os volumes das pyramides conicas rectas, que têem o mesmo catheto, são directamente como os quadrados das alturas, e inversamente como as differenças das alturas e o dobro do catheto.

Pelo § 712, estas superficies ou volumes são proporcionaes a $\overline{AT}^2 \times AU$, isto he, variando esta expressão para outra designada por $(\overline{AT}^2 \times V)$; e sendo V, (V) as pyramides correspondentes; s, (S) as suas superficies, temos

$$V:(V)::S:(S)::\overline{AT}^2 \times AU:(\overline{AT}^2 \times AU).$$

Mas $\overline{AT}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{AU}^2 : \overline{UD}^2 = \overline{UC}^2 - \overline{CD}^2$; logo, por ser CD constante, $AT \times AU$ é proporcional a $\frac{\overline{AU}^3}{\overline{UC}^2 - \overline{CD}^2}$, isto he, proporcional a $\frac{\overline{AU}^3}{(AU - CD)^2 - \overline{CD}^2}$, ou a $\frac{\overline{AU}^2}{AU - 2CA}$.

715. Nas mesmas hypotheses, a menor pyramide conica he aquella cuja altura he quadrupla do catheto.

A demonstração he a mesma do § 429.

716. Nas mesmas hypotheses, a superficie da pyramide conica he tambem minima.

717. E a distancia de C ao vertice he tripla do catheto.

718. E o lado da pyramide he triplo do raio da base.

719. Das pyramides conicas rectas com superficies iguaes, têem maior catheto aquella cujo lado he triplo do raio da base.

Porque se o seu catheto fosse igual ao de qualquer das outras pyramides, a sua superficie seria menor, contra a hypothese. Se este catheto fosse menor, a sua superficie seria ainda menor, porque tudo diminuiria, immediatamente a altura, e depois o lado e o raio; e a superficie se tornaria menor, por depender d'estes dois ultimos elementos.

720. Das pyramides conicas rectas iguaes, têem maior catheto aquella cujo lado he triplo do raio da base.

A demonstração he como a antecedente, *mutatis mutandis*.

721. A superficie S da pyramide conica recta he composta da superficie curva s descrita por UT, e do circulo descrito por AT, na revolução sobre o eixo AU. Assim he

$$S = s + \pi \overline{AT}^2.$$

Mas he o volume

$$V = \frac{1}{3} s \times AE;$$

logo

$$\frac{S \times AE}{3} = V + \frac{V \times AE}{AU}.$$

Logo se $UT = 3AT$, isto he,

$$AE = \frac{4}{3} CD, \text{ e } AU = 4CD,$$

teremos

$$S \times CD = 3V.$$

Assim, sendo S constante, V augmenta com CD; e sendo V constante, S diminue quando CD augmenta.

722. Nas hypotheses do § 719, o volume da pyramide conica he pois maior.

723. E a superficie menor.

724. A esphera he maior do que o polyedro de igual superficie.

Está demonstrado, que o polyedro maximo, entre os de igual superficie, deve ter centro de faces, ou deve ser circumscriptivel a huma esphera.

Assim pondo este centro do polyedro no da esphera proposta, a sua superficie cortará a da esphera; porque aliás ou seria maior se involvesse a da esphera, ou menor se fosse envolvida, contra a hypothese. Logo o seu catheto he menor do que o raio da esphera, e por consequencia o seu volume tambem menor.

725. A esphera tem menor superficie do que o polyedro igual.

Dos polyedros iguaes, o que tem menor superficie têem centro de faces; logo corta com a sua superficie a da esphera igual, e o seu catheto he menor que o raio da esphera; logo he preciso que o outro factor do volume seja maior, isto he, que a superficie do polyedro seja maior que a da esphera.

LIVRO 8.º

Applicação do algorithmo dos senos á geometria espherica

726. Achar a relação entre os tres lados e hum angulo do triangulo espherico.

1.º caso. Seja $A\,B\,C$ o triangulo espherico, e primeiramente sejão os lados $A\,B$, $A\,C$ cada hum $< 90°$. Seja D o centro da esphera. Tirem-se as tangentes $A\,E$, $A\,F$ dos arcos $A\,B$, $A\,C$, e as suas secantes $D\,E$, $D\,F$; e a recta $E\,F$. Fig. 245.

Será o angulo $E\,A\,F$ formado pelas duas tangentes, a medida do diedro formado pelos planos dos lados, ou igual ao angulo $B\,A\,C$ do triangulo espherico, e cada hum dos lados a medida respectiva dos angulos rectilineos que teem o vertice D.

Mas temos

$$\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 - 2\,A\,E \times A\,F \cos B\,A\,C,$$

e tambem

$$\overline{EF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 - 2\,D\,E \times D\,F \cos B\,C,$$

sendo 1 o raio da esphera. Tirando a primeira equação da segunda, teremos

$$1 + A\,E \times A\,F \cos B\,A\,C - D\,E \times D\,F \cos B\,C = 0;$$

logo

$$1+\frac{\operatorname{sen} AB}{\cos AB}\times\frac{\operatorname{sen} AC}{\cos AC}\cos BAC$$

$$=\frac{1}{\cos AB}\times\frac{1}{\cos AC}\cos BC,$$

ou

$$\cos BC=\cos AB.\cos AC$$

$$+\operatorname{sen} AB.\operatorname{sen} AC.\cos BAC.$$

Fig. 246. 2.° caso. Se for cada hum dos lados AB, $AC>90°$, então o triangulo subsupplementario BCD estará no primeiro caso, e teremos

$$\cos BC=\cos BD\cos CD+\operatorname{sen} BD.,$$

$$\operatorname{sen} CD.\cos D.$$

$$=(-\cos AB)(-\cos AC)+\operatorname{sen} AB.\operatorname{sen} AC.\cos A,$$

$$=\cos AB.\cos AC+\operatorname{sen} AB.\operatorname{sen} AC.\cos A.$$

3.° caso. Se for $AB>90°$, e $AC<90°$; então no subsupplementario AEC, será $AE<90°$, e logo teremos

$$\cos EC=\cos AE.\cos AC+$$

$$\operatorname{sen} AE.\operatorname{sen} AC.\cos EAC=-\cos BC.$$

$$=(-\cos AB)\cos AC+$$

$$\operatorname{sen} AB.\operatorname{sen} AC(-\cos BAC);$$

logo

$$\cos BC=\cos AB.\cos AC+$$

$$\operatorname{sen} AB.\operatorname{sen} AC.\cos BAC.$$

4.° caso. Se for $AC=90°$, e $AB>90°$; tome-se AF

$=90^\circ$, e tire-se o arco CF. Será CF a medida de BAC, e $BFC=90^\circ$.

Assim, se for $CF \gtrless 90^\circ$, teremos no triangulo CBF.

$$\cos CB = \cos BF . \cos CF = \operatorname{sen} AB . \cos BAC;$$

e a esta ultima formula se reduz

$$\cos CB = \cos AB . \cos AC$$

$$+ \operatorname{sen.} AB . \cos . BAC . \operatorname{sen.} AC.$$

E sendo $CF=90^\circ$, ou $BAC=90^\circ$, será tambem $CB=90^\circ$; o que não contraría a mesma formula, porque a reduz a $0=0$.

5.° caso. Se for $AC=90^\circ$, e $AB<90^\circ$; então no subsupplementario CBD, a mesma primeira formula he verdadeira, e logo tambem o será no triangulo proposto.

6.° caso. Se for cada hum $=90^\circ$; então a formula se reduz a

$$\cos BC = \cos BAC,$$

como he com effeito.

Chamando pois A, B, C aos angulos, e a, b, c aos lados respectivamente oppostos, teremos sempre no triangulo espherico.

$$(1) \ldots \cos c = \cos a . \cos b + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b . \cos C;$$

e mais duas formulas similhantes.

727. Achar a relação entre os tres angulos, e hum lado do triangulo espherico.

Sejão A', B', C' os angulos, e a', b', c' os lados oppostos do triangulo supplementario do proposto, respectivos aos lados e aos angulos do proposto; teremos

$$\cos c' = \cos a'.\cos b' + \operatorname{sen} a'.\operatorname{sen} b'.\cos C',$$

isto he,

$$\cos(180° - C) = \cos(180° - A)\cos(180° - B)$$

$$+ \operatorname{sen}(180° - A)\operatorname{sen}(180° - B)\cos(180° - c);$$

ou

$$-\cos C = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B \cos c,$$

ou

$$(2)\ \ldots\ldots \cos, C = \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\cos.c - \cos.A.\cos.B;$$

e mais duas formulas similhantes.

728. Achar a relação entre dois lados e os seus angulos oppostos no triangulo espherico.

Da formula (1) tira-se

$$\cos.^2 C = \frac{\cos^2 c + \cos^2 a.\cos^2 b - 2\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b.};$$

logo

$$\operatorname{sen}^2 C = 1 - \cos^2 C$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a.\cos^2 b + 2\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b) - \cos^2 c - \cos^2 a.\cos^2 b}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b.}$$

$$+ \frac{2\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b.};$$

logo

$$\operatorname{sen}^2 C =$$

$$\frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c} \operatorname{sen}^2 c = N.\operatorname{sen}^2 c;$$

da mesma maneira se acha

$$\operatorname{sen}^2 A = N.\operatorname{sen}^2 a,$$

por ser N huma funcção symetrica de a, b, c, ou que fica invariavel, em qualquer permutação que se faça entre estas quantidades; logo teremos

$$(3) \ldots\ldots \operatorname{sen} C . \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} c;$$

e mais duas formulas similhantes. Isto he, nos triangulos esphericos, os senos dos lados são proporcionaes aos senos dos angulos oppostos.

729. Achar a relação entre dois lados, e dois angulos não oppostos ambos, no triangulo espherico.

Eliminando cos C por meio das equações (1), (2), resulta

$$\cos c = \cos a . \cos b + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B . \cos . c$$

$$- \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b . \cos . A . \cos B;$$

e expulsando d'esta sen b, por meio da equação,

$$\operatorname{sen} a . \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} A,$$

similhante á equação (3), teremos

$$\cos c = \cos a . \cos b + \operatorname{sen}^2 a . \operatorname{sen}^2 B \cos c$$

$$- \operatorname{sen}^2 a . \operatorname{sen} B . \cot A . \cos B,$$

da qual eliminando cos b, por meio de

$$\cos b = \cos a . \cos c + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos B,$$

similhante á equação (1), virá

$$\cos c = \cos^2 a . \cos c + \cos a . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos B$$

$$+ \operatorname{sen}^2 a . \operatorname{sen}^2 B . \cos c - \operatorname{sen}^2 a . \operatorname{sen} B . \cot A . \cos B,$$

que, por ser

$$\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a, \text{ e } \operatorname{sen}^2 B = 1 - \cos^2 B,$$

se reduz emfim a

$$(4) \ldots\ldots \operatorname{sen} c . \cot a = \cos c . \cos B + \operatorname{sen} B . \cot A;$$

com mais cinco formulas similhantes, que são sujeitas á regra, que — de quatro partes consecutivas do triangulo espherico, o producto dos consenos de duas medias, he igual ao producto do seno do lado medio pela contangente do lado extremo, menos o producto do seno do angulo medio pela cotangente do angulo extremo.

730. Achar no triangulo espherico rectangulo a relação entre tres partes, não comprehendido o angulo recto.

Se nas equações (1), (2), (3), e em

$$\operatorname{sen} b . \cot c = \cos b . \cos A + \operatorname{sen} A . \cot C,$$

similhante á equação (4); e em

$$\cos A = \operatorname{sen} B . \operatorname{sen} C . \cos a - \cos B . \cos C,$$

similhante á equação (2), se fizer em todas $C = 90°$, teremos

$$(5) \ldots\ldots \cos c = \cos a . \cos b.$$

$$(6) \ldots\ldots \cos c = \cot A . \cot B.$$

$$(7) \ldots\ldots \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} c.$$

$$(8) \ldots\ldots \cos A = \operatorname{tang} \mathrm{b} . \cot c.$$

$$(9) \ldots\ldots \cos A = \operatorname{sen} B . \cos a.$$

A equação (5) he a relação entre a hypothenusa e os dois lados; a do n.º (7) a relação entre a hypothenusa, um lado, e o angulo opposto; a do n.º (8) a relação entre a hypothenusa, um lado, e o angulo não opposto; a do n.º (6) a relação entre a hypothenusa, e os dois angulos obliquos; e a do n.º (9) a relação entre hum lado, e os angulos obliquos. Estas são todas as relações possiveis.

Considerando no triangulo espherico $A\ B\ C$ rectangulo em C, em vez dos lados do angulo recto, os seus complementos $90°-a$, $90°-b$, e depois o angulo A, a hypothenusa c, o angulo B, por esta mesma ordem; e chamando media a huma qualquer d'estas cinco partes, a respeito de duas que lhe estejão mais proximas e chamadas conjunctas; e a respeito de duas mais distantes e chamadas separadas; facilmente se vê, que se satisfaz ás ultimas cinco equações pelas duas regras seguintes: Fig. 247.

(10)...... coseno da media = producto

dos senos das separadas,

(11)...... coseno da media = producto

das cotangentes das conjunctas;

Estas duas regras bastão para a resolução completa do triangulo espherico rectangulo, quando alem do angulo recto são dadas duas das suas partes; e a solução só se torna ambigua, quando a parte procurada se acha por meio do seu seno, como acontece sempre no caso das equações (7) e (9), quando se procura B.

O caso mesmo de ser A recto, não lhe tira a indeterminação, mas sim a augmenta, fazendo-a passar de dual a infinita; porque no triangulo birectangulo, e por consequencia birectilatero, o terceiro angulo B, ou o terceiro lado b póde ser o que se quizer.

731. Resolver os triangulos esphericos obliquangulos, por meio das taboas dos logarithmos dos senos.

1.º caso. Sendo dados os tres lados, achar qualquer dos angulos.

A formula (1) dá

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

$$=1-2\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}C=2\cos^2\tfrac{1}{2}C-1;$$

logo

$$(12)\ldots\ldots\operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}C=\frac{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b+\cos a.\cos b-\cos c}{2\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

$$=\frac{\cos(a-b)-\cos c}{2\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\frac{a-b+c}{2}.\operatorname{sen}\frac{-a+b+c}{2}}{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)}{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}.$$

Logo tambem

$$(13)\ldots\ldots\cos^2\tfrac{1}{2}C=\frac{\cos c+\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b-\cos a.\cos b}{2\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

$$=\frac{\cos c-\cos(a+b)}{2\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}{\operatorname{sen} a.\operatorname{sen} b}.$$

Esta ultima solução he a mais conveniente, quando $\frac{1}{2}C$ he muito pequeno; e he sempre a mais expedita, para evitar huma subtracção.

Da divisão da equação (12) pela equação (13), resulta

$$(14)\ldots\operatorname{tang.}^2\tfrac{1}{2}C=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}$$

menos expedita ainda do que a do n.º (12), mas sem ter outro inconveniente.

2.º caso. Com os tres angulos, achar um lado qualquer.

A formula (2) dá

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A.\cos B}{\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B} = 1 - 2\,\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,c$$

$$= 2\cos^2\tfrac{1}{2}\,c - 1;$$

logo

$$(15)\ldots\ldots\ \text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,c = \frac{\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B - \cos A.\cos B - \cos C}{2\,\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}$$

$$= \frac{-\cos(A+B) - \cos C}{2\,\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}$$

$$= \frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right)}{\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B}.$$

O numerador d'esta fracção he positivo, porque

$$\frac{A+B+C}{2} > 90^\circ, \text{e} < 3 \times 90^\circ;$$

logo $\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)$ he negativo; e tambem porque sendo $180^\circ - A > B - C$, temos $90^\circ > \frac{A+B-C}{2}$, e por consequencia $\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right)$, ou $\cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right)$ he positivo.

Com igual facilidade se deduz

$$(16)\ldots\cos^2\tfrac{1}{2}\,c = \frac{\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - A\right)\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right)}{\text{sen}\,A.\,\text{sen}\,B};$$

e dividindo a equação (15) pela (16), teremos

$$(17)\ldots\text{tang}^2\,\tfrac{1}{2}\,c = \frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right)}{\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - A\right)\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right)}.$$

A formula (15) poderia deduzir-se da equação (13), por meio do triangulo supplementario; e da mesma maneira a equação (16) da equação (12). A formula (14) sendo applicada ao supplementario, dá para o proposto

$$(18)\ldots \cot^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - A\right) \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right)}{\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right) \cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)},$$

reciproca da equação (17).

3.° caso. Com dois lados b, c, e o angulo comprehendido A; querendo conhecer o angulo C, abaixe-se de B o arco BD perpendicular sobre o lado b; e chame-se aos segmentos AD, DC respectivamente x, y. Então no triangulo rectangulo ADB, será A medio, a respeito dos dois conjunctos c, e $90° - x$. Logo

Fig. 248.

$$\cos A = \cot c . \cot (90° - x) = \cot c \operatorname{tang} x;$$

o que faz conhecer x, e por consequencia $y = b - x$. Agora nos dois triangulos rectangulos, temos $90° - x$ media entre as conjunctas A, e $90° - BD$: e $90° - y$ media entre os conjunctas C, e $90° - BD$;

logo

$$\operatorname{sen} x : \operatorname{sen} y :: \cot A . \operatorname{tang} BD : \cot C . \operatorname{tang} BD :: \cot A : \cot C,$$

analogia que faz conhecer C.

Com os mesmos dados, querendo achar a directamente; temos nos mesmos triangulos rectangulos, c media entre as separadas $90° - x$, $90° - BD$; e a media entre as separadas $90° - y$, $90° - BD$;

logo

$$\cos c : \cos a :: \cos x . \cos BD : \cos y . \cos BD :: \cos x : \cos y,$$

analogia que faz conhecer a.

Sendo mais conveniente, depois de ter achado C póde procurar-se a pela equação (3); ou depois de ter achado a procurar C pela mesma equação (3).

Com os mesmos dados para achar B directamente, a construcção he similhante, abaixando o arco perpendicular de C sobre c, isto he, deve sempre attender-se a que haja, em hum dos triangulos rectangulos, duas das partes dadas, e hum dos segmentos da terceira. Advirta-se que se o arco perpendicular não póde encontrar b, então se deve escolher, ou suppor aquelle dos arcos perpendiculares, que está mais proximo de C, na continuação de b no sentido de C. N'este caso, será o segmento $x > b$, e o segmento $y = x - b$, em vez de $b - x$. Mas então o angulo que se acha logo he o supplemento de C; e teremos

$$\operatorname{sen} x : \operatorname{sen}(x - b) :: \cot A : \cot(180° - C),$$

ou

$$\operatorname{sen} x : -\operatorname{sen}(b - x) :: \cot A : -\cot C,$$

ou

$$\operatorname{sen} x : \operatorname{sen}(b - x) :: \cot A : \cot C;$$

por consequencia ainda se deve subtrahir x de b, e o signal e valor que se obtiver para cot C, farão conhecer C.

Quanto ao angulo A, quer seja agudo ou obtuso, faça-se sempre uso do arco perpendicular que cahe dentro d'elle.

4.° caso. Com dois angulos, e o lado adjacente.

Para resolver o triangulo, recorra-se ao seu supplementario, no qual se conhecem dois lados, e o angulo comprehendido; e faça-se a resolução d'este como no caso precedente, e por consequencia se resolve o proposto com os supplementos das partes achadas no supplementario.

5.° caso. Com dois lados, e o angulo opposto a hum d'elles. Para achar o outro angulo opposto, serve a analogia (3), quando o problema he determinado, porque sendo este angulo procurado por meio do seno, he susceptivel de dois valores, cada hum $< 180°$, e que por isso podem ser angulos do triangulo espherico, e para excluir hum, he preciso que isso se consiga por alguma das condições (632), (635).

