radici adſcribemus, claſſem aliam dividendo applicabimus, quadratum notæ præcedentis 3 duobus numeris dividendum præcedentibus addemus, ſummamque duabus dextrorſum ſedibus promovebimus, ut diviſor fiat 283027107.

Diviſione tandem inſtituta, quotus erit 4 radici adſcribendus, ipſeque cum triplo notarum præcedentium efficiet 2913904, quo per 4 multiplicato, productoque ſua in ſede ſcripto, ac diviſori addito, ſũma habebitur 283028272561б, qua rurſus per eandem notam 4 multiplicata, productoque ablato a dividendo, nihil ſupereſt, quod argumento eſt radicem cubicam numeri propoſiti exactam eſſe 971304. ¶¶

157 Cum in fractionibus multiplicandis oporteat numeratores inter ſe invicem, ac denominatores ſimiliter inter ſe multiplicare (n. 106.), perſpicuum eſt, fractionis cubum habitum iri, ſi uterque ejus terminus ad cubum evehatur. Quare viciſſim, ut radix cubica a fractione extrahatur, numeratoris ac denominatoris radices extrahendæ ſunt. Sic fractionis $\frac{27}{64}$ radix cubica erit $\frac{3}{4}$, quia numeratoris 27 radix cubica eſt 3, denominatoris autem 64 eſt 4.

158 Si denominator tantum cubus perfectus fuerit, numeratoris radix quàm proxima eruetur, illique exacta denominatoris dati radix denominatoris loco ſubſcribetur.

Sic ex. gr. ſi radix cubica petatur fractionis $\frac{143}{343}$, numeratoris radicem ad centeſimas uſque inveniemus eſſe 5,22, denominatoris autem radicem accuratam 7; adeoque radix quæſita erit quàm proximè $\frac{5,22}{7}$, ſive 0,74 (n. 99.).

159 At ſi denominator cubus perfectus non fuerit, uterque fractionis terminus per ipſius denomina-

minatoris quadratum multiplicabitur (n. 88.), & operatio inſtituetur ut in priori exemplo.

Sic ex. gr. ut radicem cubicam fractionis $\frac{3}{7}$ extrahamus, utrumque ejus terminum multiplicabimus per 49, quadratum ſcilicet denominatoris 7, ipſaque reducetur ad $\frac{147}{343}$ (n. 88.), cujus radix cubica erit quàm proximè $\frac{5,27}{7}$ (n. 158.), ſive 0,75 (n. 99.).

Quum fractiones integris adhærent, integri ad ſuarum fractionum nomen revocantur, iiſque adduntur (n. 86.), & quæſtio ad exempla jam tradita redit. Poſſunt etiam fractiones, vel illæ quidem ſeorſum propoſitæ, vel integris adjunctæ, ad partes decimales transferri, antequam radix extrahatur; ſed hæc tamen reductio eò protrahenda eſt, quouſque notæ decimales habeantur triplo plures quàm in radice deſiderantur.

Sic ex. gr. ut radicem cubicam ad milleſimas uſque extrahamus a numero $7\frac{3}{11}$, hunc reducemus ad 7, 272727272, cujus radix erit 1,937.

160 Quum radix cubica a fractione decimali extrahenda proponitur, curandum eſt, ut additis quot opus fuerint cifris notæ decimales triplo plures conſtituantur, quàm in radice exiguntur. Tunc, nulla virgulæ ratione habita, radix extrahetur, in qua demum ſedes decimales virgula diſcernentur, tertia nimirum pars earum, quas in numero propoſito conſtituimus; ſi autem notæ inventæ ad id non ſufficiant, ſedium numerus adjectis ad ſiniſtram cifris omnino ſupplebitur.

Ex. gr. Ut radicem cubicam ad milleſimas uſque extrahamus a numero 6,54 ſeptem illi cifras adjiciemus, radicemque inveſtigabimus quaſi a numero integro 654000000, quam deprehendemus

mus esse 1870. Hujus vero tres ad dextram notas decimalibus partibus significandis discernemus, quia novem sedes decimales in numero dato positæ fuerunt, eritque radix quæsita 1,870, seu 1,87. Eodem modo inveniemus radicem cubicam hujus fractionis 0,0006 ad centesimas exactam esse 0,08; & ita de aliis.

