ELEMENTOS
DE
EUCLIDES.

ELEMENTOS
DE
EUCLIDES
DOS SEIS PRIMEIROS LIVROS,
DO UNDECIMO, E DUODECIMO
DA VERSÃO LATINA
DE
FEDERICO COMMANDINO,
ADDICIONADOS E ILLUSTRADOS
POR
ROBERTO SIMSON
PROFESSOR DE MATHEMATICA
NA ACCADEMIA DE GLASGOW.

COIMBRA,
NA REAL IMPRENSA DA UNIVERSIDADE.
CIↃ. IↃCC. LXXXXII.

PRIVILEGIO.

EU ELREY. Faço ſaber aos que eſte Alvará virem: Que Havendo Eu Ordenado pelos Eſtatutos Noviſſimos, com que Reſtaurei, e Mandei de novo fundar a Univerſidade de Coimbra, que os Eſtudos das Sciencias Mathematicas conſtituiſſem nella huma indiſpenſavel Faculdade: E ſendo ao meſmo fim Servido pela Minha Carta de Ley de dez de Novembro de mil ſetecentos ſetenta e dous abolir, e caſſar os Titulos Nono, e Decimo dos Eſtatutos do Collegio Real de Nobres, pelos quaes os referidos Eſtudos deviaõ tambem ſer enſinados no ſobredito Collegio, para que ſó, e unicamente foſſem promovidos, e cultivados na dita Univerſidade, em commum beneficio de todos os Meus Fieis Vaſſallos: Por quanto pela ſobredita aboliçaõ ficaraõ os referidos Eſtudos proprios, e privativos da Univerſidade, e veio a ceſſar o fim do Privilegio excluſivo, que para a impreſſaõ dos Livros Claſſicos Havia concedido pela outra Carta da Ley, e Doaçaõ perpetua feita ao dito Collegio

em

em doze de Outubro de mil setecentos sessenta e sinco; naquella parte, que he respectiva aos Livros Mathematicos: Hey por bem transferir para a sobredita Universidade de Coimbra o mesmo Privilegio exclusivo para a impressaõ dos Livros de Euclides, Archimedes, e outros Classicos das Sciencias Mathematicas; assim, e da maneira que na sobredita Doaçaõ Eu havia concedido ao referido Collegio: Revogando, como Revogo a este fim, a mesma Doaçaõ naquella parte, que na generalidade della só he comprehensiva das impressoens dos ditos Livros, ou de outros, que hajaõ de servir aos sobreditos Estudos Mathematicos, e pelos quaes se devaõ ensinar na mesma Universidade de Coimbra.

Pelo que: Mando ao Marquez de Pombal, do Meu Conselho de Estado, e Meu Lugar-Tenente na Fundaçaõ da Universidade de Coimbra; á Real Mesa Censoria; Mesa do Desembargo do Paço; Regedor da Casa da Supplicaçaõ; Conselhos de Minha Real Fazenda; e dos Meus Dominios Ultramarinos; Mesa da Consciencia, e Ordens; Governador da Relaçaõ, e Casa do Porto; Senado da Camara;

ra; e bem assim a todos os Desembargadores, Corregedores, Provedores, Ouvidores, Juizes, Justiças, e mais pessoas destes Meus Reinos, e Dominios, a quem o conhecimento deste Alvará deva pertencer, que o cumpraõ, e guardem, e façaõ cumprir, e guardar sem duvida, ou embargo algum, qualquer que elle seja; naõ obstante a sobredita Carta, Ley, e Doaçaõ perpetua de doze de Outubro de mil setecentos sessenta e sinco, que Tenho revogado ao sobredito fim na parte, que só respeita ás sobreditas impressoens; ficando para tudo o mais em seu vigor, e inteira validade. E este valerá como se passasse pela Chancellaria, posto que por ella naõ ha de passar; e o seu effeito haja de durar hum, e muitos annos: naõ obstantes as Ordenaçoens em contrario, as quaes Hey por derogadas para este effeito sómente. Dado no Palacio de Nossa Senhora da Ajuda em deseseis de Dezembro de mil setecentos setenta e tres.

REY...

Marquez de Pombal.

AL-

VIII.

A Lvará, porque vossa Magestade, pelos motivos nelle expressos, He servido transferir para a Universidade de Coimbra o Privilegio exclusivo para as impressoens dos Livros Classicos dos Estudos Mathematicos; havendo cessado o fim, com que antes fora concedido, e doado ao Collegio Real de Nobres; na fórma acima declarada.

Para vossa Magestade ver.

Joaõ Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá o fez.

Cumpra-se, e registe-se. Nossa Senhora da Ajuda em 4 de Janeiro de 1774.

Marquez Visitador.

No Livro de Providencia Litteraria desta Secretaria de Estado dos Negocios do Reino fica registado este Alvará. Nossa Senhora da Ajuda em 3 de Janeiro de 1774.

Joaõ Chrisostomo de Faria e Sousa de Vasconcellos de Sá.

LI-

LIVRO I.
DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

DEFINIÇÕES.

I.

PONTO he o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.

II.

Linha he o que tem comprimento ſem largura.

III.

As extremidades da linha são pontos.

IV.

A linha recta he aquella, que eſtá poſta igualmente entre as ſuas extremidades.

V.

Superficie he o que tem comprimento, e largura.

VI.

As extremidades da superficie são linhas.

VII.

A superficie plana he aquella, sobre a qual assenta toda huma linha recta entre dous pontos quaesquer, que estiverem na mesma superficie.

VIII.

O angulo plano he a inclinação reciproca de duas linhas, que se tocão em huma superficie plana, sem estarem em direitura huma com outra.

IX.

O angulo plano rectilineo he a inclinação reciproca de duas linhas rectas, que se encontrão, e não estão em direitura huma com outra.

Figura 1. Se alguns angulos existirem no mesmo ponto B, cada hum delles vem indicado com tres letras do alfabeto; e a que estiver no vertice do angulo, isto he, no ponto, no qual se encontrão as rectas, que formão o angulo, se põe no meio das outras duas; e destas huma está posta perto de huma das ditas rectas, em alguma parte, e a outra perto da outra linha. Assim o angulo feito pelas rectas AB, CB representar-se-ha com as letras ABC, ou CBA; o angulo formado pelas rectas AB, DB, com as letras ABD, ou DBA; e o angugulo, que fazem as rectas DB, CB, com as letras DBC, ou CBD. Mas se hum angulo estiver separado de outro qualquer, poder-se-ha marcar com a mesma letra, que estiver no vertice, como o angulo no ponto E. Fig. 2.

X.

Quando huma linha recta cahindo sobre outra linha recta, fizer com esta dous angulos iguaes, hum de huma, e outro de outra parte, cada hum destes angulos iguaes se chama angulo recto; e a linha incidente se diz perpendicular á outra linha, sobre a qual cahe. Fig. 3.

XI.

O angulo obtuso he o que he maior, que o angulo recto. Fig. 4.

XII.

O angulo agudo he o que he menor, que o angulo recto. Fig. 5.

XIII.

Termo se diz aquillo, que he extremidade de alguma cousa.

XIV.

A figura he hum espaço fechado por hum, ou mais termos.

XV.

O circulo he huma figura plana fechada por huma só linha, a qual se chama circunferencia: de maneira que todas as linhas rectas, que de hum certo ponto existente no meio da figura se conduzem para a circunferencia, são iguaes entre si. Fig. 6.

XVI.

O dito ponto ſe chama centro do circulo.

XVII.

O diametro do circulo he huma linha recta, que paſſa pelo centro, e que ſe termina por ambas as partes em a circunferencia.

XVIII.

Semicirculo he huma figura comprehendida entre o diametro, e aquella parte da circunferencia do circulo, que he cortada pelo diametro.

XIX.

Segmento de circulo he huma figura comprehendida entre huma linha recta, e huma porção da circunferencia.

XX.

As figuras rectilineas são as que são formadas com linhas rectas.

XXI.

As trilateras são aquellas, que são formadas com tres linhas rectas.

XXII.

As quadrilateras são aquellas, que são feitas por quatro linhas rectas.

XXIII.

As multilateras são as que são feitas por mais de quatro linhas rectas.

XXIV.

Fig. 7. Entre as figuras trilateras o triangulo equilatero he o que tem os tres lados iguaes.

XXV.

XXV.

O triangulo isosceles he o que tem somente dous lados iguaes. Fig. 8.

XXVI.

O triangulo scaleno he o que tem os tres lados desiguaes. Fig. 9.

XXVII.

O triangulo rectangulo he o que tem hum angulo recto. Fig. 10.

XXVIII.

O triangulo obtusangulo he o que tem hum angulo obtuso. Fig. 11.

XXIX.

O triangulo acutangulo he o que tem todos os tres angulos agudos. Fig. 12.

XXX.

Entre as figuras quadrilateras o quadrado he o que he juntamente equilatero, e rectangulo. Fig. 13.

XXXI.

E a figura, que de huma parte for mais comprida, póde ser rectangula, mas não equilatera. Fig. 14.

XXXII.

Mas o rhombo he huma figura equilatera, e não rectangula. Fig. 15.

XXXIII.

E a rhomboide he huma figura, que tendo os lados oppostos iguaes, nem he equilatera, nem equiangula. Fig. 16.

XXXIV.

Todas as mais figuras quadrilateras, que não são as referidas, se chamão trapezios.

XXXV.

XXXV.

Fig. 17. Linhas parallelas, ou equidiſtantes são linhas rectas, que exiſtindo no meſmo plano, e ſendo produzidas de ambas as partes, nunca ſe chegão a tocar.

POSTULADOS.

I.

PEde-ſe como couſa poſſivel, que ſe tire de hum ponto qualquer para outro qualquer ponto huma linha recta.

II.

E que huma linha recta determinada ſe continue em direitura de ſi meſma até aonde ſeja neceſſario.

III.

E que com qualquer centro, e qualquer intervallo ſe deſcreva hum circulo.

AXIOMAS.

I.

AS couſas, que são iguaes a huma terceira, são iguaes entre ſi.

II.

Se a couſas iguaes ſe ajuntarem outras iguaes, os todos ſerão iguaes.

III.

E ſe de couſas iguaes ſe tirarem outras iguaes, os reſtos ſerão iguaes.

IV.

IV.

E se a cousas desiguaes se ajuntarem outras iguaes, os todos serão desiguaes.

V.

E se de cousas desiguaes se tirarem cousas iguaes, os restos serão desiguaes.

VI.

As quantidades, das quaes cada huma por si faz o dobro de outra quantidade, são iguaes.

VII.

E aquellas, que são ametades de huma mesma quantidade, são tambem iguaes.

VIII.

Duas quantidades, que se ajustão perfeitamente huma com outra, são iguaes.

IX.

O todo he maior do que qualquer das suas partes.

X.

Duas linhas rectas não comprehendem espaço.

XI.

Todos os angulos rectos são iguaes.

XII.

E se huma linha recta encontrando-se com outras duas rectas, fizer os angulos internos da mesma parte menores que dous rectos, estas duas rectas produzidas ao infinito concorrerão para a mesma parte dos ditos angulos internos. Vejão-se as notas sobre a Proposição 29. do Livro primeiro.

Es-

Estes sinaes $=$, $>$, $<$, de que os Mathematicos usão frequentemente, servem para maior brevidade.

O sinal $=$ significa, que o primeiro termo he igual ao segundo.

$>$ que o primeiro termo he maior que o segundo.

$<$ que o primeiro termo he menor que o segundo.

Assim $A = B$ significa, que A he igual a B.

$A > B$ que A he maior que B.

$A < B$ que A he menor que B.

PROPOSIÇÃO I. PROBLEMA.

SObre huma linha recta determinada descrever hum triangulo equilatero.

Fig. 18. Seja a linha recta AB de hum certo comprimento. Se deve sobre ella descrever hum triangulo equilatero.

Com o centro A, e com o intervallo AB se descreva [a] o circulo BCD; e com o centro B, e com o intervallo BA se descreva o circulo ACE. Do ponto C, onde os circulos se cortão reciprocamente, se tirem [b] para os pontos A, B as rectas CA, CB. O triangulo ABC será equilatero. Sendo o ponto A o centro do circulo BCD, será $AC = AB$ [c]. E sendo o pon-

a. postulado 3.

b. post. 2.

c. definição 15.

ponto B o centro do circulo CAE, ſerá BC = BA. Mas temos viſto CA = AB. Logo tanto CA como CB he igual a AB. Mas as couſas, que são iguaes a huma terceira, são iguaes entre ſi [d]. Logo ſerá CA = CB. Logo as tres rectas CA, AB, BC são iguaes, e por conſequencia o triangulo ABC feito ſobre a recta dada AB he equilatero.

d. axioma 1.

PROP. II. PROB.

DE hum ponto dado tirar huma linha recta igual á outra recta dada.

Seja dado o ponto A, e dada tambem a recta BC. Se deve do ponto A tirar huma linha recta igual á recta dada BC. Fig. 19.

Do ponto A para o ponto B tire-ſe [a] a recta AB, e ſobre eſta ſe faça [b] o triangulo equilatero DAB; e ſe produzão [c] as rectas AE, BF em direitura das rectas DA, DB. Com o centro B, e o intervallo BC ſe deſcreva [d] o circulo CGH; e tambem com o centro D, e o intervallo DG ſe deſcreva o circulo GKL. Sendo o ponto B o centro do circulo CGH, ſerá BC = BG [e]. E ſendo D o centro do circulo GKL, ſerá DL = DG. Mas as partes DA, DB das rectas DL, DG são iguaes. Logo tiradas eſtas, as partes reſiduas AL, BG ſerão tambem iguaes [f]. Mas temos demonſtrado, que he BC = BG. Logo cada huma das duas AL, BC ſerá igual a BG. Mas as couſas iguaes a hu-

a. poſt. 1.
b. propoſição 1. 1.
c. poſt. 2.
d. poſt. 3.
e. def. 15.
f. ax. 3.

huma terceira são iguaes entre si. Logo será AL = BC, e por consequencia temos tirado do ponto A a linha recta AL igual á outra dada BC.

PROP. III. PROB.

DAdas duas linhas rectas desiguaes, cortar da linha maior huma parte igual á linha menor.

Fig 20. Sejão as duas rectas desiguaes AB, e C, e seja AB maior. Se deve da recta maior AB cortar huma parte igual á recta menor C.

a. 2. 1. Do ponto A se tire [a] a recta AD = C. Com
b. post. 3. o centro A, e o intervallo AD se descreva [b] o circulo DEF. Porque o ponto A he o centro do circulo DEF, será AE = AD. Mas he tambem C = AD. Logo tanto AE, como C será igual a AD, e por consequencia AE =
c. ax. 1. C [c]. Logo temos tirado da recta maior AB huma parte AE igual á recta C < AB.

PROP. IV. THEOREMA.

SE dous triangulos tiverem dous lados iguaes a dous lados, cada hum a cada hum; e os angulos comprehendidos por estes lados forem tambem iguaes; as bazes, e os triangulos, e os mais angulos, que são oppostos a lados iguaes, serão tambem iguaes.

Se-

Sejáo os dous triangulos ABC, DEF, cujos lados AB, AC; DE, DF sáo iguaes, cada hum a cada hum, isto he, AB=DE, e AC=DF; e seja o angulo BAC=EDF. Digo, que a baze BC he igual á baze EF; e que o triangulo ABC he igual ao triangulo DEF; e que os outros angulos do primeiro triangulo sáo iguaes aos outros do segundo, cada hum a cada hum, segundo ficáo oppostos a lados iguaes; isto he, o angulo ABC=DEF, e ACB=DFE. Fig. 21.

Considere-se posto o triangulo ABC sobre o triangulo DEF, de sorte, que o ponto A caia sobre o ponto D, e a recta AB sobre a recta DE. O ponto B cahirá sobre o ponto E, por ser AB=DE. Ajustando-se pois AB sobre DE, tambem a recta AC se ajustará sobre a recta DF, sendo o angulo BAC=EDF. Logo sendo AC=DF, o ponto C cahirá sobre o ponto F. Mas temos visto, que B cahe sobre E. Logo a baze BC se ajustará sobre a baze EF. Porque se náo se ajustarem, cahindo B em E, e C em F, se seguirá, que duas linhas rectas comprehendem hum espaço, o que náo póde ser [a]. Logo a baze BC se deve ajustar sobre a baze EF, e por consequencia sáo iguaes. Logo todo o triangulo ABC se ajusta sobre todo o triangulo DEF, e assim sáo iguaes; e os outros angulos do primeiro triangulo tambem se ajustáo sobre os outros do segundo, e sáo iguaes; isto he, o angulo ABC=DEF, e ACB=DFE.

a. ax. 10.

PROP.

PROP. V. THEOR.

EM qualquer triangulo isósceles os angulos, que estão sobre a baze, são iguaes; e produzidos os lados iguaes, os angulos, que se formão debaixo da baze, são tambem iguaes.

Fig. 22. Seja o triangulo isósceles ABC com os lados iguaes AB, AC, os quaes sejão produzidos para D, e E. Digo, que será o angulo ABC=ACB; e CBD=BCE.

Tome-se na recta BD hum ponto qualquer F; e da recta AE>AF se corte [a] a parte AG=AF; e se tirem as rectas FC, GB. Sendo AF=AG, e AB=AC; as duas FA, AC serão iguaes ás duas GA, AB, cada huma a cada huma. E além disto comprehendem o angulo commum FAG. Logo a baze FC será igual [b] á baze GB; e o triangulo AFC igual ao triangulo AGB; e os mais angulos iguaes aos mais angulos, cada hum a cada hum; isto he, os que são oppostos a lados iguaes, como ACF=ABG, e AFC=AGB. E sendo AF=AG, e AB=AC, tirando AB de AF, e AC de AG, ficará BF=CG [c]. Mas temos demonstrado, que FC=GB. Logo as duas BF, FC são iguaes ás duas CG, GB, cada huma a cada huma; e o angulo BFC=CGB. Mas a baze BC he commua aos dous triangulos FBC, GCB. Logo estes dous triangu-

a. 3. 1.
b. 4. 1.
c. ax. 3.

gu-

gulos são iguaes [b]; e os mais angulos delles, b. 4. 1.
que forem oppostos a lados iguaes, são tambem iguaes. Logo será o angulo FBC=GCB, e BCF=CBG. Assim sendo o angulo total ABG igual ao total ACF, como se tem demonstrado; e sendo CBG=BCF, tirando CBG de ABG, e BCF de ACF, ficará o angulo ABC=ACB, que são os angulos sobre a baze BC do triangulo isosceles ABC. E já se tem provado FBC=GCB, que são os angulos debaixo da mesma baze BC.

PROP. VI. THEOR.

Se dous angulos de hum triangulo forem iguaes; os lados oppostos a estes angulos iguaes serão tambem iguaes.

Seja o triangulo ABC, e seja o angulo ABC=ACB. Digo, que será AB=AC. Fig. 25.

Se não for AB=AC, huma destas duas rectas será maior que a outra. Seja AB a maior, e desta que he maior se corte [a] DB=AC, a. 3. 1.
que he a menor. Tire-se a recta DC. Sendo DB=AC, e BC commua, serão as duas DB, BC iguaes ás duas AC, CB, cada huma a cada huma. Mas he o angulo DBC=ACB. Logo a baze DC será igual á baze AB; e o triangulo DBC igual [b] ao triangulo ACB, o que b. 4. 1.
he absurdo, porque DBC he menor que ABC. Logo as rectas AB, AC não são desiguaes, e por consequencia deve ser AB=AC.

Co-

COROLLARIO. Desta Proposição se infere, que todo o triangulo equiangulo he tambem equilatero.

PROP. VII. THEOR.

Sobre a mesma baze, e da mesma parte não se podem construir dous triangulos differentes, que tenhão os outros lados iguaes; isto he, os dous, que partem de hum mesmo termo da baze, e os outros dous, que partem do outro, não podem ser iguaes.

Fig. 24. Se he possivel, estejão sobre a mesma baze AB, e da mesma parte os dous triangulos ACB, ADB, que tenhão tanto os lados CA, DA, como os lados CB, DB iguaes entre si.

Tire-se a recta CD. Ou nenhum dos vertices dos triangulos cahe dentro do outro triangulo, ou hum vertice de hum triangulo está dentro do outro triangulo. Primeiramente nenhum vertice esteja dentro de hum dos dous triangulos. Sendo AC$=$AD, será o angulo
a. 5. 1. ACD$=$ADC[a]. Mas o angulo ACD he maior que o angulo BCD. Logo será ADC$>$BCD, e por consequencia BDC será muito maior que BCD. Tambem sendo BC$=$DB, será o angulo BDC$=$BCD[a]. Mas tem-se demonstrado BDC$>$BCD. Logo BDC será igual e maior ao mesmo tempo que BCD, o que não póde ser.

Ago-

Agora o vertice D do triangulo ADB esteja dentro do outro triangulo ACB. Sendo AC = AD, ferão os angulos ECD, FDC, que são debaixo da baze CD, iguaes [a]. Mas he o angulo ECD > BCD. Logo ferá FDC > BCD, e BDC ferá muito maior que BCD. E porque he CB = DB, ferá BDC = BCD [a]. Mas temos visto fer BDC > BCD. Logo BDC ferá igual e maior ao mesmo tempo que BCD, o que he igualmente absurdo. Fig. 25. a. 5. 1.

Posto que hum vertice de hum triangulo caia sobre hum lado do outro triangulo, não ha mister demonstração alguma.

PROP. VIII. THEOR.

SE dous triangulos tiverem dous lados iguaes a dous lados, cada hum a cada hum, e as bazes tambem iguaes; os angulos comprehendidos pelos lados iguaes ferão tambem iguaes.

Sejão os dous triangulos ABC, DEF, e seja o lado AB = DE e AC = DF, e tambem a baze BC = EF outra baze. Digo, que ferá o angulo BAC = EDF. Fig. 26.

Posto o triangulo ABC sobre o triangulo DEF de forte, que o ponto B caia em E, e a recta BC sobre a recta EF, tambem o ponto C deve cahir sobre o ponto F, por fer BC = EF; e assim ajustando-se BC com EF, as duas BA, AC se ajuntarão com as duas ED, DF.

E

E se ajustando-se a baze BC sobre a baze EF, quizermos que os lados BA, AC se não ajustem sobre os lados ED, DF, mas tenhão outro lugar, como EG, GF; se poderão construir sobre a mesma baze, e da mesma parte dous triangulos, cujos lados partindo de huma, e outra extremidade da baze commua, sejão iguaes.
a. 7. 1. Mas isto he impossivel [a]. Logo se a baze BC se ajusta sobre a baze EF, os lados BA, AC se devem ajustar sobre os lados ED, DF, e por consequencia o angulo BAC
b. ax. 8. sobre o angulo EDF. Logo será BAC=EDF [b].

PROP. IX. PROB.

DIvidir em duas partes iguaes hum angulo rectilineo dado.

Fig. 27. Seja dado o angulo rectilineo BAC. Se deve dividir este angulo em duas partes iguaes.

Tome-se na recta AB qualquer ponto D,
a. 3. 1. e da recta AC corte-se [a] a parte AE=AD; e
b. 1. 1. tirada a recta DE, sobre esta se faça [b] o triangulo equilatero DEF, e se tire AF. Digo, que o angulo BAC fica dividido em duas partes iguaes pela recta AF.

Sendo AD=AE, e AF commua; nos dous triangulos FDA, FEA os dous lados DA, AF serão iguaes aos dous lados EA, AF, cada hum a cada hum. Mas he a baze DF=EF outra baze. Logo será o angulo DAF=
c. 8. 1. EAF [c] e por consequencia o angulo rectilineo

da-

dado BAC fica dividido pela recta AF em duas partes iguaes.

PROP. X. PROB.

DIvidir em duas partes iguaes huma linha recta de hum comprimento dado.

Seja dada a linha recta determinada AB. Fig. 18.
He preciso dividilla em duas partes iguaes.

Faça-se [a] sobre a recta dada AB o triangulo equilatero ABC; e com a recta CD se divida [b] em duas ametades o angulo ACB. Digo, que a recta AB fica dividida em duas partes iguaes no ponto D.

a. 1. 1.
b. 9. 1.

Porque sendo AC = CB, e CD commua; serão as duas AC, CD iguaes ás duas BC, CD, cada huma a cada huma. Mas he o angulo ACD = BCD. Logo será [c] a baze AD = DB outra baze. Logo temos dividido a recta determinada AB em duas partes iguaes no ponto D.

c. 4. 1.

PROP. XI. PROB.

DE hum ponto dado em huma linha recta dada levantar huma perpendicular sobre a mesma recta dada.

Seja dada a recta AB, e nella o ponto C. Fig. 19.
Se deve do ponto C levantar huma perpendicular sobre a recta AB.

Tome-se na recta AC qualquer ponto D, e

a. 3. 1. ponha-se CE=CD [a], e sobre DE faça-se [b] o
b. 1. 1. triangulo equilatero DFE. Tire-se finalmente a recta FC. Digo, que FC he perpendicular sobre a dada AB no ponto C.

Por ser DC=CE, e FC commua; as duas DC, CF seráo iguaes ás duas EC, CF, cada huma a cada huma. Mas he a baze DF=FE outra baze. Logo será o angulo DCF=
c. 8. 1. ECF [c]; e estes angulos são formados hum de huma, e outro de outra parte da mesma linha. Mas quando huma recta cahindo sobre outra, faz os angulos de ambas as partes iguaes en-
d. def. 10. 1. tre si, estes angulos são rectos [d]. Logo os angulos DCF, FCE são rectos, e assim temos levantado a perpendicular FC sobre a recta dada AB, e do ponto dado C.

Corol. Com isto podemos demonstrar, que duas linhas rectas não podem ter hum segmento commum.

Fig. 30. Tenhão as duas rectas ABC, ABD, se he possivel, o segmento commum AB. Do ponto B levante-se a perpendicular BE sobre AB. Porque ABC he huma linha recta, será o angulo CBE=EBA [d]. Do mesmo modo sendo ABD huma linha recta, será o angulo DBE=EBA. Logo será DBE=CBE, isto he hum angulo menor igual a hum maior, o que não póde ser. Logo duas linhas rectas não podem ter hum segmento commum.

PROP.

PROP. XII. PROB.

CONduzir huma perpendicular ſobre huma linha recta dada indefinita de hum ponto dado fóra della.

Seja dada a linha recta AB, e fóra della o ponto C. Deve-ſe do ponto C conduzir huma perpendicular ſobre a recta AB. Fig. 31.

Da outra parte da recta AB tome-ſe hum ponto qualquer D, e com o centro C e o intervallo CD ſe deſcreva [a] o circulo EGF, que corte a recta AB nos pontos F, G; e a recta FG ſe divida pelo meio [b] no ponto H, e ſe tirem as rectas CF, CH, CG. Digo, que a recta CH he perpendicular ſobre a recta indefinita AB. *a. poſt. 3.* *b. 10. 1.*

Sendo FH$=$HG, e HC commua, as duas FH, HC ſeráo iguaes ás duas GH, HC, cada huma a cada huma. Mas he a baze CF$=$CG [c] outra baze. Logo ſerá o angulo CHF$=$CHG [d], e por conſequencia eſtes angulos ſendo adjacentes á meſma linha CH, ſeráo rectos, e a recta CH, que parte do ponto C ſerá perpendicular ſobre a recta dada indefinita AB, como ſe pedia. *c. def. 15.* *d. 8.1*

PROP. XXIII. THEOR.

HUma linha recta cahindo ſobre outra linha recta, faz com eſta ou dous angulos rectos, ou dous angulos iguaes a dous rectos.

Fig. 32. 33. Caia a recta AB ſobre a recta CD, fazendo com eſta os dous angulos CBA, ABD. Digo, que os angulos CBA, ABD ou ſão dous rectos, ou ſão iguaes a dous rectos.

Fig. 32. Porque ſe for o angulo CBA = ABD, claro eſtá, que ſão rectos [a]. E quando não ſeja aſſim, do ponto B ſe levante [b] ſobre CD a perpendicular BE. Logo os angulos CBE, EBD ſão dous rectos [a]. E porque o angulo CBE he igual aos dous CBA, ABE, ajuntando de huma e outra parte o meſmo angulo EBD, ſeráo os dous CBE, EBD iguaes aos tres CBA, ABE, EBD [c]. Tambem ſendo o angulo DBA igual aos dous DBE, EBA, ajuntando de ambas as partes o angulo commum ABC, ſeráo os dous DBA, ABC iguaes aos tres DBE, EBA, ABC. Mas eſtes tres angulos ſão iguaes aos dous CBE, EBD; e as quantidades, que ſão iguaes a huma terceira, ſão iguaes entre [d] ſi. Logo os dous angulos CBE, EBD ſão iguaes aos dous DBA, ABC. Mas CBE, EBD ſão dous rectos. Logo os dous angulos DBA, ABC ſão iguaes a dous rectos.

a. def. 10.
Fig. 33.
b. 11. 1.
c. ax. 2.
d. ax. 1.

PROP.

PROP. XIV. THEOR.

SE em hum ponto de huma linha recta qualquer concorrerem de partes oppostas duas rectas, fazendo com a primeira recta os angulos adjacentes iguaes a dous rectos; as rectas, que concorrem para o dito ponto, estarão em direitura huma de outra.

No ponto B da linha recta AB concorrão de partes oppostas as duas BC, BD, fazendo com a recta AB os angulos adjacentes ABC, ABD iguaes a dous rectos. Digo, que BD está em direitura de CB. Fig. 34.

Se BD não está em direitura de CB, esteja-o BE, de sorte que CBE seja huma só linha recta. Cahindo a recta AB sobre a recta CBE, os angulos ABC, ABE serão iguaes a dous rectos[a]. Mas tambem são iguaes a dous rectos os angulos ABC, ABD. Logo os dous angulos CBA, ABE são iguaes aos dous CBA, ABD. Logo tirando de huma e outra parte o angulo commum CBA, ficará o angulo ABE $=$ ABD[b]; isto he hum angulo menor igual a hum maior, o que não póde ser. Logo a recta BE não está em direitura com BC. O mesmo se póde demonstrar de qualquer outra recta fóra de BD. Logo as rectas CB, BD estão em direitura huma com outra.

a. 13. 1.

b. ax. 3.

PROP.

PROP. XV. THEOR.

SE duas linhas rectas reciprocamente se cortarem, faráõ os angulos verticalmente oppostos iguaes entre si.

Fig. 35. Cortem-se as duas rectas AB, CD reciprocamente no ponto E. Digo, que será o angulo AEC=DEB, e CEB=AED.

Porque a recta AE cahe sobre a recta CD, seráõ os angulos CEA, AED iguaes a dous
a. 13. 1. rectos [a]. Do mesmo modo cahindo DE sobre AB, seráõ tambem os angulos AED, DEB iguaes a dous rectos. [a] Logo os angulos CEA, AED sáõ iguaes aos angulos AED, DEB. Logo tirando de parte e outra o commum AED, ficará CEA=BED. Com a mesma demonstração se prova ser CEB=AED.

COROL. 1. Disto se póde deduzir, que quando duas rectas se cortão, fazem quatro angulos iguaes a quatro rectos.

COROL. 2. E que todos os angulos ao redor de hum mesmo ponto sáõ iguaes a quatro rectos.

PROP. XVI. THEOR.

PRoduzido hum lado qualquer de qualquer triangulo, o angulo externo sempre he maior que cada hum dos angulos internos e oppostos.

Se-

Seja o triangulo ABC, cujo lado BC ſeja produzido para a parte D. Digo, que o angulo externo ACD he maior que qualquer dos internos, e oppoſtos CBA, BAC. Fig. 36.

Divida-ſe o lado AC em duas partes iguaes[a] no ponto E; e tirada a recta BE, eſta ſe continue até F de ſorte que ſeja BE = EF. Tire-ſe FC, e o lado AC ſeja produzido para G. Sendo AE = EC, e BE = EF, as duas AE, EB ſeráo iguaes ás duas CE, EF, cada huma a cada huma. Mas he o angulo AEB = CEF[b], por ſerem eſtes angulos verticalmente oppoſtos. Logo a baze AB he igual á baze CF; e o triangulo AEB igual ao triangulo CEF; e os mais angulos iguaes aos mais angulos[c], cada hum a cada hum, ſegundo ficáo oppoſtos a lados iguaes. Logo ſerá o angulo BAE = ECF. Mas he o angulo ECD > ECF. Logo ſerá tambem ACD > BAE. Com o meſmo diſcurſo, dividido pelo meio o lado BC, ſe demonſtra ſer o angulo BCG, iſto he, ACD[d] > ABC.

a. 10. 1.
b. 15. 1.
c. 4. 1.
d. 15. 1.

PROP. XVII. THEOR.

Dous angulos de hum triangulo qualquer tomados de qualquer modo que ſe quizer, ſáo menores que dous rectos.

Seja o triangulo ABC. Digo, que dous angulos quaeſquer do triangulo ABC tomados juntamente, ſáo menores que dous rectos. Fig. 37.

Produza-ſe BC para D. Sendo no triangu-

lo

a. 16. 1. lo ABC o angulo externo ACD maior[a] que o angulo interno e opposto ABC; se a hum e outro se ajuntar o angulo commum ACB, os angulos ACD, ACB juntos serão maiores que os angulos ABC, ACB. Mas ACD, ACB
b. 13. 1. são iguaes a dous rectos[b]. Logo os dous angulos ABC, BCA são menores que dous rectos. Do mesmo modo podemos demonstrar serem os angulos BAC, ACB; e os angulos CAB, ABC menores que dous rectos.

PROP. XVIII. THEOR.

EM qualquer triangulo o lado maior oppõe-se ao angulo maior.

Fig. 38. Seja o triangulo ABC, e seja o lado AC > AB. Digo, que he o angulo ABC > BCA.

Sendo AC > AB, se poderá tomar AD =
a. 3. 1. AB[a]. Tire-se a recta BD. Porque no triangulo BDC o angulo externo ADB he maior
b. 16. 1. que o angulo interno e opposto[b] DCB; e he
c. 5. 1. ADB = ABD, por ser AB = AD[c]; será o angulo ABD > ACB, e por consequencia ABC muito maior que ACB.

PROP. XIX. THEOR.

EM qualquer triangulo o angulo maior fica opposto ao lado maior.

Fig. 39. Seja o triangulo ABC, e seja o angulo

ABC

ABC $>$ BCA. Digo, que he o lado AC $>$ AB.

Se AC não he maior, será ou igual, ou menor que AB. Mas não he igual, porque seria ABC $=$ ACB[a], contra a supposição. Logo não he AC $=$ AB. Tambem não póde ser AC $<$ AB, porque seria ABC $<$ ACB[b] contra a hypothesis. Logo não he AC $<$ AB. Logo segue-se ser AC $>$ AB.

a. 5. 1.
b. 18. 1.

PROP. XX. THEOR.

EM qualquer triangulo dous lados tomados de qualquer modo que se quizer, são maiores que o terceiro.

Seja o triangulo ABC. Digo, que dous quaesquer lados do triangulo ABC são maiores que o terceiro; isto he, os lados BA, AC são maiores que o lado BC; os lados AB, BC são maiores que o lado AC; e os lados BC, CA são maiores que o lado AB. Fig. 40.

Produza-se BA para D, e posta AD $=$ CA[a], tire-se a recta DC. Sendo DA $=$ AC, será o angulo ADC $=$ ACD[b]. Mas he BCD $>$ ACD. Logo será BCD $>$ ADC. E porque no triangulo DCB he o angulo BCD $>$ BDC; e ao angulo maior fica opposto o lado tambem maior[c]; será o lado DB $>$ BC. Mas DB he igual aos dous lados juntos BA, AC. Logo os dous lados BA, AC são maiores que o lado BC. Do mesmo modo se prova, que os lados AB, BC

a. 3. 1.
b. 5. 1.
c. 19. 1.

BC são maiores que o lado CA; e que os lados BC, CA são maiores que o lado AB.

PROP. XXI. THEOR.

SE sobre os extremos de hum lado de hum triangulo estiverem postas duas rectas dentro do mesmo triangulo; estas serão menores que os outros dous lados do triangulo; mas comprehenderão hum angulo maior do que o angulo, que fica opposto ao lado, sobre cujos extremos estão postas as ditas rectas.

Fig. 41. Sobre os extremos B, C do lado BC do triangúlo ABC estejão postas as rectas BD, DC dentro do mesmo triangulo ABC. Digo, que as rectas BD, DC são menores que os outros lados do triangulo BA, AC; mas que o angulo BDC he maior que o angulo BAC.

Produza-se BD até E. Porque dous quaesquer lados de hum triangulo são maiores que
a. 20. 1. o terceiro [a]; serão os dous lados BA, AE do triangulo ABE maiores que o lado BE. Ajunte-se a huma, e outra parte a recta EC. Lo-
b. ax. 4. go BA, AC serão maiores [b] que BE, EC. E porque no triangulo CED os dous lados CE, ED são maiores que o lado CD, ajuntando a commua DB, serão as duas CE, EB maiores [b] que as duas CD, DB, e por consequencia BA, AC serão muito maiores que BD, DC.

E

E porque em qualquer triangulo o angulo externo he maior que o interno e opposto [c]; no triangulo CDE será o angulo externo BDC > CED. Pela mesma razão no triangulo ABE deve ser o angulo externo CEB > BAC, e por consequencia será o angulo BDC muito maior, que o angulo BAC. c. 16. 1. a. 20. 1.

PROP. XXII. PROB.

Construir hum triangulo com tres linhas rectas iguaes a tres outras dadas, entre as quaes duas tomadas como se quizer, sejão sempre maiores que a terceira [a].

Sejão dadas as tres rectas A, B, C, das quaes duas tomadas como se quizer, sejão maiores que a terceira, isto he, as duas A, B > C; as duas A, C > B; e as duas B, C > A. Deve-se formar hum triangulo de tres lados iguaes ás tres rectas dadas A, B, C. Fig. 42.

Tire-se de qualquer ponto D huma recta infinita DE, e ponha-se [a] DF = A; FG = B; e GH = C. Com o centro F, e o intervallo FD se descreva [b] o circulo DKL, e com o centro G e o intervallo GH se descreva o circulo KLH. Tirem-se as rectas KF, KG. Digo, que o triangulo KFG he o que se pede. a. 3. 1. b. post. 3.

Sendo o ponto F o centro do circulo DKL, será FD = FK [c]. Mas he FD = A. Logo será FK = A. E sendo o ponto G o centro do circu- c. def. 15.

cu-

c. def. 15. culo LKH, será GH=GK[c]. Mas he GH=C. Logo será GK=C. Mas se tem tomado FG=B. Logo as tres rectas KF, FG, GK são iguaes ás tres dadas A, B, C, e o triangulo KFG he o que se pedia.

PROP. XXIII. PROB.

EM hum ponto de huma linha recta dada formar hum angulo rectilineo igual a outro angulo rectilineo dado.

Fig. 43. Seja dada a recta AB, e nella o ponto A; e seja dado o angulo rectilineo DCE. Deve-se formar no ponto A e com a recta dada AB hum angulo rectilineo igual ao angulo proposto DCE.

Tomados os pontos D, E, como se quer, nos lados do angulo DCE, tire-se a recta DE; e com tres lados, que sejão iguaes ás tres rectas CD, DE, EC se faça[a] o triangulo AFG, e seja CD=AF, CE=AG, e DE=FG. Digo, que o angulo FAG será igual ao proposto DCE. Porque as duas DC, CE são iguaes ás duas FA, AG, cada huma a cada huma, e a baze DE=FG outra baze; será o angulo DCE=FAG[b]. Logo com a recta dada AB, e no ponto A temos feito o angulo rectilineo FAG igual ao angulo dado e rectilineo DCE.

a. 22. 1.

b. 8. 1.

PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

SE dous triangulos tiverem dous lados iguaes a dous lados, cada hum a cada hum, e hum dos angulos comprehendidos pelos lados iguaes for maior, e o outro menor; a baze que estiver opposta ao angulo maior, será maior que a outra baze opposta ao angulo menor.

Sejão os dous triangulos ABC, DEF, que tenhão os lados AB, AC iguaes aos lados DE, DF, cada hum a cada hum, isto he, o lado AB = DE, e AC = DF; e seja o angulo ABC > EDF. Digo, que será tambem a baze BC > EF, que he a outra baze. Fig. 44.

Seja DE não maior que DF. Com a recta DE e no ponto D faça-se[a] o angulo EDG = BAC; e posta DG = DF[b], tirem-se as rectas EG, GF. Sendo AB = DE, e AC = DG, serão as duas BA, AC iguaes ás duas ED, DG, cada huma a cada huma. Mas he o angulo BAC = EDG. Logo será a baze BC = EG[c] outra baze. E sendo DG = DF, será o angulo DFG = DGF[d]. Mas he o angulo DGF > EGF. Logo será o angulo DFG > EGF. Logo o angulo EFG he muito maior que o angulo EGF. E porque no triangulo EFG he o angulo EFG > EGF; e ao angulo maior fica opposto o lado tambem maior[e],

a. 23. 1.
b. 3. 1.
c. 4. 1.
d. 5. 1.
e. 19. 1.

se-

ſerá o lado EG>EF. Mas he EG=BC. Logo ſerá BC>EF.

PROP. XXV. THEOR.

SE em dous triangulos forem dous lados de hum iguaes a dous lados do outro, cada hum a cada hum, e for a baze de hum triangulo maior que a baze do outro; aquelle dos angulos comprehendidos pelos lados iguaes, que ficar oppoſto á baze maior, ſerá maior que o outro oppoſto á baze menor.

Fig. 45. Sejão os dous triangulos ABC, DEF, que tenhão os lados AB, AC iguaes aos lados DE, DF, cada hum a cada hum, iſto he AB=DE, e AC=DF, e ſeja a baze BC> EF. Digo, que ſerá o angulo BAC> EDF.

Se não he BAC> EDF, ſerá ou igual, ou menor. Mas não póde ſer BAC=EDF,
a. 4. 1. porque ſeria BC=EF[a], contra o que temos ſuppoſto. Logo não he BAC=EDF. Mas nem póde ſer BAC<EDF, porque ſeria
b. 24. 1. BC<EF[b], contra a hypotheſis. Logo não he BAC<EDF; e por conſequencia deve ſer BAC>EDF.

PROP.

PROP. XXVI. THEOR.

SE em dous triangulos dous angulos de hum forem iguaes a dous angulos do outro, cada hum a cada hum, e hum lado do primeiro igual a hum lado do outro, e forem estes lados ou adjacentes, ou oppostos a angulos iguaes; os outros lados dos dous triangulos seráõ iguaes aos outros lados, cada hum a cada hum; e tambem o terceiro angulo será igual ao terceiro.

Sejáõ os dous triangulos ABC, DEF, que tenháõ os angulos ABC, BCA iguaes aos angulos DEF, EFD, cada hum a cada hum, isto he ABC=DEF, e BCA=EFD; e tenháõ hum lado igual a hum lado, e sejáõ estes lados em primeiro lugar adjacentes a angulos iguaes, isto he BC=EF. Digo, que os outros lados sáõ iguaes aos outros lados, cada hum a cada hum, isto he AB=DE, e AC=DF; e o angulo BAC=EDF outro angulo. Fig. 46.

Se AB, DE náõ sáõ rectas iguaes, huma dellas será maior. Se AB maior. Ponha-se BG=DE, e tire-se a recta GC. Sendo BG=DE, e BC=EF, as duas GB, BC seráõ iguaes ás duas DE, EF, cada huma a cada huma. Mas he o angulo GBC=DEF. Logo

a. 4. 1. go ſerá a baze GC = DF[a] outra baze; e o triangulo GBC = DEF outro triangulo; e os outros angulos oppoſtos a lados iguaes ſeráo reſpectivamente iguaes entre ſi. Logo ſerá o angulo GCB = DFE. Mas temos poſto DFE = BCA. Logo ſerá o angulo BCG = BCA, iſto he, hum angulo menor igual a hum maior, o que náo póde ſer, e por conſequencia AB, DE náo ſáo deſiguaes. Logo ſáo iguaes. Mas he BC = EF. Logo as duas AB, BC ſáo iguaes ás duas DE, EF, cada huma a cada huma. Mas he tambem o angulo ABC = DEF. Logo ſerá a baze AC = DF, que he a outra baze, e o angulo BAC = EDF[a].

Fig. 47. Sejáo agora iguaes os lados, que ficáo oppoſtos a angulos iguaes, iſto he, ſeja AB = DE. Digo outra vez, que os outros lados ſáo iguaes aos outros lados, iſto he AC = DF, e BC = EF; e tambem que he o angulo BAC = EDF.

Se as rectas BC, EF náo ſáo iguaes, huma dellas ſerá maior que a outra. Seja BC, ſe he poſſivel, a maior; e poſta BH = EF, tire-ſe a recta AH. Sendo BH = EF, e AB = DE; as duas AB, BH ſeráo iguaes ás duas DE, EF, cada huma a cada huma. Mas os angulos feitos por eſtas rectas ſáo iguaes. Logo a baze AH ſerá igual á baze DF; e o triangulo ABH igual ao triangulo DEF; e os outros angulos iguaes aos outros angulos ſegundo ficáo oppoſtos a lados iguaes. Logo ſerá o angulo BHA = EFD. Mas pela hypotheſis

ſis he EFD = BCA. Logo ſerá BHA = BCA; iſto he, o angulo externo BHA do triangulo AHC ſerá igual ao interno e oppoſto BCA, o que não póde ſer[b]. Logo as rectas BC, EF não ſão deſiguaes. Logo ſão iguaes. Mas he AB = DE. Logo as duas AB, BC ſão iguaes ás duas DE, EF, cada huma a cada huma. Mas os angulos feitos por ellas ſão iguaes. Logo he a baze AC = DF outra baze, e o angulo BAC = EDF. b. 16. 1.

PROP. XXVII. THEOR.

SE huma recta cortando outras duas rectas, fizer com ellas os angulos alternos iguaes, as meſmas duas rectas ſerão parallelas.

A recta EF corte as duas outras AB, CD, e faça com ellas os angulos alternos AEF, EFD iguaes. Digo, que AB, CD ſão duas parallelas. Fig. 48.

Se AB, CD não ſão parallelas, produzidas hão de concorrer ou para a parte BD, ou para a parte AC. Produzão-ſe, e concorrão para a parte BD no ponto G. Logo no triangulo GEF deve ſer o angulo externo AEF > EFG, que he o interno e oppoſto[a]. Mas pela hypotheſis era AEF = EFG, o que já não póde ſer. Logo as duas rectas AB, CD, produzidas para a parte BD, não concorrem. Do meſmo modo ſe demonſtrará, que nem podem a. 16. 1.

 con-

concorrer para a parte AC. Mas as linhas rectas, que produzidas nunca concorrem nem para huma, nem para outra parte, são paral-
b. def. 35. lelas[b]. Logo as duas rectas AB, CD são parallelas.

PROP. XXVIII. THEOR.

SE huma recta cortar outras duas, e fizer o angulo externo igual ao interno e opposto da mesma parte; ou tambem os dous internos da mesma parte iguaes a dous rectos; as mesmas rectas serão parallelas.

Fig. 49. A recta EF corte as duas AB, CD, e faça o angulo externo EGB=GHD, que he o interno e opposto da mesma parte; ou faça os dous internos da mesma parte BGH, GHD iguaes a dous rectos. Digo, que as rectas AB, CD são parallelas.

Sendo o angulo EGB=GHD, e EGB=
a. 15. 1. AGH[a]; será AGH=GHD. Mas são alter-
b. 27. 1. nos. Logo AB será parallela[b] a CD. E porque os angulos BGH, GHD são iguaes a dous rectos, pela hypothesis; e tambem os angulos
c. 13. 1. AGH, BGH são iguaes a dous rectos[c]; os dous AGH, BGH serão iguaes aos dous BGH, GHD. Logo tirando o angulo commum BGH, ficará AGH=GHD. Mas são alternos. Logo as duas rectas AB, CD são parallelas.

PROP.

PROP. XXIX. THEOR.

Huma linha recta, que corta duas rectas parallelas, faz os angulos alternos iguaes entre si; o angulo externo igual ao interno e opposto da mesma parte; e finalmente os internos da mesma parte iguaes a dous rectos. Vejão-se as notas a esta Proposição.

A linha recta EF corte as duas AB, CD parallelas. Digo, que fará com ellas os angulos alternos AGH, GHD iguaes; e que o angulo externo EGB será igual ao interno e opposto da mesma parte GHD; e que os internos e da mesma parte BGH, GHD serão iguaes a dous rectos. Fig. 49.

Se não for o angulo AGH = GHD, hum será maior que o outro. Seja AGH o maior. Sendo AGH > GHD, se ajuntarmos a huma e outra parte o mesmo angulo BGH, os angulos AGH, BGH serão maiores que os angulos BGH, GHD. Mas os angulos AGH, BGH são iguaes a dous rectos [a]. Logo os angulos BGH, GHD são menores que dous rectos. Mas as rectas, que com outra fazem os angulos internos da mesma parte menores que dous rectos, produzidas ao infinito finalmente concorrem [b]. Logo as rectas AB, CD produzidas ao infinito concorrem entre si. Mas isto não póde succeder, porque são parallelas. Logo os angulos AGH, GHD não são desi-

a. 13. 1.

b. ax. 12. Vejão-se as notas a esta Proposição.

guaes, e por consequencia será AGH=GHD.
c. 15. 1. Mas he tambem AGH=EGB[c]. Logo será EGB=GHD. Ajunte-se-lhes o mesmo angulo BGH; seráo os angulos EGB, BGH iguaes aos angulos BGH, GHD. Mas EGB,
a. 13. 1. BGH são iguaes a dous rectos[a]. Logo tambem os angulos BGH, GHD são iguaes a dous rectos.

PROP. XXX. THEOR.

As linhas rectas, que são parallelas a huma mesma linha recta, são parallelas entre si.

Fig. 50. Sejão as rectas AB, CD, parallelas á mesma recta EF. Digo, que as rectas AB, CD são parallelas entre si.

A recta GHK corte as tres rectas AB, EF, CD nos pontos G, H, K. Porque a recta GK corta as duas parallelas AB, EF em
a. 29. 1. G, e H, será o angulo AGH=GHF[a]. E porque a mesma recta GK corta as parallelas EF, CD em H, e K, será tambem o angulo GHF=GKD[a]. Mas temos visto ser AGK=GHF. Logo será AGK=GKD. Mas são angulos alternos. Logo as rectas AB, CD são
b. 27. 1. entre si parallelas[b].

PROP.

PROP. XXXI. PROB.

DE hum ponto dado conduzir huma linha recta parallela a outra linha recta dada.

Seja o ponto A, e a recta BC. Deve-se do ponto A conduzir huma linha recta, que seja parallela á recta BC. Fig. 51.

Tome-se na recta BC hum qualquer ponto D, do qual se tire a recta DA para o ponto A. Com a recta DA se faça no ponto A o angulo DAE=ADC[a], e se produza EA para F. Digo, que estará feito o que se pede. a. 23. 1.

Porque a recta AD cortando as duas BC, EF, faz os angulos alternos EAD, ADC iguaes entre si; será EF parallela a BC[b]. Logo do ponto dado A temos conduzido a recta EAF parallela á recta dada BC. b. 27. 1.

PROP. XXXII. THEOR.

EM todo o triangulo, produzido hum lado qualquer, o angulo externo he igual aos dous internos e oppostos; e os tres angulos internos de hum triangulo qualquer são iguaes a dous rectos.

Seja o triangulo ABC, e hum lado delle BC seja produzido para D. Digo, que o angulo externo ACD he igual aos dous internos Fig. 52.

nos

nos e poſtos CAB, ABC; e que os tres angulos internos ABC, BCA, CAB do meſmo triangulo ABC ſáo iguaes a dous rectos.

a. 31. 1. Pelo ponto C tire-ſe a recta CE parallela a AB[a]. Sendo AB, CE parallelas, e cortadas pela recta AC; os angulos alternos BAC,
b. 29. 1. ACE ſeráo iguaes[b]. E as meſmas parallelas AB, CE ſendo cortadas pela recta BD, o angulo externo ECD ſerá igual ao interno e oppoſto ABC[b]. Mas temos demonſtrado ſer ACE = BAC. Logo o angulo externo e total ACD he igual aos dous internos e oppoſtos CAB, ABC. Ajunte-ſe-lhes o meſmo ACB; e os dous ACD, ACB ſeráo iguaes aos tres CBA, BAC, ACB. Mas os dous ACD, ACB ſáo iguaes a dous
c. 13. 1. rectos[c]. Logo os tres CBA, BAC, ACB ſeráo tambem iguaes a dous rectos.

Corol. 1. Todos os angulos internos de qualquer figura rectilinea juntamente com quatro rectos, ſáo iguaes a duas vezes tantos rectos, quantos ſáo os lados da figura.

Fig. 53. Huma figura rectilinea qualquer ABCDE ſe póde dividir em tantos triangulos, quantos ſáo os lados da meſma figura, tomando, como ſe quizer, dentro da figura hum ponto F, e tirando deſte ponto para todos os angulos da figura outras tantas rectas, como FA, FB, FC, FD, FE. Mas pela precedente, todos os angulos deſtes triangulos tomados juntamente, ſáo iguaes a duas vezes tantos rectos, quantos ſáo os meſmos triangulos, iſto he, quantos ſáo os lados da figura; e ao meſmo tem-

po

po os ditos angulos são iguaes aos angulos da figura juntamente com os outros ao redor do ponto F, que he o vertice commum de todos os triangulos, isto he, juntamente com quatro rectos [a]. Logo todos os angulos da figura e mais quatro rectos, são iguaes a duas vezes tantos rectos, quantos são os lados da mesma figura. a. Cor. 2. 15. 1.

Corol. 2. Todos os angulos externos de huma figura qualquer tomados juntamente são iguaes a quatro rectos.

O angulo interno ABC juntamente com o externo adjacente ABD he igual a dous rectos [b]. Logo todos os internos juntamente com todos os externos são iguaes a duas vezes tantos rectos, quantos são os lados da figura; isto he, pelo Corollario precedente, são iguaes a todos os angulos internos da figura juntamente com quatro rectos. Logo tirados os angulos internos, ficão os externos iguaes a quatro rectos. Fig. 54. b. 13. 1.

PROP. XXXIII. THEOR.

As rectas, que da mesma parte estão postas entre as extremidades de duas outras rectas iguaes e parallelas, são tâmbem iguaes e parallelas.

Sejão as duas rectas AB, CD iguaes e parallelas, e entre os extremos dellas A, C; B, D estejão postas as outras duas AC, BD. Digo, Fig. 55.

go, que AC, BD são iguaes, e parallelas.

Tire-se a recta BC. Porque AB, CD são parallelas, e são cortadas pela recta BC, serão
a. 29. 1. os angulos alternos ABC, BCD iguaes [a]. E sendo AB = CD, e BC commua; as duas AB, BC serão iguaes ás duas DC, CB. Mas temos o angulo ABC = BCD. Logo será a
b. 4. 1. baze AC = BD, que he a outra baze [b]; e o triangulo ABC igual ao triangulo BCD; e os mais angulos iguaes aos mais angulos [b], cada hum a cada hum, segundo ficão oppostos a lados iguaes. Logo deve ser o angulo ACB = CBD. Logo a recta BC fazendo com as duas AC, BD os angulos alternos ACB, CBD iguaes; as duas rectas AC, BD serão paralle-
c. 27. 1. las [c]. E já temos demonstrado, que são tambem iguaes.

PROP. XXXIV. THEOR.

OS lados, e os angulos oppostos dos espaços formados com linhas parallelas, ou parallelogrammos, são iguaes; e todo o espaço parallelogrammo fica dividido pela diagonal em duas partes iguaes.

Fig. 55. Seja o espaço parallelogrammo ABDC, cuja diagonal he BC. Digo, que os lados, e os angulos oppostos do parallelogrammo ABDC são iguaes; e que a diagonal BC divide o mesmo parallelogrammo ABDC em duas partes iguaes.

Sen-

Sendo AB, CD parallelas, e cortadas pela recta BC, os angulos alternos ABC, BCD serão iguaes [a]. Tambem por serem parallelas as duas AC, BD, e cortadas pela mesma recta BC, devem ser iguaes entre si os angulos alternos ACB, CBD [a]. Logo os dous triangulos ABC, CBD tem dous angulos ABC, BCA iguaes a dous angulos BCD, CBD, cada hum a cada hum, e hum lado igual a hum lado, que vem a ser o lado commum BC opposto aos angulos iguaes CAB, CDB. Logo os outros lados serão iguaes aos outros lados, cada hum a cada hum, e o angulo, que resta, igual ao outro angulo, que resta [b]. Logo será AB = CD, AC = BD, e o angulo BAC = BDC. E sendo ABC = BCD, e CBD = ACB; será o angulo total ABD = ACB tambem total. Mas temos demonstrado o angulo BAC = BDC. Logo os lados e os angulos oppostos do parallelogrammo ABDC são iguaes. Devese agora demonstrar, que o parallelogrammo ABDC fica dividido em duas partes iguaes pela diagonal BC. Sendo AB = CD, e BC commua, serão as duas AB, BC iguaes ás duas DC, CB, cada huma a cada huma. Mas temos o angulo ABC = BCD. Logo será o triangulo ABC = BCD outro triangulo [c]. Logo a diagonal BC divide em duas partes iguaes o parallelogrammo ABDC.

a. 29. 1.
b. 26. 1.
c. 4. 1.

PROP.

PROP. XXXV. THEOR.

Os parallelogrammos ſobre a meſma baze, e entre as meſmas parallelas, ſão iguaes.

Fig. 57. Sejão os parallelogrammos ABCD, EBCF ſobre a meſma baze BC, e entre as meſmas parallelas AF, BC. Digo, que o parallelogrammo ABCD he igual ao parallelogrammo EBCF.

Fig. 56. Se os lados AD, DF dos parallelogrammos ABCD, DBCF oppoſtos á baze commua BC tiverem hum termo commum D; claro eſtá, que ſendo os parallelogrammos ABCD, DBCF cada hum o dobro do meſmo
a. 34. 1. triangulo BDC[a], ſerão iguaes entre ſi.

Fig. 57. Mas os lados AD, EF não ſejão terminados no meſmo ponto. No parallelogrammo ABCD he AD=BC[a]; e no parallelogrammo
b. ax. 1. EBCF he EF=BC. Logo ſerá AD=EF[b]. Ajunte-ſe a meſma recta DE ou tire-ſe. Será AE=DF, iſto he o todo igual ao todo, ou
c. ax. 2. 3. o reſto igual ao reſto[c]. Mas he AB=DC. Logo as duas EA, AB são iguaes ás duas FD, DC, cada huma a cada huma. Mas o angulo
d. 29. 1. externo FDC he igual[d] ao interno EAB. Logo ſerá a baze EB=FC outra baze; e o tri-
e. 4. 1. angulo EAB=FDC outro triangulo[e]. Do trapezio ABCF tire-ſe o triangulo FDC; e do meſmo trapezio ABCF tire-ſe o triangulo EAB.

Lo-

Logo os parallelogrammos ABCD, EBCF, que são os restos, serão iguaes [f] entre si. f. ax. 3.

PROP. XXXVI. THEOR.

Os parallelogrammos, que estão postos sobre bazes iguaes, e entre as mesmas parallelas, são iguaes.

Os parallelogrammos ABCD, EFGH estejão postos sobre as bazes iguaes BC, FG, e entre as mesmas parallelas AH, BG. Digo, que estes parallelogrammos são iguaes. Fig. 58.

Tirem-se as rectas BE, CH. Sendo BC = FG, e FG = EH [a], será BC = EH. Mas BC, EH são parallelas; e entre os termos dellas B, E; C, H estão tiradas as rectas BE, CH; e as rectas, que estão tiradas entre os extremos de duas outras iguaes e parallelas, e da mesma parte, são tambem iguaes e parallelas [b]. Logo EB, CH são iguaes e parallelas. Logo EBCH he hum parallelogrammo, e igual ao parallelogrammo ABCD [c], por ter a mesma baze BC, e por estar entre as mesmas parallelas BC, AD. Pela mesma razão será o parallelogrammo EFGH = EBCH outro parallelogrammo. Logo os parallelogrammos ABCD, EFGH serão iguaes entre si.

a. 34. 1.
b. 33. 1.
c. 35. 1.

PROP.

PROP. XXXVII. THEOR.

OS triangulos, que eſtão poſtos ſobre a meſma baze, e entre as meſmas parallelas, são iguaes.

Fig. 59. Os triangulos ABC, DBC eſtejão poſtos ſobre a meſma baze BC, e entre as meſmas parallelas AD, BC. Digo, que os triangulos ABC, DBC são iguaes.

Produza-ſe AD de huma e outra parte para E, e F, e pelo ponto B tire-ſe BE parallela a CA, e pelo ponto C tire-ſe CF parallela a BD [a]. Logo EBCA, DBCF ſerão dous parallelogrammos. Mas eſtes parallelogrammos são iguaes [b], por eſtarem ſobre a meſma baze BC, e entre as meſmas parallelas BC, EF; e o triangulo ABC he ametade [c] do parallelogrammo EBCA, que fica dividido em duas partes iguaes pela diagonal AB; como tambem o triangulo DBC he ametade [c] do parallelogrammo DBCF, que he dividido em duas partes iguaes pela diagonal DC. Logo ſerá o triangulo ABC = DBC outro triangulo, porque as ametades de quantidades iguaes são tambem iguaes [d].

a. 31. 1.
b. 35. 1.
c. 34. 1.
d. ax. 7.

PROP.

PROP. XXXVIII. THEOR.

OS triangulos, que estão sobre bazes iguaes, e entre as mesmas parallelas, são iguaes.

Sejão os triangulos ABC, DEF postos sobre as bazes iguaes BC, EF, e entre as mesmas parallelas BF, AD. Digo, que os triangulos ABC, DEF são iguaes. Fig. 60.

Produza-se de huma e outra parte a recta AD para G, e H; e pelo ponto B tire-se a recta BG parallela a CA, e pelo ponto F a recta FH parallela a ED [a]. Serão GBCA, DEFH dous parallelogrammos. Mas estes parallelogrammos são iguaes [b], porque estão sobre as bazes iguaes BC, EF, e entre as mesmas parallelas BF, GH; e o triangulo ABC he ametade do parallelogrammo GBCA, como tambem o triangulo DEF he ametade do parallelogrammo DEFH [c]. Logo será o triangulo ABC=DEF outro triangulo, por serem iguaes as ametades de quantidades iguaes [d].

a. 31. 1.
b. 36. 1.
c. 34. 1.
d. ax. 7.

PROP. XXXIX. THEOR.

OS triangulos iguaes postos sobre a mesma baze, e da mesma parte, estão entre as mesmas parallelas.

Sejão os triangulos iguaes ABC, DBC sobre Fig. 61.

bre a mesma baze BC, e da mesma parte. Digo, que os triangulos ABC, DBC estão entre as mesmas parallelas.

Tire-se a recta AD. Digo, que AD he parallela a BC. Se AD não he parallela a DC, pelo ponto A se faça passar outra recta AE parallela[a] a BC, e se tire EC. Logo os triangulos ABC, EBC são iguaes[b], por estarem ambos sobre a mesma baze BC, e entre as mesmas parallelas BC, AE. Mas he o triangulo ABC = DBC outro triangulo. Logo será DBC = EBC, isto he hum triangulo maior igual a hum menor, o que não póde ser. Logo as rectas AE, BC não são parallelas. O mesmo se demonstra de outra recta qualquer, que não seja a recta AD. Logo AD he parallela a BC.

a. 31. 1.
b. 37. 1.

PROP. XL. THEOR.

OS triangulos iguaes postos sobre bazes iguaes, e da mesma parte, estão entre as mesmas parallelas.

Fig. 62. Sejão os triangulos iguaes ABC, DEF sobre as bazes iguaes BC, EF, e da mesma parte. Digo, que estes triangulos estão entre as mesmas parallelas.

Tire-se a recta AD. Digo, que AD he parallela a BF. Se AD não he parallela a BF, pelo ponto A tire-se AG parallela[a] a BF, e se conduza a recta GF. Os triangulos ABC, GEF

a. 31. 1.

GEF são iguaes[b], porque estão postos sobre as bazes iguaes BC, EF, e entre as mesmas parallelas BF, AG. Mas o triangulo ABC he igual ao triangulo DEF. Logo será tambem DEF=GEF, isto he, hum triangulo maior igual a hum menor, o que não he possivel. Logo AG não he parallela a BF. Do mesmo modo se prova, que nem huma outra recta fóra a recta AD he parallela a BF. Logo as duas AD, BF são parallelas. b. 38. 1.

PROP. XLI. THEOR.

SE hum parallelogrammo, e hum triangulo estiverem sobre a mesma baze, e entre as mesmas parallelas; o parallelogrammo será o dobro do triangulo.

Estejão sobre a mesma baze BC, e entre as mesmas parallelas BC, AE o parallelogrammo ABCD, e o triangulo EBC. Digo, que o parallelogrammo ABCD he o dobro do triangulo EBC. Fig. 65.

Tire-se a recta AC. Logo os triangulos ABC, EBC são iguaes[a], por estarem sobre a mesma baze BC, e entre as mesmas parallelas BC, AE. Mas o parallelogrammo ABCD he o dobro do triangulo ABC[b], porque he dividido em duas partes iguaes pela diagonal AC. Logo tambem o parallelogrammo ABCD será o dobro do triangulo EBC. a. 37. 1. b. 34. 1.

PROP.

PROP. XLII. PROB.

CONstruir hum parallelogrammo, que seja igual a hum triangulo dado, e que tenha hum angulo igual a outro angulo dado.

Fig. 64. Seja dado o triangulo ABC, e o angulo rectilineo D. Deve-se construir hum parallelogrammo igual ao triangulo ABC, e com hum angulo igual ao angulo D.

a. 10. 1. Divida-se a baze BC em duas partes iguaes [a] no ponto E; tire-se AE, e com a recta EC
b. 23. 1. no ponto E se faça [b] o angulo CEF = D. Pe-
c. 31. 1. lo ponto A se conduza AG parallela [c] a EC, e pelo ponto C a recta CG parallela a EF. Será FECG hum parallelogrammo. E sendo BE = EC, o triangulo ABE será igual ao tri-
d. 38. 1. angulo AEC [d], por estarem ambos sobre as bazes iguaes BE, EC, e entre as mesmas parallelas BC, AG. Logo o triangulo ABC he o dobro do triangulo AEG. Mas tambem o
e. 41. 1. parallelogrammo FECG he o dobro [e] do mesmo triangulo AEC, que se acha sobre a mesma baze, e entre as mesmas parallelas do parallelogrammo FECG. Logo o parallelogrammo FECG he igual ao triangulo ABC, e tem o angulo CEF = D, que he o angulo dado. Logo temos construido o parallelogrammo, que se pedia.

PROP. XLIII. THEOR.

EM qualquer parallelogrammo os complementos dos parallelogrammos, que exiſtem ao redor da diagonal, são iguaes entre ſi.

Seja o parallelogrammo ABCD; cuja diagonal he AC; e exiſtão ao redor da diagonal AC os parallelogrammos EH, FG; e os que ſe chamão complementos, ſejão os dous parallelogrammos BK, KD. Digo, que o complemento BK he igual ao complemento KD. Fig. 63.

No parallelogrammo ABCD os dous triangulos ABC, ADC são iguaes [a]; como tambem os dous AEK, AHK no parallelogrammo EKHA; e os outros dous KGC, KFC no parallelogrammo KGCF. Logo ſendo o triangulo AEK igual ao triangulo AHK, e KGC = KFC; os dous AEK, KGC juntos ſerão iguaes aos dous tambem juntos AHK, KFC. Mas o triangulo total ABC he igual ao triangulo total ADC [a]. Logo o reſiduo, que he o complemento BK, ſerá igual ao reſiduo, que he o outro complemento KD. a. 34. 1.

PROP. XLIV. PROB.

SObre huma linha recta dada conſtruir hum parallelogrammo igual a hum triangulo dado, e que tenha hum angulo igual a outro angulo rectilineo dado.

Fig. 66. Seja dada a recta AB, e o triangulo C, e o angulo rectilineo D. Deve-se construir sobre a recta dada AB hum parallelogrammo igual ao triangulo C, e que tenha hum angulo igual ao angulo D.

a. 42. 1. Faça-se[a] o parallelogrammo BEFG igual ao triangulo C, e com hum angulo EBG igual ao angulo D. Ponha-se BE em direitura com a recta AB, e produza-se FG para H; e pelo
b. 31. 1. ponto A se tire AH parallela[b] a BG, ou EF; e finalmente seja conduzida a recta HB. Porque as parallelas AH, EF são cortadas pela recta HF, os angulos AHF, HFE serão iguaes
c. 29. 1. a dous rectos[c]. Logo os dous angulos BHF, HFE são menores que dous rectos. Mas as rectas, que com huma terceira fazem os angulos internos, e da mesma parte menores que dous rectos, produzidas ao infinito finalmen-
d. ax. 12. te concorrem[d]. Logo as duas rectas HB, FE devem concorrer. Produzão-se pois, e concorrão no ponto K. Por este ponto tire-se a recta KL parallela a EA, ou FH, e sejão produzidas as rectas HA, GB até L, e M. Logo HLKF he hum parallelogrammo, cujo diametro he HK, e ao redor deste diametro HK existem os parallelogrammos AG, ME, cujos complementos são os parallelogrammos LB,
e. 43. 1. BF. Logo será LB=BF[e]. Mas o complemento BF he igual ao triangulo C. Logo o com-

complemento LB ſerá igual ao meſmo triangulo C. E porque o angulo GBE he igual ao angulo ABM[f], e tambem he igual ao angulo D; ſerá o angulo ABM = D. Logo ſobre a linha recta dada AB temos conſtruido o parallelogrammo LB igual ao triangulo dado C, e com hum angulo ABM igual ao angulo propoſto D. f. 15. 1.

PROP. XLV. PROB.

Conſtruir hum parallelogrammo igual a huma figura rectilinea qualquer dada, e com hum angulo igual a outro angulo dado.

Seja dado o rectilineo ABCD, e o angulo rectilineo E. Deve-ſe conſtruir hum parallelogrammo igual ao rectilineo ABCD, e com hum angulo igual ao angulo E. Fig. 67.

Tire-ſe a recta DB, e faça-ſe[a] o parallelogrammo FH igual ao triangulo ADB, e com o angulo HKF = E. Sobre a recta GH faça-ſe[b] o parallelogrammo GM igual ao triangulo DBC com o angulo GHM = E. Sendo o angulo E igual ao angulo FKH; e tambem igual a GHM, ſerá FKH = GHM. Ajunte-ſe-lhes o meſmo angulo KHG. Os angulos FKH, KHG ſeráõ iguaes aos angulos KHG, GHM. Mas FKH, KHG ſáõ iguaes a dous rectos[c]. Logo os dous KHG, GHM ſeráõ tambem iguaes a dous rectos. Logo KH eſtará em di- a. 42. 1. b. 44. 1. c. 29. 1.

d. 14. 1. reitura [d] com HM. E porque as parallelas KM, FG são cortadas pela recta HG, os angulos e. 29. 1. alternos MHG, HGF são iguaes [e]. Ajunte-se-lhes o mesmo angulo HGL. Logo os angulos MHG, HGL são iguaes aos angulos HGF, HGL. Mas MHG, HGL são iguaes a dous rectos [c]. Logo tambem HGF, HGL serão iguaes a dous rectos. Logo a recta FG está em direitura com a recta GL. E sendo KF parallela a HG, e HG parallela a ML, será KF e. 30. 1. parallela [e] a ML. Mas KM, FL são tambem parallelas. Logo KFLM he hum parallelogrammo. E porque o triangulo ABD he igual ao parallelogrammo HF; e o triangulo DBC igual ao parallelogrammo GM; será o rectilineo total ABCD igual ao parallelogrammo inteiro KFLM. Logo temos construido o parallelogrammo KFLM igual ao rectilineo dado ABCD, e com o angulo FKM igual ao angulo dado E.

Corol. He manifesto pelo que temos dito, como se possa fazer sobre huma linha recta dada hum parallelogrammo igual a hum rectilineo dado, e com hum angulo igual a outro dado. Deve-se sobre a recta dada formar b. 44. 1. hum parallelogrammo igual [b] ao primeiro triangulo ABD, e que tenha hum angulo igual ao angulo dado; e ir continuando o resto como temos explicado assima.

PROP.

PROP. XLVI. PROB.

SObre huma linha recta dada deſcrever hum quadrado.

Seja a recta dada AB. Sobre AB ſe deve Fig. 68.
conſtruir hum quadrado.

Levante-ſe do ponto A a recta AC perpendicular[a] ſobre AB; e ponha-ſe[b] AD=AB. a. 11. 1.
Pelo ponto D ſe faça paſſar a recta DE paral- b. 3. 1.
lela[c] a AB; e pelo ponto B a recta BE paral- c. 31. 1.
lela[c] a AD. Será ADEB hum parallelogrammo. Logo ſerá AB=DE[d], e AD=BE. Mas d. 34. 1.
temos feito BA=AD. Logo as quatro rectas BA, AD, DE, EB são iguaes entre ſi, e por conſequencia o parallelogrammo ADEB he equilatero. Digo, que he tambem rectangulo. Porque as parallelas AB, DE são cortadas pela recta AD, os angulos BAD, ADE ſerão iguaes a dous rectos[e]. Mas BAD he recto. Lo- e. 29. 1.
go tambem ADE ſerá recto. Mas nos parallelogrammos os angulos oppoſtos são iguaes[d]. Logo os dous ABE, BED, que ficão oppoſtos a angulos rectos, devem ſer tambem rectos. Logo ADEB ſerá hum rectangulo. Logo ſendo equilatero, como temos provado, ſobre a recta dada AB temos deſcripto o quadrado AE, que ſe pedia.

Corol. Diſto ſe ſegue, que hum parallelogrammo he rectangulo, quando tenha hum angulo recto.

PROP.

PROP. XLVII. THEOR.

EM todo o triangulo rectangulo o quadrado feito ſobre o lado oppoſto ao angulo recto, he igual aos quadrados formados ſobre os outros lados, que fazem o meſmo angulo recto.

Fig. 69. Seja o triangulo rectangulo ABC, cujo angulo recto ſeja BAC. Digo, que o quadrado feito ſobre o lado BC he igual aos quadrados deſcriptos ſobre os lados BA, AC, que formão o angulo recto BAC.

a. 46. 1. Deſcreva-ſe ſobre BC o quadrado BDEC[a], e ſobre BA, AC os quadrados GB, HC. Pelo
b. 31. 1. lo ponto A ſe tire AL parallela[b] a BD, ou CE, e tirem-ſe tambem as rectas AD, FC. Porque
c. def. 30 os angulos BAC, BAG são rectos[c], as duas rectas CA, AG eſtão em direitura huma com
d. 14. 1. outra[d]. O meſmo ſerá a reſpeito das duas AB, AH. Os angulos DBC, FBA, por ſerem rectos, são iguaes. Ajunte-ſe-lhes o meſmo angulo ABC. Logo o total DBA ſerá igual ao
e. ax. 2. total FBC[e]. E ſendo as duas AB, BD iguaes ás duas FB, BC, cada huma a cada huma, e o angulo DBA = FBC; ſerá a baze AD = FC, que he outra baze; e o triangulo ABD =
f. 4. 1. FBC outro triangulo[f]. Mas o parallelogram-
g. 41. 1. mo BL he o dobro[g] do triangulo ABD, porque eſtá ſobre a meſma baze BD, e entre as meſmas parallelas BD, AL; e o quadrado GB

he

he o dobro do triangulo FBC, porque tem a baze commua FB, e eſtão entre as meſmas parallelas FB, GC. Logo ſendo iguaes os dobros de quantidades iguaes [h], deve ſer o parallelogrammo BL igual ao quadrado GB. Do meſmo modo tiradas as rectas AE, BK, ſe demonſtra, que o parallelogrammo CL he igual ao quadrado HC. Logo o quadrado inteiro BDEC feito ſobre o lado BC oppoſto ao angulo recto BAC he igual aos dous quadrados GB, HC formados ſobre os lados BA, AC, que fazem o meſmo angulo recto BAC. h. ax. 6.

PROP. XLVIII. THEOR.

SE o quadrado feito ſobre hum lado de hum triangulo for igual aos quadrados dos outros dous lados; o angulo comprehendido por eſtes dous lados ſerá recto.

Seja o quadrado feito ſobre o lado BC do triangulo ABC igual aos quadrados feitos ſobre os lados BA, AC. Digo, que o angulo BAC he recto. Fig. 70.

Levante-ſe do ponto A ſobre AC a perpendicular AD, e ponha-ſe AD=BA [a], e tire-ſe DC. Sendo DA=AB, ſerá o quadrado ſobre DA igual ao quadrado ſobre AB. Ajunte-ſe-lhes o quadrado de AC. Os quadrados de DA, AC ſerão iguaes aos quadrados de BA, AC. Mas o quadrado de DC he igual aos qua- a. 11. 1.

dra-

drados de DA, AC, por ser o angulo DAC
b. 47. 1. recto [b]; e o quadrado de BC se suppõe igual
aos quadrados de BA, AC. Logo o quadrado de DC será igual ao quadrado de BC. Logo será DC = CB. Sendo pois DA = AB, e AC commua, as duas DA, AC serão iguaes ás duas BA, AC. Mas he a baze DC = BC
c. 8. 1. outra baze. Logo será o angulo DAC = BAC [c]. Mas o angulo DAC he recto. Logo tambem o angulo BAC será recto.

LIVRO II.
DOS ELEMENTOS DE
EUCLIDES.

DEFINIÇÕES.

I.

Todo o parallelogrammo rectangulo se considera comprehendido por duas linhas rectas, que formão o angulo recto.

II.

Em todo o parallelogrammo a figura, que resulta de hum parallelogrammo daquelles, que existem na diagonal do parallelogrammo maior, juntamente com os dous complementos, chama-se gnomon. Deste modo o parallelogrammo HG juntamente com os complementos AF, FC fazem o gnomon, que por brevidade se nota com as letras AGK, ou EHC, Fig. 1.
que

que estão postas nos vertices dos angulos oppostos dos parallelogrammos, que formão o gnomon.

PROP. I. THEOR.

SE houver duas linhas rectas, e huma dellas for dividida em quantas partes se quizer; será o rectangulo comprehendido pelas duas rectas igual aos rectangulos comprehendidos pela recta inteira, e pelos segmentos da outra.

Fig. 2. Sejão as duas rectas A, e BC; e seja BC dividida, como se quer, nos pontos D, E. Digo, que o rectangulo comprehendido pelas rectas A, BC he igual aos rectangulos comprehendidos pelas rectas A, BD; A, DE; A, EC.

Do ponto B conduza-se a recta BF per-
a. 11. 1. pendicular a BC [a], e faça-se BG = A [b]. Pelo
b. 3. 1. ponto G tire-se GH parallela a BC, e pelos
pontos D, E, C as rectas DK, EL, CH pa-
c. 31. 1. rallelas a BG [c]. Logo o rectangulo BH he igual
aos rectangulos DK, DL, EH. Mas o rectangulo BH he comprehendido pelas rectas GB, BC, ou pelas rectas A, BC, por ser GB = A; e os rectangulos BK, DL, EH são comprehendidos pelas rectas GB, BD; DK, DE; EL, EC, ou pelas rectas A, BD; A, DE; A, EC, porque sendo BG, DK, EL
d. 34. 1. iguaes entre si [d], e sendo BG = A, cada huma

das

das tres rectas BG, DK, EL he igual á linha recta A. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas A, BC he igual aos rectangulos comprehendidos pelas rectas A, BD; A, DE; A, EC.

PROP. II. THEOR.

SE huma linha recta for dividida como se quizer, os rectangulos comprehendidos pela recta toda, e por cada huma das partes, são iguaes ao quadrado da linha inteira.

Seja a recta AB cortada, como se quer, no ponto C. Digo, que os rectangulos comprehendidos pelas rectas AB, BC; AB, AC são iguaes ao quadrado da recta AB. Fig. 3.

Descreva-se sobre a recta AB o quadrado ADEB[a]; e pelo ponto C tire-se CF parallela a AD, ou BE[b]. Será o quadrado AE igual aos rectangulos AF, CE. Mas o quadrado AE he o quadrado da recta AB; e o rectangulo AF he comprehendido pelas rectas DA, AC, isto he, pelas rectas BA, AC, por ser AD = AB; e o rectangulo CE he comprehendido pelas rectas CF, CB, isto he, pelas rectas AB, BC, por ser CF = AD, e AD = AB. Logo os rectangulos comprehendidos pelas rectas AB, AC; AB, BC são iguaes ao quadrado da recta AB.

a. 46. 1.
b. 31. 1.

PROP.

PROP. III. THEOR.

SE huma linha recta for dividida, como se quizer; será o rectangulo comprehendido pela mesma recta, e por huma parte della, igual ao rectangulo das partes juntamente com o quadrado da dita parte.

Fig. 4. Seja a recta AB cortada, como se quer, no ponto C. Digo, que o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BC he igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas AC, CB juntamente com o quadrado da recta BC.

a. 46. 1. Faça-se o quadrado CDEB da recta BC [a], e produza-se ED para F, e pelo ponto A b. 31. 1. tire-se AF parallela a CD, ou BE [b]. Será o rectangulo AE igual aos rectangulos AD, CE. Mas AE he o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BE, isto he, pelas rectas AB, BC, por ser BE=BC; e o rectangulo AD he comprehendido pelas rectas AC, CD, isto he, pelas rectas AC, CB, por ser CD=CB; e DB he o quadrado da recta BC. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BC he igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas AC, CB juntamente com o quadrado da recta BC.

PROP. IV. THEOR.

Se huma linha recta for cortada em duas partes quaeſquer; ſerá o quadrado da toda igual aos quadrados das partes juntamente com o rectangulo das meſmas partes tomado duas vezes.

Seja a recta AB cortada, como ſe quizer, Fig. 5.
no ponto C. Digo, que o quadrado da recta AB he igual aos quadrados das partes AC, CB juntamente com duas vezes o rectangulo comprehendido pelas meſmas partes AC, CB.

Sobre a recta AB deſcreva-ſe o quadrado
ADEB[a], e tirada a diagonal BD, pelo ponto a. 46. 1.
C tire-ſe a recta CGF parallela a AD, ou BE[b]; b. 31. 1.
e pelo ponto G a recta HK parallela a AB, ou DE[b]. Sendo pois as duas rectas CF, AD parallelas, e ambas cortadas pela incidente BD, ſerá o angulo externo BGC = ADB, que he
o interno e oppoſto[c]. Mas he ADB = ABD[d], c. 29. 1.
por ſer BA = AD. Logo ſerá CGB = GBC, d. 5. 1.
e por conſequencia BC = CG[e]. Mas he CB = e. 6. 1.
GK, e CG = BK[f]. Logo ſerá GK = KB. f. 34. 1.
Logo CGKB he huma figura equilatera. Digo, que he tambem rectangula. Porque ſendo parallelas as rectas CG, BK, e cahindo ſobre ellas a incidente CB, ſeráo os angulos KBC, GCB iguaes a dous rectos. Mas o angulo KBC he recto. Logo tambem o angulo GCB ſerá recto, e por conſequencia ſão rectos os angulos

f. 34. 1. los oppoſtos CGK, GKB f. Logo a figura CGKB he rectangula. Logo ſendo tambem equilatera, como temos demonſtrado, ſerá hum quadrado, e conſequentemente o quadrado da recta CB. Com a meſma demonſtração ſe prova ſer HF o quadrado da recta AC. Sendo g. 43. 1. pois AG=GE g, e ſendo o rectangulo AG comprehendido pelas rectas AC, CG, iſto he, AC, CB, por ſer CG=CB; ſerá tambem o rectangulo GE igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas AC, CB. Logo os rectangulos AG, GE são juntamente iguaes a duas vezes o rectangulo comprehendido pelas rectas AC, CB. Mas HF, CK são os quadrados das rectas AC, CB, por ſer HG=AC. Logo os quadrados HF, CK, e os rectangulos AG, GE são todos juntos iguaes aos quadrados de AC, e de CB, e a duas vezes o rectangulo comprehendido pelas meſmas AC, CB. Mas HF, CK, AG, GE fazem o quadrado total ADEB, que he o quadrado da recta AB. Logo o quadrado de AB he igual aos quadrados de AC, e de CB juntamente com duas vezes o rectangulo comprehendido pelas rectas AC, CB.

COROL. Diſto ſe ſegue, que os parallelogrammos, que exiſtem na diagonal de hum quadrado qualquer, são tambem quadrados.

PROP.

PROP. V. THEOR.

SE huma linha recta for dividida em duas partes iguaes, e em outras duas desiguaes; será o rectangulo comprehendido pelas partes desiguaes juntamente com o quadrado da parte entre as duas secções, igual ao quadrado da ametade da linha proposta.

Seja a recta AB dividida em partes iguaes no ponto C, e em partes desiguaes no ponto D. Digo, que o rectangulo das rectas AD, DB juntamente com o quadrado de CD, he igual ao quadrado de CB. Fig. 6.

Sobre a recta BC descreva-se o quadrado CEFB [a], e tirada a recta BE, pelo ponto D tire-se DHG parallela [b] a CE, ou BF, e pelo ponto A a recta AK parallela a CL, ou BM. Sendo os complementos CH, HF iguaes [c], ajunte-se-lhes o mesmo quadrado DM. Será CM = DF. Mas he CM = AL [d], por ser AC = CB. Logo será AL = DF. Ajunte-se-lhes o mesmo CH. Logo será AH = DF mais CH. Mas AH he o rectangulo comprehendido pelas rectas AD, DH, isto he, AD, DB, por ser DH = DB [e]; e DF, CH fazem o gnomon CMG. Logo o gnomon CMG he igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas AD, DB. Ajunte-se-lhes LG, que he igual ao quadrado de CD [e]. Logo o gnomon CMG mais o qua-

a. 46. 1.
b. 31. 1.
c. 43. 1.
d. 36. 1.
e. Cor. 4. 2.

quadrado LG são iguaes ao rectangulo comprehendido pelas rectas AD, DB, e mais ao quadrado de CD. Mas o gnomon CMG, e LG fazem o quadrado CEFB, que he o quadrado da recta CB. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas AD, DB juntamente com o quadrado de CD, he igual ao quadrado de CB.

PROP. VI. THEOR.