Para achar ou o terceiro angulo, ou o terceiro lado, abaixe-se do vertice commum aos dois lados communs, o arco perpendicular ao terceiro lado, que fique dentro do angulo dado. Então hum dos triangulos rectangulos formados d'esta maneira, tem duas partes dadas alem do angulo recto; logo póde achar-se ou o angulo obliquo adjacente ao lado conhecido, n'este triangulo rectangulo, ou o lado opposto a este mesmo angulo obliquo; e comparando depois os dois triangulos rectangulos, á imitação do que se fez no 3.º caso, *mutatis mutandis*, obter-se-ha a resolução pedida.

6.º caso. Com dois angulos, e o lado opposto a hum d'elles.

Acha-se o outro lado opposto pela analogia (3), quando o problema he determinado.

Para achar as outras duas partes, ou se recorre ao triangulo supplementario, ou se abaixa do extremo do lado dado, o arco perpendicular sobre o lado adjacente aos angulos dados, e comparam-se depois os triangulos rectangulos.

Fig. 249. 732. ABC he hum triangulo esphérico trirectilatero, e por conseguinte trirectangulo. Os arcos DA, DB, DC, assim como EA, EB, EC são dados, e pede-se o arco DE; isto he, são dados os angulos que duas rectas, partindo da intersecção de tres rectas perpendiculares entre si, fazem com estas, e pede-se o angulo das duas rectas. Temos

$$\cos ABD = \frac{\cos AD}{\operatorname{sen} BD};$$

e

$$\cos CBE = \frac{\cos CE}{\operatorname{sen} BE};$$

e

$$\cos DBE = \operatorname{sen}(ABD + CBE)$$

$$= \operatorname{sen} ABD . \cos CBE + \cos ABD . \operatorname{sen} CBE;$$

logo

$$\cos DE = \cos BD . \cos BE$$

$$+ \operatorname{sen} BD . \operatorname{sen} BE . \operatorname{sen} ABD . \cos CBE$$

$$+\operatorname{sen} BD.\operatorname{sen} BE.\cos ABD.\operatorname{sen} CBE$$

$$=\cos BD.\cos BE+\operatorname{sen} BD.\cos CE.\operatorname{sen} ABD$$

$$+\operatorname{sen} BE.\cos AD.\operatorname{sen} CBE$$

$$=\cos BD.\cos BE+\cos CE.\operatorname{sen} AD.\cos DAC$$

$$+\cos AD.\operatorname{sen} CE.\cos ECA$$

$$=\cos BD.\cos BE+\cos CE.\cos DC$$

$$+\cos AD.\cos AE.$$

Se for $DE=0$, teremos

$$1=\cos^2 BD+\cos^2 DC+\cos^2 AD,$$

como já se achou (§ 459).

733. No tetraedro $ABCD$ trirectangulo em A, querendo achar o angulo diedro $ACBD$, que a face hypothenusa DBC faz com qualquer das outras ABC: temos o triedro $CDAB$, cujo diedro $DCAB$ he recto. Logo o triangulo espherico rectangulo, que lhe corresponde dá Fig. 250.

$$\operatorname{sen} BCA=\operatorname{tang} ACD.\cot ACBD.$$

Similhantemente, teremos

$$\operatorname{sen} CBA=\cos BCA=\operatorname{tang}. DBA.\cot ACBD.$$

Ponhamos $AC=x$; $AB=y$; $AD=z$; será

$$\operatorname{sen} BCA=\frac{z}{x}\cot ACBD,$$

$$\cos BCA=\frac{z}{y}\cot ACBD.$$

NN

Logo

$$\operatorname{sen}^2 BCA + \cos^2 BCA = 1 =$$

$$\left(\frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2}\right) \cot^2 ACBD;$$

$$\operatorname{tang}^2 ACBD = \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2};$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 ACBD}{\cos^2 ACBD} + 1 = \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + 1;$$

$$\cos^2 ACBD = \frac{1}{\frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + 1}.$$

734. Calcular os diedros dos polyedros regulares.

Como n'estes polyedros, os angulos solidos são regulares, Fig. 122. podemos representar qualquer d'elles pelo angulo solido A; e porque os extremos B, C, D, E, *etc.*, das arestas iguaes de A, estão todos em hum plano, segue-se que este plano faz com as faces angulos triedros, de que os mesmos extremos são os vertices, e ao mesmo tempo os de hum polygono regular $BCDE$, etc. Assim para achar hum dos diedros $CABE$ do polyedro regular, ponha-se B no centro da esphera, cujo raio seja 1, e teremos

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} CBE}{\operatorname{sen}(ABC - \frac{1}{2} CBE)\operatorname{sen}(ABC + \frac{1}{2} CBE)}.$$

Seja n o numero de lados de huma das faces do polyedro regular, e m o numero das faces de hum dos seus angulos solidos, ou o numero de lados do polygono regular $BCDE$, *etc.*

Teremos

$$(19) \ldots\ldots \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{m-2}{m}.90^\circ\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{m-2}{m}.90^\circ\right)\operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{m-2}{m}.90^\circ\right)}.$$

No tetraedro, temos $n=3$, $m=3$;

logo

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE + 1 = \sec^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \tfrac{3}{2},$$

ou

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \tfrac{2}{3} = \frac{1+\cos CABE}{2};$$

logo

$$\cos CABE = \tfrac{1}{3} = \cos 70^\circ \,»\, 32', \text{ valor approximado.}$$

No hexaedro, temos $n=4$, $m=3$;

logo

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 30^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ . \operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\cos 60^\circ}{2}} = 1;$$

logo

$$CABE = 90^\circ$$

No octaedro, temos $n=3$, $m=4$;

logo

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 45^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ . \operatorname{sen} 75^\circ} = 2;$$

$$\sec^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = 3;\ \cos^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \tfrac{1}{3} = \frac{1+\cos CABE}{2};$$

logo

$$\cos CABE = -\tfrac{1}{3} = \cos 109^\circ \,»\, 28', \text{ valor aproximado.}$$

No dodecaedro, temos $n=5$, $m=3$;

logo

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 30^\circ}{\operatorname{sen} 6^\circ . \operatorname{sen} 66^\circ} = \frac{1}{2(\cos 60^\circ - \cos 72^\circ)}$$

$$= \frac{1}{1-2\cos 72^\circ} = \frac{1}{1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4};$$

logo

$$\operatorname{tang} CABE = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2} CABE}{1-\tan^2\frac{1}{2} CABE} = \frac{1+\sqrt{5}}{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})} = -2$$

$$= \operatorname{tang} 116^\circ \,»\, 34', \text{ valor aproximado.}$$

No icosaedro, temos $n=3$, $m=5$;

logo

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 54^\circ}{\operatorname{sen} 6^\circ . \operatorname{sen} 66^\circ} = \frac{4\operatorname{sen}^2 54^\circ}{1-2\cos 72^\circ}$$

$$= \frac{2+2\cos 72^\circ}{1-2\cos 72^\circ} = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{(1-\sqrt{5})^2};$$

$$\sec^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{12}{(1-\sqrt{5})^2};$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{12};$$

$$\cos CABE = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\, CABE - 1 = -\tfrac{1}{3}\sqrt{5};$$

$$\operatorname{sen}^2 CABE = 1 - \tfrac{5}{9} = \tfrac{4}{9};$$

logo

$$\operatorname{sen} CABE = \tfrac{2}{3} = \operatorname{sen} 138^\circ \,»\, 12', \text{ valor aproximado.}$$

735 Achar o catheto de cada hum dos polyedros regulares, ou, o que he o mesmo, o raio da esphera inscrita.

Porque as faces dos polyedros regulares são polygonos regulares identicos em cada hum, segue-se que o apothema a (HI) de qualquer d'estes polygonos, e a metade (IE) Fig. 254. de huma das arestas do polyedro, são os lados do angulo recto de hum triangulo rectangulo, no qual o angulo opposto a a (IEH) he metade de um dos angulos do polygono; logo teremos $a = \frac{1}{2}$ tang $\frac{n-2}{n} \cdot 90°$. Porque o catheto c (FH) e a são lados do angulo recto d'outro triangulo rectangulo, no qual o angulo $a\,c$ (HIF) he metade do diedro D $(DAEB)$, teremos tambem

$$c = a.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2} D = \tfrac{1}{2}\ \text{tang}\ \frac{n-2}{n}.\ 90°.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2} D$$

$$= \tfrac{1}{2} \cot \frac{180°}{n}.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2} D.$$

736. Achar o raio dos vertices nos polyedros regulares, ou o que he o mesmo, o raio da esphera circumscrita a cada hum d'elles.

Seja r (HE) a hypothenusa do triangulo, de que $\frac{l}{2}$, c são lados; será

$$r = \frac{\frac{1}{2} l}{\cos \frac{n-2}{n} 90°} = \frac{\frac{1}{2} l}{\text{sen}\ \frac{180°}{n}};$$

e o raio pedido, (FE) ou

$$R = \sqrt{c^2 + r^2} = \frac{\frac{1}{2} l}{\text{sen}\ \frac{180°}{n}} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{180°}{n}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2} D.}$$

737. No tetraedro temos

$$c = \frac{l}{2} \sqrt{\tfrac{1}{2} \cot 60°};\ r = \frac{\frac{1}{2} l}{\text{sen}\ 60°};$$

logo

$$R^2 = c^2 + \frac{2\ c^2}{\cos^2 60°} = 9\ c^2;\ \text{ou}\ R = 3\ c.$$

No hexaedro,

$$c = \frac{l}{2} \cot 45^\circ,$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} l}{\operatorname{sen} 45^\circ};$$

logo

$$R^2 = c^2 + \frac{\frac{1}{4} l^2}{\operatorname{sen}^2 45^\circ} = 3\, c^2$$

No octaedro,

$$c' = \frac{l'}{2} \sqrt{2} \cot 60^\circ,$$

$$r' = \frac{l'}{\operatorname{sen} 60^\circ};$$

logo

$$R'^2 = c'^2 + \frac{\frac{1}{4} l'^2}{\operatorname{sen}^2 60^\circ} = 3\, c'^2.$$

De sorte que se o hexaedro, e o octaedro teem as mesmos cathetos c, c', teem tambem os mesmos raios de vertices; e reciprocamente.

No dodecaedro,

$$c = \frac{\frac{1}{2} l}{2} (1 + \sqrt{5}) \cot 36^\circ,$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} l}{\operatorname{sen} 36^\circ};$$

logo

$$R^2 = c^2 + \frac{\frac{1}{4} l^2}{\operatorname{sen}^2 36^\circ} = c^2 + \frac{4\, c^2}{(1 + \sqrt{5})^2 \cos^2 36^\circ}$$

$$= c^2 + \frac{4^3\, c^2}{(1 + \sqrt{5})^4}.$$

No icosaedro,

$$c' = \frac{l'}{2} \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cot 60^\circ,$$

$$r' = \frac{\frac{1}{2} l'}{\text{sen } 60^\circ};$$

logo

$$R'^2 = c'^2 + \frac{\frac{1}{4} l'^2}{\text{sen}^2 60^\circ} = c'^2 + \frac{(1-\sqrt{5})^2 c'^2}{(1+\sqrt{5})^2 \cos^2 60^\circ}$$

$$= c'^2 + \frac{4(1-\sqrt{5})^2 c'^2}{(1+\sqrt{5})^2} = c'^2 + \frac{4^3 c'^2}{(1+\sqrt{5})^4}.$$

De sorte que se o dodecaedro, e o icosaedro teem os mesmos cathetos c, c', teem tambem os mesmos raios de vertices; e reciprocamente.

738. Sendo dadas as arestas de hum tetraedro qualquer, calcular a sua altura sobre huma das bases.

Supponhamos AE esta altura. Seja CE a projecção de huma aresta CA sobre a mesma base. Fig. 255.

Com as arestas dadas se calculão os angulos das faces, ou se medem. Com os angulos das faces se calculão os diedros do tetraedro, ou se medem. Assim no triedro $CAED$, temos o diedro $ACED$ recto, o diedro $ECDA$ conhecido, e tambem o angulo ACD. Logo, pondo C no centro da esphera do raio 1, corresponderá a este triedro hum triangulo espherico rectangulo, no qual são dados a hypothenusa c, e hum angulo obliquo A. Logo, querendo conhecer a, teremos sen $a =$ sen A. sen c. O arco he a medida do angulo ACE; assim teremos, no triangulo rectangulo ACE, a altura pedida

$$AE = AC \text{ sen } a.$$

739. Sendo dadas as arestas de um tetraedro qualquer, achar o seu catheto, ou raio da esphera inscrita.

Calculem-se todas as faces do tetraedro; chame-se f á sua somma, b á base, h á altura do tetraedro, e r ao catheto procurado.

O centro das faces, ou origem dos cathetos he o vertice commum de quatro tetraedros, cujas bases são as faces do proposto, e que tomadas juntas compõem o proposto; logo teremos

$$\frac{1}{3}\int r = \frac{1}{3}\, b\, h;$$

logo r ficará conhecido.

740. Com os mesmos dados, calcular o raio R do tetraedro, ou o raio da esphera circumscrita.

Fig. 128. Pelo theorema (§ 332,) sendo AB, AC, AD as metades das arestas do mesmo nome do tetraedro actual (Fig. 255), o ponto de concurso E dos tres planos perpendiculares sobre ellas nos pontos B, C, D, determina a distancia R entre E e A.

Este tetraedro supposto $ABCD$ he similhante ao proposto, porque tem todas as arestas semiduplas das arestas do ultimo; logo são conhecidas estas, os seus angulos, e os diedros dos seus planos; e tambem no triedro $EFGH$, são conhecidos os diedros e os angulos, por serem os supplementos respectivos das partes do triedro $ABCD$.

Chamando pois α ao lado BC, e β ao angulo ABC, não descritos, e δ ao angulo CFB supplemento de BAC; e por ser ABF recto, teremos

$$\text{sen}\,\delta : \cos\beta :: \alpha : CF = \frac{\alpha \cos\beta}{\text{sen}\,\delta}.$$

Similhantemente, acharemos

$$CG = \frac{CD \cos ADC}{\text{sen}\, CAD} = \frac{\alpha' \cos\beta'}{\text{sen}\,\delta'}.$$

No triangulo supposto FCG, no qual o angulo FCG ou Δ he a medida do diedro $BACD$ do tetraedro, temos

$$FG = \sqrt{\overline{FC}^2 + \overline{CG}^2 - 2\,\overline{FC} \times \overline{CG}.\cos\Delta};$$

e por consequencia póde-se achar o angulo CFG, pela analogia

$$FG : CG :: \text{sen}\,\Delta : \text{sen}\, CFG = \frac{CG\, \text{sen}\,\Delta}{FG}.$$

No triangulo GFE he GFE complemento de CFG, e GEF supplemento de FCG; logo

$$\text{sen }\Delta : \cos CFG :: FG : EG = \frac{FG \cos CFG}{\text{sen }\Delta}.$$

No triangulo rectangulo CGE, temos

$$\overline{CE}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{EG}^2;$$

e no triangulo rectangulo ACE, temos

$$R^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2$$

$$= \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{EG}^2$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{\alpha'^2 \cos^2 \mathfrak{G}'}{\text{sen}^2 \delta'} + \frac{FG^2 \cos^2 CFG}{\text{sen}^2 \Delta}$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{\alpha'^2 \cos^2 \mathfrak{G}'}{\text{sen}^2 \delta'} + \frac{\overline{FG}^2 \left(1 - \frac{CG^2 \text{ sen}^2 \Delta}{FG^2}\right)}{\text{sen}^2 \Delta}$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{\alpha'^2 \cos^2 \mathfrak{G}'}{\text{sen}^2 \delta'} + \frac{\overline{FG}^2}{\text{sen}^2 \Delta} - \overline{CG}^2$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{\overline{FC}^2 + \overline{CG}^2 - 2\, FC \times CG . \cos \Delta}{\text{sen}^2 \Delta}$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{\frac{\alpha^2 \cos^2 \mathfrak{G}}{\text{sen}^2 \delta} + \frac{\alpha'^2 \cos^2 \mathfrak{G}'}{\text{sen}^2 \delta'} - \frac{2\, \alpha\, \alpha' \cos \mathfrak{G} \cos \mathfrak{G}'}{\text{sen }\delta \text{ sen }\delta'} \cos \Delta}{\text{sen}^2 \Delta}$$

Passando agora ao tetraedro proposto, teremos Fig. 255.

$$R^2 = \frac{1}{4}\overline{AC}^2 + \frac{\frac{\overline{BC}^2 . \cos^2 ABC}{4 \text{ sen}^2 BAC} + \frac{\overline{CD}^2 . \cos^2 ADC}{4 \text{ sen}^2 CAD}}{\text{sen}^2 BACD}$$

$$- \frac{\frac{2\, BC \times CD \cos ABC \cos ADC}{4 \text{ sen } BAC \text{ sen } CAD} \cos BACD}{\text{sen}^2 BACD}$$

741. Achar os diedros dos polyedros semiregulares.

Nos sete primeiros, poisque os seus angulos solidos são triedros com os angulos conhecidos de polygonos regulares, o calculo dos diedros se reduz ao dos angulos dos triangulos esphericos, cujos lados são dados.

E he de advertir, que no 3.°, 4.°, 5.°, 6.° e 7.° não he preciso calcular os diedros formados pelos polygonos inscritos, na construcção que se fez d'estes polyedros semiregulares; porque estes diedros são os mesmos que os dos polyedros regulares, de que provém os mencionados polyedros semiregulares. Tambem, como em cada hum d'estes mesmos polyedros semiregulares entrão só duas especies de polygonos, basta calcular hum só dos outros dois diedros do triedro.

Nos polyedros semiregulares 1.° e 2.°, o diedro formado pelo polygono inscrito e hum dos quadrados introduzidos na sua construcção, he supplemento de hum diedro, que he (§ 348) elle mesmo metade do supplemento do diedro do solido regular de que deriva; porque a intersecção dos planos dos ditos polygonos inscritos, he parallela aos lados dos mesmos polygonos, que estavão antes unidos ao solido regular; e he ao mesmo tempo a aresta de hum diedro igual ao solido regular primitivo.

Nos polyedros semiregulares 10.° e 11.°, cujos angulos solidos são tetraedros symetricos, com todos os diedros iguaes; o triedro formado em hum dos vertices pela aresta do solido regular primitivo, e por dois lados dos polygonos inscritos, tem dois angulos conhecidos, que são os formados por esta aresta e os ditos lados, alem do diedro compreendido, que he o mesmo do solido regular. Assim, póde achar-se hum dos outros diedros, cujo supplemento será o diedro do solido semiregular.

Nos polyedros semiregulares 8.° e 9.°, cujos angulos solidos são tetraedros, conhecemos os seus angulos, e dois diedros em cada hum, que são formados por huma face primitiva e os quadrados introduzidos, e cada hum dos quaes he supplemento da metade do supplemento do diedro do solido regular, de que deriva. Assim, a questão se reduz á resolução de hum quadrilatero espherico, no qual são dados dois angulos e os quatro lados; o que póde obter-se, dividindo o quadrilatero em dois triangulos esphericos de huma maneira qualquer, pois teremos sempre, em hum dos triangulos, hum angulo conhecido, com os lados que o comprehendem.