161 Ea, quam Divisioni peragendæ methodum compendiariam tradidimus (n. 69. & seq.), radicis etiam cubicæ extractioni facili negotio accommodatur. Si enim radix ad unitatum sedem accurata sufficiat, numerum propositum in classes primùm distribuere oportebit, deinde tot ad dextram notæ, minus duæ, segregandæ erunt, quot sunt classes bis acceptæ. Earum vero, quæ ad sinistram reliquæ fuerint, radix per methodum hactenus traditam extrahetur, & ubi ad postremum residuum ventum fuerit, divisor illi postrema nota multatus adplicabitur, & ita deinceps; sed divisor operationis præcedentis nunquam adhibebitur, nisi totidem in eo notæ ad sinistram constantes reperiantur, quot ejus residui in quo versamur notæ sunt.

De Rationibus, Proportionibus, & Progressionibus; Regulisque inde pendentibus.

162 RAtio, quatenus ad Mathesim spectat, nihil aliud est quàm magnitudo relativa, quæ ex mutua duarum quantitatum comparatione consequitur. Hæc autem duplex est.

163 Si enim quantitatem quantitati ita conferimus, ut quantum prima alteram excedat, vel ab illa excedatur, omnino attendamus, quod ex hujus-

hujuſmodi comparatione proficiſcitur nihil eſt aliud quàm earum quantitatum differentia, eaque *Ratio Arithmetica* nominatur.

Si ex. gr. numerum 15 ad numerum 8 ita invicem comparemus, ut unam eorum differentiam 7 attendamus, ipſe numerus 7 qui ex tali comparatione proficiſcitur ratio arithmetica eſt numeri 15 ad numerum 8.

Ut duas innuamus quantitates eodem modo invicem relatas, eas puncto interjecto dirimere conſuevimus. Sic per 15.8 intelligimus nihil aliud conſiderari quàm rationem arithmeticam numeri 15 ad numerum 8.

164 Si autem quantitates inter ſe ita conferimus, ut quoties alia aliam contineat, vel in illa contineatur, omnino inſpiciamus, id quod ex comparatione conſequitur *Ratio Geometrica* appellatur. Ubi autem *Ratio* dicitur, niſi quid additum fuerit, *Geometrica* ſemper intelligitur.

Si ex. gr. numerum 12 ad numerum 3 comparando referimus, ut quoties primus alterum contineat intelligamus, quod ex hujuſmodi comparatione concluditur, eſſe nimirum 12 *quadruplum* ipſius 3, ratio geometrica eſt numeri 12 ad numerum 3.

Ut quantitates hac ſub conſideratione acceptas deſignemus, eas duobus punctis diſcernimus. Sic per 12 : 3 nihil aliud exhibetur, quàm ratio geometrica numeri 12 ad numerum 3.

165 Duarum verò quantitatum, quas arithmeticè vel geometricè invicem comparamus, ea quæ prior vel enuntiatur, vel ſcribitur *antecedens*, quæ poſterior *conſequens* nominatur. Sic in ratione 12 : 3 numerus 12 antecedens, numerus 3 conſequens eſt; ambo autem communi vocabulo rationis *termini* appellantur.

166 Ut ratio duarum quantitatum arithmetica

ea dignoſcatur, nihil aliud opus eſt quàm minorem a maiori ſubducere, & reſiduum rationem oſtendet, quantum videlicet alia aliam excedat.

167 Ut autem duarum quantitatum ratio geometrica innoteſcat, earum alia per aliam dividenda eſt, & quotus rationem oſtendet quæ inter illas intercedit.

168 Hanc deinceps ſemper æſtimabimus ex diviſione termini antecedentis per conſequentem, licet ille minor exiſtat. Sic ratio numeri 12 ad numerum 3 erit 4, numeri verò 3 ad numerum 12 erit $\frac{3}{12}$, ſive $\frac{1}{4}$.

§§ Notandum verò eſt, rationem intercedere non poſſe, niſi inter quantitates *homogeneas*; ſiquidem *heterogeneæ* neque ſe invicem excedunt, neque ſe invicem continent. Sic 12 *hexapedas* ad 3 *libras* neque arithmeticè, neque geometricè referre poſſumus. Quanvis enim numerus 12 excedat numerum 3 per differentiam 9, tamen 12 *hexapedæ* non excedunt 3 *libras* per 9 *libras*, nec per 9 *hexapedas*, nec per quidvis aliud. Et eodem modo, licet numerus 12 numerum 3 quater contineat, 12 tamen *hexapedæ* 3 *libras* nullo modo continent, quia quantitates ſunt generis omnino diverſi, in quibus nulla eſt comparatio.

