SUPPLEMENTO

AO

CALCULO DAS EPHEMERIDES ASTRONOMICAS

Por não nos haverem permittido trabalhos urgentes publicar segunda edição do *Calculo das Ephemerides Astronomicas*, 1849, damos aqui a jusficação dos processos que se tem empregado no uso e no calculo de alguns artigos introduzidos posteriormente nas Ephemerides.

Distancias lunares

229. Chamando L.P.(n) o logarithmo proporcional de um numero n, e Δ e δ as differenças entre duas distancias separadas pelos intervallos de tempo 3^h e t, a equação

$$\frac{\delta}{\Delta}=\frac{t}{3^h}.$$

póde escrever-se, passando aos logarithmos, de qualquer dos dois modos:

$$\text{Log.}\,\delta=\text{Log.}\,t-\text{L.P.}(\Delta),\ \text{Log.}\,t=\text{Log.}\,\delta+\text{L.P.}(\Delta)\ \ldots\ldots\ (1),$$

$$\text{L.P.}(\delta)=\text{L.P.}(\Delta)+\text{L.P.}(t),\ \text{L.P.}(t)=\text{L.P.}(\delta)-\text{L.P.}(\Delta)\ ..\ (2);$$

o primeiro dos quaes é o que se tem empregado exclusivamente no uso das Ephemerides até 1887, e o segundo é o que se addiccionou nas de 1888.

230. Mas, quando as differenças segundas Δ^2 são importantes, isto é, quando os logarithmos proporcionaes variam consideravelmente, o valor de t dado por aquellas equações carece de uma correcção attendivel, de que vamos occupar-nos.

Para o intervallo 3^h, é

$$F' = F + \frac{t}{3}\Delta - \frac{t}{6}\Delta^2\left(1 - \frac{1}{3}t\right).$$

Pondo $$t_{,} = \frac{3(F' - F)}{\Delta} = \text{Log.}(F' - F) + \text{L.P.}(\Delta),$$

e usando de $t_{,}$ em vez de t no pequeno termo dependente de Δ^2, teremos pois

$$\text{corr.}\ t_{,} = t - t_{,} = \frac{t_{,}}{2}\cdot\frac{\Delta^2}{\Delta}\left(1 - \frac{1}{3}t_{,}\right).$$

Mas é $$\text{L.P.}(\Delta') - \text{L.P.}(\Delta) = \delta\text{L.P.}(\Delta) = \text{Log.}\frac{\Delta}{\Delta'},$$

ou $$\text{L.P.}(\Delta') - \text{L.P.}(\Delta) = \text{Log.}\left(\frac{\Delta}{\Delta + \Delta^2}\right) = -M\frac{\Delta^2}{\Delta},$$

designando M o modulo dos logarithmos tabulares; por conseguinte, substituindo na corr. $t_{,}$, ficará

$$\text{corr.}\ t_{,} = -\frac{t_{,}}{2}\left(1 - \frac{1}{3}t_{,}\right)\frac{\delta\text{L.P.}(\Delta)}{M} \ldots\ldots\ldots (3);$$

formula que, reduzida a taboa de duas entradas com os argumentos $t_{,}$ e $\delta\text{L.P.}(\Delta)$, deve dar a taboa III juncta ás Ephemerides.

Ou, com a fórma dada na Advertencia das Ephemerides de 1874:

$$\log. t = \log. t_{,} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}t_{,}\right)\delta\,\mathrm{L.P.}(\Delta).$$

231. No caso de variarem consideravelmente as differenças dos logarithmos proporcionaes, $\delta\mathrm{L.P.}(\Delta)$, empregaremos (n.° 171) $\frac{\Delta_{,}^{2}+\Delta^{2}}{2}$ em vez de Δ^{2}, e, deprezando $\left(\frac{\Delta_{,}^{2}}{\Delta}\right)^{2}$ em $\frac{\Delta_{,}^{2}}{\Delta_{,}} = \frac{\Delta_{,}^{2}}{\Delta - \Delta_{,}^{2}} = \frac{\Delta_{,}^{2}}{\Delta} + \left(\frac{\Delta_{,}^{2}}{\Delta}\right)^{2}\ldots.$, teremos assim

$$\delta\mathrm{L.P.}(\Delta_{,}) = -\mathrm{M}\frac{\Delta_{,}^{2}}{\Delta}, \quad \delta\mathrm{L.P.}(\Delta) = -\mathrm{M}\frac{\Delta^{2}}{\Delta},$$

$$\text{corr.}\, t_{,} = -\frac{t_{,}}{2}\left(1 - \frac{1}{3}t_{,}\right)\frac{\delta\mathrm{P.L.}(\Delta_{,}) + \delta\mathrm{P.L.}(\Delta)}{2\mathrm{M}} \ldots\ldots (4),$$

formula mais approximada que a (3).