Nos polyedros semiregulares 12.° e 13.°, cujos angulos solidos são pentaedros, conhecemos os angulos, e dois diedros em cada hum, formados por huma face primitiva e os triangulos introduzidos; e estes diedros são cada hum supplemento do angulo de hum triangulo formado pelas continuações dos raios e do apothema de duas faces primitivas, e pelo diedro do solido regular de que deriva. Assim a questão se reduz á resolução de hum pentagono espherico, de que são dados os lados e dois angulos, e que póde obter-se dividindo-o em tres triangulos esphericos, de maneira que hum d'estes triangulos tenha hum dos angulos dados.

742. Achar o catheto das faces do mesmo nome dos polyedros semiregulares.

Pelo centro do solido regular primitivo, de que o semiregular deriva, tire-se hum plano perpendicular sobre hum lado das faces do mesmo nome. A intersecção d'este plano com a superficie do solido semiregular, será hum polygono de que os lados serão as alturas das faces do solido, e os angulos serão cada hum a medida de algum dos seus diedros; por consequencia pódem achar-se os cathetos das faces, que são, n'este polygono, os apothemas dos lados iguaes.

743. Achar o raio, nos polyedros semiregulares.

Com a projecção do raio sobre huma das faces isto he o raio d'ella, e com o catheto d'esta face, como lados de hum triangulo rectangulo, busque-se a hypothenusa, que será o raio pedido.

744. Com taes triangulos póde tambem achar-se a inclinação do raio do polyedro semiregular sobre qualquer das faces, e tambem o angulo que elle faz com o catheto.

Maximos e minimos dos polygonos esphericos

745. Dos triangulos da mesma base e perimetro, o isosceles he o maior, e tem maior o angulo opposto á base.

Fig. 251. Porque os dois triangulos ABC, ADC sobre a mesma base têem igual perimetro, e o primeiro he isosceles; será $ACD > DAC$; logo $AD > DC$; logo $AD > AB > DC$, e $AE > EC$.

Digo que he $DE < BE$. Porque, se he possivel, seja $EF = ED$. Tome-se $EG = EC$, e tire-se FG.

Os triangulos DEC, EFG terão as partes iguaes entre si; logo $FG = DC$. Mas

$$AG + GE + ED + DC = AB + BE + EC,$$

isto he,

$$AG + GE + EB + FB + DC \text{ (ou } FG)$$

$$= AB + BE + EC;$$

logo tirando d'esta equação

$$GE + EB = EB + EC,$$

resulta

$$AG + FG + FB = AB:$$

absurdo, porque toda a linha da superficie da esphera, terminada em A e B, he $>$ arco AB.

Similhantemente, se prova que não he $ED = EB$, porque chegariamos ao absurdo

$$AG + GB = AB.$$

Logo o triangulo

$$DEC < ABE,$$

e logo, juntando a ambos AEC, resulta

$$\text{triang. } ADC < ABC.$$

O angulo B do triangulo isosceles será $> D$, se fôr

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} B > \operatorname{sen}^2 D,$$

ou se, sendo p o semiperimetro, fôr

$$\frac{\operatorname{sen}^2 (p - AB)}{\operatorname{sen}^2 AB} > \frac{\operatorname{sen} (p - AD) \operatorname{sen} (p - DC)}{\operatorname{sen} AD \operatorname{sen} DC};$$

ou se fôr

$$\operatorname{sen}^2 \left(p - \frac{AD + DC}{2}\right) \operatorname{sen} AD \operatorname{sen} DC >$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{AD + DC}{2} \operatorname{sen} (p - AD) \operatorname{sen} (p - DC);$$

ou se fôr

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} AC (\cos (AD - DC) - \cos (AD + DC))$$

$$> \operatorname{sen}^2 \frac{AD + DC}{2} (\cos (AD - DC) - \cos AC);$$

ou se fôr

$$(1 - \cos AC) (\cos (AD - DC) - \cos (AD + DC))$$

$$> (1 - \cos (AD + DC)) (\cos (AD - DC) - \cos AC);$$

ou se fôr

$$\cos AC (1 - \cos (AD - DC))$$

$$> \cos (AD + DC) (1 - \cos (AD - DC));$$

ou se fôr

$$\cos AC > \cos (AD + DC),$$

como he com effeito, por ser

$$AC < AD + DC,$$

e

$$AC + AD + DC < 360^\circ.$$

746. Com dois lados dados, cuja somma igual seja $<$ 180°, o maior triangulo espherico que se póde fazer, será aquelle, em que o angulo compreendido pelos lados dados, he igual á somma dos outros dois.

Fig. 252. Se me dizem que existe outro triangulo ABC maior, com os mesmos lados AB, AC, taes que $AB + AC <$ 180°; então tiro de A para o meio D, do terceiro lado o arco AD.

Fig. 253. Agora digo que sobre a mesma base AB, e com o perimetro $ABE = ABD$, póde formar-se o triangulo isosceles $ABE > ABD$; e similhantemente o triangulo isosceles $ACE > ACD$, sobre a base AC e com o mesmo perimetro; e que o lado AE póde ser commum aos dois triangulos isosceles, porque AE he a semisomma de AD e BD, e ao mesmo tempo de AD e CD.

O angulo $BECA$, composto dos dois BEA, CEA, é $> 180^\circ$, porque

$$BEA > BDA,\ CEA > CDA,$$

e

$$BDA + CDA = 180^\circ.$$

Logo $ABEC$ he hum quadrilatero espherico maior que o triangulo proposto ABC (Fig. 252).

Fig. 252. O arco AD he $< 90^\circ$, porque produzindo-o da quantidade igual DF, e tirando o arco CF, far-se-ha o triangulo DCF igual a ADB; e se AD fosse $\geqq 90^\circ$, sería

$$AF \geqq 180;$$

logo

$$\text{o angulo } FCAD \geqq 180°,$$

isto he

$$B + ACB \geqq 180°,$$

contra a hypothese. Logo o

$$\text{arco } BE = EC < 90:$$

logo o

$$\text{arco } BC < 180°;$$ Fig. 253.

logo o triangulo

$$ABC > \text{quadrilatero } ABEC > ABC \text{ (Fig. 252)}.$$

Logo sómente ABC he hum maximo, quando

$$BD = DC = AD;$$ Fig. 252.

e n'este caso,

$$\text{o angulo } B = BAD,$$

e

$$ACB = CAD,$$

ou

$$BAC = B + ACB.$$

747. Com as mesmas condições, o menor triangulo gibboso que se póde formar, he aquelle, em que o angulo comprehendido pelos lados dados he igual á somma dos outros dois; o que se vê, reflectindo que hum triangulo ordinario e o gibboso, que tem dois lados communs entre si, formão hum hemispherio, e contemplando tambem a relação entre seus angulos.

748. De todos os polygonos esphericos descritos em hum triangulo trirectangulo, e formados pelos lados dados, e hum ultimo á vontade; o maior he aquelle que tem os vertices na circumferencia de hum circulo menor da esphera, cujo polo esteja sobre o lado arbitrario.

A demonstração póde deduzir-se da ultima proposição, assim como da proposição do § 205 se deduziu a do § 208; porque, pela primeira condição, os arcos dois a dois da proposição e demonstração formão sempre huma somma $< 180°$.

749. De todos os polygonos esphericos descritos na zona de hum segmento, cuja circumferencia da base toque os tres lados do triangulo trirectangulo, e formados por lados todos dados, o maior he aquelle que tem todos os vertices sobre a circumferencia de hum circulo menor.

Para a demonstração, vamos imitar o que se fez no § 209, e empregar a mesma fig. 81, concebendo que as rectas são agora arcos de circulos maximos.

Fig. 81. Seja pois $ABCDEFG$ hum polygono espherico, com todos os vertices na circumferencia determinada por tres de entre si; e $abcdefg$ outro, com os mesmos lados; e supponhão-se ambos descritos na dita zona ou em zonas iguaes a ella.

Digo que o primeiro polygono he maior do que o segundo, se este não tiver todos os seus vertices sobre huma circumferencia.

Pelo polo H do circulo determinado por E, A, B e por hum E dos vertices, tire-se o

$$\text{arco } EI = 2EH;$$

será I ponto da circumferencia, sobre a qual estão os vertices, isto he, do circulo EAB. Tirem-se os arcos AI, BI, que estarão dentro do triangulo trirectangulo por estarem dentro da zona.

Sobre $ab = AB$, faça-se o triangulo abi identico com ABI, e similhantemente posto, e tire-se o arco ei.

No caso mais desfavoravel, do triangulo ABI ter os seus vertices na circumferencia da base da zona, elle fica ainda dentro d'esta zona; e por consequencia o triangulo abi, que lhe he identico, assim como a zona em que está o polygono respectivo he identica com a primeira, estará tambem n'esta segunda zona.

O polygono $EFGAI$, que tem todos os vertices na circumferencia de hum circulo menor cujo polo he H, he maior que o polygono $efgai$ que tem com o primeiro todos os lados iguaes, á excepção de EI, ei; ou he seu igual, se este ultimo tambem tem todos os vertices na mesma circumferencia de circulo menor. Pela mesma rasão he

$$EDCBI > edcbi;$$

porque não se póde suppor que o ultimo tenha os vertices sobre a mesma circumferencia, que o outro $efgai$, porque então o polygono inteiro $abcdefg$ teria todos os vertices sobre huma circumferencia contra a hypothese.

Por consequencia he o polygono

$$EFGAIBCD > efgaibcd;$$

e tirando, de huma e outra parte, os triangulos iguaes ABI, abi, conclue-se que o polygono $ABCDEFG$ he maior do que $abcdefg$.

O mesmo tem logar, se o polo fôr situado fóra ou dentro do perimetro, ou se o arco tirado por elle encontrar outro vertice.

750. Dos polygonos esphericos da ultima especie, e isoperimetros, o regular he o maior.

Para que seja maximo, he preciso que tenha os lados iguaes; e se do polo do circulo, sobre o qual elle deve ter os vertices, se tirarem arcos para todos os lados, formar-se-hão triangulos isosceles todos identicos; e por consequencia serão iguaes os angulos do polygono maximo.

751. Seja EI hum circulo maximo (o equador), AD outro (o horisonte), AC hum arco de circulo maximo perpendicular ao horisonte (arco do vertical), e seja AC dado (a depressão do astro no principio ou no fim do crepusculo). Tire-se por C hum arco de circulo maximo, que faça com EF hum angulo $CFE = DGE$ (altura do equador e constante), o qual por isso se chama horisonte similhante Fig. 256.

ao primeiro; produza-se este até encontrar o primeiro em D, e o parallelo a EF em B. Tirem-se ainda os dois arcos de circulos maximos AH, BI perpendiculares sobre EF (arcos de declinação (D)). Pede-se o menor valor de HI, e a que declinação corresponde.

Os triangulos AGH, BFI rectangulos em H, I são identicos, porque em ambos entrão do mesmo modo os angulos em G, F iguaes, e os lados oppostos AH, BI; logo $GH = FI$; logo $GF = HI$. A questão se reduz pois a saber quando será GF hum minimo.

No triangulo DGF, he DGF supplemento de GDF, e DG de DF; logo

$$\cos GF = \frac{\cos D - \cos^2 DGE}{\operatorname{sen}^2 DGE}.$$

O triangulo DAC, rectangulo em A, dá

$$\cot D = \frac{\operatorname{sen} AD}{\operatorname{tang} AC}.$$

D'estas duas formulas se conclue que GF será menor quando $\cos GF$ fôr maior, logo tambem $\cos D$, logo D menor, logo $\cos D$ maior, e logo em fim he preciso que $\operatorname{sen} AD$ seja o maior, ou que seja $AD = 90°$. Logo os angulos em C são rectos. Será $CD = 90°$, e AC cortará GF em algum ponto K.

Os triangulos rectangulos AKG, CKF são identicos, por serem equiangulos entre si, como he facil de ver.

Logo

$$AK = CK$$

$$= \text{metade da depressão } (d),$$

e

$$GK = FK$$

$$= \text{metade da duração do crepusculo menor } (c):$$

mas temos

$$\text{sen}\, A\,K = \text{sen}\, K\,G\, \text{sen}\, A\,G\,K,$$

e

$$A\,G\,K = \text{altura do equador}$$

$$= \text{complemento da latitude } (L);$$

logo

$$\text{sen}\, \tfrac{1}{2}\, d = \text{sen}\, \tfrac{1}{2}\, c \cos L,$$

ou

$$\text{sen}\, \tfrac{1}{2}\, c = \frac{\text{sen}\, \frac{1}{2}\, d}{\cos L},$$

o que fará conhecer o crepusculo c menor.

Tambem

$$\text{sen}\, A\,G \text{ (a amplitude } a)$$

$$= \text{tang}\, A\,K \cot A\,G\,K,$$

ou

$$\text{sen}\, a = \text{tang}\, \tfrac{1}{2}\, d\, \text{tang}\, L.$$

No triangulo $A\,G\,H$, rectangulo em H, temos

$$\text{sen}\, A\,H = \text{sen}\, A\,G\, \text{sen}\, A\,G\,H,$$

isto he, fazendo a substituição de sen $A\,G$, temos

$$\text{sen}\, D = \text{tang}\, \tfrac{1}{2}\, d\, \text{sen}\, L;$$

e depois procurão-se os dias que correspondem a esta declinação.

LIVRO 9.º

Geometria de duas coordenadas

752. Se quaesquer rectas parallelas tiverem todas hum dos seus extremos sobre huma mesma recta, chamada base, a linha que fôr lugar dos outros extremos, chamar-se-ha *linha proposta e plana* por estar no plano das parallelas; as parallelas chamar-se-hão *ordenadas;* as partes da base comprehendidas entre hum dos seus pontos e as ordenadas, chamar-se-hão *abscissas;* este ponto *origem das abscissas;* e cada ordenada e a sua abscissa *coordenadas;* e a equação por meio da qual, dada qualquer das coordenadas se acha a outra, se chamará *equação da linha proposta.*

753. Nas indagações seguintes a unidade ou medida linear será representada por 1, e por consequencia todas as linhas serão representadas pelos numeros que resultão da sua comparação com a medida linear.

754. Representem x e y as coordenadas de huma linha proposta, e a, b, c, etc., numeros dados positivos ou negativos ou cifras; se a equação d'esta linha fôr comprehendida n'esta formula

$$\begin{aligned} 0 = a + bx &+ dx^2 + gx^3 + etc. \\ &+ cy + exy + hx^2y \\ &+ fy^2 + ixy^2 \\ &+ ly^3 \end{aligned}$$

sendo finito o numero dos termos, a linha se chama *algebrica*, e da *primeira ordem*, ou *da segunda*, ou *da terceira*, etc., conforme fôr o grau da equação a respeito de x e y; e as quantidades determinadas a, b, c, etc. chamão-se *parametros*.

755. A origem das abscissas, quando está na linha proposta, chama-se *vertice d'essa linha*, e tambem *da base*.

756. *Corda* he a recta cujos extremos são pontos da linha proposta.

757. A base chama-se *eixo*, quando he perpendicular ás ordenadas.

758. *Diametro* he a recta que corta pelo meio todas as cordas parallelas entre si; e *grandeza do diametro* he a parte d'elle que tambem he corda.

759. *Eixo principal* he a recta que he eixo e diametro.

760. *Vertice principal* he o vertice da linha proposta e eixo principal.

761. O ponto que he origem de abscissas cortadas em hum diametro, de sorte que a quaesquer duas iguaes e contrarias correspondão quatro ordenadas iguaes, duas de huma parte do diametro e duas da outra; chama-se *centro d'esse diametro*.

762. Toda a linha que não he recta, nem d'ella se compõe he *curva*.

763. O ponto onde todos os diametros concorrem chama-se *centro da curva*.

764. Diz-se que dois diametros são *conjugados* hum ao outro, quando cada hum corta pelo meio as cordas parallelas ao outro.

765. Huma recta que não encontra huma curva, mas que se approxima d'ella quanto se quizer, chama-se *asymptota*.

766. *Tangente* de huma curva he a recta que a não encontra senão em hum ponto, na parte d'essa curva que he toda convexa, e da mesma parte a seu respeito; e *grandeza da tangente* he a parte d'ella entre o ponto do contacto e o eixo.

767. *Normal* he a perpendicular á tangente no ponto do contacto: e *grandeza da normal* he a parte d'ella entre o ponto do contacto e o eixo.

768. *Subtangente* he a parte do eixo entre a tangente e a ordenada.

769. *Subnormal* he a parte do eixo que está entre a ordenada e a normal.

770. O triangulo formado pela tangente, subtangente e ordenada he similhante ao que he formado pela normal, subnormal e ordenada; e d'esta similhança se conclue que a ordenada he meia proporcional entre a subtangente e a subnormal.

771. A equação algebrica não pertence a linha alguma proposta se x ou y tiver hum só valor. Pois seja AP o valor unico de x, a linha proposta fará com a posição da ordenada PM huma só recta: seja pois BM a linha proposta. Em BM póde tomar-se hum numero de pontos maior do que qualquer numero que se proponha, e como todas as rectas que tiverem esses pontos por extremos e por extremo commum P, são ordenadas differentes, segue-se que a linha proposta tem hum numero de ordenadas differentes maior do que he o numero de valores diversos de y, que a equação do § 754 póde dar quando he algebrica. Fig. 257.

Se a ordenada tiver hum só valor, será a linha proposta parallela á base. Seja pois BM' essa linha, e pois em BM' se póde tomar hum numero de pontos maior do que qualquer numero que se proponha, se d'esses pontos se tirarem ordenadas, todas cortarão na base abscissas differentes, e será por consequencia o numero das abscissas differentes, maior que o numero de valores diversos de x, que a equação póde dar.

772. Huma linha proposta não muda de ordem por se mudar o systema das suas coordenadas.

Sejão AP e PM as coordenadas x e y de huma linha proposta, e sejão Bp, e pM outras coordenadas u e z: tire-se AB, e tirem-se BD, pF parallelas a AP, e BC, pE parallelas a PM. Nos triangulos BEp, pMF he dada Fig. 258.

a posição dos lados ou os angulos, e logo dadas as razões dos lados, e no triangulo $A\,B\,C$ tambem he dado o lado $A\,B$, e logo os outros lados. Seja pois $A\,C = a$, $B\,C = a'$, $B\,E = b \times B\,p = b\,u$, $E\,p = b'\,u$, $p\,F = c\,z$, $M\,F = c'\,z$; será

$$x = a + b\,u + c\,z,$$

e

$$y = a' + b'\,u + c'\,z.$$

Substituindo estes valores de x, e y na equação da linha proposta, resulta huma equação em u, e z que não póde ser de grau superior á primeira; nem de grau inferior, pois para isto seria preciso que ou b, e c fossem cifras, o que faria x de hum só valor, o que não póde ser (§ 771) ou que b' e c' fossem ambas cifras, o que tambem não póde ser.

773. Nenhuma linha póde ser cortada por huma recta em hum numero de pontos maior do que he o numero da sua ordem.

Fig. 257. Sejão por exemplo, B, D, M tres pontos de huma recta e de huma linha da segunda ordem, tomando essa recta para posição de ordenada (§ 772) a linha proposta não muda de ordem, e serão $P\,B$, $P\,D$, e $P\,M$ tres ordenadas diversas correspondentes á mesma abscissa $A\,P$, o que a equação da segunda ordem não póde dar.

774. Abscissas negativas collocão-se para a parte opposta á das positivas.

Fig. 259. A linha $M\,M'$ seja determinada pelas abscissas $A\,P$, $A\,P'$, etc., chamadas z, e ordenadas $P\,M$, $P'\,M'$, etc., chamadas y; mudando a origem das abscissas para o ponto B sobre a mesma base, e chamando x a qualquer das novas abscissas; será $B\,P'$, ou

$$x = A\,P' - A\,B = z - A\,B,$$

e

$$B\,P = A\,B - A\,P = A\,B - z = -\,x;$$

logo as abscissas negativas $-\,x$ estão para a parte $B\,P$ contraria a $B\,P'$.