Differentia terminorum in ratione arithmetica, & quotus ex diviſione antecedentis per conſequentem in ratione geometrica, rationis etiam *nomina*, *denominatores*, & *exponentes* appellantur.

Ratio autem Geometrica dividitur in *rationalem* & *irrationalem*. Rationalis eſt, quum exponens numero aliquo integro vel fracto ſignificari poteſt; irrationalis, quum exponens per numerum definiri exactè nequit, qualis eſt ratio unitatis ad radicem quadratam numeri 2. Dividitur etiam in rationem *æqualitatis* & *inæqualitatis*, prout ut termini æquales, vel inæquales ſunt; dicitur autem ratio *maioris inæqualitatis*, quum antecedens conſequente maior eſt; *minoris inæqualitatis*, quum minor.

Ratio maioris inæqualitatis apud veteres Mathematicos in quinque genera diſtribuitur (quæ ignorare non debet is, qui illorũ ſcripta intelligere velit). Sunt autem hujuſmodi: *Multiplex*, *ſuperparticularis*, *ſuperpartiens*, *Multiplex-ſuperparticularis*, *Multiplex-ſuperpartiens*; rationis autem minoris inæqualitatis totidem ſunt genera, quæ iiſdem nominibus particula *ſub* præfixa ſignificantur, *ſubmultiplex*, *ſubſuperparticularis* &c.

Ratio *multiplex* eſt, quum antecedens terminus conſequentem aliquoties exactè continet; *ſubmultiplex*, quum eodem modo in illo continetur. Prioris ſpecies ſunt ratio *dupla*, *tripla*, *quadrupla* &c, poſterioris autem ratio *ſubdupla*, *ſubtripla* &c, prout exponens poſtulaverit. Sic ratio 10 : 1 *decupla* eſt; & viciſſim ratio 1 : 10 *ſubdecupla* &c.

Superparticularis ratio eſt, quum antecedens conſequentem ſemel continet & partem inſuper ejus aliquotam, ut 3 : 2; *ſubſuperparticularis* autem, quum antecedens eodem modo in conſequente continetur, ut 2 : 3. Prioris ſpecies ſignificantur per ipſius partis aliquotæ nomen præfixa particula *ſeſqui*. Sic rationes 3 : 2, 4 : 3, 5 : 4, 6 : 5 &c eodem ordine dicuntur *ſeſquialtera*, *ſeſquitertia*, *ſeſquiquarta*, *ſeſquiquinta* &c. Poſterioris vero ſpecies iiſdem nominibus indicantur præfixa particula *ſub*. Sic rationes 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5, 5 : 6 &c dicuntur *ſubſeſquialtera*, *ſubſeſquitertia*, *ſubſeſquiquarta*, *ſubſeſquiquinta* &c.

Superpartiens eſt, quum antecedens conſequentem ſemel continet, & aliquot præterea partes ejus aliquotas, ut 5 : 3; *ſubſuperpartiens* autem, quum

quum antecedens in conſequente eodem modo continetur, ut 3 : 5. Harum ſpecies ſignificantur, adjecta partium aliquotarum denominatione, & interjectis poſt *ſuper* vocibus *bi*, *tri*, *quadri* &c, quibus declaratur, quot earum partium aliquotarum aſſumantur. Sic 5 : 3 ratio eſt *ſuperbipartiens tertias*, 8 : 5 ratio *ſupertripartiens quintas* &c. Et viciſſim 3 : 5 ratio *ſubſuperbipartiens tertias*, 5 : 8 ratio *ſubſupertripartiens quintas* &c.

Multiplex-ſuperparticularis eſt, quum antecedens aliquoties conſequentem continet, & unam inſuper partem ejus aliquotam; *ſubmultiplex-ſuperparticularis*, quum antecedens in conſequente eodem modo continetur. Prioris ſpecies ſunt *dupla-ſeſquialtera* 5 : 2, *dupla-ſeſquitertia* 7 : 3 &c, *tripla-ſeſquialtera* 7 : 2, *tripla-ſeſquitertia* 10 : 3 &c &c; poſterioris autem *ſubdupla-ſeſquialtera* 2 : 5, *ſubdupla-ſeſquitertia* 3 : 7 &c, *ſubtripla-ſeſquialtera* 2 : 7, *ſubtripla-ſeſquitertia* 3 : 10 &c &c.