SE huma linha recta for dividida em duas partes iguaes, e em direitura com ella se puzer outra recta; será o rectangulo comprehendido pela recta toda e mais a adjunta, e pela mesma adjunta juntamente com o quadrado da ametade da primeira recta, igual ao quadrado da recta, que se compõe da mesma ametade, e da outra recta adjunta.

Fig. 7. Se a recta AB dividida pelo meio no ponto C, e com AB esteja em direitura a outra BD. Digo, que o rectangulo comprehendido pelas rectas AD, DB juntamente com o quadrado de CB, he igual ao quadrado de CD.

Sobre a recta CD descreva-se o quadrado
a. 46. 1. CEFD [a], e tire-se DE. Pelo ponto B conduz-
b. 31. 1. za-se BHG parallela a CE, ou DF [b]; e pelo ponto H a recta KLM parallela a AD, ou EF; e finalmente pelo ponto A a recta AK parallela a CL, ou DM. Logo sendo AC=CB,

se-

ſerá o rectangulo AL=CH outro rectangulo [c]. Mas he CH=HF [d]. Logo ſerá AL= HF. Ajunte-ſe-lhes o meſmo CM. Logo ſerá o total AM=CMG, que he hum gnomon. Mas AM he o rectangulo comprehendido pelas rectas AD, DM, iſto he, pelas rectas AD, DB, por ſer DM=DB [e]. Logo o gnomon CMG ſerá igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas AD, DB. Ajunte-ſe-lhes o meſmo LG, que he igual ao quadrado da recta CB. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas AD, DB juntamente com o quadrado de CB he igual ao gnomon CMG juntamente com o quadrado LG. Mas o gnomon CMG e o quadrado LG fazem o quadrado inteiro CEFD, que he o quadrado de CD. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas AD, DB juntamente com o quadrado de CB he igual ao quadrado de CD.

c. 36. 1.
d. 43. 1.
e. Cor. 4. 2.

PROP. VII. THEOR.

SE huma linha recta for dividida, como ſe quizer, em duas partes; ſerão os quadrados da toda, e de huma das partes, iguaes a duas vezes o rectangulo comprehendido pela linha toda, e pela dita parte juntamente com o quadrado da outra parte.

Seja a recta AB dividida, como ſe quizer, no ponto C. Digo, que os quadrados de AB, e Fig. 5.

de BC são iguaes a duas vezes o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BC juntamente com o quadrado de AC.

Faça-se sobre a recta AB o quadrado
a. 46. 1. ADEB [a]; e completada a figura, como se vê, será o rectangulo AG=GE outro rectangu-
b. 45. 1. lo [b]. Ajunte-se-lhes o mesmo CK. Será o total AK=CE total. Logo os rectangulos AK, CE são juntamente o dobro de AK. Mas AK, CE equivalem ao gnomon AKF, e mais ao quadrado CK. Logo o gnomon AKF mais o quadrado CK são o dobro do rectangulo AK. Mas tambem o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BC tomado duas vezes he o
c. Cor. 4. 2. dobro do rectangulo AK, por ser BK=BC [c]. Logo o gnomon AKF juntamente com o quadrado CK he igual a duas vezes o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BC. Ajunte-se-lhes o mesmo HF, que he igual ao quadrado de AC. Logo o gnomon AKF, e os quadrados CK, HF são iguaes a duas vezes o rectangulo de AB, BC, e ao quadrado de AC. Mas o gnomon AKF, e os quadrados CK, HF equivalem aos quadrados ADEB, e CK, que são os quadrados de AB, e de BC. Logo os quadrados de AB, e de BC são iguaes a duas vezes o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BC juntamente com o quadrado de AC.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

SE huma linha recta estiver cortada, como se quizer; será o rectangulo da recta toda, e de huma das partes, tomado quatro vezes, juntamente com o quadrado da outra parte, igual ao quadrado da recta, que se compõe da linha toda, e da dita outra parte.

Seja a recta AB dividida, como se quizer, no ponto C. Digo, que o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BC, tomado quatro vezes, juntamente com o quadrado de AC, he igual ao quadrado da recta, que fizer a somma das duas AB, BC. Fig. 8.

Ponha-se BD=CB, e em direitura com AB, e sobre AD faça-se o quadrado AEFD, proseguindo o resto da construcção, como se vê na figura. Sendo pois CB=BD, e CB=GK[a], e BD=KN, será GK=KN. Pela mesma razão será PR=RO. E porque temos CB=BD, e GK=KN, será o rectangulo CK=BN, e GR=RN[b]. Mas he CK=RN[c], porque são complementos do parallelogrammo CO. Logo será BN=GR. Logo os quatro BN, CK, GR, RN são iguaes entre si, e por consequencia são o quadruplo de CK. Tambem sendo CB=BD, e BD=BK[d], isto he, BD=CG; e sendo CB=GK, isto he CB=GP[d]; será CG=GP. E sendo CG=

a. 34. 1.
b. 36. 1.
c. 43. 1.
d. Cor. 4. 2.

GP, e PR=RO, ſerá o rectangulo AG=
c. 43. 1. MP, e PL=RF. Mas he MP=PL[c], porque ſão complementos do parallelogrammo ML. Logo ſerá AG=RF. Logo os quatro AG, MP, PL, RF ſão iguaes entre ſi, e por conſequencia ſão o quadruplo de AG. Mas temos demonſtrado, que os quatro CK, BN, GR, RN ſão tambem o quadruplo de CK. Logo as oito figuras, que formão o gnomon BOH, ſão o quadruplo de AK. Mas o rectangulo AK he o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BK, iſto he, pelas rectas AB, BC, por ſer BK=BC. Logo o rectangulo das rectas AB, BC tomado quatro vezes ſerá o quadruplo do rectangulo AK. Mas o gnomon AOH, como ſe tem viſto, he tambem quadruplo de AK. Logo o rectangulo das rectas AB, BC tomado quatro vezes he igual ao gnomon AOH. Ajunte-ſe-lhes o meſmo
d. Cor. 4. 2. XH, que he igual ao quadrado de AC.[d]. Será o rectangulo das rectas AB, BC tomado quatro vezes juntamente com o quadrado de AC igual ao gnomon AOH, e ao quadrado XH. Mas o gnomon AOH, e o quadrado XH fazem o quadrado inteiro AEFD, que he o quadrado da recta AD. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BC tomado quatro vezes juntamente com o quadrado de AC he igual ao quadrado da recta AD, que ſe compõe da recta dada AB, e da parte BC.

 PROP.

PROP. IX. THEOR.

SE huma linha recta for dividida em duas partes iguaes, e em outras duas desiguaes; os quadrados das partes desiguaes serão o dobro do quadrado sobre a metade da recta juntamente com o quadrado da porção, que fica entre as duas secções.

Seja a recta AB dividida em partes iguaes no ponto C, e em partes desiguaes no ponto D. Digo, que os quadrados de AD, e de DB são o dobro dos quadrados de AC, e de CD. Fig. 9.

Do ponto C levante-se sobre AB a perpendicular[a] CE, que seja igual a AC, ou CB, e conduzidas as rectas EA, EB, pelo ponto D tire-se DF parallela a CE[b], e pelo ponto F a recta FG parallela a AB. Tire-se tambem AF. Sendo AC=CE, será o angulo EAC=AEC[c]. E porque o angulo ECA he recto, serão os dous AEC, EAC juntos iguaes a hum recto[d], e por consequencia cada hum delles será a metade de hum angulo recto. Pela mesma razão cada hum dos angulos CEB, EBC deve ser a metade de hum recto. Logo o angulo total AEB he recto. E porque o angulo GEF he a metade de hum recto, e EGF he hum recto, por ser igual ao angulo ECB interno e opposto[e]; será o outro angulo EFG tambem a metade de hum recto. Logo será o angulo GEF

a. 11. 1.
b. 31. 1.
c. 5. 1.
d. 32. 1.
e. 29. 1.

f. 6. 1. GEF = EFG, e por consequencia EG = GF[f]. Tambem sendo o angulo B semirecto, e FDB recto, por ser este igual a ECB interno e op-
e. 29. 1. posto [e]; será o angulo BFD semirecto. Logo será o angulo B = BFD, e consequentemente DF = DB [f]. E sendo AC = CE, será o quadrado de AC igual ao quadrado de CE. Logo os quadrados de AC, e de CE juntamente fazem o dobro do quadrado de AC. Mas o quadrado de EA he igual aos quadrados de AC,
g. 47. 1. e de CE [g], por ser o angulo ACE recto. Logo o quadrado de EA he o dobro do quadrado de AC. Tambem sendo EG = GF, será o quadrado de EG igual ao quadrado de GF. Logo os quadrados de EG, e de GF são o dobro do quadrado de GF. Mas o quadrado de EF he igual aos quadrados de EG, e de GF. Logo o quadrado de EF será o dobro do
h. 34. 1. quadrado de GF. Mas he GF = CD [h]. Logo o quadrado de EF he o dobro do quadrado de CD. Mas tambem o quadrado de AE he o dobro do quadrado de AC. Logo os quadrados de AE, e de EF são o dobro dos quadrados de AC, e de CD. Mas o quadrado de AF he igual aos quadrados de AE, e de EF [g], por ser o angulo AEF recto. Logo o quadrado de AF he o dobro dos quadrados de AC, e de CD. Mas os quadrados de AD, e de DF são iguaes ao quadrado de AF, porque o angulo ADF he recto. Logo os quadrados de AD, e de DF são o dobro dos quadrados de AC, e de CD. Mas he DF = DB. Logo os quadrados

de

de AD, e de DB são o dobro dos quadrados de AC, e de CD.

PROP. X. THEOR.

SE huma linha recta for dividida em duas partes iguaes; e se em direitura com ella se puzer outra recta qualquer; serão os quadrados da toda com a adjunta, e da adjunta, o dobro dos quadrados da ametade, e daquella recta, que se compõe da ametade, e da adjunta.

Seja a recta AB dividida pelo meio no ponto C, e em direitura com AB esteja outra recta qualquer BD. Digo, que os quadrados de AD, e de DB são o dobro dos quadrados de AC, e de CD. Fig. 10.

Do ponto C levante-se sobre AB a perpendicular[a] CE, que seja igual a AC, ou CB, a. 11. 1.
e tiradas as rectas AE, EB, pelo ponto E conduza-se EF parallela a AB[b]; e pelo ponto D a b. 31. 1.
recta DF parallela a CE[b]. Porque a recta EF encontra as duas parallelas EC, FD nos pontos E, F, serão os angulos CEF, EFD iguaes a dous rectos[c]. Logo os angulos BEF, EFD c. 29. 1.
são menores que dous rectos. Mas duas rectas, que com huma terceira fazem os angulos internos menores que dous rectos, produzidas ao infinito, finalmente se chegão a tocar[d]. Logo d. ax. 12.

as duas rectas EB, FD produzidas para a parte BD devem-se encontrar. Produzão-se pois, e se encontrem no ponto G. Tire-se AG. Porque temos AC=CE, será o angulo CEA=
e. 5. 1. EAC[e]. Mas o angulo ACE he recto. Logo cada hum dos angulos CEA, EAC será semirecto. Pela mesma razão he semirecto cada hum dos angulos CEB, EBC. Logo o angulo AEB deve ser recto. E porque EBC he semirecto,
f. 15. 1. será DBG tambem semirecto[f]. Mas BDG he
c. 29. 1. recto, porque he igual ao alterno DCE.[c]. Logo DGB será semirecto. Logo será DGB=
g. 6. 1. DBG, e por consequencia BD=DG[g]. Tambem sendo EGF semirecto, e sendo F recto,
h. 34. 1. por ser igual ao angulo opposto ECD[h], será FEG semirecto. Logo será EGF=FEG, e GF=FE[g]. E porque temos EC=CA, será o quadrado de EC igual ao quadrado de CA. Logo os quadrados de EC, e de CA são o dobro do quadrado de CA. Mas o quadrado de EA he igual aos quadrados de EC, e de
i. 47. 1. CA[i]. Logo o quadrado de EA he o dobro do quadrado de AC. Tambem sendo GF=FE, será o quadrado de GF igual ao quadrado de FE. Logo os quadrados de GF, e de FE são o dobro do quadrado de EF. Mas o quadrado de EG he igual aos quadrados de GF, e de FE[i]. Logo o quadrado de EG he o dobro do quadrado de EF. Mas EF, CD são iguaes. Logo o quadrado de EG he o dobro do quadrado de CD. Mas temos demonstrado ser o quadrado de EA o dobro do quadrado de AC.

Lo-

Logo os quadrados de AE, e de EG são o dobro dos quadrados de AC, e de CD. Mas o quadrado de AG he igual aos quadrados de AE, e de EG [i]. Logo o quadrado de AG he o dobro dos quadrados de AC, e de CD. Mas os quadrados de AD, e de DG são iguaes ao quadrado de AG [i]. Logo os quadrados de AD, e de DG são o dobro dos quadrados de AC, e de CD. Mas he DG = DB. Logo os quadrados de AD, e de DB são o dobro dos quadrados de AC, e de CD. *i. 47. 1.*

PROP. XI. PROB.

Dividir huma linha recta de ſorte, que o rectangulo da toda, e de huma parte ſeja igual ao quadrado da outra parte.

Seja AB a linha recta dada. Deve-ſe dividir a recta AB em hum ponto H de ſorte, que o rectangulo comprehendido pela recta AB, e pela parte BH ſeja igual ao quadrado de AH, que he a outra parte. *Fig. 11.*

Deſcreva-ſe o quadrado ABDC [a] ſobre a recta AB, e divida-ſe AC em duas partes iguaes no ponto E [b]; e tirada a recta BE, produza-ſe CA para F, e ponha-ſe EF = BE [c]. Sobre AF deſcreva-ſe o quadrado FGHA [a], e produza-ſe GH até K. Digo, que a recta AB fica dividida no ponto H de ſorte, que o rectangulo das rectas AB, BH he igual ao quadrado de AH. *a. 46. 1.* *b. 10. 1.* *c. 3. 1.*

Por-

Porque a recta AC he dividida em duas partes iguaes no ponto E, e em direitura com ella está posta a recta AF, será o rectangulo comprehendido pelas rectas CF, FA juntamente com o quadrado de AE, igual ao quadra-
d. 6. 2. do de EF[d]. Mas temos EF=EB. Logo o rectangulo das rectas CF, FA juntamente com o quadrado de AE he igual ao quadrado de EB. Mas o quadrado de EB he igual aos qua-
e. 47. 1. drados de BA, e de AE[e], por ser o angulo BAE recto. Logo o rectangulo de CF, FA juntamente com o quadrado de AE he igual aos quadrados de BA, e de AE. Logo tirando o quadrado commum de AE, será o rectangulo de CF, FA igual ao quadrado de AB. Mas FK he o rectangulo comprehendido pelas rectas CF, FA, por ser AF=FG; e AD he o quadrado da recta AB. Logo será FK=AD. Tire-se de parte e outra o commum AK. Ficará FH=HD. Mas HD he o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BH, por ser AB=BD; e FH he o quadrado de AH. Logo o rectangulo de AB, BH he igual ao quadrado de AH. Logo temos dividido a recta AB no ponto H de sorte, que o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BH he igual ao quadrado de AH.

PROP.

PROP. XII. THEOR.

EM todo o triangulo obtuſangulo o quadrado do lado oppoſto ao angulo obtuſo he tanto maior do que os quadrados dos outros lados, quanto he duas vezes o rectangulo comprehendido por hum dos ditos lados, e pela parte do meſmo lado produzido, que fica entre o angulo obtuſo, e a perpendicular, que do angulo agudo oppoſto cahe ſobre o meſmo lado produzido.

Seja o triangulo obtuſangulo ABC, e nelle o angulo obtuſo ACB. Do ponto A caia[a] a perpendicular AD ſobre o lado BC produzido para D. Digo, que o quadrado de AB he tanto maior que os quadrados de AC, e de CB, quanto he duas vezes o rectangulo comprehendido pelas rectas BC, CD. Fig. 12. a. 12. 1.

Sendo a linha recta BD cortada em C, ſerá o quadrado de BD igual aos quadrados de BC, e de CD juntamente com o dobro do rectangulo das meſmas BC, CD[b]. Ajunte-ſe-lhes o meſmo quadrado de DA. Logo os quadrados de BD, e DA ſeráo iguaes aos quadrados de BC, de CD, e de DA, e mais ao dobro do rectangulo de BC, CD. Mas o quadrado de BA he igual aos quadrados de BD, e de DA[c], por ſer o angulo D recto; e o quadrado de CA he igual aos quadrados de CD, e de b. 4. 2. c. 47. 1.

c. 47. 1. de DA [c]. Logo o quadrado de BA será igual aos quadrados de BC, e de CA, e a duas vezes o rectangulo de BC, CD. Logo o quadrado de BA he tanto maior que os quadrados de BC, e de CA, quanto he duas vezes o rectangulo comprehendido pelas rectas BC, CD.

PROP. XIII. THEOR.

EM todo o triangulo o quadrado do lado opposto a hum angulo agudo he tanto menor que os quadrados dos lados, que formão o dito angulo agudo, quanto he duas vezes o rectangulo comprehendido por hum dos lados, que fazem o angulo agudo, e pela parte do mesmo lado, que fica entre o angulo agudo, e a perpendicular, que do vertice do angulo opposto cahe sobre o mesmo lado.

Fig. 12. 13. a. 12. 1. Seja o triangulo ABC, e nelle o angulo agudo B. Do ponto A caia [a] sobre BC a perpendicular AD. Digo, que o quadrado de AC he tanto menor que os quadrados de CB, e de BA, quanto he duas vezes o rectangulo comprehendido pelas rectas CB, BD.

Fig. 13. Caia primeiro a perpendicular AD dentro do triangulo ABC. Sendo a recta CB dividida no ponto D, serão os quadrados de CB, e de BD iguaes a duas vezes o rectangulo de

CB,

CB, BD juntamente com o quadrado de DC[b]. b. 7. 2.
Ajunte-ſe-lhes o meſmo quadrado de AD. Serão os quadrados de CB, de BD, e de DA iguaes a duas vezes o rectangulo de CB, BD juntamente com os quadrados de AD, e de DC. Mas o quadrado de AB he igual aos quadrados de BD, e de DA[c], porque o angulo BDA he recto; e o quadrado de AC he igual aos quadrados de AD, e de DC. Logo ſerão os quadrados de CB, e de BA iguaes ao quadrado de AC juntamente com o dobro do rectangulo de CB, BD. Logo o quadrado de AC ſerá tanto menor que os quadrados de CB, e de BA, quanto he duas vezes o rectangulo comprehendido pelas rectas CB, BD. c. 47. 1.

Caia agora a perpendicular AD fóra do triangulo ABC. Porque o angulo D he recto, ſerá o angulo ACB maior que hum recto[d]. Logo o quadrado de AB he igual aos quadrados de AC, e de CB, e a duas vezes o rectangulo das rectas BC, CD[e]. Ajunte-ſe-lhes o meſmo quadrado de BC. Serão os quadrados de AB, e de BC iguaes ao quadrado de AC, a duas vezes o quadrado de BC, e tambem a duas vezes o rectangulo das rectas BC, CD. Sendo pois a recta BD dividida em C, ſerá o rectangulo das rectas DB, BC igual ao rectangulo de BC, CD, e juntamente ao quadrado de BC[f]. Mas os dobros deſtas quantidades são tambem iguaes. Logo ſerão os quadrados de AB, e de BC iguaes ao quadrado de AC, e a duas vezes o rectangulo das re- Fig. 12. d. 16. 1. e. 12. 2. f. 3. 2.

ctas

ctas DB, BC. Logo o quadrado de AC ſerá tanto menor que os quadrados de AB, e de BC, quanto he duas vezes o rectangulo comprehendido pelas rectas CB, BD.

Fig. 14. Seja finalmente o lado AC perpendicular ſobre o lado BC. Logo a recta BC eſtá poſta entre a perpendicular AC, e o angulo agudo B. Sendo pois o quadrado de AB igual aos quadrados de AC, e de BC[c], ajuntando a huma e outra parte o meſmo quadrado de BC, ſeráo os quadrados de AB, e de BC iguaes ao quadrado de AC, e a duas vezes o quadrado de CB. Mas o quadrado de CB vem a ſer o meſmo que o rectangulo das rectas CB, BC. Logo os quadrados de AB, e de BC ſeráo iguaes ao quadrado de AC, e a duas vezes o rectangulo de CB, BC, e por conſequencia ſerá o quadrado de AC tanto menor que os quadrados de AB, e de BC, quanto he duas vezes o rectangulo das rectas CB, BC.

c. 47. 1.

PROP. XIV. PROB.

Conſtruir hum quadrado igual a hum rectilineo dado.

Fig. 15. Seja dado o rectilineo A. Deve-ſe conſtruir hum quadrado igual ao rectilineo A.

Deſcreva-ſe o parallelogrammo rectangulo BCDE igual ao rectilineo A[a]. Se for BE = ED, eſtará feito o que ſe pede, porque BD ſerá hum quadrado igual ao rectilineo A. Mas

a. 45. 1.

ſe

ſe não forem iguaes os lados BE, ED, produza-ſe BE até F, de maneira que ſeja EF = ED, e corte-ſe a recta BF em duas partes iguaes no ponto G; e fazendo centro em G com o intervallo GB, ou GF, deſcreva-ſe o ſemicirculo BHF, e produzida DE até H, tire-ſe a recta GH. Porque a recta BF he dividida em duas partes iguaes no ponto G, e em duas deſiguaes no ponto E, será o rectangulo comprehendido pelas rectas BE, EF juntamente com o quadrado de EG igual ao quadrado de GF[b]. Mas he a recta GF = GH. Logo o rectangulo das rectas BE, EF juntamente com o quadrado de EG ſerá igual ao quadrado de GH. Mas os quadrados de HE, EG são iguaes ao quadrado de GH[c]. Logo o rectangulo de BE, EF juntamente com o quadrado de EG ſerá igual aos quadrados de HE, EG. Logo tirando o quadrado commum de EG, ficará o rectangulo de BE, EF igual ao quadrado de EH. Mas o rectangulo de BE, EF he o meſmo rectangulo BD, por ſer EF = ED. Logo ſerá BD igual ao quadrado de EH. Mas temos conſtruido o parallelogrammo BD igual ao rectilineo dado A. Logo o rectilineo A ſerá igual ao quadrado da recta EH. Logo fazendo hum quadrado ſobre a recta EH, eſtará feito o que ſe pedia.

b. 5. 2.

c. 47. 1.

LIVRO III.
DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

DEFINIÇÕES.

I.

AQuelles circulos são iguaes, cujos diametros são iguaes, ou nos quaes as rectas, que vão do centro até a circunferencia, são iguaes.

Esta não he propriamente huma definição, mas sim hum theorema de huma verdade patente. Porque se os circulos, nos quaes as ditas rectas tiradas do centro até á circunferencia são iguaes, se applicarem reciprocamente entre si, de maneira que os centros venhão a cahir no mesmo ponto, os circulos se ajustaráõ entre si perfeitamente.

II.

Huma linha recta se diz, que toca hum circulo, ou que he tangente de hum circulo, quando estando no mesmo plano do circulo encontra a circunferencia sem a cortar. Fig. 1.

III.

Tambem os circulos se tocão reciprocamente, quando postos no mesmo plano as circunferencias delles se encontrão, e não se cortão. Fig. 1.

IV.

Em hum circulo se diz, que aquellas rectas distão igualmente do centro, quando as perpendiculares, que do centro cahem sobre as ditas rectas, são iguaes. Fig. 2.

V.

Mas huma recta se diz mais distante do centro que outra recta, quando a perpendicular, que do centro cahe sobre a primeira recta, he maior que a perpendicular, que do mesmo centro cahe sobre a segunda. Fig. 2.

VI.

Segmento de circulo he huma figura comprehendida por huma linha recta, e por huma porção da circunferencia do circulo. Fig. 3.

VII.

O angulo do segmento he aquelle, que he formado pela dita recta e pela porção da circunferencia. Fig. 3.

VIII.

Hum angulo se diz estar ou existir no segmento, quando he formado pelas rectas, que de hum ponto qualquer, tomado na circunfe- Fig. 4.

F ren-

rencia do ſegmento, ſe tiráo para os extremos da recta, que he a baze do ſegmento.

IX.

Fig. 4. Quando duas rectas, fazendo hum angulo, comprehendem entre ſi huma porção da circunferencia; o dito angulo ſe diz inſiſtir, ou aſſentar ſobre a dita parte da circunferencia.

X.

Fig. 5. Sector de circulo he huma figura formada por duas rectas, que fazem hum angulo no centro, e por aquella porção da circunferencia, que as ditas rectas comprehendem entre ſi.

XI.

Fig. 6. *Segmentos ſemelhantes de circulos ſáo aquelles, nos quaes exiſtem angulos iguaes.*

A's vezes para maior commodidade uſaremos dos termos raio, ſemidiametro, arco, e corda.

Raio ou ſemidiametro ſignifica huma recta conduzida do centro do circulo até á circunferencia. E he manifeſto, que o raio he juſtamente a metade do diametro, razáo por que tambem ſe chama ſemidiametro.

Arco he huma parte qualquer da circunferencia do circulo.

Corda he aquella linha recta, que eſtá tirada entre as extremidades de hum arco qualquer ou maior, ou menor que o ſemicirculo. E fica evidente, que a corda de hum arco igual á metade da circunferencia, he o meſmo diametro.

PROP.

PROP. I. PROB.

A Char o centro em hum circulo dado.

Seja dado o circulo ABC. Deve-se-lhe achar o centro. Fig. 7.

Tire-se a recta AB, como se quizer, e dividida pelo meio [a] no ponto D, deste levante-se DC perpendicular [b] sobre AB. Produza-se CD até encontrar a circunferencia em E, e divida-se CE em duas partes iguaes no ponto F. Digo, que F he o centro do circulo ABC.

a. 10 1.
b. 11. 1.

Se não he F, seja G o centro do circulo ABC. Tirem-se as rectas GA, GD, GB. Sendo DA=DB, e DG commua, serão as duas AD, DG iguaes ás duas BD, DG, cada huma a cada huma. Mas he a baze GA=GB outra baze, por serem ambas raios do mesmo circulo. Logo será o angulo ADG=GDB [c]. Mas quando huma recta cahindo sobre outra faz os angulos adjacentes iguaes entre si, cada hum destes angulos he recto [d]. Logo o angulo GDB he recto. Mas tambem FDB he recto. Logo será FDB=GDB, isto he, hum angulo maior será igual a hum menor, o que não póde ser. Logo o ponto G não he o centro do circulo ABC. O mesmo se póde demonstrar de outro ponto qualquer, que não seja o ponto F. Logo o ponto F he o centro do circulo ABC.

c. 8. 1.
d. def. 10. 1.

Corol. Disto se segue, que se dentro

de hum circulo huma linha recta cortar a outra em duas partes iguaes, e perpendicularmente; o centro do circulo deve estar na primeira linha, que corta a outra.

PROP. II. THEOR.

SE na circunferencia de hum circulo se tomarem dous pontos quaesquer, e entre elles como extremos estiver tirada huma linha recta; esta cahirá toda dentro do circulo.

Fig. 8. Seja o circulo ABC, e na circunferencia delle tomem-se dous pontos quaesquer A, B. Digo, que a recta AB tirada do ponto A até o ponto B está toda dentro do circulo ABC.

Se he possivel caia fóra delle, e seja a recta AEB. Ache-se o centro [a] do circulo ABC,
a. 1. 3. o qual seja o ponto D. Tirem-se as rectas AD, DB, e DE, que encontre a circunferencia no ponto F. Sendo DA=BD, será o angulo
b. 5. 1. DAB=DBA.[b] E porque no triangulo DAE temos hum lado produzido AEB, será o angulo DEB>DAE[c]. Mas he DAE=DBE.
c. 16. 1. Logo será DEB>DBE. Mas a hum angulo
d. 19. 1. maior fica opposto hum lado tambem maior [d]. Logo será DB>DE. Mas he DB=DF. Logo será DF>DE, o que não póde ser. Logo a recta tirada entre os pontos A, B não póde cahir fóra do circulo. Do mesmo modo se póde demonstrar, que não cahirá sobre a circun-

cunferencia. Logo deve cahir dentro do circulo.

PROP. III. THEOR.

SE dentro de hum circulo huma linha recta cortar a outra, que não passa pelo centro, em duas partes iguaes; tambem a cortará perpendicularmente. E se a cortar perpendicularmente; tambem a cortará em duas partes iguaes.

Seja o circulo ABC, e dentro delle a recta CD tirada pelo centro E, a qual corte pelo meio no ponto F a recta AB, que não passa pelo centro. Digo, que CD he perpendicular a AB. Fig. 9.

Achado o centro[a] E do circulo ABC, tirem-se as rectas EA, EB. Sendo AF=FB, e FE commua, as duas AF, FE serão iguaes ás duas BF, FE, cada huma a cada huma. Mas he a baze EA=EB outra baze. Logo será o angulo AFE=BFE[b]. Mas quando huma linha recta cahindo sobre outra faz os angulos adjacentes iguaes entre si, cada hum destes angulos he recto[c]. Logo os angulos AFE, BFE são rectos, e por consequencia a recta CD, que passando pelo centro corta em duas partes iguaes a recta AB, que não passa pelo centro, he perpendicular sobre a mesma recta AB. a. 1. 3. b. 8. 1. c. def. 10. 1.

Seja agora CD perpendicular á AB. Digo, que CD corta a recta AB em duas partes iguaes, de maneira, que seja AF=FB. Fig. 9.

Fei-

Feita a mesma construcção, como assima; sendo EA=EB, por serem semidiametros do
d. 5. 1. mesmo circulo, será o angulo EAF=EBF[d]. Mas he tambem AFE=BFE, por serem ambos estes angulos rectos. Logo os dous triangulos EAF, EBF tem dous angulos iguaes a dous angulos, cada hum a cada hum, e hum lado igual a hum lado, isto he, o lado commum EF, que he opposto a cada hum dos angulos iguaes. Logo os outros lados dos ditos triangulos serão iguaes aos outros lados, cada
e. 26. 1. hum a cada hum[e], e por consequencia será AF=FB.

PROP. IV. THEOR.

SE em hum circulo duas rectas, as quaes ambas não passão juntamente pelo centro, se cortarem reciprocamente, não se poderão cortar em duas partes iguaes.

Fig. 10. Seja o circulo ABCD, e dentro delle no ponto E cortem-se as duas rectas AC, BD, que não passão pelo centro. Digo, que as rectas AC, BD não se podem cortar em duas partes iguaes.

Seja, se for possivel, AE=EC, e BE=ED. Se huma das rectas passar pelo centro, claro está que não poderá ser cortada em duas partes iguaes pela outra, que não passa pelo centro. Mas se nenhuma dellas passar pelo centro,

tro, achado o centro F do circulo ABCD [a], a. 1. 3.
tire-se a recta EF. Logo a recta FE, que passa pelo centro, cortando em duas partes iguaes a recta AC, que não passa pelo centro, tambem a cortará perpendicularmente [b], e assim será FEA hum angulo recto. b. 3. 3. Pela mesma razão deve ser recto o angulo FEB. Logo será FEA = FEB, isto he, hum angulo menor igual a hum angulo maior, o que não póde ser. Logo as rectas AC, BD não se cortão reciprocamente em duas partes iguaes.

PROP. V. THEOR.

SE dous circulos reciprocamente se cortarem, não poderão ter hum mesmo centro commum.

Cortem-se reciprocamente os dous circulos ABC, CDG nos pontos B, C. Fig. 11. Digo, que estes circulos não podem ter hum mesmo centro.

Seja E, se he possivel, o centro commum de ambos. Tire-se a recta EC, e a outra EFG como se quizer. Porque o ponto E he o centro do circulo ABC, será CE = EF. E porque o mesmo ponto E he o centro do circulo CDG, será CE = EG, e por consequencia FE = EG, isto he, huma recta menor igual a huma maior, o que he absurdo. Logo o ponto E não póde ser centro commum de ambos os circulos ABC, CDG.

PROP.

PROP. VI. THEOR.

SE dous circulos se tocarem interiormente, não poderão ter hum mesmo centro commum.

Fig. 12. Toquem-se interiormente os circulos ABC, CDE no ponto C. Digo, que estes circulos não podem ter hum mesmo centro.

Seja F, se he possivel, o centro commum de ambos. Tire-se FC, e tambem a outra FEB como se quizer. Porque F he o centro do circulo ABC, será CF = FB. E porque o mesmo ponto F he tambem centro do circulo CDE, será CF = FE, e assim FE = FB, isto he, huma recta menor igual a huma maior, o que não póde ser. Logo não he o ponto F o centro commum dos circulos ABC, CDE.

PROP. VII. THEOR.

SE no diametro de hum circulo se tomar hum ponto qualquer, que não seja o centro do circulo; e se do dito ponto se tirarem para a circunferencia quaesquer linhas rectas, entre todas estas rectas a maxima será aquella, na qual estiver o centro, e a minima o resto da maxima para o diametro inteiro. Entre as outras aquella, que estiver mais perto

da

da maxima, ſerá ſempre maior que outra qualquer mais afaſtada da meſma maxima. Finalmente do meſmo ponto não ſe poderão tirar para a circunferencia ſenão duas rectas iguaes, e eſtas cahiráõ para huma e outra parte daquella, que entre todas for a minima.

Seja o circulo ABCD, cujo diametro ſeja AD. Tome-ſe em AD o ponto F, que não ſeja o meſmo, que o ponto E, que he o centro do circulo. Fig. 13.

Do ponto F para a circunferencia ABCD tirem-ſe as rectas FB, FC, FG. Digo, que FA he a maxima, e FD a minima entre todas as rectas, que do ponto F vão para a circunferencia. Digo tambem ſer FB > FC, e FC > FG.

Tirem-ſe as rectas BE, CE, GE. Porque em hum triangulo qualquer dous lados são maiores que o terceiro [a], ſerão BE, EF juntamente maiores que BF. Mas he AE = BE, e por conſequencia as duas BE, EF iguaes a AF. Logo ſerá AF > FB. Tambem ſendo BE = CE, e FE commua, as duas BE, EF ſerão iguaes ás duas CE, EF. Mas he o angulo BEF > CEF. Logo ſerá a baze BF > FC [b], que he outra baze. Pela meſma razão deve ſer CF > FG. Sendo pois GF, FE juntamente maiores [a] que EG, e ſendo EG = ED, ſerão as duas GF, EF maiores que ED. Logo tiran-

a. 20. 1.

b. 24. 1.

rando a commua FE, ficará GF > FD. Logo FA he a maxima, FD a minima; e BF > FC, e FC > FG.

Digo finalmente, que do ponto F para a circunferencia se poderáo tirar sómente duas rectas iguaes entre si, e que estas duas rectas cahiráó huma para huma, e outra para outra parte da minima FD.

c. 23. 1. No ponto E e com a recta EF faça-se [c] o angulo FEH = GEF, e tire-se FH. Porque temos GE = EH, e EF commua, as duas GE, EF seráo iguaes ás duas HE, EF. Mas d. 4. 1. he o angulo GEF = HEF. Logo será [d] a baze FG = FH outra baze. Digo, que do ponto F para a circunferencia náo se póde tirar outra recta nenhuma igual á recta FG, que náo seja a recta FH. Seja, se he possivel, a recta FK = FG. Sendo FK = FG, e FG = FH, será FK = FH, isto he, a mais proxima igual á outra mais afastada da recta, que passa pelo centro, contra o que temos demonstrado.

PROP. VIII. THEOR.

SE fóra de hum circulo se tomar hum ponto qualquer, e deste se tirarem para a circunferencia algumas linhas rectas, como se quizer, das quaes porém huma passe pelo centro; entre aquellas, que cahirem na parte concava da circunferencia, a maxima será a que passar

ſar pelo centro; e entre as outras a que eſtiver mais perto da maxima ſerá ſempre maior que outra qualquer mais afaſtada della. Mas entre as rectas, que cahirem na parte convexa da circunferencia, a minima ſerá aquella, que produzida paſſar pelo centro; e entre as outras a que eſtiver mais perto da minima ſerá ſempre menor que outra qualquer mais afaſtada della. Finalmente do meſmo ponto não ſe poderão tirar para a circunferencia mais de duas rectas iguaes, e deſtas huma cahirá para huma parte, e a outra para a parte oppoſta a reſpeito da recta, que entre todas for a minima.

Seja o circulo ACB, e fóra delle o ponto D. Deſte ponto conſiderem-ſe tiradas para a circunferencia do circulo as rectas DA, DE, DF, DC, e paſſe DA pelo centro. Digo, que entre as rectas, que cahirem na parte concava da circunferencia AEFC, a recta DA, que paſſa pelo centro, ſerá a maxima; e que ſerá DE > DF, e DF > DC. Mas entre as rectas, que cahirem na parte convexa HLKG, a minima ſerá a recta DG, que produzida paſſa pelo centro; e que ſerá DK < DL, e DL < DH. Fig. 14.

Ache-ſe[a] o centro M do circulo ACB, e tirem-ſe as rectas ME, MF, MC, MK, ML, MH. a. 1. 3.

MH. Sendo AM = ME, ajuntando a huma e outra parte a mesma recta MD, será AD igual ás duas EM, MD. Mas EM, MD juntamente são maiores [b] que ED. Logo será AD >
b. 20. 1. ED. Sendo tambem ME = MF, e DM commua, serão as duas EM, MD iguaes ás duas FM, MD. Mas he o angulo EMD > FMD. Logo será [c] a baze ED > FD outra baze. Do
c. 24. 1. mesmo modo demonstraremos ser FD > CD. Logo DA he a maxima; e DE > DF, e DF > DC. E porque MK, KD tomadas juntas são maiores [b] que MD; e porque temos MK = MG, tirando de huma e outra parte as duas
d. ax. 4. MK, MG, ficará [d] KD > GD, e por consequencia GD < KD. Logo GD he a minima. E porque sobre o lado MD do triangulo MLD estão tiradas dentro do mesmo triangulo as duas rectas MK, KD, serão as duas MK, KD to-
e. 21. 1. madas juntas menores [e] que as duas ML, LD. Logo tirando destas as iguaes MK, ML, ficará DK < DL. Do mesmo modo se póde demonstrar, que deve ser DL < DH. Logo DG he a minima; e DK < DL, e DL < DH.

Digo tambem, que do ponto D não se poderão tirar para a circunferencia senão duas rectas iguaes huma para huma, e outra para outra parte da recta DG, que he a minima.

Sobre a recta MD e no ponto M faça-se o angulo DMB = KMD, e tire-se DB. Sendo pois MK = MB, e MD commua, serão as duas KM, MD iguaes ás duas BM, MD, cada huma a cada huma. Logo sendo o angu-

lo

lo KMD=BMD, ſerá [f] a baze DK=DB *f. 4. 1.*
outra baze.

Digo agora, que do ponto D ſe não póde tirar para a circunferencia outra recta igual á recta DK.

Seja, ſe he poſſivel, DN=DK. Logo ſendo DN=DK, e DK=DB, ſerá DB=DN, iſto he, a mais proxima igual á mais afaſtada da recta DG, que he a minima, contra o que ſe tem demonſtrado.

PROP. IX. THEOR.

SE de hum ponto tomado dentro de hum circulo cahirem na circunferencia mais de duas rectas iguaes entre ſi; o dito ponto ſerá o centro do circulo.

Seja dentro do circulo ABC o ponto D, *Fig. 15.* do qual ſupponhão-ſe tiradas para a circunferencia as tres rectas iguaes DA, DB, DC. Digo, que o ponto D he o centro do circulo ABC.

Se D não he o centro, o ſerá o ponto E. Tire-ſe DE, e produza-ſe de huma e outra parte para a circunferencia até os pontos F, e G. Será FG o diametro do circulo ABC. E porque no diametro FG eſtá o ponto D, que não he o centro do circulo; ſerá DG a maxima, e tambem ſerá DC>DB, e DB>DA [a], o *a. 7. 3.* que he abſurdo, porque pela hypotheſis as tres rectas DA, DB, DC ſão iguaes. Logo o ponto to E não póde ser o centro do circulo ABC. O mesmo se demonstrará de outro ponto qualquer, que não seja o ponto D. Logo o ponto D he o centro do circulo ABC.

PROP. X. THEOR.

Hum circulo não póde cortar a outro circulo em mais de dous pontos.

Deve-se isto entender a respeito das circunferencias dos mesmos circulos.

Fig. 16. O circulo ABC corte, se for possivel, ao circulo DEF em mais de dous pontos, isto he, nos tres pontos B, G, F; e seja K o centro do circulo ABC. Tirem-se as rectas KB, KG, KF. Porque dentro do circulo DEF se tem tomado o ponto K, do qual para a circunferencia estão tiradas as tres rectas iguaes KB, KG,
a. 9. 3. KF, será o ponto K o centro [a] do circulo DEF. Mas pela supposição o ponto K he tambem o centro do circulo ABC. Logo o mesmo ponto K será o centro commum de dous circulos, que reciprocamente se cortão, o que
b. 5. 3. não póde ser [b]. Logo hum circulo não corta a outro circulo em mais de dous pontos.

PROP.

PROP. XI. THEOR.

SE dous circulos interiormente ſe tocarem; a recta, que for tirada pelos centros delles, paſſará tambem pelo contacto dos meſmos circulos.

Toquem-ſe interiormente os dous circulos ABC, ADE no ponto A; e ſeja F o centro do circulo ABC, e G o centro do circulo ADE. Digo, que a recta tirada pelos dous centros F, G paſſa pelo ponto do contacto A. Fig. 17.

Não ſeja aſſim, mas caia, ſe for poſſivel, para fóra do contacto A, e ſeja a recta FGDH. Tirem-ſe os raios AF, AG. Porque as duas rectas AG, GF são maiores [a] que FA, iſto he, são maiores que FH, por ſer FA=FH, tirando a commua FG, ficará AG>GH. Mas he AG=GD. Logo ſerá GD>GH, o que não póde ſer, porque temos GH>GD. Logo a recta, que paſſa pelos centros F, G não cahe para fóra do contacto A. Logo deve paſſar pelo meſmo contacto. a. 20. 1.

PROP. XII. THEOR.

SE dous circulos ſe tocarem exteriormente, a recta, que paſſar pelos centros delles, paſſará tambem pelo contacto.

To-

Fig. 18. Toquem-ſe exteriormente os dous circulos ABC, ADE no ponto A; e ſeja F o centro do circulo ABC, e G o centro do circulo ADE. Digo, que a recta tirada pelos centros F, G paſſa pelo contacto A.

Se não he aſſim, caia para fóra do contacto A, e ſeja a recta FCDG. Tirem-ſe os ſemidiametros FA, AG. Sendo F o centro do circulo ABC, ſerá AF=FC. E ſendo G o centro do circulo ADE, ſerá AG=GD. Logo as duas FA, e juntamente AG são iguaes ás duas FC, DG tambem tomadas juntamente. Logo a total FG he maior que as duas FA, AG, o que não póde ſer, porque a meſma
a. 20. 1. FG he menor[a] que as duas FA, AG. Logo a recta tirada pelos centros F, G não cahe para fóra do contacto A. Logo paſſa pelo meſmo contacto.

PROP. XIII. THEOR.

HUm circulo não toca a outro circulo em mais de hum ponto, tanto interiormente, como exteriormente.

Fig. 19. O circulo EBF toque ao circulo ABC interiormente em mais de hum ponto, ſe for poſſivel, como nos dous pontos B, D. Tirada a recta BD, tire-ſe tambem a recta GH, a qual corte a BD perpendicularmente, e em
a. 10. 11. 1. partes iguaes[a]. Porque os pontos B, D eſtão nas circunferencias de ambos os circulos, a recta

cta BD estará toda dentro de hum e outro circulo[b]. Logo na recta GH, que corta a recta BD b. 2. 3.
perpendicularmente, e em duas partes iguaes, devem existir os centros[c] de ambos os circulos. c. Cor. 1. 3.
Logo a recta GH produzida passará pelo ponto do contacto[d]. Mas não passa pelo con- d. 11. 3.
tacto, porque os pontos B, D estão fóra da recta GH, o que he absurdo. Logo hum circulo não toca a outro circulo pela parte de dentro em mais de hum ponto.

Tambem digo, que dous circulos se não podem tocar pela parte de fóra em mais de hum ponto.

O circulo AKC toque ao circulo ABC, se Fig. 20.
he possivel, em mais de hum ponto, isto he, nos pontos A, C. Tire-se a recta AC. Sendo pois os pontos A, C na circunferencia do circulo AKC, a recta AC cahirá toda dentro[b] do mesmo circulo AKC. Mas o circulo AKC está inteiramente fóra do circulo ABC. Logo a recta AC está fóra do circulo ABC. Tambem porque os pontos A, C estão na circunferencia do circulo ABC, a mesma recta AC deve estar dentro[b] do circulo ABC. Logo a recta AC está dentro e fóra do mesmo circulo ABC, o que he grande absurdo. Logo hum circulo não toca a outro circulo pela parte de fóra em mais de hum ponto.

PROP. XIV. THEOR.

Em todo o circulo as rectas iguaes distão igualmente do centro; e as que distão igualmente do centro, são iguaes.

Fig. 21. Seja o circulo ABDC, e nelle as rectas iguaes AB, CD tiradas entre os pontos da circunferencia A, B, C, D. Digo, que estas rectas distão igualmente do centro.

Seja E o centro do circulo ABDC, e do ponto E caião sobre as rectas AB, CD as perpendiculares EF, EG. Tirem-se as rectas AE, EC. Porque a recta EF, que parte do centro, corta perpendicularmente a recta AB, que não passa pelo centro, esta recta AB ficará dividida em duas partes iguaes [a], e será AF = FB, e assim AB será o dobro de AF. Pela mesma razão será CD o dobro de CG. Mas he AB = CD. Logo será AF = CG. Sendo pois AE = EC, será o quadrado de AE igual ao quadrado de EC. Mas os quadrados de AF, FE são iguaes [b] ao quadrado de AE, por ser recto o angulo AFE; e os quadrados de EG, GC são iguaes ao quadrado de EC, porque o angulo EGC he recto. Logo os quadrados de AF, FE são iguaes aos quadrados de CG, GE. Mas o quadrado de AF he igual ao quadrado de CG, por ser AF = CG. Logo o quadrado de FE será igual ao quadrado de EG, e assim será FE = EG. Mas em hum circulo as rectas

a 5. 3.

b. 47. 1.

dis-

diſtáo igualmente do centro, quando as perpendiculares, que do centro cahem ſobre ellas, ſão iguaes [c]. Logo as rectas AB, CD diſtáo igualmente do centro E. c. def. 4. 3.

Sejão agora as rectas AB, CD igualmente diſtantes do centro E, iſto he, ſeja FE = EG. Fig. 21. Digo, que ſerá AB = CD. Feita a meſma construcção como aſſima, ſe poderá do meſmo modo demonſtrar, que a recta AB he o dobro da recta AF, e CD o dobro de CG. E porque temos AE = EC, o quadrado de AE ſerá igual ao quadrado de EC. Mas os quadrados de EF, FA são iguaes [b] ao quadrado de AE; e os quadrados de EG, GC são iguaes ao quadrado de EC. b. 47. 1. Logo os quadrados de EF, FA são iguaes aos quadrados de EG, GC. Mas o quadrado de FE he igual ao quadrado de EG, por ſer EF = EG. Logo o quadrado de AF ſerá igual ao quadrado de CG, e por conſequencia ſerá AF = CG. Mas AB he o dobro de AF, e CD he o dobro de CG. Logo ſerá AB = CD.

PROP. XV. THEOR.

EM todo o circulo o diametro he a maxima de todas as rectas, que podem eſtar dentro do meſmo circulo; e entre as outras aquella, que eſtá mais perto do centro, he ſempre maior que outra qualquer mais afaſtada do meſmo centro. Pelo contrario aquella, que he maior, fica mais perto do centro que outra qualquer menor.

Fig. 22. Seja o circulo ABCD, cujo diametro he AD, e o centro E. Seja a recta BC a mais proxima ao centro E, e a recta FG a mais apartada delle. Digo, que o diametro AD he a maxima entre todas as rectas, que se podem tirar dentro do circulo ABCD; e digo, que he BC > FG.

Tirem-se do centro E sobre as rectas BC, FG as duas perpendiculares EH, EK, e tambem os semidiametros EB, EC, EF. Sendo AE = EB, e ED = EC, será AD igual ás duas BE, e EC tomadas juntas. Mas BE, EC são maiores[a] que BC. Logo será AD > BC.

a. 20. 1.

E porque BC está mais perto do centro do que FG, será EK > EH[b]. Mas BC, como temos demonstrado na Proposição precedente, he o dobro de BH, e FG he o dobro de FK; e os quadrados de EH, HB são iguaes aos quadrados de EK, KF, dos quaes o quadrado de EH he menor que o quadrado de EK, por ser EH < EK. Logo o quadrado de BH será maior que o quadrado de FK, e assim será BH > FK, e BC > FG.

b. def. 5. 3.

Sendo pois BC > FG. Digo, que a recta BC estará mais perto do centro do que a recta FG, isto he, feita a mesma construcção, será EH < EK. Porque sendo BC > FG, será BH > FK. Mas os quadrados de BH, HE

são

são iguaes aos quadrados de FK, KE, dos quaes o quadrado de BH he maior que o quadrado de FK, por ser $BH > FK$. Logo o quadrado de EH será menor que o quadrado de EK, e por consequencia será $EH < EK$.

PROP. XVI. THEOR.

A Recta, que de huma extremidade do diametro de hum circulo se levantar perpendicularmente sobre o mesmo diametro, cahirá toda fóra do circulo; e entre esta recta, e a circunferencia não se poderá tirar outra linha recta alguma; que he o mesmo que dizer, que a circunferencia do circulo passará entre a perpendicular ao diametro, e a recta, que com o diametro fizer hum angulo agudo, por grande que seja; ou tambem que a mesma circunferencia passará entre a dita perpendicular e outra recta, que fizer com a mesma perpendicular hum angulo qualquer, por pequeno que seja.

Seja o circulo ABC, cujo centro seja D, e o diametro AB. Digo, que a recta, que se levantar da extremidade A perpendicularmente sobre o diametro AB, cahirá toda fóra do circulo ABC. Fig. 25.

Não

Não seja assim, mas caia, se he possivel, dentro do circulo, como a recta AC. Tire-se DC. Sendo DA = DC, será o angulo DAC =
a. 5. 1. ACD[a]. Mas DAC he recto. Logo será tambem recto o angulo ACD. Logo no triangulo ACD os dous angulos DAC, ACD serão
b. 17. 1. iguaes a dous rectos, o que não póde ser[b]. Logo a recta, que do ponto A se levanta perpendicularmente sobre o diametro BA, não cahe dentro do circulo. Do mesmo modo se póde demonstrar, que não assenta sobre a circunferencia. Logo cahe fóra do circulo, como a recta AE na Figura 24.

Fig. 24. Digo mais, que entre a recta AE e a circunferencia ABC não se póde conduzir outra linha recta alguma.

Porque, se he possivel, entre a circunferencia ABC, e a perpendicular AE esteja tirada a recta FA. Do ponto D seja conduzida so-
c. 12. 1. bre FA a perpendicular[c] DHG. Por ser o angulo AGD recto, e o angulo DAG menor
d. 19. 1. que hum recto[b], será DA > DG[d]. Mas temos DA = DH. Logo será DH > DG, o que he absurdo, sendo DH < DG. Logo entre a recta AE e a circunferencia ABC não se poderá tirar outra linha recta alguma, isto he, a circunferencia do circulo passará entre a perpendicular sobre o diametro, e a recta, que com o diametro fizer hum angulo agudo, por grande que seja; ou tambem a mesma circunferencia passará entre a dita perpendicular e outra recta, que faça com a perpendicular

hum

hum angulo qualquer, por pequeno que ſeja.

Iſto ſómente, e náo outra couſa alguma ſe deve entender, quando no texto Grego e nas versóes o angulo do ſemicirculo vem chamado o maior entre todos os angulos agudos; e o outro, que falta para o complemento de hum angulo recto, o menor entre todos os angulos tambem agudos.

Corol. Do que ſe tem demonſtrado fica claro, que a recta, a qual de huma extremidade do diametro de hum circulo ſe levanta perpendicularmente ſobre o meſmo diametro, he tangente do circulo, e o toca em hum ponto ſó; porque já temos viſto, que huma recta, que encontra a circunferencia de hum circulo em dous pontos, eſtá dentro do circulo [c]. Tambem ſe faz evidente, que huma ſó li- c. 2. 3.
nha recta póde ſer tangente de hum circulo no meſmo ponto.

PROP. XVII. PROB.

De hum ponto dado, e exiſtente fóra de hum circulo, ou na circunferencia delle, tirar huma linha recta tangente ao meſmo circulo.

Seja dado primeiramente o ponto A fóra Fig. 23.
do circulo BCD. Deve-ſe tirar do ponto A huma linha recta, que toque o circulo dado BCD.

Achado o centro E do circulo [a] BCD, e a. 1. 3.
tirada a recta AE, com o centro E e o ſemidia-

diametro EA deſcreva-ſe o circulo AFG; e do
b. 11. 1. ponto D tire-ſe DF perpendicular[b] a EA. Ti-
rem-ſe tambem as rectas EBF, AB. Digo, que
do ponto A eſtá conduzida a recta AB, que
toca o circulo BCD no ponto B.

Sendo o ponto E o centro dos circulos BCD,
AFG, ſerá EA=EF, e ED=EB. Logo as
duas AE, EB ſão iguaes ás duas FE, ED.
Mas eſtas rectas comprehendem o angulo com-
mum E. Logo ſerá a baze DF=AB outra
baze; e o triangulo EDF igual ao triangulo
EBA; e os outros angulos iguaes aos outros
c. 4. 1. angulos[c], cada hum a cada hum. Logo ſerá
EBA=EDF. Mas EDF he hum angulo re-
cto. Logo ſerá tambem recto o angulo EBA.
Mas a recta EB he hum ſemidiametro; e hu-
ma recta, que de huma extremidade do dia-
metro de hum circulo ſe levanta perpendicu-
larmente ſobre o diametro, toca o circulo[d].
d. Cor. 16. 3. Logo a recta AB toca o circulo CDB no pon-
to B.

Fig. 25. Eſteja agora o ponto D na circunferen-
cia do circulo BCD. Conduzida a recta DE,
do ponto D tire-ſe a recta DF perpendicular[b]
a DE. A recta DF tocará[d] o circulo BCD no
ponto D. Logo de hum ponto dado temos
conduzido huma tangente a hum circulo da-
do.

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

Se huma linha recta tocar a hum circulo, e do centro for tirada para o ponto do contacto outra recta; esta cahirá perpendicularmente sobre a tangente.

A recta DE toque o circulo ABC no ponto C, e do centro F do circulo seja tirada para o ponto C a recta FC. Digo, que FC he perpendicular a DE. Fig. 26.

Se FC não he perpendicular a DE, do ponto F tire-se FBG perpendicular[a] a DE. Porque o angulo FGC he recto, será GCF agudo[b]. Mas o lado, que fica opposto a hum angulo maior, he tambem maior[c]. Logo será $FC > FG$. Mas he $FC = FB$. Logo será $FB > FG$, o que he absurdo por ser $FB < FG$. Logo FG não he perpendicular a DE. O mesmo se póde demonstrar de outra recta qualquer, que não seja a recta FC. Logo FC he perpendicular a DE.

a. 12. 1.
b. 17. 1.
c. 19. 1.

PROP. XIX. THEOR.

Se huma linha recta tocar hum circulo, e do ponto do contacto se tirar outra recta perpendicular sobre a tangente; o centro do circulo estará na dita recta perpendicular.

Fig. 27. A recta DE toque o circulo ABC no ponto C, e deste ponto sobre a tangente DE esteja levantada a perpendicular CA. Digo, que o centro do circulo ABC está na recta CA.

Se o centro do circulo ABC não estiver na recta CA, estará fóra della, como no ponto F. Tire-se CF. Porque a recta DE toca o circulo ABC no ponto C; e do centro F está tirada para o ponto do contacto C a recta FC;
a. 18. 3. será FC perpendicular [a] a DE, e por consequencia o angulo FCE será recto. Mas tambem he recto o angulo ACE. Logo será FCE = ACE, o que não he possivel, por ser FCE < ACE. Logo o ponto F não he o centro do circulo ABC. O mesmo se demonstra de todos os mais pontos, que estão fóra da recta AC. Logo o centro do circulo ABC deve estar na recta AC.

PROP. XX. THEOR.

EM todo o circulo o angulo, que he feito no centro, he o dobro do angulo, que está na circunferencia, tendo cada hum destes angulos como por baze a mesma porção da circunferencia.

Fig. 28. 29. Seja o circulo ABC, e esteja no centro E delle o angulo BEC, e na circunferencia o angulo BAC; e tenhão os angulos BEC, BAC como por baze a mesma porção, ou arco BC

da

da circunferencia. Digo, que o angulo BEC he o dobro do angulo BAC.

Caia em primeiro lugar o centro E entre os lados do angulo BAC. Tire-se o diametro AEF. Sendo EA=EB, será o angulo EAB= EBA [a]. Logo os dous angulos EAB, EBA tomados juntos fazem o dobro do angulo EAB. Mas o angulo BEF he igual [b] aos angulos EAB, EBA. Logo o angulo BEF será o dobro do angulo EAB. Pela mesma razão deve ser o angulo FEC o dobro do angulo EAC. Logo o angulo total BEC será o dobro do angulo total BAC. Fig. 28. a. 5. 1. b 32. 1.

Caia em segundo lugar o centro E fóra do angulo BDC. Tire-se o diametro DEG. Do mesmo modo se póde demonstrar, que o angulo GEC he o dobro do angulo GDC. Mas GEB he o dobro de GDB. Logo tirando de GEC o angulo GEB, e de GDC o angulo GDB, ficará sendo o resto BEC o dobro do resto BDC. Fig. 29.

PROP. XXI. THEOR.

EM todo o circulo os angulos, que existem no mesmo segmento, são iguaes entre si.

Seja o circulo ABCD, em cujo segmento BAED estejão os angulos BAD, BED. Digo, que estes angulos são iguaes entre si. Fig. 30. 31.

Seja o ponto F o centro do circulo ABCD; Fig. 30.

c o

e o ſegmento BAED ſeja primeiramente maior que o ſemicirculo. Tirem-ſe as rectas BF, FD. Sendo pois o angulo BFD feito no centro, e o angulo BAD na circunferencia, e tendo eſtes angulos por baze o meſmo arco
a. 20. 3. BCD; ſerá o angulo BFD o dobro[a] do angulo BAD. Pela meſma razão o angulo BFD he o dobro do angulo BED. Logo ſerá o angulo BAD = BED.

Fig. 31. Agora o ſegmento BAED não ſeja maior que o ſemicirculo; e nelle exiſtão os angulos BAD, BED. Deve-ſe demonſtrar, que eſtes angulos são iguaes entre ſi. Tirado o diametro AFC e a recta CE, o ſegmento BAEC ſerá maior que o ſemicirculo. Logo os angulos BAC, BEC exiſtentes no ſegmento BAEC ſerão iguaes. Com a meſma demonſtração ſe prova ſerem iguaes os angulos CAD, CED. Logo ſerão tambem iguaes os angulos totaes BAD, BED.

PROP. XXII. THEOR.

OS angulos oppoſtos de hum quadrilatero exiſtentes em hum circulo tomados juntos, são iguaes a dous rectos.

Fig. 32. Seja o circulo ABCD, e nelle exiſta o quadrilatero ABCD. Digo, que os angulos oppoſtos deſte quadrilatero tomados juntos são iguaes a dous rectos.

Tirem-ſe as rectas AC, BD. Porque os tres angulos de hum triangulo qualquer são

iguaes

iguaes a dous rectos[a], os tres angulos CAB, a. 32. 1.
ABC, BCA serão iguaes a dous rectos. Mas he CAB = CDB, por estarem ambos no mesmo segmento BADC; e tambem he ACB = ADB, porque cada hum destes angulos existe no mesmo segmento ADCB. Logo será o angulo total ADC igual aos dous BAC, ACB. Ajunte-se-lhes o mesmo angulo ABC. Serão os tres ABC, CAB, BCA iguaes aos dous ABC, ADC. Mas os tres ABC, CAB, BCA são iguaes a dous rectos. Logo os dous ABC, ADC serão tambem iguaes a dous rectos. O mesmo se demonstra a respeito dos outros dous angulos oppostos BAD, DCB.

PROP. XXIII. THEOR.

SObre a mesma linha recta, e para a mesma parte não podem existir dous segmentos semelhantes de circulos sem cahirem hum sobre outro.

Sobre a recta AB estejão para a mesma par- Fig. 33.
te, se he possivel, os dous segmentos semelhantes ACB, ADB; e supponha-se, que se não ajustão hum sobre outro. Havemos de demonstrar, que a supposição he falsa, e que os dous segmentos se ajustão entre si perfeitamente.

Porque o circulo ACB corta o circulo ADB nos dous pontos A, B, o primeiro não poderá cortar o segundo em nenhum outro ponto[a]. Logo se segue, que hum segmento de a. 10. 3.
hum

hum circulo deve cahir dentro do ſegmento do outro circulo. Caia pois o ſegmento ACB dentro do ſegmento ADB. Tirem-ſe as rectas BCD, CA, DA. Porque os ſegmentos ACB, ADB pela ſuppoſição são ſemelhantes, ſerá o angu-
b. def. 11 lo ACB = ADB [b], iſto he, o angulo externo
3. igual a hum dos internos e oppoſtos, o que
c. 16. 1. não póde ſer [c]. Logo ſobre a meſma linha recta, e para a meſma parte, não podem exiſtir dous ſegmentos ſemelhantes de circulos, ſem cahirem hum ſobre outro. Logo eſtes ſegmentos ſe devem ajuſtar entre ſi perfeitamente.

PROP. XXIV. THEOR.

OS ſegmentos ſemelhantes de circulos, que eſtão poſtos ſobre linhas rectas iguaes, são tambem iguaes.

Fig. 34. Sobre as rectas iguaes AB, CD eſtejão poſtos os ſegmentos ſemelhantes de circulos AEB, CFD. Digo, que eſtes ſegmentos são iguaes.

Poſto o ſegmento AEB ſobre o ſegmento CFD de maneira que o ponto A caia ſobre o ponto C, e a recta AB ſobre a recta CD; o ponto B cahirá ſobre o ponto D, por ſer AB =
a. 23. 3. CD. Logo o ſegmento AEB ſe deve ajuſtar [a] ſobre o ſegmento CFD, e por conſequencia eſtes ſegmentos são iguaes.

PROP.

PROP. XXV. PROB.

DAdo hum ſegmento de circulo, deſcrever o circulo inteiro, do qual he ſegmento o dado.

Seja dado o ſegmento de circulo ABC. Deve-ſe deſcrever o circulo, de que ABC he hum ſegmento. Fig. 35. 36. 37.

Divida-ſe a recta AC pelo meio [a] no ponto D, e deſte Ponto D levante-ſe ſobre AC a perpendicular [b] DB. Tire-ſe a recta AB. Se os angulos ABD, BAD forem iguaes, ſerá BD = DA [c], e por conſequencia BD = DC. Sendo pois as tres rectas DA, DB, DC iguaes entre ſi, ſerá D o centro [d] do circulo. Logo ſe com o centro D, e com o intervallo igual a huma das rectas DA, DB, DC ſe deſcrever hum circulo, eſte paſſará pelas extremidades das meſmas rectas DA, DB, DC, e teremos o circulo, de que ABC he hum ſegmento. E porque o centro D eſtá na recta AC, ſerá o ſegmento ABC hum ſemicirculo.

a. 10. 1.
b. 11. 1.
Fig. 35.
c. 6. 1.
d. 9. 3.

Mas ſe os angulos ABD, BAD forem deſiguaes, faça-ſe no ponto A com a recta AB o angulo BAE = ABD [e], e produza-ſe BD, ſe for preciſo, para o ponto E, e tire-ſe a recta EC. Porque temos o angulo ABE = BAE, ſerá BE = EA [c]. E ſendo AD = DC, e DE commua, as duas AD, DE ſeráo iguaes ás duas CD, DE, cada huma a cada huma. Mas he o angulo ADE = CDE, porque ambos ſáo rectos.

Fig. 36. 37.
e. 23. 1.

f. 4. 1. ctos. Logo será a baze[f] AE = EC outra baze. Mas tem-se demonstrado ser AE = EB. Logo será tambem BE = EC, e consequentemente as tres rectas AE, EB, EC serão iguaes entre si. Logo será o ponto E o centro[g] do circulo. Com o centro E, e com o intervallo igual a huma das rectas AE, EB, EC descreva-se hum circulo; este passará pelas extremidades de todas as ditas rectas, e será o circulo, de que ABC he hum segmento. E claro está, 1.º, que se o angulo ABD for maior que o angulo BAD, o centro E cahirá fóra do segmento ABC, que por isto será menor que o semicirculo. 2.º Que se o angulo ABD for menor do que o angulo BAD, o centro E cahirá dentro do segmento ABC, o qual por consequencia será maior que o semicirculo. Logo sendo dado hum segmento de circulo, temos descripto o circulo, de que era segmento o dado.

g. 9. 3.

Fig. 36.

Fig. 37.

PROP. XXVI. THEOR.

EM circulos iguaes os angulos, que são iguaes, e existem ou nos centros, ou nas circunferencias, assentão sobre arcos tambem iguaes.

Fig. 38. Sejão os circulos iguaes ABC, DEF, em cujos centros G, H existão os angulos iguaes BGC, EHF, e nas circunferencias BAC, EDF existão os angulos tambem iguaes BAC, EDF. Digo, que os arcos BKC, ELF, sobre os

quaes

quaes assentão os ditos angulos, são iguaes.

Tirem-se as rectas BC, EF. Porque os circulos ABC, DEF são iguaes, serão tambem iguaes os seus semidiametros. Logo as duas rectas BG, GC são iguaes ás duas EH, HF. Mas pela hypothesis he o angulo G=H. Logo será a baze BC=EF outra baze[a]. E porque tambem he o angulo A=D, serão os segmentos BAC, EDF semelhantes[b]. Mas estes segmentos estão postos sobre as rectas iguaes BC, EF; e os segmentos de circulos, os quaes sendo semelhantes estão sobre rectas iguaes, são tambem iguaes[c]. Logo será o segmento BAC igual ao segmento EDF. Mas os circulos ABC, DEF são iguaes. Logo os outros segmentos BKC, ELF devem ser iguaes, e por consequencia serão tambem iguaes os arcos BKC, ELF.

a. 4. 1.

b. def. 11 1.

c. 24. 3.

PROP. XXVII. THEOR.

EM circulos iguaes os angulos, que assentão sobre arcos iguaes, são iguaes, ou existão os ditos angulos nos centros, ou nas circunferencias.

Nos circulos iguaes ABC, DEF, e sobre os arcos iguaes BC, EF estejão postos os angulos BGC, EHF feitos nos centros G, H; e tambem os angulos BAC, EDF existentes nas circunferencias BAC, EDF. Digo, que será o angulo BGC=EHF, e BAC=EDF. Fig. 39.

Se for o angulo BGC = EHF, claro está, que será tambem o angulo BAC = EDF[a]. Mas se quizermos, que hum delles seja maior que o outro, seja BGC o maior. Sobre a recta BG, e no ponto G, faça-se[b] o angulo BGK = EHF. Os angulos feitos nos centros, e iguaes entre si, assentão sobre arcos iguaes[c]. Logo será o arco BK igual ao arco EF. Mas era EF = BC. Logo deve ser BK = BC, o que não he possivel, sendo BK < BC. Logo não são desiguaes os angulos BGC, EHF. Logo são iguaes. Mas o angulo A he a metade[a] do angulo BGC, e o angulo D a metade do angulo EHF. Logo será tambem A = D.

a. 20. 3.
b. 23. 1.
c. 26. 3.

PROP. XXVIII. THEOR.

EM circulos iguaes as cordas iguaes cortão arcos tambem iguaes, isto he, o arco maior igual ao maior, e o menor igual ao menor.

Fig. 40.

Sejão os circulos iguaes ABC, DEF, e as cordas iguaes BC, EF, que dividão as circunferencias dos circulos nos arcos maiores BAC, EDF, e nos arcos menores BGC, EHF. Digo, que será BAC = EDF, e BGC = EHF.

a. 1. 3.

Achados os centros[a] dos circulos K, L, tirem-se as rectas BK, KC, EL, LF. Porque os circulos são iguaes, os raios tambem devem ser iguaes. Logo serão as duas rectas BK, KC iguaes ás duas EL, LF. Mas he a baze BC =

EF

EF outra baze. Logo ſerá o angulo BKC = ELF[b]. Mas os angulos iguaes, e que exiſtem b. 8. 1.
nos centros, aſſentão ſobre arcos iguaes[c]. Lo- c. 26. 3.
go ſerá o arco BGC igual ao arco EHF. Logo ſendo as circunferencias ABC, DEF iguaes entre ſi, tambem ſerá o arco BAC igual ao arco EDF.

PROP. XXIX. THEOR.

EM circulos iguaes a arcos iguaes correſpondem cordas tambem iguaes.

Sejão os circulos iguaes ABC, DEF, e Fig. 40.
nas circunferencias deſtes tomem-ſe os arcos iguaes BGC, EHF, cujas cordas ſejão as rectas BC, EF. Digo, que ſerá BC = EF.

Achados os centros[a] dos circulos K, L, a. 1. 3.
tirem-ſe os raios BK, KC, EL, LF. Porque os arcos BGC, EHF são iguaes entre ſi, ſerá o angulo BKC = ELF[b]. E porque os circulos b. 27. 3.
ABC, DEF são iguaes, ſerão tambem iguaes os ſeus raios. Logo as duas rectas BK, KC ſerão iguaes ás duas rectas EL, LF. Mas os angulos comprehendidos por eſtas rectas são iguaes. Logo ſerá tambem a baze BC = EF outra baze[c]. Logo a arcos iguaes correſpondem cordas c. 4. 1.
tambem iguaes.

PROP. XXX. PROB.

DIvidir hum arco dado em duas partes iguaes.

Fig. 41. Seja dado o arco ADB. Deve-ſe dividir o arco ADB em duas partes iguaes.

a. 10. 1. Tire-ſe a recta AB, e divida-ſe pelo meio [a] no ponto C. Deſte ponto C levante-ſe ſobre AB a perpendicular CD, e tirem-ſe as rectas AD, DB. Sendo pois AC=CB, e CD commua, ſeráõ as duas AC, CD iguaes ás duas BC, CD. Mas he o angulo ACD=BCD, por ſer hum e outro recto. Logo ſerá a baze

b. 4. 1. AD igual [b] á baze BD. Mas cordas iguaes cortáõ arcos iguaes, iſto he, o arco maior igual

c. 28. 3. ao maior, e o menor igual ao menor [c]; e cada hum dos arcos AD, DB he menor que hum ſemicirculo. Logo ſerá o arco AD igual ao arco DB.

PROP. XXXI. THEOR.

EM hum circulo qualquer, o angulo, que exiſte no ſemicirculo, he recto; o que exiſte em hum ſegmento maior que o ſemicirculo, he agudo; e o que exiſte em hum ſegmento menor que o ſemicirculo, he obtuſo.

Fig. 42. Seja o circulo ABCD, cujo diametro ſeja BC, e o centro E. Tirada a corda CA, que di-

divide o circulo nos dous ſegmentos ABC, ADC, conduzão-ſe as rectas BA, AD, DC. Digo, que o angulo BAC, que exiſte no ſemicirculo ABC, he recto; e o angulo ABC, que exiſte no ſegmento ABC maior que o ſemicirculo, he agudo; e o angulo ADC, que exiſte no ſegmento ADC menor que o ſemicirculo, he obtuſo.

Tire-ſe a recta AE, e produza-ſe BA para F. Porque temos BE $=$ EA, ſerá o angulo EAB $=$ EBA[a]. Tambem ſendo AE $=$ EC, *a. 5. 1.* ſerá EAC $=$ ECA[a]. Logo o angulo total BAC ſerá igual aos dous ABC, ACB. Mas o angulo FAC externo he igual aos dous internos[b] *b. 32. 1.* e oppoſtos ABC, ACB. Logo ſerá o angulo BAC $=$ FAC, e por conſequencia cada hum delles ſerá recto[c]. Logo o angulo BAC exiſten- *c. def. 10. 1.* te no ſemicirculo BAC he recto.

E porque no triangulo ABC os dous angulos ABC, BAC tomados juntos são menores que dous rectos[d], e BAC, como fica de- *d. 17. 1.* monſtrado, he hum angulo recto; ſerá o angulo ABC, que exiſte no ſegmento ABC maior que o ſemicirculo, menor que hum recto, e aſſim ſerá agudo.

Finalmente, porque o quadrilatero ABCD exiſte em hum circulo; e os angulos oppoſtos de hum quadrilatero qualquer, exiſtente em hum circulo, são iguaes a dous rectos[e]; os an- *e. 22. 3.* gulos ABC, ADC ſerão iguaes a dous rectos. Mas o angulo ABC, ſendo agudo, he menor que hum recto. Logo o angulo ADC exiſten-

te

te no ſegmento ADC menor que o ſemicirculo, ſerá maior que hum recto, e por conſequencia ſerá obtuſo.

E claro eſtá, que a porção AB da circunferencia, a reſpeito do centro E cahe para fóra da recta AB, que com a baze AC de hum e outro ſegmento fórma o angulo recto para a parte do ſegmento maior ABC; e que a porção AD cahe entre o meſmo centro E e a recta AF, que com a meſma AC faz o angulo recto para a parte do ſegmento menor ADC.

Iſto, e nada mais ſe deve entender, quando no texto Grego e nas verſões, o angulo do ſegmento maior ſe diz maior que hum recto, e o angulo do ſegmento menor ſe diz tambem menor que hum recto.

Corol. Diſto ſe póde deduzir, que ſe em hum triangulo hum angulo for igual aos outros dous, o dito angulo deve ſer recto. Porque o angulo adjacente a eſte, o qual angulo adjacente vem a ſer por conſequencia hum angulo externo, he igual áquelles outros dous angulos do triangulo; e quando dous angulos adjacentes ſão iguaes, cada hum delles he recto [ε].

ε def. 10. 1.

PROP. XXXII. THEOR.

SE huma linha recta for tangente de hum circulo, e ſe do ponto do contacto ſe tirar outra recta, que divida o circulo em dous ſegmentos; os angulos, que eſta recta fizer com a tangente, ſerão

rão iguaes aos angulos, que existem nos segmentos alternos.

A linha recta EF seja tangente do circulo ABCD no ponto B, e deste ponto B seja conduzida a corda BD, que divida o circulo ABCD nos segmentos BAD, BCD. Digo, que os angulos formados pela corda BD, e pela tangente EF, são iguaes aos angulos existentes nos segmentos alternos, isto he, o angulo FBD = DAB existente no segmento DAB; e o angulo DBE = BCD, que existe no segmento BCD. Fig. 43.

Do ponto B levante-se sobre a recta EF a perpendicular BA [a], e tomado no arco BD hum ponto qualquer C, tirem-se as rectas AD, DC, CB. Porque a recta EF toca o circulo ABCD no ponto B, e do contacto B está levantada a recta BA perpendicularmente sobre a tangente EF; o centro [b] do circulo ABCD estará na recta BA. Logo será recto o angulo ADB existente no semicirculo [c], e por consequencia os dous angulos BAD, ABD serão iguaes a hum recto [d]. Mas o angulo ABF he recto. Logo este angulo ABF será igual aos dous BAD, ABD. Logo tirando o commum ABD, ficará o angulo DBF = BAD, que existe no segmento alterno BAD. Sendo pois a figura ABCD hum quadrilatero existente em hum circulo, os angulos oppostos delle serão iguaes [e] a dous rectos. Logo os angulos BAD, BCD são iguaes aos angulos DBF, DBE [f]. Mas temos visto ser DBF = BAD. Logo será tambem o angulo

a. 11. 1.
b. 19. 3.
c. 31. 3.
d. 32. 1.
e. 22. 3.
f. 13. 1.

lo DBE = DCB angulo exiſtente no ſegmento alterno DCB.

PROP. XXXIII. PROB.

SObre huma linha recta dada deſcrever hum ſegmento de circulo, no qual ſegmento poſſa exiſtir hum angulo igual a outro angulo rectilineo dado.

Fig. 44. 45. 46. Seja a linha recta dada AB, e o angulo rectilineo C. Sobre a recta AB deve-ſe deſcrever hum ſegmento de circulo, em que poſſa exiſtir hum angulo igual ao angulo dado C.

Fig. 44. Seja em primeiro lugar o angulo C recto. a. 10. 1. Divida-ſe AB em duas partes iguaes[a] no ponto F; e fazendo centro em F com o intervallo FA, deſcreva-ſe o ſemicirculo AHB. O angulo AHB exiſtente no ſemicirculo AHB ſerá b. 31. 3. recto[b], e por conſequencia igual ao angulo dado C.

Fig. 45. 46. Não ſeja recto o angulo dado C. Sobre a recta AB, e no ponto della A faça-ſe o angu- c. 23. 1. lo BAD igual[c] ao angulo C; e ſobre a recta d. 11. 1. AD levante-ſe do ponto A a perpendicular[d] AE, e divida-ſe a recta AB pelo meio[a] no ponto F, do qual ponto F levantada a perpendicular[d] FG ſobre a meſma AB, tire-ſe a recta GB. Sendo AF = FB, e FG commua, ſerão as duas AF, FG iguaes ás duas BF, FG. Mas he o angulo AFG = BFG. Logo ſerá a baze e. 4. 1. AG = GB outra baze[e]. Logo o circulo deſcri-

cripto ſobre o centro G e com o intervallo GA deve paſſar tambem pelo ponto B. Deſcreva-ſe pois, e ſeja o circulo AHB. Porque da extremidade A do diametro AE eſtá levantada a recta AD perpendicular ao meſmo diametro AE, ſerá a recta AD tangente[f] do circulo AHB no ponto A. Logo porque do contacto A eſtá conduzida a recta AB, que divide o circulo em dous ſegmentos, ſerá o angulo DAB igual ao angulo, que póde exiſtir no ſegmento alterno AHB. Mas he DAB = C angulo dado. Logo o angulo C ſerá tambem igual ao angulo no ſegmento AHB. Logo ſobre a linha recta dada AB temos deſcripto o ſegmento de circulo AHB, em que póde exiſtir hum angulo igual ao angulo rectilineo dado C. f. 16. 3.

PROP. XXXIV. PROB.

DAdo hum circulo, cortar delle hum ſegmento, no qual poſſa exiſtir hum angulo igual a outro angulo rectilineo dado.

Seja dado o circulo ABC, e o angulo rectilineo D. Do circulo ABC deve-ſe cortar hum ſegmento, em que poſſa exiſtir hum angulo igual ao angulo dado D. Fig. 47.

Tire-ſe a recta EF, que toque[a] o circulo ABC em hum ponto qualquer B. Faça-ſe[b] no ponto B com a recta BF o angulo FBC = D, que he o angulo dado. Porque a recta EF he tan- a. 17. 3. b. 23. 1.

tangente do circulo ABC no ponto B; e do ponto do contacto B está tirada a recta BC; será o angulo FBC igual ao angulo no segmen-
c. 32. 3. to[c] alterno BAC. Mas temos feito o angulo FBC = D. Logo será o angulo no segmento BAC igual ao angulo D; e assim do circulo ABC temos cortado hum segmento, em que póde existir hum angulo igual ao angulo rectilineo dado D.

PROP. XXXV. THEOR.

SE dentro de hum circulo qualquer, duas linhas rectas se cortarem; será o rectangulo comprehendido pelos segmentos de huma igual ao rectangulo comprehendido pelos segmentos da outra.

Fig. 48. 49. 50. 51. Dentro do circulo ABCD cortem-se reciprocamente as duas rectas AC, BD no ponto E. Digo, que o rectangulo comprehendido pelos segmentos AE, EC he igual ao rectangulo comprehendido pelos segmentos BE, ED.

Fig. 48. Se as rectas AC, BD passarem pelo centro, isto he, se o ponto E for o centro do circulo ABCD, claro está, que sendo iguaes entre si as rectas AE, EC; BE, ED será o rectangulo das rectas AE, EC igual ao rectangulo das rectas BE, ED.

Fig. 49. Passe agora pelo centro a recta BD, e corte perpendicularmente no ponto E a recta AC,

que

que não passa pelo centro. Dividida a recta BD em duas partes iguaes no ponto F, será F o centro do circulo ABCD. Tire-se o raio AF. Porque a recta BD, que passa pelo centro, corta perpendicularmente no ponto E a recta AC, que não passa pelo centro, será AE=EC[a]. a. 3. 3.
E sendo a recta BD dividida em partes iguaes no ponto F, e em partes desiguaes no ponto E, será o rectangulo comprehendido pelas rectas BE, ED juntamente com o quadrado de EF igual[b] ao quadrado de FB, isto he, igual ao b. 5. 2.
quadrado de FA. Mas o quadrado de FA he igual[c] aos quadrados de AE, e de EF. Logo c. 47. 1.
o rectangulo de BE, ED juntamente com o quadrado de EF, será igual aos quadrados de AE, e de EF. Logo tirando o quadrado commum de EF, ficará o rectangulo comprehendido pelas rectas BE, ED igual ao quadrado de AE, isto he, igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas AE, EC.

Fig. 50.
Passando agora a recta BD pelo centro, corte obliquamente no ponto E a recta AC, que não passa pelo centro. Dividida a recta BD no ponto F em duas partes iguaes, será o ponto F o centro do circulo ABCD. Tire-se AF, e do centro F caia a recta FG perpendicularmente[d] sobre AC. Será AG=GC[a], e por con- d. 12. 1.
sequencia o rectangulo de AE, EC juntamente com o quadrado de EG igual[b] ao quadrado de AG. Ajunte-se a huma e outra parte o quadrado de GF. Será o rectangulo de AE, EC juntamente com os quadrados de EG, e de GF

igual

igual aos quadrados de AG, e de GF. Mas o quadrado de EF he igual aos quadrados de EG,
c. 47. 1. e de GF; e o quadrado de AF he igual[c] aos quadrados de AG, e de GF. Logo o rectangulo das rectas AE, EC juntamente com o quadrado de EF, será igual ao quadrado de AF, isto he, igual ao quadrado de FB. Mas o rectangulo de BE, ED juntamente com o qua-
b. 5. 2. drado de EF he igual[b] ao quadrado de FB. Logo o rectangulo de AE, EC juntamente com o quadrado de EF será igual ao rectangulo de BE, ED juntamente com o mesmo quadrado de EF. Logo tirando o quadrado commum de EF, ficará o rectangulo das rectas, AE, EC igual ao rectangulo das rectas BE, ED.

Fig. 51. Finalmente, nenhuma das rectas AC, BD passe pelo centro, o qual seja o ponto F. Tire-se pelo ponto E, onde se cortão as rectas AC, BD, o diametro GEFH. Já temos demonstrado, que o rectangulo de AE, EC he igual ao rectangulo de GE, EH; e que o rectangulo de BE, ED he igual ao mesmo rectangulo de GE, EH. Logo será o rectangulo comprehendido pelas rectas AE, EC igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas BE, ED.

PROP. XXXVI. THEOR.

SE de hum ponto qualquer, fóra de hum circulo, se tirarem duas linhas rectas, das quaes huma corte o circulo,

e a

e a outra o toque; ſerá o rectangulo comprehendido por toda a recta, que corta o circulo, e pela parte della, que fica entre o dito ponto, e a circunferencia convexa do circulo, igual ao quadrado da tangente.

Seja o ponto D fóra do circulo ABC, e deſte ponto D eſtejão tiradas a recta DCA, que corte o circulo, e a recta DB, que o toque. Digo, que o rectangulo das rectas AD, DC he igual ao quadrado da tangente DB. Fig. 52. 53.

A recta DCA ou paſſa pelo centro do circulo ABC, ou não. Paſſe primeiramente pelo centro, o qual ſeja o ponto E. Tire-ſe o ſemidiametro EB. Logo ſerá o angulo EBD recto [a]. E porque a linha recta AC eſtá dividida pelo meio no ponto E, e em direitura della eſtá a outra CD, o rectangulo da toda AD e da adjunta DC juntamente com o quadrado de EC ſerá igual [b] ao quadrado de ED. Mas he CE = EB. Logo o rectangulo de AD, DC juntamente com o quadrado de EB ſerá igual ao quadrado de ED. Mas o quadrado de ED he igual [c] aos quadrados de EB, e de BD, por ſer recto o angulo EBD. Logo o rectangulo de AD, DC juntamente com o quadrado de EB ſerá igual aos quadrados de EB, e de BD. Logo tirando o quadrado commum de EB, ficará o rectangulo de AD, DC igual ao quadrado da tangente DB.

Fig. 52.
a. 18. 3.
b. 6. 2.
c. 47. 1.

Sup-

Fig. 53. Supponhamos agora, que a recta DCA não passa pelo centro do circulo ABC. Achado o centro E [d], e tirada a recta EF perpendicularmente [e] sobre a corda AC, tirem-se as rectas EB, EC, ED. O angulo EFD he recto. E porque a recta EF passando pelo centro, corta perpendicularmente a corda AC, que não passa pelo centro, a mesma corda AC ficará dividida em duas partes iguaes [f], e será AF=FC. Logo estando a recta CD em direitura com a recta AC dividida pelo meio no ponto F, será o rectangulo de AD, DC juntamente com o quadrado de FC igual [b] ao quadrado de FD. Ajunte-se a huma e outra parte o mesmo quadrado de FE. Será o rectangulo de AD, DC juntamente com os quadrados de CF, e de FE igual aos quadrados de DF, e de FE. Mas o quadrado de ED he igual [c] aos quadrados de DF, e de FE, por ser o angulo EFD recto; e o quadrado de EC he igual aos quadrados de CF, e de FE. Logo o rectangulo de AD, DC juntamente com o quadrado de CE he igual ao quadrado de ED. Mas temos CE=EB. Logo o rectangulo de AD, DC juntamente com o quadrado de EB será igual ao quadrado de ED. Mas os quadrados de EB, e de BD são iguaes ao quadrado de ED, por ser o angulo EBD recto [a]. Logo o rectangulo de AD, DC juntamente com o quadrado de EB será igual aos quadrados de EB, e de BD. Logo tirando o quadrado commum de EB, ficará o rectangulo comprehendido pelas rectas AD,

d. 1. 3.
e. 12. 1.
f. 3. 3.
b. 6. 2.
c. 47. 1.
a. 18. 3.