775. Ordenadas negativas collocão-se para a parte opposta á das ordenadas positivas.

A linha $M' M m m'$ seja determinada pelas abscissas $A P$, $A P'$, etc., e ordenadas $P M$, $P m$ correspondentes a $A P$, e $P' M'$, $P' m'$ correspondentes a $A P'$; chame-se z a qualquer das ordenadas; a recta ap, parallela a $A P$, córte Mm, completem-se os parallelogrammos Ap, Ap', etc., e serão Pp, $P'p'$, etc., rectas iguaes a. Querendo passar a referir a linha proposta ás coordenadas ap, pM, nenhuma mudança ha no valor das abscissas, mas a nova ordenada pM, ou y he Fig. 260.

$$PM - Pp = z - a,$$

e pm he

$$a - z = -y:$$

logo a ordenada negativa $-y$ está em huma posição pm contraria á de pM.

776. Achar a linha da primeira ordem, ou a linha a que pertence a equação

$$y + ax + b = 0.$$

Seja $A B$ base, e A origem das abscissas $A P$. Na origem das abscissas; ou onde he $x = o$, he $y = -b$, tome-se $A C = -b$, e será C ponto da linha buscada; aonde a linha buscada encontra a base he $y = o$, e logo Fig. 261.

$$x = -\frac{b}{a}:$$

tome-se

$$A B = \frac{-b}{a},$$

e será B ponto da linha buscada; digo que essa linha he a recta $C B$, ou que $P M$ parallela a $A C$ he ordenada y; pois será

$$BP : PM :: AB : AC,$$

isto é

$$\frac{-b}{a} - x : y :: -\frac{b}{a} : -b,$$

proporção que dá

$$\frac{b^2}{a}+bx=-\frac{b}{a}y,$$

e logo

$$y+ax+b=0.$$

777. Dois pontos de huma linha recta bastão para determina-la, isto he, bastão para determinar os parametros da equação da primeira ordem, com a qual se podem achar outros pontos da recta.

Sejão C e B os pontos dados, e tome-se o ponto A que não esteja em direitura com elles; faça-se $b=-AC$, e $a=\frac{AC}{AB}$, e será

$$y+ax+b=0$$

a equação por meio da qual, dada $x=AP$, se achará PM parallela a AC, e $=-a\times AP-b=y$, e com effeito

$$-\frac{AC}{AB}\times AP+AC=PM \text{ dá } \frac{AC(AB-AP)}{AB}=PM.$$

e logo

$$AC:AB::PM:PB$$

como deve ser

778. Só a linha da primeira ordem he recta, isto he, a recta não póde ter hum systema de coordenadas de ordem que não seja a primeira, pois se fosse possivel te-lo, como tambem pelo numero precedente tem systemas de coordenadas da primeira ordem, seguir-se-hia o ter systemas de coordenadas de differentes ordens, o que não póde ser (§ 772).

779. Particularisar as curvas a que pertence a equação geral da segunda ordem

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=0.$$

Fig. 262. I. Sejão M, M', m, m', etc., pontos da curva determinados pelas abscissas (x), AP, AP', etc., e ordenadas (y),

PM, $P'M'$, Pm, $P'm'$, etc. A equação simplifica-se fazendo

$$y+\frac{ax+c}{2}=u,$$

e fica d'esta fórma

$$u^2+fx^2+gx+h=0,$$

sendo

$$f=b-\frac{a^2}{4};$$

$$g=d-\frac{ac}{2};$$

$$h=e-\frac{c^2}{4}.$$

Na figura faça-se na continuação de AP, $AC=\frac{c}{a}$, e tire-se AB parallela ás ordenadas $e=\frac{c}{2}$, e será

$$PQ=\frac{ax+c}{2},$$

e

$$QM=u.$$

Tome-se BQ para abscissa t; será no triangulo CAB determinado tudo pelo serem AC, AB e o angulo CAB; a CB chame-se i, e será

$$CA:CP::CB:CQ,$$

logo

$$x=\frac{ct}{ai};$$

e substituindo este valor de x na equação em u e x esta ficará da fórma

$$u^2+lt^2+mt+h=0,$$

sendo

$$l = \frac{fc^2}{a^2 i^2},$$

e

$$m = \frac{gc}{ai},$$

e pertence ás coordenadas BQ e QM.

II. A recta BQ he diametro, pois he

$$Qm = Pm - PQ$$

$$= -y - \frac{ax+c}{2} = -u,$$

isto he Qm igual e contraria a QM (§ 775), logo a corda Mm, e as outras cordas parallelas ficão divididas em duas partes iguaes pela recta BQ (§ 758).

A equação

$$u^2 + lt^2 + mt + h = 0$$

tambem mostra o mesmo, isto he, que a qualquer valor de t correspondem dois de u iguaes e contrarios. Para fazer desapparecer o ultimo termo, ponha-se

$$t = s + A,$$

e logo

$$A^2 + \frac{m}{l} A + \frac{h}{l} = 0,$$

e logo

$$A = -\frac{1}{2l}(m \pm \sqrt{m^2 - 4hl}).$$

III. Substituindo $s - \frac{1}{2l}(m + \sqrt{m^2 - 4hl^2})$ em lugar de t na equação ultima, esta transforma-se em

$$u^2 + ls^2 - ns = 0,$$

sendo

$$n=\sqrt{m^2-4hl},$$

e na figura tome-se

$$BD=-\frac{1}{2l}(m+\sqrt{m^2-4hl}),$$

e será DQ a nova abscissa s.

IV. A equação

$$u^2+ls^2-ns=0$$

transforma-se em

$$u^2+lr^2+p=0,$$

fazendo

$$s-\frac{n}{2l}=r,$$

e sendo

$$p=-\frac{n^2}{4l};$$

e na figura, fazendo $DE=\frac{n}{2l}$, será EQ a nova abscissa r.

V. Se na primeira equação d'este numero fôr $b=1$, e na figura fôr Q recto, será tambem ABC recto, e logo

$$\overline{CA}^2=\overline{CB}^2+\overline{AB}^2,$$

isto he

$$\frac{c^2}{a^2}=i^2+\frac{c^2}{4},$$

logo

$$\frac{fc^2}{a^2i^2}=\frac{\left(1-\frac{a^2}{4}\right)c^2}{a^2\left(\frac{c^2}{a^2}-\frac{c^2}{4}\right)}=1,$$

logo então a equação pertencente ás coordenadas EQ, e QM he

$$u^2+r^2-\frac{n^2}{4}=0;$$

mas he tambem

$$\overline{EM}^2 = \overline{EQ}^2 + \overline{QM}^2 = u^2 + r^2,$$

$$\overline{EM'}^2 = \overline{EQ'}^2 + \overline{Q'M'}^2 = u' + r^2, \text{ etc.};$$

logo

$$EM = \frac{n}{2} = EM' = \text{etc.};$$

isto he, os pontos da curva distão todos igualmente do ponto E: esta curva he pois o circulo.

VI. Para que os dois valores $\pm\sqrt{-ls^2+ns}$ de u sejão possiveis, he preciso que seja $-ls^2+ns$ quantidade positiva, isto he, que seja

$$-ls^2+ns>0,$$

ou $ns>ls^2$, o que não póde ser para l positivo, sendo s negativo, nem sendo s positivo para $s>\frac{n}{l}$ porque seria $ls>n$, e $ls^2>ns$; logo quando l he positivo a curva não tem ordenadas que correspondão a s negativo, e a $s>\frac{n}{l}$; mas ella encontra a base quando he $s=0$, e $s=\frac{n}{l}$, e a todos os valores intermedios de s correspondem ordenadas positivas e negativas: logo esta curva encerra espaço: a linha da segunda ordem que encerra espaço, sem ser circulo, chama-se ellipse.

VII. Seja l negativo, será $ns>ls^2$, sendo s positivo, mas sendo s negativo será $\frac{ns}{l}$ positivo, e para ser $>s^2$ he preciso que seja $\frac{n}{l}, >s$ ou que sem attenção aos signaes seja $s>\frac{n}{l}$; logo a curva tem dois ramos de toda a extensão correspondentes ás abscissas positivas, e outros dois ramos de toda a extensão correspondentes ás abscissas negativas maiores do que $\frac{n}{l}$ sem attenção aos signaes: a esta linha da segunda ordem, que tem quatro ramos de toda a extensão chama-se *hyperbola*.

VIII. Se l fôr cifra, he preciso para ns ser positivo que s o seja; e então a qualquer valor positivo de s correspondem duas ordenadas iguaes, huma de huma parte do diametro e outra da outra parte, e a curva tem dois ramos só de toda a extensão, e chama-se *parabola*.

780. Por ser

$$l = \frac{fc^2}{a^2 i^2} = \frac{\left(b - \frac{a^2}{4}\right)c^2}{a^2 i^2},$$

segue-se que a curva será ellipse, se na equação geral fôr $b - \frac{a^2}{4}$ quantidade positiva; hyperbola se esta mesma quantidade fôr negativa; e parabola se fôr cifra. De ser $c = 0$, não se segue $l = 0$, por ser então tambem $i = 0$.

781. O centro de qualquer diametro de circulo, ellipse ou hyperbola, he ponto commum a todos os diametros, e por consequencia centro da curva.

Seja AP diametro, e A o seu centro; a equação pertencente ás coordenadas AP, PM será da fórma Fig. 258.

$$y^2 + dx^2 + e = 0,$$

(§ 779. IV.), n'esta substituindo os valores de y e x em u e z, teremos

$$z^2 + \frac{2(b'c' + dbc)}{c'^2 + dc^2} uz + \frac{b'^2 + db^2}{c'^2 + dc^2} u^2$$

$$+ \ldots + \frac{2(a'c' + dac)}{etc.} . z + \frac{2(a'b' + dab)}{etc.} u$$

$$+ \frac{a'^2 + da^2 + e}{etc.} = 0,$$

a qual mostra que para Bp ser diametro, ou para que a u correspondão ordenadas z iguaes e contrarias, he preciso que seja

$$\frac{2(b'c'+dbc)}{c'^2+dc^2}.u+\frac{2(a'c'+dac)}{c'^2+dc^2}=0,$$

o que não póde ser para qualquer valor de u sem serem separadamente

$$b'c'+dbc=0,$$

e

$$a'c'+dac=0:$$

estas duas equações dão

$$ab'-ba'=0,$$

logo

$$a:a'::b:b'::bu:b'u,$$

isto he

$$AC:CB::BE:Ep;$$

logo Bp se fôr diametro ha de passar pelo ponto A.

782. Se a equação pertencente a AP e PM fôr a da parabola

$$y^2-nx=0,$$

as mesmas substituições dão

$$z^2+\frac{2b'c'}{c'^2}.uz+\frac{b'^2}{c'^2}.u^2$$

$$+\frac{2a'c'-nc}{c'^2}.z+\frac{2a'b'-nb}{etc.}.u+\frac{a'^2-na}{etc.}=0,$$

a qual mostra que para Bp ser diametro, he preciso que seja

$$\frac{2b'c'}{c'^2}.u+\frac{2a'c'-nc}{c'^2}=0,$$

e logo separadamente $\frac{2b'c'}{c'^2}=0$, ou $b'=0$, ou $pE=0$, ou Bp parallela a AP, isto he na parabola todos os diametros são parallelos.

783. Represente AB qualquer diametro não eixo de ellipse ou hyperbola; seja Fig. 263.

$$0 = \alpha + \delta x^2 + y^2$$

a equação; e AB seja x, e BC seja y. Córte-se $AD = 1$: levante-se DE perpendicular a AD, e tire-se a recta AEF: tire-se CF perpendicular a AF e CG perpendicular a ABG.

Seja

$$CG = \frac{1}{m} y,$$

e

$$BG = \frac{n}{m} y;$$

chame-se s a AE, t a DE, u a AF, e z a CF. A similhança dos triangulos ADE, AGH, CFH dá

$$CH = sz;\ FH = tz;$$

será logo

$$AH = u - tz,$$

e por tanto

$$AG = \frac{1}{s} u - \frac{t}{s} z,$$

e

$$GH = \frac{t}{s} u - \frac{t^2}{s} z;$$

d'onde

$$CG = \frac{t}{s} u - \frac{t^2}{s} z + sz$$

$$= \frac{t}{s} u + \frac{s^2 - t^2}{s} z$$

$$= \frac{t}{s} u + \frac{1}{s} z;$$

e logo

$$y = \frac{mt}{s} u + \frac{m}{s} z.$$

e

$$B\,G = \frac{n\,t}{s}\,u + \frac{n}{s}\,z;$$

e logo

$$x = \frac{1}{s}\,u - \frac{t}{s}\,z - \frac{n\,t}{s}\,u - \frac{n}{s}\,z$$

$$= \frac{1 - n\,t}{s}\,u - \frac{n + t}{s}\,z.$$

Escrevendo pois estes valores de x e y em u e z na equação

$$0 = \alpha + \delta\,x^2 + y^2,$$

teremos

$$0 = \alpha + \frac{1}{s^2}\,(\delta - 2\,n\,\delta\,t + n^2\,\delta\,t^2 + m^2\,t^2)\,u^2$$

$$- \frac{2}{s^2}\,n\,\delta + \delta\,t - n^2\,\delta\,t - n\,\delta\,t^2 - m^2\,t)\,u\,z$$

$$+ \frac{1}{s^2}\,(n^2\,\delta + 2\,n\,\delta\,t + \delta\,t^2 + m^2)\,z^2,$$

que determinando t de sorte que seja

$$n\,\delta + \delta\,t - n^2\,\delta\,t - n\,\delta\,t^2 - m^2\,t = 0,$$

e dividindo por

$$\frac{1}{s^2}\,(n^2\,\delta + 2\,n\,\delta\,t + \delta\,t^2 + m^2),$$

terá a mesma fórma que

$$0 = \alpha + \delta\,x^2 + y^2,$$

e por consequencia será $A\,F$ diametro; e logo tambem eixo principal, por formarem as coordenadas u e z angulo recto. A determinação de t sempre he possivel, porque a equação

$$n\,\delta + \delta\,t - n^2\,\delta\,t - n\,\delta\,t^2 - m^2\,t = 0$$

dá

$$t = \frac{\delta - n^2 \delta - m^2}{2 n \delta} \pm \sqrt{\left(\frac{(\delta - n^2 \delta - m^2)^2}{4 n^2 \delta^2} + 1\right)}$$

valores sempre possiveis.

Seja DE hum, e DI o outro, e tire-se AI. Será

$$DE \times DI = 1,$$

e logo

$$DE : DA :: DA : DI:$$

e como os angulos em D são rectos, serão similhantes os triangulos ADE, ADI; e logo

$$\text{o angulo } DAI = AED,$$

e logo recto o angulo EAI. Logo o centro de qualquer diametro de ellipse ou hyperbola, he tambem centro de dois eixos principaes que n'elle se cortão perpendicularmente.

784. Todas as rectas que passão pelo centro do circulo, ellipse ou hyperbola, são diametros, excepto duas na hyperbola.

Sejão AP e PM as coordenadas x e y pertencentes ao diametro AP e centro A; a sua equação será d'esta fórma Fig. 264.

$$y^2 + dx^2 + e = 0;$$

tire-se pelo centro a recta Ap, e tire-se Mp. No triangulo APB he dada a posição dos lados; logo será dada a sua relação: mas no triangulo BMp he preciso buscar as razões que fazem pM semi-corda; chame-se u a Ap e, z a pM, e será $AB = ax$, $BP = bx$; e seja $BM = pz$, $Bp = qz$; será

$$u = ax + qz,$$

e logo

$$x = \frac{u - qz}{a}.$$

e

$$y = bx + pz = \frac{b}{a}u + \left(p - \frac{bq}{a}\right)z;$$

estes valores de x e y substituidos em

$$y^2 + dx^2 + e = 0,$$

dão

$$z^2 + \frac{2(abp - (b^2 + d)q)}{(b^2 + d)q^2 + (ap - 2bq)ap}uz \ldots$$

$$+ \frac{b^2 + d}{etc.}.u^2 + \frac{ea^2}{etc.} = 0,$$

a qual mostra que para Ap ser diametro, he preciso que seja

$$abp - (b^2 + d)q = 0,$$

ou que seja

$$q = \frac{abp}{b^2 + d};$$

este valor de q he sempre possivel, excepto quando fôr

$$b^2 + d = 0,$$

e isto só póde acontecer sendo d negativo, ou na hyperbola: os dois valores $\pm\sqrt{-d}$ de b servirão para determinar as duas rectas que não são diametros.

785. A recta que se tira pelo centro parallela ás semi-cordas ordenadas de hum diametro, he diametro conjugado d'aquelle.

Fig. 265. Seja A centro do diametro, $P'P$ e PM ordenada semi-corda correspondente á abscissa AP, e seja a equação $y^2 + dx^2 + e = 0$: tomando $AP' = AP$, será a ordenada $P'M' = PM$, e tirando a corda MM', esta será parallela a $P'P$, e será dividida em partes iguaes pela recta AB tirada pelo centro e parallela ás ordenadas, e o mesmo que se diz d'esta corda se póde dizer de qualquer outra sua parallela; logo AB he diametro conjugado a $P'P$.

786. A grandeza do semidiametro conjugado $A\,C$, he na ellipse a ordenada que passa pelo centro, ou a que corresponde a $x=0$ na equação

$$y^2+dx^2+e=0,$$

e esta ordenada sempre he possivel; pois a equação

$$y^2+dx^2+e=0$$

para pertencer á ellipse, deve ter d positivo: e para que a equação seja então possivel deve ser e negativo, e logo a ordenada

$$y=\sqrt{-e},$$

que passa pelo centro he possivel. O outro semidiametro conjugado $A\,D$ he a abscissa que corresponde a $y=0$, ou ao ponto em que a curva encontra o diametro, e logo he $\sqrt{-\frac{e}{d}}$ tambem possivel.

787. Na hyperbola hum dos diametros encontra a curva e o outro não, por ser d negativo, e logo imaginaria alguma das expressões $\sqrt{-e}$, e $\sqrt{-\frac{e}{d}}$; mas uza-se comtudo, em lugar do semidiametro imaginario em grandeza, da recta que tem a mesma posição, e a grandeza que teria se fosse positiva a expressão que está affectada do radical.

788. A recta que se tirar pelo extremo de hum diametro parallelo ao seu conjugado será tangente. Fig. 266.

Se he possivel a recta $T\,M$ parallela a $A\,D$, semidiametro conjugado de $A\,M$, encontre a curva n'outro ponto B; será $B\,M$ ordenada ao diametro $A\,M$ e parallela ao conjugado $A\,D$, e logo será semicorda, e logo tomando em $B\,M$ produzida

$$M\,M'=B\,M,$$

será M' ponto da curva, logo os tres pontos da curva B, *M, M'* estão em direitura; absurdo (§ 773); logo *TM* he tangente.