Multiplex-ſuperpartiens tandem eſt, quum antecedens aliquoties conſequentem continet, & aliquot præterea ejus partes aliquotas; *ſubmultiplex-ſuperparticularis* autem, quum antecedens eodem modo in conſequente continetur. Harum ſpecies ex ſupra traditis facile denominantur. Ratio 8 : 3 eſt *dupla-ſuperbipartiens tertias* ratio 74 : 7 *decupla-ſuperquadripartiens ſeptimas* &c; & viciſſim ratio 3 : 8 eſt *ſubdupla-ſuperbipartiens tertias*, ratio 7 : 74. *ſubdecupla-ſuperquadripartiens ſeptimas* &c. ʃʃ

169 Ratio arithmetica eadem manet, quoties uterque ejus terminus una eademque quantitate vel augetur, vel minuitur; quia eorum differentia, in qua ratio conſiſtit, per id non mutatur. Sic 3.8 idem eſt ac 4.9, 5.10 &c.

170 Ratio autem geometrica eadem manet, quoties uterque ejus terminus per eandem quanti-

tita-

titatem multiplicatur, vel dividitur. Cum enim ea ratio exponatur per quotum ex divisione termini antecedentis per consequentem (n. 168.), quantitas est fractionum naturam referens (n. 97.), quæ proinde mutari nequit, quum termini per eandem quantitatem simul multiplicantur, aut dividuntur (n. 88. 89.). Sic ratio 3 : 12 eadem est atque 6 : 24, quæ oritur ex multiplicatione utriusque termini per 2; & eadem atque 1 : 4, quæ ex divisione utriusque termini per 3 proficiscitur.

171 Hæc verò proprietas usus est maximi, ut rationes ad terminos quàm fieri potest simplicissimos adducantur. Si ex. gr. expendere oporteat rationem quantitatis $6\frac{3}{4}$ ad $10\frac{2}{3}$; utroque termino ad fractionem primùm revocato, eamdem esse comperiemus ac rationem fracti $\frac{27}{4}$ ad $\frac{32}{3}$; deinde reductione facta ad communem denominatorem, eandem rursus esse inveniemus atque rationem fractionis $\frac{81}{12}$ ad $\frac{128}{12}$; & communi tandem denominatore rejecto (quod nihil aliud est, quàm utrumque terminum multiplicare per 12), ratio proposita exprimetur per rationem quam habet numerus 81 ad numerum 128.

¶¶ Quæ in ratione arithmetica mutatio contingit, quantitate data antecedenti termino addita, vel ab eodem subtracta, eadem omnino fiet si eadem quantitas a consequente subtrahatur, vel eidem addatur; siquidem quæ duæ hoc pacto rationes emergunt ita erunt constitutæ, ut altera ex alterius terminis eadem quantitate vel auctis, vel multatis constet. Sic in ratione 5.9 eadem mutatio fiet, si numerus 2 antecedenti addatur, ut transeat in 7.9, ac si idem numerus 2 a consequente subtrahatur, ut transeat in 5.7; & vicissim

cissim eodem recidet numerum 2 ab antecedente subtrahere, ut fiat 3.9, ac eundem numerum 2 consequenti addere, ut fiat ratio 5.11.

Quæ vero in ratione geometrica mutatio peragitur, ubi antecedens per quantitatem datam multiplicatur, vel dividitur, eadem haberi potest, si consequens per eandem quantitatem dividatur, vel multiplicetur; utraque enim operatione rationes oriuntur, quarum altera ex alterius terminis per eandem quantitatem multiplicatis, vel divisis constat. Sic in ratione 4 : 9 idem omnino erit antecedentem terminum dividere per 2, atque consequentem multiplicare per 2, siquidem utroque modo rationes æquales emergent 2 : 9 & 4 : 18; & similiter, idem erit antecedentem terminum multiplicare per numerum 3, atque per eundem dividere consequentem, fient enim rationes eædem 12 : 9 & 4 : 3.

172 Si quatuor quantitates tales fuerint, ut duæ priores eamdem inter se rationem habeant, quam duæ posteriores, eas *Proportionem* efficere dicimus. Quæ quidem *Proportio* arithmetica, vel geometrica erit, prout rationes arithmeticæ vel geometricæ fuerint.

Sic quatuor hæ quantitates 7, 9, 12, 14 proportionem arithmeticam exhibent, quia inter duas priores, & duas posteriores eadem differentia 2 deprehenditur. Ut hujusmodi proportionem designemus, quatuor terminos ad hunc modum scribimus 7. 9 : 12. 14, sive etiam $7 - 9 = 12 - 14$: expressionem vero utramque ita enuntiamus, *7 est ad 9, ut arithmeticè est 12 ad 14*.