AD, DC igual ao quadrado da tangente DB.

Corol. Diſto ſe ſegue, que ſe de hum ponto qualquer A fóra de hum circulo ſe tirarem duas rectas, que cortem o circulo, os rectangulos comprehendidos pelas rectas inteiras, e pelas partes dellas, que ficão entre o dito ponto, e o convexo da circunferencia, ſerão iguaes entre ſi; iſto he, ſerá o rectangulo das rectas BA, AE igual ao rectangulo das rectas CA, AF. E a razão he, porque cada hum deſtes rectangulos he igual ao quadrado da tangente AD. Fig. 54.

PROP. XXXVII. THEOR.

SE de hum ponto qualquer, fóra de hum circulo, ſe tirarem duas rectas, das quaes huma corte o circulo, e a outra chegue ſómente até á circunferencia; e ſe o rectangulo comprehendido pela recta inteira, que corta o circulo, e pela parte della, que fica entre o dito ponto, e o convexo da circunferencia, for igual ao quadrado da recta incidente ſobre a circunferencia; ſerá a recta incidente tangente do circulo.

Do ponto D fóra do circulo ABC eſtejão Fig. 55. tiradas as duas rectas DCA, DB, das quaes DCA corte o circulo, e DB ſeja incidente ſobre a circunferencia. Seja tambem o rectangu-

lo

lo comprehendido pelas rectas AD, DC igual ao quadrado de DB. Digo, que DB he tangente do circulo ABC no ponto B.

Do ponto D tire-se a recta DE, que toque [a] o circulo ABC no ponto E; e achado o centro F do circulo, tirem-se as rectas FE, FB, FD. O angulo FED será recto [b]. E porque a recta DE toca o circulo ABC, e a recta DCA o corta, o rectangulo de AD, DC será igual [c] ao quadrado de DE. Mas o rectangulo das mesmas rectas AD, DC se suppõe igual ao quadrado de DB. Logo será o quadrado de DE igual ao quadrado de DB, e por consequencia será a recta DE igual á recta DB. Mas he tambem FE=FB. Logo as duas DE, EF são iguaes ás duas DB, BF, cada huma a cada huma. Logo nos triangulos DEF, DBF sendo a baze FD commua, será o angulo DEF = DBF [d]. Mas o angulo DEF he recto. Logo será tambem recto o angulo DBF. Mas a recta FB produzida he hum diametro; e huma recta, que de huma extremidade do diametro se levanta perpendicularmente sobre o mesmo diametro, toca o circulo [e]. Logo a recta DB he tangente do circulo ABC no ponto B.

a. 17. 3.
b. 18. 3.
c. 36. 3.
d. 8. 1.
e. 16. 3.

LI-

LIVRO IV.
DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

DEFINIÇÕES.

I.

Huma figura rectilinea se diz inscripta em outra figura rectilinea, quando cada hum dos angulos da inscripta toca cada hum, isto he, o correspondente, dos lados daquella, em que a primeira está inscripta. Fig. 1.

II.

Do mesmo modo huma figura rectilinea se diz circunscripta á outra, quando cada hum dos lados da circunscripta toca cada hum, isto he, o correspondente, dos angulos daquella, ao redor da qual a primeira está circunscripta. Fig. 1.

III.

Fig. 2. Huma figura rectilinea se diz inscripta em hum circulo, quando cada hum dos angulos della toca a circunferencia do circulo.

IV.

Fig. 3. Huma figura rectilinea se diz circunscripta a hum circulo, quando cada hum dos lados da dita figura toca a circunferencia do circulo.

V.

Fig. 3. Do mesmo modo hum circulo se diz inscripto em huma figura rectilinea, quando cada hum dos lados da figura, na qual o circulo está inscripto, toca a circunferencia do mesmo circulo.

VI.

Fig. 2. Hum circulo se diz circunscripto a huma figura rectilinea, quando a circunferencia do circulo toca cada hum dos angulos da figura, ao redor da qual o circulo está circunscripto.

VII.

Huma linha recta se diz inscripta em hum circulo, quando as extremidades della estão na circunferencia do mesmo circulo.

PROP. I. PROB.

EM hum circulo dado inscrever huma linha recta igual á outra dada, e não maior que o diametro do circulo dado.

Fig. 4. Seja dado o circulo ABC, e a recta D, a qual

qual não seja maior que o diametro do circulo ABC. Deve-se inscrever no circulo ABC huma recta igual á linha recta D.

Seja BC o diametro do circulo ABC. Se for BC = D, estará feito o que se pede, porque no circulo ABC está inscripta a recta BC = D. Mas se for BC > D; posta CE = D[a], com o centro C, e o intervallo CE descreva-se o circulo AEF, e tire-se CA. Será CA a recta, que se pede. Porque C he o centro do circulo AEF, será CA = CE. Mas he D = CE. Logo será tambem D = CA. Logo no circulo dado ABC temos inscripto a recta AC igual á linha recta proposta D, e não maior que o diametro do circulo dado ABC. a. 3. 1.

PROP. II. PROB.

EM hum circulo dado inscrever hum triangulo equiangulo a outro triangulo dado.

Seja dado o circulo ABC, e o triangulo DEF. Deve-se inscrever no circulo ABC hum triangulo equiangulo ao triangulo DEF. Fig. 5.

Tire-se a recta GAH tangente[a] do circulo ABC no ponto A. Sobre a recta AH, e no ponto della A faça-se[b] o angulo HAC = DEF, e sobre a recta AG, no mesmo ponto A, o angulo GAB = DFE. Tire-se BC. Digo, que estará feito o que se pede. Porque a recta HAG toca o circulo ABC no ponto A, e do ponto a. 17. 3. b. 23. 1.

do contacto está tirada a recta AC, será o angulo HAC igual ao angulo no segmento alterno[c], isto he, será HAC = ABC. Mas temos feito HAC = DEF. Logo será ABC = DEF. Pela mesma razão será ACB = DFE. Logo o terceiro angulo BAC deve ser igual[d] ao terceiro EDF. Logo os triangulos ABC, DEF são equiangulos. Mas o triangulo ABC está inscripto no circulo ABC. Logo temos inscripto no circulo dado ABC o triangulo ABC equiangulo ao triangulo proposto DEF.

c. 32. 3.

d. 32. 1.

PROP. III. PROB.

Circunscrever a hum circulo dado hum triangulo equiangulo a outro triangulo dado.

Fig. 6. Seja dado o circulo ABC, e o triangulo DEF. Deve-se circunscrever ao circulo ABC hum triangulo equiangulo ao triangulo dado DEF.

Produza-se de huma e outra parte o lado EF para G e H, e do centro K do circulo ABC seja tirado hum semidiametro qualquer KB. Fação-se no centro K e sobre o semidiametro KB os angulos[a] BKA = DEG, e BKC = DFH; e pelos pontos A, B, C sejão tiradas as tangentes[b] do circulo LAM, MBN, NCL, que se cortem reciprocamente nos pontos L, M, N. Será o triangulo LMN o que se pede. Porque as rectas LM, MN, NL tocão o circulo

a. 23. 1.

b. 17. 3.

lo

lo ABC nos pontos A, B, C; e do centro K eſtão tirados os raios KA, KB, KC para os contactos A, B, C; cada hum dos angulos em A, B, C ſerá recto[c]. E porque os quatro angulos do quadrilatero AMBK são iguaes a quatro rectos, podendo-ſe dividir o meſmo quadrilatero em dous triangulos; e porque cada hum dos angulos MAK, MBK he recto; ſerão os dous AKB, AMB juntamente, iguaes a dous rectos. Mas tambem os angulos DEG, DEF são iguaes a dous rectos[d]. Logo ſerão os angulos AKB, AMB iguaes aos angulos DEG, DEF. Mas he AKB = DEG. Logo ſerá AMB = DEF. Do meſmo modo ſe póde demonſtrar LNM = DFE. Logo ſerá o terceiro MLN igual[e] ao terceiro EDF. Logo os dous triangulos LMN, DEF são equiangulos. Mas o triangulo LMN he circunſcripto ao circulo ABC. Logo temos circunſcripto a hum circulo dado hum triangulo equiangulo a outro triangulo dado.

c. 18. 3.

d. 13. 1.

e. 32. 1.

PROP. IV. PROB.

INſcrever hum circulo em hum triangulo dado.

Seja ABC o triangulo dado. Deve-ſe inſcrever hum circulo no triangulo ABC. Fig. 7.

Dividão-ſe pelo meio[a] os angulos ABC, BCA com as rectas BD, CD, as quaes ſe encontrem no ponto D; do ponto D ſejão conduzidas as rectas DE, DF, DG perpendicula- a. 9. 1.

la-

b. 12. 1. lares[b] aos lados AB, BC, CA. Sendo o angulo EBD = FBD, por estar dividido em partes iguaes o angulo ABC; e sendo o angulo recto BED = BFD tambem recto; nos triangulos EBD, FBD haverá dous angulos iguaes a dous angulos, cada hum a cada hum, e hum lado BD commum a ambos os triangulos, e opposto a angulos iguaes. Logo serão os outros lados iguaes aos outros lados[c], cada hum a cada hum, e assim será DE = DF. Pela mesma razão será DG = DF. Logo as tres rectas DE, DF, DG serão iguaes entre si. Logo o circulo descripto com o centro D, e o intervallo igual a huma das rectas DE, DF, DG passará pelos pontos E, F, G, e tocará as rectas AB, BC, CA, por serem rectos os angulos em E, F, G; pois já temos demonstrado, que huma recta toca hum circulo, quando he perpendicular[d] ao diametro em huma das extremidades delle. Logo cada huma das rectas AB, BC, CA toca o circulo EFG, e por consequencia no triangulo dado ABC temos inscripto o circulo EFG.

c. 26. 1.

d. 16. 3.

PROP. V. PROB.

Circunscrever hum circulo a hum triangulo dado.

Fig. 8. 9. 10. Seja dado o triangulo ABC. Deve-se circunscrever hum circulo ao triangulo ABC.

a. 10. 1. Dividão-se em partes iguaes[a] os lados AB, AC

AC nos pontos D, E, e deſtes pontos D, E ſobre AB, AC levantem-ſe as perpendiculares[b] DF, EF, as quaes produzidas neceſſariamente háo de concorrer em algum ponto, porque de outra ſorte ſeriáo parallelas; e por conſequencia as duas AB, AC, que fazem angulos rectos com as duas DF, EF, ſeriáo tambem parallelas, o que he manifeſto abſurdo. Concorráo pois as duas DF, EF no ponto F. Tirem-ſe as rectas BF, FC, FA. Sendo AD = DB, e DF commua, e os angulos em D iguaes, porque rectos; ſerá a baze AF igual[c] á baze FB. Do meſmo modo ſe provará ſer CF = FA. Logo ſerá tambem BF = FC, e conſequentemente ſeráo iguaes entre ſi as tres rectas FA, FB, FC. Logo o circulo deſcripto ſobre o centro F, e com o intervallo igual a huma das rectas FA, FB, FC, paſſará pelos pontos A, B, C; e eſte circulo ABC ficará circunſcripto ao triangulo ABC. Logo temos circunſcripto hum circulo a hum triangulo dado.

b. 11. 1.

c. 4. 1.

Corol. Fica claro, que ſe o centro do circulo cahir dentro do triangulo, cada hum dos angulos deſte triangulo ſerá agudo[d], porque cada hum ficará exiſtindo em hum ſegmento maior que o ſemicirculo. Fig. 8.

d. 31. 3.

Mas ſe o centro eſtiver em hum lado do triangulo; o angulo oppoſto a eſte lado ſerá recto, porque o ſegmento, em que o dito angulo ficará exiſtindo, he hum ſemicirculo. Fig. 9.

Finalmente, ſe o centro do circulo cahir Fig. 10.

ſó-

fóra do triangulo para a parte de hum dos lados, o angulo opposto a este lado existindo em hum segmento menor que o semicirculo, será
d. 31. 3. obtuso [d].

De tudo isto se collige, que se o triangulo dado for acutangulo, o centro do circulo circunscripto cahirá dentro do triangulo; se for rectangulo, o centro estará no lado opposto ao angulo recto; e se for obtusangulo, o centro cahirá fóra do triangulo, e para a parte daquelle lado, que estiver defronte do angulo obtuso.

PROP. VI. PROB.

INscrever hum quadrado em hum circulo proposto.

Seja dado o circulo ABCD. Deve-se inscrever hum quadrado no circulo ABCD.

Fig. 11. No circulo ABCD tirados os diametros AC, BD hum perpendicular a outro, tirem-se as rectas AB, BC, CD, DA. Digo, que a figura ABCD he o quadrado, que se pede. Sendo BE=ED, por ser o ponto E o centro do circulo; e sendo EA commua, e os angulos AEB, AED iguaes entre si, porque rectos; será a ba-
a. 4. 1. ze BA=AD [a] outra baze. Pela mesma razão cada huma das rectas BC, CD he igual a cada huma das rectas BA, AD. Logo o quadrilatero ABCD he equilatero. Digo, que he tambem rectangulo. Porque sendo a recta BD hum diametro do circulo ABCD, será BAD hum

se-

ſemicirculo, e por conſequencia o angulo BAD recto [b]. Pela meſma razão cada hum dos angulos ABC, BCD, CDA he recto. Logo o quadrilatero ABCD he rectangulo. Mas temos demonſtrado, que he tambem equilatero. Logo o quadrilatero ABCD he hum quadrado. E porque fica inſcripto no circulo ABCD, he maniſeſto, que já eſtá feito o que ſe pedia. b. 31. 3.

PROP. VII. PROB.

CIrcunſcrever hum quadrado a hum circulo dado.

Seja dado o circulo ABCD. Deve-ſe circunſcrever hum quadrado ao circulo ABCD. Fig. 12.

No circulo ABCD tirem-ſe os diametros AC, BD perpendicularmente hum ſobre outro, e pelos pontos A, B, C, D ſejão conduzidas as rectas FG, GH, HK, KF tangentes [a] do circulo ABCD. Digo, que a figura GHKF he o quadrado, que ſe pede. Porque FG toca o circulo ABCD no ponto A, e do centro E para o contacto A eſtá conduzido o ſemidiametro EA; os angulos em A ſerão rectos [b]. Pela meſma razão são rectos os angulos em B, C, D. Sendo pois rectos os angulos AEB, EBG, ſerão GH, AC duas parallelas [c]. Do meſmo modo são parallelas as rectas AC, FK. Com o meſmo diſcurſo ſe demonſtra ſer cada huma das rectas GF, HK parallela á BED. Logo as figuras GK, GC, AK, FB, a. 17. 3. b. 18. 3. c. 28. 1.

BK

BK são tantos parallelogrammos. Logo será
d. 34. 1. GF=HK, e GH=FK [d]. E porque temos AC=BD, e AC he igual a cada huma das rectas GH, FK, como BD he igual a cada huma das rectas GF, HK; será cada huma das rectas GH, FK igual a cada huma das rectas GF, HK. Logo o quadrilatero FGHK he equilatero. Digo, que he tambem rectangulo. Porque sendo a figura GBEA hum parallelogrammo, e sendo o angulo AEB recto, será tambem recto [d] o angulo AGB. Do mesmo modo se prova serem rectos os angulos em H, K, F. Logo o quadrilatero FGHK he rectangulo. Logo sendo tambem equilatero, como temos demonstrado, será hum quadrado. Mas este quadrado he circunscripto ao circulo ABCD. Logo temos circunscripto hum quadrado a hum circulo proposto.

PROP. VIII. PROB.

INscrever hum circulo em hum quadrado proposto.

Fig. 12. Seja proposto o quadrado GHKF. Deve-se inscrever hum circulo no quadrado GHKF.

Divida-se cada huma das rectas GH, GF
a. 10. 1. em partes iguaes [a] nos pontos B, A; e pelo
b. 31. 1. ponto A conduza-se AC parallela [b] a huma das rectas GH, FK, e pelo ponto B a recta BD parallela a qualquer das duas GF, HK. Cada huma das figuras GD, DH, GC, CF, GE,

EK,

EK, HE, EF ſerá hum parellelogrammo, e por conſequencia ſeráo iguaes [c] todos os lados c. 34. 1.
oppoſtos. Sendo pois GF = GH, e ſendo GA ametade de GF, e GB ametade de GH, ſerá GA = GB, e por conſequencia os lados oppoſtos tambem iguaes. Logo ſerá BE = EA. Da meſma fórma podemos demonſtrar, que cada huma das rectas EC, ED he igual a cada huma das rectas BE, EA. Logo ſão iguaes entre ſi as quatro rectas EA, EB, EC, ED. Logo o circulo deſcripto com o centro E, e com o intervallo igual a huma das quatro rectas EA, EB, EC, ED, paſſará pelos pontos A, B, C, D, e tocará as rectas GF, GH, HK, KF nos meſmos pontos A, B, C, D, por ſerem rectos [d] os angulos em A, B, C, D, d. 29. 1.
e por conſequencia cada huma das rectas GH, HK, KF, FG ſerá tangente [e] do circulo ABCD, e. 16. 3.
que deſte modo fica inſcripto no quadrado GHKF. Logo temos inſcripto hum circulo em hum quadrado propoſto.

PROP. IX. PROB.

Circunſcrever hum circulo ao redor de hum quadrado propoſto.

Seja propoſto o quadrado ABCD. Deve-ſe Fig. 13.
circunſcrever hum circulo ao quadrado ABCD.

Tirem-ſe as diagonaes AC, BD, as quaes ſe cortarão reciprocamente no ponto E. Sendo DA = AB, e AC commua, ſerão as duas DA,

AC

AC iguaes ás duas BA, AC. Mas he tambem a baze DC=BC outra baze. Logo será o angulo DAC=BAC[a]. Logo o angulo DAB he dividido pelo meio com a diagonal AC. Do mesmo modo se demonstra, que cada hum dos angulos ABC, BCD, CDA fica dividido em duas partes iguaes pelas diagonaes AC, BD. Logo sendo o angulo DAB=ABC, e sendo EAB ametade de DAB, e EBA ametade de ABC; será EAB=EBA. Logo será tambem o lado EA igual[b] ao lado EB. Com a mesma demonstração se prova, que cada huma das rectas EC, ED he igual a cada huma das rectas EA, EB. Logo as quatro rectas EA, EB, EC, ED são iguaes entre si. Logo o circulo descripto sobre o centro E, e com o intervallo igual a huma das rectas EA, EB, EC, ED, passará pelo ponto A, B, C, D, e assim será circunscripto ao quadrado ABCD. Logo temos circunscripto hum circulo a hum quadrado proposto.

a. 8. 1.

b. 6. 1.

PROP. X. PROB.

Construir hum triangulo isosceles de maneira, que cada hum dos angulos, que estão sobre a baze, seja o dobro do angulo do vertice.

Fig. 13. Tome-se huma linha qualquer AB, e esta divida-se em C de sorte, que o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BC seja igual[a] ao qua-

a. 11. 2.

quadrado de CA. Com o centro A, e o raio AB defcreva-fe o circulo BDE, e infcreva-fe[b] nelle a recta BD igual á recta AC, que não he maior que o diametro do circulo BDE. Tirem-fe as rectas DA, DC; e circunfcreva-fe[c] o circulo ACD ao triangulo ADC. Digo, que no triangulo ifofceles ABD cada hum dos angulos ABD, ADB fobre a baze, he o dobro do angulo BAD no vertice.

Porque o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, BC he igual ao quadrado de AC, e tambem temos AC = BD; ferá o rectangulo de AB, BC igual ao quadrado de BD. E como do ponto B fóra do circulo ACD, eftando tiradas as rectas BCA, BD, das quaes BCA corta o circulo ACD, e BD chega até á circunferencia do mefmo circulo, o rectangulo das rectas AB, BC he igual ao quadrado de BD; ferá a recta BD tangente[d] do circulo no ponto D. Logo fendo BD tangente, e do contacto D fahindo a corda DC, que divide o circulo em dous fegmentos, ferá o angulo BDC = DAC exiftente no fegmento[e] alterno DAC. Ajunte-fe a hum e outro deftes angulos o mefmo angulo CDA. Será o angulo total BDA igual aos dous CDA, DAC. Mas o angulo externo BCD he igual[f] aos mefmos angulos CDA, DAC. Logo ferá BDA = BCD. Mas he BDA = CBD, por fer AD = AB[g]. Logo ferá CBD, ifto he, DBA = BCD. Logo os tres angulos BDA, DBA, BCD são iguaes entre fi. E porque os angulos DBC, BCD

b. 1. 4.
c. 5. 4.
d. 37. 3.
e. 32. 3.
f. 32. 1.
g. 5. 1.

h. 6. 1. BCD são iguaes, tambem serão iguaes[h] os lados BD, DC. Mas temos BD=CA. Logo será CA=CD, e por consequencia o angulo
g. 5. 2. CDA=DAC[g]. Logo os dous angulos CDA, DAC tomados juntos fazem o dobro do angulo DAC. Mas BCD he igual aos dous CDA, DAC. Logo tambem BCD será o dobro de DAC. Mas BCD he igual a cada hum dos angulos BDA, DBA. Logo cada hum dos dous BDA, DBA he o dobro do angulo DAB. Logo temos construido hum triangulo isosceles ABD de maneira, que cada hum dos angulos sobre a baze he o dobro do angulo do vertice.

PROP. XI. PROB.

EM hum circulo dado inscrever hum pentagono equilatero, e equiangulo.

Fig. 14. Seja dado o circulo ABCDE. Deve-se inscrever no circulo ABCDE hum pentagono equilatero, e equiangulo.

Formado o triangulo isosceles FGH de maneira, que cada hum dos angulos G, H seja
a. 10. 4. o dobro[a] do angulo F; inscreva-se no circu-
b. 2. 4. lo ABCDE o triangulo ACD equiangulo[b] ao triangulo FGH, e seja o angulo vertical CAD=F, e cada hum dos angulos ACD, CDA igual a cada hum dos angulos G, H. Logo tanto ACD como CDA será o dobro de CAD. Divida-se cada hum dos angulos ACD, CDA em
c. 9. 1. partes iguaes[c] com as rectas CE, DB, e ti-

remtem-se as cordas AB, BC, DE, EA. Digo, que a figura rectilinea ABCDE he o pentagono, que se pede.

Porque cada hum dos angulos ACD, CDA he o dobro do angulo CAD; e cada hum dos mesmos angulos ACD, CDA está dividido pelo meio com as rectas CE, DB; os sinco angulos DAC, ACE, ECD, CDB, BDA serão iguaes entre si. Mas angulos iguaes, e existentes na mesma circunferencia de hum circulo assentão sobre arcos iguaes[d]. Logo serão *d.* 26. 3.
tambem iguaes entre si os sinco arcos AB, BC, CD, DE, EA. Mas a arcos iguaes da mesma circunferencia correspondem cordas tambem iguaes[e]. Logo serão iguaes entre si as sinco re- *e.* 29. 3.
ctas AB, BC, CD, DE, EA. Logo o pentagono ABCDE he equilatero. Digo, que he tambem equiangulo. Porque sendo iguaes os arcos AB, DE, se ajuntarmos a huma e outra parte o mesmo arco BCD, será o arco ABCD igual ao arco EDCB. Logo os angulos AED, BAE, que assentão sobre os arcos iguaes ABCD, EDCB, serão tambem iguaes. Com a mesma demonstração se provará, que cada hum dos angulos ABC, BCD, CDE he igual a cada hum dos angulos BAE, AED. Logo o pentagono ABCDE he equiangulo. Logo sendo tambem equilatero, como se tem demonstrado, temos inscripto em hum circulo proposto hum pentagono equilatero, e equiangulo.

PROP.

PROP. XII. PROB.

Circunſcrever a hum circulo dado hum pentagono equilatero, e equiangulo.

Fig. 15. Seja dado o circulo ABCDE. Deve-ſe circunſcrever ao circulo ABCDE hum pentagono equilatero, e equiangulo.

Na circunferencia do circulo ABCDE ſupponhão-ſe marcados os pontos A, B, C, D, E como vertices dos angulos de hum pentagono equilatero, e equiangulo inſcripto no meſmo a. 11. 4. circulo de maneira, que ſejão iguaes [a] entre ſi os arcos AB, BC, CD, DE, EA. Pelos pontos A, B, C, D, E ſejão conduzidas as tanb. 17. 3. gentes [b] GH, HK, KL, LM, MG; e do centro F do circulo tirem-ſe as rectas FB, FK, FC, FL, FD. Porque a recta KL toca o circulo ABCDE no ponto C, e do contacto C para o centro F eſtá tirado o ſemidiametro FC, c. 18. 3. ſerá FC perpendicular [c] a KL, e aſſim cada hum dos angulos em C ſerá recto. Pela meſma razão os angulos em B, e D são rectos. Sendo pois o angulo FCK recto, o quadrado de FK d. 47. 1. ſerá igual [d] aos quadrados de FC, e de CK. Do meſmo modo o quadrado de FK he igual aos quadrados de FB, e de BK. Logo os quadrados de FC, e de CK ſerão iguaes aos quadrados de FB, e de BK. Mas o quadrado de FC he igual ao quadrado de FB. Logo o quadrado de CK ſerá igual ao quadrado de BK, e por conſequencia ſerá CK=BK. E porque

te-

temos FB=FC, e FK commua, as duas BF, FK serão iguaes ás duas CF, FK. Mas he a baze BK=KC outra baze. Logo será o angulo BFK=KFC [e] e BKF=FKC, e por consequencia será o angulo BFC o dobro do angulo KFC, e BKC o dobro de FKC. Do mesmo modo CFD he o dobro de CFL, e CLD o dobro de CLF. E porque são iguaes os arcos BC, CD, será o angulo BFC=CFD [f]. Logo sendo BFC o dobro de KFC, e CFD o dobro de CFL, será KFC=CFL. Mas he tambem FCK=FCL, porque ambos são angulos rectos. Logo nos dous triangulos FKC, FLC ha dous angulos iguaes a dous angulos, cada hum a cada hum, e hum lado igual a hum lado, que he o lado commum FC adjacente a angulos iguaes. Logo serão os outros lados iguaes aos outros lados, e o terceiro angulo igual ao terceiro [g]. Logo será KC=CL, e o angulo FKC=FLC. Sendo pois KC=CL, será KL o dobro de KC. Pela mesma razão será HK o dobro de BK. E porque temos demonstrado ser BK=KC, e KL he o dobro de KC, como HK he o dobro de BK, será HK=KL. Com o mesmo discurso se prova, que cada huma das rectas GH, GM, ML deve ser igual a cada huma das duas HK, KL. Logo o pentagono GHKLM he equilatero. Digo, que he tambem equiangulo. Porque sendo o angulo FKC=FLC, e sendo HKL o dobro de FKC, como KLM o dobro de FLC; será HKL=KLM. Do mesmo modo se pro-

e. 8. 1.

f. 27. 3.

g. 26. 1.

vará, que cada hum dos angulos KHG, HGM, GML he igual a cada hum dos angulos HKL, KLM. Logo os finco angulos GHK, HKL, KLM, LMG, MGH são iguaes entre si. Logo o pentagono GHKLM he equiangulo. Logo fendo tambem equilatero, e circunscripto ao circulo ABCDE, temos feito o que se pedia.

PROP. XIII. PROB.

INscrever hum circulo em hum pentagono dado equilatero, e equiangulo.

Fig. 16. Seja dado o pentagono equilatero, e equiangulo ABCDE. Deve-se inscrever hum circulo no pentagono ABCDE.

Divida-se cada hum dos angulos BCD, a. 9. 1. CDE em partes iguaes [a] com as rectas CF, DF, e do ponto F, onde se encontrão as mesmas rectas CF, DF, tirem-se as tres FB, FA, FE. Sendo BC = CD, e CF commua, as duas BC, CF serão iguaes ás duas DC, CF. Mas he o angulo BCF = DCF. Logo será a baze b. 4. 1. BF = FD outra baze [b], e o triangulo BFC igual ao triangulo DFC, e os outros angulos iguaes aos outros angulos, segundo ficão oppostos a lados iguaes. Logo será o angulo CBF = CDF. E porque o angulo CDE he o dobro do angulo CDF, e temos CDE = CBA, e CDF = CBF, será tambem CBA o dobro de CBF. Logo será ABF = CBF, e por consequencia será o angulo ABC dividido pelo meio com a recta BF. Do mesmo modo se póde demonstar,

que

que cada hum dos angulos BAE, AED fica dividido em partes iguaes pelas rectas AF, FE. Do ponto F sobre as rectas AB, BC, CD, DE, EA sejão conduzidas as perpendiculares[c] FG, FH, FK, FL, FM. Sendo o angulo HCF=KCF, e FHC=FKC, por serem estes dous rectos; nos triangulos FHC, FKC haverá dous angulos iguaes a dous angulos, e hum lado igual a hum lado, que he o lado commum FC opposto a cada hum dos angulos rectos. Logo serão os outros lados iguaes aos outros lados[d]. Logo as duas perpendiculares FH, FK serão iguaes. Com semelhante discurso se prova, que cada huma das perpendiculares FL, FM, FG he igual a cada huma das outras FH, FK. Logo as sinco rectas FG, FH, FK, FL, FM são iguaes entre si, e por consequencia o circulo descripto sobre o centro F, e com o raio igual a huma das ditas sinco rectas, passará pelos pontos G, H, K, L, M, e tocará as rectas AB, BC, CD, DE, EA nos mesmos pontos G, H, K, L, M, por serem nestes pontos rectos todos os angulos; porque huma recta toca hum circulo, ou he tocada por elle, quando faz angulos rectos com o diametro, e em huma das extremidades do mesmo diametro[e]. Logo cada huma das rectas AB, BC, CD, DE, EA, sendo huma tangente do circulo GHKLM, será este circulo inscripto no pentagono ABCDE. Logo temos inscripto hum circulo em hum pentagono dado equilatero, e equiangulo.

c. 12. 1.

d. 26. 1.

e. 16. 3.

PROP. XIV. PROB.

CIrcunſcrever hum circulo a hum pentagono dado equilatero, e equiangulo.

Fig. 17. Seja dado o pentagono equilatero, e equiangulo ABCDE. Deve-ſe circunſcrever hum circulo ao pentagono ABCDE.

a. 9. 1. Divida-ſe em partes iguaes [a] cada hum dos angulos BCD, CDE com as rectas CF, FD; e do ponto F, onde eſtas rectas ſe cortão, tirem-ſe as tres FB, FA, FE. Podemos demonſtrar, como na Propoſição antecedente, que cada hum dos angulos CBA, BAE, AED fica dividido em partes iguaes pelas rectas BF, FA, FE. Sendo pois o angulo BCD = CDE; e ſendo FCD ametade de BCD, como CDF ametade de CDE; ſerá FCD = FDC, e por
b. 6. 1. conſequencia CF = FD [b]. Do meſmo modo ſerá cada huma das rectas FB, FA, FE igual a cada huma das duas FC, FD. Logo as ſinco rectas FA, FB, FC, FD, FE são iguaes entre ſi. Logo o circulo deſcripto com o centro F, e o intervallo igual a huma das ditas ſinco rectas, paſſará pelos pontos A, B, C, D, E, e ficará circunſcripto ao pentagono equilatero, e equiangulo ABCDE. Logo temos circunſcripto hum circulo a hum pentagono dado equilatero, e equiangulo.

PROP.

PROP. XV. PROB.

INſcrever em hum circulo dado hum hexagono equilatero, e equiangulo.

Seja dado o circulo ABCDEF. Deve-ſe inſcrever no circulo ABCDEF hum hexagono equilatero, e equiangulo. Fig. 18.

Seja G o centro do circulo ABCDEF. Tirado o diametro AGD, com o ponto D como centro, e com o raio DG deſcreva-ſe o circulo EGCH, o qual corte o circulo dado ABCDEF nos pontos C, E. Por eſtes pontos C, E tirem-ſe os diametros CGF, EGB; tirem-ſe tambem as cordas AB, BC, CD, DE, EF, FA. Digo, que o hexagono ABCDEF inſcripto no circulo ABCDEF he equilatero, e equiangulo.

Sendo o ponto G o centro do circulo ABCDEF, ſerá GE=GD. E ſendo D o centro do circulo EGCH, ſerá DE=DG. Logo ſerá GE=ED. Logo o triangulo EGD he equilatero, e por conſequencia os tres angulos delle EGD, GDE, DEG ſão iguaes entre ſi; porque em hum triangulo iſoſceles os angulos ſobre a baze ſão iguaes[a]. Mas em hum triangulo qualquer os tres angulos ſão iguaes a dous rectos[b]. Logo o angulo EGD he a terça parte de dous rectos. Do meſmo modo provaremos, que o angulo DGC he a terça parte de dous rectos. E porque a recta GC cahindo ſobre a recta EB faz os dous angulos adjacentes

a. 5. 1.
b. 32. 1.

e. 13. 1. tes EGC, CGB iguaes a dous rectos[c], será o angulo CGB tambem a terça parte de dous rectos. Logo são iguaes entre si os tres angulos EGD, DGC, CGB. Mas a estes angulos são
d. 15. 1. iguaes os verticalmente oppostos[d], isto he, os angulos BGA, AGF, FGE. Logo os seis angulos EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE são iguaes entre si. Mas angulos iguaes assen-
e. 26. 3. tão sobre arcos iguaes[e]. Logo os seis arcos AB, BC, CD, DE, EF, EA são iguaes, como
f. 29. 3. tambem as seis cordas[f] AB, BC, CD, DE, EF, FA. Logo o hexagono ABCDEF he equilatero. Digo, que he tambem equiangulo. Porque sendo o arco AF igual ao arco ED, se a huma e outra parte se ajuntar o mesmo arco ABCD, será o arco FABCD igual ao arco EDCBA. Mas o angulo FED assenta sobre o arco FABCD, e o angulo AFE assenta sobre o arco EDCBA. Logo será FED = AFE. Do mesmo modo podemos demonstrar, que cada hum dos outros angulos do hexagono ABCDEF he igual a cada hum dos dous AFE, DEF. Logo o hexagono ABCDEF he equiangulo. Logo sendo tambem equilatero, e inscripto no circulo ABCDEF, temos inscripto em hum circulo dado hum hexagono equilatero, e equiangulo.

Corol. Disto se póde ver, que o lado do hexagono equilatero, e equiangulo he igual ao semidiametro do circulo, no qual o hexagono está inscripto.

Tambem fica claro, que se pelos pontos A, A, B, C, D, E, F ſe tirarem tantas tangentes ao circulo, ficará circunſcripto ao meſmo circulo hum hexagono equilatero, e equiangulo, na conformidade do que temos demonſtrado a reſpeito do pentagono; e que do meſmo modo ſe poderá inſcrever, ou circunſcrever hum circulo a hum hexagono dado equilatero, e equiangulo.

PROP. XVI. PROB.

INſcrever em hum circulo dado hum quindecagono equilatero, e equiangulo.

Seja dado o circulo ABCD. Deve-ſe inſcrever no circulo ABCD hum quindecagono equilatero, e equiangulo. Fig. 19.

Seja AC o lado do triangulo equilatero inſcripto [a] no circulo ABCD; e AB o lado do pentagono equilatero, e equiangulo tambem inſcripto [b] no meſmo circulo. Logo ſe toda a circunferencia do circulo ABCD ſe entender dividida em quinze partes iguaes, o arco ABC, que he huma terça parte de toda a circunferencia, conſtará de ſinco partes daquellas, nas quaes foi dividida a circunferencia; e o arco AB, que he a quinta parte da meſma circunferencia, conſtará de tres daquellas meſmas partes. Logo o arco BC, que he a differença dos arcos AB, ABC, deve conter duas das meſmas partes. Divida-ſe o arco BC pelo meio [c]

a. 2. 4.

b. 11. 4.

c. 30. 5.

no

no ponto E. Será cada hum dos arcos BE, EC a parte decimaquinta de toda a circunferencia do circulo ABCD. Logo ſe tiradas as
a. 1. 4. cordas BE, EC, continuarmos com inſcrever [a] no circulo ABCD outras e outras rectas, cada huma ignal a BE, ou EC, até acabarmos o gyro inteiro da circunferencia no ponto B; ficará inſcripto no meſmo circulo ABCD o quindecagono, que ſe pedia, equilatero, e equiangulo.

Com o meſmo methodo, do qual temos feito uſo no pentagono, ſe por todas as divisões feitas na circunferencia forem tiradas outras tantas tangentes ao circulo, ficará circunſcripto ao meſmo circulo hum quindecagono equilatero, e equiangulo. Tambem em hum quindecagono dado equilatero, e equiangulo poderemos inſcrever hum circulo, ou circunſcrevello ao redor delle.

LIVRO V.
DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

DEFINIÇÕES.

I.

HUma grandeza ſe diz parte de outra grandeza, a menor da maior, quando a menor mede a maior.

II.

A grandeza maior ſe diz multipla, ou multiplice da menor, quando a menor mede a maior.

III.

A razão entre duas grandezas, que ſão do meſmo genero, he hum reſpeito reciproco de huma para outra, em quanto huma he maior, ou menor do que a outra, ou igual.

IV.

IV.

As grandezas tem entre ſi razão, quando a grandeza menor tomada certo numero de vezes, póde vencer a grandeza maior.

V.

As grandezas tem entre ſi a meſma razão, a primeira para a ſegunda, e a terceira para a quarta, quando humas grandezas, quaeſquer que ſejão, equimultiplices da primeira e da terceira a reſpeito de outras, quaeſquer que ſejão, equimultiplices da ſegunda e da quarta, são ou juntamente maiores, ou juntamente iguaes, ou juntamente menores.

VI.

As grandezas, que tem entre ſi a meſma razão, ſe chamão proporcionaes.

VII.

Quando a multiplice da primeira grandeza he maior que a equimultiplice da ſegunda, não o ſendo a multiplice da terceira a reſpeito da equimultiplice da quarta; neſte caſo a razão da primeira grandeza para a ſegunda ſe diz maior que a razão da terceira para a quarta. E pelo contrario ſe diz, que a terceira grandeza tem para a quarta huma razão menor que a razão da primeira grandeza para a ſegunda.

VIII.

Proporção ou proporcionalidade he huma ſemelhança de razões.

IX.

A proporção conſiſte em tres termos pelo menos.

X.

X.

Quando tres grandezas são proporcionaes, ſe diz, que a primeira tem para a terceira a razão duplicada da razão, que a meſma primeira tem para a ſegunda.

XI.

Quando quatro grandezas são continuamente proporcionaes, ſe diz, que a primeira tem para a quarta a razão triplicada da razão, que a primeira tem para a ſegunda. E aſſim ſe as grandezas continuamente proporcionaes forem ſinco, ſeis, ſete, &c., a razão da primeira para a ultima chama-ſe quadruplicada, quintuplicada, ſextuplicada, &c. da razão da primeira para a ſegunda.

Definição A, que he da razão compoſta.

Poſto hum numero, qualquer que ſeja, de grandezas do meſmo genero, a primeira grandeza ſe diz que tem para a ultima a razão compoſta das razões da primeira para a ſegunda, da ſegunda para a terceira, da terceira para a quarta, e aſſim ſempre até á ultima grandeza.

Exemplo. Sejão as grandezas A, B, C, D. A primeira A ſe diz, que tem para a ultima D a razão compoſta da razão de A para B, da razão de B para C, e da razão de C para D. Ou a razão de A para D ſe chama razão compoſta das razões de A para B, de B para C, e de C para D.

Se for pois a razão de A para B a meſma que

que a razão de E para F; e a razão de B para C a mesma que a razão de G para H; e a razão de C para D a mesma que a razão de K para L; se dirá, que A tem para D a razão composta das razões, que são as mesmas que as razões de E para F, de G para H, e de K para L. E o mesmo se deve entender quando por brevidade se diz, que A tem para D a razão composta das razões de E para F, de G para H, e de K para L.

Do mesmo modo se a razão de M para N for a mesma, que a razão de A para D, ficando tudo como na supposição precedente, por brevidade se diz, que a razão de M para N he a mesma que a razão composta das razões de E para F, de G para H, e de K para L.

XII.

Postas humas grandezas proporcionaes, as antecedentes a respeito das antecedentes, e as consequentes a respeito das consequentes, chamão-se grandezas homologas.

Os vocabulos seguintes explicão os differentes modos, inventados pelos Geometras, de mudar a ordem, ou a quantidade das grandezas proporcionaes; de maneira porém, que fiquem sempre proporcionaes.

XIII.

Permutar, ou alternar. Usa-se deste vocabulo quando, existindo quatro grandezas proporcionaes, se argumenta, que a primeira para a terceira he como a segunda para a quarta. Demonmonſtra-ſe iſto na Propoſição 16. deſte Livro quinto.

XIV.

Inverter. Quando dadas quatro grandezas proporcionaes, ſe conclue, que a ſegunda he para a primeira, como a quarta para a terceira. Prop. B. deſte Livro quinto.

XV.

Compôr. Quando poſtas quatro grandezas proporcionaes, ſe conclue, que a primeira juntamente com a ſegunda he para a ſegunda, como a terceira juntamente com a quarta he para a meſma quarta. Prop. 18. deſte Livro.

XVI.

Dividir. Quando dadas quatro grandezas proporcionaes, ſe argumenta, que o exceſſo da primeira ſobre a ſegunda he para a ſegunda, como o exceſſo da terceira ſobre a quarta he para a quarta. Prop. 17. deſte Livro.

XVII.

Converter. Quando de quatro grandezas proporcionaes ſe collige, que a primeira he para o exceſſo da meſma primeira ſobre a ſegunda, como a terceira he para o exceſſo da meſma terceira ſobre a quarta. Prop. E. deſte Livro.

XVIII.

Por igual, ou por igualdade de razões. Quando poſto certo numero de grandezas de huma parte, e igual numero de outras grandezas de outra parte, as quaes grandezas porém em ambas as ſeries eſtejão entre ſi a duas e duas na mesma razão; se argumenta, que a primeira grandeza he para a ultima na primeira serie, como a primeira grandeza he tambem para a ultima na segunda serie. Deste modo de argumentar temos as duas especies seguintes.

XIX.

Por igual, ou por igualdade de razões simplesmente. Quando na primeira serie, sendo a primeira grandeza para a segunda, como a primeira he para a segunda na outra serie; e sendo, na primeira serie, a segunda grandeza para a terceira, como a segunda he tambem para a terceira na segunda serie; e deste modo continuando sempre até ás ultimas grandezas em huma e outra serie; finalmente, como temos dito na Definição precedente, se conclue, que a primeira grandeza na primeira serie he para a ultima, como a primeira he para a ultima na segunda serie. Prop. 22. deste Livro.

XX.

Por igual, ou por igualdade de razões em proporção perturbada. Quando na primeira serie, sendo a primeira grandeza para a segunda, como a penultima he para a ultima na outra serie; e sendo, na primeira serie, a segunda grandeza para a terceira, como a antepenultima he para a penultima na segunda serie; e sendo tambem na primeira serie a terceira grandeza para a quarta, como a que precede a antepenultima he para a mesma antepenultima: e deste modo e com esta ordem continuando por todas as grandezas de ambas as series, se

ar-

argumenta finalmente, como na Definição 18., que a primeira grandeza na primeira ſerie he para a ultima, como a primeira he para a ultima na ſegunda ſerie. Prop. 23. deſte Livro.

AXIOMAS.

I.

As grandezas equimultiplices da meſma grandeza, ou de grandezas iguaes, são tambem iguaes.

II.

As grandezas, que tem o meſmo equimultiplice, ou equimultiplices iguaes, são iguaes.

III.

O multiplice de huma grandeza maior he maior que o igualmente multiplice de huma grandeza menor.

IV.

Huma grandeza he maior que outra, quando hum multiplice qualquer da primeira he maior que o igualmente multiplice da ſegunda.

Os Geometras modernos, quando comparão entre ſi quatro grandezas proporcionaes, iſto he, quatro grandezas, as quaes entre ſi a duas e duas tem a meſma razão, como as quatro A, B, C, D; em lugar de dizer, que a grandeza A he para a grandeza B, como a grandeza C para a grandeza D, eſcrevem por brevidade, A: B:: C: D. Nós faremos o meſmo todas as vezes que eſte modo de repreſenſentar a proporcionalidade de quatro grandezas, náo cauſar confusão, ou obſcuridade alguma.

PROP. I. THEOR.

SE humas grandezas, ſeja qualquer que for o numero dellas, forem equimultiplices de outras tantas grandezas, cada huma de cada huma; aſſim como huma grandeza das primeiras he multiplice de huma das ſegundas, aſſim tambem todas as primeiras juntas ſeráo equimultiplices de todas as ſegundas juntas.

Fig. 1. Sejáo as grandezas AB, CD equimultiplices de outras em igual numero E, F, cada huma de cada huma. Digo, que como AB he multiplice de E, do meſmo modo AB, CD tomadas juntas sáo equimultiplices de E, F, tambem tomadas juntas.

Sendo AB multiplice de E, como CD o he de F; quantas forem as grandezas, que cabem em AB, cada huma igual á E, outras tantas ſeráo aquellas, que cabem em CD, cada huma igual a F. Divida-ſe pois AB nas partes iguaes, cada huma, a E, as quaes ſejáo AG, GB; e CD em partes iguaes, cada huma, a F, iſto he, nas partes CH, HD. Será o numero das partes CH, HD igual ao numero das partes AG, GB. E porque temos AG$=$E, e CH$=$F, ſeráo as duas AG, CH tomadas juntas iguaes ás duas E, F tambem tomadas juntas. Pela meſma razáo ſendo GB = E, e HD = F, ſeráo GB, HD juntamente iguaes [a] á E, F tambem juntamente. Logo quantas sáo as partes em AB iguaes, cada huma, á E, outras tantas ſeráo as partes em AB, CD tomadas juntas iguaes á E, F tambem tomadas juntas. Logo como AB he multiplice de E, do meſmo modo as duas AB, CD tomadas juntas sáo multiplices de E, F tambem tomadas juntas. a. ax.2. I.

E porque eſta demonſtração ſempre ſubſiſte, qualquer que ſeja o numero das grandezas propoſtas, he manifeſto que a propoſição he verdadeira em toda a ſua generalidade.

PROP. II. THEOR.

SE a primeira grandeza for multiplice da ſegunda, como a terceira o he da quarta; e ſe a quinta for multiplice da ſegunda, como a ſexta o he da quarta; ſerá a primeira juntamente com a quinta multiplice da ſegunda, como a terceira juntamente com a ſexta o he da quarta.

Seja a primeira grandeza AB multiplice da ſegunda C, como a terceira DE he multiplice da quarta F; e tambem ſeja a quinta BG multiplice da ſegunda C, como a ſexta EH he multiplice da quarta F. Digo, que a primeira junta- Fig. 2.

 ta-

tamente com a quinta, isto he, toda a grandeza AG, he multiplice da segunda C, como a terceira juntamente com a sexta, isto he, toda a grandeza DH, he multiplice da quarta F.

Sendo AB, DE equimultiplices de C, F, quantas grandezas cabem em AB, das quaes cada huma he igual á C, outras tantas devem caber em DE, sendo cada huma dellas igual á F. Pela mesma razão o numero das grandezas, que cabem em BG, cada huma das quaes he igual á C, será igual ao numero das grandezas, que cabem em EH, sendo cada huma destas igual á F. Logo o numero das grandezas iguaes, cada huma, á C, e comprehendidas na grandeza total AG, será igual ao numero das grandezas comprehendidas em DH outra grandeza total, e iguaes, cada huma, á F. Logo he AG multiplice de C do mesmo modo que DH he multiplice de F. Logo a primeira grandeza juntamente com a quinta, igual á AG, he multiplice da segunda C, do mesmo modo que a terceira grandeza juntamente com a sexta, igual á DH, he multiplice da quarta F.

Fig. 5. COROL. Segue-se disto, que se for hum numero, seja qualquer que for, de grandezas AB, BG, GH multiplices de C, e outras tantas grandezas DE, EK, KL igualmente multiplices de F, cada huma de cada huma; todas as primeiras tomadas juntas, isto he, AH, serão multiplices de C, como todas as segundas tambem tomadas juntas, isto he, DL, são multiplices de F.

PROP.

PROP. III. THEOR.

SE ſendo a primeira grandeza multiplice da ſegunda, como a terceira o he da quarta, ſe tomarem outras grandezas quaeſquer equimultiplices da primeira e da terceira; ſeráo eſtas grandezas tambem equimultiplices a reſpeito da ſegunda grandeza, e da quarta.

Seja a primeira grandeza A multiplice da ſegunda B, como a terceira C he multiplice da quarta D; e ſejáo EF, GH equimultiplices de A, C. Digo, que EF ſerá multiplice de B, do meſmo modo que GH o he de D. Fig. 4.

Sendo EF, GH equimultiplices de A, C; o numero das grandezas em EF, ſendo cada huma dellas igual a A, ſerá igual ao numero das grandezas em GH, ſendo cada huma deſtas igual a C. Divida-ſe pois EF nas grandezas EK, KF, das quaes cada huma ſeja igual a A; e GH nas grandezas GL, LH iguaes, cada huma, a C. Logo ſerá o numero das grandezas EK, KF igual ao numero das grandezas GL, LH. E como A, C ſáo equimultiplices de B, D, e temos EK$=$A, e GL$=$C, ſeráo tambem EK, GL equimultiplices de B, D. Pela meſma razáo KF, LH ſáo equimultiplices de B, D. O meſmo ſerá ſe nas grandezas EF, GH houver hum numero maior de partes iguaes, cada huma e reſpectivamente, a A, e C. Lo-

go sendo a primeira grandeza EK multiplice da segunda B do mesmo modo que a terceira GL o he da quarta D; e tambem sendo a quinta KF multiplice da segunda B, como a sexta LH he multiplice da quarta D; será a primeira grandeza juntamente com a quinta, isto he, EF,
a. 2. 5. multiplice[a] da segunda B, do mesmo modo que a terceira grandeza juntamente com a sexta, isto he, GH, he multiplice da quarta D.

PROP. IV. THEOR.

SE a primeira grandeza tiver para a segunda a mesma razão, que a terceira tem para a quarta; tambem humas grandezas quaesquer equimultiplices da primeira e da terceira terão a mesma razão para outras grandezas quaesquer equimultiplices da segunda e da quarta.

Fig. 5. A primeira grandeza A tenha para a segunda B a mesma razão, que a terceira C tem para a quarta D. Sejão as grandezas quaesquer E, F equimultiplices de A, C; e as outras G, H quaesquer equimultiplices de B, D. Digo, que será E: G:: F: H.

Tomem-se as grandezas quaesquer K, L equimultiplices de E, F; e as outras M, N equimultiplices quaesquer de G, H. Sendo pois E, F equimultiplices de A, C; e K, L equimultiplices de E, F; serão as mesmas grandezas
a. 3. 5. K, L tambem equimultiplices[a] de A, C. Pela

la mesma razão as grandezas M , N são equimultiplices de B, D. E como temos A: B:: C: D, e K, L são equimultiplices de A, C, e M, N são equimultiplices de B, D; se K for maior, ou igual, ou menor a respeito de M, tambem L será maior, ou igual, ou menor[b] a respeito de N. Mas K, L são humas grandezas equimultiplices quaesquer de E, F; e M, N são outras equimultiplices quaesquer de G, H. Logo será E: G:: F; H[b]. b. def. 5. 5.

COROL. Do mesmo modo se a primeira grandeza tiver para a segunda a mesma razão, que a terceira tem para a quarta, tambem as grandezas equimultiplices quaesquer da primeira e da terceira terão a mesma razão para a segunda e para a quarta; e a primeira grandeza e a terceira terão a mesma razão para as grandezas equimultiplices quaesquer da segunda, e da quarta.

A primeira grandeza A para a segunda B tenha a mesma razão, que a terceira C tem para a quarta D. Sejão as grandezas E, F equimultiplices quaesquer de A, C. Digo, que será E: B:: F: D.

Tomem-se as grandezas K, L equimultiplices quaesquer de E, F; e as grandezas G, H outras equimultiplices quaesquer de B, D. Podemos demonstrar como assima, que K, L são equimultiplices de A, C. Sendo pois A: B:: C: D, e sendo K, L equimultiplices de A, C; e G, H equimultiplices de B, D; se K for maior, ou igual, ou menor a respeito de de G, tambem L será maior, ou igual, ou menor a respeito de H. Mas K, L são humas grandezas equimultiplices quaesquer de E, F; e G, H são outras quaesquer equimultiplices de B, D. Logo será E : B :: F : D. Com o mesmo methodo se demonstra tambem o outro caso.

PROP. V. THEOR.

SE huma grandeza for multiplice de outra grandeza do mesmo modo que huma parte da primeira grandeza he multiplice de huma parte da segunda; tiradas estas partes, será o que fica da primeira grandeza do mesmo modo multiplice do que fica da segunda grandeza, como a primeira grandeza he multiplice da segunda.

Fig. 6. Seja a grandeza AB multiplice da grandeza CD, como a parte AE he multiplice da parte CF. Digo, que o resto EB será multiplice do resto FD, do mesmo modo que a grandeza total AB o he da grandeza total CD.

Ponha-se a grandeza AG multiplice de FD do mesmo modo que AE he multiplice de CF. Logo as grandezas AE, EG são equimultiplices[a] de CF, CD. Mas AE, AB são pela hypothesis equimultiplices de CF, CD. Logo EG, AB são equimultiplices da mesma grandeza CD, e por consequencia será EG = AB[b]. Logo tiran-

a. 1. 5.

b. ax. 1. 5.

rando a parte commua AE, ficará AG=EB. Logo ſendo AE, AG equimultiplices de CF, FD, e ſendo AG=EB; tambem AE, EB ſeráõ equimultiplices de CF, FD. Mas temos ſuppoſto ſerem AE, AB equimultiplices de CF, CD. Logo tambem EB, AB ſeráõ equimultiplices de FD, CD.

PROP. VI. THEOR.

SE duas grandezas ſendo igualmente multiplices de outras duas, humas partes daquellas forem tambem equimultiplices deſtoutras duas; tiradas aquellas partes, os reſtos que ficarem, ſeráõ ou iguaes ás meſmas ſegundas grandezas, ou equimultiplices dellas.

Sejáõ as duas grandezas AB, CD equimultiplices das outras duas E, F, e tambem as partes AG, CH ſejáõ equimultiplices das meſmas grandezas E, F. Digo, que os reſtos GB, HD ſeráõ reſpectivamente ou iguaes, ou equimultiplices das grandezas E, F. Fig. 7.

Seja primeiramente GB=E. Digo, que ſerá HD=F. Ponha-ſe CK=F. Sendo pois AG, CH equimultiplices de E, F, e ſendo GB=E, e CK=F; tambem AB, KH ſeráõ equimultiplices de E, F. Mas pela hypotheſis AB, CD ſáõ equimultiplices de E, F. Logo KH, CD ſeráõ equimultiplices da meſma gran- Fig. 7. a.

de-

a. ax. 1. 5. deza F, e assim será KH = CD [a]. Logo tirada a parte commua CH, ficará KC = HD. Mas era KC = F. Logo será tambem HD = F. Logo sendo GB = E, será tambem HD = F.

Fig. 7. b. Seja agora GB multiplice de E. Digo, que HD será igualmente multiplice de F. Ponhase CK multiplice de F, do mesmo modo que GB he multiplice de E. Porque tanto AG, CH, como GB, CK são equimultiplices de E, F; as duas grandezas AB, KH serão tambem equimultiplices [b] de E, F. Mas pela hypothesis AB, CD são equimultiplices de E, F. Logo KH, CD são equimultiplices da mesma grandeza F, e por consequencia KH = CD [a]. Logo tirada a parte commua CH, será o resto KC igual ao resto HD. Mas GB, KC são equimultiplices de E, F, e temos KC = HD. Logo HD, GB serão tambem equimultiplices de F, E.

b. 2. 5.

PROP. A. THEOR.

SE a primeira grandeza tiver para a segunda a mesma razão, que a terceira tem para a quarta; sendo a primeira maior, ou igual, ou menor, que a segunda, tambem a terceira será maior, ou igual, ou menor que a quarta.

Postas humas grandezas equimultiplices de todas as quatro grandezas propostas, por exemplo o dobro de cada huma; pela Definição quin-

quinta deste Livro, se o dobro da primeira grandeza for maior que o dobro da segunda, tambem o dobro da terceira será maior que o dobro da quarta. Mas se a primeira grandeza for maior que a segunda, será o dobro da primeira tambem maior que o dobro da segunda. Logo o dobro da terceira grandeza será maior que o dobro da quarta, e por consequencia será a terceira grandeza maior que a quarta. Logo se a primeira grandeza for maior que a segunda, tambem a terceira será maior que a quarta. Com a mesma demonstração se prova, que sendo a primeira grandeza igual, ou menor que a segunda, tambem a terceira deve ser igual, ou menor que a quarta.

PROP. B. THEOR.

SE quatro grandezas forem proporcionaes, invertendo serão tambem proporcionaes.

Seja A : B :: C : D. Digo, que invertendo será tambem B : A :: D : C. Fig. 8.

Tomem-se os equimultiplices quaesquer E, F das grandezas B, D; e os equimultiplices G, H quaesquer das grandezas A, C; e primeiramente seja E $>$ G, ou G $<$ E. Como temos A : B :: C : D; e G, H são equimultiplices de A, C; e E, F equimultiplices de B, D; sendo G $<$ E, será H $<$ F [a], e por consequencia F $>$ H. Logo sendo E $>$ G, será tambem a. def. 5. 5.

bem

bem F > H. Do mesmo modo se for E = G, se provará F = H; e se for E < G, tambem será F < H. Mas E, F são humas grandezas equimultiplices quaesquer de B, D; e G, H equimultiplices quaesquer de A, C. Logo se-
a. def. 5. rá B : A :: D : C [a]. Logo se quatro grandezas
5. forem proporcionaes, tambem invertendo seráo proporcionaes.

PROP. C. THEOR.

SE a primeira grandeza for multiplice, ou parte da segunda, do mesmo modo, que a terceira he multiplice, ou parte da quarta; será a primeira grandeza para a segunda, como a terceira he para a quarta.

Fig. 9. Seja a primeira grandeza A multiplice da segunda B, como a terceira C he multiplice da quarta D. Digo, que será A : B :: C : D.

Tomem-se os equimultiplices quaesquer E, F das grandezas A, C; e os equimultiplices quaesquer G, H das outras grandezas B, D. Como A, C são equimultiplices de B, D; e E, F são equimultiplices de A, C; seráo E,
a. 3. 5. F tambem equimultiplices [a] de B, D. Mas G, H são equimultiplices de B, D. Logo se E multiplice de B for maior que G multiplice da mesma grandeza B, isto he, se for E > G, será tambem F > H. Do mesmo modo, se E for igual, ou menor que G, demonstraremos, que

F

E he igual, ou menor que H. Mas E, F são humas grandezas equimultiplices quaesquer de A, C; e G, H equimultiplices quaesquer de B, D. Logo será A: B:: C: D[b]. b. def. 5. 5.

Mas se a primeira grandeza A for a mesma parte da segunda B, que a terceira C o he da quarta D. Digo, que será tambem A: B:: C: D. Fig. 10.

Porque B será multiplice de A, como D o he de C. Logo pelo primeiro caso já demonstrado, deve ser B: A:: D: C. Logo invertendo[b], será A: B:: C: D. c. B. 5.

PROP. D. THEOR.

SE a primeira grandeza for para a segunda, como a terceira he para a quarta; sendo a primeira grandeza multiplice da segunda, ou huma parte della, a terceira será huma grandeza igualmente multiplice da quarta, ou a mesma parte della.

Seja A: B;: C: D, e seja A multiplice de B. Digo, que C será huma grandeza multiplice de D, como A o he de B. Fig. 11.

Tome-se E=A, e ponha-se F tal multiplice de D, como A, ou E he multiplice de B. Logo sendo A: B:: C: D, e sendo E, F equimultiplices da segunda grandeza B, e da quarta D, será A: E:: C: F[a]. Mas temos a. Cor. 4. 5.

A=

b. A. 5. A = E. Logo ſerá C = F [b]. Mas F, E, ou F, A são equimultiplices de D, B. Logo ſerá C multiplice de D, como A o he de B.

Fig. 10. Mas ſeja a primeira grandeza A huma parte da ſegunda B. Digo, que a terceira C ſerá a meſma parte da quarta D.

Porque ſendo A : B :: C : D, ſerá invertendo [c] B : A :: D : C. Mas A he huma parte de B, e por conſequencia B he huma grandeza multiplice de A. Logo pelo caſo antecedente, D ſerá outra grandeza igualmente multiplice de C, e aſſim C ſerá a meſma parte de D, como A he parte de B.

c. B. 5.

PROP. VII. THEOR.

AS grandezas iguaes tem a meſma razão para huma meſma grandeza; e a meſma grandeza tem tambem a meſma razão para grandezas iguaes.

Fig. 12. Sejão as grandezas iguaes A, B, e outra grandeza qualquer C. Digo, que cada huma das grandezas A, B tem huma meſma razão para a grandeza C; e que a grandeza C tambem tem a meſma razão para cada huma das grandezas A, B.

Tomem-ſe os equimultiplices quaeſquer D, E das grandezas A, B; e F ſeja huma grandeza qualquer multiplice de C. Sendo pois D, E equimultiplices de A, B, e ſendo A = B; ſerá tambem D = E [a]. Logo ſe D for maior,

a. ax. 1. 5.

ou

ou igual, ou menor que F, tambem E ſerá maior, ou igual, ou menor que F. Mas D, E são grandezas equimultiplices de A, B; e F b. def. 5. multiplices de C. Logo ſerá A: C:: B: C. b 5.

Digo tambem, que ſerá C : A :: C : B. Feita a meſma conſtrucção como aſſima, do meſmo modo demonſtraremos ſer D = E. Logo ſe F for maior, ou igual, ou menor que D; ſerá tambem a meſma grandeza F maior, ou igual, ou menor que E. Mas F he huma grandeza multiplice de C; e D, E são equimultiplices de A, B. Logo ſerá C : A :: C : B.

PROP. VIII. THEOR.

DE duas grandezas deſiguaes a maior tem para huma terceira grandeza qualquer huma razão maior que a razão, que a menor tem para a meſma terceira. E eſta tem para a grandeza menor huma razão tambem maior que a razão, que a meſma terceira tem para a grandeza maior.

Sejão as grandezas deſiguaes AB, BC, e Fig. 13. AB ſeja a grandeza maior. Seja tambem huma 14. 15. terceira grandeza qualquer D. Digo, que a razão de AB para D he maior que a razão de BC para D; e que a razão de D para BC he maior que a razão da meſma D para AB.

Se das duas grandezas AC, CB aquella, que

que não he a maior, não for menor que D; tome-se EF dobro de AC, e FG dobro de CB, como na Figura 13. E se das mesmas grandezas AC, CB aquella, que não he a maior, ou seja AC, ou seja CB, for menor que D, como nas Figuras 14. 15.; esta mesma grandeza tomada certo numero de vezes, finalmente ficará sendo maior que D. Tome-se pois esta grandeza, como fica dito; e faça-se o mesmo a respeito da outra tomando-a igual numero de vezes; e seja EF multiplice de AC, e FG igualmente multiplice de CB. Logo cada huma das grandezas EF, FG he maior que a grandeza D. Em todos os casos tome-se H dobro de D, K triplo de D, e assim se continue com o quadruplo, quintuplo, &c. até que se chegue a hum multiplice de D proximamente maior que a grandeza FG. Seja L a grandeza multiplice de D, e proximamente maior que FG, e K seja tambem multiplice de D, e proximamente menor que L.

Sendo L multiplice de D, e proximamente maior que FG, K não será maior que FG, e por consequencia FG não será menor que K. E sendo EF, FG equimultiplices de AC, CB,
a. 1. 5. serão tambem FG, EG equimultiplices [a] de CB, AB, ou EG FG equimultiplices de AB, CB. Mas temos demonstrado, que FG não he menor que K, e pela construcção temos EF > D. Logo a grandeza total EG será maior que as duas juntamente K, D. Mas K, D tomadas juntas são iguaes a L. Logo

EG

EG he maior que L. Mas FG não he maior que L; e EG, FG são equimultiplices de AB, BC, e L he multiplice de D. Logo a razão de AB para D he maior que a razão de BC para D[b]. b. def. 7. 5.

Agora digo, que a razão de D para BC he maior que a razão da mesma D para AB. Feita a mesma construcção como assima, do mesmo modo demonstraremos, que L deve ser maior que FG, mas não maior que EG. Mas L he multiplice de D, e FG, EG são equimultiplices de CB, AB. Logo a razão de D para CB será maior que a razão de D para AB[b].

PROP. IX. THEOR.

As grandezas, que tem a mesma razão para outra qualquer grandeza, são iguaes entre si; como iguaes são tambem aquellas, para as quaes outra grandeza qualquer tem a mesma razão.

Tenhão as grandezas A, B a mesma razão para a grandeza C. Digo, que A, B são iguaes.

Se A, B não são iguaes, huma dellas será maior que a outra. Seja A a maior. Logo, como temos demonstrado na Proposição precedente, poder-se-hão achar humas grandezas equimultiplices de A, B, e outra multiplice de C, de maneira que a multiplice de A, sendo maior que a multiplice de C, a multiplice de Fig. 16.

B

B não o seja a respeito da mesma multiplice de C. Sejão pois D, E grandezas equimultiplices de A, B, e F multiplice de C, de sorte, que sendo D > F, não seja E > F. Porque pela hypothesis he A : C : : B : C; e porque D, E sendo equimultiplices de A, B, e F multiplice de C, temos D > F, será tambem E > F [a]. Mas isto não póde ser, porque pela construcção E não he maior que F. Logo as grandezas A, B não são desiguaes, mas sim iguaes.

a. def. 5. 5.

Tenha agora a mesma grandeza C para cada huma das duas A, B a mesma razão. Digo, que será A = B.

Se A, B não são iguaes, será huma dellas maior que a outra. Seja A a maior. Logo haverá [b] huma grandeza F multiplice de C, e outras E, D, equimultiplices de B, A, de maneira que sendo F > E, não seja a mesma F > D. Mas sendo C : B : : C : A, e sendo F multiplice da primeira grandeza C maior que E multiplice da segunda B, será F multiplice da terceira C maior [a] que D multiplice da quarta A. Mas isto he impossivel, porque pela construcção F não he maior que D. Logo as grandezas A, B não são desiguaes. Logo são iguaes.

b. 8. 5.

PROP. X. THEOR.

ENtre as grandezas, cada huma das quaes tem sua razão para outra grandeza, será maior aquella, cuja razão para aquelloutra grandeza for maior; e entre

tre as grandezas, para cada huma das quaes outra grandeza qualquer tem huma razão, será menor aquella, para a qual estoutra grandeza tiver huma razão maior.

A grandeza A tenha para a grandeza C huma razão maior, que a razão de B para C. Digo, que será A > B. Fig. 16.

Tendo A para C huma razão maior que a razão de B para C, ha de haver humas grandezas equimultiplices[a] de A, B, e outra multiplice de C, de maneira que sendo a multiplice de A maior que a multiplice de C, a multiplice de B não seja maior que a mesma multiplice de C. Tomem-se pois, e sejão D, E equimultiplices de A, B; e F multiplice de C, de maneira que sendo D > F, não seja E > F. Logo será D > E. Mas D, E são equimultiplices de A, B; e temos D > E. Logo será tambem A > B[b]. a. def. 7. 5. b. ax. 4. 5.

Agora a grandeza C tenha para a grandeza B huma razão maior, que a razão de C para A. Digo, que será B < A.

Ha de haver, como se tem dito assima, huma grandeza F multiplice de C, e outras E, D equimultiplices de B, A, de sorte que sendo F > E, não seja a mesma F > D. Logo deve ser E < D. Logo sendo E, D equimultiplices de B, A, será B < A[b].

PROP. XI. THEOR.

AS razões iguaes a huma terceira, são iguaes entre ſi.

Fig. 17. Seja A : B : : C: D ; e ſeja tambem C: D:: E: F. Digo, que ſerá A: B:: E: F.

Tomem-ſe as grandezas G, H, K equimultiplices, como ſe quizer, de A, C, E; e as grandezas L, M, N equimultiplices quaeſquer de B, D, F. Porque ſe ſuppõe A: B:: C: D; e G, H são equimultiplices de A, C; e L, M são equimultiplices de B, D; ſe G for maior, ou igual, ou menor que L, tambem H ſerá maior, ou igual, ou menor que M [a]. Tambem ſendo C: D:: E: F; e ſendo H, K equimultiplices de C, E; e M, N equimultiplices de D, F; ſe H for maior, ou igual, ou menor que M, tambem K ſerá maior, ou igual, ou menor que N [a]. Mas ſe G for maior, ou igual, ou menor que L, temos demonſtrado, que H do meſmo modo ſerá maior, ou igual, ou menor que M. Logo ſe for G maior, ou igual, ou menor que L, tambem K ſerá maior, ou igual, ou menor que N. Mas G, K são equimultiplices de A, E; e L, N são equimultiplices de E, F. Logo deve ſer A: B:: E: F.

a. def. 5. 5.

PROP.

PROP. XII. THEOR.

SE humas grandezas, seja qualquer que for o numero dellas, forem proporcionaes; será huma como antecedente para outra como consequente, como todas as antecedentes tomadas juntas para todas as consequentes tambem tomadas juntas.

Sejão as grandezas proporcionaes A, B, C, D, E, F, e supponha-se A : B :: C : D, e C : D :: E : F. Digo, que como A he para B, assim A, C, E juntamente são para B, D, F tambem juntamente. Fig. 17.

Sejão as grandezas G, H, K equimultiplices, como se quizer, de A, C, E; e L M, N, equimultiplices de B, D, F. Porque se suppõe A : B :: C : D; e C : D :: E : F; e G, H, K são equimultiplices de A, C, E; e L, M, N equimultiplices de B, D, F; se G for maior, ou igual, ou menor que L, tambem H será[a] maior, ou igual, ou menor que M; a. def. 5. 5.
e K maior, ou igual, ou menor que N. Logo se G for maior, ou igual, ou menor que L, tambem as tres grandezas G, H, K juntamente serão maiores, ou iguaes, ou menores que as tres L, M, N tomadas juntas. Mas G, e G, H, K são humas grandezas equimultiplices quaesquer de A, e de A, C, E; e tambem L, e L, M, N são outras equimultiplices

ces de B, e de B, D, F; porque quando humas grandezas, qualquer que seja o numero dellas, são igualmente multiplices de outras tantas grandezas, cada huma de cada huma, assim como huma das primeiras grandezas he multiplice de outra das segundas; do mesmo modo todas as primeiras juntamente são multiplices[b] de todas as segundas juntamente. Logo será A para B, como A, C, E, tomadas juntas, para B, D, F tambem tomadas juntas[a].

b. 1. 5.

a. def. 5. 5.

PROP. XIII. THEOR.

SE a primeira grandeza tiver para a segunda a mesma razão, que a terceira tem para a quarta; e se a terceira tiver para a quarta huma razão maior que a razão da quinta para a sexta; a primeira terá para a segunda huma razão maior que a razão da quinta para a sexta.

Fig. 17. Tenha a primeira grandeza A para a segunda B a mesma razão, que a terceira C tem para a quarta D; e a terceira C tenha para a quarta D huma razão maior que a razão da quinta E para a sexta F. Digo, que a razão da primeira A para a segunda B será maior que a razão da quinta E para a sexta F.

Porque a razão de C para D he maior que a razão de E para F, ha de haver humas grandezas equimultiplices de C, E, e outras equimulmultiplices de D, F, de maneira que ſendo a multiplice de C maior que a multiplice de D, não ſeja a multiplice de E maior que a multiplice de F[a]. Sejão as grandezas H, K equimultiplices de C, E; e M, N equimultiplices de D, F, de modo que ſendo H maior que M, não ſeja K maior que N; e como H he multiplice de C, do meſmo modo faça-ſe G multiplice de A. Faça-ſe tambem L multiplice de B, como M he multiplice de D. Sendo A: B:: C: D; e ſendo G, H equimultiplices de A, C; e L, M equimultiplices de B, D; ſe G for maior, ou igual, ou menor que L, tambem H ſerá maior, ou igual, ou menor que M. Mas he H > M. Logo ſerá tambem G > L. Mas não he K > N; e G, K são equimultiplices de A, E; e L, N são equimultiplices de B, F. Logo A tem para B huma razão maior[a] que a razão de E para F.

a. def. 7. 5.

COROL. Se a primeira grandeza tiver para a ſegunda huma razão maior, que a razão da terceira para a quarta; e ſe a terceira tiver para a quarta a meſma razão, que a quinta tem para a ſexta; do meſmo modo demonſtraremos, que a primeira tem para a ſegunda huma razão maior que a razão da quinta para a ſexta.

PROP. XIV. THEOR.

SE a primeira grandeza tiver para a ſegunda a meſma razão, que a terceira tem para a quarta; ſendo a primeira ra maior, ou igual, ou menor que a terceira, tambem a ſegunda ſerá maior, ou igual, ou menor que a quarta.

Fig. 18. Tenha a primeira grandeza A para a ſegunda B a meſma razão, que a terceira C tem para a quarta D; e ſeja $A > C$. Digo, que ſerá $B > D$.

a. 8. 5. Sendo $A > C$, A deve ter para B, que he huma grandeza qualquer, huma razão maior[a] que a razão de C para B. Mas he $C : D :: A : B$. Logo C tem para D huma razão maior[b] que a razão de C para B, e por conſequencia deve ſer $D < B$, ou $B > D$[c].

b. 13. 5.

c. 10. 5.

Fig. 19. Em ſegundo lugar ſeja $A = C$. Digo, que ſerá $B = D$.

d. 9. 5. Sendo $A : B :: C : D$; e ſendo $A = C$, ſerá tambem $A : B :: A : D$. Logo ſerá $B = D$[d].

Fig. 20. Finalmente ſe for $A < C$, ſerá $B < D$.

Sendo $A < C$, ſerá $C > A$. Mas porque temos $C : D :: A : B$, deve ſer pelo primeiro caſo $D > B$. Logo ſerá $B < D$.

PROP. XV. THEOR.

AS partes tem entre ſi a meſma razão, que tem as grandezas equimultiplices dellas.

Fig. 21. Sejão as grandezas AB, DE equimultiplices de C, F. Digo, que ſerá $C : F :: AB : DE$.

Sen-

Sendo AB, DE grandezas equimultiplices de C, F, quantas são as partes em AB, das quaes cada huma he igual a C, tantas são em DE, cada huma igual á F. Divida-se AB nas partes iguaes, cada huma, a C, e sejão AG, GH, HB; e DE nas partes iguaes, cada huma, a F, e sejão DK, KL, LE. Logo o numero das partes AG, GH, HB he igual ao numero das partes DK, KL, LE. E porque as partes AG, GH, HB são iguaes entre si, como tambem as partes DK, KL, LE; será AG : DK : : GH : KL, e GH : KL : : HB : LE [a]. Mas hum antecedente he para hum consequente [b], como todos os antecedentes tomados juntos para todos os consequentes tambem tomados juntos. Logo será AG : DK : : AB : DE. Mas he AG = C, e DK = F. Logo será tambem C : F : : AB : DE. a. 7. 5. b. 12. 5.

PROP. XVI. THEOR.

SE quatro grandezas, todas do mesmo genero, forem proporcionaes; tambem permutando serão proporcionaes.

Sejão as quatro grandezas proporcionaes, e do mesmo genero A, B, C, D, e seja A : B : : C : D. Digo, que permutando serão tambem proporcionaes, isto he, será A : C : : B : D. Fig. 28.

Tomem-se as grandezas E, F equimultiplices quaesquer das duas A, B; e as grandezas G, H equimultiplices das duas C, D. Como mo E, F são equimultiplices de A, B; e como as partes tem entre si a mesma razão[a], que tem as grandezas equimultiplices dellas; será A: B:: E: F. Mas he A: B:: C: D. Logo será C: D:: E: F[b]. Tambem como G, H são equimultiplices de C, D, será C: D:: G: H[a]. Mas temos visto ser C: D:: E: F. Logo será E: F:: G: H[b]. Mas de quatro grandezas proporcionaes se a primeira for maior, ou igual, ou menor que a terceira, será tambem a segunda maior, ou igual, ou menor que a quarta[c]. Logo se E for maior, ou igual, ou menor que G, tambem F será maior, ou igual, ou menor que H. Logo sendo E, F equimultiplices de A, B; e G, H equimultiplices de C, D, será A: C:: B: D[d].

a. 15. 5.
b. 11. 5.
c. 14. 5.
d. def. 5. 5.

PROP. XVII. THEOR.

SE as grandezas, que são compostas, forem proporcionaes; tambem estando divididas serão proporcionaes.

Fig. 23.

Sejão proporcionaes as grandezas compostas AB, BE, CD, DF; isto he, seja AB: BE:: CD: DF. Digo, que as mesmas grandezas divididas serão tambem proporcionaes, isto he, será AE: EB:: CF: FD.

Tomem-se as grandezas GH, HK, LM, MN equimultiplices quaesquer de AE, EB, CF, FD; e tambem as outras KX, NP equimultiplices de EB, FD. Sendo GH, HK grande-

zas

zas equimultiplices de AE, EB; ſeráo GH, GK tambem equimultiplices[a] de AE, AB. Mas GH, LM sáo equimultiplices de AE, CF. Logo GK, LM ſeráo equimultiplices de AB, CF. Tambem ſendo LM, MN equimultiplices de CF, FD; ſeráo LM, LN equimultiplices[a] de CF, CD. Mas LM, GK eráo equimultiplices de CF, AB. Logo GK, LN sáo equimultiplices de AB, CD. Da meſma ſorte tambem porque HK, MN sáo equimultiplices de EB, FD; e KX, NP equimultiplices de EB, FD; as grandezas compoſtas HX, MP ſeráo equimultiplices[b] de EB, FD. Sendo pois AB : BE :: CD : DF; e ſendo GK, LN equimultiplices de AB, CD; e HX, MP equimultiplices de EB, FD; ſe GK for maior, ou igual, ou menor que HX, tambem LN ſerá maior[c], ou igual, ou menor que MP. Mas ſe GH for maior que KX, ajuntando a parte commua HK, ſerá GK > HX, e por conſequencia LN > MP; e tirando a parte commua MN, ſerá LM > NP. Logo ſe for GH > KX, ſerá tambem LM > NP. Do meſmo modo demonſtraremos, que ſe GH for igual, ou menor que KX, tambem LM ſerá igual, ou menor que NP. Mas GH, LM sáo equimultiplices de AE, CF; e KX, NP sáo equimultiplices de EB, FD. Logo ſerá AE : EB :: CF : FD.

a. 1. 5.

b. 2. 5.

b. def. 5. 5.

PROP.

PROP. XVIII. THEOR.

SE as grandezas, que sáo divididas, forem proporcionaes; tambem ſendo compoſtas, ſeráo proporcionaes.

Fig. 24. 25. 26. Sejáo proporcionaes as grandezas divididas AE, EB; CF, FD, iſto he, ſeja AE : EB :: CF : FD. Digo, que eſtas grandezas, ſendo compoſtas, tambem ſeráo proporcionaes, iſto he, ſerá AB : BE :: CD : DF.

Tomem-ſe as grandezas GH, HK, LM, MN equimultiplices quaeſquer de AB, BE, CD, DF; e as outras KO, NP equimultiplices quaeſquer de BE, DF. Porque KO, NP, como tambem KH, NM sáo equimultiplices de BE, DF; ſe KO multiplice de BE for maior, ou igual, ou menor que KH multiplice da meſma grandeza BE, tambem NP multiplice de DF ſerá maior, ou igual, ou menor que NM multiplice da meſma DF.

Fig. 24. Seja primeiramente KO náo maior que KH. Será NP náo maior que NM. E; porque GH, HK sáo equimultiplices de AB, BE, e he AB > BE, ſerá GH > KH [a]. Mas KO náo he maior que KH. Logo ſerá GH > KO. Do meſmo modo ſe demonſtra ſer LM > NP. Logo náo ſendo KO > KH, ſerá GH multiplice de AB ſempre maior que KO multiplice de BE, e tambem LM multiplice de CD ſerá maior que NP multiplice de DF.

a. ax. 3. 5.

Fig. 25. Mas ſeja KO > KH. Será, como temos demonſ-

monſtrado, NP > NM. E porque a grandeza total GH he multiplice da total AB, como a parte HK he multiplice da outra parte BE, tiradas eſtas partes, ſerá o reſto GK multiplice[b] do reſto AE, como GH he multiplice de AB, ou como LM he multiplice de CD. Do meſmo modo ſendo LM multiplice de CD, como a parte MN o he da parte DF; o reſto LN ſerá multiplice[b] do reſto CF, como LM o he de CD. Mas temos provado, que LM, GK ſão equimultiplices de CD, AE. Logo GK, LN ſão equimultiplices de AE, CF. Sendo pois KO, NP equimultiplices de BE, DF, e tambem ſendo as partes KH, NM equimultiplices das meſmas grandezas BE, DF; os reſtos HO, MP ſeráo ou iguaes ás grandezas BE, DF, ou equimultiplices dellas[c]. Sejão em primeiro lugar HO, MP iguaes reſpectivamente a BE, DF. Sendo AE : EB :: CF : FD; e ſendo GK, LN equimultiplices de AE, CF; ſerá GK : EB :: LN : FD[d]. Mas temos HO = EB, e MP = FD. Logo ſerá GK : HO :: LN : MP. Logo ſe GK for maior, ou igual, ou menor que HO, tambem LN ſerá maior[e], ou igual, ou menor que MP.

b. 5. 5.

c. 6. 5.

d. Cor. 4. 5.

e. A. 5.

Mas ſejão HO, MP equimultiplices de EB, FD. Porque temos AE : EB :: CF : FD; e GK, LN ſão equimultiplices de AE, CF; e HO, MP equimultiplices de EB, FD; ſe GK for maior, ou igual, ou menor que HO, tambem LN ſerá maior[f], ou igual, ou menor que MP, o que temos demonſtrado tambem no ca-

Fig. 26.

f. def. 5. 5.

ſo

ſo precedente. Logo ſe for GH > KO, tirando a parte commua KH, ſerá GK > HO, e por conſequencia LN > MP; e ajuntando a meſma grandeza NM, ſerá LM > NP. Logo ſe for GH > KO, ſerá LM > NP. Do meſmo modo ſe demonſtra, que ſendo GH = KO, ſerá LM = NP; e que ſendo GH < KO, ſerá tambem LM < NP. Mas quando KO não he maior que KH, temos viſto, que he ſempre GH > KO, e LM > NP; e GH, LM são grandezas equimultiplices quaeſquer de AB, CD; e KO, NP equimultiplices de BE, DF.
f. def. 5. 5. Logo ſerá AB: BE:: CD: DF[f].

PROP. XIX. THEOR.

SE huma grandeza for para outra grandeza, como huma parte daquella para huma parte deſta; ſerá o reſto da primeira grandeza para o reſto da ſegunda, como a primeira grandeza he para a ſegunda.

Fig. 27. Seja a grandeza total AB para a total CD, como a parte AE para a parte CF. Digo, que o reſto EB ſerá para o reſto FD, como a grandeza total AB he para a grandeza total CD.

Sendo AB: CD:: AE: CF, ſerá permutando[a] BA: AE:: DC: CF. E como as grandezas compoſtas proporcionaes tambem divididas são proporcionaes[b]; ſerá BE: EA:: DF: FC; e outra vez permutando BE: DF:: EA: FC.

a. 16. 5.
b. 17. 5.

FC. Mas he AE: CF:: AB: CD. Logo ſerá EB: FD:: AB: CD.

Corol. Se huma grandeza total for para outra grandeza total, como huma parte daquella he para huma parte deſta; ſerá o reſto, que fica da primeira grandeza para o reſto da ſegunda, como a parte da primeira para a parte da ſegunda. Iſto ſe faz evidente pela meſma demonſtração, que temos dado.

PROP. E. THEOR.

Se quatro grandezas forem proporcionaes; tambem convertendo ſerão proporcionaes.

Seja AB: BE:: CD: DF. Digo, que convertendo ſerá BA: AE:: DC: CF. Fig. 27.

Sendo AE: BE:: CD: DF, dividindo[a] ſerá AE: EB:: CF: FD; e invertendo[b] BE: EA:: DF: FC. Logo compondo[c] ſerá BA: AE:: DC: CF.

a. 17. 5.
b. B. 5.
c. 18. 5.

PROP. XX. THEOR.

Se eſtiverem tres grandezas de huma parte, e outras tres de outra; e eſtas a duas e duas eſtiverem na meſma razão, que as primeiras tambem a duas e duas; ſendo a primeira grandeza maior, ou igual, ou menor que a terceira, tambem a

quar-

quarta ſerá maior, ou igual, ou menor que a ſexta.

Fig. 28. 29. 30. Sejáo as tres grandezas A, B, C, e as outras tres D, E, F; e ſeja A : B :: D : E; e B : C :: E : F; e ſupponha-ſe A > C. Digo, que ſerá D > F. Mas ſe A for igual, ou menor que C, tambem D ſerá igual, ou menor que F.

Fig. 28. Sendo A > C, A terá para B, que he outra grandeza qualquer, huma razáo maior[a] que a razáo de C para a meſma grandeza B. Mas he D : E :: A : B. Logo a razáo de D para E ſerá maior[b] que a razáo de C para B. E como temos B : C :: E : F, ſerá invertendo C : B :: F : E. Mas tem-ſe demonſtrado, que a razáo de D para E he maior que a razáo de C para B. Logo a razáo de D para E he maior[c] que a razáo de F para E, e por conſequencia ſerá D > F[d].

a. 8. 5. b. 13. 5. c. Cor. 13. 5. d. 10. 5.

Fig. 29. Seja em ſegundo lugar A = C. Digo, que ſerá D = F.

Sendo A = C, ſerá A : B :: C : B[e]. Mas he A : B :: D : E; e C : B :: F : E. Logo ſerá[f] D : E :: F : E, e por conſequencia D = F[g].

e. 7. 5. f. 11. 5. g. 9. 5.

Fig. 30. Seja finalmente A < C. Digo, que ſerá D < F.

Sendo A < C, ſerá C > A. E porque pela hypotheſis e invertendo he C : B :: F : E; e B : A :: E : D; e temos C > A; ſerá pelo primeiro caſo F > D, e por conſequencia D < F.

PROP.

PROP. XXI. THEOR.