789. Achar o eixo principal da parabola.

Fig. 267. Sejão *A P* e *P M* as coordenadas a que pertence a equação

$$y^2-nx=0;$$

tirem-se *A B* parallela a *P M*, e *B D* a *A P*, e *M p C* perpendicular a *A P*; chame-se q a *A B*, u a *B p*, e z a *p M*. No triangulo *M D p* será dada a relação dos lados; seja pois $MD=az$, e $Dp=bz$; será

$$x=u+bz,$$

e

$$y=q+az,$$

que substituidos em

$$y^2-nx=0,$$

dão

$$z^2+\frac{2aq-nb}{a^2}z-\frac{n}{a^2}u+\frac{q^2}{a^2}=0,$$

a qual mostra que para *B p* ser eixo principal he preciso que seja

$$2aq-nb=0, \text{ ou } q=\frac{nb}{2a}.$$

790. Dados cinco pontos de huma linha da segunda ordem determina-la, isto he, achar os parametros da sua equação.

Tomando uma recta para base, e hum dos seus pontos para origem das abscissas, se d'esses cinco pontos se tirarem rectas parallelas para a base, cada huma d'ellas e a sua abscissa serão determinadas e substituidas successivamente a x e y na equação geral

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=0,$$

darão cinco equações, com as quaes se poderão determinar os parametros a, b, c, d, e e definir a curva.

Mas he mais simples assim: sejão A, B, C, D, E os pontos dados; por quatro d'elles tirem-se as rectas AD, BE que se cortem em algum ponto F, pelo quinto ponto C, tire-se CG parallela a BE, que encontrará AD em algum ponto G. Seja A origem das abscissas, AD base, e AFB o angulo das coordenadas, deve em A ser $y=0$, e $x=0$, e logo deve ser $e=0$ na equação. Seja $AF=a'$, $BF=b'$, $AG=c'$, $CG=d'$, $AD=e'$, $EF=f$; substituindo e' a x e o a y, será Fig. 268.

$$be'^2+de'=0,$$

he logo

$$b=-\frac{d}{e'},$$

e logo

$$y^2+axy-\frac{d}{e'}x^2+cy+dx=0,$$

substituindo n'esta equação c' a x, e d a y teremos

$$d'^2+ac'd'-\frac{d}{e'}c'^2+cd'+dc'=0,$$

substituindo a' a x, e b' a y vem

$$b'^2+aa'b'-\frac{d}{e'}a'^2+cb'+da'=0,$$

e substituindo a' a x, e b' a y vem

$$b'^2+aa'b'-\frac{d}{e'}a'^2+cb'+da=0,$$

e substituindo a' a x, e b' a y, vem

$$f^2-aa'f-\frac{d}{e'}a'^2-cf+da'=0,$$

e com estas tres ultimas equações se acharão a, d, c e ficará definida a curva.

791. Para determinar a parabola bastão quatro pontos por haver a condição de ser $a-\frac{b^2}{4}=0$.

792. Para determinar o circulo bastão tres pontos por ser $b=1$, e por serem dados no triangulo ACB (fig. 269)

os angulos CAB e CBA, e logo a razão dos lados CA e AB, isto he a razão de $\frac{c}{a}$ e $\frac{c}{2}$ isto he outra condição entre a e c.

793. Achar a equação do circulo.

Fig. 269. Seja o circulo ABC, ache-se-lhe o centro D; tire-se hum diametro AC, e de qualquer ponto B a perpendicular BE ao diametro; chame-se, x a CE e y a BE, e ao raio r, e tire-se DB: por serem DA, DB, DC iguaes, será BE meia proporcional entre AE e EC, isto he, será

$$y^2 = (2r - x)x = 2rx - x^2.$$

794. A abscissa DE contada do centro chame-se z, e será

$$r^2 = y^2 + z^2$$

outra equação do circulo.

795. Achar huma curva tal, que se de qualquer M dos seus pontos se conduzirem duas rectas para dois pontos fi-
Fig. 270. xos F, e f, a somma d'ellas seja sempre a mesma e igual a $2a$.

Esta curva póde descrever-se fixando os extremos de hum fio flexivel e inextensivel e igual a $2a$ nos pontos F e f, e applicando ao seu seio hum ponteiro, e movendo-o de fórma que se conserve sempre o fio em tensão e no mesmo plano; o ponteiro descreverá esta curva e seja ella AMB.

Para lhe achar a equação, e o nome, divida-se Ff ao meio em C, chame-se c a FC, e será $c < a$; tire-se MP perpendicular a Ff produzida se fôr necessario; seja $CP = z$ e $MP = y$; será

$$\overline{Mf}^2 - \overline{Pf}^2 = \overline{MF}^2 - \overline{PF}^2,$$

d'onde

$$\overline{Mf}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{Pf}^2 - \overline{PF}^2,$$

logo

$$(Mf + MF)(Mf - MF) = (Pf + PF)(Pf - PF),$$

ou

$$2a(Mf - MF) = 2c \times 2z,$$

logo

$$Mf - MF = \frac{2c}{a}.z,$$

donde

$$Mf = \frac{1}{2}(Mf + MF) + \frac{1}{2}(Mf - MF)$$

$$= a + \frac{cz}{a},$$

por tanto

$$y^2 = \left(a + \frac{cz}{a}\right)^2 - (c+z)^2$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{a^2}.z^2 + a^2 - c^2,$$

equação que pertence á ellipse, por ser $\frac{c^2 - a^2}{a^2}$ negativo: C he o centro, $\sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}\right)} = a$ he o semieixo principal dos z, e $\sqrt{a^2 - c^2}$ he o outro semieixo principal, e, chamandolhe b, a equação he d'esta fórma

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - z^2).$$

Os dois pontos F e f chamão-se *focos*, e as duas rectas MF, Mf *raios vectores*.

796. Produzindo hum dos raios vectores Mf, de sorte que seja $MG = MF$, e tirando a recta GF, e depois MT perpendicular a GF, será MT tangente da ellipse.

Se he possivel TM encontre a curva em outro ponto N, e tirem-se NG, NF, Nf: por ser N ponto da perpendicular MT ao meio de GF, será $NF = NG$, e por ser ponto da curva será

$$NF + Nf = 2a = MF + Mf,$$

isto he

$$NG + Nf = MG + Mf = Gf:$$

absurdo; logo MT não encontra outro ponto da curva e será tangente.

797. Os dois triangulos MOG, MOF são identicos por serem rectangulos, MO commum, e $MG = MF$, logo o angulo $OMG = OMF$; mas he tambem $fMN = OMG$, logo os raios vectores formão angulos iguaes com a tangente.

798. Logo a normal divide ao meio o angulo dos raios vectores: seja MI a normal. Os dois triangulos MFI, MfI, por terem iguaes os angulos em M, estão entre si como os productos $MF \times MI$, e $Mf \times MI$, ou como MF e Mf, e por terem o vertice commum M; e as bases em direitura estão entre si como essas bases, FI, fI, logo

$$MF : Mf :: FI : fI,$$

isto he $2a - MF : MF :: 2c - fI : fI$, d'onde se tira $fI = \frac{c.MF}{a}$; mas he

$$Mf = a + \frac{cz}{a};$$

(§ 795) logo

$$fI = c + \frac{c^2 z}{a^2},$$

logo a subnormal

$$PI = fP - fI = c + z - fI$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2}.z = \frac{b^2}{a^2}z;$$

a subtangente

$$PT = \frac{y^2}{PI} = \frac{b^2 - \frac{b^2}{a^2}.z^2}{\frac{b^2}{a^2}.z} = \frac{a^2 - z^2}{z};$$

e

$$CT = PT + PC = \frac{a^2 - z^2}{z} + z = \frac{a^2}{z}.$$

Fig. 271. 799. Seja CN o semidiametro conjugado a CM, será

CN parallela a MT (§ 788); tire-se a ordenada perpendicular NR que será $\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-\overline{CR}^2)}$: os dois triangulos similhantes TPM, CRN dão

$$\overline{TP}^2 : \overline{PM}^2 :: \overline{CR}^2 : \overline{NR}^2,$$

ou

$$\frac{(a^2-z^2)^2}{z^2} : \frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2) :: \overline{CR}^2 : \overline{RN}^2$$

$$= \frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2)\overline{CR}^2}{\frac{(a^2-z^2)^2}{z^2}} = \frac{\frac{b^2}{a^2}.z^2.\overline{CR}^2}{a^2-z^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2-\overline{CR}^2),$$

logo

$$\overline{CR}^2 = a^2 - z^2,$$

e

$$NR^2 = \frac{b^2}{a^2}z^2;$$

logo

$$\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 + \overline{CR}^2 + \overline{NR}^2$$

$$= z^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2) + a^2 - z^2 + \frac{b^2}{a^2}.z^2 = b^2 + a^2,$$

e conclue-se que na ellipse a somma dos quadrados dos diametros conjugados, he igual á somma dos quadrados dos dois eixos principaes.

800. Conduzindo do centro para a tangente a perpendicular CF será

$$CF = \frac{PM.CT}{TM},$$

e

$$CN = \frac{TM.CR}{PT},$$

logo

$$CF.CN = \frac{PM.CT.CR}{PT} = ab;$$

e conclue-se que os parallelogrammos de que são lados as tangentes nos extremos dos diametros conjugados são iguaes ao rectangulo formado pelos eixos.

801. Fazendo o vertice principal A origem de abscissas AP (x), será

$$x=a-z,$$

e logo

$$z=a-x,$$

este valor de z substituido na equação

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2),$$

dá est'outra

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2).$$

802. O parametro $\frac{b^2}{a^2}.2a$ da ultima equação, he a corda dupla ordenada que passa pelo fóco; acha-se substituindo n'esta equação por x a distancia do vertice ao fóco, isto he $a-c$; $2y$ he então $\frac{2b^2}{a}$.

Fig. 272. 803. Achar huma curva tal, que se de qualquer M dos seus pontos se tirarem para dois fócos F e f raios vectores, MF, Mf, a sua differença seja sempre a mesma e igual a $2a$.

Esta curva póde ser descripta por meio de huma regua fQ movel sobre o extremo f, e de hum fio $QMF=fQ-2a$ com os extremos fixos em F e Q, e applicando hum ponteiro ao fio e á regua, este descreverá huma porção da dita curva; porque será

$$QMF-MQ=fQ-2a-MQ$$

$$=MF=Mf-2a;$$

logo

$$Mf-MF=2a.$$

Para lhe achar a equação e o nome divida-se Ff ao meio em C; chame-se c a CF, e será $c > a$; porque a differença $2a$ dos dois lados do triangulo MFf he menor que o terceiro lado $2c$.

Tire-se a ordenada perpendicular MP, e se chame y, e seja CP a abscissa, e se chame z. Será

$$\overline{fM}^2 - \overline{fP}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{FP}^2,$$

logo

$$\overline{fM}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{fP}^2 - \overline{FP}^2,$$

ou

$$(fM + FM)(fM - FM)$$

$$= (fP + FP)(fP - FP);$$

logo

$$fM + FM = \frac{2cz}{a};$$

mas he

$$fM = \tfrac{1}{2}(fM + FM) + \tfrac{1}{2}(fM - FM) = \frac{cz}{a} + a,$$

logo

$$y^2 = \left(\frac{cz}{a} + a\right)^2 - (c + z)^2$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{a^2} z^2 + a^2 - c^2$$

equação pertencente á hyperbola por ser $\frac{c^2 - a^2}{a^2}$ positivo: C he o centro, a he o semieixo que encontra a curva e $\sqrt{-(a^2 - c^2)}$ he o outro semieixo, e chamando-lhe b, a equação he d'esta fórma $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(z^2 - a^2)$.

804. Tomando $MG = MF$, e tirando a perpendicular MH sobre GF, esta perpendicular será tangente. Se he possivel encontre MH a curva n'outro ponto N; tirem-se as rectas NG, Nf, NF: por ser N ponto da perpendicular MH, será $NG = NF$, assim como era $MG = MP$, e por ser N ponto da curva, será

$$Nf - NF = 2a = fM - FM,$$

logo

$$Nf - NG = fM - MG = fG,$$

ou

$$Nf = NG + fG:$$

absurdo.

805. Na hyperbola a continuação de hum dos raios vectores e o outro formão com a tangente angulos iguaes e prova-se como em similhante caso no § 797.

806. Discorrendo como no § 798, acha-se que, por terem os triangulos MfT e MFT iguaes os angulos em M, he

$$fM : FM :: fT : FT,$$

ou

$$fM : fM - 2a :: fT : 2c - fT,$$

e logo

$$fT = \frac{c \cdot fM}{fM - a};$$

mas he

$$fM = \frac{cz}{a} + a,$$

donde

$$fT = c + \frac{a^2}{z},$$

logo

$$CT = \frac{a^2}{z}, \text{ e } PT = \frac{z^2 - a^2}{z}.$$

807. Na hyperbola as rectas que passão pelo centro, e não são diametros, são asymptotas.

Fig. 273. Sejão essas rectas ACM', e BCm', e seja CP (x) hum diametro que encontre a curva em D, e a que pertença a equação

$$y^2 + dx^2 + e = 0,$$

sendo PM a ordenada: para que o semidiametro CD seja possivel, pela equação he preciso que seja $-\frac{e}{d}$ positivo, ou por ser d negativo, que e seja positivo. PM' que determina a posição de ACM' he (§ 784)

$$x\sqrt{-d}=\sqrt{-d x^2},$$

e

$$P M=\sqrt{-d x^2-e},$$

logo $P M'$ he maior que $P M$, e $A C M'$ não encontra a curva, e similhantemente se prova, que nem $B C m'$ a encontra.

Tire-se $M P'$ parallela a $C m'$, e chame-se z, e tire-se $M C'$ parallela a $C M'$, será $C P'=M C'$; a $C P'$ chame-se u. Nos triangulos $M M' P'$, e $M C' m'$ he dada a posição dos lados e logo a sua rasão; seja pois

$$M M'=a\,.\,M P'=a z,$$

e

$$M m'=b\,.\,M C'=b u;$$

será

$$M M'=x\sqrt{-d}-y,$$

e

$$M m'=x\sqrt{-d}+y,$$

logo

$$M M'\times M m'=-d x^2-y^2=e=a b u z,$$

logo quando fôr u menor será z, isto he a recta $C M'$ que não encontra a curva, approxima-se d'ella quanto se quer, logo he asymptota, e o mesmo se póde affirmar de $C m'$.

808. A parte da tangente comprehendida entre o extremo do diametro e qualquer das asymptotas he igual a metade do outro diametro conjugado.

Seja $F F'$ o outro diametro conjugado, que será parallelo a $M m$ e á tangente $D E$, e será $D E$ parallela a $M m$, e logo

$$C P : P m' :: C D : D E,$$

ou

$$x : x\sqrt{-d} :: \sqrt{-\tfrac{e}{d}} : D E=\sqrt{e}=\sqrt{-(e)}$$

$$=C F\ (\S\ 787).$$

809. Tire-se $D'F$ que será parallela a CE (por ser $CD' = CD$, e CF igual e parallela a DE), isto he, a recta que passa pelos extremos de dois diametros conjugados he parallela a huma das asymptotas.

Fig 272. **810.** Sendo CA semieixo principal, a asymptota CI he determinada levantando AE perpendicular a CA e igual a $CA\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}} = b$.

Sendo NN', e MM' diametros conjugados, tire-se $N'R$ perpendicular, e $M'D$ parallela ao eixo ACB. Os dois triangulos similhantes CRN', e TPM dão

$$TP:PM::CR:RN',$$

ou

$$\frac{z^2-a^2}{z}:\frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2}::CR:RN' = \frac{bz.CR}{a\sqrt{z^2-a^2}};$$

e os dois $N'M'D$, e CAE tambem similhantes dão

$$CA:AE::M'D:N'D,$$

ou

$$a:b::z-CR:N'D = \frac{b(z-CR)}{a};$$

mas he

$$N'R = N'D + DR = N'D + PM$$

$$= \frac{b(z-CR)}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2}$$

$$= \frac{bz.CR}{a\sqrt{z^2-a^2}},$$

logo

$$(z-CR)\sqrt{z^2-a^2} = z.CR - z^2 + a^2,$$

e logo, quadrando e reduzindo, vem

$$CR^2 = z^2 - a^2,$$

logo

$$\overline{N'R}^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot z^2,$$

$$\overline{CM}^2 \backsim \overline{CN'}^2 = (\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2) \backsim (\overline{CR}^2 + \overline{RN'}^2)$$

$$= a^2 \backsim b^2,$$

e conclue-se que a differença dos quadrados de dois diametros conjugados, he igual á differença dos quadrados dos dois eixos principaes

811. Tirando CF' perpendicular á tangente será

$$CF' = \frac{PM \times CT}{TM},$$

e

$$CN' = \frac{TM \times CR}{PT},$$

$$CF' . CN' = \frac{PM . CT . CR}{PT} = ab = MI \times CF \text{ (§ 808)};$$

e conclue-se que o parallelogrammo formado pelas tangentes dos extremos de hum diametro, e rectas que passão por esses extremos, e pelos do outro diametro conjugado, he igual ao rectangulo dos eixos principaes.

812. Tomando o vertice principal A para origem de abscissas AP (x) será

$$z = a + x,$$

e logo

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax + x^2)$$

outra equação da hyperbola.

813. O parametro $\frac{b^2}{a^2} . 2a$ da ultima equação he a corda dupla ordenada que passa pelo foco, e acha-se fazendo $x = c - a$.

814. Na equação $u z = \frac{e}{a b}$ da hyperbola referida ás asymptotas, ao parametro $\frac{e}{a b}$ chama-se *potencia* da hyperbola.

Fig. 274. 815. Achar huma curva tal, que se de qualquer dos seus pontos M se tirar para hum ponto F dado huma recta MF, esta seja igual á distancia perpendicular MH de M a huma recta XZ dada de posição.

Parte d'esta curva póde descrever-se por meio de hum esquadro XHf, e de hum fio $FMf = Hf$ fixos os seus extremos em f, e F, e applicado por hum ponteiro ao lado fH do esquadro, sendo o outro lado HX movel sobre ZX, então o ponteiro descreverá a curva, e seja ella AM.

Para lhe achar a equação e o nome, tire-se FV perpendicular a XZ: a curva ha de passar pelo ponto A, meio de FV, porque este ponto dista igualmente de F e da recta XZ; a AF chame-se c; tire-se PM perpendicular a AF, e chame-se y, e AP chame-se x; será

$$FM = MH = PV = c + x$$

$$= \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{(x \backsim c)^2 + y^2},$$

$$c^2 + 2cx + x^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

donde

$$y^2 = 4cx;$$

logo a curva he a parabola, e AP o seu eixo principal.

816. O parametro $4c$ da ultima equação he a corda dupla ordenada que passa pelo foco F, pois fazendo $x = c$ he $2y = 4c$.

817. Tirando FH, e MT perpendicular a ella, esta será tangente. Se he possivel MT encontre a curva em outro ponto N. Por ser N ponto da perpendicular MT (que passa pelo meio de FH, por ser $MH = MF$) será $NH = NF$, e por ser ponto da curva será a perpendicular $NZ = NF$, logo $NZ = NH$: absurdo.

818. O angulo $HMT = TMF$, e tambem he $HMT = MTF$, logo o angulo da tangente e raio vector he igual ao da tangente e eixo.

819. Logo

$$TF = FM = MH = PV = c + x,$$

logo

$$PT = TF + PF = TF + x - c = 2x$$

igual á subtangente.

820. A subnormal he

$$\frac{y^2}{PT} = \frac{4cx}{2x} = 2c.$$

821. Qualquer secção feita na superficie conica por hum plano, que não passe pelo vertice, he alguma das linhas da segunda ordem, ou curvas do primeiro genero.