Quatuor autem quantitates 3, 15, 4, 20 proportionem geometricam constituunt, quia 3 in 15 toties continetur, quoties 4 in 20. Ut autem eas ita se habere ostendamus, hac notatione utimur 3 : 15 :: 4 : 20, seu 3 : 15 = 4 : 20, quas ex-

L pres-

pressiones ita enuntiamus : 3 *est ad* 15 , *ut* 4 *ad* 20.

§§ Hinc facile intelligitur , multiplicationis cujascumque productum quartum esse terminum geometricè proportionalem ad unitatem & factores, id est , *unitatem esse ad factorum alterum* , *ut alter ad productum* ; quia productum toties factorem alterum , quoties alter unitatem continent.

Et eodem modo in divisione , *unitas est ad quotum ut divisor ad dividendum*, quia dividendus æquatur facto ex divisore & quoto.

Notandum verò est , omnes geometricas rationes esse inter se homogeneas , siquidem in quoto consistunt antecedentis per consequentem divisi, qui profecto quotus numerum abstractum perpetuò refert. Ea de causa , licet ratio inter terminos heterogeneos nulla existat , proportio nihilominus haberi potest , dummodo antecedens quisque terminus suo consequenti homogeneus statuatur. Sic 12 *hexapedæ* sunt ad 3 *hexapedas* , ut 8 *libræ* ad 2 *libras* ; quia licet *hexapedæ* ad *libram* nulla comparatio sit, ratio tamen *hexapedarum* ad *hexapedas* comparari potest cum ratione *librarum* ad *libras* ; quoties enim 3 *hexapedæ* in 12 *hexapedis* , toties 2 *libræ* in 8 *libris* continentur , nimirum *quater*. §§

173 Primus , & quartus proportionis terminus *extremi* ; secundus & tertius , *medii* nominantur.

Cum duæ in proportione rationes sint , adeoque duplex antecedens duplexque consequens, prioris termini *primus antecedens* & *primus consequens* , posterioris verò *secundus antecedens* & *secundus consequens* appellantur.

174 Quum medii proportionis termini æquales sunt, proportio dicitur *continua*.

Sic 3. 7:7. 11 proportio est arithmeticè continua, terminus autem 7 *medius arithmeticè proportionalis* inter 3 &11. Hujusmodi proportio brevitatis ergò ita scribitur $\div$ 3.7.11, signo $\div$ indicante terminum medium 7 primi consequentis & secundi antecedentis simul vices gerere.

Eodem modo 5 : 20 : : 20 : 80 proportio est geometricè continua, terminus autem 20 *medius proportionalis* inter 5 & 80. Hæc autem proportio notatur ad hunc modum $\because$ 5 : 20 : 80, signo itidem $\because$ designante terminum medium 20 bis esse accipiendum.

175 Ex his, quæ circa proportionem tam arithmeticam quàm geometricam dicta sunt hactenus, consequitur :

1º Si in proportione arithmetica uterque antecedens augeatur vel minuatur ipsa differentia, quæ in duabus rationibus habetur, prout minores vel maiores consequentibus fuerint, utrumque suo consequenti æqualem fieri; per id enim minori cujusque termino additur quod illi deest, ut maiorem æquet, vel maiori subtrahitur id per quod minorem superabat. Sic in proportione 3 . 7 : 8 . 12, si primo & tertio termino addatur differentia 4, manifestum est utrumque antecedentem suo consequenti æqualem evadere hoc modo, 7 . 7 : 12 . 12.

2º Si in proportione geometrica uterque consequens per rationum exponentem multiplicetur, unumquemque suo antecedenti æqualem evadere; per id enim consequens uterque sumitur quoties in suo antecedente continetur. Sic in proportione 12 : 3 : : 20 : 5, si 3 & 5 multiplicentur per exponentem 4, habebitur proportio 12 : 12 : : 20 : 20; & eodem modo in proportione 15 : 9 : : 45 : 27, si 9 & 27 per exponentem $\frac{15}{9}$ seu $\frac{5}{3}$ multiplicentur, proportio orietur in ratione æqualitatis 15 : 15 : : 45 : 45.

Proportionum arithmeticarum proprietates.

176 PRæcipua arithmeticarum proportionum proprietas, quæ cæteris omnibus fundamento eſt, in eo conſiſtit, ut *extremorum ſumma mediorum ſummæ æqualis* perpetuò habeatur. Sic ex. gr. in hac proportione 3. 7 : 8. 12 tam extremorum 3 & 12, quam mediorum 7 & 8 ſumma habetur 15.