Se forem tres grandezas de huma parte, e outras tres de outra; e eſtas a duas e duas eſtiverem na meſma razão, que as primeiras tambem a duas e duas, mas em proporção perturbada; ſendo a primeira grandeza maior, ou igual, ou menor que a terceira, tambem a quarta ſerá maior, ou igual, ou menor que a ſexta.

Sejão as tres grandezas A, B, C, e as outras tres D, E, F; e ſeja A : B :: E : F; e B : C :: D : E, que he proporção perturbada. Supponha-ſe A > C. Digo, que ſerá D > F. Mas ſe A for igual, ou menor que C, tambem ſerá D igual, ou menor que F. Fig. 35.

Sendo A > C, a razão de A para B, que he outra grandeza qualquer, ſerá maior[a] que a razão de C para a meſma B. Mas temos E : F :: A : B. Logo a razão de E para F ſerá maior[b] que a razão de C para B. Sendo pois B : C :: D : E, invertendo ſerá C : B :: E : D. Mas tem-ſe demonſtrado, que a razão de E para F he maior que a razão de C para B. Logo a razão de E para F he maior[c] que a razão de E para D. Logo ſerá F < D[d], e por conſequencia D > F.

a. 8. 5.
b. 13. 5.
c. Cor. 13. 5.
d. 10. 5.

Em ſegundo lugar ſeja A = C. Digo, que ſerá D = F.

Sen-

e. 7. 5. Sendo A = C, ſerá A : B :: C : B[e]. Mas
f. 11. 5. he A : B :: E : F, e C : B :: E : D. Logo ſerá
g. 9. 5. E : F :: D[f], e por conſequencia D = F[g].

Finalmente, ſeja A < C. Digo, que ſerá D < F.

Sendo A < C, ſerá C > A. E porque pela hypotheſis, e invertendo he C : B :: E : D; e B : A :: F : E; e ſuppõe-ſe C > A; ſerá pelo primeiro caſo F > D, e por conſequencia D < F.

PROP. XXII. THEOR.

SE forem humas grandezas em hum numero qualquer de huma parte, e outras em numero igual de outra parte; e ſe eſtas tiverem a duas e duas a meſma razão, que as primeiras tambem a duas e duas; por igual eſtaráo tambem na meſma razão.

Fig. 51. Sejão primeiramente as tres grandezas A, B, C, e as outras tres D, E, F, e eſtejão eſtas a duas e duas na meſma razão, que as primeiras tambem a duas e duas, iſto he, ſeja A : B :: D : E; e B : C :: E : F. Digo, que ſerá A : C :: D : F.

Tomem-ſe as grandezas G, H equimultiplices quaeſquer de A, D; e K, L equimultiplices quaeſquer de B, E; e M, N equimultiplices quaeſquer de C, F. Como temos A : B :: D : E; e G, H ſão equimultiplices de A, D; e K, L equimultiplices de B, E; ſerá G : K ::

H:

H: L [c]. Pela meſma razão ſerá K : M : : L : N. Sendo pois as tres grandezas G, K, M, e as outras tres H, L, N, e tendo eſtas a duas e duas a meſma razão, que tem as primeiras tambem a duas e duas; ſe G for maior, ou igual, ou menor que M; tambem H ſerá maior, ou igual, ou menor que N [b]. Logo ſeráo G, H humas grandezas quaeſquer equimultiplices de A, D; e M, e N outras grandezas quaeſquer equimultiplices de C, F; ſerá A : C : : D : F [c].

a. 4. 5.
b. 20. 5.
c. def. 5. 5.

Sejáo agora as quatro grandezas A, B, C, D de huma parte, e as outras quatro E, F, G, H de outra parte; e tenháo eſtas a duas e duas a meſma razão, que tem as primeiras tambem a duas e duas, iſto he, ſeja A : B : : E : F; e B : C : : F : G; e C : D : : G : H. Digo, que ſerá A : D : : E : H. Fig. 32.

Porque as tres grandezas A, B, C, e as outras tres E, F, G tem ſempre a duas e duas reſpectivamente a meſma razão, ſerá pelo primeiro caſo A : C : : E : G. Mas he C : D : : G : H. Logo pelo meſmo caſo primeiro ſerá A : D : : E : H. Deſte modo procede ſempre a demonſtração qualquer que ſeja o numero das grandezas em huma e outra ordem dellas.

PROP. XXIII. THEOR.

SE eſtiverem humas grandezas em hum numero ſeja qualquer que for de huma parte, e outras em numero igual de outra parte; e ſe eſtas tiverem a duas e duas a mesma razão, que tem as primeiras tambem a duas e duas, mas em proporção perturbada; por igual estarão tambem na mesma razão.

Fig. 33. Sejão em primeiro lugar as tres grandezas A, B, C; e as outras tres D, E, F, as quaes estejão a duas e duas na mesma razão que as primeiras tambem a duas e duas, mas em proporção perturbada; isto he, seja A : B :: E. F; e B: C :: D: E. Digo, que será A: C :: D: F.

Tomem-se as grandezas G, H, K equimultiplices quaesquer de A, B, D; e as grandezas L, M, N equimultiplices quaesquer de C, E, F. Sendo G, H equimultiplices de A, B,
a. 15. 5. será A: B :: G: H [a]. Pela mesma razão deve ser E : F :: M: N. Mas he A: B :: E: F. Lo-
b. 11. 5. go será G: H :: M: N [b]. E porque temos B: C :: D: E, e H, K são equimultiplices de B, D; e L, M equimultiplices de C, E; será H:
c. 4. 5. L :: K : M [c]. Mas tem-se demonstrado ser G: H :: M : N. Logo tendo as tres grandezas G, H, L a mesma razão, que as outras tres K, M, N a duas e duas, e em proporção perturbada; se G for maior, ou igual, ou me-
d. 21. 5. nor [d] que L, tambem K será maior, ou igual, ou menor que N. Mas G, K são equimultiplices de A, D; e L, N equimultiplices de C, F.
e. def. 5. 5. Logo será A: C :: D: F [e].

Fig. 32. Sejão agora as quatro grandezas A, B, C, D, e as outras quatro E, F, G, H, as quaes tenhão a duas e duas a mesma razão, que tem

as

as primeiras tambem a duas e duas, em proporção perturbada, de maneira que seja A: B:: G: H; e B: C:: F: G; e C: D:: F: F. Digo, que será A: D:: E: H.

Porque as tres grandezas A, B, C, e as tres F, G, H tem entre si a mesma razão em proporção perturbada; será pelo primeiro caso A: C:: F: H. Mas he C: D:: E: F. Logo tambem pelo primeiro caso será A: D:: E: H. A demonstração será a mesma em outro qualquer numero de grandezas.

PROP. XXIV. THEOR.

SE a primeira grandeza for para a segunda, como a terceira he para a quarta; e se a quinta for para a segunda, como a sexta he para a quarta; a grandeza, que se compõe da primeira e da quinta, será para a segunda, como a que se compõe da terceira e da sexta, he para a quarta.

Esteja a primeira grandeza AB para a segunda C, como a terceira DE para a quarta F; e esteja a quinta BG para a segunda C, como a sexta EH para a quarta F. Digo, que a composta AG da primeira e da quinta he para a segunda C, como a composta DH da terceira e da sexta he para a quarta F. Fig. 2.

Sendo BG: C:: EH: F; será invertendo

C : BG : : F : EH. E sendo AB : C : : DE : F; e C : BG : : F : EH; será por igual [a] AB : BG : : DE : EH. Logo compondo [b] será AG : GB : : DH : HE. Mas he GB : C : : HE : F. Logo por igual [a] será AG : C : : DH : F.

a. 22. 5.
b. 18. 5.

COROL. I. Feita a mesma supposição, que assima, será a differença entre a primeira grandeza e a quinta para a segunda, como a differença entre a terceira e a sexta he para a quarta. A demonstração procede do mesmo modo que na proposição, e sómente em lugar de compôr deve-se dividir.

COROL. 2. A verdade desta proposição fica sendo a mesma qualquer que seja o numero das grandezas, das quaes humas tem para huma certa grandeza commua as mesmas razões; que as outras tem para outra grandeza tambem commua; isto he, cada huma das primeiras tem para a mesma grandeza commua a mesma razão, que cada huma das segundas tem para outra grandeza tambem commua, como he evidente.

PROP. XXV. THEOR.

SE quatro grandezas forem proporcionaes; a maxima e a minima dellas tomadas juntas serão maiores que as outras duas tambem tomadas juntas.

Fig. 34. Sejão as quatro grandezas proporcionaes AB, CD, E, F, isto he, seja AB : CD : : E : F.

E,

E seja AB a maxima de todas, e por consequencia F a minima [a]. Digo, que AB e F tomadas juntas são maiores que CD, e E tambem tomadas juntas. a. A. e 14. 5.

Ponha-se AG = E, e CH = F. Sendo AB : CD :: E : F; e sendo AG = E, e CH = F; será AB : CD :: AG : CH. E porque a grandeza total AB he para a total CD, como a parte AG para a parte CH; será o resto GB para o resto HD, como a total AB para a total CD [b]. Mas he AB > CD. Logo será tambem GB > HD [c]. E como temos AG = E, e CH = F; serão as duas AG, F iguaes ás duas CH, E. Logo sendo GB, HD desiguaes, e sendo GB > HD, se á GB se ajuntarem as duas AG, F; e á HD se ajuntarem as duas CH, E; as duas AB, F tomadas juntas, serão maiores que as duas CD, E tambem tomadas juntas. b. 19. 5. c. A. 5.

PROP. F. THEOR.

AS razões, que se compõem de razões iguaes, são tambem iguaes.

Seja A : B :: D : E; e B : C :: E : F. Digo, que a razão composta das razões de A para B, e de B para C, isto he, pela definição da razão composta, a razão de A para C, he igual á razão de D para F, que se compõe das razões de D para E, e de E para F. Fig. 55.

Tendo as tres grandezas A, B, C, e as outras tres D, E, F entre si a duas e duas a mes-

a. 22. 5. mesma razão; será por igual[a] A: C:: D: F.

Fig. 35. Seja agora A: B :: E: F; e B: C:: D:
b. 23. 5. E. Logo por igual em proporção perturbada[b] será A: C:: D: F, isto he, a razão de A para C, que se compõe das razões de A para B, e de B para C, será igual á razão de D para F, que se compõe das razões de D para E, e de E para F. A mesma cousa se demonstra, e do mesmo modo em hum e outro caso, qualquer que seja o numero das razões propostas.

PROP. G. THEOR.

SE humas razões, a que chamo primeiras, forem iguaes a outras razões, a que chamo segundas, cada huma a cada huma; a razão que se compõe das razões, que são iguaes ás primeiras propostas, cada huma a cada huma, será igual á razão, que se compõe de outras razões iguaes ás segundas propostas, cada huma a cada huma.

Fig. 36. Seja A: B:: E: F; e C: D:: G: H. Seja tambem A: B:: K: L; e C: D :: L: M. A razão de K para M, pela definição da razão composta, se compõe das razões de K para L, e de L para M; que são iguaes ás outras de A para B, e de C para D. Seja mais E: F:: N: O; e G: H:: O: P. A razão de N para P he a composta das duas de N para O, e

de

de O para P, que são iguaes ás razões de E para F, e de G para H. Deve-se demonstrar, que a razão de K para M he igual á razão de N para P, ou que he K: M:: N: P.

Sendo K: L:: A: B; e A: B:: E: F; e E: F:: N: O; será K: L:: N: O. Tambem sendo L: M:: C: D; e C: D:: G: H; e G: H:: O: P; será L: M:: O: P. Logo por igual[a] deve ser K: M:: N: P. a. 22. 5.

PROP. H. THEOR.

SE huma razão composta de algumas razões for igual á outra razão tambem composta de outras; e se huma razão das primeiras, ou a razão, que se compõe de algumas razões das primeiras, for igual a huma razão das segundas, ou igual á razão, que he a composta de algumas das segundas; a razão, que fica das primeiras, ou a razão composta daquellas razões, que ficão das primeiras, será igual á razão, que fica das segundas, ou igual á razão, que se compõe das razões, que ficão das segundas.

Sejão as razões de A para B, de B para C, de C para D, de D para E, e de E para F; e as outras razões de G para H, de H para K, de K para L, e de L para M. E seja a razão de A para F, que se compõe[a] das primeiras Fig. 37. a. def. da razão composta.

ras

ras razões propoſtas, igual á razão de G para M, que he a composta [a] das ſegundas razões. Tambem a razão de A para D, que he a composta das razões de A para B, de B para C, e de C para D, ſeja igual á razão de G para K, que ſe compõe das razões de G para H, e de H para K. Digo, que a razão de D para F, que he a composta das razões de D para E, e de E para F, que são as que reſtão das primeiras razões propoſtas, he igual á razão de K para M, que ſe compõe das razões de K para L, e de L para M, que são as reſiduas das outras razões tambem propoſtas.

a. def. da razão composta.

Sendo pela hypotheſis A: D:: G: K, ſerá invertendo [b] D: A:: K: G. Mas he A: F:: G: M. Logo por igual [c] ſerá D: F:: K: M.

b. B. 5.
c. 22. 5.

PROP. K. THEOR.

SE forem humas razões em hum numero qualquer, as quaes chamo primeiras, e outras razões tambem em outro numero qualquer, as quaes chamo ſegundas; e ſe a razão composta das razões iguaes ás primeiras compoſtas, cada huma a cada huma, for igual á razão composta das razões iguaes ás ſegundas, cada huma a cada huma; e huma razão das primeiras, ou a razão composta de razões iguaes a outras tantas das primeiras, cada huma a cada huma, for igual a hu-

huma razão das ſegundas, ou igual á razão composta de razões iguaes a outras tantas das ſegundas, cada huma a cada huma; a razão, que reſta das primeiras, ou, ſendo mais razões, a razão compoſta de razões iguaes áquellas, que reſtão das primeiras, cada huma a cada huma, ſerá igual á razão, que fica das ſegundas; ou ſe forem mais razões, ſerá igual á razão compoſta de razões iguaes áquellas, que ficão das ſegundas, cada huma a cada huma.

Sejão as razões de A para B, de C para D, e de E para F as razões, que chamo primeiras; e as que chamo ſegundas, ſejão as razões de G para H, de K para L, de M para N, de O para P, e de Q para R. Seja pois A: B:: S: T; e C: D:: T: V; e E: F:: V: X. Pela definição da razão compoſta, a razão de S para X ſerá a que ſe compõe das razões de S para T, de T para V, e de V para X, que são iguaes ás razões de A para B, de C para D, e de E para F, cada huma a cada huma. Seja tambem G: H:: Y: Z; e K: L:: Z: a; e M: N:: a: b; e O: P:: b: c; e Q: R:: c: d. A razão de Y para d, pela meſma definição ſerá a razão compoſta das razões de Y para Z, de Z para a, de a para b, de b para c, e de c para d, que são iguaes ás razões de G para H, de K para L, de M para N, de Fig. 38.

O

O para P, e de Q para R, cada huma a cada huma. Logo pela hypothesis será S : X :: Y : d. Seja agora a razão de A para B, ou a razão de S para T, isto he, huma das razões primeiras, igual á razão de e para g, que se compõe das razões de e para f, e de f para g, as quaes razões, pela hypothesis, são iguaes ás outras de G para H, e de K para L, que pertencem ás segundas razões propostas. Seja tambem a razão de h para l a composta das razões de h para k, e de k para l, que são iguaes ás razões, que restão das primeiras, isto he, ás razões de C para D, e de E para F; e a razão de m para p seja a composta das razões de m para n, de n para o, e de o para p, que são iguaes ás razões, que ficão das segundas, cada huma a cada huma, isto he, iguaes ás razões de M para N, de O para P, e de Q para R. Isto tudo supposto, digo, que a razão de h para l he igual á razão de m para p. Deve-se pois demonstrar, que he h : l :: m : p.

Sendo e : f :: G : H; e G : H :: Y : Z; será e : f :: Y : Z. E sendo f : g :: K : L; e K : L :: Z : a; será f : g :: Z : a. Logo será por igual e : g :: Y : a. Mas pela pypothesis he A para B, ou S para T, como e para g. Logo será S : T :: Y : a; e invertendo T : S :: a : Y. Mas temos S : X :: Y : d. Logo por igual será T : X :: a : d. Tambem sendo h : k :: C : D; e C : D :: T : V; será h : k :: T : V. E sendo k : l :: E : F; e E : F :: V : X; será k : l :: V : X. Logo será por igual h : l :: T : X.

X. Com a meſma demonſtração ſe faz evidente, que deve ſer m : p : : a : d. Mas temos já demonſtrado, que he T : X : : a : d. Logo ſerá[a] h : l : : m : p. a. 11. 5.

Os Geometras, tanto antigos, como modernos, por brevidade coſtumão incluir eſtas duas propoſições G, e K nas outras duas F, e H. Eu julguei ſer couſa util, e conveniente demonſtrar em que ſentido iſto poſſa ſer aſſim, pelo uſo aſsás frequente, que os meſmos Geometras fazem deſtas propoſições.

LI-

LIVRO VI.
DOS
ELEMENTOS
DE
EUCLIDES.

DEFINIÇÕES.

I.

Fig. 1. AS figuras rectilineas semelhantes são aquellas, que tendo os angulos iguaes, cada hum a cada hum, tambem tem proporcionaes entre si os lados, que comprehendem os ditos angulos iguaes.

II.

Figuras reciprocas, fallando de triangulos e parallelogrammos, são aquellas, que tem ao redor de angulos iguaes os lados proporcionaes, de maneira que hum lado de huma figura seja para hum lado da outra, como o outro lado desta he para o outro lado da primeira.

III.

III.

Huma linha recta se diz dividida em extrema e media razão, quando toda a linha he para o segmento maior, como este segmento maior he para o segmento menor.

IV.

A altura de huma figura, qualquer que ella seja, he a linha recta, que do vertice da figura cahe perpendicularmente sobre a baze. Fig. 2.

PROP. I. THEOR.

OS triangulos, e parallelogrammos, que tem a mesma altura, estão entre si como as bazes.

Tenhão os triangulos ABC, ACD, e os parallelogrammos EC, CF a mesma altura, que he a perpendicular, que do ponto A cahe sobre a recta BD. Digo, que a baze BC he para a baze CD, como o triangulo ABC he para o triangulo ACD; e tambem como o parallelogrammo EC he para o parallelogrammo CF. Fig 3.

Produza-se a recta BD de huma e outra parte para os pontos H, L; e tomadas as partes BG, GH em hum numero, seja qualquer que for; e sendo cada huma dellas igual á baze BC; e as partes DK, KL, cada huma igual á baze CD, tirem-se as rectas AG, AH, AK, AL. Visto serem as rectas CB, BG, GH iguaes entre si, tambem serão iguaes [a] os triangu- a. 38. 1.

gulos AHG, AGB, ABC. Logo como a baze HC he multiplice da baze BC, do meſmo modo o triangulo AHC ſerá multiplice do triangulo ABC. Pela meſma razão, como a baze LC he multiplice da baze CD, do meſmo modo o triangulo ALC deve ſer multiplice do triangulo ACD. Mas ſe a baze HC for maior, ou igual, ou menor que a baze CL, tambem o triangulo AHC ſerá maior, ou igual, ou menor que o triangulo ALC. Logo ſendo a baze HC, e o triangulo AHC humas grandezas equimultiplices quaeſquer da baze BC, e do triangulo ABC; e a baze CL, e o triangulo ALC outras grandezas quaeſquer equimultiplices da baze CD, e do triangulo ACD; ſerá
b. def. 5. 5. a baze BC para a baze CD, como [b] o triangulo ABC he para o triangulo ACD.

E porque o parallelogrammo EC he o do-
c. 41. 1. bro [c] do triangulo ABC; e o parallelogrammo CF o dobro [c] do triangulo ACD; e porque as partes tem entre ſi a meſma razão, que as
d. 15. 5. grandezas equimultiplices dellas [d]; o triangulo ABC ſerá para o triangulo ACD, como o parallelogrammo EC he para o parallelogrammo CF. Logo tendo nós demonſtrado, que a baze BC he para a baze CD, como o triangulo ABC para o triangulo ACD; e que o triangulo ABC he para o triangulo ACD, como o parallelogrammo EC para o parallelogrammo CF; a baze BC ſerá para a baze CD, como [e] o parallelogrammo EC he para o parallelogrammo CF.

Co-

COROL. Desta Proposição se infere, que os triangulos, e parallelogrammos, que tem alturas iguaes, estão entre si na razão das bazes.

Porque dispostas as figuras de maneira que as bazes dellas estejão na mesma linha recta, e lançadas dos vertices dos triangulos humas perpendiculares sobre as bazes dos mesmos triangulos; a linha recta, que passar pelos vertices, será parallela á outra recta, sobre a qual se ajustão as bazes [f], por se supporem iguaes entre si as alturas dos triangulos, e por consequencia iguaes as ditas perpendiculares, as quaes além disto são tambem parallelas. Feita pois a mesma construcção, a demonstração se fará do mesmo modo que assima. f. 33. 1.

PROP. II. THEOR.

SE huma linha recta for tirada parallela a qualquer lado de hum triangulo; esta cortará proporcionalmente os outros dous lados do mesmo triangulo, ou cortará os mesmos lados produzidos. E se dous lados de hum triangulo, ou os mesmos lados produzidos forem cortados proporcionalmente por huma linha recta; esta será parallela ao terceiro lado.

Seja conduzida a recta DE parallela ao lado BC do triangulo ABC. Digo, que será BD : DA :: CE : EA. Fig. 4.

Ti-

a. 37. 1. Tirem-se as rectas BE, CD. Serão iguaes[a] os triangulos BDE, CDE, por estarem sobre a mesma baze DE, e entre as mesmas parallelas DE, BC. Mas as grandezas iguaes tem para
b. 7. 5. outra qualquer grandeza a mesma razão [b]. Logo o triangulo BDE será para o triangulo ADE, como o triangulo CDE he para o mesmo triangulo ADE. Mas o triangulo BDE he
c. 1. 6. para o triangulo ADE, como [c] BD para DA, porque os triangulos BDE, ADE tendo a mesma altura, que he a perpendicular, que do ponto E cahe sobre AB, estão entre si como as bazes; e pela mesma razão o triangulo CDE he para o triangulo ADE, como CE para EA.
d. 11. 5. Logo será BD : DA :: CE : EA [d].

Sejão agora os lados AB, AC do triangulo ABC, ou os mesmos lados produzidos, cortados proporcionalmente nos pontos D, E pela recta DE, isto he, seja BD : DA :: CE : EA. Digo, que a recta DE he parallela a BC.

Tirem-se as rectas BE, CD. Sendo BD : DA :: CE : EA; e BD para DA como o triangulo BDE para o triangulo ADE [c]; e tambem CE para EA, como o triangulo CDE para o triangulo ADE; será o triangulo BDE para o triangulo ADE, como o triangulo CDE he para o mesmo triangulo ADE. Logo visto ter cada hum dos triangulos BDE, CDE a mesma razão para o triangulo ADE; serão os triangu-
e. 9. 5. los BDE, CDE iguaes [e] entre si. Mas tambem estão postos sobre a mesma baze BC. Logo de-
f. 39. 1. vem estar tambem entre as mesmas parallelas [f], e

por

por consequencia a recta DE he parallela ao lado BC.

PROP. III. THEOR.

SE hum angulo de hum triangulo for dividido em partes iguaes por huma recta, que divida ao mesmo tempo a baze em dous segmentos; estes segmentos estarão entre si na razão dos outros dous lados do triangulo. E se os segmentos da baze tiverem a mesma razão, que tem os outros lados do triangulo; tambem a recta, que do vertice do triangulo for tirada para o ponto da secção, que separa os ditos segmentos, dividirá igualmente o angulo, que fica opposto á mesma baze.

Seja o triangulo ABC, cujo angulo BAC esteja dividido em partes iguaes pela recta AD. Digo, que será BD : DC : : BA : AC. Fig. 5.

Pelo ponto C seja conduzida a recta CE parallela [a] a DA, e o lado BA produzido concorra com ella no ponto E. Porque a recta AC corta as parallelas AD, EC, será o angulo ACE = CAD angulo alterno [b]. Mas pela hypothesis he CAD = BAD. Logo tambem será BAD = ACE. E como a recta BAE corta as parallelas AD, EC, será o angulo externo BAD = AEC interno e opposto. Mas temos

a. 31. 1.
b. 29. 1.

O vis-

visto ser ACE = BAD. Logo será ACE =
c. 6. 1. AEC, e por consequencia o lado AE igual[c] ao lado AC. Sendo pois a recta AD parallela
d. 2. 6. ao lado EC do triangulo BCE, será[d] BD : DC :: BA : AE. Mas temos AE = AC. Logo
e. 7. 5. será tambem BD : DC :: BA : AC[e].

Seja agora BD : DC :: BA : AC. Tire-se a recta AD. Digo, que o angulo BAC fica dividido em partes iguaes pela recta AD.

Feita a mesma construcção que assima, como temos pela hypothesis BD : DC :: BA : AC; e tambem BD : DC :: BA : AE[d], por ser AD parallela ao lado EC do triangulo BCE;
f. 11. 5. será[f] BA : AC :: BA : AE. Logo deve ser AC =
g. 9. 5. AE[g], e por consequencia o angulo AEC =
h. 5. 1. ACE[h]. Mas he AEC = BAD[b]; e ACE =
b. 29. 1. CAD angulo alterno. Logo será BAD = CAD, e assim o angulo BAC ficará dividido em partes iguaes pela recta AD.

PROP. A. THEOR.

PRoduzido hum lado de hum triangulo, se o angulo externo for dividido em partes iguaes por huma recta, que chegue a cortar a baze tambem produzida; os segmentos da baze assim produzida, que ficão entre as extremidades da mesma baze, e a dita recta, que divide o angulo, terão entre si a mesma razão, que tem os outros lados do triangulo. E

se

ſe os ſegmentos da baze tiverem a meſma razão dos outros lados do triangulo; a recta, que do vertice do triangulo for tirada para a secção da baze, dividirá em partes iguaes o angulo externo do triangulo.

Seja o triangulo ABC, e a recta AD dividindo em partes iguaes o angulo externo CAE do triangulo ABC; corte tambem a baze BC produzida no ponto D. Digo, que ſerá BD: DC:: BA: AC. Fig. 6.

Pelo ponto C ſeja conduzida a recta CF parallela [a] a AD. A recta AC cortando as parallelas AD, FC, ſerá o angulo ACF = CAD angulo alterno [b]. Mas pela hypotheſis he CAD = DAE. Logo ſerá DAE = ACF. E como a recta FAE corta as parallelas AD, FC, ſerá o angulo externo DAE = CFA interno e oppoſto [b]. Mas tem-ſe demonſtrado ſer ACF = DAE. Logo ſerá ACF = CFA, e por conſequencia o lado AF igual [c] ao lado AC. E ſendo a recta AD parallela ao lado FC do triangulo BCF; ſerá [d] BD: DC:: BA: AF. Mas he AF = AC. Logo tambem ſerá BD: DC:: BA: AC.

a. 31. 1. b. 29. 1. c. 6. 1. d. 2. 6.

Supponha-ſe agora ſer BD: DC:: BA: AC, e tire-ſe a recta AD. Digo, que o angulo CAE fica dividido em partes iguaes pela recta AD.

Porque feita a meſma conſtrucção que aſſima, ſendo BD: DC:: BA: AC; e ſendo tam-

d. 2. 6. bem BD : DC :: BA : AF[d], por ſer a recta AD parallela ao lado FC do triangulo BCF;
e. 11. 5. ſerá BA : AC :: BA : AF[e]. Logo ſerá AC =
f. 95. AF[f], e por conſequencia ſeráõ iguaes os angulos AFC, ACF. Mas temos AFC = EAD angulo externo, e ACF = CAD angulo alterno. Logo ſerá EAD = CAD, e aſſim o angulo CAE fica dividido em partes iguaes pela recta AD.

PROP. IV. THEOR.

NOs triangulos equiangulos os lados, que formão angulos iguaes, são proporcionaes; e os lados oppoſtos a angulos iguaes são homologos.

Sejão os triangulos equiangulos ABC,
Fig. 7. DCE, cujos angulos ABC, DCE; ACB,
a. 32. 1. DEC ſejão iguaes. Do meſmo modo ſeráõ iguaes[a] os angulos BAC, CDE. Digo, que nos triangulos ABC, DCE os lados, que formão angulos iguaes, são proporcionaes, e que os lados oppoſtos aos angulos iguaes são homologos.

Ponha-ſe o triangulo DCE de maneira, que
b. 22. 1. o lado CE eſteja em direitura[b] com o lado BC do triangulo ABC. Como os angulos ABC,
c. 17. 1. ACB são menores que dous rectos[c], e temos ACB = DEC; ſeráõ os angulos ABC, DEC menores que dous rectos, e por conſequencia as duas rectas BA, ED produzidas devem finalmente
d. ax. 12. 1. concorrer[d]. Produzão-ſe pois e con-

cor-

corrão no ponto F. Sendo o angulo DCE = ABC, as rectas BF, CD serão parallelas [e]. Tambem sendo ACB = DEC, a recta AC será parallela [e] a FE. Logo a figura FACD he hum parallelogrammo, e por consequencia deve ser AF = CD, e AC = FD [f]. E porque a recta AC he parallela ao lado FE do triangulo FBE; será [g] BA : AF :: BC : CE. Mas he AF = CD. Logo será BA : CD :: BC : CE [h]; e permutando AB : BC :: CD : CE. Além disto sendo CD parallela a BF, será BC : CE :: FD : DE [g]. Mas he FD = AC. Logo será BC : CE :: AC : DE; e permutando BC : CA :: CE : ED. Logo tendo-se já demonstrado ser AB : BC :: DC : CE; e BC : CA :: CE : ED; será por igual [i] BA : AC :: CD : DE.

e. 28. 1.
f. 34. 1.
g. 2. 6.
h. 7. 5.
i. 22. 5.

PROP. V. THEOR.

SE dous triangulos tiverem os lados proporcionaes, serão equiangulos; e serão iguaes aquelles angulos, aos quaes ficarem oppostos os lados homologos.

Fig. 8.

Sejão os dous triangulos ABC, DEF, que tenhão os lados proporcionaes, isto he, seja AB : BC :: DE : EF; e BC : CA :: EF : FD; e por consequencia por igual BA : AC :: ED : DF. Digo, que os triangulos ABC, DEF são equiangulos; e que os angulos oppostos aos lados homologos são iguaes, isto he, o angulo ABC = DEF; BCA = EFD; e BAC = EDF.

Fa-

a. 23. 1. Faça-se com a linha recta EF[a] no ponto E o angulo FEG=ABC, e no ponto F o angulo EFG=BCA. Será BAC=EGF[b]; e
b. 32. 1.
assim os triangulos ABC, EGF serão equiangulos. Logo será AB: BC:: GE: EF[c]. Mas
c. 4. 6.
he pela hypothesis AB : BC :: DE : EF. Logo será DE : EF :: GE : EF[d]. Como pois
d. 11. 5.
cada huma das rectas DE, GE tem para EF a mesma razão, será DE=GE[e]. Do mesmo
e. 9. 5.
modo deve ser DF=FG; e assim nos triangulos EDF, EGF, sendo DE=GE, e DF=FG, e o lado EF commum, será o angulo DEF=GEF, e DFE=GFE, e EDF=EGF[f]. E porque temos DEF=GEF, e GEF
f. 8. 1.
=ABC, será ABC=DEF. Pela mesma razão será ACB=DFE, e A=D. Logo os triangulos ABC, DEF são equiangulos.

PROP. VI. THEOR.

SE dous triangulos tiverem hum angulo igual a outro angulo, e proporcionaes os lados, que formão estes angulos iguaes; serão equiangulos os triangulos, e os angulos, que ficão oppostos aos lados homologos, serão iguaes.

Fig. 9. Sejão os dous triangulos ABC, DEF, e seja o angulo BAC do primeiro igual ao angulo EDF do segundo. Sejão tambem proporcionaes os lados que fazem os ditos angulos iguaes, isto he, seja BA: AC:: ED: DF. Digo,

go, que os triangulos ABC, DEF são equiangulos, e que o angulo ABC he igual ao angulo DEF, e ACB=DFE.

Com a recta DF e no ponto D faça-se[a] o angulo FDG igual a hum dos dous BAC, EDF; e com a mesma recta DF e no ponto F faça-se tambem DFG=ACB. Será o terceiro angulo B igual[b] ao terceiro G. Logo os triangulos ABC, DGF são equiangulos, e por consequencia deve ser[c] BA : AC :: GD: DF. Mas temos pela supposição BA : AC :: ED: DF. Logo será ED: DF :: GD: DF[d], e assim será ED=DG[e]. Mas nos triangulos DEF, DGF he commum o lado DF; e são iguaes os angulos EDF, GDF. Logo será a baze EF igual[f] á baze FG; e o triangulo EDF igual ao triangulo GDF; e os mais angulos iguaes cada hum a cada hum dos outros angulos, segundo ficão oppostos a lados iguaes. Logo será o angulo DFG=DFE; e G=E. Mas he DFG=ACB. Logo será ACB=DFE. Mas temos supposto ser BAC=EDF. Logo o terceiro angulo B he igual[b] ao terceiro E; e os triangulos ABC, DEF são equiangulos.

a. 23. 1.
b. 32. 1.
c. 4. 6.
d. 11. 5.
e. 9. 5.
f. 4. 1.

PROP. VII. THEOR.

SE dous triangulos tiverem hum angulo igual a hum angulo, e proporcionaes os lados, que formão os outros dous angulos; e se estes angulos em ambos os triangulos forem juntamente ou me-

menores ou não menores que dous rectos; ou tambem se hum delles em cada triangulo for recto; os triangulos serão equiangulos, e os angulos formados pelos lados proporcionaes serão iguaes.

Fig. 10. 11. 12. Sejão os dous triangulos ABC, DEF, que tenhão os angulos BAC, EDF iguaes entre si, e sejão proporcionaes os lados, que formão os angulos ABC, DEF, de maneira que seja AB:
Fig. 10. BC :: DE : EF. Seja primeiramente agudo, ou menor que hum recto cada hum dos angulos C, F. Digo, que os triangulos ABC, DEF são equiangulos, e que o angulo ABC he igual ao angulo DEF, e C = F.

Supposto serem desiguaes os angulos ABC, DEF, hum delles ha de ser maior. Seja ABC o maior. Sobre a recta AB no ponto B faça-
a. 23. 1. se[a] o angulo ABG = DEF. Sendo o angulo A = D, e ABG = DEF, será tambem AGB =
b. 32. 1. DFE[b]. Logo os triangulos ABG, DEF são equiangulos, e por consequencia deve ser AB:
c. 4. 6. BG :: DE : EF[c]. Mas pela hypothesis temos DE : EF :: AB : BC. Logo será AB : BC ::
d. 11. 5. AB : BG[d]. Logo tendo AB para cada huma das rectas BC, BG a mesma razão, será BC =
e. 9. 5. BG[e], e o angulo BGC = BCG[f]. Mas BCG
f. 5. 1. se tem supposto menor que hum recto. Logo
g. 13. 1. tambem BGC será menor que hum recto, e assim AGB será maior que hum recto[g]. Mas tem-se demonstrado AGB = F. Logo F he maior que hum recto, o que não póde ser,

por-

porque o temos ſuppoſto menor que hum recto. Logo não são deſiguaes os angulos ABC, DEF, mas ſim iguaes. Mas o angulo A he igual ao angulo D. Logo ſerá tambem C=F, e aſſim são equiangulos os triangulos ABC, DEF.

Supponha-ſe agora não menor que hum recto cada hum dos angulos, C, F. Digo, que neſte caſo tambem são equiangulos os triangulos ABC, DEF. Fig. 11.

Feita a meſma conſtrucção que aſſima, do meſmo modo ſe póde demonſtrar BC=BG, e o angulo C=BGC. Mas o angulo C não he menor que hum recto. Logo BGC não ſerá menor que hum recto. Logo no triangulo BGC dous angulos tomados juntos não são menores que dous rectos, o que não he poſſivel [h]. Logo os triangulos ABC, DEF devem ſer equiangulos, como temos demonſtrado no caſo precedente. h. 17. 1.

Seja finalmente recto hum dos angulos C, F, por exemplo o angulo C. Tambem digo, que os triangulos ABC, DEF são equiangulos. Fig. 12.

Suppoſto não ſer aſſim, ſobre a recta AB no ponto B faça-ſe o angulo ABG=DEF. Provar-ſe-ha, como no primeiro caſo, ſer a recta BG=BC, e o angulo BCG=BGC. Mas BCG he recto. Logo BGC he tambem recto [f]. Logo no triangulo BGC ha dous angulos, os quaes tomados juntos não são menores que dous rectos, o que não póde ſer [h]. Logo os triangulos ABC, CEF são equiangulos. f. 5. 1.

PROP.

PROP. VIII. THEOR.

SE do angulo recto de hum triangulo rectangulo for tirada huma linha recta perpendicularmente sobre a baze; os triangulos assim feitos de huma e outra parte da perpendicular serão semelhantes ao triangulo total, e tambem semelhantes entre si.

Fig. 13. Seja o triangulo rectangulo ABC, cujo angulo BAC seja recto. Do ponto A esteja tirada a recta AD perpendicular sobre a baze BC. Digo, que os triangulos ABD, ADC são semelhantes ao triangulo total ABC, e tambem semelhantes entre si.

Sendo o angulo BAC = ADB, por ser hum e outro recto; e sendo o angulo B commum aos dous triangulos ABC, ABD; será o terceiro ACB igual[a] ao terceiro BAD. Logo os triangulos ABC, ABD são equiangulos, e por consequencia, sendo proporcionaes os lados, que fazem os angulos iguaes[b], são os mesmos triangulos ABC, ABD semelhantes[c]. Com o mesmo discurso se prova serem tambem semelhantes os triangulos ADC, ABC.

a. 32. 1.
b. 4. 6.
c. def. 1. 6.

Digo mais, que os triangulos ABD, ADC são semelhantes entre si.

Como os angulos rectos BDA, ADC são iguaes; e se tem demonstrado BAD = C; será o terceiro angulo B igual[a] ao terceiro DAC.

Lo-

Logo os triangulos ABD, ADC são equiangulos, e por consequencia semelhantes[c]. c. def. 1. 6.

Corol. Disto se póde colligir, que em hum triangulo rectangulo a perpendicular, que do angulo recto cahe sobre a baze do mesmo triangulo, he media proporcional entre os segmentos da baze; e que cada hum dos lados do triangulo total he huma media proporcional entre a baze, e o segmento da baze, que fica da mesma parte do lado. Porque nos triangulos equiangulos BDA, ADC he BD : DA :: DA : DC[b]; e nos triangulos tambem equiangulos ABC, DBA he BC : BA :: BA : BD[b]; e finalmente nos triangulos equiangulos ABC, DAC he BC : CA :: CA : CD[b]. b. 4. 6.

PROP. IX. PROB.

Dada huma linha recta, cortar della qualquer parte, que se quizer.

Seja AB a linha recta dada. Deve-se cortar da recta AB huma parte qualquer, que for pedida della. Fig. 14.

Tire-se do ponto A a recta AC, que faça com a outra dada AB hum angulo qualquer que for. Na recta AC tomado o ponto D, como quizermos, ponha-se AC multiplice de AD do mesmo modo que a recta dada AB he multiplice da parte, que se deve cortar della. Tire-se a recta BC, e pelo ponto D faça-se passar DE parallela a BC. Será a parte AE a que se pede.

Co-

Como no triangulo ABC a recta ED he parallela ao lado BC; será CD : DA :: BE :
a. 2. 6. EA [a]; e compondo [b], CA : AD :: BA : AE.
b. 18. 5. Mas CA he huma grandeza multiplice de AD. Logo tambem BA será multiplice de AE, e do
c. D. 5. mesmo modo [c]. Logo AE será a mesma parte de AB, como AD o he de AC. Logo AE he a parte, que se deve cortar da recta dada AB, e por consequencia de huma linha recta dada temos cortado aquella parte, que se pedia.

PROP. X. PROB.

Dividir huma linha recta dada do mesmo modo, que outra linha recta está dividida.

Fig. 15. Seja dada a linha recta AB, e a outra AC dividida de qualquer modo que for. Deve-se dividir a recta AB assim como está dividida a recta AC.

Esteja a recta AC dividida nos pontos D, E. Ponhão-se as rectas AB, AC de maneira que fação entre si hum angulo, como se quizer, no ponto A; e tirada a recta BC, a esta pelos pontos D, E sejão conduzidas as paral-
a. 31. 1. lelas [a] DF, EG; e tambem pelo ponto D a recta DHK parallela a AB. As figuras FH, HB serão parallelogrammos, e assim será DH =
b. 34. 1. FG, e HK = GB [b]. No triangulo DKC, sendo HE parallela ao lado KC, será CE : ED ::
c. 2. 6. KH : HD [c]. Mas temos KH = BG, e HD = GF.

GF. Logo será CE : ED :: BG : GF. Tambem no triangulo AGE, sendo FD parallela ao lado EG, será ED : DA :: GF : FA. Mas temos demonstrado ser CE : ED :: BG : GF. Logo será CE : ED :: BG : GF; e ED : DA :: GF : FA. Logo temos dividido a recta AB, assim como estava dividida a outra recta dada AC.

PROP. XI. PROB.

DAdas duas linhas rectas, achar-lhes a terceira proporcional.

Sejão dadas as rectas AB, AC, as quaes Fig. 16.
fação entre si hum angulo, como quizermos, no ponto A. He preciso achar a terceira recta proporcional.

Produzão-se as rectas AB, AC para D e E; e feita BD=AC, tire-se BC, e a esta pelo ponto D conduza-se a parallela[a] DE. Visto ser no triangulo ADE a recta BC parallela ao lado DE; será AB : BD :: AC : CE[b]. Mas he BD=AC. Logo tambem será AB : AC :: AC : CE, e por consequencia temos achado a recta CE terceira proporcional a respeito das duas linhas rectas dadas AB, AC.

a. 31. 2.
b. 2. 6.

PROP. XII. PROB.

DAdas tres linhas rectas, achar a quarta proporcional.

Se-

Fig. 17. Sejão dadas as tres linhas rectas A, B, C. Deve-se achar a quarta proporcional.

Ponhão-se as duas rectas DE, DF em hum angulo, qualquer que for, EDF. Na recta DE tome-se DG = A, e GE = B; e na recta DF tome-se DH = C. Tire-se a recta GH, e a esta
a. 31. 1. pelo ponto E conduza-se a parallela [a] EF. Como no triangulo DEF a recta GH he paralle-
b. 2. 6. la ao lado EF, será DG : GE :: DH : HF [b]. Mas he DG = A, GE = B, e DH = C. Logo tambem será A : B :: C : HF, e assim temos achado a recta HF quarta proporcional a respeito das tres linhas rectas dadas A, B, C.

PROP. XIII. PROB.

DAdas duas linhas rectas, achar entre ellas huma media proporcional.

Fig. 18. Sejão dadas as rectas AB, BC. Havemos de achar entre as rectas AB, BC huma media proporcional.

Ponhão-se as rectas AB, BC em direitura huma com outra, e sobre a total AC como diametro descreva-se o semicirculo ADC; e do ponto B levantada a recta BD perpendicular-
a. 11. 1. mente [a] sobre AC, sejão tiradas as rectas AD, DC. O angulo ADC, que existe no semicir-
b. 31. 3. culo ADC, he recto [b]. E como no triangulo rectangulo ADC do angulo recto em D cahe a recta DB perpendicularmente sobre a baze
c. Cor. 8. 6. AC; será DB media proporcional [c] entre os

seg-

ſegmentos da baze AB, BC. Logo entre as duas rectas propoſtas AB, BC temos achado a media proporcional DB.

PROP. XIV. THEOR.

NOs parallelogrammos iguaes ſe hum angulo de hum for igual a hum angulo do outro; os lados, que formão eſtes angulos iguaes, ſerão reciprocamente proporcionaes. Mas os parallelogrammos, que tem hum angulo igual a outro angulo, do modo que temos dito, e reciprocamente proporcionaes os lados, que fazem os ditos angulos iguaes, são iguaes.

Sejão os parallelogrammos iguaes AB, BC, e tenhão os angulos em B tambem iguaes. Conſiderem-ſe os lados DB, BE poſtos em direitura hum com outro. Eſtarão do meſmo modo em direitura hum de outro tambem os lados FB, BG[a]. Digo, que nos parallelogrammos AB, BC os lados, que formão os angulos iguaes DBF, GBE são reciprocamente proporcionaes, iſto he, que deve ſer DB : BE : : GB : BF. Fig. 19. a. 14. 1.

Complete-ſe o parallelogrammo FE. Como os parallelogrammos AB, BC são iguaes; cada hum delles terá a meſma razão para o parallelogrammo FE, e por conſequencia ſerá AB : FE : : BC : FE[b]. Mas he AB : FE : : DB : BE[c]; b. 7. 5. c. 1. 6.

c. 1. 6. e BC: FE :: GB: BF [c]. Logo ſerá DB: BE :: d. 11. 5. GB: BF [d]. Logo nos parallelogrammos AB, BC os lados, que formão os angulos iguaes DBF, GBE, são reciprocamente proporcionaes.

Supponha-ſe agora, que os lados, que fazem os angulos iguaes, são reciprocamente proporcionaes, iſto he, que he DB: BE :: GB: BF. Digo, que os parallelogrammos AB, BC são iguaes.

Sendo DB: BE :: GB: BF pela hypotheſis; e tambem ſendo DB: BE :: AB: FE [c]; e GB: BF :: BC: FE [c]; ſerá AB: FE :: BC: FE [d]. Logo o parallelogrammo AB he igual ao e. 9. 5. parallelogrammo BC [e].

PROP. XV. THEOR.

NOs triangulos iguaes, ſe hum angulo de hum for igual a hum angulo do outro; os lados, que formão eſtes angulos iguaes, ſerão reciprocamente proporcionaes. Mas os triangulos, que tem hum angulo igual a outro angulo, aſſim como temos dito, e reciprocamente proporcionaes os lados, que formão os angulos iguaes, são tambem iguaes.

Fig. 20. Sejão os triangulos iguaes ABC, ADE, e que tenhão os angulos BAC, DAE iguaes. Digo, que nos triangulos BAC, DAE os lados,

que

que comprehendem os angulos iguaes BAC, DAE, são reciprocamente proporcionaes, isto he, que deve ser CA: AD:: EA: AB.

Ponhão-se os triangulos BAC, DAE, de maneira que esteja o lado CA em direitura com o lado AD. Estará tambem EA em direitura com AB [a]. Tire-se a recta BD. Sendo pela hypothesis iguaes os triangulos ABC, ADE, cada hum delles deve ter a mesma razão para o triangulo ABD, e assim será CAB: BAD:: EAD: DAB [b]. Mas he CAB: BAD:: CA: AD [c]; e EAD: DAB:: EA: AB [c]. Logo será CA: AD:: EA: AB [d], e por consequencia nos triangulos iguaes ABC, ADE são reciprocamente proporcionaes os lados, que fazem os angulos BAC, DAE tambem iguaes.

a. 14. 1. b. 7. 5. c. 1. 6. d. 11. 5.

Nos triangulos ABC, ADE sejão agora reciprocamente proporcionaes os lados, que formão os angulos iguaes BAC, DAE, isto he, seja CA: AD:: EA: AB. Digo, que os triangulos ABC, ADE são iguaes.

Porque tirada a recta BD, sendo CA: AD:: EA: AB; e sendo CA: AD:: BAC: BAD [c]; e tambem EA: AB:: EAD: BAD [c]; será BAC: BAD:: EAD: BAD. Logo será o triangulo ABC igual [e] ao triangulo ADE.

e. 9. 5.

PROP. XVI. THEOR.

SE quatro linhas rectas forem proporcionaes; o rectangulo comprehendido pelas duas extremas será igual ao rectangulo comprehendido pelas duas medias. E se o rectangulo comprehendido pelas extremas for igual ao rectangulo comprehendido pelas medias; as quatro linhas rectas serão proporcionaes.

Fig. 21. Sejão as quatro linhas rectas proporcionaes AB, CD, E, F, isto he, seja AB : CD :: E : F. Digo, que o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, F, he igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas CD, E.

Dos pontos A, C sejão conduzidas as rectas AG, CH perpendicularmente [a] sobre as outras AB, CD; e feita AG = F, e CH = E, completem-se os parallelogrammos BG, DH. Sendo AB : CD :: E : F; e tambem sendo E = CH, e F = AG; será AB : CD :: CH : AG [b]. Logo nos parallelogrammos BG, DH os lados, que comprehendem angulos iguaes, são reciprocamente proporcionaes. Logo os mesmos parallelogrammos BG, DH são iguaes [c]. Mas o parallelogrammo BG he comprehendido pelas rectas AB, F, por ser AG = F; e o parallelogrammo DH he comprehendido pelas rectas CD, E, por ser CH = E. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, F he igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas CD, E.

a. 11. 1.
b. 7. 5.
c. 14. 6.

Supponhamos agora, que o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, F he igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas CD, E. Digo, que as quatro rectas AB, CD, E, F são proporcionaes, isto he, AB : CD :: E : F.

Re-

Repetida a mesma construcção que assima, como o rectangulo comprehendido pelas rectas AB, F se suppõe igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas CD, E, e o rectangulo BG he comprehendido pelas rectas AB, F, por ser AG = F; e o rectangulo DH he comprehendido pelas rectas CD, E, por ser CH = E; será o parallelogrammo BG igual ao parallelogrammo DH. Mas estes parallelogrammos são equiangulos; e nos parallelogrammos equiangulos e iguaes os lados, que formão os angulos iguaes, são reciprocamente proporcionaes [c]. Logo será AB : CD :: CH : AG. Mas he CH = E, e AG = E. Logo será AB : CD :: E : F. c. 14. 6.

PROP. XVII. THEOR.

SE tres linhas rectas forem proporcionaes; o rectangulo comprehendido pelas extremas será igual ao quadrado da media. E se o rectangulo comprehendido pelas extremas for igual ao quadrado da media; as tres linhas rectas serão proporcionaes.

Sejão proporcionaes as tres linhas rectas A, B, C, isto he, seja A : B :: B : C. Digo, que o rectangulo comprehendido pelas rectas A, C he igual ao quadrado da recta B. Fig. 22.

Ponha-se D = B. Sendo, como temos supposto, A : B :: B : C; e sendo B = D; se-

a. 7. 5. rá A : B :: D : C[a]. Mas quando quatro linhas rectas são proporcionaes, o rectangulo comprehendido pelas extremas he igual ao rectan-
b. 16. 6. gulo comprehendido pelas medias[b]. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas A, C he igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas B, D. Mas o rectangulo comprehendido pelas rectas B, D he igual ao quadrado da recta B, por ser B=D. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas A, C he igual ao quadrado da recta B.

Seja agora o rectangulo comprehendido pelas rectas A, C igual ao quadrado da recta B. Digo, que será A : B :: B : C.

Feita a mesma construcção que assima, sendo o rectangulo das rectas A, C igual ao quadrado da recta B; e sendo o quadrado da recta B o mesmo que o rectangulo comprehendido pelas rectas B, D, por ser B=D; o rectangulo das rectas A, C será igual ao rectangulo das rectas B, D. Mas quando o rectangulo comprehendido pelas extremas he igual ao rectangulo comprehendido pelas medias, as quatro rectas são proporcionaes[b]. Logo será A : B :: D : C, e por consequencia, sendo B=D, será tambem A : B :: B : C.

PROP. XVIII. PROB.

Descrever sobre huma linha recta dada hum rectilineo semelhante e semelhantemente posto a outro rectilineo dado.

Se-

Seja dada a linha recta AB, e o rectilineo quadrilatero CDEF. Sobre a recta AB se deve descrever hum rectilineo semelhante ao rectilineo CDEF, e semelhantemente posto. Fig. 23.

Tirada a recta DF, sobre AB e no ponto A faça-se[a] o angulo BAG=C; e no ponto B faça-se o angulo ABG=CDF; será o terceiro CFD igual[b] ao terceiro AGB. Logo os dous triangulos FCD, GAB são equiangulos. Do mesmo modo sobre a recta BG e no ponto G faça-se[a] o angulo BGH=DFE; e no ponto B faça-se o angulo GBH=FDE; será o terceiro FED igual[b] ao terceiro GHB. Sendo pois AGB=CFD, e BGH=DFE, será o total AGH igual ao total CFE. Pela mesma razão deve ser ABH=CDE. Mas he tambem A=C, e GHB=FED. Logo os rectilineos ABHG, CDEF são equiangulos. Demonstraremos agora que nestes rectilineos os lados, que formão os angulos iguaes, são proporcionaes. Sendo equiangulos os triangulos GAB, FCD, será BA : AG :: DC : CF[c]; e AG : GB :: CF : FD; e tambem nos triangulos equiangulos BGH, DFE sendo GB : GH :: FD : FE; será por igual[d] AG : GH :: CF : FE. Com o mesmo discurso se prova ser AB : BH :: CD : DE. Mas he GH : HB :: FE : ED[c]. Logo os rectilineos ABHG, CDEF tem proporcionaes os lados, que formão os angulos iguaes, e por consequencia sendo os mesmos rectilineos tambem equiangulos, como se tem demonstrado, serão semelhantes[e] entre

a. 23. 1.
b. 32. 1.
c. 4. 6.
d. 22. 5.
e. def. 1. 6.

tre si, e deste modo está feito o que se pedia.

Descreva-se agora sobre a recta AB huma figura de sinco lados semelhante á outra CDKEF tambem de sinco lados, e semelhantemente posta.

Tirada a recta DE, descreva-se sobre AB o quadrilatero ABHG semelhante ao quadrilatero CDEF, e semelhantemente posto. Faça-se com a recta BH no ponto B o angulo HBL = EDK, e no ponto H o angulo BHL = DEK. Será o terceiro K igual ao terceiro L. E como os quadrilateros ABHG, CDEF são semelhantes, será o angulo GHB = FED. Mas he BHL = DEK. Logo será o total GHL igual ao total FEK. Com a mesma demonstração se prova ABL = CDK. Logo as duas figuras de sinco lados AGHLB, CFEKD são equiangulas. Pela mesma semelhança dos quadrilateros AGHB, CFED temos GH : HB :: FE : ED.
c. 4. 6. Mas he HB : HL :: ED : EK [c]. Logo por
d. 22. 5. igual [d] será GH : HL :: FE : EK. Pela mesma razão será tambem AB : BL :: CD : DK. Mas he BL : LH :: DK : KE, por serem equiangulos os triangulos BLH, DKE. Logo as figuras AGHLB, CFEKD tem proporcionaes os lados, que fazem os angulos iguaes; e como são tambem equiangulos, pelo que temos de-
e. def. 1. 6. monstrado assima, serão semelhantes [e] entre si. Logo está feito o que se pedia. Com o mesmo methodo sobre huma linha recta dada se poderá descrever hum rectilineo semelhante a hum hexagono, ou a outro polygono qualquer que for proposto.

PROP.

PROP. XIX. THEOR.

OS triangulos ſemelhantes eſtão entre ſi na razão duplicada daquella, que tem os lados homologos.

Sejão os triangulos ABC, DEF ſemelhantes entre ſi, cujos angulos B, E ſejão iguaes; e ſupponha-ſe AB : BC : : DE : EF, de maneira que os lados BC, EF ſejão homologos. Digo, que o triangulo ABC tem para o triangulo DEF a razão duplicada da razão do lado BC para o lado EF. Fig. 24.

Achada a terceira proporcional [a] BG a reſpeito das duas rectas BC, EF, teremos BC : EF : : EF : BG. Tire-ſe a recta GA. Sendo pela hypotheſis AB : BC : : DE : EF, ſerá permutando [b] AB : DE : : BC : EF. Mas he BC : EF : : EF : BG. Logo ſerá AB : DE : : EF : BG [c]. Logo nos triangulos ABG, DEF os lados, que fazem angulos iguaes, são reciprocamente proporcionaes. Logo o triangulo ABG he igual [d] ao triangulo DEF. E como temos BC : EF : : EF : BG; e tambem quando tres linhas rectas são proporcionaes, a primeira ſe diz, que tem para a terceira a razão duplicada [e] daquella, que a primeira tem para a ſegunda; a recta BC terá para a recta BG a razão duplicada da que a meſma BC tem para EF. Mas como BC he para BG, aſſim o triangulo ABC he para o triangulo ABG [f]. Logo o triangulo ABC tem para o triangulo ABG a razão

a. 11. 6.
b. 16. 5.
c. 11. 5.
d. 15. 6.
e. def. 10. 5.
f. 1. 6.

zão duplicada da razão de BC para EF. Mas os triangulos ABG, DEF são iguaes. Logo o triangulo ABC tem para o triangulo DEF a razão tambem duplicada da razão do lado BC
g. 7. 1. para o lado EF.

COROL. Pelo que temos demonstrado fica evidente, que se tres linhas rectas forem proporcionaes, será a primeira para a terceira, como hum triangulo feito sobre a primeira recta he para outro triangulo semelhante, e semelhantemente descripto sobre a segunda. Pois temos visto ser CB para GH, como o triangulo ABC he para o triangulo DEF.

PROP. XX. THEOR.

OS polygonos semelhantes se dividem em triangulos semelhantes, em numero igual, e homologos aos mesmos polygonos totaes. E hum polygono tem para outro polygono semelhante a razão duplicada da que hum lado homologo tem para outro lado homologo.

Fig. 25. Sejão os polygonos semelhantes ABCDE, FGHKL, e sejão homologos os lados AB, FG. Digo, que os polygonos ABCDE, FGHKL se dividem em triangulos semelhantes, em igual numero, e homologos aos mesmos polygonos. Digo mais, que o polygono ABCDE tem para o polygono FGHKL a razão duplicada da razão do lado AB para o lado FG.

Ti-

Tirem-se as rectas BE, EC, GL, LH. *a. def. 1. 6.*
Como os polygonos ABCDE, FGHKL são semelhantes, será o angulo BAE = GFL [a], e tambem será BA : AE :: GF : FL [a]. Tendo pois os triangulos ABE, FGL hum angulo igual a hum angulo, isto he, o angulo BAE = GFL; e tambem tendo proporcionaes entre si os lados, que formão estes angulos iguaes; os mesmos triangulos ABE, FGL serão equiangulos [b], e por consequencia semelhantes [c]. Logo será o angulo ABE = FGL. Mas o total ABC he igual ao total FGH, por serem semelhantes [a] os polygonos ABCDE, FGHKL. Logo tambem será o angulo EBC = LGH. E sendo EB : BA :: LG : GF pela semelhança [a] dos triangulos ABE, FGL; e sendo tambem AB : BC :: FG : GH, porque os polygonos são semelhantes, será por igual [d] EB : BC :: LG : GH, isto he, serão proporcionaes os lados, que comprehendem os angulos iguaes EBC, LGH. Logo os triangulos EBC, LGH são equiangulos [b], e por consequencia semelhantes [c]. Do mesmo modo se demonstra, que os triangulos ECD, LHK são semelhantes. Logo os polygonos ABCDE, FGHKL se dividem em triangulos semelhantes, e em igual numero em ambos os polygonos.

b. 6. 6.
c. 4. 6.
d. 22. 5.

Digo agora, que os ditos triangulos são homologos aos polygonos, isto he, que são proporcionaes entre si, e a respeito dos mesmos polygonos; e que os triangulos ABE, EBC, ECD são como humas grandezas antecedentes;

tes; e os triangulos FGL, LGH, LHK são como humas grandezas consequentes; e finalmente que o polygono ABCDE tem para o polygono FGHKL a razão duplicada da razão do lado homologo AB para o lado homologo FG.

Como o triangulo ABE he semelhante ao triangulo FGL; a razão de ABE para FGL
e. 19. 6. será duplicada [e] da razão de BE para GL. Da mesma sorte o triangulo BEC tem para o triangulo GLH a razão duplicada [e] da razão de BE para GL. Logo o triangulo ABE he para o triangulo FGL, como o triangulo BEC para
f. 11. 5. ra o triangulo GLH [f]. Tambem por serem semelhantes os triangulos EBC, LGH, e os outros dous ECD, LHK, estarão huns e outros entre si na razão duplicada [e] daquella, que o lado CE tem para o lado HL. Logo será EBC: LGH:: ECD: LHK. Mas temos provado ser EBC: LGH:: ABE: FGL. Logo será ABE: FGL:: EBC: LGH; e ABE: FGL:: ECD: LHK. Mas da mesma sorte que hum antecedente he para hum consequente, assim todos os antecedentes tomados juntos são para todos
g. 12. 5. os consequentes tambem tomados juntos [g]. Logo o triangulo ABE será para o triangulo FGL, como o polygono ABCDE he para o polygono FGHKL. Logo tendo o triangulo ABE para o triangulo FGL a razão duplicada [e] da que o lado homologo AB tem para o lado homologo FG; tambem o polygono ABCDE terá para o polygono FGHKL a mesma razão du-

duplicada daquella, que AB tem para FG.

COROL. 1. Com o mesmo methodo se póde demonstrar, que as figuras quadrilateras, e multilateras semelhantes, quaesquer que sejão, estão entre si na razão duplicada dos lados homologos. E como já se tem demonstrado o mesmo a respeito dos triangulos semelhantes[c]; podemos concluir, que geralmente todas as figuras rectilineas semelhantes tem entre si a razão duplicada da razão dos lados homologos. c. 19. 6.

COROL. 2. Se a linha recta M for terceira proporcional a respeito dos lados homologos AB, FG; a recta AB terá para a recta M a razão duplicada[h] daquella, que AB tem para FG. Mas tambem o polygono ABCDE feito sobre o lado AB tem para o polygono FGHKL feito sobre o lado FG, ou qualquer outra figura rectilinea, que quizermos feita sobre o lado AB, tem para outra figura semelhante feita sobre o lado FG a razão duplicada da que o lado homologo AB tem para o lado homologo FG. Logo será o lado AB para a recta M, como a figura feita sobre AB para outra figura semelhante feita sobre FG. Mas temos demonstrado o mesmo a respeito dos triangulos semelhantes[i]. Logo se póde geralmente affirmar, que se tres linhas rectas forem proporcionaes; a primeira será para a terceira, como huma figura rectilinea, qualquer que seja, feita sobre a primeira recta he para outra figura rectilinea semelhante formada sobre a segunda. h. def. 10. 5. i. Cor. 19. 6.

PROP.

PROP. XXI. THEOR.

AS figuras rectilineas semelhantes á mesma figura rectilinea, tambem são semelhantes entre si.

Fig. 26 Sejão os rectilineos A, B semelhantes ao mesmo rectilineo C. Digo, que o rectilineo A he semelhante ao rectilineo B.

Como pela hypothesis os rectilineos A, C são semelhantes entre si, serão tambem equi-angulos, e serão proporcionaes[a] os lados delles, que fizerem angulos iguaes. Do mesmo modo sendo semelhantes os rectilineos B, C; estes mesmos rectilineos devem ser equiangulos, e os lados delles, que formão angulos iguaes, devem ser proporcionaes[a]. Logo cada hum dos rectilineos A, B he equiangulo ao rectilineo C; e todos estes tres rectilineos tem proporcionaes os lados, que formão angulos iguaes. Logo os rectilineos A, B são equiangulos[b], e tem proporcionaes[c] entre si os lados, que fazem angulos iguaes. Logo o rectilineo A he semelhante[a] ao rectilineo B.

a. def. 1. 6.
b. ax. 1. 1.
c. 11. 5.

PROP. XXII. THEOR.

SE quatro linhas rectas forem proporcionaes; os rectilineos semelhantes e semelhantemente descriptos sobre as ditas rectas serão tambem proporcionaes. E se os rectilineos semelhantes e semelhanlhantemente deſcriptos ſobre quatro linhas rectas forem proporcionaes, tambem as quatro linhas rectas ſerão proporcionaes.

Sejão as quatro linhas rectas proporcionaes, AB, CD, EF, GH, iſto he, ſeja AB : CD :: EF : GH; e ſejão formados ſobre as rectas AB, CD os rectilineos ſemelhantes e ſemelhantemente poſtos KAB, LCD; e ſobre as outras EF, GH os rectilineos MF, NH tambem ſemelhantes entre ſi e ſemelhantemente poſtos. Digo, que o rectilineo KAB he para o rectilineo LCD, como o rectilineo MF he para o rectilineo NH. Fig. 27.

Seja a linha recta X terceira proporcional [a] a reſpeito das duas AB, CD; e a recta O tambem terceira proporcional a reſpeito das outras duas EF, GH. Sendo pela hypotheſis AB : CD :: EF : GH; ſerá CD : X :: GH : O [b]. Logo por igual [c] deve ſer AB : X :: EF : O. Mas como AB he para X, aſſim he o rectilineo KAB para o rectilineo LCD [d]; e como EF he para O, aſſim o rectilineo MF he para o rectilineo NH [d]. Logo ſerá o rectilineo KAB para o rectilineo LCD, como o rectilineo MF he para o rectilineo NH [b].

a. 11. 6.
b. 11. 5.
c. 22. 5.
d. Cor. 2. 20. 6.

Supponhamos agora ſer o rectilineo KAB para o rectilineo LCD, como o rectilineo MF he para o rectilineo NH. Digo, que ſerá AB : CD :: EF : GH.

Achada a recta PR de maneira que ſeja AB : CD :: EF : PR [c]; deſcreva-ſe ſobre a meſma

c. 12. 6.

re-

f. 18. 6. recta PR[f] o rectilineo SR ſemelhante e ſemelhantemente poſto a hum dos dous MF, NH. Como temos AB : CD :: EF : PR; e ſobre as rectas AB, CD eſtão deſcriptos os rectilineos ſemelhantes e ſemelhantemente poſtos KAB, LCD; e ſobre EF, PR os outros rectilineos tambem ſemelhantes e ſemelhantemente poſtos MF, SR; ſerá, pelo que ſe tem demonſtrado, o rectilineo KAB para o rectilineo LCD, como o rectilineo MF he para o rectilineo SR. Mas temos ſuppoſto ſer KAB : LCD :: MF : NH. Logo o rectilineo MF tem a meſma razão para cada hum dos rectilineos NH, SR.
g. 9. 5. Logo o rectilineo NH he igual[g] ao rectilineo SR. Mas eſtes dous rectilineos são tambem ſemelhantes e ſemelhantemente deſcriptos. Logo ſerá GH=PR. Logo ſendo AB : CD :: EF : PR; e ſendo PR=GH; ſerá finalmente AB : CD :: EF : GH.

PROP. XXIII. THEOR.

OS parallelogrammos equiangulos eſtão entre ſi na razão, que ſe compõem das razões dos lados.

Fig. 28. Sejão os parallelogrammos equiangulos AC, CF, cujos angulos BCD, ECG ſejão iguaes. Digo, que o parallelogrammo AC tem para o parallelogrammo CF a razão compoſta das razões dos lados, iſto he, da razão de BC para CG, e da razão de DC para CE.

Po-

Ponháo-se os dous parallelogrammos AC, CF de maneira que o lado BC esteja em direitura com o lado CG. Tambem o lado DC estará em direitura com o lado CE [a]. Completado pois o parallelogrammo DG, tome-se huma linha recta K, como se quizer; e faça-se [b] K para L, assim como BC para CG; e L para M, assim como DC para CE. Seráo as razões de K para L, e de L para M iguaes ás razões dos lados, isto he, á razão de BC para CG, e á razão de DC para CE. Mas a razáo de K para M se diz a razáo composta [c] das razões de K para L, e de L para M. Logo a razáo de K para M he a composta das razões dos lados. E porque BC he para CG, como o parallelogrammo AC para o parallelogrammo CH [d]; e tambem BC: CG :: K: L; será K para L, como o parallelogrammo AC he para o parallelogrammo CH [e]. Tambem sendo DC para CE, com o parallelogrammo CH para o parallelogrammo CF; e DC: CE :: L: M; será L para M, como o parallelogrammo CH he para o parallelogrammo CF. Logo visto termos demonstrado ser K para L, como o parallelogrammo AC he para o parallelogrammo CH; e L para M, como o parallelogrammo CH he para o parallelogrammo CF; será por igual [f] do mesmo modo que K para M, o parallelogrammo AC para o parallelogrammo CF. Mas K tem para M a razáo composta das razões dos lados, isto he, da razáo de BC para CG, e da razáo de DC para CE.

a. 14. 1.
b. 12. 6.
c. def. A. 5.
d. 1. 6.
e. 11. 5.
f. 22. 5.

Lo-

Logo tambem o parallelogrammo AC tem para o parallelogrammo CF a razão composta das razões dos mesmos lados, isto he, da razão de BC para CG, e da razão de DC para CE.

PROP. XXIV. THEOR.

Os parallelogrammos, que existem na diagonal de outro parallelogrammo, qualquer que seja, são semelhantes entre si, e tambem semelhantes ao parallelogrammo total.

Fig. 29. Seja o parallelogrammo ABCD, cuja diagonal he a recta AC. Na diagonal AC existão os parallelogrammos EG, HK. Digo, que os parallelogrammos EG, HK são semelhantes entre si, e tambem semelhantes ao parallelogrammo total ABCD.

Como as rectas DC, GF são parallelas, será o angulo ADC = AGF [a]. Pela mesma razão sendo BC, EF parallelas, será ABC = AEF. Mas cada hum dos angulos BCD, EFG he igual [b] ao angulo opposto DAB. Logo será BCD = EFG. Logo os parallelogrammos ABCD, AEFG são equiangulos. Sendo pois o angulo ABC = AEF, e BAC commum; os triangulos BAC, EAF serão tambem equiangulos, e assim teremos AB : BC : : AE : EF [c]. Logo sendo iguaes [b] os lados oppostos nos parallelogrammos; será tambem [d] AB : AD : : AE : AG, e DC : CB : : GF : FE; e finalmen-

a. 29. 1.
b. 34. 1.
c. 4. 6.
d. 7. 5.

te

te CD: DA:: FG: GA. Logo nos parallelogrammos ABCD, AEFG os lados, que fazem angulos iguaes, são proporcionaes, e por consequencia são semelhantes [e] entre si os mesmos parallelogrammos ABCD, AEFG. Pela mesma razão o parallelogrammo ABCD he semelhante ao parallelogrammo FHCK. Logo cada hum dos parallelogrammos GE, KH he semelhante ao mesmo parallelogrammo DB. Mas os rectilineos semelhantes a outro rectilineo, são tambem semelhantes [f] entre si. Logo o parallelogrammo GE he semelhante ao parallelogrammo KH.

e. def.1.6.

f. 21. 6.

PROP. XXV. PROB.

Construir hum rectilineo semelhante a outro rectilineo proposto, e igual a hum rectilineo tambem dado.

Sejão os dous rectilineos ABC, D. Deve-se construir hum rectilineo semelhante ao rectilineo ABC, e igual ao rectilineo D. Fig. 30.

Sobre a recta BC faça-se o parallelogrammo BE igual ao rectilineo ABC; e sobre a recta CE faça-se o parallelogrammo CM igual ao rectilineo D, e com o angulo FCE = CBL [a]. Logo BC está em direitura de CF, e LE em direitura de EM [b]. Entre as rectas BC, CF ache-se a media proporcional GH [c], e sobre GH descreva-se [d] o rectilineo KGH semelhante ao rectilineo ABC. Será o rectilineo KGH o que se

a. Cor.45. 1.

b. { 29.1. 14.1.

c. 13. 6.

d. 18. 6.

ſe pede. Sendo BC : GH :: GH : CF; e poſtas tres linhas rectas proporcionaes, ſendo a primeira recta para a terceira, como huma figura rectilinea, qualquer que ſeja, feita ſobre a primeira para outra figura rectilinea ſemelhante e
e. Cor. 2. ſemelhantemente deſcripta ſobre a ſegunda[e];
20. 6. como BC he para CF, aſſim ſerá o rectilineo ABC para o rectilineo KGH. Mas como BC he para CF, aſſim o parallelogrammo BE he
f. 1. 6. para o parallelogrammo EF[f]. Logo como o rectilineo ABC he para o rectilineo KGH, aſ-
g. 11. 5. ſim[g] o parallelogrammo BE ſerá para o parallelogrammo EF. Mas o rectilineo ABC he igual ao parallelogrammo BE. Logo o rectili-
h. 14. 5. neo KGH ſerá igual[h] ao parallelogrammo EF. Mas o parallelogrammo EF he igual ao rectilineo D. Logo o rectilineo KGH he igual ao rectilineo D. Mas KGH he ſemelhante á ABC. Logo temos conſtruido o rectilineo KGH ſemelhante ao rectilineo ABC, e igual ao rectilineo D.

PROP. XXVI. THEOR.

SE de hum parallelogrammo for tirado outro parallelogrammo ſemelhante ao total e ſemelhantemente poſto, e que tenha hum angulo commum ao meſmo total; o parallelogrammo, que for tirado, exiſtirá ao redor da diagonal do parallelogrammo total.

Do

Do parallelogrammo ABCD tire-ſe o parallelogrammo AEFG ſemelhante ao total ABCD, e ſemelhantemente poſto, e que tenha o angulo DAB, que he commum ao parallelogrammo ABCD. Digo, que o parallelogrammo AEFG exiſte ao redor da recta AC, que he a diagonal do parallelogrammo ABCD. Fig. 31.

Suppoſto não ſer aſſim, ſeja AHC, ſe he poſſivel, a diagonal do parallelogrammo BD; e o lado GF córte a pertendida diagonal AHC no ponto H. Tire-ſe pelo ponto H a recta HK parallela a huma das duas AD, BC. Como os parallelogrammos ABCD, AKHG exiſtem ao redor da meſma diagonal AHC; eſtes parallelogrammos ſeráo ſemelhantes[a] entre ſi. Logo ſerá DA: AB:: GA: AK[b]. Mas tambem, por ſerem ſemelhantes os parallelogrammos ABCD, AEFG, deve ſer DA: AB:: GA: AE. Logo ſerá GA: AE:: GA: AK[c], e por conſequencia teremos AE=AK[d], o que he abſurdo, porque AK he menor que AE. Logo os parallelogrammos ABCD, AKHG não exiſtem ao redor da meſma diagonal, mas ſim os parallelogrammos ABCD, AEFG.

a. 24. 6.
b. def. 1. 6.
c. 11. 5.
d. 9. 5.

Para que mais facilmente ſe poſsão entender as tres Propoſições ſeguintes, bom ſerá ponderarmos diligentemente o que ſe ſegue.

I. Hum parallelogrammo ſe diz, que he applicado a huma linha recta, quando he deſcripto ſobre ella. Por exemplo, o parallelogrammo AC ſe diz, que he applicado á recta AB todas as vezes que he deſcripto ſobre a meſma recta AB. Fig. 32.

II. Mas o parallelogrammo AE se diz, que he applicado á recta AB com a falta de huma figura parallelogramma, quando a baze AD do parallelogrammo AE he menor que a recta AB; e assim o parallelogrammo AE he tanto menor que o parallelogrammo AC, descripto sobre a recta AB no mesmo angulo, e entre as mesmas parallelas, quanta he a figura parallelogramma DC, que he o que falta ao parallelogrammo AE para o complemento do parallelogrammo AC. O parallelogrammo DC se chama o defeito, ou a falta do parallelogrammo AE.

III. Finalmente o parallelogrammo AG se diz, que he applicado á recta AB com o excesso de huma figura parallelogramma, quando a baze AF do parallelogrammo AG he maior que a recta AB; e assim o parallelogrammo AG he maior que o parallelogrammo AC de toda a figura parallelogramma BG, que se chama o excesso do mesmo parallelogrammo AG, sobre o parallelogrammo AC.

PROP. XXVII. THEOR.

ENtre todos os parallelogrammos applicados á mesma linha recta, e com os defeitos de figuras parallelogrammas semelhantes á figura descripta sobre a metade da dita recta, e semelhantemente postas, o maximo he aquelle, que he ap-

applicado á metade da meſma recta, e que he ſemelhante á figura parallelogramma, que falta.

Seja a recta AB dividida em partes iguaes no ponto C. Eſteja o parallelogrammo AD applicado á recta AB com a falta da figura parallelogramma CE deſcripta ſobre a metade da recta AB. O parallelogrammo AD he ſemelhante á figura parallelogramma CE. Digo, que entre todos os parallelogrammos applicados á recta AB, e com as faltas de figuras parallelogrammas ſemelhantes á figura CE, e ſemelhantemente poſtas, o maximo he o parallelogrammo AD. Fig. 33. 34.

Seja applicado á recta AB o parallelogrammo AF com a falta da figura parallelogramma KH ſemelhante á CE, e ſemelhantemente poſta. Digo, que o parallelogrammo AD he maior que o parallelogrammo AF.

Seja primeiramente a baze AK do parallelogrammo AF maior que a recta AC. Como os parallelogrammos CE, KH ſão ſemelhantes, neceſſariamente devem exiſtir ao redor de huma meſma diagonal[a]. Seja DB eſta diagonal commua, e deſcreva-ſe a figura toda, produzindo a recta KF até o ponto L. Sendo os parallelogrammos CF, FE iguaes[b], ſe ajuntarmos a huma e outra parte o meſmo parallelogrammo KH, ſerá o total CH igual ao total KE. Mas he CH = CG[c], por ſerem as rectas AC, CB iguaes entre ſi. Logo tambem ſerá Fig. 33. a. 26. 6. b. 43. 1. c. 36. 1.

CG =

CG = KE. Ajunte-se-lhes o parallelogrammo commum CF. Será o parallelogrammo AF igual ao gnomon CHL, e por consequencia o parallelogrammo CE, isto he, o parallelogrammo AD será maior que o parallelogrammo AF.

Fig. 34. Em segundo lugar a baze AK do parallelogrammo AF seja menor que a recta AC. Supposta a mesma construcção, como os parallelogrammos DH, DG são iguaes [c], por ser HM = MG [d]; será DH > LG. Mas he DH = DK [b]. Logo será DK > LG. Logo ajuntando a huma e outra parte o mesmo parallelogrammo AL, será o parallelogrammo AD maior que o parallelogrammo AF.

c. 36. 1.
d. 34. 1.
b. 43. 1.

PROP. XXVIII. PROB.

Applicar a huma linha recta dada hum parallelogrammo igual a hum rectilineo dado, e com o defeito de huma figura parallelogramma semelhante á outra dada. Mas o rectilineo proposto, ao qual se quer igual o parallelogrammo, que se pede, não deve ser maior do que o parallelogrammo, que se applica á metade da recta dada, sendo semelhantes entre si os defeitos, tanto do parallelogrammo applicado á metade da recta proposta, como do parallelogrammo que se pede com o defeito da figu-

ra

ra parallelogramma ſemelhante á outra dada.

Seja AB a linha recta dada, e o rectilineo dado, ao qual deve ſer igual o parallelogrammo, que ſe quer applicar á recta AB, ſeja C; com tanto porém que eſte rectilineo não ſeja maior do que o parallelogrammo applicado á metade da meſma recta AB, ſendo ſemelhantes os defeitos. Seja D a figura parallelogramma, a que deve ſer ſemelhante o defeito do parallelogrammo, que ſe pede. He preciſo applicar á recta AB hum parallelogrammo igual ao rectilineo C, e com o defeito de huma figura parallelogramma ſemelhante ao parallelogrammo D. Fig. 35.

Dividida em partes iguaes[a] a linha recta AB no ponto E, deſcreva-ſe ſobre a parte EB como baze o parallelogrammo EBFG ſemelhante[b] ao parallelogrammo D, e ſemelhantemente poſto. Complete-ſe o parallelogrammo AG. O parallelogrammo AG ſerá igual, ou maior que o rectilineo C. Se o parallelogrammo AG for igual ao rectilineo C, eſtará feito o que ſe pede, porque o parallelogrammo AG igual ao rectilineo C, e com o defeito da figura parallelogramma EF ſemelhante á D, já eſtá applicado á recta dada AB. Mas não ſendo AG=C, ſerá neceſſariamente AG>C. Logo ſendo EF=AG, ſerá tambem EF>C. Deſcreva-ſe[c] o parallelogrammo KLMN igual ao exceſſo de EF ſobre C, ſemelhante

a. 10. 1.
b. 18. 6.
c. 25. 6.

ao

ao parallelogrammo D, e ſemelhantemente poſto. Será o meſmo parallelogrammo KLMN
d. 21. 6. ſemelhante [d] ao parallelogrammo EF, por ſerem ſemelhantes entre ſi os dous EF, e D. Seja homologo o lado KL a reſpeito do lado EG; e ſeja tambem homologo o lado LM a reſpeito do lado GF. Como o parallelogrammo EF he igual aos dous rectilineos C, KM tomados juntos, ſerá EF > KM. Logo ſerá o lado GE maior que o lado LK, e o lado GF maior que o lado LM. Tome-ſe GX = LK, e GO = LM, e complete-ſe o parallelogrammo XGOP. Logo os parallelogrammos XO, KM são iguaes, e ſemelhantes. Mas KM he ſemelhante á EF. Logo XO he tambem ſemelhante á EF. [d] Logo os parallelogrammos XO, EF exiſtem ao redor de huma meſma diago-
e. 26. 6. nal [e]. Seja eſta diagonal a recta GPB. Deſcreva-ſe a figura toda, produzindo a recta OP até o ponto S, e a recta XP até os pontos T, R. Logo ſendo o parallelogrammo EF igual aos dous rectilineos C, e KM tomados juntos; e ſendo XO = KM, tirando XO de EF, ficará o gnomon ERO igual ao rectilineo C. E
f. 43. 1. como os complementos OR, XS são iguaes [f] entre ſi; ſe ajuntarmos a hum e outro o meſmo parallelogrammo SR, ſerá o total OB igual
g. 36. 1. ao total XB. Mas he XB = TE [g], por ſer o lado AE igual ao lado EB. Logo ſerá tambem TE = OB. Ajunte-ſe-lhes o meſmo parallelogrammo XS. Será o parallelogrammo TS igual ao gnomon ERO. Mas temos demonſtrado,

que

que o gnomon ERO he igual ao rectilineo C. Logo será o parallelogrammo TS igual ao rectilineo C. Logo temos applicado á linha recta proposta AB o parallelogrammo TS igual ao rectilineo dado C, e com o defeito da figura parallelogramma SR semelhante á D, por ser tambem SR semelhante[h] á EF, que já se tem feito semelhante á D. h. 24. 6.

PROP. XXIX. PROB.

Applicar a huma linha recta dada hum parallelogrammo igual a hum rectilineo dado, e com excesso de huma figura parallelogramma semelhante á outra dada.

Seja AB a linha recta dada; C hum rectilineo; e D hum parallelogrammo. Deve-se applicar á recta AB hum parallelogrammo igual ao rectilineo C, e com o excesso de huma figura parallelogramma semelhante á D. Fig. 36.

Divida-se a recta AB em partes iguaes no ponto E, e sobre a parte EB descreva-se[a] o parallelogrammo EL semelhante ao parallelogrammo D, e semelhantemente posto. Descreva-se[b] tambem o parallelogrammo GH igual ao parallelogrammo EL e ao rectilineo C tomados juntos, e ao mesmo tempo semelhante á D. Será GH semelhante[c] á EL. Seja KH hum lado homologo a respeito do lado EL; e seja tambem KG outro lado homologo a respei-

a. 18. 6.

b. 25. 6.

c. 21. 6.

peito do lado FE. Sendo o parallelogrammo GH maior que o parallelogrammo EL, tambem ſerá o lado KH maior que o lado FL, e KG > FE. Produzão-ſe as rectas FL, FE fazendo FLM = KH, e FEN = KG, e complete-ſe o parallelogrammo MN. Serão os dous parallelogrammos MN, GH iguaes entre ſi e ſemelhantes. Mas GH he ſemelhante á EL. Logo ſerá tambem MN ſemelhante á EL, e por conſequencia haverá huma diagonal com-
d. 26. 6. mua [d] a ambos eſtes parallelogrammos. Seja FX eſta diagonal commua, e deſcreva-ſe a figura toda produzindo as rectas LB, EB até os pontos P, O. Logo ſendo o parallelogrammo GH igual ao parallelogrammo EL, e ao rectilineo C tomados juntos; e ſendo GH = MN, ſerá MN igual á EL, e C tambem tomados juntos. Tire-ſe de huma e outra parte o parallelogrammo commum EL. Ficará o gnomon NOL igual ao rectilineo C. E como temos AE =
e. 36. 1. EB, ſerá o parallelogrammo AN igual [e] ao
f. 43. 1. parallelogrammo NB. Mas he NB = BM [f]. Logo ſerá AN = BM. Ajunte-ſe a huma e outra parte o meſmo parallelogrammo NO. Será o parallelogrammo AX igual ao gnomon NOL. Mas o gnomon NOL he igual ao rectilineo C. Logo ſerá AX = C. Logo á linha recta dada AB temos applicado o parallelogrammo AX igual ao rectilineo propoſto C, e com o exceſſo da figura parallelogramma PO ſemelhante á D, por ſerem EL, PO ſeme-
g. 24. 6. lhantes [g] entre ſi, e por termos feito o paral-

le-

lelogrammo EL ſemelhante ao parallelogrammo propoſto D.

PROP. XXX. PROB.

DIvidir huma linha recta determinada na extrema e media razão.

Seja a linha recta determinada AB. Deve-ſe dividir a recta AB na extrema e media razão. Fig. 37.

Deſcreva-ſe [a] ſobre a recta AB o quadrado BC; e applique-ſe [b] ao lado AC o parallelogrammo CD igual ao quadrado BC, e com o exceſſo da figura parallelogramma AD ſemelhante ao meſmo BC. Sendo pois BC hum quadrado, tambem a figura AD ſerá hum quadrado. E como o quadrado BC he igual ao parallelogrammo CD, tirando de huma e outra parte o parallelogrammo commum CE, ficará o reſto BF igual ao reſto AD. Mas eſtes parallelogrammos, além de ſerem iguaes, são tambem equiangulos. Logo os lados delles, que fazem angulos iguaes, ſerão reciprocamente proporcionaes [c], e por conſequencia teremos FE : ED :: AE : EB. Mas he FE = AC [d], e AC = AB, e aſſim FE = AB; e tambem temos ED = AE. Logo ſerá BA : AE :: AE : EB. Mas he AB > AE, e por conſequencia AE > EB [e]. Logo a linha recta AB eſtá dividida na extrema e media razão no ponto E [f] como ſe pedia.

a. 46. 1.
b. 29. 6.
c. 14. 6.
d. 34. 1.
e. 14. 5.
f. def. 3. 6.