Seja $ABCH$ essa secção, e seja D o vertice da pyramide, $AECF$ o circulo secção commum da superficie conica e de hum plano parallelo á base da pyramide, e a recta AC a secção dos planos $ABCH$ e $AECF$: corte-se AC ao meio em G com a perpendicular EF que será portanto diametro do circulo $AECF$: tirem-se DE, DF, e seja BG a secção commum dos planos ABC, EDF. O plano EDF passará pelo centro de qualquer outra secção circular parallela a $AECF$, e logo encontrará hum diametro dessa outra secção parallelo a EF, e esse outro diametro será portanto perpendicular a outra corda parallela a AC, e logo dividi-la-ha em partes iguaes. Represente pois BG a abscissa x, e AG a ordenada y, e BD chame-se a. Os angulos dos triangulos BFG, DEF são dados e logo dadas as razões dos lados; seja pois Fig. 275.

$$GF = mx,$$

$$BF = nx, \; EF = p.DF = p(a + nx):$$

será

$$EG = pa + npx - mx,$$

e pois he

$$\overline{AG}^2 = EG.GF:$$

será

$$y^2 + m(m - np)x^2 - mapx = 0.$$

822. Esta equação mostra que a secção he ellipse se $m(m - np)$ fôr positivo, isto he se fôr $\frac{m}{n} > p$, ou $\frac{GF}{BF} > \frac{EF}{DF}$, isto he se a secção encontrar o lado DE para a parte de E: será hyperbola se fôr $\frac{GF}{BF} < \frac{EF}{DF}$, isto he se a secção encontrar o lado DE produzido da parte do vertice D: e será parabola se fôr $\frac{GF}{BF} = \frac{EF}{DF}$, isto se fôr BG parallela a DE: e a secção será circulo se fôr AGB recto, e

$$\overline{AG}^2 = BG.HG = GE.GF,$$

ou se fôr

$$BG:GF::GE:GH,$$

ou se fôr

$$\text{ang. } GBF = \text{ang. } GEH.$$

823. Se fôr AGB recto, será AG perpendicular a DEF, e logo DEF perpendicular a EAF, e logo DEF será o plano do eixo e altura.

824. A secção feita na superficie do cylindro por hum plano, em que não esteja o eixo, ou he ellipse ou circulo.
Fig. 276. Seja $ABCH$ essa secção, e seja $AFCE$ a secção de hum plano parallelo ás bases do cylindro, esta será circulo: seja AC a secção commum de ambas as secções, e tire-se pelo meio G de AC a perpendicular EF; será $AG^2 = EG.GF$. Nos triangulos BGF e EGH são dados os angulos, e logo dadas as razões dos lados; chame-se a a BH, x a BG, e y a AG, e seja

$$GF = mx,\ EG = n.GH = n(a - x),$$

e será

$$y^2 = -mnx^2 + mnax,$$

logo a secção será ellipse; e só será circulo não sendo parallela ás bases, se fôr $A\,G\,B$ recto e

$$G\,B\,F = H\,E\,G = G\,H\,E,$$

ou se fôr $G\,H = G\,E$, o que só póde acontecer não sendo recto o cylindro, e sendo $E\,F\,B$ o plano do eixo e altura (§ **823**).

825. Em huma curva regular, isto he, em huma curva em que a ordenada he funcção da abscissa, a rasão das differenciaes da ordenada e abscissa he igual á rasão da ordenada e subtangente.

Sejão $A\,P$, $P\,M$ as coordenadas x e y de huma curva $A\,M$; $B\,M$ a tangente rectilinea, e $P\,B$ a subtangente (s): tirem-se as ordenadas proximas $p\,m$, $p'\,m'$ que encontrem a tangente em C e C', produzidas sendo necessario; chame-se i a $p\,P$ e a $p'\,P$. Fig. 286.

Para que $B\,M$ seja tangente, he preciso que junto ao ponto M do contacto, deixe a curva para a mesma parte; logo por mais pequeno que seja i sempre $p\,C$ e $p'\,C'$ são ambas maiores ou ambas menores respectivamente que $p\,m$, e $p'\,m'$. He

$$p\,C = \frac{y\,(s+i)}{s}, \text{ e } p'\,C' = \frac{y\,(s-i)}{s},$$

e seja

$$y = \varphi\,(x),$$

será

$$\frac{y\,(s+i)}{s} > \varphi\,(x+i)$$

e

$$\frac{y\,(s-i)}{s} > \varphi\,(x-i),$$

isto he será

$$y + \frac{y}{s}\,.\,i > y + \frac{d\,y}{d\,x}\,.\,i + \frac{d^2\,y}{2\,d\,x^2}\,.\,i^2 + etc.,$$

e

$$y - \frac{y}{s}\,.\,i > y - \frac{d\,y}{d\,x}\,.\,i + \frac{d^2\,y}{2\,d\,x^2}\,.\,i^2 - etc.,$$

logo

$$\frac{y}{s}.i < \frac{dy}{dx}.i - \frac{d^2y}{2dx^2}.i^2 + etc.,$$

e

$$\frac{y}{s}.i > \frac{dy}{dx}.i + \frac{d^2y}{2dx^2}.i^2 + etc.,$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s};$$

e o mesmo se mostra quando pC, e $p'C'$ são ambas menores que pm, e $p'm'$.

Exemplo. A equação

$$y^2 = ax + bx^2,$$

que pertence a todas as secções conicas, sendo differenciada dá

$$2ydy = adx + 2bxdx,$$

logo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a+2bx},$$

e logo a subtangente

$$BP = \frac{2y^2}{a+2bx} = \frac{2ax+2bx^2}{a+2bx}.$$

Se a curva fôr a parabola será $b=0$; e logo $BP=2x$. Sendo as coordenadas perpendiculares, he a subnormal

$$PE = y\left(\frac{y}{s}\right) = y\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

logo n'este exemplo he

$$PE = \frac{a+2bx}{2}.$$

826. Segue-se que representando dx por $i=Pp=Mq$, será dy representada por qC. Segue-se tambem que he

$$Cm = \pm\left(\frac{d^2y}{2dx^2}i^2 + \frac{d^3y}{2.3dx^3}i^3 + etc.\right);$$

isto he, Cm he da segunda ordem a respeito de i infinitesimo. O que mostra que n'este caso qm que he realmente $=dy$, he tambem $=qC$, por ser Cm da segunda ordem.

Conclue-se tambem que o espaço $MDmM$, comprehendido entre o elemento do arco e a corda, he infinitesimo da terceira ordem por ser ainda menor que o triangulo

$$MmC = \frac{1}{2} Cm \times Mq.$$

827. A rasão das differenciaes da area de huma curva e abscissa he igual á ordenada, sendo recto o angulo das coordenadas.

A area de que se trata he APM, e chame-se $\psi(x)$: será a area $MDmpP <$ que o rectangulo completado com pP, e pm, e $>$ que o completado com Pp, e PM, isto he, será $\psi(x+i) - \psi(x)$ media entre $i\varphi(x+i)$, e $i\varphi(x)$, e logo as tres series

$$\varphi(x) \cdot i + \frac{d\varphi x}{dx} \cdot i^2 + etc.,$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} \cdot i + \frac{d^2\psi(x)}{2dx^2} \cdot i^2 + etc.,$$

$$\varphi(x) \cdot i$$

dão

$$\varphi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx} = y,$$

ou

$$APM = \int y\,dx.$$

Exemplo. A equação das parabolas de todos os graus $y^m = x^n a^{m-n}$, assim chamada porque pertence á parabola ordinaria quando $n=1$, e $m=2$, dá

$$y = x^{\frac{n}{m}} a^{\frac{m-n}{m}};$$

logo

$$\int y\,dx = a^{\frac{m-n}{m}} \int x^{\frac{n}{m}}\,dx = \frac{m}{m+n} a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{m+n}{m}} + C.$$

Querendo contar os espaços desde a origem A dos x, temos $C=0$; logo

$$APM = \frac{m}{m+n}\,xy,$$

igual á parte determinada $\frac{m}{m+n}$ do rectangulo que y e x determinão. Pelo que todas as parabolas são quadraveis, isto he, podem avaliar-se geometricamente as superficies comprehendidas por arcos d'essas curvas e suas coordenadas respectivas.

828. A rasão das differenciaes da curva e abscissa he igual á da tangente (t), e subtangente (s).

Seja $\theta(x)$ a funcção que a curva AM he de x: será o arco $Mm <$ a somma das duas rectas MC e Cm, e $>$ a recta Mm, isto he, tirando Mq perpendicular a pC, sendo recto o angulo das coordenadas, será MDm media entre $\sqrt{\overline{Mq}^2 + \overline{Cq}^2} + Cm$, e $\sqrt{\overline{Mq}^2 + \overline{qm}^2}$; logo as tres series

$$\sqrt{\left(i^2 + \frac{y^2 i^2}{s^2}\right)} \pm \frac{d^2 y}{2\,dx^2}.\,i^2 \pm \frac{d^3 y}{2.3\,dx^3}.\,i^3 \pm etc.,$$

$$\theta(x+i) - \theta(x),$$

$$\sqrt{i^2 + \left(\frac{dy}{dx}.\,i + \frac{d^2 y}{2\,dx^2}.\,i^2 + etc.\right)^2},$$

dão

$$\frac{d\,\theta(x)}{dx} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{s^2}} = \frac{t}{s}.$$

Donde se conhece que he

$$d\,\theta x = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ou que a differencial do arco não differe da corda do mesmo arco differencial, sendo $Pp = dx$, e por consequencia $qm = dy$.

Tambem se segue que, por ser

$$MC : Mq\,(dx) :: t : s,$$

he $MC = d\theta$, de fórma que se a curva fôr circulo, e o seu raio $EM = 1$, MC perpendicular ao raio e infinitesimo póde representar a differencial do arco AM, ou do angulo AEM que elle mede.

Exemplo. Applicando pois a formula $\theta(x) = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ poderemos rectificar qualquer curva, isto he, achar a recta que lhe he igual ou exactamente, ou tão approximadamente quanto se quizer. A equação geral das parabolas dá

$$\frac{m\,dy}{y} = \frac{n\,dx}{x};$$

logo

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \frac{dx}{m}\sqrt{\left(m^2 + n^2 a^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n-2m}{m}}\right)}.$$

Esta quantidade he integravel quando

$$-\left(\frac{0+1}{\frac{2n-2m}{m}} + \frac{1}{2}\right) = t,$$

sendo t hum numero inteiro positivo, isto he, quando

$$m = \frac{2t+1}{2t}\,n:$$

logo são rectificaveis as parabolas que se comprehendem na equação

$$y^{\frac{2t+1}{2t}} = a^{\frac{1}{2t}}\,x.$$

Assim a segunda parabola cubica cuja equação he $y^3 = ax^2$, he rectificavel exactamente.

829. Chamando z ao arco $\theta(x)$, será

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{t}{s} \cdot \frac{s}{y} = \frac{t}{y}.$$

830. A superficie curva da pyramide conica recta, he metade do producto da circumferencia da base pela recta tirada do vertice para qualquer ponto d'essa circumferencia.

Fig. 277. Seja AB parte da circumferencia da base, C o centro; tire-se AC, e do ponto B conduza-se a ordenada BD perpendicular a AC; seja EF outra ordenada; pelo ponto B tire-se a tangente BH que encontre em H, EF produzida; tire-se BE; do vertice L tirem-se as rectas LA, LB, LE, LF, LH. A superficie curva LAB he huma funcção de AD ou de x, denote-se por $F(x)$. Será

$$LBH + LHE + BEH > LBmE + BEmB > LBE;$$

isto he

$$\frac{1}{2} LB \times BH + \frac{1}{2} EH \times LF + \frac{1}{2} EH \times DF$$

$$> F(x+i) - F(x) + bi^3$$

$$> \frac{1}{2} BE \times \sqrt{\left(\overline{BL}^2 - \frac{\overline{BE}^2}{4}\right)};$$

isto he, as tres series

$$\frac{1}{2} LB \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}\, i + ci^2 + bi^3$$

$$\frac{dF(x)}{dx} \cdot i + \frac{d^2 F(x)}{2\,dx^2} \cdot i^2 + \text{etc.},$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2+ai\right)}\sqrt{\left(\overline{LB}^2-\left(\tfrac{1}{2}i\sqrt{\left(1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2+ai\right)}\right)^2\right)}.i$$

dão

$$\tfrac{1}{2}LB\sqrt{\left(1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2\right)}=\tfrac{dF(x)}{dx}=\tfrac{1}{2}LB.\tfrac{d\theta(x)}{dx},$$

e logo

$$F(x)=\tfrac{1}{2}LB.\theta(x).$$

831. Com a mesma construcção, suppondo só de mais que L está em C, acha-se a superficie do circulo igual a metade do producto da circumferencia pelo raio, ou $=\pi r^2$.

832. E levantando sobre a circumferencia da base a superficie curva do cylindro se demonstra pelo mesmo modo, que esta he o producto da circumferencia pela altura.

833. Na pyramide formada por GFH revolvendo-se sobre GF, he a superficie descripta por BH igual á differença das superficies conicas curvas descriptas por HG, e por BG, isto he Fig. 278.

$$=\frac{GH\,\text{circ.}\,FH-GB\,\text{cir}\,BD}{2}$$

$$=\frac{2\pi(GH.FH-GB.BD)}{2}$$

$$=\pi\big(FH.GH-BD(GH-BH)\big)$$

$$=\pi(FH.GH-FH.BG+BD.BH)$$

$$=\pi(FH+BD)BH.$$

No solido formado na mesma revolução pela curva ABE, he a superficie descripta por $BmE>$ a descripta pela recta BE, e $<$ as descriptas por BH e BE, isto he, chamando $f(x)$ á superficie do solido descripta por *A B*, teremos no caso do § 830 as tres series

$$\pi\left(\varphi(x)+\varphi(x+i)+ai^2\right)i\sqrt{\left(1+\left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2\right)}$$

$$+\pi\left(\varphi(x)+\varphi(x+i)+ai^2\right)ai^2,$$

$$f(x+i)-f(x),$$

$$\pi\left(\varphi(x)+\varphi(x+i)\right)i\sqrt{\left(1+\left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2\right)}+ai^2,$$

e portanto dão

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x}=2\pi\,.\,\varphi(x)\sqrt{\left(1+\left(\frac{d\,\varphi(x)}{d\,x}\right)^2\right)}$$

$$=2\pi\,.\,\varphi(x)\,.\,\frac{d\,\theta(x)}{d\,x}.$$

834. Se a curva *A B* fôr circulo, a superficie descripta será espherica, e será $\varphi(x)=\text{sen}\,z$, e $\frac{d\,\theta(x)}{d\,x}=\frac{r}{\text{sen}\,z}$, e logo

$$\frac{d\,f(x)}{d\,x}=\frac{2\pi\,r\,d\,x}{d\,x},$$

portanto

$$f(x)=2\pi\,r\,x;$$

isto he, a superficie de hum segmento de esphera, ou a zona, he igual ao producto da circumferencia de hum circulo maximo $2\pi r$ pela altura x do segmento, e logo a superficie de toda a esphera he igual a

$$2\pi r\,.\,2r=4\pi r^2,$$

igual a quatro vezes a superficie de hum circulo maximo.

Fig. 286. 835. Seja x a altura de hum solido $\Gamma(x)$; $\Delta(x)$ a sua

base; e $(x+i)$ a altura do solido $\Gamma(x+i)$: será o solido $\Gamma(x+i)-\Gamma(x)$ medio em valor entre os solidos $i\Delta(x)$, $i\Delta(x+i)$; e logo

$$\frac{d\,\Gamma(x)}{dx}=\Delta(x).$$

836. Se o solido fôr hum segmento espherico, será

$$\Delta(x)=\pi y^2=\pi(2rx-x^2),$$

e

$$\frac{d\,\Gamma(x)}{dx}=\frac{\pi d\left(rx^2-\frac{x^3}{3}\right)}{dx}$$

$$\Gamma(x)=\pi x^2\left(r-\frac{x}{3}\right),$$

e logo toda

$$\text{a esphera}=\pi(2r)^2\left(r-\frac{2r}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}2r.\pi r^2;$$

dois terços do circulo que tem por base hum circulo maximo, e por altura o diametro.

837. Na pyramide conica chamando a ao raio da base, e b á altura, e formando huma secção parallela á base, e chamando y ao seu raio, e x á parte da altura comprehendida por ella e pelo vertice: será

$$y=\frac{ax}{b},$$

e logo na pyramide de que esta secção he base será

$$\Delta(x)=\frac{\pi a^2x^2}{b^2},$$

e

$$\frac{d\,\Gamma(x)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\pi a^2x^3}{3b^2}\right)}{dx},$$

d'onde

$$\Gamma(x) = \frac{\pi a^2 x^2}{b^2} \cdot \frac{x}{3};$$

logo he toda

$$\text{a pyramide} = \frac{\pi a^2 b^2}{b^2} \cdot \frac{b}{3} = \pi a^2 \cdot \frac{b}{3},$$

igual á terça parte do producto da base pela altura.

Fig. 279. 838. O solido A occupa o espaço, que a figura plana B descreveria movendo-se do logar B para o logar C, de sorte que hum triangulo, descripto n'ella, descrevesse simultaneamente hum prisma: a altura d'este prisma he a do solido A. Digo que o solido A será igual ao prisma, que tiver essa altura, e huma base igual á base B.

O solido A póde considerar-se composto de solidos da mesma altura, cujas bases sejão taes como $\alpha\beta\gamma$, nas quaes $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ são linhas rectas; e $\alpha\beta$, hum arco todo concavo, ou todo convexo para a parte da recta que se tirar do ponto α ao ponto β, e que caia todo dentro do parallelogrammo que se formar tirando de α e β parallelas a $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$; assim bastará demonstrar a proposição d'estes solidos. Chame-se S o solido cuja base he $\alpha\beta\gamma$, e a altura. Se $a \times \alpha\beta\gamma$ não he $= S$, seja D a differença. Com o lado $\beta\gamma$ e o angulo $\alpha\gamma\beta$ faça-se o parallelogrammo $\beta\delta < \frac{D}{a}$: cortem-se

$$\delta\varepsilon = \gamma\delta = \varepsilon\zeta = \text{etc.},$$

e assim por diante até encontrar o segmento $\zeta\alpha$ não maior que $\gamma\delta$: completem-se os parallelogrammos inscriptos $\gamma\varkappa$, $\delta\lambda$, $\varepsilon\mu$, etc., e chame-se R o rectilineo que d'elles se compõe: será $\alpha\beta\gamma - R$ igual á somma dos espaços $\beta\varkappa\pi$, $\varkappa\lambda\rho$, $\lambda\mu\sigma$, etc.; e logo menor que o parallelogrammo $\beta\delta$, e logo $< \frac{D}{a}$. Inscrevão-se no solido S parallelipipedos que tenhão por bases os parallelogrammos $\gamma\varkappa$, $\delta\lambda$, $\varepsilon\mu$, etc., e ao solido, que tem por base $\beta\varkappa\pi$, circumscreva-se hum parallelipipedo que tenha por base $\pi\tau$, e tambem se achará

$S - aR < a \times \epsilon\delta$, e logo tambem $< a\,\frac{D}{a}$, isto he $< D$. Seja pois, se he possivel, $S > a \times \alpha\epsilon\gamma$: será $aR > a \times \alpha\epsilon\gamma$; absurdo. Seja $a \times \alpha\epsilon\gamma > S$: pois he $\alpha\epsilon\gamma - R < \frac{D}{a}$, será $a \times \alpha\epsilon\gamma - aR < D$, e logo $aR > S$; absurdo. Logo he $a \times \alpha\epsilon\gamma = S$.

839. A serie $ai^n + bi^{n+1} + ci^{n+2} +$ etc., sempre se póde fazer quantidade do mesmo signal que o seu primeiro termo, sendo n'ella a, b, c, etc., grandezas determinadas positivas ou negativas, e i indeterminada, que possa ser tão pequena quanto se quizer.