Et quidem ſi duo priores termini, duo item poſteriores æquales fuerint, ut in proportione 7. 7: 12. 12, manifeſtum eſt, extremos medioſque terminos eandem ſummam conficere. Omnis autem proportio arithmetica ad eam formam revocari poteſt, ſi uterque antecedens augeatur vel minuatur ipſa differentia, quæ in proportione obtinet (n. 175. 1°.). Cum igitur ejuſmodi additio vel ſubtractio mediorum extremorumque ſummam æqualiter augeat vel minuat, adeoque æqualitatem vel inæqualitatem turbare nequeat, manifeſtum eſt, ſummas quæ per eam reductionem æquales reperiuntur, & antea æquales extitiſſe.

177 Cum in proportione continua medius terminus bis accipiatur & duorum vices gerat, ſumma extremorum erit dupla ejuſdem medii. Sic in proportione ÷ 7. 11. 15 ſumma extremorum 7 & 15 conficit 22, duplum nempe medii 11.

§§ Et viciſſim: Si quatuor quantitates fuerint, quarum extremæ & mediæ eandem ſummam reddant, proportionem arithmeticam conſtituent.

Ut enim ſummæ æquales habeantur, neceſſe eſt, ut quantum mediarum una extremarum unam excedit, tantum mediarum altera ab extremarum altera excedatur; ac proinde eadem inter primam & ſecundam atque inter tertiam & quartam diffe-

differentia erit, quod proportionem arithmeticam conſtituit.

Unde, ſi tres quantitates fuerint, quarum media æqualis ſit ſemiſummæ extremarum, proportionem arithmeticè continuam inter illas intercedere conſequitur.

Datis igitur tribus terminis, quartum arithmeticè proportionalem inveniemus, ſi tertium ſecundo addamus, & a ſumma primum ſubtrahamus; datis duobus terminis, tertium continuè proportionalem habebimus, ſi a ſecundi duplo primum auferamus; datis duobus terminis, medium arithmeticè proportionalem inveniemus, ſi datorum ſummam bifariam dividamus.

Inde etiam manifeſtum eſt, quatuor quaſcunque quantitates in proportione arithmetica ſemel conſtitutas, proportionales adhuc manere, quoties mediæ ad extremarum ſedem tranſeunt, & viciſſim; & quoties vel mediæ, vel extremæ ſedem invicem permutant. Sic ex proportione 3 . 7 : 8 . 12 proportiones ſequentes per ſolam terminorum permutationem oriuntur:

3. 7 : 8. 12
3. 8 : 7. 12
7. 3 : 12. 8
7. 12 : 3. 8
8. 3 : 12. 7
8. 12 : 3. 7
12. 7 : 8. 3
12. 8 : 7. 3

Ex eodem principio facile intelligitur, proportionem arithmeticam non turbari, ſi quantitas quælibet primo ſimul ac tertio, aut ſecundo ſimul & quarto addatur, aut ab eiſdem ſubtrahatur. Sic in proportione 3 . 7 : 8 . 12, ſi utrique ante-

antecedenti numerum quemvis v. gr. 6, & utrique conſequenti numerum quemcunque v. gr. 9, addamus, proportio retinebitur 9 . 16 : 14 . 21.

Et ſimiliter, duabus aut pluribus proportionibus arithmeticis conſtitutis, ſi earum termini addantur, aut invicem ſubtrahantur, ſummæ vel differentiæ proportionem reddent. Sic proportionibus 3 . 7 : 8 . 12 & 2 . 5 : 6 . 9 additis, proportio emergit 5. 12 : 14. 21; ſubducta verò poſteriori a priori, proportio 1 . 2 : 2 . 3 . ſſ

Proportionum Geometricarum proprietates.

178 OMnis proportio geometrica id ſibi proprium habet, ut *extremorum factum mediorum facto æquale ſit*; quemadmodum in proportione 3 : 15 :: 7 : 35 extremorum 3 & 35, ac mediorum 7 & 15 factum idem habetur 105.

Manifeſtum eſt enim extremorum, mediorumque factum idem fore, quoties antecedens quiſque terminus ſuo conſequenti æqualis fiet. Omnis autem proportio geometrica eò adduci poteſt, ut antecedentes termini conſequentibus æquales evadant (n. 175. 2°.), utroque nimirum conſequente per exponentem rationis multiplicato. Igitur, cum per hujuſmodi multiplicationem utrumque factum per eundem exponentem multiplicatum inſuper prodeat, perſpicuum eſt, & ante multiplicationem fuiſſe extremorum mediorumque facta æqualia.