OU-

OUTRA CONSTRUCÇÃO, E DEMONSTRAÇÃO.

Fig. 38. SEja dada a linha recta AB. Deve-se dividir a recta AB na extrema e media razão.

Divida-se a recta AB no ponto C de maneira que o rectangulo comprehendido pela recta toda AB, e pela parte BC, seja igual [g] ao quadrado da outra parte AC. A recta AB estará dividida na extrema e media razão no ponto C.

g. 11. 2.

Como o rectangulo das rectas AB, BC he igual ao quadrado de AC; será BA : AC : : AC : CB [h]. Logo a recta AB está dividida na extrema e media razão no ponto C [f].

h. 17. 6.
f. def. 3. 6.

PROP. XXXI. THEOR.

EM todo o triangulo rectangulo a figura rectilinea, qualquer que for, formada sobre o lado opposto ao angulo recto, he igual ás outras figuras rectilineas tomadas juntas, semelhantes á primeira, e semelhantemente descriptas sobre os lados, que comprehendem o angulo recto.

Fig. 39. Seja o triangulo rectangulo ABC, cujo angulo BAC he recto. Digo, que a figura rectilinea formada sobre o lado BC, he igual ás outras duas figuras tomadas juntamente, semelhantes á primeira, e semelhantemente descriptas sobre os lados BA, AC.

Ca-

Caia do ponto A sobre o lado BC a perpendicular AD. Como no triangulo rectangulo ABC do angulo recto em A está tirada sobre a baze BC a perpendicular AD; os triangulos ABD, ADC seráõ semelhantes ao triangulo total ABC, e tambem seráõ semelhantes[a] entre si. Logo sendo o triangulo ABC semelhante ao triangulo ABD, será CB : BA :: BA : BD[b]. Logo as tres rectas CB, BA, BD são proporcionaes, e assim será a primeira destas tres rectas para a terceira, como a figura rectilinea descripta sobre a primeira recta para outra figura semelhante[c], e semelhantemente descripta sobre a segunda. Logo será CB para BD, como a figura formada sobre o lado CB para a figura semelhante, e semelhantemente descripta sobre o lado BA. E invertendo[d], como DB, para BC, assim a figura sobre BA será para a figura sobre BC. Com a mesma demonstração se provará ser DC para CB, como a figura sobre CA he para a figura sobre CB. Logo como as duas rectas BD, DC tomadas juntas são para BC, assim as figuras formadas sobre os lados BA, AC seráõ para a figura feita sobre o lado BC[e]. Mas as duas rectas BD, DC tomadas juntas são iguaes á BC. Logo a figura rectilinea formada sobre o lado BC será igual[f] ás figuras semelhantes, e semelhantemente descriptas sobre os lados BA, AC.

a. 8. 6.
b. 4. 6.
c. Cor. 2 20. 6.
d. B. 5.
e. 24. 5.
f. A. 5.

PROP.

PROP. XXXII. THEOR.

SE dous triangulos, nos quaes dous lados de hum são proporcionaes a dous lados do outro, se dispuzerem entre si de maneira, que tocando-se com dous angulos, os lados homologos sejão respectivamente parallelos; os outros lados dos mesmos triangulos estarão em direitura hum com outro.

Fig. 40. Sejão os dous triangulos ABC, DCE, e sejão os lados BA, AC do primeiro proporcionaes aos lados CD, DE do segundo, isto he, seja BA: AC:: CD: DE. Considerem-se os dous triangulos ABC, DCE postos entre si, de maneira que tocando-se pela parte dos angulos ACB, DCE no ponto C, seja o lado AB parallelo ao lado DC, e tambem seja o lado AC parallelo ao lado DE. Digo, que o lado BC estará em direitura com o lado CE.

Como o lado AB he parallelo ao lado DC, e são ambos cortados pela recta AC; os angulos alternos BAC, ACD serão iguaes[a] entre si. Pela mesma razão são iguaes os angulos CDE, ACD. Logo tambem será BAC = CDE. E porque os dous triangulos ABC, DCE tem iguaes os angulos A, D, e proporcionaes os lados, que formão estes angulos iguaes, sendo pela hypothesis BA: AC:: CD: DE; os mesmos triangulos ABC, DCE serão equiangulos[b].

a. 29. 1.

b. 6. 6.

Lo-

Logo ſerá o angulo ABC = DCE. Mas temos demonſtrado ſer BAC = ACD. Logo ſerá o total ACE igual aos dous juntamente ABC, BAC. Ajunte-ſe a huma e outra parte o meſmo angulo ACB. Seráo os dous ACE, ACB tomados juntos iguaes aos tres ABC, BAC, ACB tambem tomados juntos. Mas os tres ABC, BAC, ACB sáo iguaes a dous rectos [c]. c. 32. 1.
Logo tambem os dous ACE, ACB ſeráo iguaes a dous rectos, e por conſequencia o lado BC eſtará em direitura [d] com o lado CE. d. 14. 1.

PROP. XXXIII. THEOR.

EM circulos iguaes os angulos exiſtentes ou nos centros, ou nas circunferencias, tem entre ſi a meſma razáo, que tem os arcos, ſobre os quaes aſſentáo os ditos angulos. O meſmo ſe deve entender a reſpeito dos ſectores.

Sejáo os circulos iguaes ABC, DEF; e os angulos BGC, EHF exiſtentes nos centros G, H; e tambem os angulos BAC, EDF exiſtentes nas circunferencias dos meſmos circulos. Digo, que como o arco BC he para o arco EF, aſſim o angulo BGC he para o angulo EHF; e aſſim tambem o angulo BAC he para o angulo EDF; e o ſector BGC para o ſector EHF. Fig. 41.

Na circunferencia do circulo ABC, principiando do ponto C, tomem-ſe os arcos CK, KL em hum numero qualquer que for, com

tan-

tanto que cada hum delles ſeja igual ao arco BC; e tambem na circunferencia do circulo DEF, principiando do ponto F, tomem-ſe os arcos FM, MN, e cada hum delles ſeja igual ao arco EF. Tirem-ſe os raios GK, GL, HM, HN. Como os arcos BC, CK, KL são iguaes

a. 27. 3. entre ſi, tambem ſerão iguaes [a] os angulos BGC, CGK, KGL. Logo aſſim como o arco BL he multiplice do arco BC, do meſmo modo o angulo BGL ſerá multiplice do angulo BGC. Pela meſma razão como o arco EN he multiplice do arco EF, aſſim o angulo EHN ſerá multiplice do angulo EHF. E ſe o arco BL for maior, ou igual, ou menor que o arco EN; tambem o angulo BGL ſerá maior, ou igual [a], ou menor que o angulo EHN. Logo como o arco BC he para o arco EF, aſſim o angulo

b. def 5. 5. BGC ſerá para o angulo EHF [b]. Mas he BGC:

c. 15. 5. EHF :: BAC : EDF [c], porque cada hum dos

d. 20. 3. primeiros angulos he o dobro [d] de cada hum dos ſegundos. Logo como o arco BC he para o arco EF, aſſim tambem o angulo BAC ſerá para o angulo EDF. Logo em circulos iguaes os angulos exiſtentes ou nos centros, ou nas circunferencias, tem entre ſi a meſma razão, que tem os arcos, ſobre os quaes aſſentão os ditos angulos.

Fig. 42. Digo mais, que aſſim como o arco BC he para o arco EF, aſſim tambem o ſector BGC he para o ſector EHF.

Tiradas as cordas BC, CK, e tomados nos arcos BC, CK os pontos X, O, tirem-ſe as

ou-

outras cordas BX, XC, CO, OK. Como as duas rectas BG, GC são iguaes ás duas CG, GK, e os angulos BGC, CGK formados por estas rectas são tambem iguaes entre si; será a baze BC igual á baze CK, e o triangulo GBC igual [e] ao triangulo GCK. E sendo os arcos BC, CK iguaes, os complementos delles para a circunferencia inteira do circulo ABC serão tambem iguaes. Logo será o angulo BXC = COK [a]; e assim serão semelhantes [f] os segmentos BXC, COK. Mas os segmentos de circulos semelhantes e existentes sobre rectas iguaes são tambem iguaes [g]. Logo o segmento BXC he igual ao segmento COK. Mas o triangulo BGC he igual ao triangulo CGK, como já temos provado. Logo todo o sector BGC deve ser igual a todo o sector CGK. Com a mesma demonstração se prova, que o sector KGL he igual a cada hum dos dous sectores BGC, CGK. Do mesmo modo são iguaes entre si os sectores EHF, FHM, MHN. Logo assim como o arco BL he multiplice do arco BC, do mesmo modo o sector BGL será multiplice do sector BGC. Pela mesma razão como o arco EN he multiplice do arco EF, assim tambem o sector EHN o será a respeito do sector EHF. E se o arco BL for maior, ou igual, ou menor que o arco EN; tambem o sector BGL será maior, ou igual, ou menor que o sector EHN. Logo como o arco BC he para o arco EF, assim o sector BGC será para o sector EHF.

e. 4. 1.

a. 27. 3.
f. def. 11. 3.
g. 24. 3.

R PROP.

PROP. B. THEOR.

SE hum angulo de qualquer triangulo for dividido em partes iguaes por huma linha recta, que córte tambem a baze do mesmo triangulo; o rectangulo comprehendido pelos lados do triangulo será igual ao rectangulo comprehendido pelos segmentos da baze juntamente com o quadrado da recta, que divide o angulo em partes iguaes.

Fig. 43. Seja o triangulo ABC, cujo angulo BAC seja dividido em partes iguaes pela recta AD. Digo, que o rectangulo comprehendido pelos lados BA, AC he igual ao rectangulo comprehendido pelos segmentos BD, DC da baze BC juntamente com o quadrado da recta AD.

a. 5. 4. Circunscreva-se [a] ao triangulo BAC o circulo ACB, e produza-se a recta AD até que encontre a circunferencia no ponro E. Tire-se a corda EC. Visto serem iguaes pela hypothesis os angulos BAD, CAE; e tambem os angulos ABD, AEC [b], por estarem estes no mesmo segmento ABEC; os triangulos ABD, AEC serão equiangulos, e por consequencia será BA : AD : : EA : AC [c]; e assim o rectangulo das rectas BA, AC será igual [d] ao rectangulo das rectas EA, AD, isto he, o rectangulo das rectas BA, AC será igual [e] ao rectangulo das

b. 21. 3.
c. 4. 6.
d. 16. 6.
e. 3. 2.

re-

rectas ED, DA juntamente com o quadrado de AD. Mas o rectangulo das rectas ED, DA he igual[f] ao rectangulo das rectas BD, DC. Logo o rectangulo comprehendido pelos lados BA, AC será igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas BD, DC juntamente com o quadrado da recta AD. f. 35. 3.

PROP. C. THEOR.

SE em hum triangulo, qualquer que seja, do angulo, que fica opposto á baze, for tirada huma recta perpendicularmente sobre a mesma baze; o rectangulo comprehendido pelos lados do triangulo será igual ao rectangulo comprehendido pela dita perpendicular, e pelo diametro do circulo, que se póde circunscrever ao mesmo triangulo.

Seja o triangulo ABC, e do angulo A esteja tirada a recta AD perpendicularmente sobre a baze BC. Digo, que o rectangulo comprehendido pelos lados BA, AC he igual ao rectangulo comprehendido pela recta AD, e pelo diametro do circulo circunscripto ao triangulo ABC. Fig. 44.

Seja circunscripto[a] ao triangulo ABC o circulo ACB, cujo diametro seja AE. Tire-se a corda EC. Como o angulo BDA, que he recto, he igual ao angulo ECA existente no se- a. 5. 4.

b. 31. 3. micirculo[b]; e tambem o angulo ABD he igual[c]
c. 21. 3. ao angulo AEC, por eſtarem ambos eſtes angulos no meſmo ſegmento ABEC; os triangulos ABD, AEC ſeráo equiangulos. Logo
d. 4. 6. ſerá BA : AD :: EA : AC[d], e por conſequencia o rectangulo comprehendido pelos lados BA,
e. 16. 6. AC ſerá igual[e] ao rectangulo comprehendido pela recta AD perpendicular á baze BC, e pelo diametro EA do circulo ACB circunſcripto ao triangulo ABC.

LI-

LIVRO XI.

DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

DEFINIÇÕES.

I.

SOlido he o que tem comprimento, largura, e profundidade.

II.

Os termos do solido são superficies.

III.

Huma linha recta he perpendicular a hum plano, quando faz angulos rectos com todas as rectas, que a tocão existentes no mesmo plano.

IV.

Hum plano he perpendicular a outro plano, no, quando as linhas rectas, que em hum dos planos, qual quizermos, se conduzem perpendicularmente á secção commua dos mesmos planos, ficão sendo perpendiculares tambem ao outro plano.

V.

A inclinação de huma linha recta sobre hum plano he hum angulo agudo formado pela mesma linha, e por outra existente no plano entre a dita linha, e a perpendicular, que de qualquer ponto da recta inclinada cahe sobre o mesmo plano.

VI.

A inclinação de hum plano sobre outro plano he hum angulo agudo feito por duas linhas rectas existentes huma em hum plano, e outra no outro, as quaes conduzidas para hum mesmo ponto, ficão sendo perpendiculares á secção commua dos ditos planos.

VII.

Dous planos se dizem semelhantemente inclinados a respeito de outros dous, quando os angulos das inclinações são iguaes.

VIII.

Planos parallelos são aquelles, que produzidos como quer que quizermos, nunca concorrem para parte alguma.

IX.

O angulo solido he hum angulo formado por mais de dous angulos planos não existentes no mesmo plano, e os quaes todos tem o mesmo vertice commum.

X.

X.

Esta decima Definição se deixa pelas razões, que se darão nas Notas.

XI.

As figuras solidas semelhantes são aquellas, que tem iguaes os angulos solidos correspondentes, como tambem semelhantes entre si, e em numero igual os planos, que se correspondem.

XII.

A pyramide he huma figura solida formada por differentes planos, os quaes todos sahindo de hum mesmo plano, se terminão em hum mesmo plano.

XIII.

O prisma he huma figura solida comprehendida por varios planos, entre os quaes dous que ficão oppostos são iguaes, semelhantes, e parallelos; os outros todos são parallelogrammos.

XIV.

A esfera he huma figura solida descripta pela revolução inteira de hum semicirculo ao redor do seu diametro, que se considera como immovel.

XV.

O eixo da esfera he aquelle diametro, ao redor do qual o semicirculo faz a sua revolução.

XVI.

O centro da esfera he o mesmo centro do semicirculo.

XVII.

XVII.

Diametro da esfera se chama qualquer linha recta, que passa pelo centro da esfera, e se termina de huma e outra parte na superficie da mesma esfera.

XVIII.

A pyramide conica he huma figura solida, que fica formada pela revolução inteira de hum triangulo rectangulo ao redor de hum lado daquelles, que comprehendem o angulo recto. E este lado se deve considerar como immovel no tempo de huma revolução inteira do triangulo.

Se o lado, que se imagina immovel, for igual ao outro, que gyra, e que com o primeiro faz o angulo recto; a pyramide conica se chamará orthogonia; se for menor, amblygonia; e se maior, oxigonia.

XIX.

O eixo da pyramide conica he aquelle lado considerado como immovel, ao redor do qual se revolve o triangulo.

XX.

A baze da pyramide conica he hum circulo descripto pelo outro lado, que pertence ao angulo recto, e que faz huma revolução inteira juntamente com o triangulo.

XXI.

O cylindro he huma figura solida formada pela revolução de hum parallelogrammo rectangulo ao redor de qualquer lado, que tambem se deve considerar como immovel.

XXII.

XXII.

O eixo do cylindro he aquelle lado fixo, ao redor do qual o parallelogrammo faz huma revolução inteira.

XXIII.

As bazes do cylindro são dous circulos descriptos pelos lados oppostos do parallelogrammo, que juntamente com o mesmo parallelogrammo se revolvem.

XXIV.

Tanto as pyramides conicas, como os cylindros se dizem semelhantes, quando os eixos, e os diametros das bazes são proporcionaes entre si.

XXV.

O cubo he huma figura solida comprehendida por seis quadrados iguaes.

XXVI.

O tetraedro he huma figura solida formada por quatro triangulos iguaes entre si, e equilateros.

XXVII.

O octaedro he huma figura solida comprehendida por oito triangulos iguaes entre si, e equilateros.

XXVIII.

O dodecaedro he huma figura solida formada por doze pentagonos iguaes entre si, equilateros, e equiangulos.

XXIX.

O icosaedro he huma figura solida formada por vinte triangulos iguaes entre si, e equilateros.

Def.

Def. A.

O solido parallelepipedo he huma figura solida comprehendida por seis figuras quadrilateras, das quaes cada duas oppostas são parallelas.

PROP. I. THEOR.

POsta huma linha recta, não póde ser que huma parte della esteja em hum plano, e a outra parte esteja fóra deste mesmo plano.

Fig. 1. Esteja a parte AB da linha recta ABC em hum plano, e a parte BC, se he possivel, esteja fóra deste plano. Neste mesmo plano poderá haver outra linha recta, como DB, a qual esteja em direitura com a recta AB. Mas isto assim supposto, as duas rectas ABC, ABD vem a ter o segmento commum AB, o que

a.Cor.11.1. não póde ser [a]. Logo he falso, que a parte AB da linha recta ABC esteja em hum plano, e a outra parte BC exista fóra deste mesmo plano.

PROP. II. THEOR.

SE duas linhas rectas se cortarem reciprocamente, existiráõ em hum mesmo plano. E tres linhas rectas, quaesquer que sejão, as quaes a duas e duas se encontrão, tambem existem no mesmo plano.

Cor.

Cortem-se as duas rectas AB, CD no ponto E. Digo, que as rectas AB, CD existem no mesmo plano. Cortem-se agora a duas e duas as tres rectas EC, CB, BE nos pontos C, B, E. Digo, que estas rectas tambem existem em hum mesmo plano. Fig. 2.

Imagine-se que passa hum plano pela recta EB, a qual poderá ser produzida, se for necessario. Faça-se gyrar este plano ao redor da recta EB, considerada como immovel, até que passe pelo ponto C. Como os pontos E, C existem no dito plano; neste mesmo plano deve tambem existir [a] a recta EC. Pela mesma razão a recta BC existe no plano, em que pela hypothesis se acha a recta EB. Logo as tres linhas rectas EC, CB, BE existem em hum mesmo plano. Mas o plano das rectas EC, EB he o mesmo [b] que o plano das rectas CD, AB. Logo as duas rectas AB, CD existem em hum mesmo plano.

a. def. 7. 1.

b. 1. 11.

PROP. III. THEOR.

SE dous planos se cortarem reciprocamente; a secção commua será huma linha recta.

Cortem-se reciprocamente os dous planos AB, BC, e seja a linha DB a secção commua. Digo, que a linha DB he huma linha recta. Fig. 3.

Se DB não he huma linha recta, tire-se no plano AB do ponto D para o ponto B a re-

cta

cta DEB; e no plano BC a recta DFB. Logo as duas rectas DEB, DFB tem os mesmos termos, e comprehendem hum espaço, o que
a.ax.10.1. he absurdo [a]. Logo a secção commua BD dos planos AB, BC não he senão huma linha recta.

PROP. IV. THEOR.

SE huma linha recta for perpendicular a outras duas rectas no ponto, onde estas duas se cortão reciprocamente; a dita recta será tambem perpendicular ao plano, que passa pelas outras duas.

Fig. 4. Seja a recta EF perpendicular ás duas AB, CD no ponto E, que he a secção commua das mesmas rectas AB, CD. Digo, que a recta EF he tambem perpendicular ao plano, que passa pelas rectas AB, CD.

Postas as quatro rectas AE, EB, CE, ED iguaes entre si, tire-se pelo ponto E no plano das rectas AB, CD a recta GEH, como quizermos. Tirem-se tambem as rectas AD, CB, e de qualquer ponto F tomado na recta EF sejão conduzidas as rectas FA, FG, FD, FC, FH, FB. Sendo pois AE=EB, e DE=EC,
a. 15. 1 e tambem o angulo AED igual [a] ao angulo
b. 4. 1. BEC; será AD=BC, e o angulo DAE igual [b] ao angulo EBC. Mas o angulo AEG he igual [a] ao angulo BEH. Logo nos dous triangulos AGE, BHE dous angulos de hum são iguaes a outros dous angulos do outro, cada hum a

ca-

cada hum. Mas o lado AE do primeiro he igual ao lado EB do ſegundo; e eſtes lados ficáo ſendo adjacentes a angulos iguaes. Logo os outros lados do primeiro triangulo ſeráo iguaes[c] c. 26. 1.
aos outros do ſegundo, cada hum a cada hum, ſegundo ficáo oppoſtos a angulos iguaes. Logo ſerá GE=EH, e AG=BH. E ſendo AE=EB, e FE commua, e ſendo iguaes, por ſerem rectos, os angulos AEF, BEF; ſerá a baze AF igual[b] á baze FB. Pela meſma b. 4. 1.
razáo ſerá CF=FD. E porque temos AD=BC, e AF=FB, e ſe tem já demonſtrado ſer DF=FC; ſerá o angulo FAD igual[d] ao d. 8. 1.
angulo FBC. Mas tambem temos viſto ſer AG=BH, e AF=FB, e o angulo FAG igual ao angulo FBH. Logo ſerá GF=FH[b]. Do meſmo modo ſendo GE=EH, GF=FH, e EF commua; ſerá o angulo GEF igual[d] ao angulo HEF, e por conſequencia ſeráo rectos[e] os meſmos angulos GEF, HEF. Logo e. def. 10. 1.
a recta EF cahe perpendicularmente ſobre a recta GH. Com o meſmo diſcurſo ſe póde demonſtrar, que a recta EF deve ſer perpendicular a todas as rectas, que pelo ponto E forem conduzidas no plano das rectas AB, CD. Mas huma linha recta he perpendicular a hum plano, quando he perpendicular a todas as rectas, que a tocáo, e que exiſtem no meſmo plano[f]. f. def. 3. 11.
Logo a recta FE he perpendicular ao plano, que paſſa pelas rectas AB, CD.

PROP.

PROP. V. THEOR.

SE huma linha recta for perpendicular a outras tres rectas no ponto, em que estas se cortão reciprocamente; estas tres rectas existiráõ em hum mesmo plano.

Fig. 5. Seja a recta AB perpendicular a cada huma das outras tres BC, BD, BE na secção commua B. Digo, que as rectas BC, BD, BE existem em hum mesmo plano.

Existão as duas rectas BD, BE em hum plano, e fóra deste plano, se he possivel, esteja a recta BC. Considere-se produzido o plano das rectas AB, BC até que chegue a cortar o plano das rectas BD, BE, e seja a recta[a] BF a secção commua destes planos. Logo no plano, que passa pelas rectas AB, BC existem as tres linhas rectas AB, BC, BF. E como a recta AB he perpendicular a cada huma das duas BD, BE, será tambem perpendicular ao plano que passa por ellas[b], e por consequencia a todas as rectas, que a tocão, e que existem no mesmo plano[c]. Mas a recta BF toca a recta AB no ponto B, e existe no plano das rectas BD, BE. Logo a recta AB será perpendicular á recta BF, e assim será recto o angulo ABF. Mas tambem pela hypothesis he recto o angulo ABC. Logo será ABF = ABC, o que não póde ser, porque existindo am-

a. 3. 11.

b. 4. 11.

c. def. 3. 11.

ambos em hum mesmo plano, he evidente, que estes angulos são desiguaes. Logo a recta BC não está fóra do plano, que passa pelas outras duas BD, BE, mas sim existe juntamente com ellas no mesmo plano.

PROP. VI. THEOR.

SE duas linhas rectas forem perpendiculares ao mesmo plano; estas duas rectas serão tambem parallelas huma á outra.

Sejão as duas rectas AB, CD perpendiculares ao mesmo plano BDE. Digo, que as rectas AB, CD são parallelas entre si. Fig. 6.

Tire-se a recta BD entre os pontos B, D, nos quaes as rectas AB, CD encontrão o plano BDE. Seja conduzida neste mesmo plano a recta DE perpendicular á BD, e igual á AB. Tirem-se tambem as rectas BE, AE, AD. Como a recta AB he perpendicular ao plano BDE, tambem será perpendicular a todas as rectas, que existirem no mesmo plano, e a tocarem [a]. a. def. 3. 11.
Logo a recta AB será perpendicular a cada huma das duas BD, BE, e por consequencia serão rectos os angulos ABD, ABE. Pela mesma razão são rectos tambem os angulos CDB, CDE. E sendo AB=DE, e BD commua; serão as duas AB, BD iguaes ás duas ED, DB. Mas os angulos ABD, EDB são iguaes, por serem rectos. Logo será a baze AD igual [b] á b. 4. 1.
ba-

baze BE. Tambem ſendo AB = DE, e BE = AD, as duas AB, BE ſeráo iguaes ás duas ED, DA, cada huma a cada huma. Mas a baze AE
c. 8. 1. he commua. Logo o angulo ABE ſerá igual[c] ao angulo EDA. Mas ABE he recto. Logo ſerá tambem recto o angulo EDA, e por conſequencia a recta ED ſerá perpendicular á recta DA. Mas a meſma ED he tambem perpendicular a cada huma das duas BD, DC. Logo ED he perpendicular a todas as tres rectas BD, DA, DC na ſecção commua D, e por conſequencia eſtas tres rectas devem exiſtir
5. 11. em hum meſmo plano[d]. Mas a recta AB exiſte no plano das rectas BD, DA, porque tres rectas, que a duas e duas ſe encontráo, eſtáo
e. 2. 11. poſtas em hum ſó e meſmo plano[e]. Logo as tres rectas AB, BD, DC exiſtem no meſmo plano. Mas os angulos ABD, BDC são rectos.
28. 1. Logo as rectas AB, CD são parallelas[f].

PROP. VII. THEOR.

SE duas linhas rectas forem parallelas, e de qualquer ponto de huma para qualquer ponto da outra eſtiver tirada huma recta; eſta recta exiſtirá no plano, que paſſa pelas ditas duas parallelas.

Fig. 7. Sejáo as duas rectas parallelas AB, CD, e entre os pontos E, F eſteja tirada a outra recta EF. Digo, que a recta EF exiſte no pla-

plano, que passa pelas duas parallelas AB, CD.

Se a recta tirada do ponto E para o ponto F não existe no dito plano; estará fóra delle, como a recta EGF. Agora no mesmo plano das parallelas AB, CD imagine-se tirada do ponto E para o ponto F a recta EHF. Mas tambem EGF se quer considerar como huma linha recta. Logo as duas rectas EHF, EGF comprehendem hum espaço, o que não póde ser[a]. Logo a recta, que do ponto E se tira para o ponto F, não existe senão no plano, que passa pelas duas parallelas AB, CD. a. ax. 10. I.

PROP. VIII. THEOR.

SE forem duas linhas rectas parallelas, e for huma dellas perpendicular a hum plano; tambem a outra será perpendicular ao mesmo plano.

Sejão as duas parallelas AB, CD, e seja AB perpendicular ao plano BDE. Digo, que tambem CD será perpendicular ao mesmo plano BDE. Fig. 6.

Sejão os pontos B, D aquelles, onde as parallelas AB, CD encontrão ao plano BDE. Tire-se a recta BD. As tres AB, CD, BD existem em hum mesmo plano. No plano BDE entenda-se lançada a recta DE perpendicular á BD, e igual á AB. Tirem-se finalmente as rectas BE, AE, AD. Como pela supposição a

recta AB he perpendicular ao plano BDE, tambem será perpendicular a todas as rectas, que
a. def. 3. 11. existirem no plano BDE, e a tocarem [a]. Logo serão rectos os angulos ABD, ABE. E como as parallelas AB, CD são cortadas pela recta BD, os angulos ABD, CDB devem ser
b. 29. 1. iguaes a dous rectos [b]. Mas ABD he recto. Logo será tambem recto o angulo CDB, e assim a recta CD será perpendicular á BD. E sendo AB = DE, e BD commua; as duas AB, BD serão iguaes ás duas ED, DB. Mas o angulo ABD he igual ao angulo EDB, porque am-
c. 4. 1. bos são rectos. Logo será a baze AD igual [c] á baze BE. Sendo pois AB = DE, e BE = AD; as duas AB, BE devem ser iguaes ás duas ED; DA. Mas a baze AE he commua. Logo será
d. 8. 1. o angulo ABE igual [d] ao angulo EDA. E como ABE he hum angulo recto, tambem será recto o angulo EDA, e por consequencia será a recta ED perpendicular á DA. Mas ED he tambem perpendicular á BD. Logo ED será
e. 4. 11. perpendicular ao plano, que passa [e] pelas rectas BD, DA, e assim será perpendicular a todas as mais rectas, que a tocarem, existentes
f. def. 3. 11. no mesmo plano [f]. Mas a recta DC está no plano das rectas BD, DA, porque cada huma destas tres rectas existe no mesmo plano, em que existem as parallelas AB, CD. Logo a recta ED he perpendicular á CD, e assim CD he perpendicular á DE. Mas a mesma CD he tambem perpendicular á DB. Logo a recta CD he perpendicular a ambas as rectas DE, DB na

sec-

secção commua D, e por consequencia he perpendicular ao plano, que passa por ellas, isto he, ao plano BDE.

PROP. IX. THEOR.

As rectas, que são parallelas á outra recta, e não existem no plano desta, são tambem parallelas entre si.

Sejão as duas rectas AB, CD parallelas á recta EF, e estejão as mesmas rectas AB, CD fóra do plano da recta EF. Digo, que AB he parallela á CD. Fig. 8.

Tome-se na recta EF hum ponto G, qualquer que seja, e deste ponto no plano, que passa pelas duas EF, AB, tire-se a recta GH perpendicular á EF; e no plano das rectas EF, CD tire-se GK tambem perpendicular á EF. Sendo EF perpendicular a cada huma das duas GH, GK, será tambem perpendicular ao plano, que passa[a] pelas mesmas rectas GH, GK. a. 4. 11. Mas a recta EF he parallela á AB. Logo AB deve ser perpendicular ao plano, que passa[b] b. 8. 11. pelas rectas HG, GK. Pela mesma razão tambem a recta CD he perpendicular ao mesmo plano HGK. Logo sendo as duas rectas AB, CD perpendiculares ao mesmo plano, que passa pelas rectas HG, GH, necessariamente devem c. 6. 11. ser parallelas[c] entre si.

PROP. X. THEOR.

SE duas linhas rectas, que formão hum angulo em hum plano, forem parallelas a outras duas, que tambem fazem hum angulo em outro plano; o angulo feito pelas primeiras será igual ao angulo formado pelas segundas.

Fig. 9. Sejão as duas rectas AB, BC parallelas ás duas DE, EF, que existem em plano differente do plano das rectas AB, BC. Digo, que o angulo ABC formado pelas rectas AB, BC he igual ao angulo DEF feito pelas rectas DE, EF.

Ponhão-se iguaes entre si as rectas BA, BC, ED, EF, e tirem-se as outras AD, CF, BE, AC, DF. Sendo BA igual e parallela á ED, será AD igual[a] e parallela á BE. Pela mesma razão será CF igual e parallela á AE. Logo sendo tanto AD, como CF, igual e parallela á BE, será AD parallela[b] á CF; e tambem será AD = CF[c]; e finalmente será AC igual[a] e parallela á DF. E como as duas AB, BC são iguaes ás duas DE, EF, e a baze AC he igual á baze DE, o angulo ABC será igual[d] ao angulo DEF.

a. 33. 1.
b. 9. 11.
c. ax. 1. 1.
d. 8. 1.

PROP.

PROP. XI. PROB.

DE hum ponto dado fóra de hum plano conduzir huma linha recta perpendicular a este plano.

Seja o ponto A fóra do plano BH. Deve-se do ponto A conduzir huma recta perpendicular ao plano BH.

Tire-se no plano BH qualquer recta BC, Fig. 10.
e seja conduzida do ponto A a recta AD perpendicularmente [a] sobre BC. Se a recta AD for a. 12. 1.
perpendicular ao plano BH; já está feito o que se pede. Mas não o sendo, no plano BH tire-se do ponto D a recta DE perpendicular [b] á b. 11. 1.
BC; e do ponto A a recta AF perpendicular [a] á DE; e finalmente faça-se passar pelo ponto F a recta GH parallela [c] á BC. Demonstra- c. 31. 1.
remos, que a recta AF he perpendicular ao plano BH. Sendo a recta BC perpendicular a cada huma das rectas ED, DA, será tambem perpendicular ao plano, que passa [d] pelas mes- d. 4. 11.
mas rectas ED, DA. Mas a recta GH he parallela á BC; e quando, postas duas parallelas, huma dellas he perpendicular a hum plano, tambem a outra he perpendicular [e] ao mes- e. 8. 11.
mo plano. Logo a recta GH será perpendicular ao plano, que passa pelas rectas ED, DA, e por consequencia será perpendicular a todas as rectas, que existindo no mesmo plano a tocarem [f]. Mas a recta AF existe no plano das f. def. 3. 11.
rectas ED, DA, e toca a recta GH no pon-

to

to F. Logo GH deve ser perpendicular á AF, e assim AF vem a ser perpendicular á GH. Mas AF he perpendicular á DE. Logo AF he perpendicular a cada huma das duas GH, DE, e por consequencia he perpendicular ao plano, que passa pelas rectas ED, GH, que he o mesmo que o plano dado BH. Logo do ponto dado A existente fóra do plano BH temos conduzido a recta AF perpendicular ao mesmo plano proposto BH.

PROP. XII. PROB.

DAdo hum plano, e dado hum ponto neste plano, levantar do ponto dado huma perpendicular ao mesmo plano.

Fig. 11. Seja dado o plano AC, e nelle o ponto A. Deve-se do ponto A levantar huma recta, que seja perpendicular ao plano AC.

Tomado fóra do plano AC hum ponto B, qualquer que seja, tire-se deste ponto B a re-
a. 11. 11. cta BC perpendicular[a] ao plano AC, e faça-
b. 31. 1. se passar pelo ponto A a recta AD parallela[b] á BC. Sendo AD, e CB parallelas entre si, e sendo BC perpendicular ao plano AC; tam-
c. 8. 11. bem AD será perpendicular[c] ao mesmo plano AC. Logo do ponto A dado no plano AC temos levantado a recta AD perpendicular ao plano proposto AC.

PROP.

PROP. XIII. THEOR.

DE hum mesmo ponto tomado em hum plano não se poderão levantar para a mesma parte duas linhas rectas, que sejão perpendiculares ao dito plano. Tambem de hum ponto tomado fóra de hum plano não se poderá conduzir senão huma só linha recta perpendicularmente sobre o mesmo plano.

Sejão levantadas, se he possivel, do ponto Fig. 12.
A tomado no plano DE sobre este mesmo plano, e para a mesma parte as duas perpendiculares AB, AC, pelas quaes se imagine, que passa outro plano.

Este plano cortando o plano proposto DE, fará com elle huma secção commua, e fará esta huma linha recta [a], a qual passará pelo ponto A. a. 3. 11.
Seja a recta DAE esta secção commua. Logo as tres rectas AB, AC, DAE devem existir no mesmo plano. Sendo pois CA perpendicular ao plano DE, será tambem perpendicular a todas as rectas, que existem neste plano, e a tocarem. Mas a recta DAE existe no plano DE, e toca a recta CA no ponto A. Logo será CA perpendicular á DAE, e assim será recto o angulo CAE. Do mesmo modo he recto tambem o angulo BAE. Logo será CAE=BAE, o que he grande absurdo; porque existindo estes angulos no mesmo plano,

no, he evidente ser CAE < BAE. Logo de hum mesmo ponto tomado em hum plano não se podem levantar para a mesma parte duas rectas, que sejão perpendiculares ao dito plano.

Mas se de hum ponto tomado fóra de hum plano quizermos que se possão conduzir duas rectas perpendiculares ao mesmo plano; estas
b. 6. 11. duas rectas serão parallelas[b]. Mas isto he impossivel, porque duas parallelas nunca se chegão a tocar. Logo de hum ponto tomado fóra de hum plano não se póde conduzir senão huma só linha recta perpendicular ao mesmo plano.

PROP. XIV. THEOR.

AQuelles planos são parallelos entre si, sobre os quaes a mesma linha recta cahe perpendicularmente.

Fig. 13. Seja a mesma linha recta AB perpendicular tanto ao plano CD, como ao plano EF. Digo, que os planos CD, EF são parallelos.

Se os planos CD, EF não são parallelos, produzidos que sejão, hão de concorrer para alguma parte. Concorrão pois, e seja a recta GH a secção commua delles; e tomado na mesma secção GH o ponto K, qualquer que seja, tirem-se as rectas AK, BK. Sendo a recta AB perpendicular ao plano EF, tambem será perpendicular á recta BK, existente no mesmo
a. def. 3. 11. plano EF produzido[a]. Logo he recto o angulo ABK. Pela mesma razão tambem he recto o an-

angulo BAK, e consequentemente os dous angulos ABK, BAK do triangulo ABK são iguaes a dous rectos, o que he impossivel [b]. Logo os dous planos CD, EF produzidos quanto quizerem não concorrem. Logo são parallelos [c].

b. 17. 1.
c. def. 8. 11.

PROP. XV. THEOR.

SE duas linhas rectas, que fazem hum angulo em hum plano, forem parallelas a outras duas, que formão outro angulo em outro plano; o plano, que passar pelas primeiras, será parallelo ao plano, que passar pelas segundas.

As duas rectas AB, BC, que formão o angulo ABC, sejão parallelas ás outras duas DE, EF, que fazem o angulo DEF. Digo, que o plano ABC, que passa pelas rectas AB, BC he parallelo ao plano DEF, que passa pelas rectas DE, EF. Fig. 14.

Tire-se do ponto B a recta BG perpendicular [a] ao plano, que passa pelas rectas DE, EF, e seja G o ponto, em que a recta AG encontra o plano DEF. Tirem-se [b] pelo ponto G as rectas GH parallela á ED, e GK parallela á EF. Como a recta BG cahe perpendicularmente sobre o plano DEF, tambem será perpendicular [c] a todas as mais rectas, que existindo neste mesmo plano, a tocarem. Mas as duas rectas GH, GK existem no dito plano, e tocão a recta BG. Logo será BG perpen-

a. 11. 11.
b. 31. 1.
c. def. 3. 11.

pendicular tanto á GH, como á GK, e assim será recto cada hum dos angulos BGH, BGK.
d. 9. 11. Sendo pois BA parallela [d] á GH, por serem ambas parallelas á mesma recta DE, ainda que existão em differentes planos, os angulos GBA,
e. 29. 1. BGH serão iguaes [e] a dous rectos. Mas BGH he hum angulo recto. Logo será tambem recto o angulo GBA, e por consequencia será GB perpendicular á BA. Pela mesma razão a recta GB deve ser perpendicular á BC. Logo sendo GB perpendicular a cada huma das duas BA, BC no ponto, em que estas se cortão,
f. 4. 11. a mesma GB será tambem perpendicular [f] ao plano conduzido pelas rectas BA, BC. Mas o mesmo se póde demonstrar a respeito do plano, que passa pelas rectas DE, EF. Logo a mesma recta BG he perpendicular tanto ao plano ABC, como ao plano DEF. Mas os planos, sobre os quaes a mesma recta cahe per-
g. 14. 11. pendicularmente, são parallelos [g] entre si. Logo o plano, que passa pelas rectas AB, BC, he parallelo ao plano, que passa pelas rectas DE, EF.

PROP. XVI. THEOR.

SE dous planos parallelos forem cortados por algum outro plano; as secções communas destes planos serão parallelas.

Fig. 15. Sejão cortados os dous planos AB, CD pelo plano EFHG, e sejão as rectas EF, GH

as

as secções communas destes planos. Digo, que as rectas EF, GH são parallelas.

Se as rectas EF, GH não são parallelas, produzidas que sejão, devem concorrer ou para a parte FH, ou para a parte opposta EG. Sejão por exemplo produzidas para a parte FH, e concorrão no ponto K. Como a recta EFK existe no plano AB, qualquer ponto della, como o ponto K, deve existir no mesmo plano. Pela mesma razão o ponto K deve tambem existir no plano CD. Logo os planos AB, CD produzidos que sejão, concorrem entre si. Mas isto he contra a supposição de serem parallelos os planos AB, CD. Logo as rectas EF, GH não concorrem para a parte FH por mais que sejão produzidas. Com o mesmo discurso podemos demonstrar, que as mesmas rectas EF, GH produzidas para a parte EG, nunca poderão concorrer entre si. Logo resta que sejão parallelas.

PROP. XVII. THEOR.

SE duas linhas rectas forem cortadas por differentes planos todos entre si parallelos; estas rectas ficarão todas divididas na mesma razão.

Sejão cortadas as duas rectas AB, CD pelos planos parallelos GH, KL, MN nos pontos A, E, B; C, F, D. Digo, que será AE : EB : : CF : FD. Fig. 16.

Ti-

Tirem-se as rectas AC, BD, AD, e encontre a recta AD o plano KL no ponto X. Tirem-se tambem as rectas EX, XF. Como os dous planos parallelos KL, MN são cor-
a. 16. 11. tados pelo plano EBDX, serão parallelas[a] entre si as secções communas EX, BD. Pela mesma razão porque os dous planos parallelos GH, KL são cortados pelo plano AXFC, devem ser tambem parallelas as secções communas AC, XF. Sendo pois no triangulo ABD a recta EX parallela ao lado BD, será AE : EB : : AX :
b. 2. 6. XD[b]. E no triangulo ADC, sendo a recta XF parallela ao lado AC, será AX : XD : : CF : FD. Mas temos visto ser AX : XD : : AE : EB.
c. 11. 5. Logo será AE : EB : : CF : FD[c].

PROP. XVIII. THEOR.

SE huma linha recta cahir perpendicularmente sobre hum plano; todos os planos, que passarem pela dita recta, serão perpendiculares ao dito plano.

Fig. 17. Caia a recta AB perpendicularmente sobre o plano CK. Digo, que todos os planos conduzidos pela recta AB são perpendiculares ao plano CK.

Seja conduzido pela recta AB o plano DE, e seja a recta CE a secção commua dos planos DE, CK. Tome-se na recta CE o ponto F, como se quizer; e deste ponto F tire-se no plano DE a recta FG perpendicular á CE. Como mo pela hypothesis a recta AB he perpendicular ao plano CK; será tambem perpendicular a todas as rectas, que existirem no mesmo plano, e a tocarem[a]. Logo será tambem perpendicular á CE, e por consequencia será recto o angulo ABF. Mas GFB he recto. Logo será AB parallela[b] á FG. Mas AB he perpendicular ao plano CK. Logo será tambem FG perpendicular[c] ao mesmo plano CK. Mas hum plano he perpendicular a outro plano, quando as rectas tiradas em hum dos planos perpendicularmente á secção commua dos mesmos planos são tambem perpendiculares[d] ao outro plano; e juntamente temos demonstrado, que a recta FG tirada no plano DE perpendicularmente sobre a secção commua CE dos planos DE, CK he perpendicular ao plano CK. Logo o plano DE he perpendicular ao plano CK. Do mesmo modo se demonstrará, que todos os mais planos, que forem conduzidos pela recta AB, serão perpendiculares ao mesmo plano CK.

a. def 3. 11.

b. 28. 1.

c. 8. 11.

d. def. 4. 11.

PROP. XIX. THEOR.

SE dous planos, que se cortão reciprocamente, forem perpendiculares a hum terceiro plano; a secção commua dos ditos planos será tambem perpendicular ao terceiro plano.

Sejão os dous planos AB, BC perpendicu- Fig. 18.

la-

lares ao plano ADC, e seja a recta BD a secção commua dos mesmos planos AB, BC, que reciprocamente se cortão. Digo, que a recta BD he perpendicular ao plano ADC.

Supponhamos não ser a recta BD perpendicular ao plano ADC. Tire-se do ponto D no plano AB a recta DE perpendicular á AD; e no plano BC tire-se a recta DF perpendicular á CD. Sendo o plano AB perpendicular ao plano ADC; e sendo a recta ED existente no plano AB perpendicular á secção commua AD dos planos AB, ADC; será DE perpendicu-
a. def. 4. 11. lar[a] ao plano ADC. Pela mesma razão deve ser a recta DF perpendicular ao mesmo plano ADC. Logo do mesmo ponto D existente no plano ADC estão levantadas para a mesma parte as duas rectas DE, DF perpendiculares ao
b. 13. 11. mesmo plano ADC, o que não póde ser[b]. Logo do ponto D não se póde levantar sobre o plano ADC huma perpendicular, que não seja a recta DB, que he a secção commua dos planos AB, BC. Logo a recta DB he perpendicular ao plano ADC.

PROP. XX. THEOR.

SE hum angulo solido for feito por tres angulos planos; dous destes tomados juntos como quizermos, serão maiores que o terceiro.

Fig. 19. Seja o angulo solido A formado pelos tres

angulos planos BAC, CAD, DAB. Digo, que dous deftes angulos, quaefquer que fejáo, tomados juntamente sáo maiores que o terceiro.

Se os tres angulos BAC, CAD, DAB sáo iguaes entre fi, fica evidente a verdade do que fe affirma. Mas fuppofto ferem defiguaes, feja o angulo BAC náo menor que qualquer dos outros dous, e ao mefmo tempo feja maior que o angulo DAB. No plano, que paffa pelas rectas BA, AC tire-fe do ponto A á recta AE de maneira que feja o angulo BAE=DAB [a]. a. 23. 1.
Ponha-fe AE=AD, e pelo ponto E faça-fe paffar a recta BEC, que córte as duas AB, AC nos pontos B, C, e finalmente tirem-fe as rectas DB, DC. Sendo DA=AE, e AB commua, feráo as duas DA, AB iguaes ás duas EA, AB. Mas temos o angulo DAB=BAE. Logo ferá a baze DB igual [b] á baze BE. E como as duas rectas BD, DC tomadas juntas sáo b. 4. 1.
maiores [c] que CB, e he DB=BE; tirando c. 20. 1.
de huma parte a recta DB, e de outra a recta BE, ficará DC>EC. Sendo pois DA=AE, e AC commua, e DC>EC, ferá o angulo DAC>EAC [d]. Mas pela conftrucçáo te- d. 25. 1.
mos DAB=BAE. Logo os angulos DAB, DAC tomados juntos sáo maiores que o angulo BAC. Mas temos fuppofto efte angulo BAC náo menor que qualquer dos dous DAB, DAC. Logo o mefmo angulo BAC juntamente com hum, feja qualquer que for, dos ditos angulos DAB, DAC, ferá maior do que o outro, que ficar fó dos mefmos angulos DAB, DAC.

PROP.

PROP. XXI. THEOR.

OS angulos planos, qualquer que seja o numero delles, que formão hum angulo solido, todos juntamente tomados são menores que quatro angulos rectos.

Fig. 20. Seja primeiramente o angulo solido A formado pelos tres angulos planos BAC, CAD, DAB. Digo, que os angulos BAC, CAD, DAB tomados juntos são menores que quatro angulo rectos.

Tomem-se, como se quizer, nas rectas AB, AC, AD os pontos B, C, D, e tirem-se as rectas BC, CD, DB. Como o angulo solido B he formado pelos tres angulos planos CBA, ABD, DBC; dous destes angulos, quaesquer a. 20. 11. que sejão, tomados juntos, serão maiores[a] que o terceiro. Logo os dous angulos CBA, ABD são maiores que o angulo DBC. Do mesmo modo os dous BCA, ACD são maiores que DCB; e os dous CDA, ADB são maiores que BDC. Logo os seis angulos CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB tomados todos juntamente serão maiores do que os tres DBC, BCD, CDB tambem tomados juntos. Mas os b. 32. 1. tres DBC, BCD, CDB são iguaes[b] a dous rectos. Logo os seis angulos CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB são maiores que dous rectos. E como os tres angulos de cada hum dos triangulos ABC, ACD, ADB são

iguaes

iguaes a dous rectos; os nove angulos CBA, BAC, ACB, ACD, CDA, DAC, ADB, DBA, BAD dos ditos tres triangulos serão iguaes a seis angulos rectos. Mas seis destes angulos, isto he, os angulos CBA, ACB, ACD, CDA, ADB, DBA são maiores que dous rectos, como já se tem demonstrado. Logo os tres, que ficão, e que formão o angulo solido A, isto he, os angulos BAC, CAD, DAB serão menores que quatro angulos rectos.

Seja agora o angulo solido A formado por quantos angulos planos quizermos, como por exemplo pelos angulos planos BAC, CAD, DAE, EAF, FAB. Digo outra vez, que todos estes angulos tomados juntos são menores que quatro rectos. Fig. 21.

Sejão cortados os planos, em que existem os ditos angulos, por qualquer outro plano, e sejão as rectas BC, CD, DE, EF, FB as secções communs de todos estes planos. Como o angulo solido B he feito pelos tres angulos planos CBA, ABF, FBC; dous destes angulos tomados, como se quizer, serão sempre maiores[a] que o terceiro. Logo os dous CBA, ABF são maiores que FBC. Pela mesma razão cada dous angulos planos formados nos pontos C, D, E, F, os quaes angulos são adjacentes ás bazes dos triangulos, que tem como vertice commum o ponto A, são maiores que o terceiro feito no mesmo ponto que os outros dous, e que sempre vem a ser hum a. 20. 11.

T an-

angulo do polygono BCDEF. Logo todos os angulos existentes sobre as bazes dos triangulos, cujo vertice commum he o ponto A, tomados juntamente, são maiores que todos os angulos do polygono BCDEF tambem tomados juntos. Mas como todos os angulos dos ditos triangulos tomados juntamente são iguaes a duas vezes tantos rectos, quantos são os mesmos triangulos[b], isto he, quantos são os lados do polygono BCDEF; e além disto todos os angulos de qualquer polygono juntamente com quatro rectos são iguaes a duas vezes tantos rectos, quantos são os lados do polygono[c]; serão todos os angulos dos ditos triangulos tomados juntamente iguaes a todos os angulos do polygono tambem tomados juntos, e mais a quatro rectos. Mas já se tem demonstrado, que todos os angulos existentes sobre as bazes dos ditos triangulos são maiores que todos os angulos do polygono BCDEF. Logo os outros angulos dos mesmos triangulos, que formão o angulo solido A, devem ser menores que quatro rectos. Fica pois demonstrado, que os angulos planos, que em qualquer numero formão hum angulo solido, tomados juntamente, são menores que quatro angulos rectos.

b. 32. 1.

c. Cor. 1. 32. 1.

PROP. XXII. THEOR.

SE houver tres angulos planos, dos quaes dous tomados como quizermos são maiores que o terceiro; e se os lados,

dos, que formão os ditos angulos, forem iguaes entre si; com as rectas, que estiverem tiradas entre as extremidades dos ditos lados iguaes, sempre se poderá construir hum triangulo.

Sejão os tres angulos planos ABC, DEF, GHK, e dous destes angulos quaesquer que forem sejão maiores que o terceiro. Sejão tambem iguaes entre si os lados AB, BC; DE, EF; GH, HK. Tirem-se as rectas AC, DF, GK. Digo, que se poderá fazer hum triangulo com as tres rectas AC, DF, GK, isto he, que duas quaesquer destas tres rectas serão sempre maiores que a terceira. Fig. 22.

Se os angulos ABC, DEF, GHK forem iguaes; tambem as rectas AC, DF, GK serão iguaes [a], e por consequencia duas destas, quaesquer que sejão, serão maiores que a terceira. Mas supponhamos serem desiguaes os angulos ABC, DEF, GHK, e juntamente ser o angulo ABC não menor que qualquer dos outros dous DEF, GHK. Será a recta AC não menor que DF, nem menor que GK [b]. He pois evidente, que a recta AC juntamente com a recta DF será maior que GK, e que a mesma AC juntamente com GK será maior que DF. Digo, que as duas DF, GK tomadas juntas são maiores que AC. Faça-se [c] no ponto B, e com a recta AB o angulo ABL = GHK, e ponha-se BL igual a huma das rectas

a. 4. 1.
b. 4. ou 24. 1.
c. 23. 1.

ctas AB, BC, DE, EF, GH, HK. Tiremse as outras AL, LC. Como cada huma das rectas AB, BL he igual a cada huma das rectas GH, HK; e são iguaes os angulos compre-
a. 4. 1. hendidos ABL, GHK; serão tambem iguaes[a] entre si as bazes AL, GK. E como os angulos E, H tomados juntos são pela hypothesis maiores que o angulo ABC; e temos o angu-
d. 24. 1. lo H=ABL; será o angulo E>LBC. Sendo pois cada huma das duas LB, BC igual a cada huma das duas DE, EF; e sendo o angulo DEF>LBC; será a baze DF maior[d] que a baze LC. Mas temos visto ser GK=AL. Logo as duas rectas DF, GK tomadas juntas serão maiores que as duas AL, LC tambem tomadas juntas. Mas as duas AL, LC juntas
e. 20. 1. são maiores[e] que AC. Logo as duas DF, GK tomadas juntas serão muito maiores que AC. Fica pois demonstrado, que das tres rectas AC, DF, GK duas, quaesquer que sejão, tomadas juntas são maiores que a terceira, e que assim
f. 22. 1. poderemos com ellas construir[f] hum triangulo.

PROP. XXIII. PROB.

DAdos tres angulos planos, que todos juntos são menores que quatro angulos rectos, e dos quaes dous tomados, como quizermos, são maiores que o terceiro; formar com elles hum angulo solido.

Se-

Sejão os tres angulos planos ABC, DEF, GHK tomados juntos menores que quatro rectos; e dous delles, quaeſquer que ſejão, tambem tomados juntos, ſupponhão-ſe maiores que o terceiro. Com os tres angulos planos ABC, DEF, GHK ſe deve formar hum angulo ſolido. Fig. 23.

Ponhão-ſe iguaes entre ſi as rectas AB, BC; DE, EF; GH, HK, e tirem-ſe as outras AC, DF, GK. Com eſtas tres rectas AC, DF, GH poder-ſe-ha fazer hum triangulo [a]. a. 22. 11.
Faça-ſe [b] pois, e ſeja o triangulo LMN de ſorte b. 22. 1.
te que ſeja AC = LM, DF = MN, e GK = Fig. 24.
NL. Circunſcreva-ſe [c] ao triangulo LMN o cir- 25.
culo LMN, cujo centro X cahirá ou dentro c. 5. 4.
do triangulo, ou em hum dos lados delle, ou inteiramente fóra do triangulo.

Caia em primeiro lugar o centro X dentro Fig. 24.
do triangulo LMN, e tirem-ſe os raios LX,
MX, NX. Digo, que he AB > LX. Senão Fig. 23.
for AB > LX, ſerá ou AB = LX, ou AB < 24.
LX. Supponha-ſe primeiramente ſer AB = LX. Sendo pois AB = LX, e ſendo pela conſtrucção AB = BC, e LX = XM; ſerão as duas AB, BC iguaes ás duas LX, MX cada huma a cada huma. Mas a baze AC do triangulo ABC he igual á baze LM do triangulo LXM.
Logo ſerá o angulo ABC = LXM [d]. Pela meſ- d. k. 1.
ma razão ſerá DEF = MXN, e GHK = NXL. Logo os tres angulos ABC, DEF, GHK tomados juntos ſão iguaes aos tres LXM, MXN, NXL tambem tomados juntos. Mas eſtes ſão

iguaes

e. Cor. 2. iguaes a quatro rectos [e]. Logo os tres ABC,
15. 1. DEF, GHK serão iguaes a quatro rectos, o que he absurdo, porque os temos supposto todos juntos menores que quatro rectos. Logo não podia ser AB = LX.

Digo agora, que nem póde ser AB < LX. Por ora supponha-se AB < LX. Faça-se sobre a recta LM, e para a parte do centro X o triangulo LOM, de maneira que seja LO =
b. 22. 1. AB, e OM = BC [b]. Sendo pois a baze LM
d. 8. 1. igual á baze AC; será o angulo LOM = ABC [d]. Mas temos supposto ser AB, isto he, LO < LX. Logo as duas rectas LO, MO devem cahir para dentro do triangulo LXM; porque se se ajustassem sobre os lados LX, XM do triangulo LXM, ou inteiramente cahissem para fóra do mesmo triangulo, seriáo ou iguaes, ou
f. 21. 1. maiores que os lados LX, XM [f]. Logo deve ser o angulo LOM, isto he, o angulo ABC > LXM [f]. Com o mesmo discurso se demonstra ser DEF > MXN, e GHK > NXL. Logo os tres angulos ABC, DEF, GHK tomados juntos são maiores que os tres LXM, MXN, NXL tambem tomados juntos, e por consequencia os ditos tres angulos ABC, DEF, GHK são maiores que quatro rectos. Mas isto não póde ser, porque pela hypothesis erão todos juntos menores que quatro rectos. Logo he falso ser AB < LX. Mas tambem se tem demonstrado, que não póde ser AB = LX. Logo fica, que seja AB > LX.

Fig. 25. Caia agora o centro do circulo em hum

dos

dos lados do triangulo LMN, por exemplo no lado MN, e ſeja o ponto X o dito centro. Digo outra vez, que he AB > LX. Senão for AB > LX, ſerá ou AB = LX, ou AB < LX. Seja primeiramente AB = LX. Serão as duas rectas AB, BC juntas, iſto he, as duas DE, EF, iguaes ás duas MX, XL, iſto he, iguaes á MN. Mas he MN = DF. Logo as duas DE, EF tomadas juntamente ſerão iguaes á DF, o que não póde ſer [g]. Não he pois AB = LX. Mas nem póde ſer AB < LX. Porque feita eſta ſuppoſição, finalmente ſe manifeſta hum abſurdo ainda maior. Logo deve ſer AB > LX. Fig. 23. 25. g. 20. 1.

Caia finalmente o centro X do circulo fóra do triangulo LMN. Tirem-ſe os ſemidiametros LX, MX, NX. Digo, que tambem neſte caſo ſerá AB > LX. Senão for AB > LX; ſerá AB = LX, ou AB < LX. Seja em primeiro lugar AB = LX. Podemos demonſtrar, como no primeiro caſo, ſer o angulo ABC = MXL, e GHK = LXN. Logo ſerá o angulo total MXN igual aos dous ABC, GHK tomados juntamente. Mas os dous ABC, GHK são maiores que o angulo DEF. Logo ſerá MXN > DEF. E como os dous lados DE, EF são iguaes aos dous MX, XN cada hum a cada hum; e tambem a baze DF he igual á baze MN, ſerá o angulo MXN = DEF [d]; o que he abſurdo, por termos já demonſtrado ſer MXN > DEF. Logo não he AB = LX. Fig. 26. 27. d. 8. 1.

Tambem digo, que não póde ſer AB < LX. Se quizermos que ſeja AB < LX, ſe-

rá o angulo ABC > MXL, e GHK > LXN, como temos visto no primeiro caso. Faça-se no ponto B, e com a recta BC o angulo CBP = GHK, e posta BP = HK, tirem-se as rectas CP, AP. Sendo CB = GH, seráo as duas CB, BP iguaes ás duas GH, HK. Mas os angulos CBP, GHK comprehendidos por estas rectas são iguaes. Logo será a baze CP igual á baze GK, ou LN. E nos triangulos ABC, MXL, dos quaes cada hum he isosceles, sendo o angulo ABC no vertice maior do que o angulo MXL tambem no vertice; o angulo MLX fei-
h. 32. 1. to sobre a baze ML será maior h que o angulo ACB formado sobre a baze AC. Pela mesma razáo sendo GHK, isto he, CBP > LXN; será tambem XLN > BCP. Logo será o angulo total MLN maior que o total ACP. E como os dous lados ML, LN são iguaes aos dous AC, CP, cada hum a cada hum; e temos o angulo MLN > ACP; será a baze MN ma-
i. 24. 1. ior i que a baze AP. Mas he MN = DF. Logo será DF > AP. Logo sendo os lados DE, EF iguaes aos lados AB, BP, cada hum a cada hum; e sendo DF > AP; será o angulo
k. 25. 1. DEF > ABP k. Mas o angulo ABP he igual aos dous ABC, CBP, isto he, aos dous ABC, GHK tomados juntamente. Logo o angulo DEF será maior que os dous ABC, GHK tomados juntos, o que he absurdo, por ser aquelle menor do que estes dous juntos pela supposição, que temos feito. Logo não he AB < LX. Mas temos demonstrado, que nem

he

he AB=LX. Logo fica ſendo AB>LX.

Tudo iſto demonſtrado aſſim, levante-ſe do Fig. 23.
ponto X a recta XR perpendicularmente *l* ſo- 24. 25.
bre o plano do circulo LMN. E como em to- 26. 27.
dos os caſos temos viſto ſer AB>LX, po- *l.* 12. 11.
nha-ſe RX de tal comprimento, que o ſeu quadrado ſeja igual ao exceſſo do quadrado de AB ſobre o quadrado de LX. Tirem-ſe finalmente as rectas RL, RM, RN. Sendo pois a recta RX perpendicular ao plano do circulo LMN; ſerá tambem perpendicular *m* aos ſemidiametros *m.* def. 3.
LX, MX, NX. E ſendo LX=XM, e XR 11.
commua, e rectos os angulos RXL, RXM, e por conſequencia iguaes entre ſi; ſerá RL=RM. Do meſmo modo deve ſer RN=RL, e RN=RM. Logo ſão iguaes entre ſi as tres rectas RL, RM, RN. E como temos ſuppoſto ſer o quadrado de XR igual ao exceſſo, com que o quadrado de AB excede o quadrado de LX; ſerá o quadrado de AB igual aos dous quadrados de LX, e de XR. Mas o quadrado de RL he igual *n* aos quadrados de LX, *n.* 47. 1.
e de XR, por ſer recto o angulo LXR. Logo o quadrado de AB ſerá igual ao quadrado de RL, e por conſequencia ſerá AB=RL. Mas cada huma das rectas BC, DE, EF, GH, HK he igual á AB; e tanto RM, como RN, he igual á RL. Logo cada huma das rectas AB, BC, DE, EF, GH, HK ſerá igual a cada huma das rectas RL, RM, RN. E como as duas RL, RM ſão iguaes ás duas AB, BC, e a baze LM he igual á baze AC; ſerá o angu-

d. 8. 1. gulo LRM = ABC [d]. Pela mesma razão será tambem o angulo MRN = DEF, e NRL = GHK. Logo com os tres angulos planos LRM, MRN, NRL, que são iguaes aos tres dados ABC, DEF, GHK, temos formado no ponto R hum angulo solido, como se pedia.

PROP. A. THEOR.

SE forem dous angulos solidos, ambos formados por tres angulos planos; sendo os tres angulos planos, que formão hum destes angulos solidos, iguaes aos tres, que comprehendem o outro angulo solido, cada hum a cada hum; os planos, em que existirem os angulos planos iguaes, terão entre si a dous e dous a mesma inclinação.

Fig. 28. Sejão os dous angulos solidos A, B; e seja o angulo A formado pelos tres angulos planos CAD, CAE, EAD; e o angulo B pelos tres FBG, FBH, HBG. Seja tambem o angulo CAD = FBG; CAE = FBH; e EAD = HBG. Digo, que os planos, em que existem os ditos angulos iguaes, tem entre si a dous e dous a mesma inclinação.

Tome-se na recta AC qualquer ponto K, e deste ponto K tire-se no plano CAD a recta KD, e no plano CAE tire-se a recta KL, huma e outra perpendicularmente sobre a recta ēta AC. O angulo DKL he a inclinação [a] do plano CAD a reſpeito do plano CAE. Tome-ſe agora na recta BF a parte BM=AK, e tirem-ſe do ponto M nos planos FBG, FBH as rectas MG, MN perpendiculares a BF. Será o angulo GMN a inclinação [a] do plano FBG ſobre o plano FBH. Tirem-ſe as rectas LD, NG. Como nos triangulos KAD, MBG ſão iguaes os angulos KAD, MBG, e tambem os angulos AKD, BMG, por ſerem rectos; e além diſto temos AK=BM; ſerá KD=MG, e AD=BG [b]. Pela meſma razão nos triangulos KAL, MBN ſerá KL=MN, e AL=BN. Mas nos triangulos LAD, NBG temos viſto, que os lados LA, AD ſão iguaes aos lados NB, BG, cada hum a cada hum; e que eſtes lados comprehendem angulos iguaes. Logo ſerá LD=NG [c]. Finalmente nos triangulos KLD, MNG os lados DK, KL ſão iguaes aos lados GM, MN, cada hum a cada hum, e a baze LD he igual á baze NG. Logo ſerá o angulo DKL=GMN [d]. Mas o angulo DKL he a inclinação do plano CAD ſobre o plano CAE; e o angulo GMN a inclinação do plano FBG ſobre o plano FBH. Logo eſtes planos eſtão entre ſi igualmente inclinados [e]. Com o meſmo diſcurſo podemos demonſtrar, que os outros planos, em que exiſtem angulos iguaes, tem entre ſi reſpectivamente a meſma inclinação.

a. def. 6. 11.
b. 26. 1.
c. 4. 1.
d. 8. 1.
e. def. 7. 11.

PROP.

PROP. B. THEOR.

SE forem dous angulos ſolidos, ambos formados por tres angulos planos; ſendo os tres angulos planos, que formão hum deſtes angulos ſolidos, iguaes aos tres, que fazem o outro angulo ſolido, cada hum a cada hum, e ſemelhantemente poſtos; os ditos angulos ſolidos ſerão iguaes.

Fig. 29. Sejão os angulos ſolidos A, B; e ſeja o angulo A formado pelos tres angulos planos CAD, CAE, EAD; e o angulo B pelos tres FBG, FBH, HBG. Seja tambem o angulo CAD = FBG; CAE = FBH; e EAD = HBG. Digo, que o angulo ſolido A he igual ao angulo ſolido B.

Applique-ſe o angulo ſolido A ao angulo ſolido B, principiando com applicar o angulo plano CAD ao angulo plano FBG, de maneira que o ponto A caia no ponto B, e a recta AC ſobre a recta BF. A recta AD cahirá ſobre a recta BG, por ſer o angulo CAD = FBG. E como a inclinação do plano CAF ſobre o plano CAD he igual[a] á inclinação do plano FBH ſobre o plano FBG; e o plano CAD eſtá applicado ao plano FBG; tambem o plano CAE ſe ajuſtará ſobre o plano FBH, e a recta AE ſobre a recta BH, por ſer o angulo CAE = FBH. Mas temos viſto, que a recta

a. A. 11.

AD

AD ſe ajuſta ſobre a recta BG. Logo o plano EAD ſe deve tambem ajuſtar ſobre o plano HBG. Logo os angulos ſolidos A, B ſe ajuſtão entre ſi a reſpeito de todas as ſuas partes, e conſequentemente são iguaes [b]. b. ax. 8. 1.

PROP. C. THEOR.

As figuras ſolidas formadas por planos ſemelhantes, em numero e grandeza iguaes, e ſemelhantemente poſtos, são iguaes entre ſi, e ſemelhantes, com tanto que cada hum dos angulos ſolidos das ditas figuras ſeja comprehendido por tres angulos planos, e não por mais.

Sejão as figuras ſolidas AG, KQ formadas por planos ſemelhantes, em numero e grandeza iguaes, e ſemelhantemente poſtos. Seja o plano AC ſemelhante e igual ao plano KM; o plano AF ſemelhante e igual ao plano KP; o plano BG ſemelhante e igual ao plano LQ; e aſſim ſempre, iſto he, GD á QN; DE á NO; e FH á PR. Digo, que a figura ſolida AG he igual e ſemelhante á figura ſolida KQ. Fig. 30.

Como o angulo ſolido A he comprehendido pelos tres angulos planos BAD, BAE, EAD, os quaes pela hypotheſis são iguaes aos tres LKN, LKO, OKN, cada hum a cada hum; e eſtes tres formão o angulo ſolido K; será o angulo ſolido A igual [a] ao angulo ſolido a. B. 11.

do K. Do meſmo modo os outros angulos ſolidos das duas figuras ſeráo iguaes entre ſi reſpectivamente. Applicando pois a figura ſolida AG á figura ſolida KQ, de maneira que a figura plana AC caia ſobre a figura plana KM, e toda a recta AB ſobre toda a recta KL; a figura AC ſe ajuſtará com todas as ſuas partes ſobre a figura KM, por ſerem ellas iguaes entre ſi e ſemelhantes. Logo as rectas AD, DC, CB ſe devem ajuſtar ſobre as rectas KN, NM, ML, cada huma ſobre cada huma reſpectivamente; e os pontos A, D, C, B ſobre os pontos K, N, M, L, e o angulo ſolido A ſobre o angulo ſolido K[a], e por conſequencia o plano AF ſobre o plano KP, e a figura AF ſobre a figura KP, ſendo eſtas iguaes e ſemelhantes. Logo as rectas AE, EF, FB devem cahir ſobre as rectas KO, OP, PL; e os pontos E, F ſobre os pontos O, P. Do meſmo modo ſe provará, que a figura AH ſe deve ajuſtar ſobre a figura KR, e a recta DH ſobre a recta NR, e o ponto H ſobre o ponto R. Sendo pois o angulo ſolido B igual ao angulo ſolido L, com a meſma demonſtração concluiremos, que a figura BG ſe ajuſta ſobre a figura LQ, e a recta CG ſobre a recta MQ, e o ponto G ſobre o ponto Q. Ajuſtando-ſe pois entre ſi todos os planos e lados das figuras ſolidas AG, KQ, neceſſariamente ſeráo eſtas iguaes entre ſi e ſemelhantes.

a. B. 11.

PROP.

PROP. XXIV. THEOR.

SE houver hum ſolido formado por ſeis planos parallelos entre ſi a dous e dous, os que ficão oppoſtos; eſtes planos oppoſtos ſerão parallelogrammos iguaes, e ſemelhantes.

Seja o ſolido CDGH formado pelos planos parallelos AC, GF; BG, CE; FB, AE. Digo, que os planos oppoſtos AC, GF; BG, CE; FB, AE são parallelogrammos iguaes, e ſemelhantes. Fig. 31.

Como os planos parallelos BG, CE eſtão cortados pelo plano AC, ſerão parallelas [a] entre ſi as ſecções communas AB, CD. Pela meſma razão são parallelas as ſecções communas AD, BC dos planos BF, AE com o plano AC. Mas temos viſto, que a recta AB he parallela á CD. Logo a figura AC ſerá hum parallelogrammo. Do meſmo modo ſe póde demonſtrar, que as figuras CE, FG, GB, BF, AE são parallelogrammos. Tirem-ſe as diagonaes AH, DF. Sendo pois a recta AB parallela á DC, e BH parallela á CF, iſto he, as duas AB, BH parallelas ás duas DC, CF exiſtentes em outro plano; ſerá o angulo ABH = DCF [b]. E tambem ſendo as duas AB, BH iguaes ás duas DC, CF, cada huma a cada huma, e ſendo o angulo ABH = DCF; ſerá AH = DF, e o triangulo ABH igual [c] ao tri-

a. 16. 11.

b. 10. 11.

c. 4. 1.

an-

angulo DCF. Mas o parallelogrammo BG he
d. 34. 1. o dobro [d] do triangulo ABH, e o parallelogrammo CE he o dobro do triangulo DCF. Logo o parallelogrammo BG ſerá igual, e ſemelhante ao parallelogrammo CE. Com a meſma demonſtração ſe provará, que os parallelogrammos AC, AE são reſpectivamente iguaes, e ſemelhantes aos parallelogrammos GF, BF.

PROP. XXV. THEOR.

SE hum ſolido parallelepipedo for cortado por hum plano parallelo a dous planos oppoſtos do meſmo ſolido; as bazes dos ſolidos, em que eſtiver dividido o ſolido total, terão entre ſi a razão, que tem os meſmos ſolidos.

Fig. 32. Seja o parallelepipedo ABCD cortado pelo plano EV parallelo aos planos oppoſtos AR, HD. Digo, que a baze AEFY he para a baze EHCF, como o ſolido ABFV para o ſolido EGCD.

Produza-ſe a recta AH para huma e outra parte, e tomadas as partes HM, MN em qualquer numero, e cada huma dellas igual á recta EH; e as partes AK, KL tambem em qualquer numero, e cada huma igual á recta EA; fação-ſe os parallelogrammos LO, KY, HQ, MS, e ſobre elles, como bazes, os ſolidos LP, KR, HU, MT. Sendo iguaes entre ſi as rectas LK, KA, AE, tambem ſerão iguaes [a]
a. 36. 1. os

os parallelogrammos LO, KY, AF. Pela mesma razão são iguaes os parallelogrammos KX, KB, AG. E os parallelogrammos LZ, KP, AR são tambem iguaes, por serem oppostos[b]. b 24. 11.
Do mesmo modo são iguaes[a] entre si os pa- a. 36. 1.
rallelogrammos EC, HQ, MS; como tambem os parallelogrammos HG, HI, IN[a]; e finalmente os parallelogrammos HD, MU, NΓ[b]. Logo tres planos do solido LP são iguaes, e semelhantes a tres planos do solido KR; como tambem são iguaes, e semelhantes a tres planos do solido AV. Mas nestes solidos tres planos são iguaes, e semelhantes[b] a outros tres oppostos; e juntamente nos mesmos solidos cada angulo solido he formado por tres angulos planos. Logo os tres solidos LP, KR, AV são iguaes[c]. Pela mesma razão devem ser c. C. 11.
iguaes tambem os tres solidos ED, HU, MT. Logo como a baze LF he multiplice da baze AF, do mesmo modo o solido LV he multiplice do solido AV; e assim tambem como a baze NF he multiplice da baze HF, do mesmo modo o solido NV he multiplice do solido ED. E se a baze LF for igual á baze NF, tambem o solido LV será igual[c] ao solido NV; e se a baze LF for maior que a baze NF, tambem o solido LV será maior que o solido NV; e finalmente se a baze LF for menor que a baze NF, do mesmo modo o solido LV será menor que o solido NV. Mas a baze LF, e o solido NV são quaesquer equimultiplices da baze AF, e do solido AV; e a baze FN,

e o solido NV são outros quaesquer equimultiplices da baze FH, e do solido ED; e juntamente temos demonstrado, que se for a baze LF maior, ou igual, ou menor que a baze FN, tambem o solido LV será maior, ou igual, ou menor que o solido NV. Logo será a baze AF para a baze FH, como o solido AV he para o solido ED.

PROP. XXVI. PROB.

DAda huma linha recta, e dado nella hum ponto, construir sobre a dita recta, e no ponto proposto hum angulo solido igual a outro angulo solido formado por tres angulos planos.

Fig. 33. Seja dada a recta AB, e nella o ponto A. Seja tambem dado o angulo solido D formado pelos tres angulos planos EDC, EDF, EDC. Deve-se construir no ponto A, e sobre a recta AB hum angulo solido igual ao angulo solido D.

Tome-se na recta DF qualquer ponto E, e tire-se deste ponto F a recta FG perpendicular[a] ao plano, que passa pelas rectas ED, DC. Seja G o ponto, em que a perpendicular FG encontra o plano. Tire-se DG, e faça-se[b] com a recta AB, e no ponto A o angulo BAL=EDC; e tambem o angulo BAK=EDG. Ponha-se AK=DG, e levante-se do ponto K a recta KH perpendicular.[c] ao plano BAL;

a. 11. 11.
b. 23. 1.
c. 12. 11.

BAL; e feita KH=GF, tire-se HA. Digo, que o angulo solido A formado pelos tres angulos planos BAL, BAH, HAL, he igual ao angulo solido D feito pelos tres angulos planos EDC, EDF, FDC.

Tomadas as duas rectas AB, DE iguaes entre si, tirem-se as rectas HB, KB, FE, GE. Sendo FG perpendicular ao plano das rectas ED, DC; tambem será perpendicular a todas as mais rectas, que existindo no dito plano a tocarem [d]. Logo seráõ rectos os angulos FGD, FGE. Pela mesma razão são rectos os angulos HKA, HKB. E porque os lados KA, AB são iguaes aos lados GD, DE, cada hum a cada hum; e tambem são iguaes entre si os angulos formados por estes lados; será a baze BK igual [e] á baze EG. Mas temos KH=GF, e o angulo BKH=EGF. Logo será HB=FE [e]. Tambem sendo os lados AK, KH iguaes aos lados DG, GF; e sendo iguaes os angulos AKH, DGF, por serem rectos, será a baze AH igual á baze DF. Mas he AB=DE. Logo as duas HA, AB seráõ iguaes ás duas FD, DE. Mas he HB=FE. Logo será o angulo BAH=EDF [f]. Pela mesma razão deve ser HAL=FDC. Ponha-se AL=DC, e tiremse as rectas KL, HL, GC, FC. Sendo o angulo total BAL igual ao angulo total EDC; e sendo o angulo BAK=EDG; tirando BAK de BAL, e EDG de EDC, será o resto KAL igual ao resto GDC. E como as duas rectas KA, AL são iguaes ás duas GD, DC, e iguaes

d. def. 3. 11.

e. 4. 1.

f. 8. 1.

V ii en-

entre si os angulos comprehendidos por ellas; será tambem a baze KL = GC [e], que he outra baze. Mas he KH = GF. Logo as duas LK, KH são iguaes ás duas CG, GF. Mas estas rectas fazem angulos iguaes. Logo será a baze HL igual á baze FC. Sendo pois as duas HA, AL iguaes ás duas FD, DC, e sendo HL = FC; será o angulo HAL = FDC [f]. Logo sendo os tres angulos planos BAL, BAH, HAL, pelos quaes he formado o angulo solido A, iguaes aos tres angulos planos EDC, EDF, FDC, que fazem o angulo solido D, cada hum a cada hum; e tambem sendo os mesmos angulos planos semelhantemente postos; será o angulo solido A igual [g] ao angulo solido D. Logo está feito o que se pedia.

e. 4. 1.
f. 8. 1.
g. B. 11.

PROP. XXVII. PROB.

SObre huma linha recta dada formar hum solido parallelepipedo semelhante a outro solido parallelepipedo, e semelhantemente posto.

Fig. 54. Seja a recta AB, e o parallelepipedo CD. Deve-se descrever sobre a recta AB hum parallelepipedo semelhante ao parallelepipedo CD, e semelhantemente posto.

Faça-se sobre a recta AB, e no ponto della A com os tres angulos planos BAK, KAH, HAB o angulo solido A igual [a] ao angulo solido C, de maneira que seja o angulo BAK = ECG,

a. 26. 11.

ECG, KAH=GCF, e HAB=FCE. Faça-se[b] tambem EC : CG : : BA : AK ; e GC : CF : : KA : AH. Logo por igualdade de razões ordenada[c] será EC : CF : : BA : AH. Complete-se o parallelogrammo BH, e o solido AL. Como temos EC : CG : : BA : AK, isto he, proporcionaes os lados, que fazem os angulos iguaes ECG, BAK; o parallelogrammo BK será semelhante ao parallelogrammo EG. Pela mesma razão o parallelogrammo KH he semelhante ao parallelogrammo GF, e o parallelogrammo HB he semelhante ao parallelogrammo FE. Logo tres parallelogrammos do solido AL são respectivamente semelhantes a tres parallelogrammos do solido CD. E como os parallelogrammos, que ficão oppostos aos ditos tres em ambos os solidos, são iguaes[d], e semelhantes respectivamente aos mesmos ditos tres parallelogrammos; e por serem tambem iguaes entre si, e semelhantemente postos os angulos planos, que formão os angulos solidos correspondentes dos dous parallelepipedos, são necessariamente iguaes[e] os mesmos angulos solidos, que se correspondem; será o solido AL semelhante[f] ao solido CD, e por consequencia ficará feito o que se pedia.

b. 12. 6.
c. 22. 5.
d. 24. 11.
e. B. 11.
f. def. 11. 11.

PROP. XXVIII. THEOR.

SE hum solido parallelepipedo for cortado pelo plano, que passa pelas diagonaes de dous planos oppostos; ficará dividido em duas partes iguaes.

Se-

Fig. 31. Seja o parallelepipedo EB, e sejão as rectas DF, AH as diagonaes dos planos oppostos CE, BG. E como as duas AD, HF são parallelas á GE, que não existe no plano dellas, será AD parallela[a] á HF, e consequentemente as diagonaes AH, DF existirão no plano das rectas AD, HF, e serão parallelas[b] entre si. Digo pois, que o parallelepipedo EB fica dividido em duas partes iguaes pelo plano ADFH.

a. 9. 6.

b. 16. 11.

Sendo o triangulo AGH igual ao triangulo ABH, e o triangulo DEF igual[c] ao triangulo DCF; e sendo o parallelogrammo HE igual[d] ao parallelogrammo BD, por serem parallelogrammos oppostos; e finalmente sendo o parallelogrammo AE igual ao parallelogrammo BF; o prisma comprehendido pelos dous triangulos AGH, DEF, e pelos tres parallelogrammos HE, EA, AF será igual[e] ao prisma formado pelos dous triangulos ABH, DCF, e pelos tres parallelogrammos BD, BE, HD, por serem estes planos respectivamente semelhantes entre si, e em numero, e grandeza iguaes, e semelhantemente postos; e juntamente porque todos os angulos solidos destes dous prismas são feitos por tres angulos planos e não mais. Logo o solido parallelepipedo EB fica dividido em duas partes iguaes pelo plano ADFH.

c. 34. 1.

d. 24. 11.

e. C. 11.

PROP.

PROP. XXIX. THEOR.

OS ſolidos parallelepipedos, que eſtão poſtos ſobre a meſma baze, e tem a meſma altura, e cujos lados, que ſe levantão ſobre a baze, ſe terminão nas meſmas linhas rectas, são iguaes.

Eſtejão poſtos ſobre a baze commua AB os dous parallelepipedos AH, AK igualmente altos; e terminem-ſe nas meſmas rectas FN, DK os lados AF, AG, LM, LN; CD, CE, BH, BK, que ſe levantão ſobre a baze commua AB. Digo, que os parallelepipedos AH, AK são iguaes. Fig. 36. 37.

Tenhão em primeiro lugar os parallelogrammos DG, HN, que ficão oppoſtos á baze AB, o lado commum HG. Sendo o ſolido AH cortado pelo plano AGHC das diagonaes AG, CH dos planos oppoſtos ALGF, CBHD, o meſmo ſolido AH ficará dividido em duas partes iguaes[a]. Logo o ſolido AH he o dobro do priſma, que tem os triangulos oppoſtos ALG, CBH. Pela meſma razão porque o ſolido AK he cortado pelo plano LGHB, que paſſa pelas diagonaes LG, BH dos planos oppoſtos ALNG, CBKH, será o ſolido AK o dobro do meſmo priſma comprehendido entre os triangulos oppoſtos ALG, CBH. Logo o ſolido AH he igual ao ſolido AK. Fig. 35. a. 28. 11.

Não tenhão agora os parallelogramos DM, Fig. 36. 37.

EN

EN algum lado commum. Como as figuras CH, CK são parallelogrammos, será o lado CB
b. 34. 1. igual[b] tanto ao lado DH, como ao lado EK. Logo será DH=EK. Ajunte-se, ou tire-se de huma e outra parte a mesma recta HE. Será
c. 38. 1. DE=HK; e o triangulo CDE igual[c] ao tri-
d. 36. 1. angulo BHK; e o parallelogrammo DG igual[d] ao parallelogrammo HN. Pela mesma razão será o triangulo BFG igual ao triangulo LMN. Mas os parallelogrammos CF, CG são respe-
e. 24. 11. ctivamente iguaes[e] aos parallelogrammos BM, BN, por estarem oppostos entre si. Logo o prisma formado pelos triangulos AFG, CDE, e pelos parallelogrammos AD, DG, GC he
f. C. 11. igual[f] ao prisma comprehendido pelos triangulos LMN, BHK, e pelos parallelogrammos BM, MK, KL. Tirando pois o prisma LMNBHK do solido, que está entre a baze AB, e o plano opposto FDKN; e tambem tirando do mesmo solido o outro prisma AFGCDE; os restos, que ficarem, isto he, os solidos AH, AK serão iguaes entre si.

PROP. XXX. THEOR.

OS solidos parallelepipedos postos sobre a mesma baze, e que tem a mesma altura, e cujos lados, isto he, aquelles que se levantão sobre a baze, não se terminão nas mesmas linhas rectas, são iguaes.

Es-

Eſtejáo poſtos ſobre a meſma baze AB, e tenháo a meſma altura os parallelepipedos CM, CN; e náo ſe terminem nas meſmas rectas os lados delles, que ſe levantáo ſobre a baze commua AB, iſto he, os lados AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK. Digo, que tambem neſte caſo sáo iguaes entre ſi os parallelepipedos CM, CN. Fig. 38.

Produzáo-ſe as rectas FD, MH, NG, KE até ſe encontrarem nos pontos O, P, Q, R, e tirem-ſe as rectas AO, LP, BQ, CR. Como o plano LBHM he parallelo ao plano oppoſto ACDF; e no plano LBHM exiſtem as duas rectas LB, MHPQ juntamente com a figura BLPQ; e no plano ACDF exiſtem as outras parallelas AC, FDOR, e tambem a figura CAOR; as figuras BLPQ, CAOR devem exiſtir em dous planos parallelos entre ſi. Do meſmo modo porque o plano ALNG he parallelo ao plano oppoſto CBKE; e no plano ALNG exiſtem as parallelas AL, OPGN juntamente com a figura ALPO; e no plano CBKE exiſtem as outras parallelas CB, RQEK, e tambem a figura CBQR; as figuras ALPO, CBQR exiſtiráõ em planos parallelos entre ſi. Mas os planos ACBL, ORQP sáo parallelos. Logo o ſolido CP ſerá hum parallelepipedo. Mas o ſolido CM exiſtente entre a baze ACBL, e o parallelogrammo oppoſto FDHM he igual[a] ao ſolido CP exiſtente entre a meſma baze ACBL, e o parallelogrammo oppoſto ORQP, por eſtarem ambos eſtes ſolidos ſo- a. 29. 11.

ſobre a meſma baze ACBL, e ſe terminarem nas meſmas rectas FR, MQ os lados delles AF, AO, CD, CR, LM, LP, BH, BQ, que são os lados, que ſe levantão ſobre a ba-
a. 29. 11. ze ACBL; e tambem o ſolido CP he igual[a] ao ſolido CN, porque ambos eſtes ſolidos eſtão ſobre a meſma baze ACBL; e os lados delles AO, AG, LP, LN, CR, CE, BQ, BK levantados ſobre a meſma baze ACBL ſe terminão nas meſmas rectas ON, RK. Logo o ſolido CM ſerá igual ao ſolido CN.