Tal é correcção que tem servido no uso das Ephemerides.

EXEMPLO

No exemplo do n.° 44 da Explicação das Ephemerides de 1888 são:

$$t_{,} = 58^{\mathrm{m}}47^{\mathrm{s}} = 58^{\mathrm{m}},78333 = 0^{\mathrm{h}},979722;$$

$$1 - \frac{1}{3}t_{,} = 0^{\mathrm{h}},673426; \quad \frac{\delta\mathrm{P.L}(\Delta_{,}) + \delta\mathrm{P.L}(\Delta)}{2} = -0,0236.$$

O que substituido na formula (4) dá:

$l\left(1-\frac{1}{3}t_{\prime}\right)^{(h)}$ ...	9.8282899	$2(t-t_{\prime})$...	$2^{m},1511$
$lo,\ 0236$	8.3729120	$t-t_{\prime}$....	$1^{m}4',5$
$C.l.M$	0,3622157		
$lt_{\prime}^{(m)}$	1,7692541		
$l2(t-t_{\prime})$.......	0,3326717		

232. Mais exactamente seria:

$$\delta L.P.(\Delta)=-M\left\{\frac{\Delta^2}{\Delta}-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta^2}{\Delta}\right)^2\right\},$$

isto é,

$$\frac{\Delta^2}{\Delta}=-\frac{\delta L.P.(\Delta)}{M}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\delta L.P.(\Delta)}{M}\right),$$

e por conseguinte

$$\text{corr.}\ t_{\prime}=-\frac{t_{\prime}}{2}\left(1-\frac{1}{3}t_{\prime}\right)\frac{\delta L.P.(\Delta)}{M}\left(1-\frac{\delta L.P.(\Delta)}{2\ M}\right)\ldots(3)',$$

em vez de (3).

E, se quizessemos aproveitar inteiramente Δ^3, poderiamos ajunctar ao 2.º membro da eqzação $(3)'$ o termo que a converteria em:

$$\left.\begin{aligned}\text{corr.}\ t_{\prime}&=(3)'-\frac{\frac{1}{3}.t_{\prime}\left(1-\frac{1}{3}t_{\prime}\right)\left(2-\frac{1}{3}t_{\prime}\right)}{2}.\frac{\Delta^3}{\Delta},\\ &=(3)'-\frac{\frac{1}{3}t_{\prime}\left(1-\frac{1}{3}t_{\prime}\right)\left(2-\frac{1}{3}t_{\prime}\right)}{2}[LP.(\Delta)+\log.\Delta^3-0,4771]\end{aligned}\right\}\ldots(4)'.$$

Mas os resultados das novas correcções pouco alterariam os da equação (4). E por isso bastará usar d'esta equação, se não se quizer formar duas taboas, a primeira, de $(3)'$, com os argumentos $t_{,}$ e δL. P (Δ), e a segunda, do 2.° termo de $(4)'$, com os argumentos $t_{,}$ e

$$\mathrm{L.\,P}(\Delta) + \log.\Delta^3 - 0{,}4771 = k,$$

tendo ajunctado ás columnas das paginas das distancias da Ephemeride outras com este argumento k.

Maximas phases nos eclipses do Sol

233. As equações fundamentaes no calculo dos eclipses do Sol no horizonte (pag. 123) são:

$$\mathrm{sen\,P} = \cos d \,\mathrm{sen}\, x,\quad c^2 = (ht \pm p\cos x)^2 + (\Delta - p\,\mathrm{sen}\,x + \delta t)^2.$$

Egualando a zero as derivadas da segunda em ordem a t e x,

$$\frac{dc}{dt} = 0,\quad \frac{dc}{dx} = 0,$$

e combinando-as uma com a outra, acham-se:

$$\frac{ht \pm p\cos x}{\Delta - p\,\mathrm{sen}\,x + \delta t} = -\frac{\delta}{h} = \mp\frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x},$$

isto é, $$x = \pm(90^\circ - \alpha).$$

Portanto $$\mathrm{sen\,P} = \pm\cos d\cos\alpha.$$

Depois $$\frac{dc}{dt} = 0 \quad \text{dará } t = -\frac{\Delta\,\mathrm{tang}\,\alpha\cos^2\alpha}{h}.$$

Finalmente a condição de estar o Sol no horizonte,

$$\cos \mathrm{H} = -\operatorname{tang} d \operatorname{tang} \mathrm{P},$$

dará $\operatorname{tang} \mathrm{H} = \dfrac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{sen} d}$.