In proportione igitur continua *factum extremorum medii quadrato æquale eſt*. Mediis enim terminis æqualibus poſitis, eorum factum eſt uniuſcujuſque quadratum.

Datis igitur duobus numeris, medium proportionationalem inveniemus, si ab eorum facto radicem quadratam extrahamus. Sic ex. gr. ut medium geometricum inter 4 & 9 inveniamus, a datorum producto 36 radicem quadratam 6 extrahemus, & habebitur ∺ 4 : 6 : 9.

179 Datis tribus prioribus geometricæ proportionis terminis, quartus invenietur, si secundus per tertium multiplicetur, & productum dividatur per primum. Est enim manifestum, quartum terminum habendum fuisse, si extremorum productum per primum divideretur (n. 74.); sed extremorum productum æquale est mediorum producto (n. 178.): igitur quartus terminus æquè habebitur, si mediorum productum per primum dividatur.

Sic ex. gr. si quartus terminus quæratur proportionis geometricæ, cujus tres priores sint 3 : 8 : : 12, multiplicandus erit terminus 8 per 12, & productum 96 dividendum per 3. Quotus 32 erit quartus proportionalis, ut habeatur 3 : 8 :: 12 : 32; & quidem ratio prior est $\frac{3}{8}$, posterior autem $\frac{12}{32}$, quæ etiam, utroque termino diviso per 4 (n. 89.), reducitur ad $\frac{3}{8}$.

Eadem ratiocinatione adhibita facile liquet terminum quemvis posse in universum deprehendi, ubi tres dati fuerint. *Si terminus inveniendus fuerit extremorum aliquis, productum mediorum per extremum datum; si autem mediorum alteruter, productum extremorum per medium datum dividetur.*

180 Hæc vero proprietas, quæ in factorum ex mediis & extremis æqualitate consistit, convenire nequit, nisi quatuor quantitatibus in proportione geometrica constitutis. Si enim quantitates in proportione non fuerint, utroque consequente per rationem duarum priorum multiplicato, primus

tan-

tantum antecedens ſuo conſequenti æqualis fiet; adeoque productum extremorum mediorum producto æquale eſſe non poterit.

Igitur, *ſi quatuor fuerint quantitates, quarum mediæ atque extremæ idem factum producant, proportionem ipſæ geometricam conficient.*

181 Unde conſequitur, *proportionem ſervari inter quatuor quantitates, ſi mediæ ad extremas, extremæ ad medias transferantur.*

182 Idem continget, *ſi extremæ inter ſe, aut mediæ inter ſe invicem ſedem permutent.* Utroque enim modo factum ſub mediis facto ſub extremis æquale retinebitur.

Sic ex proportione 3: 8 :: 12: 32 per ſolam terminorum permutationem proportiones ſequentes oriuntur.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
3 & : & 8 & :: & 12 & : & 32 \\
3 & : & 12 & :: & 8 & : & 32 \\
8 & : & 3 & :: & 32 & : & 12 \\
8 & : & 32 & :: & 3 & : & 12 \\
12 & : & 3 & :: & 32 & : & 8 \\
12 & : & 32 & :: & 3 & : & 8 \\
32 & : & 12 & :: & 8 & : & 3 \\
32 & : & 8 & :: & 12 & : & 3
\end{array}
$$

Quarum ſecunda a prima derivari *alternando* dicitur, tertia *invertendo*, quarta *invertendo & alternando*, quinta *alternando & invertendo*, ſexta *tranſponendo*, ſeptima *tranſponendo & invertendo*, octava denique *tranſponendo invertendo & alternando.*

183 Quoniam tertius proportionis terminus in locum ſecundi transferri poteſt, & viciſſim, *proportionem ſervari* conſequitur, *quoties uterque antecedens, vel uterque conſequens, per eandem quantitatem multiplicatur, vel dividitur.*

Facta enim terminorum permutatione, antecedencedentes qui erant priorem, consequentes vero posteriorem rationem conficient. Quare utrumque antecedentem vel utrumque consequentem per eandem quantitatem multiplicare vel dividere nihil est aliud, quàm utrumque rationis terminum per eandem quantitatem multiplicare vel dividere, quod nullam rationi mutationem affert (n. 170.).

Sic ex. gr. si proportio detur 3 : 7 :: 12 : 28, utroque antecedente diviso per 3 inferre possumus 1 : 7 :: 4 : 28; quia prior proportio *alternando* fiet 3 : 12 :: 7 : 28 (n. 182.), quæ, duobus prioris rationis terminis per 3 divisis abit in 1 : 4 :: 7 : 28; & rursus *alternando* 1 : 7 :: 4 : 28 (n. 182.).