PROP. XXXI. THEOR.

OS ſolidos parallelepipedos poſtos ſobre bazes iguaes, e igualmente altos, são iguaes.

Fig. 39. 40. Sejão os parallelepipedos AE, CF, os quaes eſtejão poſtos ſobre as bazes iguaes AB, CD, e ambos tenhão a meſma altura. Digo, que os parallelepipedos AE, CF são iguaes.

Fig. 39. Sejão primeiramente perpendiculares aos planos das bazes AB, CD aquelles lados, os quaes em ambos os ſolidos ficão levantados ſobre as meſmas bazes AB, CD. Ponhão-ſe entre ſi os ſolidos de maneira que as bazes delles exiſtão no meſmo plano, e os lados CL, LB deſtas meſmas bazes eſtejão em direitura hum com outro. A recta LM, que ſe termina no ponto
a. 13. 11. L, ſerá commua[a] aos ſolidos AE, CF. Sejão AG, HK, BE; DF, OP, CN os outros la-

lados dos ſolidos, ſobre cujas bazes ficão levantados; e primeiramente ſeja o angulo ALB = CLD. Eſtará o lado AL em direitura do lado LD. Produzão-ſe os lados OD, HB, os quaes concorrão no ponto Q, e complete-ſe o parallelepipedo LR, cuja baze he o parallelogrammo LQ, e LM he hum dos lados, que ſe levantão ſobre a meſma baze LQ. Sendo pois o parallelogrammo AB igual ao parallelogrammo CD, ſerá AB : LQ : : CD : LQ [b]. b. 7. 5.
E como o ſolido AR he cortado pelo plano LMEB parallelo aos planos oppoſtos AK, DR, ſerá a baze AB para a baze LQ, como o ſolido CF he para o ſolido LR [c]. Pela meſma c. 25. 11.
razão ſendo o ſolido CR cortado pelo plano LF parallelo aos planos oppoſtos CP, BR, ſerá a baze CD para a baze LQ, como o ſolido CF he para o ſolido LR. Mas temos viſto ſer AB : LQ : : CD : LQ. Logo ſerá tambem AE : LR : : CF : LR. Logo os ſolidos AE, CF são iguaes [d]. d. 9. 5.

Eſtejão agora poſtos os ſolidos SE, CF Fig. 39.
igualmente altos ſobre as bazes iguaes SB, CD, ſobre as quaes ſejão perpendiculares os lados dos meſmos ſolidos; e poſtas as ditas bazes no meſmo plano de maneira que os lados dellas CL, LB fação huma ſó linha recta, não ſeja o angulo SLB = CLD. Digo, que ſerá o ſolido SE igual ao ſolido CF.

Produzão-ſe os lados DL, TS de modo que ſe encontrem no ponto A. Tire-ſe pelo ponto B a recta BH parallela á DA; e as rectas

ctas HB, OD produzidas concorrão no ponto Q, e finalmente completem-se os solidos AE, LR. O solido AE, cuja baze he o parallelogrammo LE, e o plano opposto a esta
e. 29. 11. baze o parallelogrammo AK, he igual [e] ao solido SE, cuja baze he o parallelogrammo LE, e o plano opposto a esta baze o parallelogrammo SX, porque ambos estes solidos estão postos sobre a mesma baze LE, e tem a mesma altura, e os lados delles LA, LS, BH, BT, MG, MV, EK, EX se terminão nas mesmas rectas AT, GX. Sendo pois o paralle-
f. 35. 1. logrammo AB igual [f] ao parallelogrammo SB, por terem ambos a mesma baze LB, e por estarem entre as mesmas parallelas LB, AT; e tambem sendo pela hypothesis o parallelogrammo SB igual ao parallelogrammo CD; será o parallelogrammo AB igual ao parallelogrammo CD. Mas he o angulo ALB = CLD. Logo, pelo que temos já demonstrado, será o solido AE igual ao solido CF. Mas temos tambem provado, que o solido AE he igual ao solido SE. Logo será o solido SE igual ao solido CF.

Fig. 40. Supponhamos finalmente não serem perpendiculares ás bazes iguaes AB, GD os lados AG, HK, BE, LM; CN, RS, DF, OP dos solidos AE, CF. Digo outra vez, que são iguaes entre si os solidos AE, CF.

Caião dos pontos G, K, E, M; N, S, F, P sobre os planos das bazes LH, OR as
g. 11. 11. perpendiculares [g] GQ, KT, EV, MX; NY, SZ, FI, PU, que encontrem os planos nos

pon-

pontos Q, T, V, X; Y, Z, I, U. Tirem-se as rectas QT, TV, VX, XQ; YZ, ZI, IU, UY. Como as duas rectas GQ, KT são perpendiculares ao mesmo plano, serão parallelas[h] entre si. Mas tambem as duas MG, EK são parallelas. Logo tambem serão parallelos[i] entre si os planos MQ, ET, passando o primeiro pelas rectas MG, GQ; e passando o outro pelas rectas EK, KT. Pela mesma razão são parallelos os planos MV, GT. Logo o solido QE he hum parallelepipedo. Do mesmo modo se demonstra, que o solido YF he tambem hum parallelepipedo. Mas pelo que temos dito o solido EQ he igual ao solido FY, por serem iguaes as bazes MK, PS, e tambem iguaes as alturas delles, e por se levantarem os lados perpendicularmente sobre as mesmas bazes; e o solido EQ he igual k ao solido AE, e o solido FY he igual k ao solido CF, por terem tanto huns, como outros a mesma baze, e a mesma altura. Logo será o solido AE igual ao solido CF.

h. 6. 11.
i. 15. 11.
k. 29. ou 30. 11.

PROP. XXXII. THEOR.

OS solidos parallelepipedos, que tem a mesma altura, estão entre si como as bazes.

Sejão os parallelepipedos igualmente altos AB, CD. Digo, que como a baze AE he para a baze CF, assim tambem o solido AB he para o solido CD. Fig. 41.

Fa-

Faça-se sobre a recta FG o parallelogrammo FH igual ao parallelogrammo AE, de maneira que seja o angulo FGH = LCG [a]. Complete-se o solido parallelepipedo GK, cuja baze seja o parallelogrammo FH, e hum dos lados sobre a mesma baze seja a recta FD. Serão iguaes [b] entre si os solidos AB, GK, por serem iguaes tanto as bazes AE, FH, como as alturas delles. E como o parallelepipedo CK he cortado pelo plano DG parallelo aos planos oppostos, será a baze HF para a baze FC, como o solido HD he para o solido DC [c]. Mas a baze FH he igual á baze AE, e o solido HD he igual ao solido AB. Logo será a baze AE para a baze CF, como o solido AB he para o solido CD.

a. Cor. 45. 1.

b. 31. 11.

c. 25. 11.

COROL. Disto se infere, que os prismas de bazes triangulares, e que são igualmente altos, tem entre si a razão das mesmas bazes.

Fig. 41. Sejão os prismas igualmente altos, cujas bazes são os triangulos AEM, CFG, e os planos oppostos os triangulos NBO, PDQ. Sejão completados os parallelogrammos AE, CF, e os solidos parallelepipedos AB, CD, e seja MO hum lado do solido AB, e GQ hum lado do solido CD daquelles, que se levantão sobre as bazes. Os parallelepipedos AB, CD, visto terem a mesma altura, estão entre si na razão das bazes AE, CF. Logo tambem os prismas, que são as ametades [d] destes parallelepipedos, devem estar na mesma razão das ditas

d. 28. 11.

tas bazes AE, CF, isto he, na razão dos triangulos AEM, CFG.

PROP. XXXIII. THEOR.

OS solidos parallelepipedos semelhantes estão entre si na razão triplicada dos lados homologos.

Sejão os parallelepipedos semelhantes AB, CD, e sejão homologos os lados AE, CF. Digo, que o solido AB tem para o solido CD a razão triplicada daquella, que o lado AE tem para o lado CF. Fig. 42.

Produzão-se os lados AE, GE, HE, fazendo EK=CF, EL=FN, e EM=FR. Complete-se o parallelogrammo KL, e tambem o solido KO. Visto serem os lados KE, EL iguaes aos lados CF, FN, e o angulo KEL=CFN, sendo pela semelhança dos solidos AB, CD o angulo AEG=CFN, será o parallelogrammo KL semelhante, e igual ao parallelogrammo CN. Pela mesma razão o parallelogrammo MK he igual, e semelhante ao parallelogrammo CR; e o parallelogrammo OE he igual, e semelhante ao parallelogrammo FD. Logo tres parallelogrammos do solido KO são iguaes, e semelhantes respectivamente a tres parallelogrammos do solido CD. Mas tambem os parallelogrammos oppostos a estes são iguaes [a], e semelhantes. Logo o solido KO he semelhante, e igual [b] ao solido CD. Complete-se o pa-

a. 24. 11.

b. C. 11.

parallelogrammo GK, e ſobre as bazes GK, KL conſiderem-ſe formados os parallelepipedos EX, LP, que tenhão a meſma altura que o ſolido AB, de ſorte que a recta EH ſeja hum lado commum, e daquelles, que ſe levantão ſobre as bazes GK, KL. Sendo pela ſemelhança dos ſolidos AB, CD, e permutando AE : CF :: EG : FN, e tambem AE : CF :: EH : FR; e ſendo FC = EK, e FN = EL, e FR = EM; será AE : EK :: EG : EL, e tambem AE : EK :: HE : EM. Mas he AE para EK, como o parallelogrammo AG he para o paral-
c. 1. 6. lelogrammo GK [c]; e GE para EL, como o parallelogrammo GK para o parallelogrammo KL; e finalmente HE para EM, como o parallelogrammo PE para o parallelogrammo KM. Logo será o parallelogrammo AG para o parallelogrammo GK, como eſte parallelogrammo GK he para o parallelogrammo KL, e tambem como o parallelogrammo PE he para o parallelogrammo KM. Mas o parallelogrammo AG he para o parallelogrammo GK,
d. 25. 11. como o ſolido AB he para o ſolido EX [d]; e o parallelogrammo GK he para o parallelogrammo KL, como o ſolido EX he para o ſolido PL; e tambem o parallelogrammo PE he para o parallelogrammo KM, como o ſolido PL he para o ſolido KO. Logo será o ſolido AB para o ſolido EX, como eſte ſolido EX he para o ſolido PL; e tambem como eſte meſmo ſolido PL he para o ſolido KO. Mas de quatro grandezas continuamente proporcio-

nacs

naes a primeira se diz que tem para a quarta a razão triplicada daquella, que a mesma primeira tem para a segunda. Logo a razão do solido AB para o solido KO será a triplicada da razão do solido AB para o solido EX. Mas o solido AB he para o solido EX, como o parallelogrammo AG he para o parallelogrammo GK, ou como o lado AE para o lado EK. Logo a razão do solido AB para o solido KO será a triplicada da razão do lado AE para o lado EK. Mas o solido KO he igual ao solido CD, e o lado EK he igual ao lado CF. Logo a razão do solido AB para o solido CD he a triplicada da razão do lado homologo AE para o lado homologo CF.

COROL. Disto se collige, que se forem quatro rectas continuamente proporcionaes, será a primeira para a quarta, como o parallelepipedo formado sobre a primeira recta he para o parallelepipedo feito sobre a segunda, com tanto que ambos estes solidos sejão semelhantes entre si, e semelhantemente descriptos; e isto por ser a razão da primeira recta para a quarta a triplicada[c] da razão, que a primeira tem para a segunda. c. def. 11. 5.

PROP. D. THEOR.

OS solidos parallelepipedos, que são formados com parallelogrammos equiangulos entre si, cada hum a cada hum, isto he, cujos angulos solidos são respectivamente iguaes, estão entre si na razão igual áquella, que se compõe das razões dos lados.

Fig. 43. Sejão os parallelepipedos AB, CD, e seja o solido AB formado pelos parallelogrammos AE, AF, AG equiangulos, cada hum a cada hum, aos parallelogrammos CH, CK, CL, pelos quaes fica comprehendido o solido CD. Digo, que a razão do solido AB para o solido CD he a mesma que a composta das tres razões seguintes, isto he, da razão do lado AM para o lado DL, da razão de AN para DK, e da razão de AO para DH.

Sejão produzidos os lados MA, NA, OA para P, Q, R, de maneira que seja AP = DL, AQ = DK, e AR = DH. Complete-se o parallelepipedo AX comprehendido pelos parallelogrammos AS, AT, AV semelhantes e iguaes aos parallelogrammos CH, CK, CL, cada hum a cada hum. Será o solido AX igual [a] ao solido CD. Complete-se tambem o solido AY, cuja baze he o parallelogrammo AS, e a recta AO he hum lado dos que se levantão sobre ella. Posta qualquer recta a, faça-se MA: AP:: a: b; e NA: AQ:: b: c; e OA: AR:: c: d. Sendo equiangulos entre si os parallelogrammos AE, AS, será AE: AS:: a: c. Tem-se demonstrado isto na Prop. 23. do Livro sexto. Mas os solidos AB, AY, por estarem entre os planos parallelos BOY, EAS, são igualmente altos. Logo será o solido AB para o so-

a. C. 11.

li-

lido AY, como a baze AE he para a baze AS[b]; b. 32. 11.
ou como a recta a he para a recta c. Mas o solido AY he para o solido AX, como o parallelogrammo OQ para o parallelogrammo QR[c], ou como c. 25. 11.
o lado OA para o lado AR, isto he, como a recta c para a recta d. Sendo pois o solido AB para o solido AY, como a recta a he para a recta c; e o solido AY para o solido AX, como a recta c para a recta d; por igual será o solido AB para o solido AX, ou para o solido CD, como a recta a he para a recta d. Mas a razão de a para d chama-se razão composta[d] das razões de a para b, de b para c, d. def. A. 1.
e de c para d; e estas são iguaes, cada huma a cada huma, ás razões do lado MA para o lado AP, de NA para AQ, e de OA para AR; e os lados AP, AQ, AR são iguaes aos lados DL, DK, DH, cada hum a cada hum. Logo o solido AB tem para o solido CD a razão composta das razões do lado AM para o lado DL, do lado AN para o lado DK, e do lado AO para o lado DH.

PROP. XXXIV. THEOR.

AS bazes dos solidos parallelepipedos iguaes são reciprocamente proporcionaes ás alturas; e sendo as bazes reciprocamente proporcionaes ás alturas, os solidos parallelepipedos são iguaes.

Sejão iguaes entre si os parallelepipedos AB, Fig. 44. 45. 46.

 CD.

CD. Digo, que a baze EH he para a baze NP, como a altura do ſolido CD he para a altura do ſolido AB.

Fig. 44. Sejão primeiramente perpendiculares ás bazes EH, NP os lados AG, EF, LB, HK; CM, NX, OD, PR. Digo, que he a baze EH do ſolido AB para a baze NP do ſolido CD, como a altura CM do ſolido CD he para a altura AG do ſolido AB.

Se as bazes EH, NP forem iguaes; ſendo o ſolido AB igual ao ſolido CD, tambem ſerá CM = AG. Porque de outra ſorte, ſendo a baze EH igual á baze NP, o ſolido AB não poderia ſer igual ao ſolido CD, contra o que temos ſuppoſto. Logo deve ſer CM = AG, e por conſequencia deve ſer a baze EH para a baze NP, como a altura CM he para a altura AG.

Fig. 45. Mas não ſejão iguaes entre ſi as bazes EH, NP, e ſeja EH > NP. Como o ſolido AB he igual ao ſolido CD, ſerá CM > AG; porque ſuppoſto não ſer aſſim, ſerião deſiguaes, contra a hypotheſis, os ſolidos AB, CD. Tomeſe CT = AG, e ſobre a baze NP, e com a altura CT complete-ſe o parallelepipedo CV. Logo ſendo o ſolido AB igual ao ſolido CD, ſerá o ſolido AB para o ſolido CV, como o ſolido CD he para o ſolido CV [a]. Mas o ſolido AB he para o ſolido CV, como a baze EH he para a baze NP [b], por ſerem eſtes ſolidos igualmente altos; e tambem o ſolido CD he para o ſolido CV, como a baze MP he para

a. 7. 5.

b. 32. 11.

ra

ra a baze PT [c], ou como a recta MC para a recta CT [d]. Logo será a baze EH para a baze NP, como a recta MC he para a recta CT. Mas he CT = AG. Logo será a baze EH para a baze NP, como a altura MC he para a altura AG. c. 25. 11. d. 1. 6.

Estejão agora as bazes dos parallelepipedos AB, CD na razão reciproca das alturas, isto he, seja a baze EH do solido AB para a baze NP do solido CD, como a altura deste solido CD he para a altura do solido AB. Digo, que os solidos AB, CD são iguaes. Supponhão-se em ambos os solidos serem perpendiculares ás bazes os lados, que se levantão sobre as mesmas bazes. E primeiramente se for a baze EH igual á baze NP, tendo nós supposto ser a baze EH para a baze NP, como a altura do solido BD he para a altura do solido AB, serão estas alturas tambem iguaes [e]. Mas os solidos parallelepipedos postos sobre bazes iguaes, e igualmente altos, são entre si iguaes [f]. Logo será o parallelepipedo AB igual ao parallelepipedo CD. Fig. 44. e. A. 5. f. 31. 11.

Mas não sejão iguaes as bazes EH, NP, e seja EH > NP. Sendo a baze EH para a baze NP, como a altura CM he para a altura AG, será CM > AG [e]. Ponha-se CT = AG, e complete-se o solido CV. Logo será a baze EH para a baze NP, como a recta MC he para a recta CT. Mas a baze EH he para a baze NP, como o solido AB para o solido CV [b], por serem estes solidos igualmente altos; e a re- Fig. 45. b. 32. 11.

recta MC he para a recta CT, como a baze MP para a baze PT, isto he, como o solido
c. 25. 11. CD para o solido CV [c]. Logo será o solido AB para o solido CV, como he o solido CD para o solido CV, e por consequencia serão iguaes os solidos AB, CD.

Fig. 46. Não sejão agora os lados FE, BL, GA, KH; XN, DO, MC, RP perpendiculares sobre as bazes EH, NP. Tirem-se dos pontos F, B, K, G; X, D, R, M outras tantas rectas perpendicularmente sobre os planos das bazes EH, NP, as quaes encontrem os ditos planos nos pontos S, Y, V, T; Q, I, U, Z. Completem-se os solidos FV, XU, que devem ser parallelepipedos, como se tem demonstrado no ultimo caso da Prop. 31. deste Livro. Digo, que sendo iguaes entre si os solidos AB, CD, as bazes são reciprocamente proporcionaes ás alturas, isto he, a baze EH do solido AB he para a baze NP do solido CD, como a altura deste solido CD he para a altura do solido AB. Visto ser o solido AB igual ao solido CD, pela supposição, e o solido BT
g. 29. ou 30. 11. igual [g] ao solido AB, por estarem sobre a mesma baze FK, e terem a mesma altura; e tambem, pela mesma razão, o solido DC igual ao solido DZ; será o solido BT igual ao solido DZ. Mas as bazes de parallelepipedos iguaes, e sobre as quaes se levantão perpendicularmente os lados, são reciprocamente proporcionaes ás alturas, como já se tem demonstrado. Logo será a baze FK do solido BT para a baze

XR do ſolido DZ, como a altura deſte ſolido DZ he para a altura do ſolido BT. Mas as bazes FK, EH são iguaes, como tambem são iguaes as bazes XR, NP. Logo ſerá a baze EH para a baze NP, como a altura do ſolido DZ he para a altura do ſolido BT. Mas os ſolidos DZ, DC tem a meſma altura, como tambem os ſolidos BT, BA. Logo ſerá a baze EH do ſolido AB para a baze NP do ſolido CD, como a altura do ſolido CD he para a altura do ſolido BA, e aſſim as bazes dos ſolidos parallelepipedos AB, CD são tambem neſte caſo reciprocamente proporcionaes ás alturas.

Tenhão finalmente as bazes dos parallelepipedos entre ſi a razão reciproca das alturas, iſto he, ſeja a baze EH do ſolido AB para a baze NP do ſolido CD, como a altura do ſolido CD he para a altura do ſolido AB. Digo que os ſolidos AB, CD são iguaes. Feita a meſma conſtrucção que aſſima, ſendo a baze EH para a baze NP, como a altura do ſolido CD para a altura do ſolido AB; e ſendo a baze EH igual á baze FK, e a baze NP igual á baze XR; ſerá a baze FK para a baze XR, como a altura do ſolido CD he para a altura do ſolido AB. Mas os ſolidos AB, BT, como tambem os ſolidos CD, DZ são igualmente altos. Logo ſerá a baze FK para a baze XR, como a altura do ſolido DZ he para a altura do ſolido BT. Logo as bazes dos parallelepipedos BT, DZ são reciprocamente proporcionaes Fig. 46.

naes

naes ás alturas. Mas os lados, que se levantão sobre as bazes nestes solidos, são perpendiculares ás mesmas bazes. Logo os solidos BΓ, DZ devem ser iguaes, como ha pouco se tem
g. 29. ou demonstrado. Mas o solido BΓ he igual[g] ao
30. 11. solido BA, e o solido DZ he igual[g] ao solido DC, por estarem postos tanto os primeiros, como os segundos sobre a mesma baze, e por terem alturas iguaes. Logo os solidos AB, CD são iguaes.

PROP. XXXV. THEOR.

SE dos vertices de dous angulos planos iguaes se levantarem sobre os planos delles duas linhas rectas, que com os lados dos ditos angulos planos fação angulos tambem iguaes, isto he, os formados sobre os lados de hum angulo dos propostos iguaes aos formados sobre os lados do outro angulo, cada hum a cada hum; e se em ambas as rectas levantadas, tomados quaesquer dous pontos, hum em cada huma, se deixarem cahir duas rectas perpendiculares aos planos, em que existem os angulos dados; e finalmente se dos pontos, onde as ditas perpendiculares encontrão os planos, forem conduzidas para os vertices dos angulos dados outras duas rectas; estas rectas com as outras,

tras, que eſtão levantadas, comprehenderão angulos tambem iguaes.

Dos vertices A, D dos angulos planos e iguaes BAC, EDF conſiderem-ſe levantadas ſobre os planos delles as rectas AG, DM, que fação angulos reſpectivamente iguaes com os lados dos angulos BAC, EDF, iſto he, o angulo GAB = MDE, e GAC = MDF; e tomados nas rectas AG, DM os pontos G, M, como quizermos; deſtes planos G, M ſejão conduzidas as duas rectas GL, MN perpendicularmente ſobre os planos dos angulos propoſtos BAC, EDF. Dos pontos L, N, nos quaes as perpendiculares encontrão os planos, tiremſe para os vertices A, D dos angulos BAC, EDF as rectas LA, ND. Digo, que o angulo GAL he igual ao angulo MDN. Fig. 47.

Ponha-ſe AH = DM, e pelo ponto H conduza-ſe a recta HK parallela á GL. Sendo GL perpendicular ao plano BAC, tambem HK ſerá perpendicular[a] ao meſmo plano BAC. Dos pontos K, N tirem-ſe ſobre as rectas AB, AC, DE, DF as perpendiculares KB, KC, NE, NF. Tirem-ſe tambem as rectas HB, BC, ME, EF. Como HK he perpendicular ao plano BAC; tambem o plano HBK, que paſſa pela recta HK, ſerá perpendicular[b] ao meſmo plano BAC. Mas neſte plano exiſte a recta AB perpendicular á BK, que he a ſecção commua dos planos BAC, HBK. Logo ſerá a recta AB perpendicular[c] ao plano HBK, e juntamen-

a. 8. 11.

b. 18. 11.

c. def. 4. 11.

te

te a todas as rectas, que existindo no mesmo
d. def. 3. 11. plano a tocarem [d]. Mas BH existe no plano HBK e toca a recta AB. Logo será AB perpendicular á BH, e assim recto o angulo ABH. Do mesmo modo he recto tambem o angulo DEM, e por consequencia he ABH = DEM. Mas he HAB = MDE. Logo nos dous triangulos HAB, MDE, havendo dous angulos iguaes a dous angulos, cada hum a cada hum; e sendo iguaes entre si os lados HA, DM, e oppostos aos angulos iguaes HBA, MED; os
e. 26. 1. demais lados seráo iguaes [e] aos outros, segundo ficáo oppostos a angulos iguaes, cada hum a cada hum, e por consequencia será AB = DE. Com a mesma demonstração, tiradas as rectas HC, MF, se prova ser AC = DF. Sendo pois AB = DE, e AC = DF; e tambem sendo o angulo BAC = EDF, será a baze BC
f. 4. 1. igual [f] á baze EF, e o angulo ABC = DEF. Mas os angulos ABK, DEN, por serem rectos, sáo iguaes. Logo tirando de ABK o angulo ABC, e do angulo DEN tirando DEF, ficará CBK = FEN. Pela mesma razáo sáo iguaes os angulos BCK, EFN. Logo nos triangulos BCK, EFN ha dous angulos iguaes a outros dous, cada hum a cada hum; e o lado BC do triangulo BCK igual ao lado EF do triangulo EFN, sendo estes lados adjacentes a angulos iguaes. Logo seráo os outros lados do primeiro triangulo iguaes [e] aos outros lados do segundo, cada hum a cada hum, segundo ficáo oppostos a angulos iguaes, e por

con-

consequencia será BK=EN. Mas he AB=DE, e o angulo recto ABK=DEN outro angulo recto. Logo será AK=DN[f]. Sendo pois AH=DM, será o quadrado da recta AH igual ao quadrado da recta DM. Mas os quadrados de AK, e de KH são iguaes[g] ao quadrado de AH, por ser recto o angulo AKH; e os quadrados de DN e de NM são iguaes[g] ao quadrado de DM, porque he recto tambem o angulo DNM. Logo serão os quadrados de AK, e de KH iguaes aos quadrados de DN e de NM. Logo tirando dos primeiros o quadrado de AK, e tirando dos segundos o quadrado de DN, que he igual ao quadrado de AK, ficará o quadrado de KH igual ao quadrado de NM, e assim será KH=NM. E como as duas HA, AK são iguaes ás duas MD, DN, cada huma a cada huma; e temos provado ser a baze HK igual á baze MN, será o angulo HAK=MDN[h].

f. 4. 1.
g. 47. 1.
h. 8. 1.

COROL. Desta Proposição se infere, que se tivermos dous angulos planos iguaes; e se dos vertices destes angulos levantarmos duas rectas tambem iguaes, que fação angulos iguaes com os lados dos ditos angulos planos, do modo que temos dito; as perpendiculares, que das extremidades das rectas levantadas cahirem sobre os planos dos ditos angulos, serão tambem iguaes.

OU-

OUTRA DEMONSTRAÇÃO DESTE COROLL.

Fig. 47. SEjão iguaes entre si os dous angulos planos BAC, EDF; e sendo tambem iguaes as rectas AH, DM, que dos vertices dos angulos se levantão sobre os planos delles, fação com os lados BA, AC; ED, DF os angulos HAB, MDE iguaes, e os angulos HAC, MDF tambem iguaes. Dos pontos H, M sejão conduzidas sobre os planos BAC, EDF as perpendiculares HK, MN. Digo, que será HK=MN.

Visto ser formado o angulo solido A pelos tres angulos planos ABC, BAH, HAC, que são iguaes, cada hum a cada hum, aos tres angulos planos EDF, EDM, MDF, que fazem o angulo solido D, serão iguaes entre si os angulos solidos A, D, de maneira que hum delles poder-se-ha ajustar sobre o outro exactamente. Porque sendo o angulo plano BAC applicado ao angulo plano EDF, poderemos demonstrar, como já fizemos na Proposição B deste Livro, que a recta AH se deve ajustar com a recta DM; e sendo AH=DM, o ponto H deve cahir sobre o ponto M. Do que depois se segue, que a recta HK perpendicular ao
f. 13. 11. plano BAC, virá a ser a mesma que *i* a recta MN perpendicular ao plano EDF, por se ajustarem entre si tambem estes planos. Fica pois evidente ser HK=MN.

PROP.

PROP. XXXVI. THEOR.

SE forem tres linhas rectas proporcionaes; o solido parallelepipedo formado com estas tres rectas, como lados, será igual ao solido parallelepipedo equilatero, descripto sobre a media das ditas tres rectas proporcionaes; sendo hum angulo solido deste parallelepipedo formado por tres angulos planos iguaes, cada hum a cada hum, aos tres angulos planos, que comprehendem hum angulo solido do outro parallelepipedo.

Sejão as tres rectas proporcionaes A, B, C, isto he, seja A: B:: B: C. Digo, que o solido parallelepipedo formado pelas tres rectas A, B, C, como lados, he igual ao solido parallelepipedo equilatero descripto sobre a media B, e ao mesmo tempo equiangulo ao primeiro. Fig. 48.

Considere-se o angulo solido D formado pelos tres angulos planos EDF, FDG, GDE; e posta cada huma das tres rectas ED, DF, DG igual á recta B, complete-se o parallelepipedo DH. Tome-se LK = A, e faça-se no ponto K hum angulo solido [a] com os tres angulos planos LKM, MKN, NKL, que sejão iguaes aos tres EDF, FDG, GDE, cada hum a cada hum. Tome-se KN = B, e KM = C, e complete-se o parallelepipedo KO. Sendo

a. 29. 11.

do

do pois A: B:: B: C, e ſendo A=LK, e B=DE=DF, e C=KM; ſerá LK: ED:: DF: KM. Logo nos parallelogrammos LM, EF, ſendo reciprocamente proporcionaes os lados, que formão angulos iguaes; ſerão os meſmos parallelogrammos LM, EF iguaes[b]. E
b. 14. 6.
como dos vertices dos angulos planos e iguaes EDF, LKM eſtão levantadas as rectas DG, KN tambem iguaes, e que fazem com os lados ED, DF; LK, KM angulos reſpectivamente iguaes; as rectas, que dos pontos G, N forem lançadas perpendicularmente ſobre os planos EDF, LKM, do meſmo modo ſerão
c. Cor. 35. 11.
iguaes[c], e por conſequencia ſerão igualmente altos os ſolidos KO, DH. Mas os ſolidos parallelepipedos, que eſtão poſtos ſobre bazes iguaes, e que tem alturas iguaes, são entre ſi
d. 31. 11.
iguaes[d]. Logo o ſolido parallelepipedo KO, que tem tres lados iguaes ás tres rectas proporcionaes A, B, C, he igual ao ſolido parallelepipedo DH, que he equilatero, por ſer cada hum dos lados delle igual á recta media B, e que ao meſmo tempo he equiangulo ao ſolido parallelepipedo KO.

PROP. XXXVII. THEOR.

SE forem quatro linhas rectas proporcionaes; os ſolidos parallelepipedos ſemelhantes, e ſemelhantemente deſcriptos ſobre ellas, ſerão tambem proporcionaes. E ſe os ſolidos parallelepipedos

dos

dos ſemelhantes, e ſemelhantemente deſcriptos ſobre quatro rectas forem proporcionaes; tambem as rectas ſerão proporcionaes.

Sejão as quatro rectas proporcionaes AB, CD, EF, GH, iſto he, ſeja AB: CD:: EF: GH. Eſtejão poſtos ſobre eſtas rectas proporcionaes os parallelepipedos AK, CL; EM, GN ſemelhantes, e ſemelhantemente deſcriptos. Digo, que ſerá o ſolido AK para o ſolido CL, como o ſolido EM he para o ſolido NG.

Ponhão-ſe as rectas O, P, Q, R de maneira que as quatro AB, CD, O, P, como tambem as quatro EF, GH, Q, R ſejão continuamente proporcionaes [a]. Sendo pois pela hypotheſis AB: CD:: EF: GH; ſerá tambem CD: O:: GH: Q; e O: P:: Q: R [b]. Logo ſerá por igual AB: P:: EF: R [c]. Mas he AB para P, como o ſolido AK para o ſolido CL [d]; e EF para R, como o ſolido EM para o ſolido GN [d]. Logo ſerá o ſolido AK para o ſolido CL, como o ſolido EM he para o ſolido GN.

Fig. 49.

a. 11. 6.

b. 11. 5.

c. 22. 5.

d. Cor. 33. 11.

Supponhamos agora ſer o ſolido AK para o ſolido CL, como o ſolido EM he para o ſolido GN. Digo, que ſerá AB : CD : : EF : GH.

Faça-ſe AB : CD : : EF : ST; e ſobre a recta ST deſcreva-ſe [e] o parallelepipedo SV ſemelhante, e ſemelhantemente poſto a reſpeito

e. 27. 11.

do

do parallelepipedo EM, ou GN. Como he AB: CD:: EF: ST; e ſobre as rectas AB, CD eſtão feitos os parallelepipedos AK, CL ſemelhantes, e ſemelhantemente poſtos; e ſobre as rectas EF, ST os parallelepipedos EM, SV tambem ſemelhantes, e ſemelhantemente poſtos, ſerá AK: CL:: EM: SV. Mas pela ſuppoſição he tambem AK: CL:: EM: GN. Logo ſerá o parallelepipedo GN igual *f* ao parallelepipedo SV. Mas eſtes ſolidos são ſemelhantes entre ſi, e ſemelhantemente deſcriptos. Logo os planos, que formão os ſolidos GN, SV devem ſer ſemelhantes e iguaes, e por conſequencia tambem iguaes os lados homologos delles GH, ST. Logo ſendo AB: CD:: EF: ST; e ſendo ST = GH, ſerá finalmente AB: CD:: EF: GH.

f. 9. 5.

PROP. XXXVIII. THEOR.

SE for hum plano perpendicular a outro plano; e ſe de qualquer ponto de hum dos ditos planos for conduzida huma linha recta perpendicular ao outro plano; eſta recta cahirá ſobre a ſecção commua dos planos.

Fig. 50. Seja o plano CD perpendicular ao plano AB, e ſeja a recta AD a ſecção commua dos planos AB, CD. Do ponto E tomado, como quizermos, no plano CD conſidere-ſe tirada huma recta, que ſeja perpendicular ao plano

AB.

AB. Digo, que esta recta deve cahir sobre a secção commua AD.

Se a dita perpendicular não for terminada na secção commua AD, cahirá fóra della, como a recta EF. Seja F o ponto, no qual a recta EF encontra o plano AB. Do ponto F no mesmo plano AB tire-se a recta FG perpendicular[a] á DA. Será a recta GF tambem perpendicular[b] ao plano CD. Tire-se EG. Sendo a recta FG perpendicular ao plano CD; e a recta EG existente no mesmo plano CD, tocando a recta FG no ponto G, será recto[c] o angulo FGE. Mas tambem he recto o angulo EFG, porque se tem supposto ser a recta EF perpendicular ao plano AB. Logo no triangulo EFG ha dous angulos rectos, o que he grande absurdo. Logo a perpendicular, que do ponto E he conduzida sobre o plano AB, não póde cahir fóra da secção commua AD, mas sim deve cahir sobre ella.

a. 12. 1.
b. def. 4. 11.
c. def. 3. 11.

PROP. XXXIX. THEOR.

SE em hum solido parallelepipedo os lados de dous planos oppostos forem divididos em partes iguaes; e pelas secções destes lados se fizerem passar dous planos; a secção commua destes dous planos, e o diametro do solido parallelepipedo se cortaráõ reciprocamente em partes iguaes.

Fig 51. Sejão divididos em partes iguaes os lados dos planos oppostos CF, AH do parallelepipedo AF nos pontos K, L, M, N; X, O, P, R. Tirem-se as rectas KL, MN, XO, PR. Sendo as duas DK, CL iguaes entre si e parallelas, serão tambem parallelas[a] as duas KL, DC. Pela mesma razão são parallelas as duas MN, BA. Mas BA he parallela á DC. Logo sendo KL, BA parallelas ambas á DC, ainda que existentes em differentes planos, será KL parallela[b] á BA. E tambem sendo KL, MN parallelas á mesma recta BA, e não existentes no plano da recta BA, será KL parallela[b] á MN, e por consequencia as duas rectas KL, MN existirão em hum mesmo plano. Do mesmo modo se demonstra existirem no mesmo plano as duas rectas XO, PR. Seja pois a recta YS a secção commua dos planos KN, XR; e seja DG o diametro do parallelepipedo AF. Digo, que as duas rectas YS, DG se encontrão, e se cortão reciprocamente em partes iguaes.

a. 33. 1.

b. 9. 11.

Tirem-se as rectas DY, YE, BS, SG. Sendo DX parallela á OE, os angulos alternos DXY, YOE serão iguaes[c]. E sendo DX = OE, e XY = YO, e o angulo DXY = YOE, será a baze DY igual á baze YE, e o angulo XYD = OYE[d], e assim será DYE huma só linha recta[e]. Do mesmo modo se provará, que BSG he huma só linha recta, e que BS he igual á SG. E como a recta CA he igual e parallela á DB, e ao mesmo tempo igual e

c. 29. 1.

d. 4. 1.

e. 14. 1.

pa-

parallela á EG, será DB igual [b] e parallela á b. 9. 11.
EG. Mas entre as extremidades das rectas iguaes e parallelas DB, EG estão tiradas as outras DE, BG. Logo tambem estas duas DE, BG serão iguaes [a] entre si e parallelas, e por consequen- a. 33. 1.
cia as rectas DG, YS devem existir no mesmo plano, por estarem tiradas entre os pontos D, G, Y, S das duas parallelas DE, BG. Logo as rectas DG, YS se hão de encontrar em algum ponto. Encontrem-se pois no ponto T. Sendo parallelas entre si as duas rectas DE, BG, os angulos alternos EDT, BGT serão iguaes [c]. Mas he DTY = GTS [f]. Logo c. 29. 1.
nos dous triangulos DTY, GTS ha dous an- f. 15. 1.
gulos iguaes a outros dous angulos, cada hum a cada hum; e hum lado igual a outro lado, isto he, o lado DY igual ao lado GS, por ser DY ametade de DE, e GS ametade de BG, e por ser DE = BG; e além disto os mesmos lados DY, GS ficão oppostos a angulos iguaes. Logo os outros lados dos ditos triangulos serão entre si respectivamente iguaes [g], e por con- g. 26. 1.
sequencia será DT = TG, e YT = TS.

PROP. XL. THEOR.

SE forem dous prismas triangulares igualmente altos; e hum delles estiver posto sobre huma baze parallelogramma, e o outro sobre huma baze triangular; sendo esta baze a metade daquella, os dous prismas serão iguaes.

Fig. 52. Sejão os dous prismas igualmente altos ABCDEF, GHKLMN, dos quaes o primeiro he formado pelos dous triangulos ABE, CDF, e pelos tres parallelogrammos AD, DE, EC; e o outro pelos dous triangulos GHK, LMN, e pelos tres parallelogrammos LH, HN, NG. Seja o parallelogrammo AF a baze do primeiro; e o triangulo GHK a baze do segundo, e supponhamos ser o parallelogrammo AF o dobro do triangulo GHK. Digo, que o prisma ABCDEF he igual ao prisma GHKLMN.

Completem-se os solidos AX, GO. Sendo pois pela supposição o parallelogrammo AF o dobro do triangulo GHK; e o parallelogrammo HK tambem o dobro[a] do mesmo triangulo GHK; será o parallelogrammo AF igual ao parallelogrammo HK. Mas os parallelepipedos postos sobre bazes iguaes, e igualmente altos, são iguaes[b]. Logo o parallelepipedo AX he igual ao parallelepipedo GO. Mas o prisma ABCDEF he a metade[c] do parallelepipedo AX, e o prisma GHKLMN he a metade[c] do parallelepipedo GO. Logo o prisma ABCDEF he igual ao prisma GHKLMN.

a. 34. 1.
b. 31. 11.
c. 28. 11.

LIVRO XII.
DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

LEMMA I.

Necessario para a demonstração de algumas Proposições deste Livro. Este Lemma he a Proposição primeira do Livro decimo.

POstas duas grandezas desiguaes, se da grandeza maior se tirar mais da sua metade; e da grandeza, que resta, se tirar tambem mais de metade; e isto se continuar sempre assim; ficará finalmente huma grandeza, a qual será mais pequena que a grandeza menor das duas assima postas.

Se-

Fig. 1. Sejão as duas grandezas desiguaes AB, C, e seja AB a maior. Digo, que se de AB se tirar mais de metade; e do que resta se tirar tambem mais de metade; e isto se continuar sempre assim, ficará finalmente huma grandeza menor que a grandeza C.

A grandeza menor C tomada certo numero de vezes, poderá finalmente vencer a grandeza maior AB. Tome-se pois, e seja DE huma grandeza multiplice de C, e maior que a grandeza AB. Divida-se DE nas partes DF, FG, GE, sendo cada huma destas igual á C. Tire-se da grandeza AB a parte BH maior do que a metade de AB; do resto AH tire-se a parte HK tambem maior do que a metade de AH; continue-se isto assim até que as divisões, que se vão fazendo na grandeza AB sejão outras tantas, quantas são aquellas, que se tem feito na grandeza DE. Seja pois o numero das divisões AK, KH, HB igual ao numero das divisões DF, FG, GE. Sendo DE > AB, e tirando-se da grandeza DE a parte GE menor do que a metade da mesma DE; e tirando-se da grandeza AB a parte BH maior que a metade da mesma AB; o resto GD será maior que o resto HA. Tambem sendo GD > HA; se da grandeza GD for tirada a sua metade GF; e se da grandeza HA for tirada a parte HK maior do que a metade da mesma HA; o resto FD será maior que o resto AK. Mas he FD = C. Logo será C > AK, e por consequencia AK < C. Logo da grandeza maior

ior proposta AB fica o resto AK menor que a grandeza menor proposta C.

PROP. I. THEOR.

OS polygonos semelhantes inscriptos em circulos estão entre si, como os quadrados dos diametros dos mesmos circulos.

Sejão os circulos ABCDE, FGHKL, cujos diametros são as rectas BM, GN. Estejão inscriptos nestes circulos os polygonos semelhantes ABCDE, FGHKL. Digo, que assim como o quadrado de BM he para o quadrado de GN, assim tambem o polygono ABCDE he para o polygono FGHKL. Fig. 2.

Tirem-se as rectas BE, AM; GL, FN. Sendo semelhantes entre si os polygonos ABCDE, FGHKL, será o angulo BAE = GFL [a], e tambem será BA : AE : : GF : FL [a]. Logo os dous triangulos BAE, GFL tem hum angulo igual a outro angulo, isto he, o angulo BAE = GFL; e tem proporcionaes os lados, que formão os ditos angulos iguaes. Logo são equiangulos [b], e por consequencia deve ser o angulo AEB = FLG. Mas tambem são iguaes [c] os angulos AEB, AMB, porque ambos assentão sobre o mesmo arco AB; e pela mesma razão he FLG = FNG. Logo será AMB = FNG. Mas o angulo recto [d] BAM he igual ao recto [d] GFN. Logo será tambem o tercei-

a. def. 1. 6.
b. 6. 6.
c. 21. 3.
d. 31. 5.

ro ABM igual ao terceiro FGN, e assim serão equiangulos os triangulos ABM, FGN.
e. 4. 6. Logo deve ser BM : GN :: BA : GF [e], e por consequencia a razão duplicada da de BM para GN he igual [f] á duplicada da razão de BA
f. def. 10. 5. mais 22. 5. para GF. Mas a razão do quadrado de BM para o quadrado de GN he a duplicada [g] da ra-
g. 20. 6. zão de BM para GN; e a razão do polygono ABCDE para o polygono FGHKL he a duplicada [g] da razão de BA para GF. Logo assim como o quadrado de BM he para o quadrado de GN; assim tambem será o polygono ABCDE para o polygono FGHKL.

PROP. II. THEOR.

OS circulos estão entre si como os quadrados dos seus diametros.

Fig. 3. Sejão os circulos ABCD, EFGH, que tem os diametros BD, FH. Digo, que assim como o quadrado de BD he para o quadrado de FH, assim tambem o circulo ABCD he para o circulo EFGH.

Supposto não ser assim; o quadrado de BD será para o quadrado de FH, como o circulo ABCD he para hum espaço menor, ou maior que o circulo EFGH. *

Se-

* A razão disto he, porque ha da de haver hum quadrado igual ao circulo ABCD. Chamado P o lado deste quadrado, he manifesto, que postas as tres rectas

BD,

Seja primeiramente para hum eſpaço menor, e ſeja *S* eſte eſpaço. Inſcreva-ſe no circulo EFGH o quadrado EFGH. Digo, que eſte quadrado inſcripto no circulo EFGH he maior que a metade do meſmo circulo EFGH. Porque ſe pelos pontos E, F, G, H forem tiradas outras tantas tangentes ao circulo; o quadrado inſcripto EFGH virá a ſer a metade [a] do quadrado circunſcripto ao meſmo circulo. Mas o circulo he menor do que o quadrado circunſcripto. Logo o quadrado EFGH he maior que a metade do circulo EFGH. Divida-ſe cada hum dos arcos EF, FG, GH, HE em partes iguaes nos pontos K, L, M, N, e tirem-ſe as rectas EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE. Cada hum dos triangulos EKF, FLG, GMH, HNE ſerá maior que a metade do ſegmento circular, em que fica comprehendido; porque ſe pelos pontos K, L, M, N forem conduzidas ao circulo outras tantas tangentes; e ſobre as rectas EF, FG, GH, HE ſe completarem outros tantos parallelogrammos; cada hum dos triangulos EKF, FLG,

Fig. 3. 4.

a. 41. 1.

BD, FH, e P, ſe lhes poderá achar a quarta proporcional, a qual chamo Q. Logo os quadrados feitos ſobre as rectas BD, FH, P, Q, ſeráõ tambem proporcionaes; que he o meſmo que dizer, que ſuppoſtos os quadrados das rectas BD, FH, e ſuppoſto o circulo ABCD, poderá haver hum eſpaço, que ſeja huma quarta grandeza proporcional a reſpeito dos meſmos quadrados de BD, e de FH, e do circulo ABCD. Seja S eſta quarta grandeza proporcional. Do meſmo modo ſe hão de entender alguns paſſos ſemelhantes, que occorrem nas Propoſições ſeguintes.

a.41.1. FLG, GMH, HNE, será a metade[a] do parallelogrammo, que lhe corresponde. Mas cada segmento he menor que o parallelogrammo, que lhe pertence. Logo cada hum dos triangulos EKF, FLG, GMH, HNE he maior do que a metade do segmento circular, em que fica descripto. E divididos outra vez estes arcos nas suas ametades, e tiradas as cordas correspondentes, e continuado isto sempre assim, háo de restar finalmente huns segmentos circulares, os quaes tomados juntos háo de ser menores que o excesso, com que o circulo EFGH excede o espaço S. Porque já se tem demonstrado no Lemma precedente, que postas duas grandezas desiguaes, se da grandeza maior se tirar mais do que a sua metade; e do que fica tambem se tirar mais do que a metade; e isto se continuar sempre assim; por fim havemos de ter huma grandeza menor que a mesma grandeza menor das duas propostas. Sejáo pois os segmentos EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE os que ficáo, de maneira que tomados juntos venháo a ser menores que o excesso, com que o circulo EFGH excede o espaço S. Logo o polygono EKFLGMHN, que resta, será maior que o espaço S. Inscreva-se no circulo ABCD o polygono AXBOCPDR semelhante ao polygono EKFLGMHN. Logo assim como o quadrado de BD he para o quadrado de FH, assim tambem o polygono AXBOCPDR será para o

b.1.12. polygono EKFLGMHN[b]. Mas assim como o

qua-

quadrado de BD he para o quadrado de FH, aſſim o circulo ABCD he para o eſpaço S. Logo como o circulo ABCD he para o eſpaço S, aſſim o polygono AXBOCPDR deve ſer para o polygono EKFLGMHN.[c] Mas c. 11. 5. o circulo ABCD he maior que o polygono, a que o meſmo circulo he circunſcripto. Logo tambem o eſpaço S deve ſer maior[d] que d. 14. 5. o polygono EKFLGMHN. Mas temos já demonſtrado, que o eſpaço S he menor que o meſmo polygono EKFLGMHN. Logo o eſpaço S he maior e menor no meſmo tempo que o polygono EKFLGMHN, o que não he poſſivel. Logo he falſo, aſſim como o quadrado de BD he para o quadrado de FH, aſſim tambem o circulo ABCD o he para hum eſpaço menor que o circulo EFGH. Do meſmo modo ſe póde demonſtrar, que aſſim como o quadrado de FH he para o quadrado de BD, aſſim o circulo EFGH não póde ſer para hum eſpaço menor que o circulo ABCD.

Digo tambem, que nem póde ſer que aſſim como o quadrado de BD he para o quadrado de FH, aſſim tambem o circulo ABCD ſeja para hum eſpaço maior que o circulo EFGH. Se iſto he poſſivel; aſſim como o qua- Fig. 3. 5. drado de BD he para o quadrado de FH, ſeja-o tambem o circulo ABCD para o eſpaço T maior que o circulo EFGH. Invertendo ſerá o eſpaço T para o circulo ABCD, como o quadrado de FH para o quadrado de BD.

Mas

Mas tambem póde ser o espaço † T para o circulo ABCD, como o circulo EFGH para
d. 14. 5. outro espaço, que será menor [d] que o circulo ABCD, visto ser o espaço T maior que o circulo EFGH. Logo assim como o quadrado de FH he para o quadrado de BD, assim o circulo EFGH será para hum espaço menor que o circulo ABCD; o que já se tem demonstrado impossivel. Logo não póde ser, que assim como o quadrado de BD he para o quadrado de FH, assim seja o circulo ABCD para hum espaço maior que o circulo EFGH. Mas tambem temos provado, que assim como o quadrado de BD he para o quadrado de FH, assim não póde ser o circulo ABCD para hum espaço menor que o circulo EFGH. Logo se segue, que assim como o quadrado de BD he para o quadrado de FH, assim he o circulo ABCD para o circulo ¶ EFGH. Logo os cir-

† Porque temos demonstrado na nota * precedente, que postos os quadrados das rectas BD, FH, e posto o circulo ABCD, póde haver hum espaço, que foi marcado com a letra S, o qual seja a quarta grandeza proporcional. Da mesma sorte postos o espaço T, e os circulos ABCD, EFGH, poderá haver hum espaço, que seja a quarta grandeza proporcional. E neste sentido se hão de entender alguns passos, que occorrem nas Proposições seguintes.

¶ Porque postos os quadrados das rectas BD, FH, e o circulo ABCD, podendo haver hum espaço, que seja a quarta grandeza proporcional, e não podendo ser este espaço nem menor, nem maior que o circulo EFGH, como já se tem demonstrado, necessariamente o mesmo espaço deve ser igual ao circulo EFGH.

circulos estão entre si como os quadrados dos seus diametros.

PROP. III. THEOR.

TOda a pyramide, que tem a baze triangular, se divide em duas pyramides iguaes, semelhantes entre si, e semelhantes á pyramide total, e com bazes tambem triangulares; e mais em dous prismas iguaes, que tomados juntos são maiores que a metade da pyramide total.

Seja a pyramide ABCD, cuja baze he o triangulo ABC, e o vertice o ponto D. Digo, que a pyramide ABCD se divide em outras duas pyramides iguaes, semelhantes entre si, e com bazes triangulares, e tambem semelhantes á pyramide ABCD; e em dous prismas iguaes, os quaes tomados juntos são maiores que a metade da pyramide ABCD. Fig. 6.

Divididos pelo meio os lados AB, BC, CA, AD, DB, DC nos pontos E, F, G, H, K, L, tirem-se as rectas EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG. Sendo AE = EB, e AH = HD, será HE parallela[a] á DB. a. 2. 6.
Pela mesma razão HK he parallela á AB. Logo a figura HEBK he hum parallelogrammo, e assim he HK = EB[b]. Mas temos EB = AE. b. 34. 1.
Logo deve ser AE = HK. Mas he AH = HD, e juntamente são iguaes[c] os angulos EAH, c. 29. 1.

KHD.

KHD. Logo ferá EH = AD, e o triangulo
d. 4. 1. AEH igual [d], e femelhante ao triangulo HKD.
Pela mefma razão tambem o triangulo AGH
he igual, e femelhante ao triangulo HLD. E
como as duas rectas EH, HG exiftentes em
hum plano, e que fe tocão, são parallelas ref-
pectivamente ás outras duas KD, DL exiften-
tes em outro plano, e que tambem fe tocão;
os angulos comprehendidos por eftas rectas fe-
e. 10. 11. rão iguaes [e] entre fi, ifto he, ferá EHG =
KDL. Tambem fendo as duas rectas EH, HG
iguaes ás duas KD, DL, cada huma a cada
huma; e fendo o angulo EHG = KDL, fe-
rá a baze EG igual [d] á baze KL, e o trian-
gulo EHG igual [d], e femelhante ao triangulo
KDL. Do mefmo modo o triangulo AEG
deve fer igual, e femelhante ao triangulo HKL.
Logo a pyramide, cuja baze he o triangulo
f. C. 11. AEG, e o vertice o ponto H, he igual [f], e fe-
melhante á pyramide, cuja baze he o triangu-
lo KHL, e o vertice o ponto D. E como no
triangulo ADB eftá tirada a recta HK paral-
lela ao lado AB; os triangulos ABD, HDK
ferão equiangulos, e affim terão porporcio-
g. 4. 6. naes [g] os lados, e por confequencia ferão fe-
melhantes. Pela mefma razão são femelhan-
tes os triangulos DBC, DKL; e os triangu-
los ADC, HDL; e tambem os triangulos
ABC, AEG. Mas temos demonftrado fer o
triangulo AEG femelhante ao triangulo HKL.
Logo ferá tambem o triangulo ABC femelhan-
h. 21. 6. te [h] ao triangulo HKL. Logo a pyramide,
cu-

cuja baze he o triangulo ABC, e o vertice o ponto D, he femelhante *i* á pyramide, cuja *i.* B. 11.
baze he o triangulo HKL, e o vertice o pon- mais def.
to D. Mas a pyramide da baze triangular HKL, 11. 11.
e do vertice D he femelhante á pyramide da baze triangular AEG, e do vertice H, como temos demonftrado. Logo a pyramide da baze triangular ABC, e do vertice D he femelhante á pyramide da baze triangular AEG, e do vertice H. Logo cada huma das pyramides AEGH, HKLD he femelhante á pyramide total ABCD. Sendo pois BF=FC; o parallelogrammo EBFG ferá o dobro *k* do trian- *k.* 41. 1.
gulo GFC. E como dous prifmas são iguaes entre fi, quando fendo igualmente altos, a baze parallelogramma de hum he o dobro *l* da *l.* 40. 11.
baze triangular do outro; o prifma, cuja baze he o parallelogrammo EBFG, e que tem o lado KH oppofto á mefma baze EBFG, ferá igual ao prifma, cuja baze he o triangulo GFC, e o plano oppofto o triangulo HKL, vifto ferem eftes prifmas igualmente altos por eftarem poftos entre os planos parallelos *m* ABC, *m.* 15. 11.
HKL. Tambem he manifefto, que cada hum deftes dous prifmas he maior que cada huma das duas pyramides, cujas bazes são os triangulos AEG, HKL, e os vertices os pontos H, D. Porque tirada a recta EF, o prifma da baze parallelogramma EBFG, e do lado oppofto KH, he maior que a pyramide da baze triangular EBF, e do vertice K. Mas efta pyramide he igual *f* á outra, que tem por ba- *f.* C. 11.
ze

ze o triangulo AEG, e por vertice o ponto H, por ſerem ambas formadas com planos iguaes entre ſi, e ſemelhantes. Logo tambem o priſma, cuja baze he o parallelogrammo EBFG, e o lado oppoſto a eſta baze a recta HK, he maior que a pyramide da baze triangular AEG, e do vertice H. Mas o priſma, cuja baze he o parallelogrammo EBFG, e que tem o lado HK oppoſto a eſta baze, he igual ao priſma, cuja baze he o triangulo GFC, e o plano oppoſto o triangulo HKL; e a pyramide da baze triangular AEG, e do vertice H, he igual á pyramide da baze triangular HKL, e do vertice D. Logo os ditos dous priſmas tomados juntos são maiores que as duas pyramides, cujas bazes são os triangulos AEG, HKL, e os vertices os pontos H, D, tambem tomadas juntas. Logo a pyramide total, que tem por baze o triangulo ABC, e por vertice o ponto D, eſtá dividida em duas pyramides iguaes, e ſemelhantes entre ſi, e tambem ſemelhantes á pyramide total; e mais em dous priſmas iguaes, os quaes tomados juntos são maiores que a metade da meſma pyramide total.

PROP. IV. THEOR.

SE ſe puzerem duas pyramides de alturas iguaes, e que tenhão bazes triangulares; e cada huma dellas for dividida em duas outras pyramides iguaes entre ſi, e ſemelhantes á pyramide total,

tal, e mais em dous prismas tambem iguaes; e se cada huma das pyramides assim feitas for dividida do mesmo modo, e isto se for continuando sempre assim; assim como a baze de huma pyramide total he para a baze da outra pyramide total, assim todos os prismas comprehendidos na primeira pyramide total serão para todos os prismas comprehendidos em numero igual na outra pyramide total.

Sejão as duas pyramides igualmente altas com as bazes triangulares ABC, DEF, e os vertices G, H; cada huma das quaes se considere dividida em outras duas pyramides iguaes entre si, e semelhantes á pyramide total, e mais em dous prismas tambem iguaes; e cada huma das pyramides assim feitas se considere do mesmo modo dividida que as pyramides totaes; e continue-se isto sempre assim. Digo, que assim como a baze ABC he para a baze DEF, assim tambem todos os prismas, que estiverem comprehendidos na pyramide ABCG, serão para todos os prismas comprehendidos em igual numero na pyramide DEFH. Fig. 7.

Faça-se a mesma construcção, que se tem feito na Proposição precedente. Sendo pois EX = XC, e AL = LC; será XL parallela[a] á AB, e o triangulo ABC semelhante ao triangulo LXC. Pela mesma razão tambem o triangulo *a. 2. 6.*

DEF he ſemelhante ao triangulo RVF. E como a recta BC he o dobro da recta CX, e EF o dobro de FV; ſerá BC : CX : : EF : FV. Mas ſobre as rectas BC, CX eſtão deſcriptos os rectilineos ABC, LXC ſemelhantes, e ſemelhantemente poſtos; e ſobre as rectas EF, FV os rectilineos DEF, RVF tambem ſemelhantes, e ſemelhantemente poſtos. Logo aſſim como o triangulo ABC he para o triangulo LXC, aſſim tambem o triangulo DEF ſerá para
b. 22. 6. o triangulo RVF [b]; e permutando, ſerá ABC: DEF : : LXC : RVF. Viſto pois ſerem paralle-
c. 15. 11. los [c] entre ſi tanto os planos ABC, OMN, como os planos DEF, STY; as perpendiculares, que dos vertices G, H ſe podem conduzir ſobre as bazes ABC, DEF, e que são iguaes entre ſi pela ſuppoſição, ficarão divididas em
d. 17. 11. partes tambem iguaes [d] pelos planos OMN, STY, ſendo do meſmo modo divididas em partes iguaes as rectas GC, HF nos pontos N, Y pelos meſmos planos OMN, STY. Logo os priſmas LXCOMN, RVFSTY são igualmente altos, e por conſequencia a baze LXC he para a baze RVF, iſto he, o triangulo ABC he para o triangulo DEF, como o priſma
e Cor. 32. 11. LXCOMN he para o priſma RVFSTY [e]. E como os dous priſmas, que ficão comprehendidos na pyramide ABCG, são iguaes entre ſi, como tambem os outros dous, que eſtão na pyramide DEFH; o priſma, cuja baze he o parallelogrammo KBXL, e o lado oppoſto a recta MO, ſerá para o priſma, cuja baze he o tri-

triangulo LXC, e o plano opposto o triangulo OMN, como o prisma, cuja baze he o f. 7. 5.
parallelogrammo PEVR, e o lado opposto a recta TS, he para o prisma, cuja baze he o triangulo RVF, e o plano opposto o triangulo STY. Logo compondo, serão os prismas KBXLMO, LXCOMN para o prisma LXCOMN, como os prismas PEVRTS, RVFSTY são para o prisma RVFSTY. E permutando, serão os prismas KBXLMO, LXCOMN para os prismas PEVRTS, RVFSTY, como o prisma LXCOMN he para o prisma RVFSTY. Mas assim como o prisma LXCOMN he para o prisma RVFSTY, assim temos demonstrado ser a baze ABC para a baze DEF. Logo assim como a baze ABC he para a baze DEF, assim tambem os dous prismas comprehendidos na pyramide ABCG são para os dous prismas comprehendidos na pyramide DEFH. Tambem se as pyramides, que ficão feitas pela primeira divisão, por exemplo as pyramides OMNG, STYH, forem divididas do mesmo modo que as primeiras pyramides propostas; será a baze OMN para a baze STY, como os dous prismas comprehendidos na pyramide OMNG são para os dous prismas comprehendidos na pyramide STYH. Mas assim como a baze OMN he para a baze STY, assim tambem a baze ABC he para a baze DEF. Logo assim como a baze ABC he para a baze DEF, assim os dous prismas existentes na pyramide ABCG são para os dous, que existem

na pyramide DEFH; e do mesmo modo os dous, que existem na pyramide OMNG para os dous existentes na pyramide STYH; e assim os quatro para os quatro. Demonstrase o mesmo tambem a respeito dos prismas, que ficão formados pela divisão das pyramides AKLO, DPRS, e de todas as mais formadas em numero igual em ambas as pyramides propostas.

PROP. V. THEOR.

AS pyramides, que são igualmente altas, e que tem bazes triangulares, estão entre si como as bazes.

Fig. 7. Sejão as pyramides igualmente altas, cujas bazes são os triangulos ABC, DEF, e os vertices os pontos G, H. Digo, que assim como a baze ABC he para a baze DEF, assim a pyramide ABCG será para a pyramide DEFH.

A não ser isto assim, do mesmo modo que a baze ABC he para a baze DEF, assim será a pyramide ABCG para hum solido ou menor,
Fig. 7. 8. ou maior * que a pyramide DEFH. Seja primeiramente a pyramide ABCG para o solido Q menor que a pyramide DEFH, como a baze ABC he para a baze DEF. Divida-se a pyramide DEFH em duas pyramides iguaes entre si, e semelhantes á pyramide total, e tambem

* Póde-se isto demonstrar com o mesmo methodo, com que demonstrámos huma cousa semelhante na Proposição 2. na nota *

bem em dous prismas iguaes. Serão os dous prismas tomados juntos maiores [a] do que a metade da pyramide inteira. Divida-se do mesmo modo cada huma das pyramides, que assim ficão feitas com esta primeira divisão, e assim se continue sempre com outras, e outras divisões até ficarem feitas na pyramide DEFH humas pyramides, as quaes todas juntas sejão menores que o excesso, com que a mesma pyramide DEFH he maior que o solido Q. Sejão estas pyramides as duas DPRS, STYH. Logo os prismas, que estão na pyramide DEFH, serão todos juntos maiores que o solido Q. Considere-se agora estar dividida a pyramide ABCG semelhantemente, e em outras tantas partes, como a pyramide DEFH. Logo assim como a baze ABC he para a baze DEF, assim os prismas existentes na pyramide ABCG serão para os prismas existentes na pyramide DEFH [b]. Mas assim como a baze ABC he para a baze DEF, assim temos supposto ser a pyramide ABCG para o solido Q. Logo assim como a pyramide ABCG he para o solido Q, assim tambem os prismas existentes na pyramide ABCG serão para os prismas existentes na pyramide DEFH. Mas a pyramide ABCG he maior que os prismas nella comprehendidos. Logo será o solido Q tambem maior [c] que os prismas existentes na pyramide DEFH. Mas isto não póde ser, porque já temos provado, que os prismas comprehendidos na pyramide DEFH são todos juntos maiores que o solido

do

a. 3. 12.

b. 4. 12.

c. 14. 5.

do Q. Logo não he a baze ABC para a baze DEF, como a pyramide ABCG para hum solido menor que a pyramide DEFH. Com o mesmo methodo demonstraremos, que nem póde ser a baze DEF para a baze ABC, como a pyramide DEFH para hum solido menor que a pyramide ABCG.

Digo tambem, que assim como a baze ABC he para a baze DEF, assim não póde ser a pyramide ABCG para hum solido maior que a
Fig. 7. 9. pyramide DEFH. Seja Z, se he possivel, o tal solido. Logo invertendo, assim como a baze DEF he para a baze ABC, assim tambem o solido Z será para a pyramide ABCG. Mas assim como o solido Z he para a pyramide ABCG, assim a pyramide DEFH deve ser para hum solido † menor que a pyramide
c. 14. 5. ABCG [c], por ser o solido Z maior que a pyramyde DEFH. Logo assim como a baze DEF he para a baze ABC, assim a pyramide DEFH será para hum solido menor que a pyramide ABCG, o que he absurdo. Logo não he a baze ABC para a baze DEF, como a pyramide ABCG para hum solido maior que a pyramide DEFH. Mas já se tem demonstrado, que não póde ser a baze ABC para a baze DEF, como a pyramide ABCG para hum solido menor que a pyramide DEFH. Logo assim como a baze ABC he para a baze DEF, assim tambem a pyramide ABCG será para a pyramide DEFH.

PROP.

† Demonstra-se isto do mesmo modo que o demonstrado na Proposição 2. na nota †

PROP. VI. THEOR.

AS pyramides igualmente altas, e que tem bazes polygonas, estão entre si como as bazes.

Sejão as pyramides igualmente altas, cujas bazes são os polygonos ABCDE, FGHKL, e os vertices os pontos M, N. Digo, que assim como a baze ABCDE he para a baze FGHKL, assim tambem a pyramide ABCDEM será para a pyramide FGHKLN. Fig. 10.

Divida-se a baze ABCDE nos triangulos ABC, ACD, ADE; e a baze FGHKL nos triangulos FGH, FHK, FKL. Considere-se posta huma pyramide sobre cada hum destes triangulos; e seja o ponto M o vertice commum das pyramides, que assentão sobre as bazes ABC, ACD, ADE; e o ponto N o vertice commum das outras, que assentão sobre as bazes FGH, FHK, FKL. Sendo pois o triangulo ABC para o triangulo FGH, como a pyramide ABCM he para a pyramide FGHN[a]; e o triangulo ACD para o triangulo FGH, como a pyramide ACDM para a pyramide FGHN; e finalmente o triangulo ADE para o triangulo FGH, como a pyramide ADEM para a pyramide FGHN; serão todos os antecedentes primeiros para o consequente commum, como todos os antecedentes segundos para o consequente tambem commum[b]; isto he, será a baze ABCDE para a baze FGH, co-

a. 5. 12.

b. Cor. 2. 24. 5.

como a pyramide ABCDEM he para a pyramide FGHN. Pela mesma razão deve ser a baze FGHKL para a baze FGH, como a pyramide FGHKLN he para a pyramide FGHN; e por consequencia invertendo, será a baze FGH para a baze FGHKL, como a pyramide FGHN he para a pyramide FGHKLN. Logo sendo a baze ABCDE para a baze FGH, como a pyramide ABCDEM he para a pyramide FGHN; e sendo tambem a baze FGH para a baze FGHKL, como a pyramide FGHN he para
c. 22. 5. a pyramide FGHKLN; será por igual [c] a baze ABCDE para a baze FGHKL, como a pyramide ABCDEM para a pyramide FGHKLN.

PROP. VII. THEOR.

TOdo o prisma, que tem a baze triangular, se póde dividir em tres pyramides iguaes entre si, e com bazes tambem triangulares.

Fig. 11.

Seja o prisma com a baze triangular ABC, á qual fica opposto o triangulo DEF. Digo, que o prisma ABCDEF se póde dividir em tres pyramides iguaes entre si, e com bazes tambem triangulares.

Tirem-se as rectas BD, EC, CD. Como a figura ABED he hum parallelogrammo, cuja diagonal he a recta BD; os triangulos ABD,
a. 34. 1. EBD serão iguaes [a]. Logo a pyramide, que tem por baze o triangulo ABD, e por verti-

ce

ce o ponto C, ſerá igual[b] á pyramide, que tem por baze o triangulo EBD, e por vertice o ponto C. Mas a pyramide, cuja baze he o triangulo EBD, e o vertice o ponto C, he a meſma pyramide, que tem a baze triangular EBC, e o vertice D, por ſerem ambas formadas com os meſmos planos. Logo a pyramide, cuja baze he o triangulo ABD, e o vertice o ponto C, ſerá igual á pyramide, cuja baze he o triangulo EBC, e o vertice o ponto D. Tambem ſendo a figura FCBE hum parallelogrammo, cuja diagonal he a recta CE; os triangulos ECF, ECB devem ſer iguaes[a]. Logo a pyramide, cuja baze he o triangulo ECB, e o vertice o ponto D, ſerá igual[b] á pyramide, cuja baze he o triangulo ECF, e o vertice o ponto D. Mas a pyramide da baze triangular ECB, e do vertice D, he igual á pyramide, cuja baze he o triangulo ABD, e o vertice o ponto C, como ſe tem já demonſtrado. Logo a pyramide, cuja baze he o triangulo ECF, e o vertice o ponto D, ſerá igual á pyramide, cuja baze he o triangulo ABD, e o vertice o ponto C. Logo o priſma ABCDEF eſtá dividido em tres pyramides iguaes entre ſi, e com bazes triangulares, iſto he, eſtá dividido nas pyramides ABDC, EBDC, ECFD. E como a pyramide da baze triangular ABD, e do vertice C he a meſma que a pyramide, cuja baze he o triangulo ABC, e o vertice o ponto D, por ſerem ambas comprehendidas pelos meſmos planos; e a pyramide da baze triangu-

lar

b. 5. 12.

a 34. 1.

lar ABD, e do vertice C he a terceira parte do prisma, cuja baze he o triangulo ABC, e o plano opposto o triangulo DEF, como já temos demonstrado; a pyramide, cuja baze he o triangulo ABC, e o vertice o ponto D, será tambem a terceira parte do prisma, que tem a mesma baze triangular ABC, e o plano opposto o triangulo DEF.

COROL. 1. Disto se segue, que qualquer pyramide he a terceira parte do prisma, que tem a mesma baze da pyramide, e huma altura igual. Porque se a baze do prisma for outra qualquer figura rectilinea; o prisma se poderá sempre dividir em outros prismas, que tenhão bazes triangulares, e assim valerá a mesma demonstração, que assima.

COROL. 2. Os prismas igualmente altos estão entre si como as bazes; porque as pyramides, que tem a mesma altura, e que assentão sobre as mesmas bazes dos prismas, tem entre si aquella mesma razão, que tem as bazes [c]. c. 6. 12.

PROP. VIII. THEOR.

AS pyramides semelhantes, cujas bazes são triangulos, estão entre si na razão triplicada da dos lados homologos.

Fig. 10. Sejão as pyramides semelhantes entre si, e semelhantemente postas, cujas bazes são os triangulos ABC, DEF, e os vertices os pontos G, H. Digo, que a razão da pyramide ABCG

pa-

para a pyramide DEFH he a triplicada daquella, que o lado BC tem para o lado homologo EF.

Completem-ſe os parallelogrammos ABCM, GBCN, ABGK, e o ſolido parallelepipedo BGML, que fica formado por eſtes planos, e pelos oppoſtos. Complete-ſe tambem o parallelepipedo EHPO comprehendido pelos tres parallelogrammos DEFP, HEFR, DEHX, e pelos outros tres oppoſtos. Sendo pois a pyramide ABCG ſemelhante á pyramide DEFH; ſerá o angulo ABC=DEF [a], e GBC=HEF, e ABG=DEH. Mas he AB : BC : : DE : EF [b], iſto he, ſão proporcionaes os lados, que formão angulos iguaes. Logo o parallelogrammo BM he ſemelhante ao parallelogrammo EP. Pela meſma razão tambem o parallelogrammo BN he ſemelhante ao parallelogrammo ER, e o parallelogrammo BK he ſemelhante ao parallelogrammo EX; e aſſim os tres parallelogrammos BM, BN, BK ſão ſemelhantes aos tres EP, ER, EX. Mas os tres BM, BN, BK ſão iguaes, e ſemelhantes [c] aos outros tres oppoſtos; como tambem os tres EP, ER, EX ſão iguaes, e ſemelhantes aos tres oppoſtos. Logo os ſolidos BGML, EHPO ſão formados por planos reſpectivamente ſemelhantes. Mas os angulos ſolidos delles ſão tambem reſpectivamente iguaes [d]. Logo o ſolido BGML he ſemelhante [a] ao ſolido EHPO. Mas os ſolidos parallelepipedos ſemelhantes eſtão entre ſi na razão triplicada da dos lados homologos [e]. Lo-

a. def. 11. 11.
b. def. 1. 6.
c. 24. 11.
d. B. 11.
e. 33. 11.

Logo a razão do ſolido BGML para o ſolido EHPO he a triplicada daquella, que o lado homologo BC tem para o lado homologo EF. Mas o ſolido BGML he para o ſolido EHPO, como a pyramide ABCG he para a
f. 15. 5. pyramide DEFH [f]; porque cada huma deſtas pyramides he a ſexta parte do ſolido parallelepipedo correſpondente, viſto ſer o priſma a me-
g. 28. 11. tade [g] do parallelepipedo, e juntamente triplo [h]
h. 7. 12. da pyramide, que lhe correſponde. Logo tambem a pyramide ABCG tem para a pyramide DEFH a razão triplicada daquella, que o lado homologo BC tem para o lado homologo EF.

COROL. Do que ſe tem demonſtrado fica evidente, que as pyramides ſemelhantes, e com bazes multilateras, eſtão tambem entre ſi na razão triplicada dos lados homologos. Porque divididas eſtas pyramides em outras, que tenhão bazes triangulares; as bazes das pyramides propoſtas, as quaes bazes pela ſuppoſição são polygonos ſemelhantes, ficando tambem divididas em triangulos ſemelhantes, e em numero igual, e homologos ás meſmas bazes; ſerá huma pyramide triangular das que ficão comprehendidas na primeira pyramide propoſta, para outra pyramide tambem triangular, e correſpondente das comprehendidas na ſegunda pyramide propoſta, como todas as pyramides triangulares exiſtentes na primeira pyramide propoſta, são para todas as pyramides triangulares exiſtentes na ſegunda pyramide propoſ-

ta;

ta; isto he, como a primeira pyramide proposta, cuja baze he hum polygono, he para a segunda pyramide proposta, cuja baze he outro polygono. Mas huma pyramide com baze triangular tem para outra pyramide semelhante a razão triplicada da dos lados homologos. Logo a pyramide, cuja baze he hum polygono, tem para outra pyramide, cuja baze he outro polygono semelhante ao primeiro, a razão tambem triplicada daquella, que hum lado homologo tem para outro lado homologo.

PROP. IX. THEOR.

NAs pyramides iguaes, cujas bazes são triangulos, as bazes, e alturas são reciprocamente proporcionaes. E as pyramides, cujas bazes triangulares são reciprocamente proporcionaes ás alturas, são iguaes.

Sejão as pyramides iguaes, cujas bazes são os triangulos ABC, DEF, e os vertices os pontos G, H. Digo, que as bazes, e alturas das pyramides ABCG, DEFH são reciprocamente proporcionaes, isto he, que assim como a baze ABC he para a baze DEF, assim tambem a altura da pyramide DEFH he para a altura da pyramide ABCG. Fig. 13.

Completem-se os parallelogrammos AC, AG, GC, como tambem os parallelogrammos DF, DH, HF. Completem-se do mesmo mo modo os ſolidos parallelepipedos BGML, EHPO, que ficão formados pelos ditos parallelogrammos, e pelos oppoſtos. Como pela hypotheſis a pyramide ABCG he igual á pyramide DEFH; e o ſolido BGML he o ſextuplo da pyramide ABCG; e o ſolido EHPO he o ſextuplo da pyramide DEFH; ſerá o ſolido BGML igual [a] ao ſolido EHPO. Mas as bazes, e alturas dos ſolidos parallelepipedos iguaes são reciprocamente proporcionaes [b]. Logo ſerá a baze BM para a baze EP, como a altura do ſolido EHPO he para a altura do ſolido BGML. Mas a baze BM he para a baze EP, como o triangulo ABC he para o triangulo DEF. Logo ſerá o triangulo ABC para o triangulo DEF, como a altura do ſolido EHPO he para a altura do ſolido BGML. Mas a altura do ſolido EHPO he a meſma que a altura da pyramide DEFH, e a altura do ſolido BGML he a meſma que a altura da pyramide ABCG. Logo aſſim como a baze ABC he para a baze DEF, aſſim tambem a altura da pyramide DEFH ſerá para a altura da pyramide ABCG. Fica pois demonſtrado, que as bazes, e alturas das pyramides iguaes ABCG, DEFH são reciprocamente proporcionaes.

a. ax. 1. 3.
b. 34. 11.

Supponhão-ſe agora reciprocamente proporcionaes as bazes, e alturas das pyramides ABCG, DEFH, iſto he, ſupponha-ſe a baze ABC ſer para a baze DEF, como a altura da pyramide DEFH he para a altura da pyramide ABCG. Digo, que as pyramides ABCG, DEFH são iguaes.

Fei-

Feita a mesma construcção que assima, sendo a baze ABC para a baze DEF, como a altura da pyramide DEFH he para a altura da pyramide ABCG; e tambem sendo a baze ABC para a baze DEF, como o parallelogrammo BM he para o parallelogrammo EP; será o parallelogrammo BM para o parallelogrammo EP, como a altura da pyramide DEFH he para a altura da pyramide ABCG. Mas a altura da pyramide DEFH he a mesma que a do solido parallelepipedo EHPO; e a altura da pyramide ABCG he a mesma que a do solido parallelepipedo BGML. Logo será a baze BM para a baze EP, como a altura do parallelepipedo EHPO he para a altura do parallelepipedo BGML. Mas os solidos parallelepipedos são iguaes[b], quando as bazes, e alturas delles são reciprocamente proporcionaes. Logo os parallelepipedos BGML, EHPO são iguaes. Mas a pyramide ABCG he a sexta parte do solido BGML; e a pyramide DEFH he a sexta parte do solido EHPO. Logo tambem as pyramides ABCD, DEFH são iguaes. b. 34. 11.

PROP. X. THEOR.

Toda a pyramide conica he a terceira parte do cylindro, que tem a mesma baze, e huma altura igual.

Seja o circulo ABCD a baze commua de huma pyramide conica, e de hum cylindro; e te- Fig. 14.

tenhão estes dous solidos huma altura igual. Digo, que a pyramide conica he a terceira parte do cylindro, ou que o cylindro he o triplo da pyramide conica.

Se o cylindro não for o triplo da pyramide conica, será ou maior, ou menor que o triplo della. Seja primeiramente maior que o triplo. Inscreva-se no circulo ABCD o quadrado ABCD. Será o quadrado ABCD maior que a metade do circulo ABCD. Considere-se descripto sobre o quadrado ABCD hum prisma igualmente alto que o cylindro. Será este prisma maior que a metade do cylindro; porque se for circunscripto hum quadrado ao circulo ABCD, e for construido sobre este quadrado hum prisma tão alto como o cylindro; sendo o quadrado inscripto a metade do circunscripto; o prisma feito sobre o quadrado ABCD, que he inscripto ao circulo, será a metade do prisma formado sobre o quadrado circunscripto ao mesmo circulo, por serem estes prismas igualmente altos, e assim estarem entre si
a. 32. 11. como as bazes [a]. Mas o cylindro he menor que o prisma formado sobre o quadrado circunscripto ao circulo ABCD. Logo o prisma feito sobre o quadrado inscripto ABCD, e que tem a mesma altura do cylindro, he maior que a metade do mesmo cylindro. Dividão-se os arcos AB, BC, CD, DA em partes iguaes nos pontos E, F, G, H; e tirem-se as cordas AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Será cada hum dos triangulos AEB, BFC,

CGD,

CGD, DHA maior que a metade do ſegmento de circulo, em que exiſte, como ſe tem já demonſtrado na Propoſição ſegunda deſte Livro. Sobre cada hum dos triangulos AEB, BFC, CGD, DHA conſidere-ſe formado hum priſma igualmente alto que o cylindro. Será cada hum deſtes priſmas tambem maior que a metade da porção do cylindro, na qual fica comprehendido; porque ſe pelos pontos E, F, G, H forem conduzidas humas rectas parallelas ás rectas AB, BC, CD, DA; e ſobre eſtas rectas eſtiverem completados outros tantos parallelogrammos, ſobre os quaes como bazes forem deſcriptos outros tantos ſolidos parallelepipedos da meſma altura do cylindro; cada hum dos priſmas, que aſſentão ſobre os triangulos AEB, AFC, CGD, DHA ſerá a metade[b] do ſolido parallelepipedo, que lhe corresponde. Mas cada huma das porções do cylindro he menor que o parallelepipedo, que lhe pertence. Logo cada hum dos priſmas feitos ſobre os triangulos AEB, BFC, CGD, DHA deve ſer maior que a metade da porção do cylindro, na qual fica comprehendido. Divididos tambem pelo meio os arcos AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, e tiradas pelos pontos das diviſões outras rectas, como aſſima, e deſcriptos ſobre cada hum dos triangulos, que aſſim ficão feitos, outros tantos priſmas todos da meſma altura que o cylindro, e repetida a meſma conſtrucção por varias vezes; chegaremos finalmente a tres porções do

b. Cor. 2. 7. 12.

cylindro, as quaes todas juntas ſeráo meno-
e. Lemma. res [e] que o exceſſo do cylindro ſobre o triplo da pyramide conica. Sejáo eſtas porçóes as que aſſentáo ſobre os ſegmentos do circulo AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Logo o priſma igualmente alto que o cylindro, e que tem por baze o polygono AEBFCGDH, he maior que o triplo da pyramide conica. Mas eſte priſma he triplo da pyramide, cuja baze he o polygono AEBFCGDH, e o vertice o
d. Cor. 1. meſmo que o da pyramide conica [d]. Logo tam-
7. 12. bem a pyramide, cuja baze he o polygono AEBFCGDH, e o vertice o meſmo que o da pyramide conica, será maior que a meſma pyramide conica, cuja baze he o circulo ABCD; o que náo póde ſer, porque a dita pyramide ſendo comprehendida na pyramide conica, neceſſariamente deve ſer menor que a meſma pyramide conica.

Fig. 15. Digo tambem, que o cylindro náo póde ſer menor do que o triplo da pyramide conica. Seja o cylindro, ſe he poſſivel, menor que o triplo da pyramide conica. Invertendo, ſerá a pyramide conica maior que a terceira parte do cylindro. Inſcreva-ſe no circulo ABCD o quadrado ABCD. Será o quadrado ABCD maior que a metade do circulo ABCD. Sobre o quadrado ABCD conſidere-ſe formada huma pyramide, que tenha o meſmo vertice que a pyramide conica. Será eſta pyramide maior que a metade da pyramide conica; porque, como temos demonſtrado, ſe ao circulo for circun-

ſcri-

ſcripto hum quadrado ; o quadrado inſcripto ABCD ſerá a metade do quadrado circunſcripto ; e ſe ſobre eſtes quadrados forem levantados dous ſolidos parallelepipedos, os quaes tambem são priſmas, e igualmente altos que a pyramide conica ; o ſolido feito ſobre o quadrado ABCD ſerá a metade do outro formado ſobre o quadrado circunſcripto ao circulo, por eſtarem entre ſi eſtes ſolidos como as bazes ; [a] *a. 32. 11.*
e o meſmo tambem ſerá a reſpeito das terceiras partes deſtes ſolidos. Logo a pyramide, cuja baze he o quadrado ABCD, he a metade da pyramide, cuja baze he o quadrado circunſcripto ao circulo ABCD. Mas a pyramide formada ſobre o quadrado circunſcripto he maior que a pyramide conica, porque eſta fica comprehendida naquella. Logo a pyramide, cuja baze he o quadrado ABCD, e o vertice o meſmo que o da pyramide conica, he maior que a metade da meſma pyramide conica. Sejão divididos em partes iguaes os arcos AB, BC, CD, DA nos pontos E, F, G, H ; e ſejão conduzidas as cordas AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Cada hum dos triangulos AEB, BFC, CGD, DHA he maior que a metade do ſegmento circular, em que exiſte. Sobre cada hum deſtes triangulos conſidere-ſe formada huma pyramide, que tenha o meſmo vertice da pyramide conica. Será cada huma deſtas pyramides maior que a metade daquella porção da pyramide conica, na qual fica comprehendida ; o que do meſmo modo ſe póde

 de-

demonſtrar, como ſe tem já demonſtrado a reſpeito dos priſmas, e dos ſegmentos do cylindro. Tambem dividindo os arcos AE, EB, BF, &c. nas ſuas ametades, e tirando as cordas; e levantando ſobre cada hum dos triangulos, que deſte modo ficáo feitos, humas pyramides, que tenháo o meſmo vertice, que tem a pyramide conica; e continuando iſto ſempre aſſim, viremos finalmente a ter humas porçóes da pyramide conica, as quaes todas juntas ſeráo menores que o exceſſo da meſma pyramide conica ſobre a terceira parte do cylin-
c. Lemma. dro[c]. Sejáo pois eſtas porçóes as que aſſentáo ſobre os ſegmentos circulares AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Logo a pyramide reſidua, cuja baze he o polygono AEBFCGDH, e o vertice o meſmo que o da pyramide conica, he maior que a terceira parte do cylindro. Mas eſta pyramide he a terceira parte do priſma, cuja baze he o meſmo polygono AEBFCGDH, e a altura a meſma que a do cylindro. Logo eſte priſma he maior que o cylindro, que tem por baze o circulo ABCD: o que he abſurdo; porque ſendo o priſma comprehendido no cylindro, deve ſer menor que o meſmo cylindro. Náo he pois o cylindro menor que o triplo da pyramide conica. Mas temos demonſtrado, que o meſmo cylindro náo póde ſer maior que o triplo da pyramide conica. Logo o cylindro deve ſer o triplo da pyramide conica, e por conſequencia a pyramide conica he a terceira parte do cylindro.

PROP.

PROP. XI. THEOR.

TAnto as pyramides conicas, como os cylindros, que tem a mesma altura, estão entre si como as bazes.

Sejão as pyramides conicas, e os cylindros de altura igual, e com as bazes circulares ABCD, EFGH. Sejão as rectas KL, MN os eixos destes solidos, e AC, EG os diametros das bazes. Digo, que assim como o circulo ABCD he para o circulo EFGH, assim tambem a pyramide conica AL he para a pyramide conica EN. Fig. 16.