Seja primeiro a positivo. Como sabemos, póde fazer-se

$$bi + ci^2 + \text{etc.}, < a,$$

d'onde

$$bi^{n+1} + ci^{n+2} + \text{etc.}, < ai^n;$$

e logo na serie proposta será então a somma de todos os termos, excepto o primeiro, menor que o primeiro; e portanto a serie será positiva então, porque o primeiro termo he positivo. Por ser

$$-ai^n + bi^{n+1} + ci^{n+2} + \text{etc.}, < 0,$$

he ou póde ser negativa a serie proposta, se o primeiro termo he negativo.

840. A inversa da proposição do § 825, tambem he verdadeira, isto he, que se huma recta e huma curva teem hum ponto e ordenada y (φx) desse ponto, communs, e fôr $\frac{y}{s} = \frac{dy}{dx}$ (sendo s a parte do eixo que essa recta e essa ordenada cortão); a recta e a curva tocar-se-hão; não sendo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

ou sendo

$$\frac{d^2 y}{d x^2}=0, \text{ e } \frac{d^3 y}{d x^3}=0,$$

não o sendo $\frac{d^4 y}{d x^4}$, etc.

Pois, se he possivel, não se toquem, mas cortem-se n'esse ponto commum; então as ordenadas da curva de huma parte de y serão maiores que as da recta, e da outra parte serão menores, isto he

$$\varphi(x+i) \gtrless y+\frac{y}{s}\, i;$$

e

$$\varphi(x-i) \lessgtr y-\frac{y}{s}\, i;$$

e logo serão

$$\frac{d^2 \varphi x}{2\, d x^2}\cdot i^2+\frac{d^3 \varphi x}{2\,.\,3\, d x^3}\cdot i^3+\text{etc.}, \gtrless 0,$$

$$-\frac{d^2 \varphi x}{2\, d x^2}\cdot i^2+\frac{d^3 \varphi x}{2\,.\,3\, d x^3}\cdot i^3-\text{etc.}, \gtrless 0,$$

isto he, duas grandezas, que se podem fazer contrarias pelo § precedente, ambas maiores ou ambas menores que zero: absurdo; logo a recta e a curva tocão-se.

841. Discorrendo como no § 825, póde mostrar-se que tocando-se duas curvas, e sendo a ordenada commum do ponto de contacto φx em huma e ψx em outra, que será tambem $\frac{d \varphi x}{d x}=\frac{d \psi x}{d x}$ para a abscissa commum correspondente a esse ponto de contacto.

842. A inversa da proposição antecedente tambem he verdadeira, e prova-se discorrendo como no § 840.

843. Duas linhas que tocão huma terceira em hum ponto, tocão-se entre si n'esse ponto.

A ordenada commum seja φx, e ψx para as duas linhas e $f x$ para a terceira; serão $\frac{d \varphi x}{d x}=\frac{d f x}{d x}$; e

$$\frac{d \psi x}{d x}=\frac{d f x}{d x};$$

(§ 841), e logo

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{d\psi x}{dx},$$

e por tanto as duas linhas tocão-se (§ 842).

844. A proposição do § 841 não só he verdadeira, sendo as coordenadas do ponto de contacto communs ás duas curvas, mas tambem sendo a ordenada y' de huma a ordenada y da outra, produzida, e a abscissa de y' igual e parallela á da outra, comtanto que tenhão huma tangente rectilinea no mesmo ponto de contacto.

Pois seja s' a subtangente relativa a y', será

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{y'}{s'};$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}:$$

mas por similhança de triangulos he

$$\frac{y'}{s'} = \frac{y}{s};$$

logo

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

845. Entre a tangente rectilinea e a curva não se póde tirar do ponto de contacto outra recta.

Pois se fosse possivel, as suas ordenadas serião medias em valor entre as da tangente e da curva; isto he, chamando s' á parte do eixo que está entre essa recta e a ordenada commum, as tres series

$$y \pm \frac{y}{s}.i,$$

$$y \pm \frac{y}{s'}.i,$$

$$y \pm \frac{dy}{dx}.i + \frac{d^2y}{2dx^2}.i^2 \pm \text{etc.},$$

por ser

$$\frac{y}{s} = \frac{dy}{dx},$$

darião

$$\frac{y}{s} = \frac{y}{s'}:$$

absurdo.

846. Logo huma curva não póde ter no mesmo ponto duas tangentes rectilineas.

847. E por consequencia nem duas curvas que se tocão; poisque ambas estas tangentes rectilineas o serião de huma pelo § 843.

848. Se huma curva regular, e hum circulo se tocarem de modo que entre elles não se possa tirar, pelo ponto de contacto, outro arco de circulo; diz-se que a curva tem n'esse ponto a mesma curvatura que o circulo. O circulo chama-se *osculador:* o seu raio chama-se *raio de curvatura:* e a curva que he logar dos centros de todos os circulos osculadores, chama-se *evoluta da curva proposta.*

849. Dos §§ 825 e 828, se deduz que a tangente trigonometrica, do angulo formado pela tangente rectilinea da curva z, e pela ordenada, he $\frac{dx}{dy}$: o seno he $\frac{dx}{dz}$: o coseno he $\frac{dy}{dz}$.

850. Dizer que por entre o circulo osculador e a curva se não póde tirar outro circulo, he dizer que o circulo osculador he o minimo de todos os circulos que tocão e abração a curva; ou o maximo de todos os que são tocados e abraçados pela mesma curva: a indagação pois do raio de curvatura reduz-se a achar o maximo ou minimo da expressão que representar qualquer dos raios dos circulos tangentes da curva.

Fig. 287. Seja pois AM huma curva proposta z, AP (x), PM (y), as suas coordenadas. Se a curva proposta tem huma osculação no ponto M, terá huma tangente rectilinea MT que he a do circulo osculador (§ 843). Tire-se MN perpendicular a TM: qualquer ponto m de MN he centro, e Mm

he raio de circulo tangente de z em M: MP produzida ou não, e mA' parallela a AP determinão P': chame-se y' a MP'; tome-se $A'P'=x$. Será

$$Mm=\frac{y'}{\cos mMP'}=\frac{y'}{\operatorname{sen} TMP'}=\frac{y'dz}{dx}$$

a expressão que deve ser hum maximo, ou hum minimo: e logo

$$d\left(\frac{y'dz}{dx}\right)=0=\frac{dy'dz+y'ddz}{dx};$$

ou

$$y'=-\frac{dy'dz}{ddz};$$

mas por ser

$$dz^2=dx^2+dy^2,$$

he

$$dzddz=dyddy,$$

ou

$$ddz=\frac{dyddy}{dz};$$

e he $dy'=dy$ (§ 844); logo

$$y'=-\frac{dz^2}{ddy},$$

e

$$Mm=-\frac{dz^3}{dxddy},$$

he o raio de curvatura, e se chame R.

851. Seja am a evoluta (s). Complete-se o rectangulo Pm; e sejão $Ap\,(t)$, $pm\,(u)$ as coordenadas da evoluta. Será

$$t=P'm+x=R\operatorname{sen} mMP'+x$$

$$=R\cos TMP'+x=R\frac{dy}{dz}+x;$$

e

$$u=y'-y=R\cos mMP'-y$$

$$=R \operatorname{sen} TMP' - y = R\frac{dx}{dz} - y:$$

logo serão

$$dt = \frac{dRdy}{dz} + Rd\frac{dy}{dz} + dx = \frac{dRdy}{dz};$$

$$du = \frac{dRdx}{dz} + Rd\frac{dx}{dz} - dy = \frac{dRdx}{dz};$$

d'onde

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dy} = \operatorname{tang} TMP' = \operatorname{tang} pNm = \frac{mp}{Np};$$

logo (§ 840) o raio de curvatura he tangente da evoluta.

852. Será

$$ds^2 = dt^2 + du^2 = dR^2\left(\frac{dx^2+dy^2}{dz^2}\right);$$

d'onde

$$ds = dR;$$

logo se entre a evoluta e o raio de curvatura ha differença, esta não depende da raiz x, ou he a mesma para todos os pontos da curva.

853. A expressão $R = -\frac{dz^3}{dxddy}$ foi achada na hypothese de ser x raiz, ou dx constante; e n'essa hypothese tambem he

$$R = -\frac{dz^3}{dx^2 d\frac{dy}{dx}}:$$

mas se quizermos considerar z raiz ou dz constante, e dx variavel, será então

$$R = -\frac{dz^3}{dxddy - dyddx},$$

que por ser

$$d(dz^2) = 0 = d(dx^2 + dy^2),$$

e logo

$$ddy = -\frac{dxddx}{dy},$$

se muda em

$$R = \frac{d\,z^3}{\left(\frac{d\,x^2 + d\,y^2}{d\,y}\right) d\,d\,x} = \frac{d\,y\,d\,z}{d\,d\,x}:$$

854. A rasão de se dizer (§ 848) que a curva tem no ponto do contacto a mesma curvatura que o circulo osculador, he porque tomando sobre a curva mais dois pontos m, m' infinitamente proximos d'esse ponto M, o circulo que passa por estes tres pontos tem o seu raio igual ao de curvatura. Porque tiradas d'esses pontos ordenadas perpendiculares á abscissa e rectas parallelas a esta, se $p\,P$ representar a differencial da abscissa, ou se fôr $= d\,x$, será Fig. 280.

$$m\,n = d\,y,$$

$$p\,p' = n\,n' = d\,x + d\,d\,x,$$

$$m'\,n' = d\,y + d\,d\,y.$$

Teremos pois corda

$$M\,m = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2} = d\,s.$$

sendo $d\,s$ a differencial da curva.

$$m\,m' = \sqrt{(d\,x + d\,d\,x)^2 + (d\,y + d\,d\,y)^2}.$$

$$M\,m' = \sqrt{(2\,d\,x + d\,d\,x)^2 + (2\,d\,y + d\,d\,y)^2}.$$

Logo sendo $d\,s$ constante he

$$d\,x\,d\,d\,x + d\,y\,d\,d\,y = 0.$$

Logo

$$M\,m = d\,s;$$

$$m\,m' = \sqrt{d\,s^2 + (d\,d\,x)^2 + (d\,d\,y)^2}$$

$$=ds+\frac{1}{2ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right);$$

$$Mm'=\sqrt{4ds^2+(ddx)^2+(ddy)^2}$$

$$=2ds+\frac{1}{4ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right)$$

são os lados do triangulo Mmm', cujo raio r se póde por tanto achar, e teremos

$$p=2ds+\frac{3}{8ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right),$$

$$p-a=\frac{1}{8ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right),$$

$$p-b=ds+\frac{3}{8ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right),$$

$$p-c=ds-\frac{1}{8ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right).$$

O producto das duas primeiras he $\frac{1}{4}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right)$, das outras duas he $ds^2+\frac{1}{4}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right)$; logo

$$r=\frac{2ds^3}{4ds\sqrt{\frac{1}{4}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right)}}=\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx)^2+(ddy)^2}}$$

Porque he

$$ddy=\frac{dx\,ddx}{dy},$$

será

$$r=\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx)^2+\frac{dx^2(ddx)^2}{dy^2}}}=\frac{dy\,ds}{ddx}=R.$$

855. Não obstante cortarem-se duas linhas, diz-se que os seus ramos, que terminão no ponto commum, se tocão quando as suas ordenadas não têem differença da primeira ordem, e então se diz que teem hum contacto da primeira ordem; e se tambem não tem differença da segunda ordem, o contacto se diz da segunda ordem, etc., isto he, que sendo $\varphi(x+i)$, $\psi(x+i)$ as ordenadas correspondentes dos dois ramos das duas linhas, elles se dizem tocar-se aindaque as curvas se cortem, se fôr $\frac{d\varphi x}{dx}=\frac{d\psi x}{dx}$; e o contacto se diz da primeira ordem; e se fôr tambem $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}=\frac{d^2\psi x}{dx^2}$ o contacto será da segunda ordem, etc.

856. Assim no ponto de inflexão, isto he, no ponto M que separa concavidades oppostas da curva AMN, se tirarmos de M a recta MC por meio da subtangente ou com a condição $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{s}$, será tangente do ramo MN, por não haver entre as ordenadas do ramo e da recta assim tirada differença da primeira ordem: e produzida esta recta será tambem BM tangente do ramo AM por não haver entre as suas ordenadas $y-\frac{yi}{s}i$, e $y-\frac{dy}{dx}i+\frac{d^2y}{2dx^2}i^2$ — etc., differença da primeira ordem, pois he Fig. 288.

$$\frac{y}{s}i=\frac{dy}{dx}i.$$

N'este caso, para senão chegar ao absurdo do § 840, he preciso que seja

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

e não $\frac{d^3y}{dx^3}$, ou que sendo tambem

$$\frac{d^3y}{dx^3}=0,$$

tambem o seja $\frac{d^4y}{dx^4}$ e não $\frac{d^5y}{dx^5}$; e assim por diante.

857. *Ponto multiplo* he o ponto commum a muitos ramos de huma curva. Chama-se *duplo* se he commum a dois ramos: *triplo* se he commum a tres: etc. O numero de ra-

mos he contado pelo numero de ordenadas differentes, correspondentes á mesma abscissa, e da parte da ordenada do ponto multiplo em que este numero he maior.

858. Dada a equação de huma curva algebrica acharlhe os pontos multiplos. Tirar tambem por estes pontos tangentes.

Seja $u=0$ a equação da curva, será u da fórma

$$a+bx+cy+fxy+ex^2+gy^2+\text{etc.}$$

Se o ponto fôr duplo as duas ordenadas dos dois ramos far-se-hão iguaes no ponto multiplo; logo considerando y como numero principal, terá então a equação $u=0$ duas raizes iguaes, e será

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=0,$$

e logo

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=0;$$

logo os valores de x e y que satisfazem ás tres equações

$$u=0, \left(\frac{du}{dx}\right)=0, \left(\frac{du}{dy}\right)=0$$

são as ordenadas do ponto duplo.

Se o ponto fôr triplo as tres ordenadas dos tres ramos far-se-hão iguaes n'esse ponto; logo considerando y como numero principal terá então a equação $u=0$ tres raizes iguaes, e serão

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=0, \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0;$$

e logo

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=0; \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)=0; \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=0,$$

e os valores de x e y que satisfazem a estas seis equações são as coordenadas do ponto triplo. Assim por diante.

Quando o ponto he duplo, a relação entre dx e dy, que determina a posição das tangentes, não se póde achar na equação $du=0=adx+bdy$, por serem as differenciaes parciaes a e b ambas iguaes a zero; mas acha-se na equação

$$d^2u=cdx^2+edxdy+fdy^2+gddy$$

$$=cdx^2+edxdy+fdy^2=0,$$

por ser $g=0$, pois he g differencial parcial da primeira ordem.

Quando o ponto he triplo, nem na antecedente se póde achar essa relação, por serem c, e, f differenciaes parciaes da segunda ordem que, n'este caso, todas são iguaes a zero; mas acha-se na equação

$$d^3u=hdx^3+idx^2dy+ldxdy^2$$

$$+mdy^3+nddy+pdddy$$

$$=hdx^3+idx^2dy+ldxdy^2+mdy^3=0,$$

por serem iguaes a zero, n porque he da segunda ordem, e p da primeira.

Assim por diante.

Sendo estas equações, que determinão essa relação, as mesmas, que se acharião suppondo tambem dy constante.

Se sahirem alguns valores iguaes para a relação entre dx e dy, isto indica que outros tantos ramos se tocão, ou teem a mesma tangente rectilinea.

859. Achar huma asymptota rectilinea Tm da curva AM. Fig. 289.

Sejão $Pm(y')$, e $PM(y)$ ordenadas da asymptota e da curva, e levante-se a perpendicular AK. $AT(\alpha)$ e $AK(\beta)$ determinarão a asymptota. Para que Tm seja asymptota, he preciso que $y'-y$ admitta valor menor do que qualquer grandeza que se proponha: pois seja m' o ponto da curva de que m dista menos, deverá mm' no caso de asymptotismo, ou $Qm - Qm'$, ou $\frac{y'-y}{\cos QmP}$ admittir valor menor do que a qualquer grandeza que se proponha, o que não póde ser sem $y'-y$ o admittir: mas he

$$y' = \beta + \frac{\beta}{\alpha} x;$$

logo he preciso que haja em y dois termos hum da fórma b, e o outro da fórma $\frac{b}{a} x$, que aniquilem y' e determinem β e α; e que o resto de y seja huma funcção de x, que possa ser maior que qualquer grandeza que se proponha.

Exemplo. Seja a curva proposta huma hyperbola e,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax + x^2} = \frac{b}{a} x \sqrt{1 + \frac{2a}{x}}$$

$$= \frac{b}{a} x + b - \frac{a^2}{2x} + \frac{a^3}{2x^2} - \text{etc.};$$

poderá $y'-y$ ser menor do que qualquer grandeza, que se proponha, fazendo $\beta = b$, e $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}$, ou $\alpha = a$, e Tm será asymptota como já se achou (§§ 784, e 807).

As condições que determinão as asymptotas rectilineas ficão achadas, e já se póde ver como se acharão as das curvilineas: mas as seguintes considerações facilitão estas indagações.

860. Para que a curva tenha asymptotas rectilineas he preciso que seja

$$y = \beta + \frac{\beta}{\alpha} x + fx,$$

e logo

$$y\frac{dx}{dy} - x = \alpha + \frac{\alpha x(fx - \psi x) - \alpha^2 \psi x}{\beta x + \alpha \psi x},$$

na supposição de x infinito determina α; e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\psi x}{x}$$

na mesma supposição determina $\frac{\epsilon}{\alpha}$; e

$$\alpha \frac{\epsilon}{\alpha} = \left(\frac{y\,dx}{dy} - x\right)\frac{dy}{dx}$$

$$= y - \frac{x\,dy}{dx}$$

determina ϵ.

861. Logo as asymptotas rectilineas podem ser determinadas pelos mesmos meios com que se determinão as tangentes rectilineas, tiradas de huma distancia finita do vertice para hum ponto da curva a huma distancia infinita.

862. As duas parabolas AM e Bm, que têem o mesmo eixo principal $BA\,(a)$, e o mesmo parametro p, são asymptotas huma da outra. Pois serão Fig. 290.

$$y^2 = px,$$

e

$$y'^2 = p\,(a + x);$$

e logo

$$y' - y = \sqrt{p}\,(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

$$= \sqrt{p}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{a^2}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{a^3}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5} - \text{etc.}\right),$$

expressão que x infinito faz infinitessima.

863. O ponto duplo chama-se *ponto de reversão,* quando esse ponto he limite dos ramos immediatos da curva, isto he, hum ponto tal que se possa tirar por elle huma recta que deixe esses ramos para a mesma parte. Chama-se *reversão da primeira especie* quando os dois ramos são convexos hum para o outro; e *da segunda especie,* se hum he convexo e o outro concavo.

Sendo C hum ponto de reversão da primeira especie, he preciso que chamando a a AB, seja y da fórma $P \pm$ Fig. 291.
$Q\,(x-a)^{\frac{m}{2}}$, sendo m qualquer numero positivo, mas não par,

para que a $x < a$ não corresponda ordenada; para que a $x = a$ corresponda só huma; e para que a $x > a$ correspondão duas.