E substituindo na expressão de c os valores de x e t, esta expressão reduzir-se-ha a

$$c = \Delta \cos \alpha \mp p.$$

234. Resolve pois o problema o systema das equações seguintes:

$$\left\{\begin{array}{l}
\operatorname{sen} \mathrm{P} = \pm \cos d \cos \alpha, \quad t = -\dfrac{\Delta \operatorname{tang} \alpha \cos^2 \alpha}{h}, \\[2ex]
\operatorname{tang} \mathrm{H} = \dfrac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{sen} d}, \quad \mathrm{T} = \delta + t, \\[2ex]
\text{long. para or} = \dfrac{\mathrm{H}}{15} - \text{eq.}\, t - \mathrm{T}, \\[2ex]
\text{min. dist.} = \Delta \cos \alpha \mp p, \quad \text{gr.} = \dfrac{6^{\text{dig.}} (\text{sem} ☾ + \text{sem} \odot - \text{min dist.})}{\text{sem} \odot};
\end{array}\right.$$

pertencendo o signal superior ao horizonte oriental, e o signal inferior ao horizonte occidental.

EXEMPLO

Em 25 de abril de 1884 eram:

$$\mathrm{A} = 35',197; \ \delta = +8',507; \ d' = +12°15'16''; \ d = +13°28'42'',2,$$

$$p(a\,71°) = 60',792; \ \Sigma = 32',603; \ \text{sem} \odot = 15',922,$$

que dão $\qquad \alpha = +13°53'32; \ \Delta \cos \alpha = -69',348.$

E, substituindo nas formulas, teremos:

$l\cos\alpha$....	9.98711	$l\Delta\cos\alpha$....	1,84043 —	$l\,\mathrm{tg}\,\alpha$...	9.39328
$\cos d$	9.98793	$l\,\mathrm{sen}\,\alpha$	9.38039	$\mathrm{sen}\,d$....	9.36644
sen P	9.97504	$\mathrm{Cl}\,h$..	8.46350	$l\,\mathrm{tg}\,\mathrm{H}$ ...	0,02684
P......	—70°46′	$\lg t$	9.68432 +	H.....	46°46′10″
Lat	—70°53′	t.......	+ $0^h,4834$	$\frac{\mathrm{H}}{15}$	$3^h,1179$
				— Eqt..	—0,0368
					3,0811

σ	$1^h,7287$	$\frac{\mathrm{H}}{15}$ — eqt.	3,0811	
t	0 ,4834	T	$2,2121^h$	
T	2 ,2121	Long or.	0,8690	= 13°,0

	$\Delta\cos\alpha$	—69′,348
	$+p$	+ 60 ,792
min. dist.	$\Delta\cos\alpha - p$	= 8′,556

$$\text{grand.} = \frac{6(32,603 - 8,556)}{15,922} = 9^d,067$$

Longitudes e latitudes da Lua

234. Usando dos A e B das Ephemerides, que são

$$\mathrm{A} = \frac{\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2}{2i}, \quad \mathrm{B} = \frac{\Delta^2}{2i^2},$$

calculam-se approximadamente as longitndes e latitudes da Lua pela formula

$$\mathrm{L}' = \mathrm{L} + (\mathrm{A} + \mathrm{B}t)\,t \dots \quad (1),$$

como é sabido (n.os 63 e 170).

235. Para aproveitar depois as differenças 3.as e 4.as com facilidade, a formula de interpolação

$$\mathrm{L}' = \mathrm{L}'_1 + \frac{t(t-i)(t-2i)}{2.3.i^3}\Delta^3 + \frac{t(t-i)(t-2i)(t-3i)}{2.3.4\,i^4}\Delta^4$$

póde transformar-se do modo seguinte:

As expressões dos B consecutivos e as suas differenças successivas dão:

$$B = \frac{\Delta^2}{2i^2},\ B' = \frac{\Delta'^2}{2i^2},\ B'' = \frac{\Delta''^2}{2i^2},$$

$$\delta B = \frac{\Delta'^2 - \Delta^2}{2i^2} = \frac{\Delta^3}{2i^2},\ \delta B' = \frac{\Delta''^3 - \Delta'^2}{2i^2} = \frac{\Delta'^3}{2i^2},$$

$$\delta^2 B = \frac{\Delta'^3 - \Delta^3}{2i^2} = \frac{\Delta^4}{2i^2},$$

o que transforma a formula em

$$L' = L'_1 + \frac{t(t-i)(t-2i)}{3i}\left(\delta B + \frac{t-3i}{4i}\delta^2 B\right) \ldots\ldots\ (2).$$

236. Assim, obtido L'_1 pela formula (1), e achados nas taboas X e XI junctas ás Ephemerides os factores

$$F = \frac{t(t-12)(t-24)}{36},$$

e

$$F' = \frac{t-36}{48},$$

a formula

$$L' = L'_1 + F(\delta B + F'\delta^2 B)$$

dará o valor de L' exacto até ás differenças 4.^{as}.