Supponhamos não ser isto assim; será o circulo ABCD para o circulo EFGH, como a pyramide conica AL para hum solido menor, ou maior que a pyramide conica EN. Seja primeiramente para hum solido menor, e seja X este solido. Seja tambem o solido Z igual ao defeito, com que o solido X he menor que a pyramide conica EN. Será a pyramide conica EN igual aos solidos X, Z juntamente tomados. Inscreva-se no circulo EFGH o quadrado EFGH. Será este quadrado maior que a metade do circulo. Sobre o quadrado EFGH imagine-se construida huma pyramide, que tenha a mesma altura * da pyramide conica. Esta pyramide assim levantada deve ser maior que a me- Fig. 16. 17.

* Melhor he dizer, que tenha o mesmo vertice da Pyramide conica. E do mesmo modo em alguns passos seguintes.

metade da pyramide conica. A razão he; porque se ao circulo se considerar circunscripto hum quadrado, e sobre este quadrado estiver levantada outra pyramide igualmente alta que a pyramide conica; a pyramide inscripta será a metade da pyramide circunscripta, por estarem entre si estas pyramides na razão das bazes[a]. Mas a pyramide conica he menor que a pyramide circunscripta. Logo a pyramide, cuja baze he o quadrado EFGH, e o vertice o mesmo que o da pyramide conica, he maior que a metade da mesma pyramide conica. Dividão-se os arcos EF, FG, GH, HE nas suas ametades nos pontos O, P, R, S, e tirem-se as cordas EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE. Será cada hum dos triangulos EOF, FPG, GRH, HSE maior que a metade do segmento circular, em que fica comprehendido. Considere-se formada sobre cada hum dos triangulos EOF, FPG, GRH, HSE huma pyramide igualmente alta que a pyramide conica. Será cada huma destas pyramides maior que a metade da porção da pyramide conica, que lhe pertence. E dividindo outra vez pelo meio os arcos EO, OF, FP, &c. e tirando as cordas; e levantando sobre cada hum dos triangulos, que assim ficão formados, outras pyramides todas igualmente altas, que a pyramide conica; e repetindo por varias vezes a mesma construcção, viremos finalmente a ter humas porções da pyramide conica, as quaes todas juntas serão menores[b] que o solido Z. Sejão as ditas porções

a. 6. 12.

b. Lemma.

as

as que assentão sobre os segmentos circulares, EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE. Logo a pyramide, que resta, e que tem por baze o polygono EOFPGRHS, e que he igualmente alta que a pyramide conica, he maior que o solido X. Inscreva-se no circulo ABCD o polygono ATBYCVDQ semelhante ao polygono EOFPGRHS; e sobre o polygono inscripto imagine-se construida huma pyramide igualmente alta que a pyramide conica AL. Sendo o quadrado de AC para o quadrado de EG, como o polygono ATBYCVDQ he para o polygono EOFPGRHS [c]; e sendo o quadrado de AC para o quadrado de EG, como o circulo ABCD he para o circulo EFGH [d]; será o circulo ABCD para o circulo EFGH, como o polygono ATBYCVDQ he para o polygono EOFPGRHS [e]. Mas o circulo ABCD he para o circulo EFGH, como a pyramide conica AL he para o solido X; e o polygono ATBYCVDQ he para o polygono EOFPGRHS, como a pyramide [a] da baze ATBYCVDQ, e do vertice L, he para a pyramide da baze EOFPGRHS, e do vertice N. Logo será a pyramide conica AL para o solido X, como a pyramide da baze ATBYCVDQ, e do vertice L, he para a pyramide da baze EOFPGRHS, e do vertice N. Mas a pyramide conica AL he maior que a pyramide, que nella fica comprehendida. Logo o solido X será maior que a pyramide existente na pyramide conica EN [f]; o que he absurdo, porque

c. 1. 12.

d. 2. 12.

e. 11. 5.

a. 6. 12.

f. 14. 5.

que temos ſuppoſto ſer o ſolido X menor que a meſma pyramide conica EN. Logo he falſo que aſſim como o circulo ABCD he para o circulo EFGH, aſſim ſeja tambem a pyramide conica AL para hum ſolido menor que a pyramide conica EN. Do meſmo modo ſe demonſtrará, que aſſim como o circulo EFGH he para o circulo ABCD, aſſim não póde ſer a pyramide conica EN para hum ſolido menor que a pyramide conica AL.

Fig. 16. 18. Digo mais, que aſſim como o circulo ABCD he para o circulo EFGH, aſſim a pyramide conica AL não ſerá para hum ſolido maior que a pyramide conica EN. Seja, ſe he poſſivel, para o ſolido maior I. Logo invertendo, aſſim como o circulo EFGH he para o circulo ABCD, aſſim tambem o ſolido I ſerá para a pyramide conica AL. Mas aſſim como o ſolido I he para a pyramide conica AL, aſſim a pyramide conica EN ſerá para outro ſolido menor que a pyramide conica AL f, por ſer o ſolido I maior que a pyramide conica EN. Logo aſſim como o circulo EFGH he para o circulo ABCD, aſſim a pyramide conica EN ſerá para hum ſolido menor que a pyramide conica AL, o que já ſe tem demonſtrado impoſſivel. Logo não póde ſer, que aſſim como o circulo ABCD he para o circulo EFGH, aſſim ſeja a pyramide conica AL para hum ſolido maior que a pyramide conica EN. Mas já ſe tem provado, que aſſim como o circulo ABCD he para o circulo EFGH, aſſim não pó-

f. 14. 5.

póde ſer a pyramide conica AL para hum ſolido menor que a pyramide conica EN. Logo aſſim como o circulo ABCD he para o circulo EFGH, aſſim tambem a pyramide conica AL deve ſer para a pyramide conica EN.

Mas aſſim como a pyramide conica he para a pyramide conica, aſſim tambem o cylindro he para o cylindro[g], viſto ſer o cylindro o triplo[h] da pyramide conica. Logo aſſim como o circulo ABCD he para o circulo EFGH, aſſim o cylindro, cuja baze he o circulo ABCD, ſerá para o cylindro igualmente alto que o primeiro, e cuja baze he o circulo EFGH. Logo tanto as pyramides conicas, como os cylindros, que tem a meſma altura, eſtão entre ſi como as bazes.

g. 15. 5.
h. 10. 12.

PROP. XII. THEOR.

Tanto as pyramides conicas, como os cylindros ſemelhantes eſtão entre ſi na razão triplicada dos diametros das bazes.

Sejão as pyramides conicas, e os cylindros ſemelhantes, cujas bazes ſão os circulos ABCD, EFGH, e os diametros das bazes as rectas AC, EG. Sejão tambem as rectas KL, MN os eixos das pyramides conicas, ou dos cylindros. Digo, que a pyramide conica, cuja baze he o circulo ABCD, e o vertice o ponto L, tem para a pyramide conica, cuja baze he o circulo EFGH, e o vertice o ponto N, a razão tri- Fig. 19.

triplicada daquella, que o diametro AC tem para o diametro EG.

Fig. 19. 20. Se a pyramide conica ABCDL não tiver para a pyramide conica EFGHN a razão triplicada da de AC para EG, poderá haver hum ſolido ou menor, ou maior que a pyramide conica EFGHN, para o qual ſolido a pyramide conica ABCDL tenha a dita razão triplicada. Seja X eſte ſolido, o qual ſe ſupponha primeiramente ſer menor que a pyramide conica EFGHN. Feita a meſma conſtrucção, que fizemos na Propoſição precedente, poder-ſe-ha demonſtrar, que a pyramide da baze polygona EOFPGRHS, e do vertice N he maior que o ſolido X. Inſcreva-ſe no circulo ABCD o polygono ATBYCVDQ ſemelhante ao polygono EOFPGRHS; e ſobre o polygono ATBYCVDQ ſeja formada huma pyramide, que tenha o meſmo vertice da pyramide conica. Seja LAQ hum dos triangulos, que comprehendem a pyramide da baze ATBYCVDQ, e do vertice L; e ſeja NES outro triangulo daquelles, que comprehendem a pyramide da baze EOFPGRHS, e do vertice N. Tirem-ſe os ſemidiametros KQ, MS. Como as pyramides conicas ABCDL, EFGHN são ſemelhantes, ſerá AC : EG :: KL : MN [a]. Mas he AC : EG :: AK : EM [b]. Logo ſerá AK : EM :: KL : MN; e permutando AK : KL :: EM : MN. Mas ſendo rectos os angulos AKL, EMN, são tambem iguaes. Logo ſendo proporcionaes os lados, que formão os angulos iguaes, os

tri-

a. def. 24. 11.
b. 15. 5.

triangulos AKL, EMN ſeráõ ſemelhantes [c]. c. 6. 6.
Do meſmo modo ſendo AK : KQ : : EM : MS, e ſendo iguaes entre ſi tambem os angulos AKQ, EMS feitos pelos lados AK, KQ; EM, MS, por ſer cada hum dos ditos angulos a meſma parte de quatro angulos rectos, que exiſtem ao redor tanto do centro K, como do centro M; será o triangulo AKQ ſemelhante ao triangulo EMS. E como ſe tem já demonſtrado ſer AK : KL : : EM : MN, e temos AK = KQ, e EM = MS, será QK : KL : : SM : MN. Logo ſão proporcionaes os lados, que formão os angulos rectos, e por conſequencia iguaes, QKL, SMN. Logo o triangulo LKQ he ſemelhante ao triangulo NMS. Sendo pois, pela ſemelhança dos triangulos AKL, EMN, LA : AK : : NE : EM; e pela ſemelhança dos triangulos AKQ, EMS, ſendo tambem KA : AQ : : ME : ES; será por igual [d] LA : AQ : : NE : ES. Do d. 22. 5.
meſmo modo, ſendo ſemelhantes os triangulos LQK, NSM, será LQ : QK : : NS : SM; e ſendo tambem ſemelhantes os triangulos KAQ, MES, será KQ : QA : : MS : SE. Logo será por igual [d] LQ : QA : : NS : SE. Mas temos viſto ſer LA : AQ : : NE : ES, iſto he, invertendo QA : AL : : SE : EN. Logo será outra vez por igual QL : LA : : SN : NE. Logo ſendo proporcionaes entre ſi os lados dos triangulos LQA, NSE, eſtes triangulos ſeráõ equiangulos, e por conſequencia tambem ſemelhantes [c]. Logo a py- c. 5. 6.
ramide, cuja baze he o triangulo AKQ, e o vertice o ponto L, será ſemelhante á pyramide,

de, cuja baze he o triangulo EMS, e o vertice o ponto N, por ferem iguaes[f] entre fi ref-
f. B. 11. pectivamente os angulos folidos de ambas as pyramides, e por ferem ambas as mefmas pyramides formadas por planos femelhantes, e em numero igual. Mas as pyramides femelhantes, e com bazes triangulares, eftão entre fi na razão triplicada dos lados homologos[g]. Logo a
g. 8. 12. pyramide AKQL tem para a pyramide EMSN a razão triplicada da de AK para EM. Da mefma maneira tirados os femidiametros entre os pontos D, V, C, Y, B, T, e o centro K; e tambem entre os pontos H, R, G, P, F, O, e o centro M; e formadas fobre os triangulos, que affim ficão feitos, outras tantas pyramides, que tenhão os mefmos vertices que as pyramides conicas; demonftraremos, que cada huma das pyramides na primeira ordem tem para a fua correfpondente na fegunda ordem a razão triplicada daquella, que AK tem para o feu lado homologo EM, ifto he, da razão, que AC tem para EG. Mas affim como hum dos antecedentes he para hum dos confequentes, affim tambem todos os antecedentes são para todos os
h. 12. 5. confequentes[h]. Logo affim como a pyramide AKQL he para a pyramide EMSN, affim a pyramide total, cuja baze he o polygono ATBYCVDQ, e o vertice o ponto L, será para a pyramide total, cuja baze he o polygono EOFPGRHS, e o vertice o ponto N. Logo a pyramide da baze ATBYCVDQ, e do vertice L terá para a pyramide da baze EOFPGRHS,

e do vertice N, a razáo triplicada daquella, que AC tem para EG. Mas temos ſuppoſto, que a pyramide conica, cuja baze he o circulo ABCD, e o vertice o ponto L, tem para o ſolido X a razáo triplicada da de AC para EG. Logo ſerá a pyramide conica, cuja baze he o circulo ABCD, e o vertice o ponto L, para o ſolido X, como a pyramide, cuja baze he o polygono ATBYCVDQ, e o vertice o ponto L, he para a pyramide, cuja baze he o polygono EOFPGRHS, e o vertice o ponto N. Mas a dita pyramide conica he maior do que a pyramide, que nella fica comprehendida. Logo ſerá o ſolido X maior que a pyramide, que tem por baze o polygono EOFPGRHS, e por vertice o ponto N; o que *i.* 14. 5.
náo póde ſer, porque pela ſuppoſiçáo o ſolido X he menor que a pyramide conica EFGHN. Logo a pyramide conica, cuja baze he o circulo ABCD, e o vertice o ponto L, náo póde ter para hum ſolido menor que a pyramide conica, cuja baze he o circulo EFGH, e o vertice o ponto N, a razáo triplicada daquella, que AC tem para EG. Com demonſtraçáo ſemelhante ſe prova tambem, que a pyramide conica EFGHN náo póde ter para hum ſolido menor que a pyramide conica ABCDL, a razáo triplicada daquella, que EG tem para AC.

Digo agora, que a pyramide conica ABCDL Fig. 19.
náo póde ter para hum ſolido maior que a py- 21.
ramide conica EFGHN a razáo triplicada da

de

de AC para EC. Supponhamos ſer iſto poſſivel, e ſeja Z o dito ſolido maior. Logo invertendo, tem o ſolido Z para a pyramide conica ABCDL a razão triplicada da de EG para AC. Mas aſſim como o ſolido Z he para a pyramide conica ABCDL, aſſim tambem a pyramide conica EFGHN ſerá para outro ſo-
i. 14. 5. lido menor *i* que a pyramide conica ABCDL, viſto ſer o ſolido Z maior que a pyramide conica EFGHN. Logo a pyramide conica EFGHN terá para hum ſolido menor que a pyramide conica ABCDL a razão triplicada daquella, que EG tem para AC; o que já ſe tem demonſtrado impoſſivel. Logo a pyramide conica ABCDL não póde ter para hum ſolido maior que a pyramide conica EFGHN a razão triplicada da de AC para EG. Mas temos demonſtrado ſer iſto do meſmo modo impoſſivel a reſpeito de hum ſolido menor. Logo a pyramide conica ABCDL tem para a pyramide conica EFGHN a razão triplicada daquella, que o diametro AC tem para o diametro EG.

Mas a pyramide conica he para a pyramide conica, como o cylindro he para o cylin-
k. 15. 5. dro *k*; porque temos já provado, que qualquer pyramide conica he a terceira parte do cylindro, que tem a meſma baze, e altura igual. Logo tambem o cylindro tem para outro cylindro ſemelhante a razão triplicada da de AC para EG. Fica pois demonſtrado, que tanto as pyramides conicas, como os cylindros ſe-

me-

melhantes eſtão entre ſi na razão triplicada dos diametros das bazes.

PROP. XIII. THEOR.

SE hum cylindro for dividido em outros dous cylindros por hum plano parallelo aos planos oppoſtos, ſerá hum deſtes cylindros para o outro, como o eixo do primeiro para o eixo do ſegundo.

Conſidere-ſe dividido o cylindro AD nas duas partes AH, HC pelo plano GH parallelo aos planos oppoſtos AB, CD; e o eixo EF do cylindro AD fique tambem dividido no ponto K pelo meſmo plano GH. Seja a linha curva GH a ſecção commua do plano GH, e da ſuperficie do cylindro AD. Seja AEFC o parallelogrammo rectangulo, por cuja revolução ao redor do lado EF fica formado o cylindro propoſto AD. Seja finalmente a recta GK a ſecção commua do plano GH, e do parallelogrammo AEFC. Como os planos parallelos AB, GH são cortados pelo plano AEKG; ſerão tambem parallelas[a] as ſecções commuas AE, GK, e aſſim ſerá AK hum parallelogrammo, e ſerá a recta KG igual á recta EA, que he hum ſemidiametro do circulo AB. Com o meſmo diſcurſo ſe prova, que todas as rectas tiradas do ponto K para a linha curva GH, são iguaes aos ſemidiametros correſpondentes do circulo AB; e aſſim ſe faz manifeſto, que

Fig. 12.

a. 16. 11.

são

são todas iguaes entre si, e que a linha curva
b. def. 15. 1. GH he a circunferencia de hum circulo[b], cujo centro he o ponto K. Logo o plano GH divide o cylindro AD em outros dous cylindros AH, GD, os quaes vem a ser os mesmos que aquelles, que ficarião descriptos pela revolução dos parallelogrammos AK, GF ao redor dos lados EK, KF. Digo pois, que o cylindro AH he para o cylindro HC, como o eixo EK he para o eixo KF.

Seja produzido o eixo EF de huma, e outra parte para os pontos L, M. Tomem-se as partes EN, NL, em qualquer numero, e seja cada huma dellas igual ao eixo EK; tomem-se tambem as partes FX, XM, em outro qualquer numero, e seja cada huma dellas igual ao eixo FK. Considerem-se conduzidos pelos pontos L, N, X, M outros tantos planos parallelos aos planos AB, CD. Pelo que temos demonstrado a respeito do plano GH, as secções communas dos ditos planos, e da superficie do cylindro produzida, serão circulos, cujos centros serão os pontos L, N, X, M; e entre os mesmos planos ficarão existindo os cylindros PR, RB, DT, TQ. Sendo pois iguaes os eixos LN, NE, EK, os cylindros PR,
c. 11. 12. RB, BG estarão entre si como as bazes[c]. Mas as bazes são iguaes. Logo os mesmos cylindros PR, RB, BG serão tambem iguaes. E como tanto os eixos LN, NE, EK, como os cylindros PR, RB, BG são iguaes, e o numero dos eixos he igual ao numero dos cylin-

dros

dros: assim como o eixo KL he multiplice do eixo KE, assim tambem o cylindro PG será multiplice do cylindro GB. Pela mesma razão assim como o eixo MK he multiplice do eixo KF, do mesmo modo o cylindro QG deve ser multiplice do cylindro GD. E se o eixo KL for maior, ou igual, ou menor que o eixo KM; tambem o cylindro PG será maior, ou igual, ou menor que o cylindro GQ. Logo será o eixo EK para o eixo KF, como o cylindro BG he para o cylindro GD [d]. d. def. 5. 5.

PROP. XIV. THEOR.

TAnto as pyramides conicas, como os cylindros existentes sobre bazes iguaes, estão entre si como as alturas.

Estejão postos sobre as bazes iguaes AB, CD os cylindros EB, FD. Digo, que o cylindro EB he para o cylindro FD, como o eixo GH he para o eixo KL. Fig. 23.

Produza-se o eixo KL até o ponto N, de maneira que seja LN=GH, que he o eixo do cylindro EB. Considere-se descripto o cylindro CM ao redor do eixo LN. Como pela construcção são igualmente altos os dous cylindros EB, CM, estarão entre si como as bazes [a]. Mas estas bazes são iguaes. Logo os cylindros EB, CM são tambem iguaes. E sendo o cylindro FM cortado pelo plano CD parallelo aos planos oppostos, será o cylindro CM a. 11. 12.

para o cylindro FD, como o eixo LN he pa-
b. 15. 12. ra o eixo KL [b]. Mas o cylindro CM he igual ao cylindro EB; e o eixo LN he igual ao eixo GH. Logo ſerá o cylindro EB para o cylindro FD, como o eixo GH he para o eixo KL.

Mas o cylindro EB he para o cylindro FD, como a pyramide conica ABG he para a pyramide conica CDK [c], porque o cylindro he o triplo [d] da pyramide conica, que tem a meſma baze que o cylindro, e huma altura igual. Logo ſerá tambem a pyramide conica ABG para a pyramide conica CDK, como o eixo GH he para o eixo KL. Mas os eixos GH, KL são as alturas tanto das pyramides conicas, como dos cylindros exiſtentes ſobre as bazes AB, CD. Logo tanto as pyramides conicas, como os cylindros, que exiſtem ſobre bazes iguaes, eſtão entre ſi como as alturas.

c. 15. 5.
d. 10. 12.

PROP. XV. THEOR.

AS bazes, e alturas tanto das pyramides conicas, como dos cylindros iguaes, são reciprocamente proporcionaes; e tanto as pyramides conicas, como os cylindros, que tem as bazes, e alturas reciprocamente proporcionaes, são tambem iguaes.

Fig. 24. Sejão as pyramides conicas iguaes ALC, ENG, e os cylindros tambem iguaes AX, EO.

Se-

Sejáo os circulos ABCD, EFGH, cujos diametros sáo as rectas AC, EG, as bazes tanto das pyramides conicas, como dos cylindros, e os eixos KL, MN as alturas. Digo, que as bazes, e alturas dos cylindros AX, EO sáo entre si reciprocamente proporcionaes, isto he, que a baze ABCD he para a baze EFGH, como a altura MN he para a altura KL.

As alturas KL, MN sáo ou iguaes, ou desiguaes. Sejáo primeiramente iguaes. O cylindro AX se suppóe igual ao cylindro EO. Mas tanto as pyramides conicas, como os cylindros, que tem a mesma altura, estáo entre si como as bazes [a]. Logo será a baze ABCD igual [b] á baze EFGH, e por consequencia será a baze ABCD para a baze EFGH, como a altura MN he para a altura KL. a. 11. 12. b. A. 5.

Náo sejáo iguaes as alturas KL, MN, mas seja MN > KL. Tire-se da altura MN a parte MP = KL, e faça-se passar pelo ponto P o plano TYS parallelo aos planos oppostos EFGH, RO. A secçáo commua do plano TYS, e do cylindro EO será hum circulo; e o solido ES será hum cylindro, cuja baze he o circulo EFGH, e a altura o eixo MP. Sendo pela hypothesis iguaes entre si os cylindros AX, EO; será o cylindro AX para o cylindro ES, como o cylindro EO he para o mesmo cylindro ES [c]. Mas o cylindro AX he para o cylindro ES, como a baze ABCD he para a baze EFGH [a], visto serem igualmente altos os cylindros AX, ES; e o cylindro EO he pa- c. 7. 5.

ra o cylindro ES, como a altura MN para a
d. 13. 12. altura MP [d], por estar cortado o cylindro EO pelo plano TYS parallelo aos planos oppostos. Logo deve ser a baze ABCD para a baze EFGH, como a altura MN he para a altura MP. Mas he MP = KL. Logo será a baze ABCD para a baze EFGH, como a altura MN he para a altura KL. Logo as bazes, e alturas dos cylindros iguaes AX, EO são reciprocamente proporcionaes.

Supponhão-se agora reciprocamente proporcionaes as bazes, e alturas dos cylindros AX, EO, isto he, supponha-se ser a baze ABCD para a baze EFGH, como a altura MN he para a altura KL. Digo, que os cylindros AX, EO serão iguaes.

Sejão primeiramente iguaes as bazes ABCD, EFGH. Porque temos supposto ser a baze ABCD para a baze EFGH, como a altura MN he para a altura KL; e agora se querem iguaes entre si as bazes ABCD, EFGH; será
b. A. 5. MN = KL [b], e por consequencia serão iguaes [a]
a. 11. 12. os cylindros AX, EO.

Supponhão-se agora desiguaes as bazes ABCD, EFGH, e seja ABCD > EFGH. Sendo a baze ABCD para a baze EFGH, como a altura MN he para a altura KL; será MN > KL [b]. Feita pois a mesma construcção que fizemos assima, sendo a baze ABCD para a baze EFGH, como a altura MN he para a altura KL, e tendo nós KL = MP; será a baze ABCD para a baze EFGH, como o cylindro AX he para

ra

ra o cylindro ES, por terem estes cylindros alturas iguaes [a]. Mas a altura MN he para a altura MP, ou KL, como o cylindro EO he para o cylindro ES. Logo será o cylindro AX para o cylindro ES, como o cylindro EO he para o mesmo cylindro ES; e assim seráo iguaes entre si os cylindros AX, EO. a. 11. 12.

A mesma demonstração, e com o mesmo methodo se póde fazer tambem a respeito das pyramides conicas.

PROP. XVI. PROB.

Dados dous circulos concentricos, inscrever no circulo maior hum polygono de lados iguaes, e de numero par, de maneira que não toque o circulo menor.

Sejão dados os circulos ABCD, EFGH, cujo centro commum seja o ponto K. Deve-se inscrever no circulo maior ABCD hum polygono de lados iguaes, e de numero par, de sorte que não toque o circulo menor EFGH. Fig. 25.

Tire-se o diametro BD, sobre o qual se levante do ponto G a perpendicular GA. Produza-se esta até o ponto C. Será a recta AC huma tangente [a] do circulo EFGH no ponto D. Se a semicircunferencia BAD for dividida pelo meio; e huma das ametades for tambem dividida em partes iguaes, e isto se continuar sempre assim; finalmente viremos a ter hum a. 16. 3.

ar-

b. Lemma. arco menor [b] que o arco AD. Seja LD este arco menor do que o arco AD. Caia do ponto L perpendicularmente sobre o diametro BD a recta LM, a qual seja produzida até o ponto N. Tirem-se as cordas LD, DN. Será LD = DN [c]. E como LN he parallela á AC, que toca o circulo EFGH no ponto G; a recta LN não poderá tocar o mesmo circulo EFGH, e por consequencia muito menos o poderão tocar as cordas LD, DN. Logo se formos inscrevendo no circulo ABCD outras, e outras rectas, das quaes cada huma seja igual á corda LD; he evidente, que ficará inscripto no mesmo circulo ABCD hum polygono de lados iguaes, e de numero par, o qual polygono não tocará o circulo menor EFGH.

c. { 3. 3. 4. 1.

LEMMA II.

Fig. 26. SE dous trapezios ABCD, EFGH forem inscriptos nos circulos, cujos centros são os pontos K, L; e se forem parallelos entre si tanto os lados AB, DC, como tambem os lados EF, HG; e finalmente se forem iguaes os outros quatro lados dos mesmos trapezios, isto he, os lados AD, BC, EH, FG; sendo o lado AB maior que o lado EF, e o lado DC maior que o lado HG; o semidiametro KA do circulo, em que estão inscriptos os lados maiores, será maior que o semidiametro do outro circulo, em que estão inscriptos os lados menores.

Senão for KA > LE, será KA = LE, ou KA

$KA < LE$. Seja em primeiro lugar $KA = LE$. Seráo iguaes os circulos ABCD, EFGH. E como neſtes circulos as cordas AD, BC são iguaes ás cordas EH, FG, ſeráo tambem os arcos AD, BC iguaes[a] aos arcos EH, FG. a. 28. 3. Mas ſendo as cordas AB, DC reſpectivamente maiores que as cordas EF, HG, tambem os arcos AB, DC devem ſer reſpectivamente maiores que os arcos EF, HG. Logo toda a circunferencia ABCD ſerá maior que a circunferencia toda EFGH, o que he abſurdo, porque pela ſuppoſição eſtas circunferencias são iguaes. Logo não póde ſer $KA = LE$.

Mas ſeja $KA < LE$. Poſta $LM = KA$, deſcreva-ſe com o centro L, e o ſemidiametro LM o circulo MNOP, que corte os raios LF, LG, LH, LE nos pontos N, O, P, M. Tirem-ſe as rectas MN, NO, OP, PM, as quaes hão de ſer reſpectivamente parallelas[b] b. 2. 6. aos lados EF, FG, GH, HE, e tambem menores que os meſmos lados. Sendo pois $FH > MP$, ſerá $AD > MP$. Mas os circulos ABCD, MNOP são iguaes, por ſer $KA = LM$. Logo ſerá o arco AD maior que o arco MP. Pela meſma razão o arco BC he maior que o arco NO. Sendo pois o lado AB maior que o lado EF, e eſte maior que MN; ſerá $AB > MN$, e por conſequencia o arco AB ſerá maior que o arco MN. Do meſmo modo o arco DC deve ſer maior que o arco PO. Logo a circunferencia inteira ABCD he maior que a circunferencia inteira MNOP, o que he abſurſurdo; porque ſendo os ſemidiametros AK, ML iguaes, tambem as circunferencias ABCD, MNOP devem ſer iguaes. Logo não póde ſer KA$<$LE. Mas nem he KA$=$LE. Logo ſerá KA$>$LE.

COROL. Se ſe der hum triangulo iſoſceles, cujos lados ſejão iguaes ás cordas AD, BC, e a baze menor que a corda AB, a qual ſupponhamos ſer maior que a corda DC; com demonſtração ſemelhante ſe póde provar, que o ſemidiametro KA deve ſer maior que o ſemidiametro do circulo circunſcripto ao dito triangulo.

PROP. XVII. PROB.

DAdas duas esferas concentricas, inſcrever na esfera maior hum ſolido polyedro, cuja ſuperficie não toque a esfera menor.

Fig. 27. Sejão propoſtas duas esferas concentricas, e ſeja o ponto A o centro commum de ambas. Deve-ſe inſcrever na esfera maior hum ſolido polyedro, cuja ſuperficie não toque a esfera menor.

Pelo centro commum A de ambas as esferas conſidere-ſe paſſar hum plano, que córte as meſmas esferas. As ſecções communs do dito plano, e das ſuperficies esfericas devem ſer circulos; porque ficando huma esfera deſcripta pela revolução inteira de hum ſemicirculo ao redor do diametro conſiderado como immovel;

qual-

qualquer que for o dito semicirculo, o plano que passar por elle, sendo produzido para todas as partes, necessariamente marcará na superficie esferica a circunferencia de hum circulo; e he manifesto, que este deve ser hum circulo maximo, porque o diametro da esfera, que he o mesmo, que o diametro deste circulo, he a recta maior de quantas se podem conduzir [a] dentro de hum circulo, ou dentro de huma esfera. Seja pois o circulo BCDE na esfera maior, e na menor o circulo FGH. Tirem-se os diametros BD, CE reciprocamente perpendiculares entre si. Inscreva-se [b] no circulo maior BCDE hum polygono de lados iguaes, e de numero par, e que não toque o circulo menor FGH. Sejão as rectas BK, KL, LM, ME os lados deste polygono pertencentes ao quadrante BE do mesmo circulo BCDE. Tire-se o diametro KN. Levante-se do ponto A a recta AX perpendicularmente sobre o plano do circulo BCDE. A recta AX encontrará a superficie da esfera em hum ponto X. Pela recta AX, e pelos diametros BD, KN façâo-se passar dous planos, os quaes pelo que temos dito farão na superficie esferica dous circulos maximos. Sejão os semicirculos destes circulos maximos os dous BXD, KXN, que estão postos sobre os diametros BD, KN. Como a recta XA he perpendicular ao plano do circulo BCDE; todos os planos, que passarem pela recta XA, serão perpendiculares [c] ao mesmo plano do circulo BCDE. Logo os semicirculos BXD, KXN

a. 15. 3.

b. 16. 12.

c. 18. 11.

são

ſáo perpendiculares ao plano dó dito circulo BCDE. E como os ſemicirculos BED, BXD, BXN ſáo iguaes entre ſi, por ſerem iguaes os diametros delles BD, KN; tambem os quadrantes BE, BX, KX, que ſáo as ametades dos ditos ſemicirculos, ſeráo iguaes. Logo em cada hum dos quadrantes BX, KX poderá haver hum numero de lados inſcriptos igual ao numero dos lados BK, KL, LM, ME inſcriptos no quadrante BE, de maneira que ſejáo iguaes entre ſi todos eſtes lados inſcriptos nos ditos tres quadrantes. Inſcreváo-ſe pois, e ſejáo os lados BO, OP, PR, RX os lados inſcriptos no quadrante BX; e no quadrante KX os lados KS, ST, TY, YX; e tiradas as rectas OS, PT, RY, dos pontos O, S, ſejáo conduzidas as perpendiculares OV, SQ ſobre os raios AB, AK. Como o plano BOXD he perpendicular ao plano BCDE; e no plano BOXD exiſte a recta OV perpendicular ao ſemidiametro AB, que he a ſecçáo commua dos
d. def. 4. 11. ditos planos; ſerá a recta OV perpendicular [d] ao plano BCDE. Pela meſma razáo a recta SQ he perpendicular ao meſmo plano BCDE, por ſer o plano KSXN perpendicular ao plano BCDE. Tire-ſe VQ. Sendo iguaes os arcos BO, KS tomados nos ſemicirculos tambem iguaes BXD, KXN; e ſendo as rectas OV, SQ perpendiculares aos diametros DB, NX; ſerá OV = SQ, e BV = KQ. Mas he BA = KA. Logo tirando BV de BA, e KQ de KA, ficará VA = QA. Logo ſerá BV:

VA::

VA:: KQ: QA, e assim será VQ parallela [e] á BK. E como as rectas OV, SQ são perpendiculares ao plano do circulo BCDE; serão as mesmas OV, SQ tambem parallelas [f] entre si. Mas já se tem provado ser OV=SQ. Logo as duas QV, SO são iguaes, e ao mesmo tempo parallelas [g]. Sendo pois QV parallela a cada huma das duas SO, KB, tambem estas duas devem ser parallelas [h] entre si. Logo as rectas BO, KS, que estão tiradas entre as extremidades das duas SO, KB, existem no mesmo plano, em que existem as parallelas OS, BK, e assim o quadrilatero KBOS existe em hum só, e o mesmo plano. Agora se estivessem tiradas as rectas PB, TK, e dos pontos P, T fossem conduzidas humas perpendiculares sobre os diametros DB, NK; do mesmo modo se poderia demonstrar, que a recta TP he parallela á recta KB, como já temos demonstrado, que SO he parallela á KB. Logo TP he parallela [h] a SO, e por consequencia o quadrilatero SOPT existe em hum mesmo plano. Pela mesma razão tambem o quadrilatero TPRY deve existir em hum só plano. Mas a figura YRX existe em hum mesmo plano [i]. Logo se imaginarmos, que dos pontos O, S, P, T, R, Y estão conduzidas outras tantas rectas para o mesmo ponto A, ficará formada huma figura solida polyedra entre os quadrantes BX, KX composta de pyramides, cujas bazes serão os quadrilateros KBOS, SOPT, TPRY, e o triangulo YRX, e o vertice commum o ponto

e. 2. 6.
f. 6. 11.
g. 33. 1.
h. 9. 11.
i. 2. 11.

to A. E ſe a reſpeito de cada hum dos lados KL, LM, ME ſe fizer a meſma conſtrucção, que temos feito a reſpeito do lado BK; e o meſmo ſe fizer nos outros tres quadrantes, e tambem no outro hemisferio que reſta: he evidente, que ficará inſcripta na esfera huma figura ſolida polyedra compoſta de pyramides, cujas bazes ſerão os quadraliteros já ditos, e o triangulo YRX, e as outras figuras da meſma ordem inſcriptas nos outros ſegmentos da esfera, que reſtão, e o vertice commum de todas eſtas pyramides ſerá o centro A. Digo, que a ſuperficie deſta figura ſolida polyedra não toca a esfera menor, na qual eſtá o circulo FGH. Tire-ſe do ponto A a recta AZ perpendicular
k. 11. 11. lar *k* ao plano do quadrilatero KBOS, e ſeja Z o ponto, em que a perpendicular encontra o plano. Tirem-ſe tambem as rectas BZ, ZK. Como AZ he perpendicular ao plano do quadrilatero KBOS; ſerá tambem perpendicular a todas ás rectas que a tocarem exiſtentes no meſmo plano. Logo ſerá AZ perpendicular a cada huma das duas BZ, ZK. E porque temos AB=AK; e os quadrados de AZ, e de
l. 47. 1. ZB são iguaes *l* ao quadrado de AB, como tambem os quadrados de AZ, e de ZK são iguaes ao quadrado de AK; ſerão os quadrados de AZ, e de ZB iguaes aos quadrados de AZ, e de ZK. Logo tirado o quadrado commum de AZ, ficará o quadrado de BZ igual ao quadrado de ZK, e por conſequencia ſerá a recta BZ igual á recta ZK. Com o meſmo

diſ-

discurso demonstraremos, que cada huma das rectas, que do ponto Z forem conduzidas para os pontos O, S, será igual a cada huma das duas BZ, ZK. Logo o circulo descripto com o centro Z, e o intervallo ZB deve passar pelos pontos K, O, S, e assim o quadrilatero KBOS ficará inscripto no mesmo circulo. Sendo pois KB > QV, e QV = SO; será KB > SO. Mas KB he igual a cada huma das duas BO, KS. Logo no circulo KBOS cada hum dos arcos iguaes, cujas cordas são as rectas KB, BO, KS, he maior que o arco, cuja corda he a recta OS; e assim aquelles tres arcos, e mais outro igual a hum delles, todos juntos são maiores que aquelles mesmos tres arcos juntamente com o arco, cuja corda he a recta OS, isto he, são maiores que toda a circunferencia. Logo no circulo KBOS o arco KB he maior que a quarta parte da circunferencia do circulo KBOS, e por consequencia o angulo BZK no centro he maior que hum angulo recto. Logo sendo obtuso o angulo BZK; será o quadrado de BK maior [m] que os quadrados de BZ, e *m. 12. 2.*
de ZK, isto he, será maior que o dobro do quadrado de BZ. Tire-se a recta KV. Como nos triangulos KBV, OBV os lados KB, BV são iguaes aos lados OB, BV; e estes lados comprehendem angulos iguaes; será o angulo KVB = OVB [n]. Mas OVB he hum angulo *n. 4. 1.*
recto. Logo será KVB tambem recto. Sendo pois BD menor que o dobro de DV; será o rectangulo comprehendido pelas rectas DB, BV me-

menor que o dobro do rectangulo comprehendido pelas rectas DV, VB, isto he, será o
a. 8. 6. quadrado de KB menor [a] que o dobro do quadrado de KV. Mas o quadrado de KB he maior que o dobro do quadrado de BZ. Logo o quadrado de KV he maior que o quadrado de BZ. E porque temos BA = AK; e os quadrados de BZ, e de ZA são iguaes ao quadrado de BA, como tambem os quadrados de KV, e de VA são iguaes ao quadrado de AK; serão os quadrados de BZ, e de ZA iguaes aos quadrados de KV, e de VA. Logo sendo o quadrado de KV maior que o quadrado de BZ; será o quadrado de VA menor que o quadrado de ZA, e por consequencia será a recta AZ maior que a recta AV. Logo AZ he muito maior que AG, por termos demonstrado na Proposição precedente, que a recta KV cahe fóra do circulo FGH. Mas a recta AZ he perpendicular ao plano KBOS, e assim he a minima de todas as rectas, que do centro da esfera se podem conduzir para o dito plano. Logo o plano KBOS existe todo fóra da esfera menor, e assim não a toca.

Deve-se agora demonstrar, que tambem os outros planos existentes entre os quadrados BX, KX cahem para fóra da esfera menor, e por consequencia não a tocão. Seja conduzida do ponto A a recta AI perpendicularmente sobre o plano do quadrilatero SOPT, e tire-se a recta IO. O que fica demonstrado a respeito do plano ABOS, e do ponto Z, o mesmo se demonsmonſtra, e do meſmo modo a reſpeito do plano SOPT, e do ponto I, iſto he, que o ponto I he o centro do circulo circunſcripto ao quadrilatero SOPT, e que a recta OS he maior que a recta PT. Mas já temos provado, que as rectas PT, OS são parallelas. Logo nos trapezios KBOS, SOPT inſcriptos em circulos, ſendo tanto os lados KB, OS, como os lados OS, PT parallelos entre ſi; e ſendo iguaes os outros lados BO, KS, OP, ST; e ſendo o lado BK maior que o lado OS, e OS > PT; ſerá ZB > IO [p]. Tire-ſe a recta AO, que ſerá igual á recta AB. Sendo rectos os angulos AIO, AZB, ſeráo os quadrados de AI, e de IO iguaes ao quadrado de AO, ou de AB, iſto he, ſeráo iguaes aos quadrados de AZ, e de ZB. Mas o quadrado de ZB he maior que o quadrado de IO. Logo o quadrado de AZ he menor que o quadrado de AI, e aſſim he AZ < AI. Mas temos demonſtrado ſer AZ > AG. Logo a recta AI he muito maior que a recta AG. Logo o plano SOPT cahe fóra da esfera menor. Do meſmo modo ſe prova, que o plano TPRY exiſte fóra da meſma esfera menor, como tambem o plano do triangulo YRX, fazendo uſo do Corollario do ſegundo Lemma. Iſto meſmo ſe póde demonſtrar tambem a reſpeito de todos os mais planos, que formáo o ſolido polyedro. Logo dadas duas esferas concentricas, temos inſcripto na esfera maior hum ſolido polyedro, cuja ſuperficie náo toca a esfera menor.

p. Lemma. 2.

De

De outro modo, e mais brevemente, e sem fazermos uso da Proposição 16. podemos demonstrar, que a recta AZ he maior que a recta AG. Seja do ponto G conduzida a recta GU perpendicular á recta AG. Tire-se tambem a recta AU. Dividindo pois o arco BE em partes iguaes, e dividindo huma destas ametades tambem em partes iguaes, e continuando isto sempre assim; chegaremos finalmente a hum arco menor que o arco, cuja corda he igual á recta GU. Seja KB este arco. Logo a recta KB he menor que a recta GU. E como o angulo BZK he obtuso, pelo que temos demonstrado assima, será BK > BZ. Mas he GU > BK. Logo será GU muito maior que BZ, e por consequencia será o quadrado de GU maior que o quadrado de BZ. Mas he AU = AB. Logo o quadrado de AU he igual ao quadrado de AB. Mas o quadrado de AU he igual aos quadrados de AG, e de GU; e o quadrado de AB he igual aos quadrados de AZ, e de ZB. Logo os quadrados de AG, e de GU são iguaes aos quadrados de AZ, e de ZB. Mas o quadrado de BZ he menor que o quadrado de GU. Logo o quadrado de AZ deve ser maior que o quadrado de AG, e assim a recta AZ he maior que a recta AG.

COROL. Se for inscripto na esfera menor hum solido polyedro, tirando tantas rectas entre os pontos, onde os semidiametros, que do centro da esfera se conduzem para todos os angulos do solido polyedro inscripto na esfera maior, encontrão a ſuperficie da esfera menor, e com a meſma ordem que eſtão tiradas as rectas entre os pontos, onde os meſmos ſemidiametros encontrão a ſuperficie da esfera maior; o ſolido polyedro inſcripto na esfera maior BCDE terá para o ſolido polyedro inſcripto na esfera menor FGH a razão triplicada daquella, que o diametro da esfera BCDE tem para o diametro da esfera FGH. Porque dividido hum, e outro ſolido em igual numero de pyramides, e da meſma ordem, eſtas pyramides ſerão reſpectivamente ſemelhantes, por terem communs os angulos ſolidos no vertice, iſto he, no centro das esferas, e iguaes[a] entre ſi os mais angulos ſolidos ſobre as bazes; *a. B. 11.* o que ſe faz manifeſto viſto ſerem eſtes angulos ſolidos formados por tres angulos planos iguaes entre ſi os correſpondentes em cada duas pyramides; e além diſto eſtas meſmas pyramides ſão comprehendidas por igual numero de planos reſpectivamente ſemelhantes, e por conſequencia as pyramides ſão tambem ſemelhantes[b]. *b. def. 11. 11.* Mas as pyramides ſemelhantes eſtão entre ſi na razão triplicada da dos lados homologos[c]. *c. Cor. 11. 12.* Logo a pyramide, cuja baze he o quadrilatero KBOS, e o vertice o ponto A, tem para a pyramide da meſma ordem exiſtente na outra esfera a razão triplicada daquella, que o lado homologo tem para o lado homologo, iſto he, daquella que o ſemidiametro AB da esfera maior tem para o ſemidiametro da esfera menor. Do meſmo modo cada huma das pyramides que existem na esfera maior tem para cada huma da mesma ordem das outras existentes na esfera menor a razão triplicada daquella, que o semidiametro AB da esfera maior tem para o semidiametro da esfera menor. Mas assim como hum antecedente he para hum consequente, assim tambem todos os antecedentes tomados juntos são para todos os consequentes tambem tomados juntos. Logo o solido polyedro inscripto na esfera maior tem para o solido polyedro inscripto na esfera menor a razão triplicada da que o semidiametro AB da esfera maior tem para o semidiametro da esfera menor, isto he, da que o diametro BD da esfera maior tem para o diametro da outra esfera menor.

PROP. XVIII. THEOR.

AS esferas tem entre si a razão triplicada dos seus diametros.

Fig. 28. 29. Sejão as esferas ABC, DEF, cujos diametros são as rectas BC, EF. Digo, que a esfera ABC tem para a esfera DEF a razão triplicada da de BC para EF.

Supponhamos não ser isto assim; a esfera ABC terá para outra esfera ou menor, ou maior que a esfera DEF a razão triplicada da de BC para EF. * Tenha primeiramente a esfera ABC para esfera GHK menor que a esfera
Fig. 28. 29. DEF a dita razão triplicada de BC para EF; e o

* Veja-se a nota da Prop. 2. deste Liv. pag. 344, e seg.

e o centro da esfera GHK seja o mesmo que o centro da esfera DEF. Considere-se inscripto[a] nesta esfera DEF hum solido polyedro, cuja superficie não toque a esfera menor GHK. Seja tambem inscripto na esfera ABC outro solido polyedro semelhante ao que está inscripto na esfera DEF. Terá o solido polyedro inscripto na esfera ABC para o solido polyedro inscripto na esfera DEF a razão triplicada[b] daquella, que BC tem para EF. Mas a esfera ABC pela hypothesis tem para a esfera GHK a razão triplicada da de BC para EF. Logo será a esfera ABC para a esfera GHK, como o solido polyedro existente na esfera ABC he para o solido polyedro existente na esfera DEF. Mas a esfera ABC he maior que o solido polyedro inscripto nella. Logo tambem a esfera GHK será maior[c] que o polyedro inscripto na esfera DEF. Mas isto he impossivel, porque a esfera GHK existindo dentro do polyedro inscripto na esfera DEF, he necessariamente menor que o mesmo polyedro. Logo a esfera ABC não póde ter para a esfera GHK menor que a esfera DEF a razão triplicada da de BC para EF. Do mesmo modo demonstraremos, que a esfera DEF não póde ter para outra esfera menor que a esfera ABC a razão triplicada daquella, que EF tem para BC.

a. 17. 12.

b. Cor. 17. 12.

c. 14. 5.

Digo tambem, que a esfera ABC não tem para outra maior que a esfera DEF a razão triplicada da de BC para EF. Seja, se he possivel, LMN esta esfera maior. Logo invertendo,

Fig. 28. 29. 30.

do, a esfera LMN terá para a esfera ABC a razão triplicada da do diametro EF para o diametro BC. Mas assim como a esfera LMN he para a esfera ABC, assim a esfera DEF deve ser para outra menor que a esfera ABC, por termos supposto ser LMN maior que DEF. Logo tambem a esfera DEF terá para huma esfera menor que ABC a razão triplicada da de EF para BC, o que temos demonstrado ser impossivel. Logo a esfera ABC não póde ter para outra maior que a esfera DEF a razão triplicada daquella, que BC tem para EF. Logo tendo-se demonstrado o mesmo a respeito de outra esfera menor que a esfera DEF; a esfera ABC deve ter para a esfera DEF a razão triplicada daquella que o diametro BC tem para o diametro EF.

FIM DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

NO-

NOTAS ESCOLHIDAS
DAS DE
ROBERTO SIMSON
A ALGUMAS PROPOSIÇÕES
DOS
ELEMENTOS DE EUCLIDES.

PROP. XXII. DO LIV. I.

ALguns querem culpar a Euclides por não ter demonſtrado, que os circulos deſcriptos na conſtrucção deſte Problema, ſe hão de encontrar hum a outro reciprocamente. Mas iſto fica ſendo evidente depois de elle ter determinado, que das tres rectas DF, FG, GH duas, quaeſquer que ſejão, tomadas juntas, hão de ſer maiores que a terceira. Porque qual he o principiante tão rude, que não veja, que o circulo deſcripto com o centro F, e o intervallo FD deve encontrar a recta FH entre os pontos F, H, viſto ſer FD < FH; e tambem que o circulo deſcripto com o centro G, e o intervallo GH, ou GM ha Fig. 14

ha de encontrar a recta DG entre os pontos G, D; e finalmente que os ditos circulos se hão de cortar hum a outro reciprocamente, por serem as rectas FD, GH tomadas juntas maiores que a terceira FG? E esta determinação he mais simples do que a outra deduzida desta mesma, e em lugar della posta por Thomaz Simpson nos seus Elementos de Geometria a pag. 49, com o pretexto de supprir a falta de Euclides, a quem elle condemna. Determina pois o Simpson, que cada huma das tres rectas deve ser menor, que as outras duas tomadas juntamente, e ao mesmo tempo deve ser maior que o excesso das mesmas outras duas. Com este principio demonstra elle em hum caso, que os circulos se hão de encontrar hum a outro; e ajunta, que em qualquer outro caso se póde demonstrar a mesma cousa, e do mesmo modo. Mas a recta GM, que elle quer se tire da recta GF, póde ser maior que a mesma GF, como na nossa figura; no qual caso he necessaria outra demonstração differente daquella, que deo o mesmo Simpson.

PROP. XXIX. DO LIV. I.

AQuella proposição, que vulgarmente se chama o Postulado quinto, ou o Axioma undecimo; e por outros o Axioma duodecimo, e da qual principalmente depende esta Proposição 29, não tem dado pouco que fazer aos Geometras tanto antigos, como modernos. E sem duvida parece, que se não deve

pôr

pôr entre os axiomas, visto não ser huma verdade por si evidente; por outra parte não admitte huma demonstração rigorosa. Necessita porém de alguma explicação, para que fique mais intelligivel; e isto faremos nós com a maior clareza, e facilidade, que nos for possivel.

Primeiramente cada hum sem difficuldade alguma póde ver, que as duas rectas AB, CD Fig. 2.
existentes no mesmo plano, e ambas perpendiculares á mesma recta AC, são parallelas entre si, isto he, que por mais que sejão produzidas as mesmas rectas AB, CD, em parte nenhuma se poderão avizinhar huma á outra, ou se poderão apartar huma de outra; e assim parece, que não haverá pessoa alguma, que julgue de outro modo das ditas duas rectas. E com effeito não se póde conceber, que huma dellas, como a recta AB, se incline para a outra CD, por pouco que seja, sem que a mesma recta AB se incline tambem sobre a recta AC para aquella mesma parte, onde existe a recta CD, o que não póde succeder assim, por se suppôr a recta AB perpendicular á recta AC. O mesmo se deve tambem dizer de quaesquer outras duas rectas AB, CD, as quaes fazem com a recta EAC os angulos iguaes EAB, ECD Fig. 3.
para a mesma parte da recta EAC, visto que cada huma das ditas rectas AB, CD póde ser perpendicular á outra linha recta. E com effeito dividida pelo meio a recta AC no ponto F, e tirada a recta FG perpendicularmente sobre a recta AB produzida; e produzida tambem

bem a dita GF até o ponto H da outra recta CD; nos triangulos AFG, CFH pela hypothesis, e pela Proposição 15. do Livro I. será o angulo GAF = HCF, e AFG = CFH. Mas o lado AF he igual ao lado FC. Logo pela Proposição 26. do Livro I. deve ser o angulo AGF = CHF. Logo sendo recto o angulo AGF, tambem será recto o angulo CHF, e por consequencia cada huma das rectas BG, DH será perpendicular á mesma recta GH.

He manifesto em segundo lugar, que duas linhas rectas, que sahem do mesmo ponto, se vão apartando cada vez mais huma de outra, de maneira que a distancia minima entre a extremidade de huma dellas, e a outra recta, póde finalmente vir a ser maior do que qualquer linha recta proposta. Supponhamos por exemplo, que de duas rectas, que sahem do mesmo ponto, huma he de dez pés de comprimento; supponhamos tambem, que a distancia minima entre a extremidade desta recta de dez pés de comprimento, e a outra, he de hum pé. Se a recta de dez pés de comprida for produzida até vinte pés; a distancia minima entre a extremidade desta de vinte pés, e a outra recta tambem produzida, será de dous pés, ficando assim esta distancia accrescentada do comprimento de outro pé; e deste modo se aquellas duas rectas, que sahem do mesmo ponto, forem cada vez mais produzidas; a mesma distancia minima da extremidade de huma dellas a respeito da outra recta, cada vez virá

sen-

ſendo maior. Eſta propriedade depende inteiramente da natureza da linha recta, a qual conſtantemente conſerva a meſma direcção; e rigoroſamente ſe não póde demonſtrar, pelo que aſſima fica expoſto.

Suppoſto tudo iſto, ſejão as duas rectas AB, FD, as quaes com a terceira EFH fação os angulos internos, e da meſma parte BEF, EFD; e ſejão eſtes angulos tomados juntos menores que dous rectos. Digo, que as rectas AB, FD hão de concorrer para a parte BD, para a qual ficão os angulos BEF, EFD. Fig. 4.

No ponto F exiſtente na recta FH, e para a meſma parte deſta recta, faça-ſe [a] o angulo externo GFH igual ao interno BEF. Logo, pelo que temos declarado aſſima, as parallelas [b] EB, FG, por mais que ſejão produzidas, hão de conſervar ſempre entre ſi a meſma diſtancia. E como os angulos HFG, GFE tomados juntos são iguaes a dous rectos [c]; tambem os angulos BEF, EFG tomados juntos devem ſer iguaes a dous rectos. Mas os angulos BEF, EFD pela hypotheſis são menores que dous rectos. Logo ſerá o angulo EFG > EFD, e por conſequencia a recta FD cahirá entre as rectas equidiſtantes ou parallelas EB, FG. Mas as rectas FG, FD, que partem do meſmo ponto F, produzidas que ſejão, hão de vir a ter entre ſi huma diſtancia maior que o intervallo das equidiſtantes FG, EB. Logo a recta FD por fim deve paſſar para a outra parte da recta EB a reſpeito do ponto F, e aſ-

a. 23. 1.
b. 28. 1.
c. 13. 1.

assim deve necessariamente concorrer com a mesma recta EB.

PROP. I. DO LIV. III.

ALguns Authores, principalmente d'entre os modernos, disputão com grande severidade, e ao mesmo tempo com grande impericia contra as demonstrações apagogicas ou indirectas; e não reparão, que ha algumas cousas, que se não podem demonstrar de outro modo. A Proposição presente he hum exemplo assás evidente do que affirmo, visto não ser possivel demonstralla directamente. E com effeito fóra da definição do circulo, não ha a respeito do mesmo circulo outro principio algum, com que se possa fazer huma demonstração ou directa, ou indirecta. Fica pois manifesto, que por meio da dita definição do circulo, e das Proposições antecedentemente demonstradas se deve provar, que o ponto achado pela construcção, he o centro do circulo. Sendo pois necessario o uso deste principio, isto he, que as linhas rectas tiradas do centro para a circunferencia do circulo são todas iguaes entre si; e por outra parte não sendo licito tomar como centro do circulo o ponto achado pela construcção, porque isto mesmo he o que se deve demonstrar; se faz evidente ser preciso tomar algum outro ponto differente, e considerallo como centro do circulo. E se deste ponto assim tomado se segue algum absurdo, como Euclides demonstra, que com effeito se segue,

cla-

claro está, que o ponto tomado não he o centro do circulo. E como o dito ponto foi tomado de qualquer modo; legitimamente se póde concluir, que nenhum outro ponto, fóra do que fica determinado pela construcção, póde ser o centro do circulo. He pois evidente a necessidade da demonstração indirecta, ou daquella, pela qual se vem a concluir algum absurdo.

DEFINIÇÃO II. DO LIV. VI.

ESta definição segunda parece que não he de Euclides, mas sim de algum outro pouco perito; porque nem Euclides, nem algum dos outros Geometras, que eu saiba, fez huma só vez menção de figuras reciprocas. Foi exposta com alguma obscuridade, e por esta razão a démos com maior clareza. Porém em lugar della seria melhor substituir a seguinte.

DEFINIÇÃO II.

DUas grandezas se dizem reciprocamente proporcionaes a respeito de outras duas, quando huma das primeiras he para huma das segundas, como a outra destas segundas he para a outra das primeiras.

PROPOSIÇÕES XXVIII, E XXIX. do Livro VI.

EStes dous Problemas, para o primeiro dos quaes he necessaria a Proposição 27, são de quantos ha nos Elementos os mais geraes, e

mais

mais uteis, e de que frequentemente usão os Geometras antigos na solução de ourros Problemas. Pelo que o P. André Tacquet, e o P. Claudio Dechales com bem pouco acerto os não quizerão pôr nos Elementos, que publicárão, com o pretexto de que estes Problemas erão quasi de nenhum uso, ou utilidade. Porém os Geometras geralmente fazem hum grande uso dos differentes casos destes Problemas, isto he, quando a huma linha recta dada se deve applicar hum rectangulo igual a hum quadrado proposto, e com a falta, ou excesso de hum quadrado; e quando a huma linha recta tambem dada se deve applicar hum rectangulo igual a outro rectanguio, e com a falta, ou excesso de hum quadrado. Nós, a beneficio dos que principião, poremos aqui as construcções dos ditos casos na fórma seguinte.

I.

Applicar a huma linha recta dada hum rectangulo igual a hum quadrado proposto, e com o defeito de outro quadrado; com tanto porém que o quadrado proposto não seja maior que o rectangulo, que fica descripto sobre a metade da recta dada.

Fig. 5. Seja dada a linha recta AB, e o quadrado, ao qual se quer igual o rectangulo, que deve ser applicado á recta AB, seja aquelle, que se póde descrever sobre a recta C, e não maior do que o rectangulo, que fica formado sobre a metade da recta AB.

Divida-se a recta AB pelo meio no ponto D.

D. Se o quadrado de AD for igual ao quadrado da recta C, ficará feito o que se pede. Mas não sendo o quadrado de AD igual ao quadrado de C, pelo que temos supposto, será AD > C. Tire-se DE perpendicular á AB, e ponha-se DE = C. Produza-se tambem a recta ED até o ponto F, de maneira, que seja EF = AD ou DB; e com o centro E, e o intervallo EF se descreva hum circulo, que encontre a recta AB no ponto G. Faça-se sobre GB o quadrado GBKH, e se considere completado o rectangulo AGHL. Digo, que o rectangulo AH he o que se pede. Tire-se a recta EG. Como a recta AB está dividida pelo meio no ponto D, e em partes desiguaes no ponto G; o rectangulo comprehendido pelas rectas AG, GB juntamente com o quadrado de DG será igual [a] ao quadrado de DB, isto he, será igual ao quadrado de EF, ou de EG, que he o mesmo que dizer igual [b] aos quadrados de ED, e de DG. Tire-se de huma, e outra parte o mesmo quadrado de DG. Ficará o rectangulo das rectas AG, GB igual ao quadrado de ED, isto he, igual ao quadrado da recta C. Mas o rectangulo das rectas AG, GB he o mesmo rectangulo AH, por ser GH = GB. Logo o rectangulo AH he igual ao quadrado proposto da recta C, e por consequencia temos applicado á recta AB o rectangulo AH igual ao quadrado da recta C, e com a falta do quadrado GK. Que he o que se devia fazer.

a. 5. 2.
b. 47. 1.

II.

II.

Applicar a huma linha recta dada hum rectangulo igual a hum quadrado proposto, e com o excesso de outro quadrado.

Fig. 6. Seja AB a linha recta dada, e o quadrado proposto seja aquelle, que se póde formar sobre a recta C.

Divida-se a recta AB em duas partes iguaes no ponto D, e tire-se BE perpendicularmente sobre a recta AB, de maneira que seja BE = C; e tirada a recta DE, com o centro D, e o semidiametro DE se descreva hum circulo, que encontre a recta AB no ponto G. Descreva-se finalmente sobre BG o quadrado BGHK, e complete-se o rectangulo AGHL. Será este rectangulo o que se pede. Como a recta AB está dividida em partes iguaes no ponto D, e em direitura della está posta a recta BG; o rectangulo comprehendido pelas rectas AG, GB juntamente com o quadrado de DB será igual [a] ao quadrado de DG, ou de DE, isto he, será igual aos quadrados de EB, e de BD. Logo tirando o quadrado commum da recta DB, o rectangulo das rectas AG, GB, que resta, será igual ao quadrado de BE, isto he, será igual ao quadrado da recta C. Mas o rectangulo das rectas AG, GB he o mesmo rectangulo AH, porque temos GH = GB. Logo o rectangulo AH he igual ao quadrado da recta C, e assim temos applicado á recta AB o rectangulo AH igual ao quadrado propos-

a. 6. 2.

to

to da recta C, e com o excesso do quadrado GK. Que he o que se devia fazer.

III.

Applicar a huma linha recta dada hum rectangulo igual a outro rectangulo dado, e com a falta de hum quadrado, com tanto que o rectangulo proposto não seja maior que o quadrado, que póde ser descripto sobre a metade da recta dada.

Seja dada a recta AB, e mais o rectangulo, que póde ser comprehendido pelas rectas C, D, e supponha-se não ser este rectangulo maior do que o quadrado, que se póde descrever sobre a metade da recta AB. Deve-se applicar a recta AB hum rectangulo igual ao rectangulo das rectas C, D, e com a falta de hum quadrado. Fig. 7.

Levantem-se dos pontos A, B as rectas AE, BF perpendicularmente sobre AB, e para a mesma parte, de maneira que seja AE = C, e CF = D. Tire-se a recta EF, dividida a qual pelo meio no ponto G, com o centro G, e o intervallo GE se descreva hum circulo, que encontre segunda vez a recta AE no ponto H. Tire-se HF, e a esta a parallela GK; e tambem GL parallela á recta AE.

Como o angulo EHF existente no semicirculo EHF he igual ao angulo recto EAB; serão parallelas as rectas AB, HF. Mas as rectas AH, BF são tambem parallelas. Logo será AH = BF, e o rectangulo comprehendi-

do

do pelas rectas EA, AH será igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas EA, BF, isto he, será igual ao rectangulo das rectas propostas C, D. E como temos EG = GF, e são parallelas entre si as rectas AE, LG, BF; será AL = LB. Mas o rectangulo das rectas C, D pela supposição não he maior que o quadrado da recta AL, que he a metade da recta proposta AB. Logo tambem o rectangulo comprehendido pelas rectas EA, AH não he maior do que o quadrado da recta AL, isto he, da recta KG. Ajunte-se-lhes o mesmo quadrado de KE. O rectangulo das rectas EA, AH juntamente com o quadrado de KE não será maior que os quadrados de KG, e KE. Mas
a. 3. 3. visto serem iguaes[a] entre si as duas EK, KH, o rectangulo das rectas EA, AH juntamente
b. 6. 2. com o quadrado de KE he igual[b] ao quadrado de AK. Logo o quadrado de AK não será maior que os dous quadrados de EK, e de KG, isto he, não será maior que o quadrado de EG, e por consequencia a recta AK, ou GL não póde ser maior que a recta GE. Demonstrado tudo isto assim, se for GE = GL; o circulo EHF tocará a recta AB no ponto
c. 36. 3. to L, e será o quadrado de AL igual[c] ao rectangulo das rectas EA, AH, isto he, das rectas dadas C, D; e deste modo ficará feito o que se queria. Mas se não forem iguaes as rectas EG, GL, será EG > GL, e por consequencia o circulo EHF cortará a recta AB. Corte-a pois nos pontos M, N. Faça-se sobre

NB

NB o quadrado NBOP, e complete-se o rectangulo ANPQ. Como temos ML = LN [a], e já se tem provádo ser AL = LB; será tambem AM = NB. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas AN, NB deve ser igual ao rectangulo das rectas NA, AM, isto he, igual ao rectangulo [d] das rectas EA; AH, ou das rectas dadas C, D. Mas o rectangulo comprehendido pelas rectas AN, NB he o mesmo rectangulo AP, visto ser PN = NP. Logo o rectangulo AP he igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas C, D. Logo á linha recta dada AB temos applicado o rectangulo AP igual ao rectangulo das rectas propostas C, D; e com a falta do quadrado BP. Que he o que se devia fazer.

a. 3. 3.

d. Cor. 36. 3.

IV.

Applicar a huma linha recta dada hum rectangulo igual a outro rectangulo proposto, e com o excesso de hum quadrado.

Seja AB a linha recta dada, e seja o rectangulo proposto aquelle, que he comprehendido pelas rectas C, D. Deve-se applicar á recta AB hum rectangulo igual ao rectangulo das rectas C, D, e com o excesso de hum quadrado. Fig. 8.

Dos extremos A, B da recta dada AB sejão lançadas para partes contrarias as rectas AE, BF perpendiculares á mesma recta AB, de maneira que seja AE = C, e BF = D. Tire-se EF, e dividida esta pelo meio no ponto G,

com o centro G, e o ſemidiametro GE ſe deſcreva hum circulo, o qual encontre outra vez a recta AE produzida no ponto H. Tire-ſe tambem a recta HF, e depois a recta GL parallela á AE. Produza-ſe a recta AB para huma, e outra parte até que encontre a circunferencia do circulo nos pontos M, N. Deſcreva-ſe ſobre a parte BN o quadrado NBOP, e complete-ſe o rectangulo ANPQ. Será eſte rectangulo o que ſe pede. Como o angulo EHF exiſtente no ſemicirculo EHF he igual ao angulo recto EAB; ſeráõ parallelas entre ſi as rectas AB, HF. Logo ſáo iguaes as rectas AH, BF, e por conſequencia o rectangulo comprehendido pelas rectas EA, AH he igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas EA, BF, iſto he, pelas rectas C, D. Sendo pois ML = LN, e AL = LB, ſerá tambem MA = BN, e aſſim ſerá o rectangulo das rectas AN, NB igual ao rectangulo das rectas MA, AN, iſto
a. 35. 3. he, das rectas EA, AH [a], ou das rectas C, D. Logo o rectangulo comprehendido pelas rectas AN, NB, iſto he, o rectangulo AP he igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas dadas C, D. Logo ſe tem applicado á recta propoſta AB o rectangulo AP igual ao rectangulo comprehendido pelas rectas C, D, e com o exceſſo do quadrado BP. Que he o que ſe devia fazer.

Willebrordo Snellio, ſegundo me parece, foi o primeiro, que indicou as conſtrucções do terceiro, e do quarto Problema no ſeu Apollo-

nio

nio Batavo, e depois delle o célebre Halleio no Escolio da Proposição 18. do Livro 8. das Secções Conicas de Apollonio por elle restituido.

O Problema III. se póde propôr deste modo. Dividir a recta dada AB em hum ponto N, de maneira que o rectangulo comprehendido pelos segmentos della AN, NB seja igual a hum espaço dado. Ou, o que he o mesmo, dada a somma AB dos dous lados, que comprehendem hum rectangulo, e dada a grandeza do mesmo rectangulo, achar os ditos lados. Fig. 7.

O Problema IV. se póde tambem propôr assim. Achar na linha recta dada AB, e produzida, o ponto N, de maneira que o rectangulo comprehendido pelas rectas AN, NB seja igual a hum espaço dado. Ou tambem, o que vem a ser o mesmo, dada a recta AB, como se fosse a differença dos dous lados, que comprehendem hum rectangulo, e dada a grandeza do mesmo rectangulo, determinar os lados deste mesmo rectangulo. Fig. 8.

PROP. XXXII. DO LIV. VI.

A Proposição 26. do Livro 6. não vem enunciada com toda aquella generalidade, que podia ter. Porque não sómente dous parallelogrammos semelhantes, e semelhantemente postos, e que tem hum angulo commum, existem ao redor da mesma diagonal; mas tambem dous parallelogrammos semelhantes, e semelhantemente postos, todas as vezes que hum angulo de hum delles he verticalmente oppoſto a outro angulo do outro, tem as diagonaes em direitura huma de outra. Parece pois, que a demonſtração deſte ſegundo caſo devia ſer differente, directa porém, e deduzida da Propoſição 32, a qual ſe póde demonſtrar com maior brevidade, e do modo ſeguinte.

PROP. XXXII. DO LIV. VI.

SE dous triangulos, nos quaes dous lados de hum são proporcionaes a dous lados do outro, ſe diſpuzerem entre ſi de maneira que tocando-ſe com dous angulos, os lados homologos ſejão reſpectivamente parallelos; os outros lados dos meſmos triangulos eſtarão em direitura hum com outro.

Fig. 9. Sejão os dous triangulos GAF, HFC, e ſejão os lados AG, GF do primeiro proporcionaes aos lados FH, HC do ſegundo, iſto he, ſeja AG : GF :: FH : HC. Supponhamos tambem ſerem parallelas tanto as rectas GA, HF, como as rectas GF, HC. Digo, que o lado AF eſtá em direitura do lado FC.

a. 31. 1. Tire-ſe a recta CK parallela[a] á FH, e que encontre a outra GF produzida no ponto K. Como cada huma das rectas AG, KC he parallela á meſma FH; ſerão parallelas[b] entre ſi b. 30. 1. tambem as duas AG, KC, e por conſequencia ſerão iguaes os angulos AGF, FKC, por ſerem eſtes angulos alternos. Mas temos ſuppoſto ſer AG : GF :: FH : HC; e he tambem FH : HC :: CK : KF, viſto ſer FH = CK, e

HC =

HC=KF[c]; e assim temos AG : FG :: CK : KF; e de mais são iguaes os angulos formados pelos lados AG, GF, e pelos outros CK, KF. Logo os triangulos AGF, CKF são equiangulos[d], e por consequencia deve ser o angulo AFG=CFK. Mas GFK he huma só linha recta. Logo o lado AF deve estar em direitura[e] do lado FC. c. 34. 1. d. 6. 6. e. 14. 1.

Póde-se pois demonstrar a Proposição 26. pela dita Proposição 32. deste modo.

Se dous parallelogrammos semelhantes, e semelhantemente postos tiverem hum angulo commum, ou tiverem angulos verticalmente oppostos; as diagonaes dos ditos parallelogrammos existirão em huma só, e a mesma linha recta.

Tenhão em primeiro lugar os parallelogrammos ABCD, AEFG o angulo commum BAD, e sejão os mesmos parallelogrammos semelhantes, e semelhantemente postos. Digo, que as diagonaes dos parallelogrammos ABCD, AEFG existem em huma mesma linha recta. Fig. 9.

Considerem-se produzidos os lados EF, GF até os pontos H, K, e sejão tiradas as rectas EA, BC. Sendo pela hypothesis semelhantes os parallelogrammos ABCD, AEFG, será DA : AB :: GA : AE, e por consequencia será tambem DG : EB :: GA : AE[a]. Mas he DG=FH, e EB=HC, e AE=GF. Logo será FH : HC :: AG : GF. Mas tanto os lados FH, AG, como os lados HC, GF, são parallelos entre si, e os triangulos AGF, FHC se tocão a. Cor. 19. 5.

pe-

pela parte dos angulos AFG, CFH no ponto F. Logo a recta AF está em direitura[b] da
b. 32. 6. recta FC, e por consequencia as diagonaes dos parallelogrammos ABCD, BEFG existem em huma só linha recta.

Fig. 5. Tenhão em segundo lugar os parallelogrammos KFHC, GFEA semelhantes, e semelhantemente descriptos os angulos KFH, EFG verticalmente oppostos entre si. Digo, que as diagonaes AF, FC dos ditos parallelogrammos estão em direitura huma de outra.

Sendo parallelos entre si tanto os lados AG, FH, como os lados GF, HC; e de mais sendo AG : GF : : FH : HC, necessariamente a diagonal AF deve estar em direitura[b] com a diagonal FC.

DEFINIÇÕES IX. E XI. DO LIV. XI.

TRatando-se de figuras planas, a semelhança das figuras depende inteiramente da igualdade dos angulos, e da proporção dos lados, que formão os angulos iguaes. Porque, exceptuados os triangulos, supposta nas outras figuras planas sómente a proporção dos lados, ou supposta sómente a igualdade dos angulos, não podemos concluir a semelhança das mesmas figuras planas. E com effeito a situação, ou disposição semelhante dos lados, que comprehendem as figuras planas, em parte depende da igualdade dos angulos, e em parte tambem da proporção daquelles lados, que fazem angulos respectivamente iguaes. Do mesmo modo do as figuras solidas semelhantes não são senão aquellas, que tem iguaes entre si todos os angulos solidos correspondentes, e que ao mesmo tempo ficão formadas por igual numero de figuras planas, e respectivamente semelhantes. Porque ha algumas figuras solidas comprehendidas por figuras planas semelhantes entre si, e iguaes, e tambem em igual numero, as quaes figuras solidas não são com tudo isto nem semelhantes, nem iguaes, como faremos ver na demonstração, que daremos depois das Notas sobre a Definição 10. Devia-se pois emendar a Definição das figuras solidas semelhantes, fazendo que precedesse outra do angulo solido. Do que temos dito, e da mesma Definição 10, fica bem claro o estrago, que a estes livros de Euclides tem feito alguns homens ignorantes, e imperitos.

DEFINIÇÃO X. DO LIV. XI.

SEndo o sentido da palavra *igual* conhecido já antes desta Definição, esta mesma Definição, que vinha a ser a decima do Livro XI, he hum Theorema, cuja verdade, ou falsidade se deve demonstrar, e não suppôr. E Theão, ou algum outro interprete de Euclides, obrou com pouco acerto, quando de huma proposição, que se devia provar, fez a definição das figuras solidas semelhantes, e iguaes; porque o serem semelhantes entre si as figuras solidas, se deve demonstrar pela definição das figuras solidas semelhantes; e o serem iguaes as mesmas

fi-

figuras ſolidas, ſe deve provar pelo axioma; que diz que as grandezas, as quaes ſe ajuſtão perfeitamente entre ſi, são iguaes; ou pela Propoſição A, ou pela 9, ou pela 14 do Livro 5. Do dito axioma, ou de alguma das ditas Propoſições depende inteiramente a demonſtração da igualdade de todas as figuras. Em nenhum dos Livros precedentes tem Euclides dado a definição das figuras iguaes, nem por certo deo eſta. E com effeito aquella, que paſſa pela primeira definição do Livro terceiro, he hum verdadeiro Theorema, em que ſe affirma, que são iguaes aquelles circulos, cujos ſemidiametros são tambem iguaes, o que manifeſtamente ſe collige da meſma definição do circulo; e aſſim impropriamente a collocou algum dos interpretes entre as definições daquelle livro; porque a igualdade das figuras não ſe deve definir, mas ſim ſe deve demonſtrar. Diſto pois ſe ſegue, que ainda que foſſe verdade ſerem iguaes entre ſi as figuras ſolidas formadas com planos ſemelhantes, e em numero, e grandeza iguaes; não ficava por iſto livre de culpa aquelle, que fez huma definição de huma propoſição, a qual abſolutamente ſe havia de demonſtrar. Mas que ſeria ſe eſta propoſição foſſe falſa? Não haviamos de confeſſar, que os Geometras eſtiverão illudidos, e enganados em huma couſa puramente elementar pelo decurſo de mil e trezentos annos? Diſto pois devemos aprender a ſermos modeſtos, e confeſſar que mui facilmente podemos cahir em

er-

erros, que tal he a fraqueza do entendimento humano, ainda a respeito dos principios daquellas sciencias, que justamente tem seu lugar entre as mais certas. Podemos demonstrar com varios exemplos, que a dita proposição não he sempre verdadeira; bastará o que se segue.

Seja o quadrado ABCD, cujas diagonaes AC, BD se encontrão reciprocamente no ponto E. Descreva-se sobre huma das ditas diagonaes, por exemplo sobre a diagonal BD, o triangulo isosceles BFD, e no mesmo plano do quadrado ABCD. Levante-se do ponto E sobre o plano ABCD a perpendicular EG, e tomado nesta o ponto G, qualquer que seja, tirem-se deste ponto G as rectas GA, GB, GC, GD, GF. Nos triangulos AEG, CEG, sendo AE = CE, e EG hum lado commum, e sendo tambem o angulo AEG = CEG, por serem estes angulos rectos; será a baze AG igual [a] á baze GC, e por consequencia nos triangulos AGB, CGB serão iguaes os lados AG, GC. Mas a baze AB he igual á baze BC. Logo sendo o lado GB commum a ambos os triangulos, será o angulo AGB = CGB [b], e será o triangulo AGB igual [a] ao triangulo CGB. Do mesmo modo se póde demonstrar, que são iguaes entre si os triangulos AGD, CGD. Considere-se agora produzida a recta GE para a parte opposta do plano ABCD, e tomado na mesma recta produzida qualquer ponto H, sejão tiradas as rectas HA, HB, HC, HD, HF.

Fig. 10.

a. 4. 1.

b. 8. 1.

HF. Provar-se-ha, como assima se tem feito, serem iguaes entre si tanto os triangulos AHB, CHB, como os triangulos AHD, CHD. Temos pois dous solidos, cada hum dos quaes fica formado por oito triangulos, isto he, hum destes solidos fica formado pelos quatro triangulos, cujo vertice commum he o ponto G, e as bazes as rectas BA, AD, BF, FD; e tambem pelos outros quatro triangulos, que tem por vertice commum o ponto H, e por bazes as mesmas rectas assima referidas. E o outro solido he comprehendido pelos quatro triangulos, que tem o mesmo vertice G, e as bazes BC, CD, BF, FD; e tambem pelos outros quatro, cujo vertice commum he o ponto H, e as bazes as mesmas rectas BC, CD, BF, FD. Mas os quatro triangulos AGB, AGD, AHB, AHD são iguaes aos quatro CGB, CGD, CHB, CHD, cada hum a cada hum, como já fica demonstrado; e os outros quatro triangulos BGF, DGF, BHF, DHF são communs a ambos os solidos. Logo estes dous solidos são formados por planos semelhantes, e tambem em numero, e grandeza iguaes. Mas he evidente, que os mesmos solidos não são iguaes, visto ficar o primeiro delles comprehendido no outro. Logo he falso serem sempre iguaes entre si dous solidos formados por planos semelhantes, e em numero, e grandeza iguaes.

COROL. Disto se segue, que dous angulos solidos desiguaes podem ser formados pelo lo mesmo numero de angulos planos, e respectivamente iguaes.

E por certo o angulo solido feito no ponto G pelos quatro angulos planos AGB, AGD, FGB, FGD não he igual ao outro angulo solido tambem existente no mesmo ponto G, e formado pelos outros quatro angulos planos CGB, CGD, FGB, FGD; pois este segundo angulo solido encerra dentro de si aquelle primeiro. Mas cada hum dos ditos angulos solidos he formado por quatro angulos planos respectivamente iguaes entre si, como temos demonstrado. Logo dous angulos solidos desiguaes podem ser formados pelo mesmo numero de angulos planos, e respectivamente iguaes. E com effeito póde haver hum numero infinito de angulos solidos desiguaes, e ao mesmo tempo formados por angulos planos respectivamente iguaes. Tambem he manifesto, que as duas figuras solidas, de que assima temos tratado, não são semelhantes, visto não serem iguaes entre si os angulos solidos dellas, que se correspondem.

Mas que possa haver hum numero infinito de angulos solidos desiguaes, e ao mesmo tempo feitos por angulos planos respectivamente iguaes, e dispostos entre si com a mesma ordem, se fará evidente por meio das tres Proposições seguintes.

PROP.

PROP. I. PROBLEMA.

DAdas as tres grandezas A, B, C, achar huma quarta grandeza de maneira que tres dellas tomadas juntas, como as quizermos, sejão maiores que a grandeza que fica.

Seja D a quarta grandeza, que se busca. Será D menor do que as tres grandezas A, B, C tomadas juntas. Seja A não menor que qualquer das duas B, C; e primeiramente sejão estas duas B, C tomadas juntas não menores que A. Serão as tres B, C, D juntamente maiores que A. E como a grandeza A não he menor que a grandeza B; as tres A, C, D tomadas juntas serão maiores que a grandeza B. Do mesmo modo se demonstra, que as tres A, B, D tomadas juntamente são maiores que a grandeza C. Logo na supposição de serem as duas grandezas B, C tomadas juntas não menores que a grandeza A, qualquer outra grandeza D, a qual seja menor que as tres juntas A, B, C, póde servir para o nosso intento.

Mas se as duas grandezas B, C tomadas juntas forem menores que a grandeza A; porque se pede, que as tres B, C, D tambem tomadas juntas sejão maiores que a mesma grandeza A, tirando das ditas tres B, C, D as duas B, C, ficará a grandeza D maior que o excesso da grandeza A sobre as mesmas duas B, C tomadas juntamente. Tome-se pois qualquer grandeza D, de maneira porém que seja menor que as tres juntas A, B, C, e ao mes-

mo

mo tempo ſeja maior do que o exceſſo da grandeza A ſobre as duas B, C tomadas juntas. Seráo as tres grandezas B, C, D juntamente maiores que a grandeza A. E como A he maior que qualquer das duas B, C; muito mais a meſma grandeza A juntamente com a grandeza D, e com huma das duas B, C, ſerá maior do que a outra grandeza, que reſta; e já pela conſtrucçáo, que fizemos, as tres grandezas A, B, C tomadas juntas sáo maiores que a grandeza D. Que he o que ſe devia fazer.

COROL. Se depois ſe quizer, que as duas grandezas A, B tomadas juntamente náo ſejáo menores que as outras duas C, D tambem tomadas juntas; o exceſſo das duas A, B juntas ſobre a grandeza C náo deve ſer menor que a grandeza D, iſto he, a grandeza D náo ha de ſer maior que o dito exceſſo.

PROP. II. PROBLEMA.

DAdas quatro grandezas A, B, C, D, das quaes as duas A, B tomadas juntas náo sáo menores que as duas C, D, tambem tomadas juntas; e das quaes quatro grandezas propoſtas, tres juntas, tomadas como quizermos, sáo ſempre maiores que a quarta, que reſta; achar huma quinta grandeza E, de maneira que das tres grandezas A, B, E duas tomadas como quizermos, ſejáo maiores que a terceira, que fica; e tambem duas das outras tres grandezas C, D, E, tomadas como quizermos, ſejáo maiores que a outra que reſta. E ſupponha-

ſe

ſe a grandeza A não menor que B, e C não menor que D.

Primeiramente não ſeja menor o exceſſo das duas grandezas C, D, que o exceſſo das duas A, B. He evidente, que ſe póde tomar huma grandeza E, de maneira que ſeja menor que as duas juntas C, D, e ao meſmo tempo ſeja maior que o exceſſo das meſmas grandezas C, D. Tome-ſe pois, e ſerá a grandeza E maior que o exceſſo das duas A, B. Logo as duas grandezas B, E tomadas juntas ſerão maiores que a grandeza A. Mas A não he menor que B. Logo as duas A, E tomadas juntas hão de ſer maiores que B. Mas pela hypotheſis A juntamente com B não he menor do que C juntamente com D; e C juntamente com D he maior que E. Logo A juntamente com B he maior que E.

Seja agora o exceſſo das grandezas A, B maior que o exceſſo das grandezas C, D. Como pela hypotheſis as tres grandezas B, C, D tomadas juntas são maiores que a grandeza A; ſerão as duas C, D juntas maiores que o exceſſo das duas A, B. Logo poder-ſe-ha tomar huma grandeza E, de maneira que ſeja menor que as duas juntas C, D, e ao meſmo tempo ſeja maior que o exceſſo das outras A, B. Tome-ſe pois; e como a grandeza E he maior que o exceſſo das duas A, B; ſerão as duas B, E tomadas juntas maiores que a grandeza A. Póde-ſe agora demonſtrar, como no caſo precedente, que A juntamente com E he maior do que B; e tambem que A juntamente com B he maior do que E. Logo em ambos os casos fica demonstrado, que das tres grandezas A, B, E duas juntas, e tomadas como quizermos, são sempre maiores que a terceira, que resta.

E porque em hum, e outro caso a grandeza E he maior que o excesso das duas C, D; será E juntamente com D maior do que C. Mas pela supposição a grandeza C não he menor que D. Logo E juntamente com C será maior que D. Mas pela construcção C juntamente com D he maior que E. Logo duas grandezas juntas, e tomadas como quizermos, das tres C, D, E, são maiores que a terceira grandeza, que resta.

PROP. III. THEOREMA.

COm quatro angulos planos propostos se podem formar innumeraveis angulos solidos, e todos desiguaes.

Tomem-se os tres angulos planos A, B, C, Fig. 11.
de sorte que o angulo A não seja menor do que qualquer que quizermos dos dous B, C; e os dous A, B tomados juntos sejão menores que dous rectos. Ache-se pelo Problema primeiro, e pelo seu Corollario, o quarto angulo D, de maneira que dos quatro angulos A, B, C, D tres tomados como quizermos sejão maiores que o quarto que resta; e os dous A, B, tomados juntos não sejão menores que os dous C, D tambem tomados juntos. Ache-se depois pelo

Pro-

Problema ſegundo o quinto angulo E, de ſorte que tanto dos tres angulos A, B, E, como dos tres C, D, E dous, quaeſquer que ſejão, tomados juntos, ſejão maiores que o terceiro. E como os dous angulos A, B tomados juntos são menores que dous rectos; os meſmos angulos A, B juntos, e tomados duas vezes, ſerão menores que quatro rectos. Mas os angulos A, B juntamente são maiores que o angulo E. Logo os angulos A, B juntos, e tomados duas vezes ſerão maiores que os tres A, B, E tambem tomados juntos, os quaes por conſequencia ſerão menores que quatro angulos rectos. Mas deſtes tres angulos A, B, F dous tomados como quizermos são maiores que o terceiro. Logo pela Propoſição 23. do Livro Undecimo poder-ſe-ha fazer hum angulo ſolido com tres angulos planos, que ſejão iguaes aos ditos tres angulos A, B, E. Faça-
Fig. 11. 13. ſe pois, e ſeja o angulo ſolido formado no ponto F pelos tres angulos planos GFH, HFK, GFK, que ſejão iguaes aos tres A, B, E, cada hum a cada hum. E como os angulos C, D tomados juntos não são maiores que os angulos A, B tambem tomados juntos; os tres C, D, E juntos não ſerão maiores que os tres A, B, E tambem juntos. Mas já ſe tem demonſtrado, que os tres A, B, E tomados juntos são menores que quatro angulos rectos. Logo os tres C, D, E juntamente tomados devem ſer menores que quatro rectos. Mas dous delles juntos, e tomados como quizermos, são

ma-

maiores que o terceiro. Logo pela mesma Proposição 23. do Livro undecimo poder-se-ha formar hum angulo solido com tres angulos planos, que sejão iguaes, cada hum a cada hum, aos tres C, D, E. Mas pela Proposição 26. do mesmo Livro undecimo no ponto F existente na recta FG se póde fazer outro angulo solido igual ao precedente angulo solido, de que temos fallado. Faça-se pois, e o angulo GFK, que he igual ao angulo E, seja hum dos tres angulos planos, que comprehendem este angulo solido, e sejão os outros dous os angulos KFL, GFL, e iguaes aos angulos C, D cada hum a cada hum. Logo no ponto F fica feito hum angulo solido comprehendido pelos quatro angulos planos GFH, HFK, KFL, GFL, que são iguaes aos angulos A, B, C, D, cada hum a cada hum.