Pois he

$$y = fx = f(a + x - a),$$

escreva-se i por $x - a$, e então, reduzindo a serie, seja

$$y = A + Bi^{b} + Ci^{c} + \text{etc.}$$

$$\pm i^{\frac{m}{2}} \left(A' B' i^{b'} + C' i^{c'} + \text{etc.}\right)$$

será

$$\frac{ddy}{dx^2} = b(b-1)Bi^{b-2} + c(c-1)Ci^{c-2} + \text{etc.}$$

$$\pm i^{\frac{m}{2}-2} \left(\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} - 1\right)A' + \text{etc.}\right).$$

Poisque, na reversão da primeira especie, hum dos ramos he convexo e o outro he concavo para o eixo das abscissas, he preciso que $\frac{ddy}{dx^2}$ tenha dois valores, hum positivo e outro negativo (§ 826), ou que $\pm i^{\frac{m}{2}-2} \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2} - 1\right)A'$ seja o primeiro termo da serie que exprime $\frac{ddy}{dx^2}$, ou que $\frac{m}{2} - 2$ seja o menor expoente d'essa serie, e logo então, no ponto de reversão da primeira especie, aonde $i = 0$, he $\frac{ddy}{dx^2}$ ou zero, ou infinito.

No ponto de reversão da segunda especie, se fôr $b - 2$ o mais pequeno expoente, será $\frac{ddy}{dx^2}$ ou zero, ou finito, ou infinito, segundo fôr b maior, igual, ou menor que 2.

Fig. 292. 864. A curva BS seja construida por huma equação entre $AM\,(x)$ e $MS\,(y)$; $MQ = \frac{y\,dx}{dy}$, e tangente de AM, póde determinar QS tangente de BS.

Pois sejão $AP(x')$, e $PM(y')$; será

$$MS:MQ::\text{sen}(QMS+QSM):\text{sen}\,QSM,$$

ou

$$MQ=y\,\frac{\text{sen}\,QSM}{\text{sen}\,QMS\cos QSM+\text{sen}\,QSM\cos QMS}$$

$$=\frac{y}{\frac{\text{sen}\,QMP}{\text{tang}\,QSM}-\cos QMP}$$

$$=\frac{y}{\frac{dx'}{dx}\left(\frac{dy+dy'}{dx'}\right)-\frac{dy'}{dx}}=y\,\frac{dx}{dy}.$$

865. A mesma tangente SI póde ser determinada tomando

$$PI=\frac{sydx}{tdy},$$

sendo x o mesmo arco AM; y, PS; t, MT; e s, PT.

Pois he

$$dx'=dy'.\frac{s}{y'}=\frac{dx.y'}{t}.\frac{s}{y'}=\frac{sdx}{t};$$

e tambem

$$dx'=\frac{dy.PI}{y},$$

logo etc.

866. Resultando a curva BM de duas curvas conhecidas AL, CN por huma equação entre as ordenadas correspondentes $PL(x)$, $PM(y)$, $PN(z)$; tirar a tangente a hum ponto qualquer M. Fig. 293.

Seja a subtangente PS da curva $AL=s$, e a subtangente PR da curva $CN=s'$, e seja $AP=x'$.

PC póde ser abscissa da curva CN e igual a

$$AP-AC=x'-a.$$

Será

$$s'=\frac{zd(x'-a)}{dz}=\frac{zdx'}{dz};$$

e tambem

$$s = \frac{x\,d\,x'}{d\,x};$$

e

$$P\,T = \frac{y\,d\,x'}{d\,y};$$

das duas primeiras tira-se

$$d\,z = \frac{s\,z\,d\,x}{s'\,x},$$

que serve para eliminar $d\,z$ da equação differencial da curva proposta, e das duas ultimas tira-se

$$P\,T = \frac{s\,y\,d\,x}{x\,d\,y}.$$

867. Qualquer recta ρ, tirada para huma cūrva do extremo de huma recta dada de posição, e chamada *base*, chama-se raio vector, e esse ponto *polo:* e a equação que dá a relação entre hum raio vector, e o angulo σ que elle faz com a base chama-se *equação polar da curva;* e então a curva tambem se chama *polar*.

868. Na ellipse sendo base o eixo maior, e polo hum dos focos; será § 795. Fig. 270.

$$F\,M\,(\rho) = M\,f - \frac{2\,c\,z}{a}$$

$$= a + \frac{c\,z}{a} - \frac{2\,c\,z}{a}$$

$$= a - \frac{c\,z}{a} = a - \frac{c}{a}\,(c - P\,F)$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a} - \frac{c}{a}\,\rho\cos\sigma$$

$$= \frac{b^2}{a} - \frac{c}{a}\,\rho\cos\sigma;$$

logo he

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \,.\, \cos\sigma}$$

a equação polar da ellipse.

869. Na hyperbola, sendo base o eixo principal dos focos e polo hum d'elles, será § 803. Fig. 272.

$$FM(\rho) = \frac{2cz}{a} - fM$$

$$= \frac{2cz}{a} - \frac{cz}{a} - a = \frac{cz}{a} - a$$

$$= \frac{c(c - PF)}{a} - a = \frac{c^2 - a^2}{a} - \frac{c}{a}\rho\cos\sigma$$

$$= \frac{b^2}{a} - \frac{c}{a}\rho\cos\sigma;$$

e logo

$$\rho = \frac{b^2}{a + c \,.\, \cos\sigma}$$

he a equação polar da hyperbola.

870. Na parabola, sendo base o eixo principal e polo o foco, será § 815. Fig. 274.

$$FM(\rho) = c + x = 2c + PF = 2c - \rho\cos\sigma;$$

e logo

$$\rho = \frac{2c}{1 + \cos\sigma}$$

he a equação polar da parabola.

871. Seja a curva $AM(z)$, $PM(\rho)$, e o angulo $APM(\sigma)$; $PQ(x)$; $QM(y)$; $PT(s)$ perpendicular a PM; e $MT(t)$ a tangente da curva: teremos Fig. 294.

1.ª .... $y = \rho \operatorname{sen}\sigma$;

2.ª .... $x = -\rho\cos\sigma$;

3.ª .. $dy = d\rho \operatorname{sen}\sigma + \rho\, d\sigma \cos\sigma$;

4.ª ... $dx = -d\rho\cos\sigma + \rho\, d\sigma \operatorname{sen}\sigma$;

5.ª $ddy = dd\rho \operatorname{sen}\sigma + 2\, d\rho\, d\sigma\cos\sigma - \rho\, d\sigma^2 \operatorname{sen}\sigma$

$+ \rho\, dd\sigma \cos\sigma$;

6.ª $ddx = -dd\rho\cos\sigma + 2\, d\rho\, d\sigma \operatorname{sen}\sigma + \rho\, d\sigma^2\cos\sigma$

$+ \rho\, dd\sigma \operatorname{sen}\sigma$

872. Logo

$$dz^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2.$$

873. $dAPMA = dAQMA - dPQMP$

$$= y\,dx - d\,\frac{xy}{2}$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{2} = \frac{\rho^2 d\sigma}{2}.$$

874. He

$$\operatorname{tang} TMQ = \frac{\operatorname{tang} TMP + \operatorname{tang} PMQ}{1 - \operatorname{tang} TMP \times \operatorname{tang} PMQ},$$

isto he

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{s}{\rho} + \frac{x}{y}}{1 - \frac{sx}{\rho y}} = \frac{sy + \rho x}{\rho y - sx},$$

ou

$$\rho(y\,dx - x\,dy) = s(y\,dy + x\,dx)$$

$$= \rho^3 d\sigma = s\rho\, d\rho,$$

logo

$$s = \frac{\rho^2 d\sigma}{d\rho}.$$

875. He $dx\,ddy + dy\,ddx =$

$$-d\rho\, dd\rho \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma - 2\, d\rho^2\, d\sigma\cos^2\sigma$$

$$+ \rho\, d\rho\, d\sigma^2 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma - \rho\, d\rho\, dd\sigma\cos^2\sigma$$

$$+ \rho\, dd\rho\, d\sigma \operatorname{sen}^2\sigma + 2\rho\, d\rho\, d\sigma^2 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma$$

$$-\rho^2 d\sigma^3 \operatorname{sen}^2\sigma + \rho^2 d\sigma\, dd\sigma \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma$$

$$+ d\rho\, dd\rho \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma - 2d\rho^2 d\sigma \operatorname{sen}^2\sigma$$

$$-\rho d\rho\, d\sigma^2 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma - \rho d\rho\, dd\sigma \operatorname{sen}^2\sigma$$

$$+\rho\, dd\rho\, d\sigma\cos^2\sigma - 2\rho d\rho\, d\sigma^2 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma$$

$$-\rho^2 d\sigma^3\cos^2\sigma - \rho^2 d\sigma\, dd\sigma \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma$$

$$= -2d\rho^2 d\sigma - \rho d\rho\, dd\sigma + \rho\, dd\rho\, d\sigma - \rho^2 d\sigma^3$$

$$= (\rho d\rho)\, dd\rho - d\rho\, d(\rho d\sigma) - \frac{(\rho d\sigma)\, dz^2}{\rho}$$

$$= \rho^2 d\sigma^2 d\frac{d\rho}{\rho d\sigma} - d\sigma\, dz^2$$

$$= d\sigma^3\left(-\rho^2 - 2\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 + \frac{\rho\, d\frac{d\rho}{d\sigma}}{d\sigma}\right)$$

876. Logo

$$R = -\frac{dz^3}{dx\, ddy - dy\, ddx}$$

$$= \frac{dz^3}{dz^2 d\sigma - \rho^2 d\sigma^2 d\frac{d\rho}{\rho d\sigma}}$$

$$= \frac{\rho\, dz^3}{dz^2(\rho d\sigma) - \rho(\rho d\sigma)^2 d\frac{d\rho}{\rho d\sigma}}$$

$$= \frac{\left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\sigma^2}}$$

sendo, n'esta ultima expressão, $d\sigma$ constante.

877. A condição dos pontos de inflexão e de reversão da primeira especie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx},$$

dá

$$dx\,ddy - dy\,ddx$$

$$= 0 = (\rho\, d\sigma)\, dd\rho - d\rho\, d(\rho\, d\sigma) - \frac{(\rho\, d\sigma)\, dz^2}{\rho}$$

para as curvas polares.

878. Para que TM seja asymptota, he preciso que seja PM infinito: PM infinito, PT finito e MPT recto dão infinita a tangente trigonometrica de MTP, e logo recto este angulo: logo as asymptotas rectilineas das curvas polares determinão-se achando s por meio de $\frac{\rho^2 d\sigma}{d\rho}$, fazendo, n'esta expressão, ρ infinito, e tirando pelo extremo T de s huma perpendicular a s.

879. A subtangente s' de huma de duas curvas, referida ao mesmo polo e ao mesmo angulo σ, póde ser determinada por meio da subtangente s da outra, e dos raios vectores y e x de huma, e da outra: pois será

$$s = \frac{x^2\, d\sigma}{dx};$$

e

$$s' = \frac{y^2\, d\sigma}{dy} = \frac{s\, y^2\, dx}{x^2\, dy}.$$

880. A equação $y^2 = ax + bx^2$ póde pertencer a todas as secções conicas, segundo fôr b zero, positivo, negativo, ou -1: e será

$$2y\,dy = (a + 2bx)\, dx,$$

e

$$2dy^2 + 2y\,ddy = 2b\,dx^2;$$

e eliminando d'esta dy^2 por meio da antecedente, acharse-ha depois

$$ddy = \frac{-a^2}{4y^3}\, dx^2;$$

mas, sendo n a normal, he

$$n = \frac{y\, dz}{dx},$$

e logo

$$dz^3 = \frac{n^3 dx^3}{y^3},$$

e logo

$$R = -\frac{dz^3}{dx\,ddy} = \frac{n^3}{\frac{a^2}{4}},$$

isto he, em todas as secções conicas o raio de curvatura he o cubo da normal dividido pelo quadrado do semiparametro primeiro.

881. Dados em posição a recta AB, e o ponto C fóra d'ella, e tomada sobre CE a parte DE sempre a mesma, e para ambas as partes de AB; achar a curva que he lugar do ponto E. Fig. 295.

Tirem-se CA, EB perpendiculares a AB; chame-se a a AC, b a DE, x a AB, y a BE. Será

$$a : y :: AD : BD,$$

e logo

$$a + y : y :: x : DB,$$

d'onde

$$DB = \frac{xy}{x+y},$$

portanto

$$b^2 = \left(\frac{xy}{x+y}\right)^2 + y^2,$$

e logo

$$a^2b^2 + 2ab^2y + b^2y^2$$

$$= x^2y^2 + a^2y^2 + 2ay^3 + y^4$$

a equação algebrica da curva, que se chama *conchoide de Nicomedes.*

Chamando ρ a CE, e σ ao angulo ACE será

$$\rho = \frac{a}{\cos\sigma} \pm b$$

a equação polar da conchoide.

Logo he

$$s = \frac{\rho^2 d\sigma}{d\rho} = \frac{a}{\operatorname{sen}\sigma} \pm \frac{2b\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma} + \frac{b^2\cos^2\sigma}{b\operatorname{sen}\sigma};$$

mas ρ infinito faz

$$\cos\sigma = 0, \text{ ou } \sigma = 90°;$$

logo então he ρ perpendicular á base a, e a subtangente $s = a$, e a perpendicular AB a essa base he a asymptota da conchoide (§ 878).

Fig. 296. 882. O circulo ABC e o seu diametro AC são dados em grandeza e posição: o angulo ACD he recto; a recta AD he tirada do ponto A a qualquer ponto da recta CD, e corta a circumferencia em algum ponto B; AE he $= BD$: pede-se o logar do ponto E.

Tirem-se EF, BG perpendiculares a AC; será $GC = AF$.

Chame-se a a AC, x a AF, y a EF. Será

$$CG = x, \text{ e } AG = a - x;$$

$$x : y :: a - x : BG;$$

$$\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 y^2 = \overline{BG}^2 = AG \times GC = (a-x)x,$$

d'onde

$$0 = ay^2 - x^3 - xy^2$$

he a equação da curva a qual se chama *cissoide de Diocles.*

Chamando ρ a AE, e σ ao angulo EAC; será

$$\rho = \frac{x}{\cos\sigma},$$

e tambem

$$AE : AB :: AF : AG,$$

isto he

$$\rho : a\cos\sigma :: x : a - x,$$

ou

$$\rho = \frac{ax\cos\sigma}{a-x},$$

logo

$$x = a \operatorname{sen}^2 \sigma,$$

e

$$\rho = \frac{a \operatorname{sen}^2 \sigma}{\cos \sigma}$$

he a equação polar da cissoide, da qual se conclue que CD he asymptota.

883. CAC' he a curva, que o ponto A do circulo ASB descreveria, se este circulo tocasse primitivamente com o ponto A a recta CB no ponto C, e depois fosse applicando a sua circumferencia sobre esta mesma recta de C para B, de maneira, que em qualquer posição M, que o ponto A se achasse, e ME em que o circulo se achasse, fosse sempre $ME = CE$, isto he, iguaes o arco e recta que se tivessem tocado. Esta curva chama-se *cycloide:* CC' a sua *base*, ou *amplitude*, e o circulo chama-se *genitor*. Fig. 297.

Tomando $BS = ME$, e tirando a recta MSP terminada no diametro do circulo genitor, serão iguaes as cordas de ME e SB, e parallelas por formarem angulos iguaes com a tangente CB de ambos os arcos, e logo $MS = BE$.

A posição actual do circulo he a em que se acha, depois de ter applicado a semicircumferencia á base. He pois AB diametro, e logo perpendicular á base.

Por ser

$$CB = BSA, \text{ e } CE = EM = BS,$$

será

$$BE = AS = MS,$$

e logo PM, ou

$$y = AS + \operatorname{sen} AS.$$

Seja

$$AB = 2a, \text{ e } AP = x;$$

será

$$dy = dAS + d \operatorname{sen} AS$$

$$= \frac{a\, d \operatorname{sen} AS}{\cos AS} + d \operatorname{sen} AS$$

$$=\frac{2a-x}{a-x}\,d\sqrt{2ax-x^2}=dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

a equação differencial da cycloide.

Passando das coordenadas antecedentes para aquellas, em que C fosse origem de abscissas x', e a base $C\,C'$ o eixo d'ellas, a equação seria

$$dy'=dx'\sqrt{\frac{2a-y'}{y'}}.$$

Tirando $S\,T$ tangente do circulo genitor e $=\frac{M\,S\,d\,A\,S}{d\,M\,S}$ $=M\,S$, será $M\,T$ tangente da cycloide (§ 864).

Será

$$dz=dx\sqrt{\frac{2a}{x}},$$

e

$$ddy=\frac{-a\,dx^2}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a-x}},$$

e logo o raio de curvatura $R=2\sqrt{2a\,(2a-x)}$: logo para o ponto C, para o qual he $x=2a$, he $R=0$, ou a evoluta passa por C, e para o ponto A he $R=2.2a$, o dobro de $A\,B$, ou a evoluta passa por F.

A abscissa $A\,G$, ou t, ou $R\,\frac{dy}{ds}+x$ da evoluta da cycloide he $=4a-x$, e a ordenada $G\,H$, ou u he $=2\sqrt{2ax-x^2}$ $-y$; logo he

$$du=\frac{(2a-2x)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}-dy$$

$$=\frac{-\sqrt{x}\,.\,dx}{\sqrt{2a-x}}=\frac{dt\sqrt{4a-t}}{\sqrt{t-2a}}.$$

Refira-se a evoluta ás coordenadas $C\,I\,(y')$, e $I\,H\,(x')$.

Será

$$x'=t-2a;\ y'=C\,B-u;$$

logo

$$du=-dy',\ dt=dx,$$

e

$$\sqrt{4a-t}=\sqrt{2a-x'};$$

será

$$-dy'=dx'\sqrt{\frac{2a-x'}{x'}},$$

equação, que mostra, que a evoluta da semicycloide *CA* he a outra semicycloide *AC* collocada porém em *CF*.

884. Se o angulo σ fôr augmentado por 2π, ou pelos multiplos successivos de 2π, a curva polar poderá muitas vezes dar muitas voltas em torno do polo, como acontece quando a curva tem esta equação $\rho=a\sigma$, que se chama *spiral de Archimedes;* ou esta $\rho^2=a\sigma$ que se chama *spiral parabolica;* ou esta $\rho\sigma=a$, que se chama *spiral hyperbolica;* ou esta $ly=a\sigma$ que se chama *spiral logarithmica.*

885. Na spiral hyperbolica he

$$s=\frac{\rho^2 d\sigma}{d\rho}=-a,$$

mas ρ infinito faz $\sigma=0$, logo então ρ está na direcção da base: levante-se pois do polo huma perpendicular á base $e=a$, mas para a parte opposta áquella, para que se devião tirar as subtangentes, a que pelo extremo d'esta se tirar perpendicular, será asymptota.

886. Na spiral logarithmica he $\frac{d\rho}{\rho d\sigma}=a$, e logo $\frac{s}{\rho}=\frac{1}{a}$ isto he, a tangente trigonometrica do angulo formado pelo raio vector, e tangente he constante e logo tambem esse angulo.

O raio de curvatura reduz-se a $\frac{dz}{d\sigma}$: produzida pois *TP* para *B*, e tirada *MB* perpendicular a *TM*: será Fig. 298.

$$MB:PM::TM:PT$$

ou

$$MB:\rho::\sqrt{\rho^2+s^2}:s;$$

logo

$$MB = \frac{\rho\sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^4 d\sigma^2}{d\rho^2}}}{\frac{\rho^2 d\sigma}{d\rho}} = \frac{dz}{d\sigma} = R.$$

Logo B he ponto da evoluta e MB tangente d'ella, e por ser MBP igual a PMT, e por consequencia constante, será a evoluta a mesma spiral logarithmica, e não póde haver differença entre ella, e a tangente BM que não seja constante; mas nem essa ha, porque fazendo σ negativo na equação da spiral, esta chegará ao polo, e n'este ponto a sua tangente, e ella são nullas.