Ache-se agora outro angulo M, de maneira que tanto dos tres angulos A, B, M, como dos tres C, D, M dous tomados juntamente, como quizermos, sejão maiores que o terceiro, que fica. Demonstrar-se-ha, como assima fizemos, que tanto os angulos A, B, M, como os angulos C, D, M tomados juntos são menores que quatro rectos. Considere-se, pela Proposição 23. do Livro undecimo, hum angulo solido no ponto N formado pelos angulos planos ONP, PNQ, ONQ iguaes aos angulos A, B, M, cada hum a cada hum; e no mesmo ponto N existente na recta ON, pela Proposição 26. do mesmo Livro undeci-

Fig. 11. 12.

Fig. 11. 12. 14.

mo, o outro angulo ſolido feito por tres angulos planos, dos quaes hum ſeja o angulo ONQ igual ao angulo M, e os outros dous ſejáo os angulos QNR, ONR iguaes aos dous C, D, cada hum a cada hum. Logo no ponto N fica formado hum angulo ſolido pelos quatro angulos planos ONP, PNQ, QNR, ONR, que ſáo iguaes aos quatro A, B, C,
Fig. 11. 12. 13. 14. D, cada hum a cada hum. Mas náo ſerem iguaes entre ſi os dous angulos ſolidos exiſtentes nos pontos F, N, e cada hum formado reſpectivamente pelos quatro angulos planos referidos; ou, o que vem a ſer o meſmo, náo ſe ajuſtarem entre ſi os meſmos angulos ſolidos a reſpeito de todas as ſuas partes; ſe faz evidente viſto ſerem deſiguaes entre ſi pela conſtrucçáo os angulos GFK, ONQ, ou os angulos E, M, e por conſequencia náo ſer poſſivel ajuſtarem-ſe as rectas GF, FK ſobre as rectas ON, NQ. Náo ſe ajuſtando pois entre ſi os ditos angulos ſolidos a reſpeito de todas as ſuas partes, neceſſariamente ſáo deſiguaes.

E como por meio dos tres angulos propoſtos A, B, C ſe podem achar infinitos outros, os quaes juntamente com o angulo D venháo a fazer o meſmo effeito; e tambem por meio dos angulos A, B, C, e do angulo D, ou de hum, qualquer que ſeja, dos ditos infinitos angulos, que ſe tiverem achado, ſe podem do meſmo modo achar outros, os quaes juntamente com o angulo E, ou com o angulo

M

M fação a meſma couſa; he manifeſto, que com os meſmos quatro angulos planos ſe podem formar innumeraveis angulos ſolidos, os quaes todos ſejão entre ſi deſiguaes.

Engana-ſe pois o Padre Clavio, e com elle todos aquelles Authores, que affirmão ſerem iguaes entre ſi os angulos ſolidos todas as vezes que ficão formados pelo meſmo numero de angulos planos reſpectivamente iguaes; e aſſim ſe faz manifeſto, que a Propoſição 26. do Livro undecimo não tinha ſido demonſtrada legitimamente, porque naquella demonſtração a igualdade dos angulos ſolidos comprehendidos por tres angulos planos iguaes, cada hum a cada hum, ſe tem ſuppoſto, e não ſe tem demonſtrado.

COROLLARIO DA PROP. VIII. do Livro XII.

A Demonſtração deſte Corollario he imperfeita, porque, contra o que ſe devia fazer, não ſe demonſtra ſerem ſemelhantes entre ſi aquellas pyramides, nas quaes as outras propoſtas de bazes polygonas ficão divididas, como em ſemelhante caſo ſe fez na Propoſição 12. deſte meſmo Livro duodecimo. A demonſtração pois do dito Corollario deve ſer a ſeguinte.

Sejão as pyramides ſemelhantes, e ſemelhantemente poſtas das bazes polygonas ABCDE, FGHKL, e dos vertices M, N. Digo, que a pyramide ABCDEM tem para a pyramide Fig. 15.

FG-

FGHKLN a razão triplicada daquella, que o lado AB tem para o lado homologo FG.

Considerem-se divididas as bazes polygonas das pyramides propostas nos triangulos ABE, EBC, ECD; FGL, LGH, LHK,

a. 20. 6. os quaes serão semelhantes [a] respectivamente entre si. E como pela hypothesis as pyramides propostas são tambem semelhantes; será o tri-

b. def. 11. 11. angulo EAM semelhante [b] ao triangulo LFM, e o triangulo ABM semelhante ao triangulo

c. 4. 6. FGN. Logo será ME : EA :: NL : LF [c]. Mas pela semelhança dos triangulos EAB, LFG temos AE : EB :: FL : LG. Logo será por igual ME : EB : NL : LG. Do mesmo modo demonstraremos ser EB : BM :: LG : GN. Logo será outra vez por igual EM : MB :: LN : NG. Logo nos triangulos EMB, LNG são proporcionaes os lados, e assim os mesmos tri-

d. 5. 6. angulos EMB, LNG são equiangulos [d], e tambem semelhantes. Logo as pyramides, cujas bazes são os triangulos EAB, LFG, e os vertices os pontos M, N, são semelhantes entre si,

e. B. 11. visto serem iguaes [e] respectivamente os angulos solidos dellas, e ficarem comprehendidas as mesmas pyramides por igual numero de planos semelhantes. Com o mesmo discurso se demonstra ser a pyramide EBCM semelhante á pyramide LGHN, e a pyramide ECDM semelhante á pyramide LHKN. Sendo pois semelhantes entre si as pyramides EABM, LFGN, e tendo cada huma dellas hum triangulo por baze; a pyramide EABM terá para a pyrami-

de

de LFGN a razáo triplicada daquella, que o lado EB tem para o lado homologo LG. Pela mesma razáo tambem a pyramide EBCM tem para a pyramide LGHN a razáo triplicada da de EB para LG. Logo assim como a pyramide EABM he para a pyramide LFGN, assim tambem a pyramide EBCM será para a pyramide LGHN. Do mesmo modo será a pyramide EBCM para a pyramide LGHN, como a pyramide ECDN he para a pyramide LHKN. Mas hum dos antecedentes he para hum dos consequentes, como todos os antecedentes juntos são para todos os consequentes tambem juntos. Logo assim como a pyramide EABM he para a pyramide LFGN, assim toda a pyramide ABCDEM será para toda a pyramide FGHKLN. Mas a pyramide EABM tem para a pyramide LFGN a razáo triplicada daquella, que AB tem para FG. Logo tambem a pyramide total ABCDEM tem para a pyramide total FGHKLN a razáo triplicada daquella, que o lado AB tem para o lado homologo FG.

FIM.

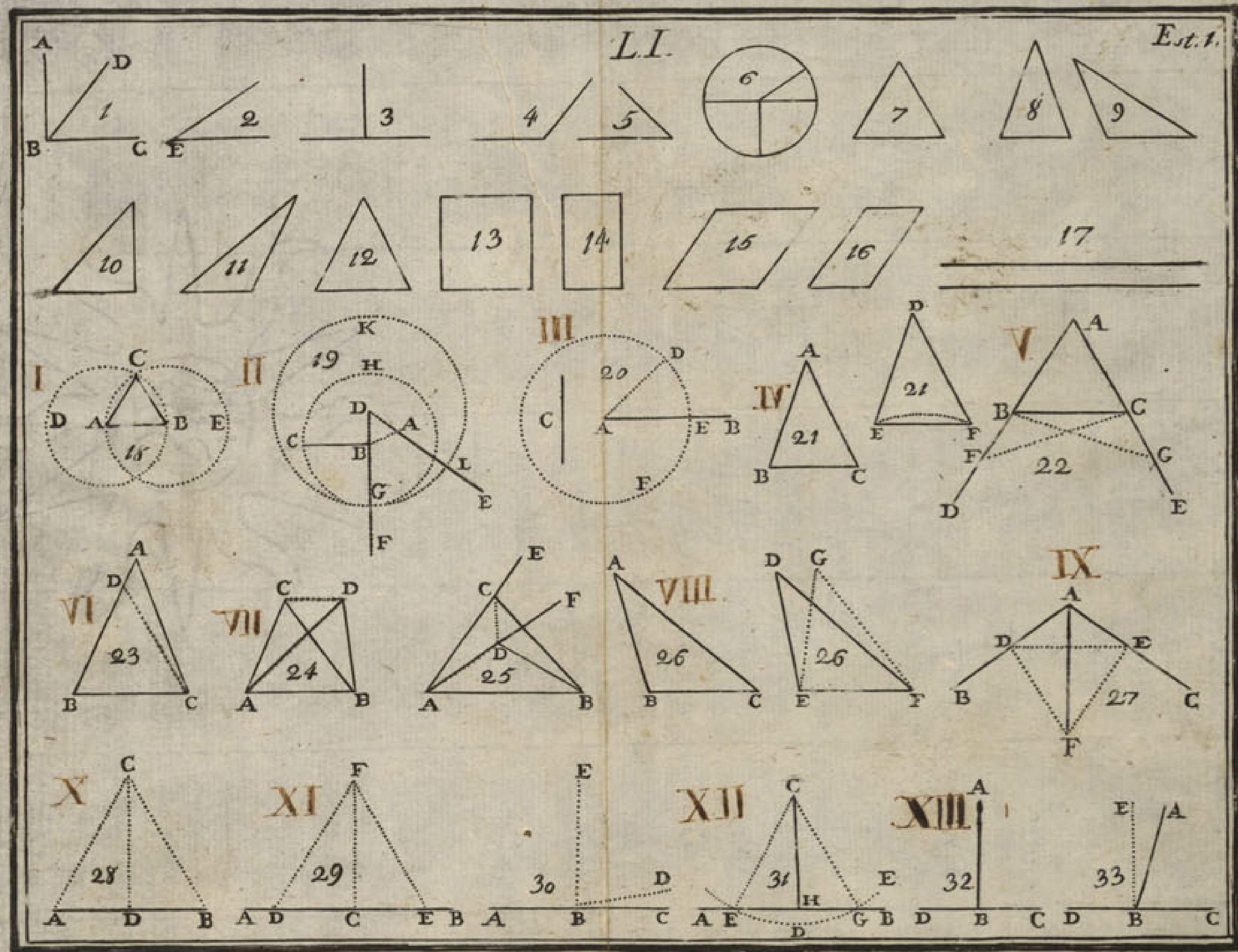
ER-

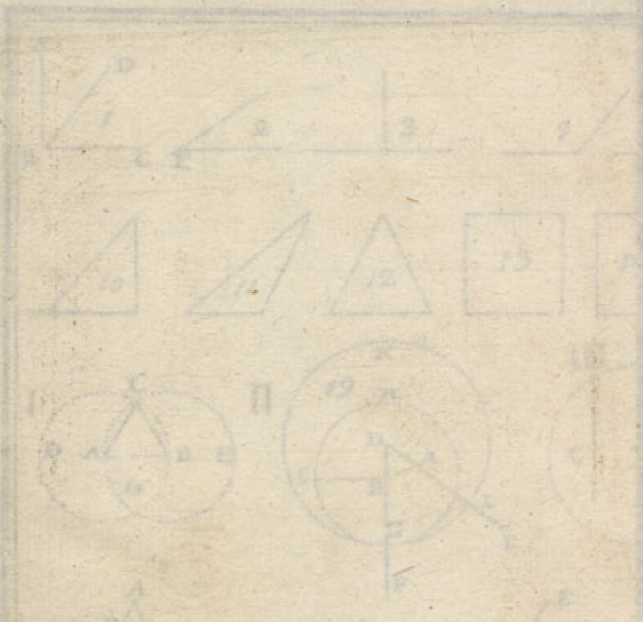
ERROS, E EMENDAS.

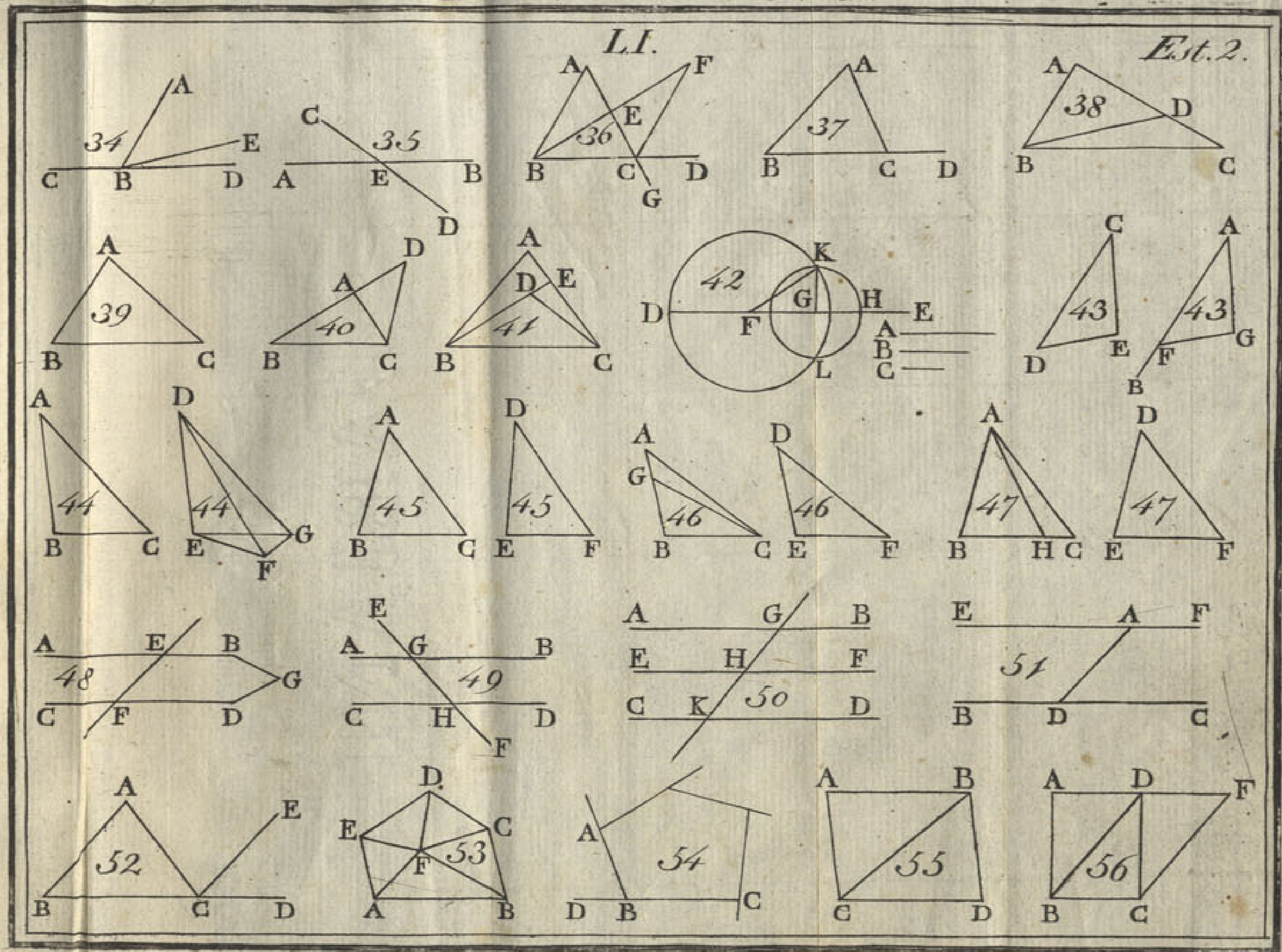
PAg. 5 lin. 1. tem fómente dous, *lea-se*, tem dous.
Pag. 13 Depois da Propofição V. fe deve accrefcentar o Corollario feguinte.

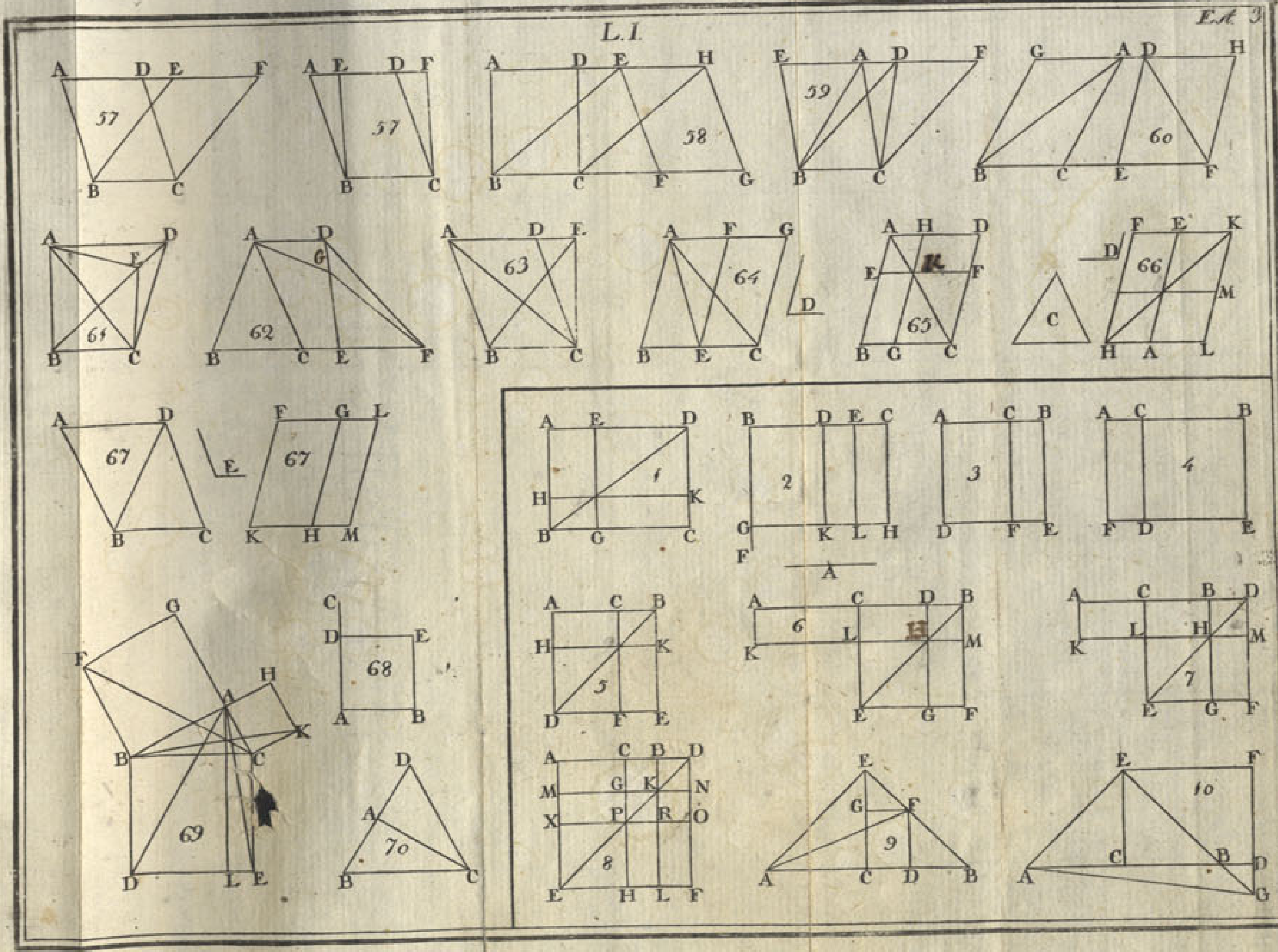
Corol. Difto fe fegue, que todo o triangulo equilatero he tambem equiangulo.

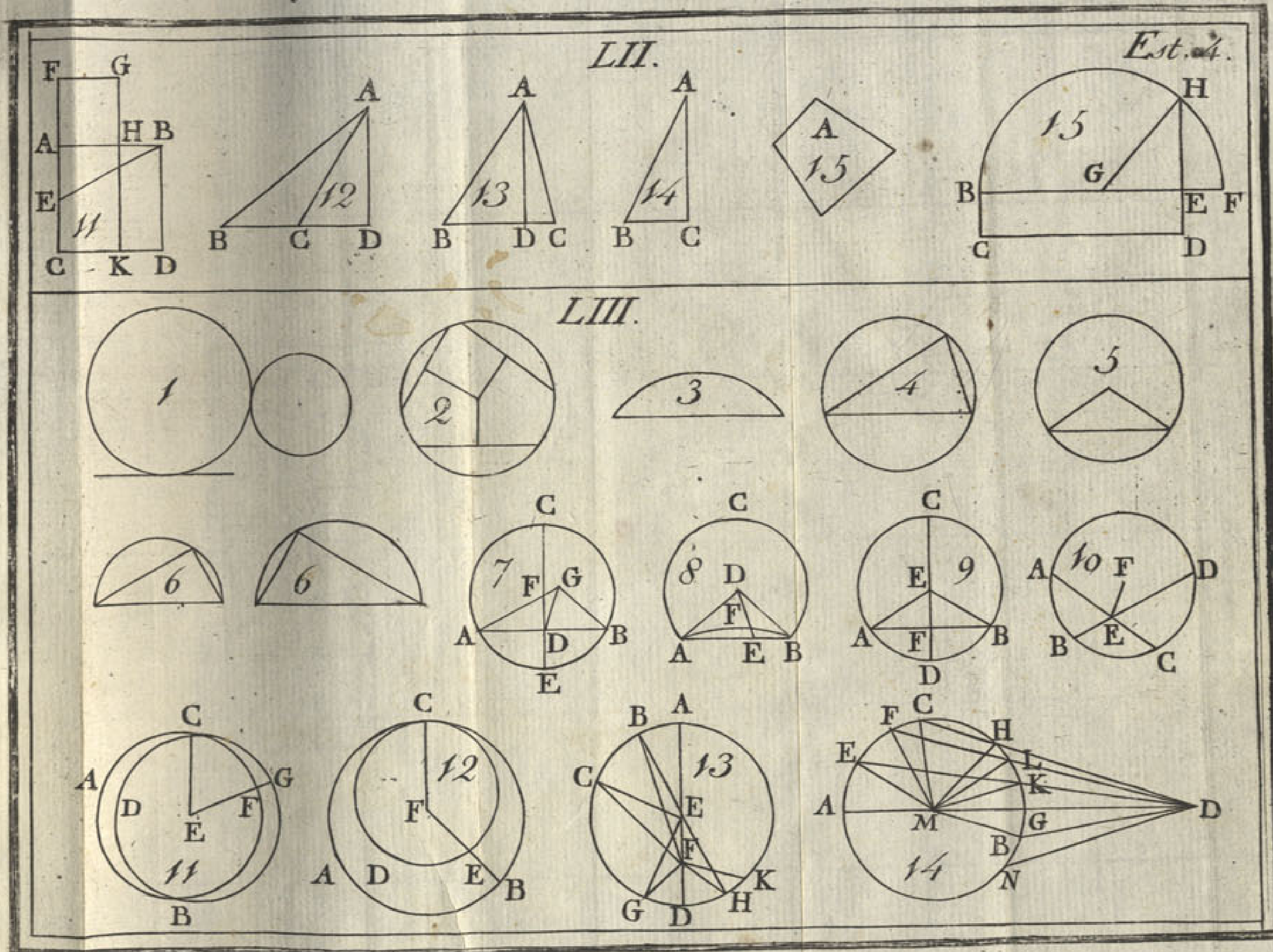
Pag. 15 lin. 2. depois deftas palavras = do outro triangulo ACB, *accrefcente-fe*, produzão-fe as rectas AC, AD para os pontos E, F.
Pag. 42 lin. 2. os parallelogrammos fobre a mefma baze, *lea-fe*, os parallelogrammos, que eftão poftos fobre a mefma baze.
Pag. 47 lin. 8. nem huma, *lea-fe*, nenhuma.
Pag. 63 lin. 15. depois das palavras = parallela á CE, ou BF, *accrefcente-fe*, e pelo ponto H a recta KLM parallela á CB, ou EF.
Pag. 67 lin. 8. da dita outra parte, *lea-fe*, da dita primeira parte.
Pag. 85 lin. 5. recta cortar, *lea-fe*, recta, que paffa pelo centro, cortar.
Pag. 154 lin. 14. quando a multiplice da primeira grandeza he maior, &c., *lea-fe*, quando das quantidades equimultiplices a multiplice da primeira for maior que a multiplice da fegunda, não o fendo a multiplice da terceira a refpeito da multiplice da quarta, &c.
Pag. 178 pen. equimultiplices de E, F, *lea-fe*, equimultiplices de B, F.
Pag. 189 lin. 16. fendo AE: BE : : *lea-fe*, fendo AB : BE : :
Pag. 208 pen. baze BC, *lea-fe*, baze DE.
Pag. 215 lin. 26. fe dous triangulos tiverem, &c., *lea-fe*, fe em dous triangulos fendo hum angulo de hum igual a outro angulo do outro, e proporcionaes os lados, que formão outros dous angulos, e cada hum dos terceiros angulos, que ficão, for menor, ou não menor que hum recto; ou tambem fe hum deftes terceiros angulos for recto; os triangulos ferão equiangulos, e os angulos formados pelos lados proporcionaes ferão iguaes.
Pag. 282 lin. 15. fe póde demonftrar, *lea-fe*, fe verifica.
Pag. 182 pen. os dous planos, *lea-fe*, os dous planos parallelos.
Pag. 313 lin. 14. as duas rectas, *lea-fe*, as duas rectas parallelas.
Pag. 363 lin. 27. refpectivamente femelhantes, *lea-fe*, refpectivamente femelhantes, e em numero igual.
Pag. 393 lin. 1. qualquer que for o dito femicirculo, *lea-fe*, qualquer que for a fituação em que efteja o dito femicirculo.
Pag. 394. lin. 30. NX, *lea-fe*, NK.

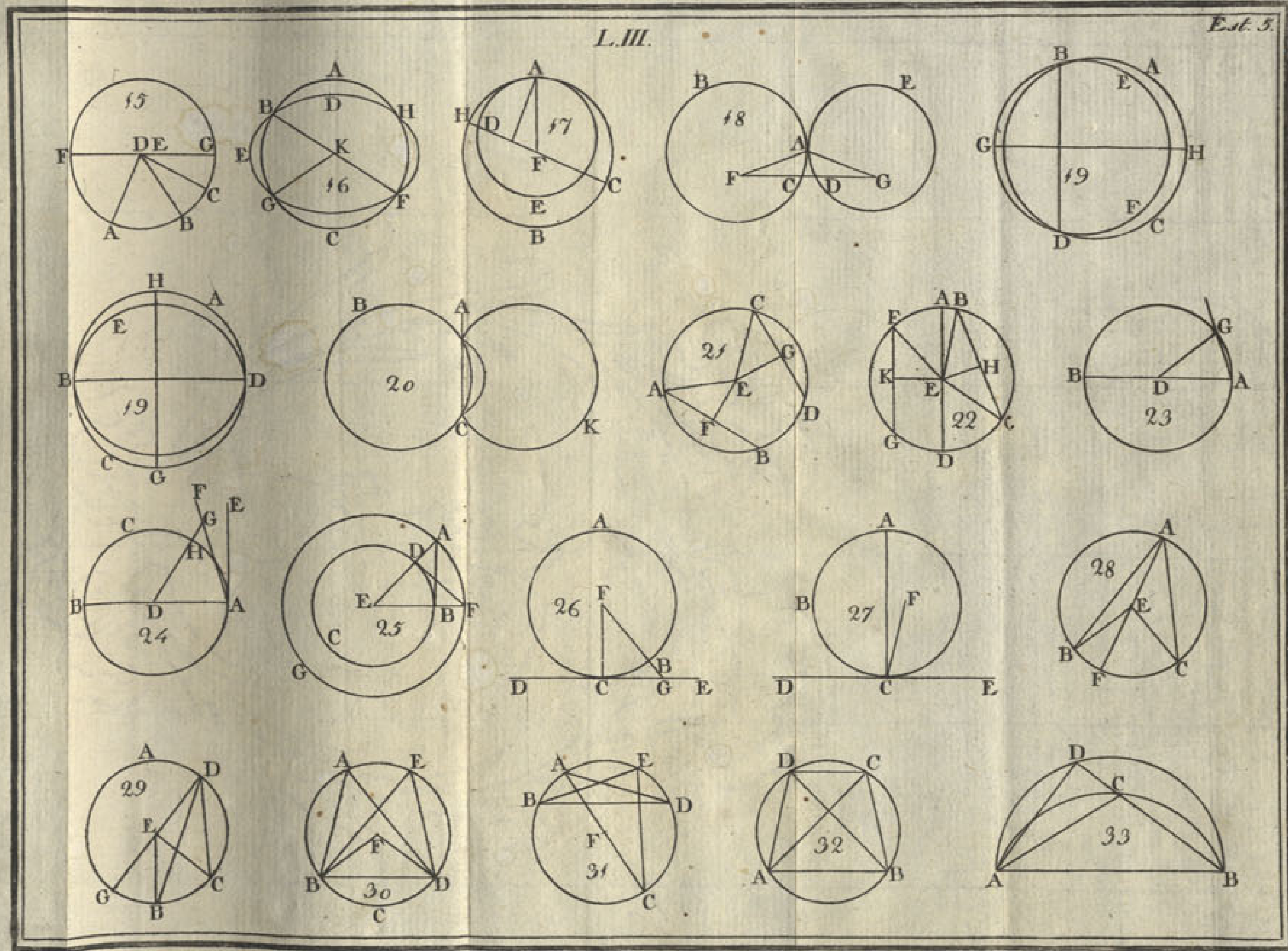

L.I.
Est. 1.



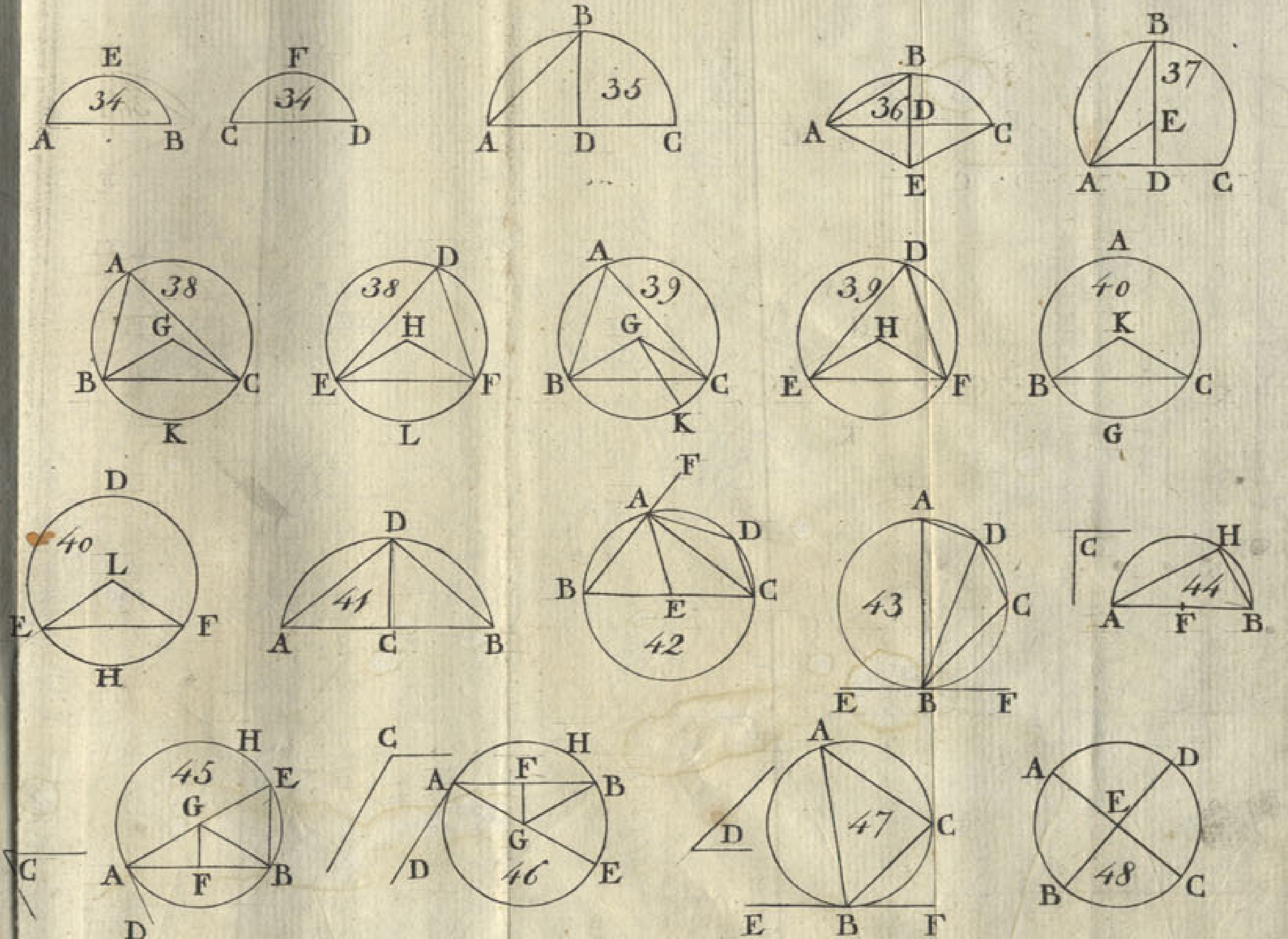

L.I.
Est. 2.
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
43
44
44
45
45
46
46
47
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56


L. I.
57
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
67
68
69
70
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


Est. 4.
LII.
LIII.

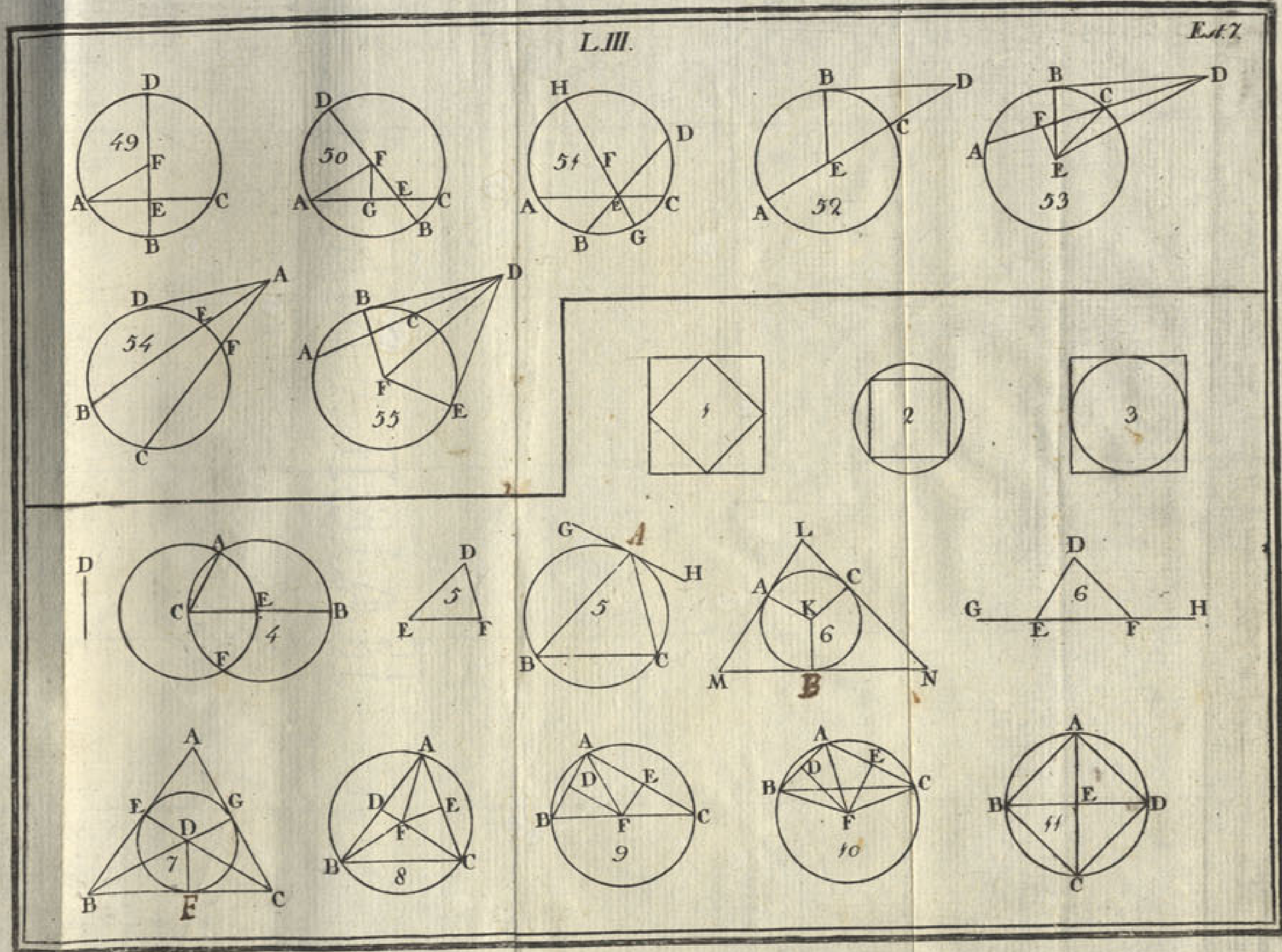

L.III.
Est. 5.
15
16
17
18
19
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33

LIII Est. 6.

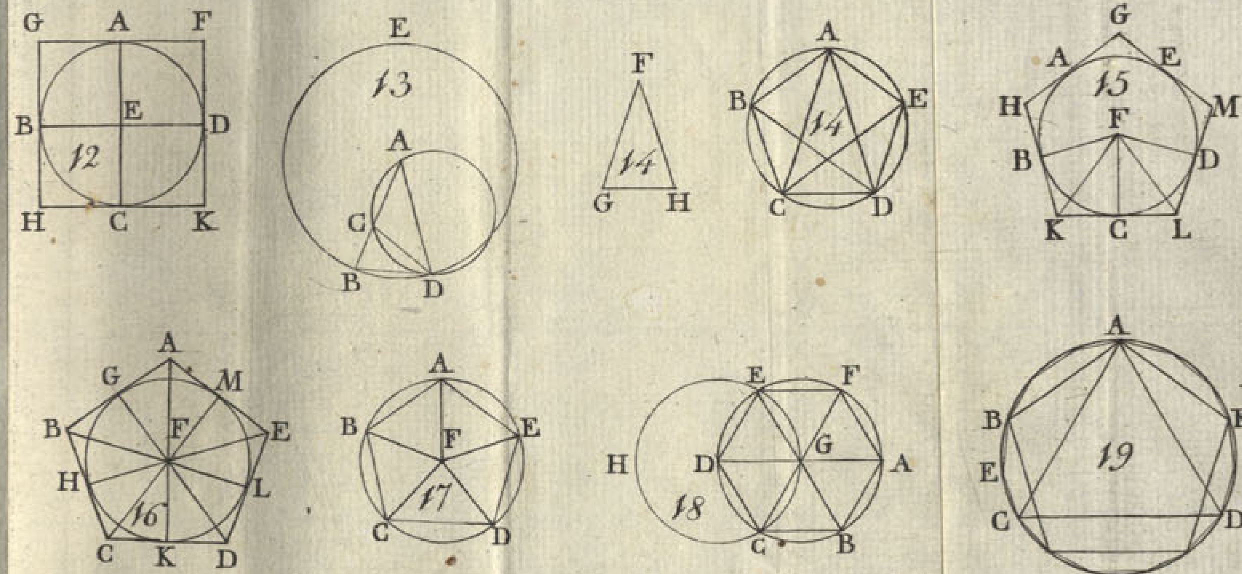


E 34 A B
F 34 C D
B 35 A D C
B 36 D A C E
B 37 E A D C
A 38 G B C K
D 38 H E F L
A 39 G B C K
D 39 H E F
A 40 K B C G
D 40 L E F H
D 41 A C B
F A D B E C 42
A D 43 C E B F
C H 44 A F B
H 45 E G C A F B D
C H A F B G D 46 E
A D 47 C E B F
A D E B 48 C

L. III. Est. 7.

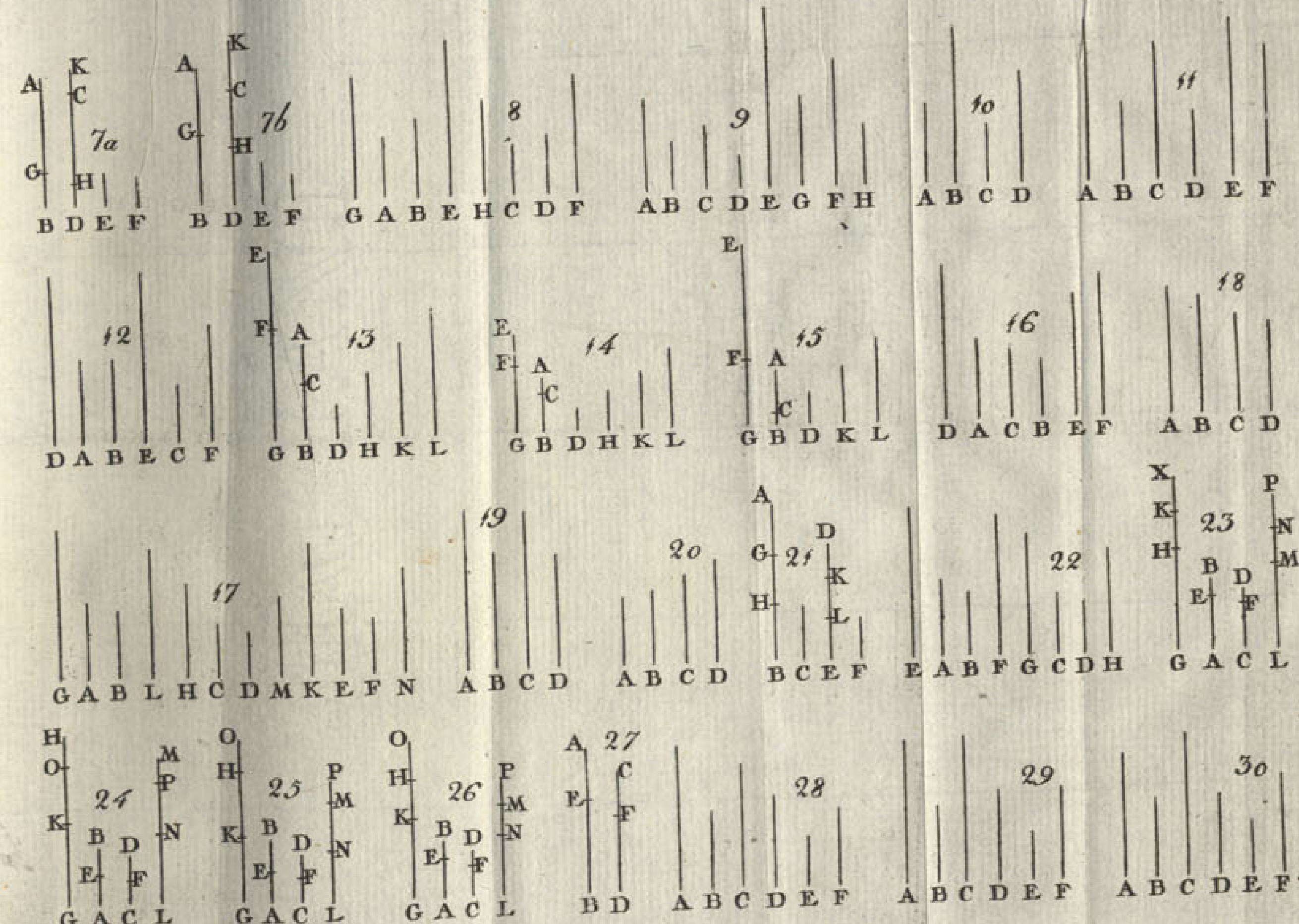


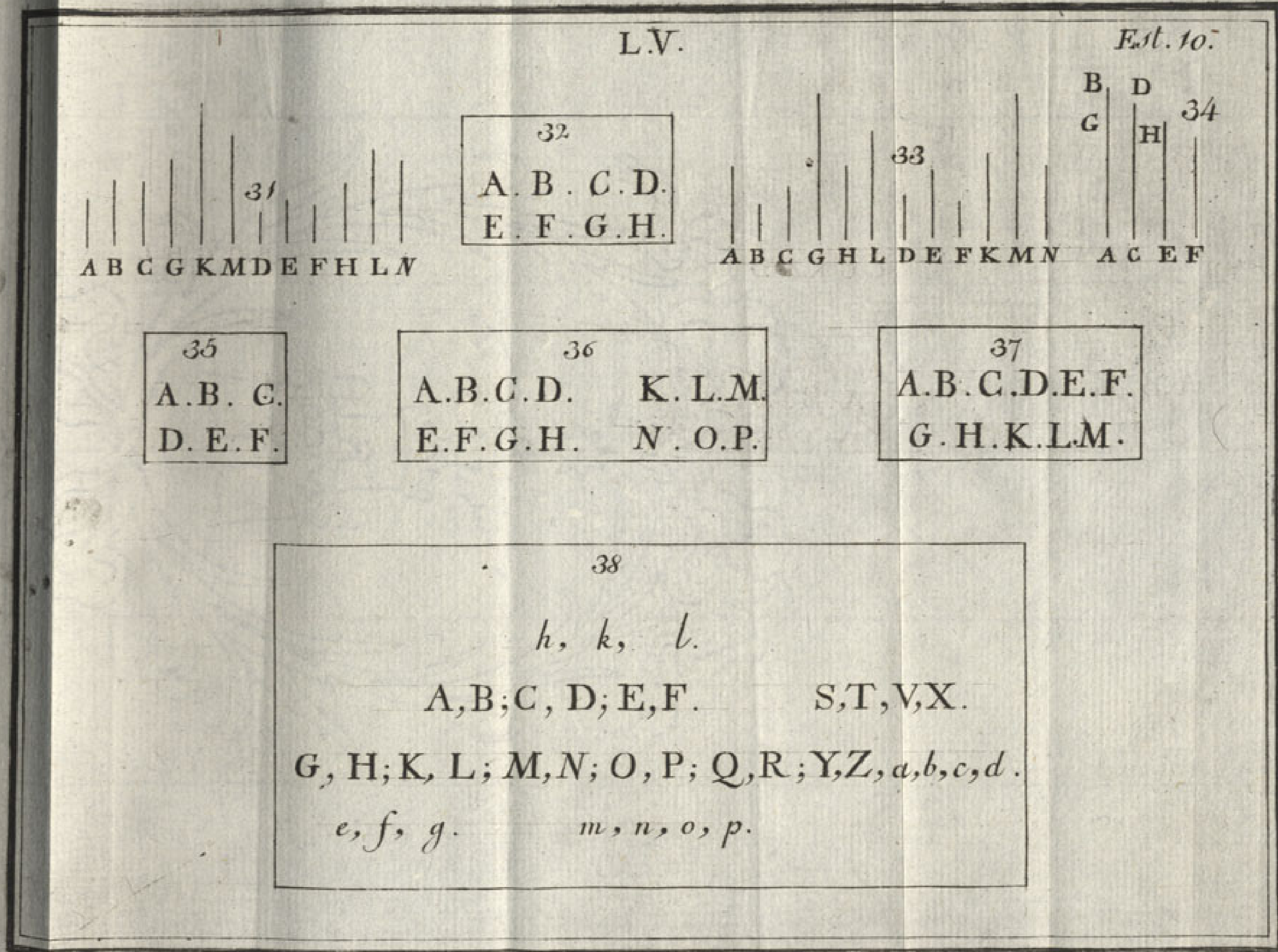
LIV.



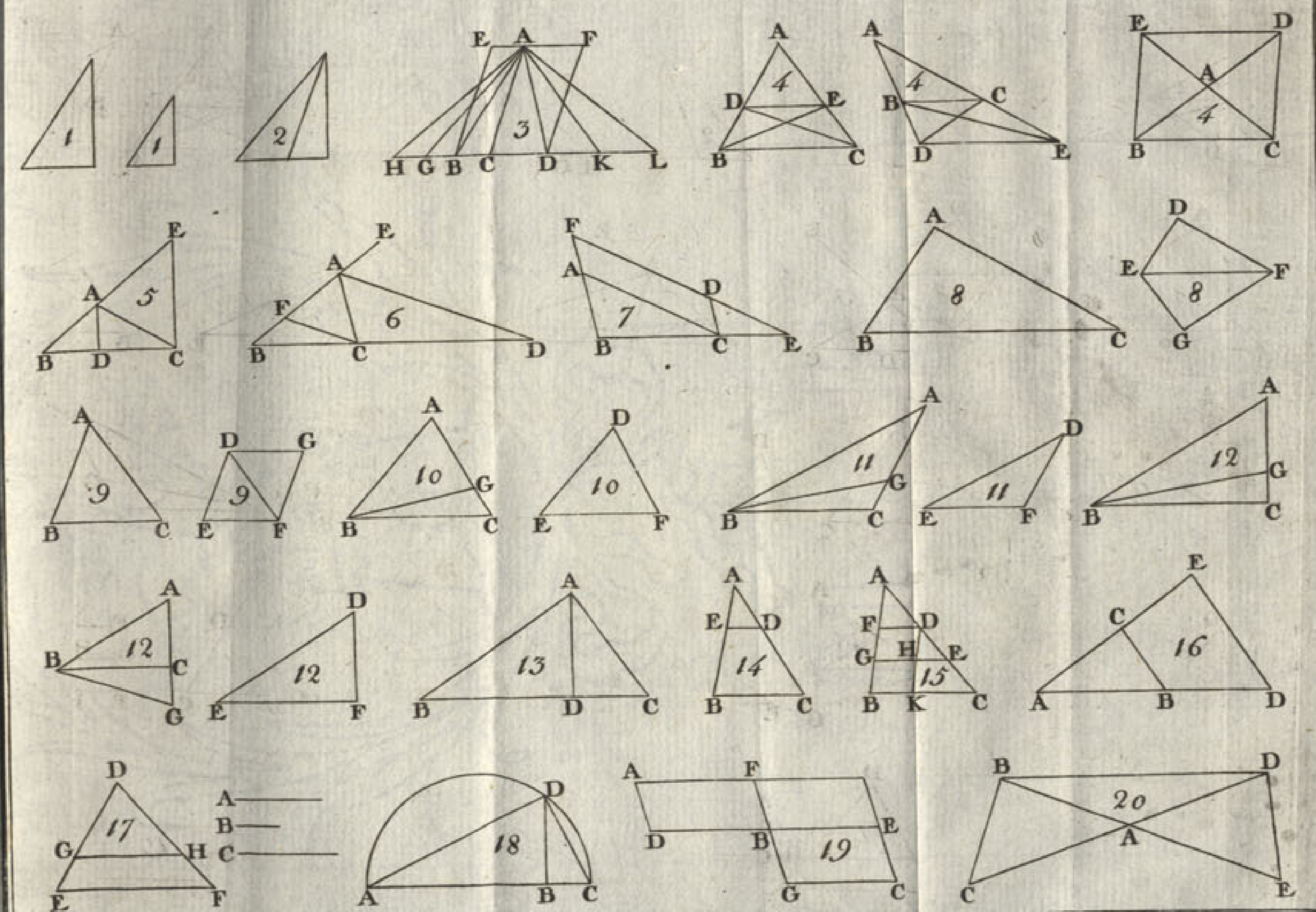
LV.

L.V. Est. 9.



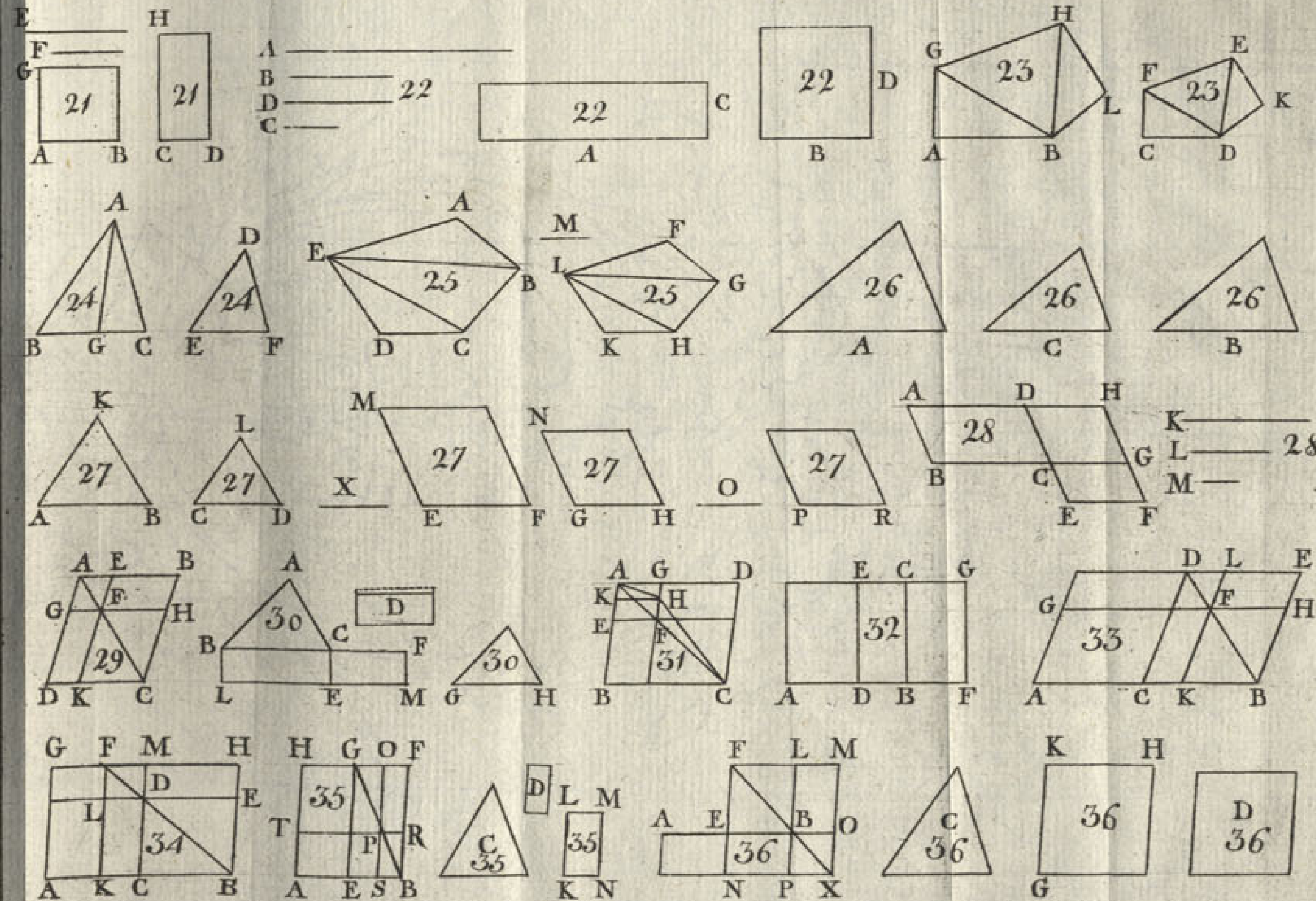

L.V.
Est. 10.
31
A B C G K M D E F H L N
32
A . B . C . D.
E . F . G . H .
33
A B C G H L D E F K M N
34
B D G H
A C E F
35
A . B . C.
D . E . F.
36
A.B.C.D. K. L.M.
E.F.G.H. N . O.P.
37
A.B.C.D.E.F.
G . H .K.L.M .
38
h, k, l.
A,B;C, D;E,F. S,T,V,X.
G, H;K, L; M,N; O, P; Q,R;Y,Z, a,b,c,d.
e, f, g. m, n, o, p.

L.VI. Est. 11.

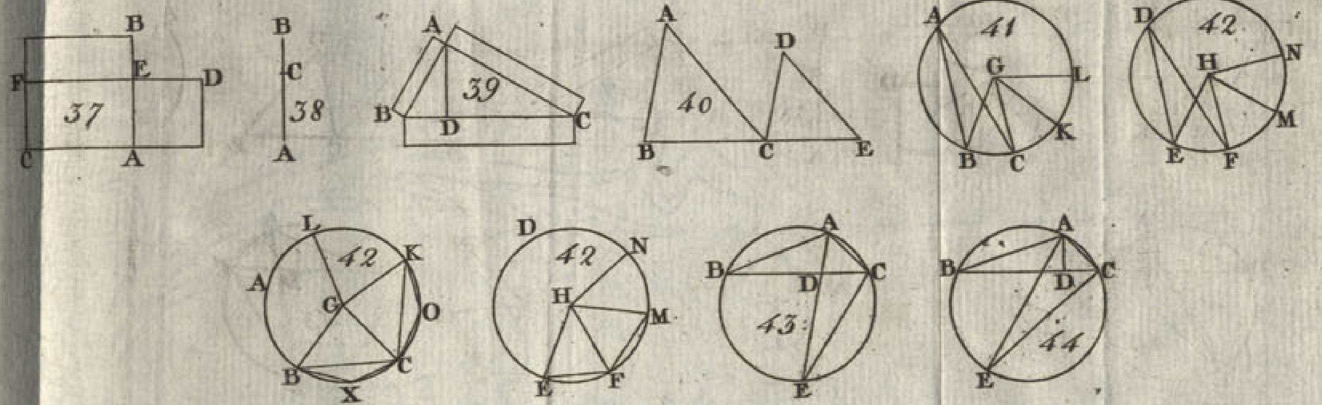


L.VI.

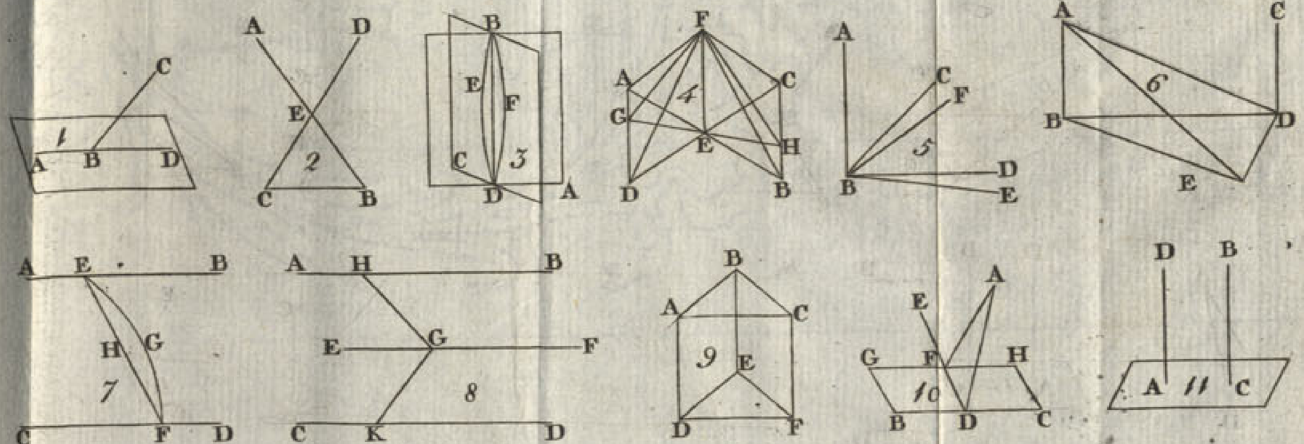
Est. 12.



L.VI. Est. 13.

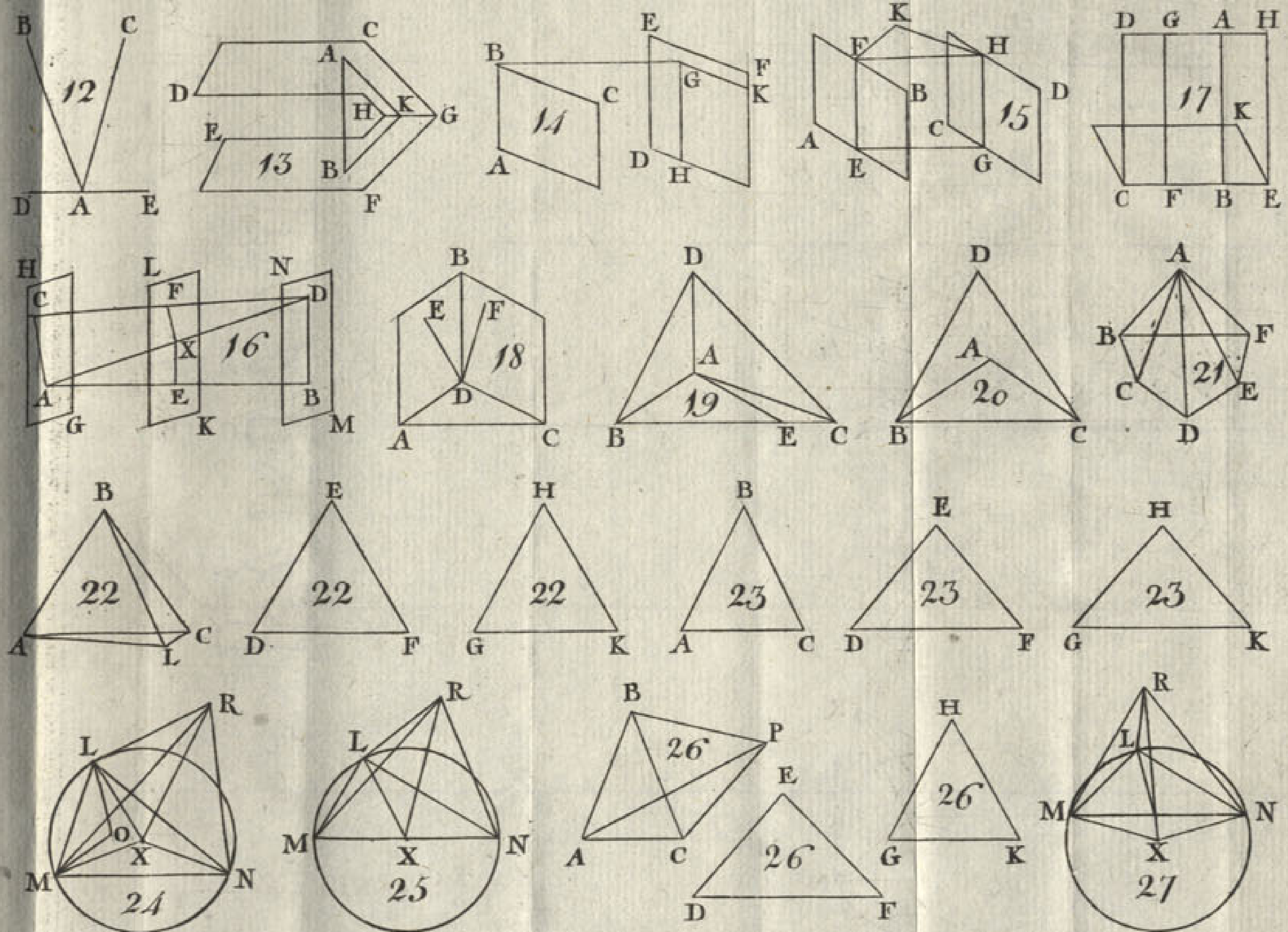


L.XI.

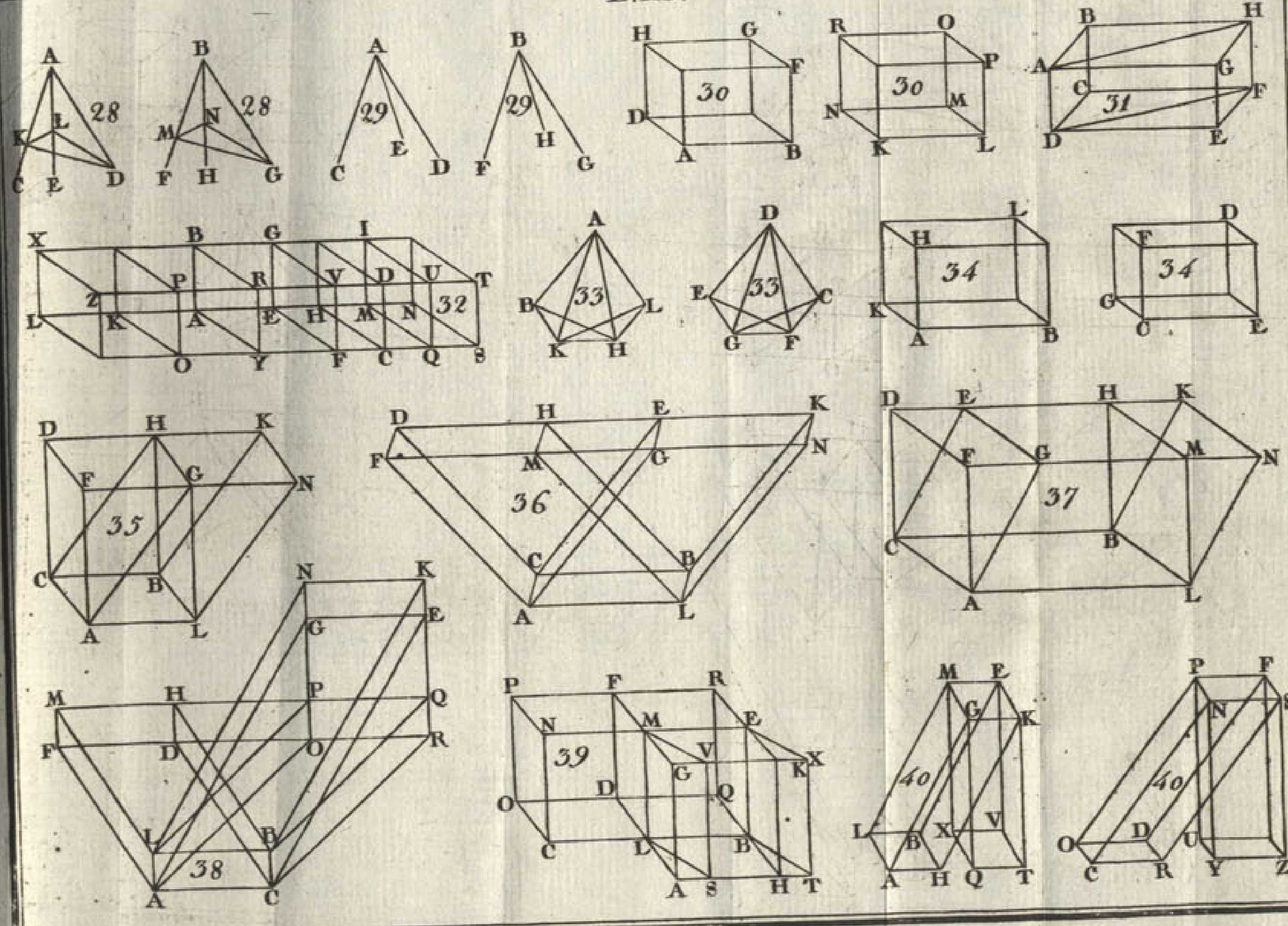


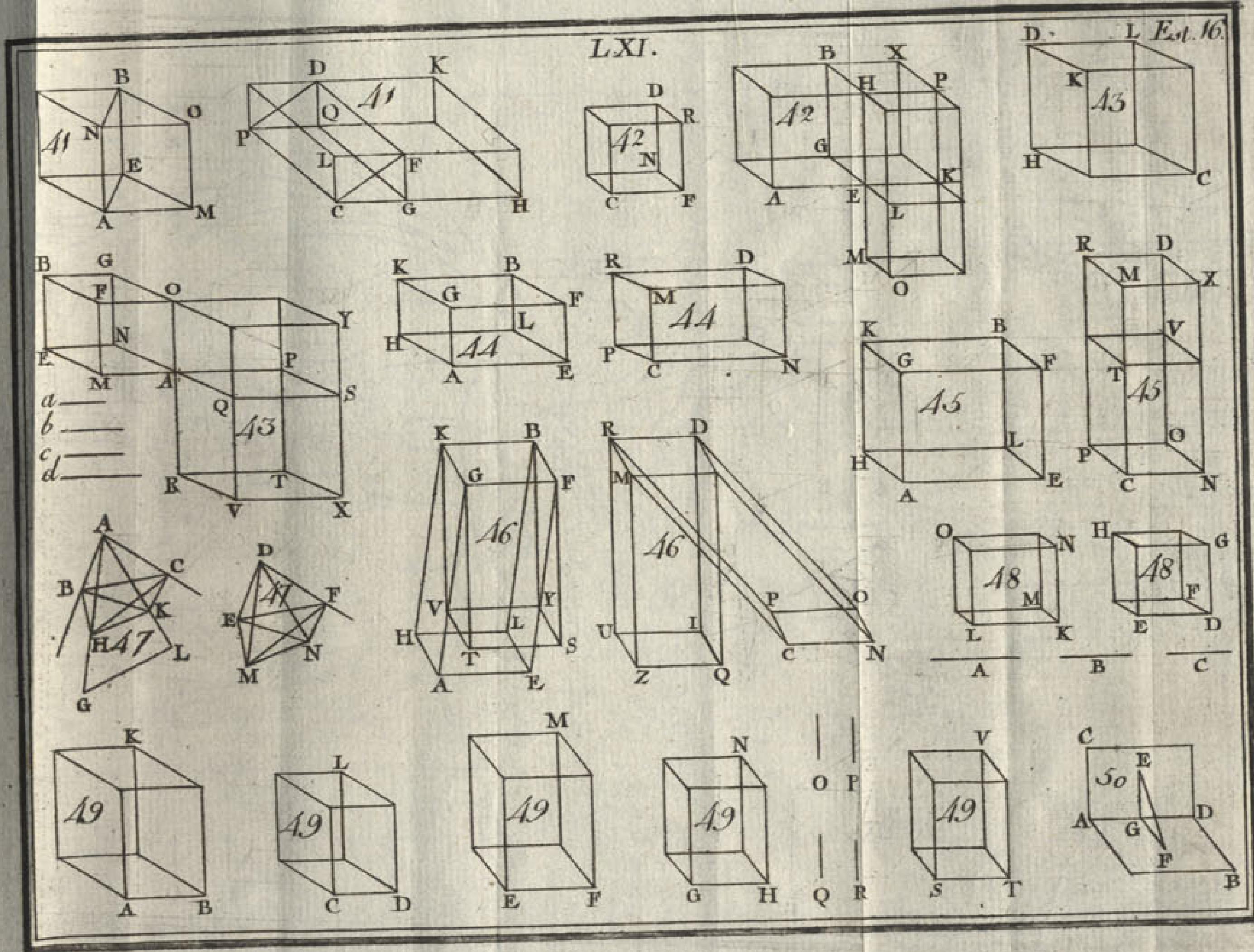
L.XI.

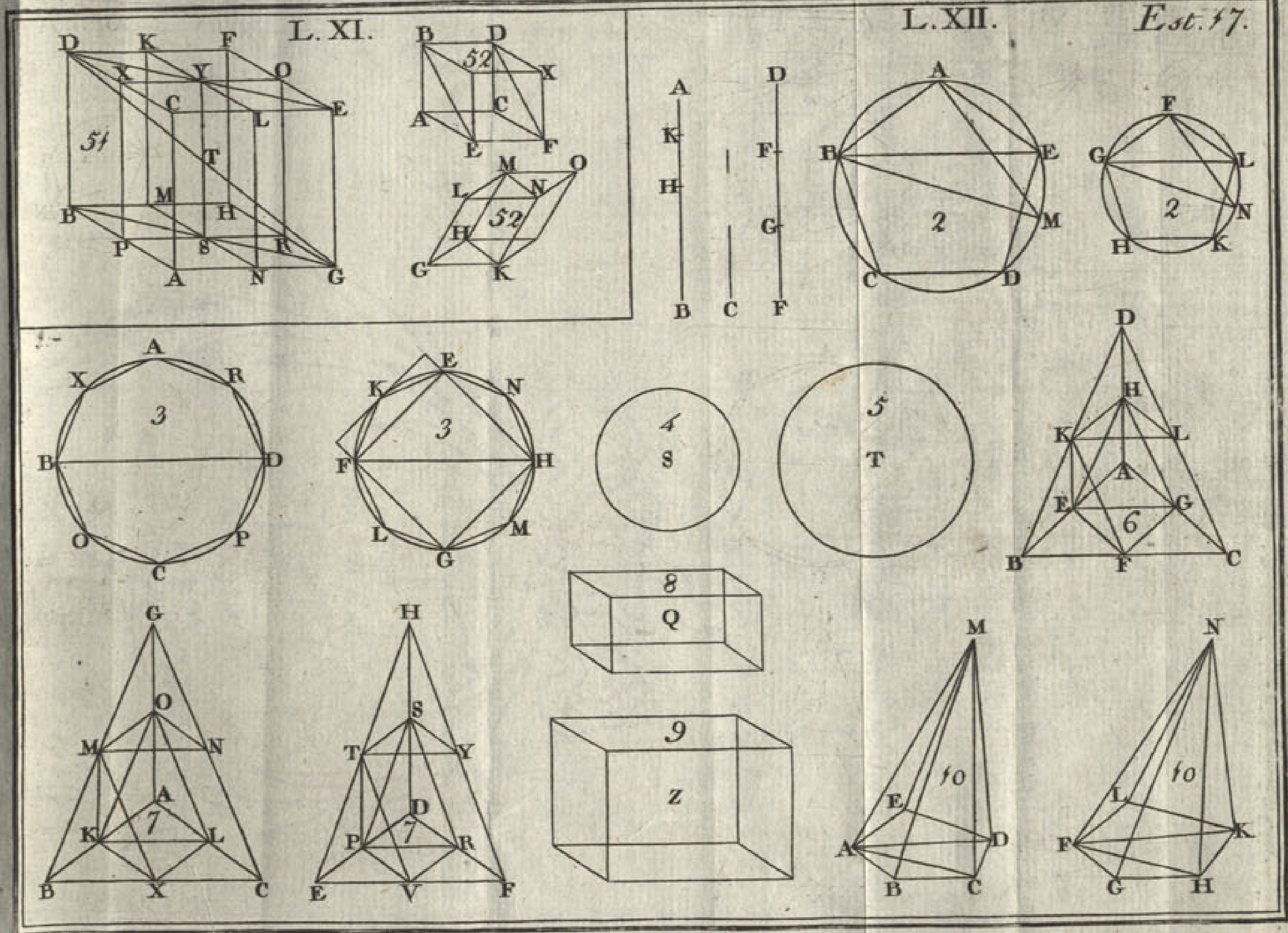
Est. 14.

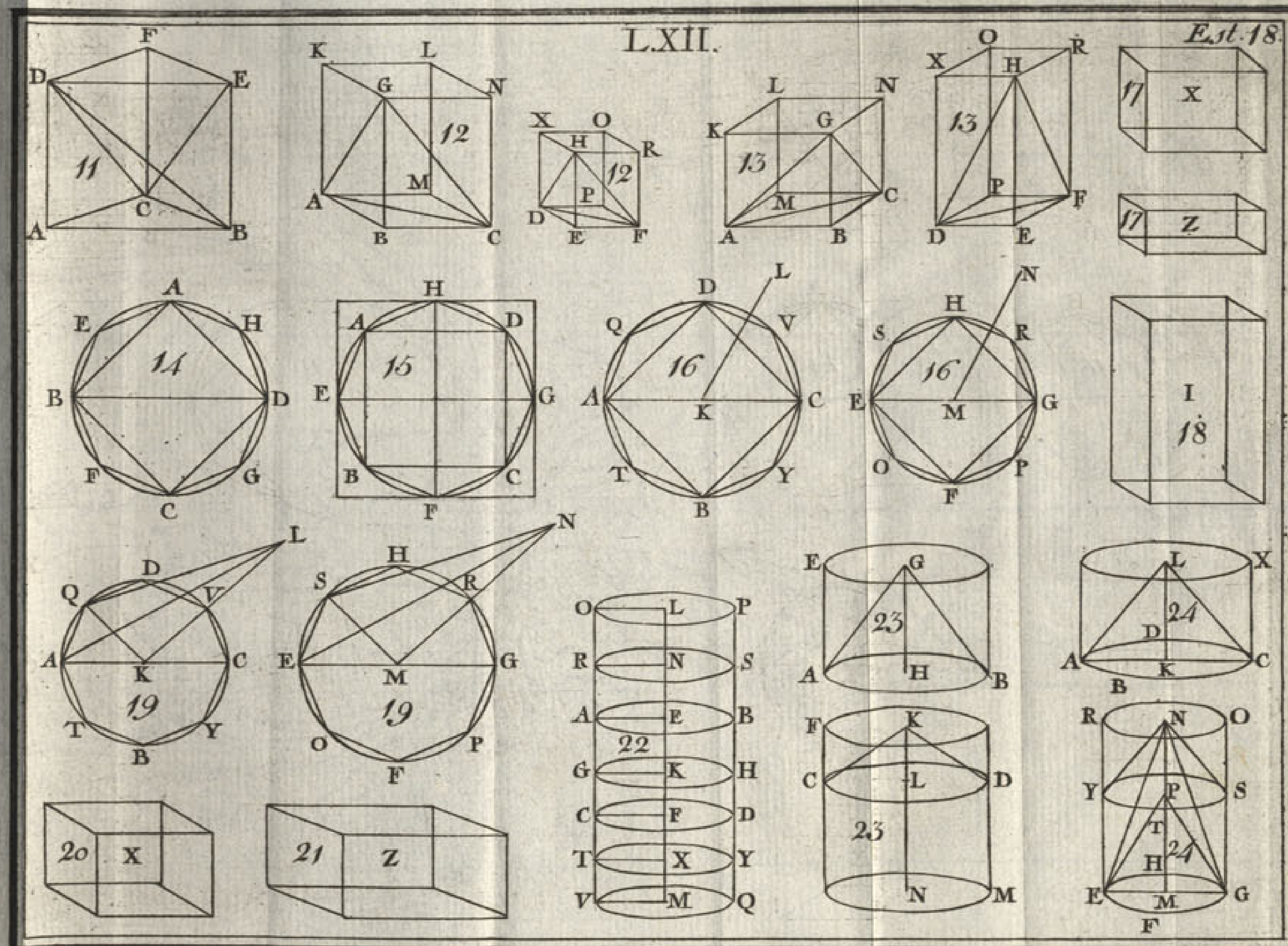


L.XI. Est. 15.

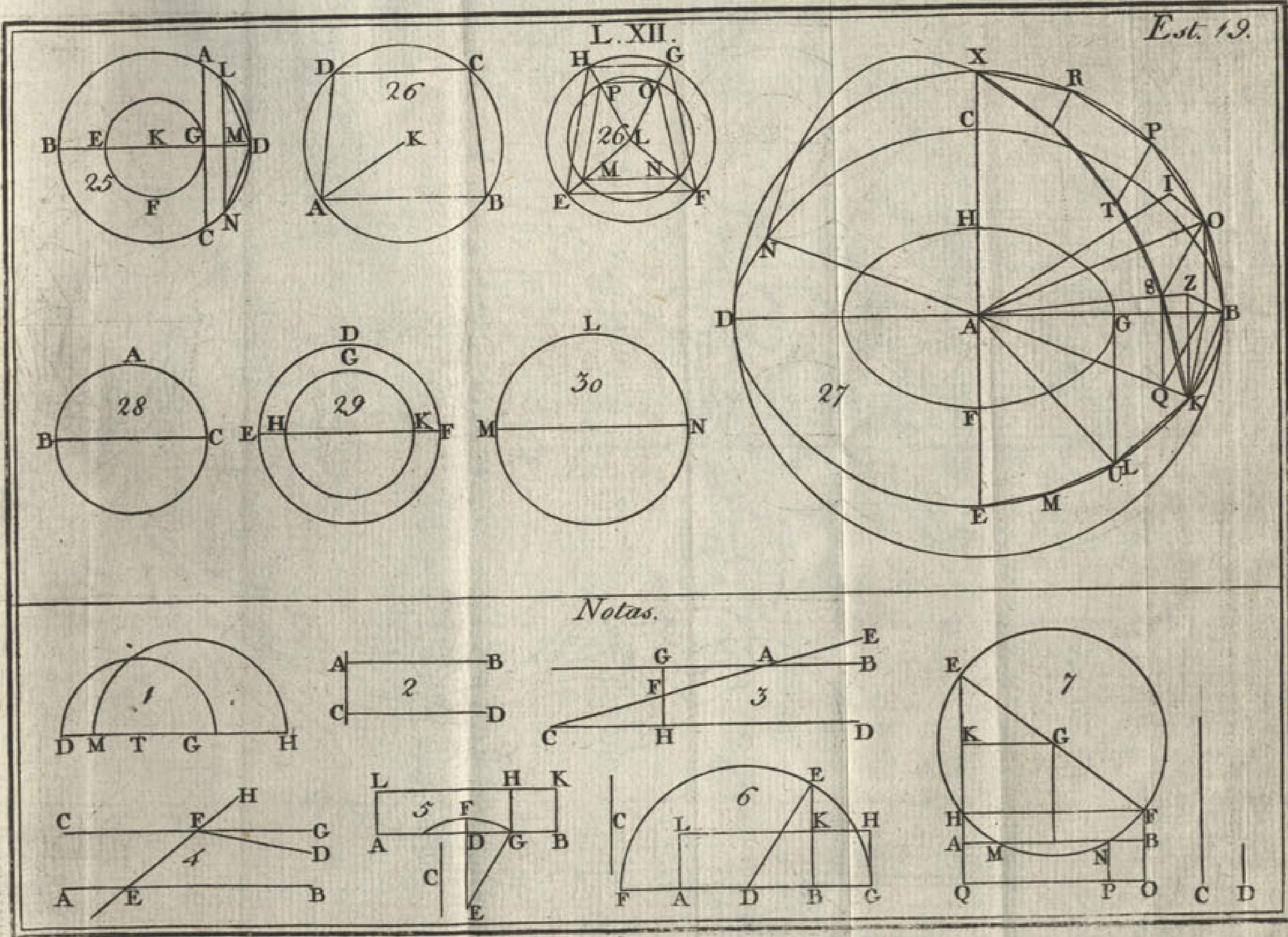


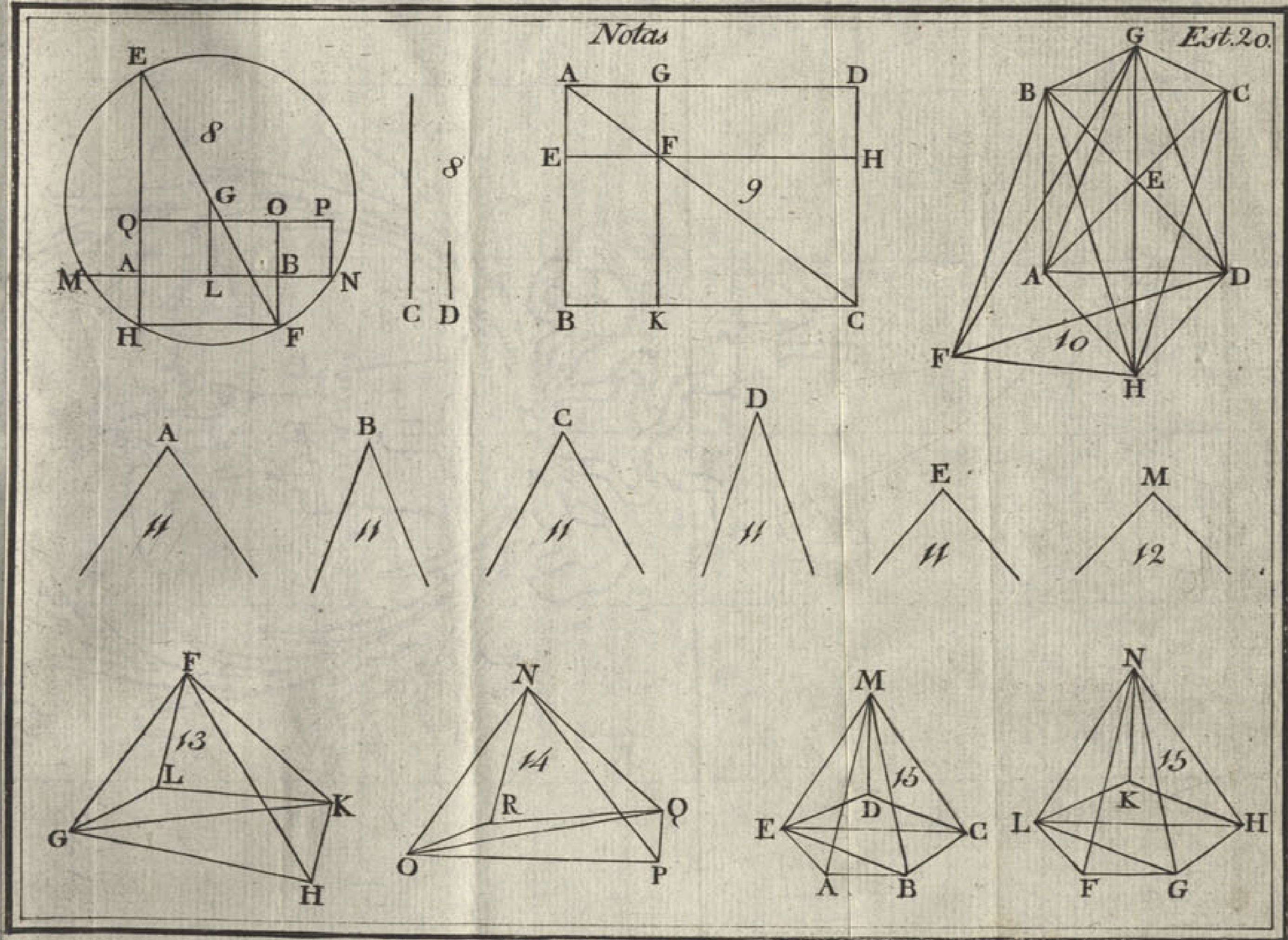

LXI.
Est. 16.


L. XI.
L. XII.
Est. 17.


L.XII.
Est. 18.
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24

Est. 19.




Notas
Est. 20.

EUCLIDES