184 *Si in proportione quacunque geometrica summa antecedentis & consequentis, vel eorum differentia, ad antecedentem vel consequentem eodem modo in utraque ratione comparetur, proportio semper habebitur.*

Nam, si summa vel differentia ad consequentem referatur, facile intelligitur antecedentem suo consequente auctum vel multatum illum semel insuper, aut semel minus quam anteà continere; cum autem isthæc comparatio eodem modo fiat in posteriori ratione, quæ juxta proportionis naturam priori æqualis est, necessario consequitur, rationes quæ inde oriuntur æquales similiter fore. Si autem ad antecedentem referantur, eidem ratiocinationi locus erit, consequentibus in antecedentium sedem mutatis, & vicissim (n. 181.).

Si ex. gr. proportio detur 12 : 3 :: 32 : 8, quatuor inde alias quæ sequuntur proportiones colligere possumus, in quibus signum + *plus*, signum vero − *minus* significat:

12 :

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

$$12 + 3 : 3 :: 32 + 8 : 8$$
$$12 + 3 : 12 :: 32 + 8 : 32$$
$$12 - 3 : 3 :: 32 - 8 : 8$$
$$12 - 3 : 12 :: 32 - 8 : 32$$

Quarum prior a proportione data per *compositionem rationis*, sive *componendo* proficisci dicitur, altera per *compositionem rationis inversam*, tertia *dividendo*, sive per *divisionem rationis*, & quarta per *divisionem inversam*, seu per *conversionem rationis*.

185 Unde colligitur, *summam vel differentiam antecedentium in omni proportione geometrica esse ad summam vel differentiam consequentium, ut antecedens quisque terminus ad suum consequentem.*

Sic ex proportione $12 : 3 :: 32 : 8$, duæ quæ sequuntur proportiones proficiscuntur:

$$12 + 32 : 3 + 8 :: 12 : 3$$
$$32 - 12 : 8 - 3 :: 12 : 3$$

Data enim proportio *alternando* convertetur in $12 : 32 :: 3 : 8$ (n. 182.); hæc autem per *compositionem ac divisionem inversam rationis* duas alias reddet $12 + 32 : 12 :: 3 + 8 : 3$, & $32 - 12 : 12 :: 8 - 3 : 3$ (n. 184.); quæ *alternando* convertentur in $12 + 32 : 3 + 8 :: 12 : 3$ & $32 - 12 : 8 - 3 :: 12 : 3$ (182.).

186 Igitur, *si plures fuerint rationes æquales, summa omnium antecedentium erit ad summam omnium consequentium, ut antecedens quisque terminus ad suum consequentem.* Exempli ergo, si rationes æquales fuerint $4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6$, erit etiam $4 + 7 + 2 : 12 + 21 + 6 :: 4 : 12 :: 7 : 21$ &c.

Sumptis enim duabus prioribus $4 : 12 :: 7 : 21$ habebitur $4 + 7 : 12 + 21 :: 4 : 12$ (n. 185.), seu (ob

4:

4: 12 :: 2: 6) 4 + 7: 12 + 21 :: 2: 6, hæc vero rursus convertetur in 4 + 7 + 2: 12 + 21 + 6 :: 2: 6 (n. 185.).

187 *Ratio composita* dicitur, quæ ex duabus pluribusve rationibus fit, earum antecedentibus inter se, & consequentibus inter se invicem multiplicatis. Si ex. gr. rationes proponantur 12: 4 & 25: 5, productum antecedentium erit 300, & consequentium 20; adeoque 300: 20 erit ratio composita ex rationibus propositis 12: 4 & 25: 5.

188 Cum ratio quævis æstimetur per quotum ex divisione antecedentis termini per consequentem, adeoque per fractionem cujus numerator antecedens, denominator vero consequens sit (n. 168), manifestum est, rationem compositam fieri per multiplicationem fractionum, quæ rationum componentium valorem exponunt (n. 106.). Sic ratio 12: 4 exponitur per $\frac{12}{4}$ sive per 3, & ratio 25: 5 per $\frac{25}{5}$ sive per 5; ratio autem ex iis composita 300: 20 exponitur per $\frac{300}{20}$, sive per 15, factum videlicet exponentium rationum 12: 4 & 25: 5.

189 Quæ ex duabus rationibus æqualibus componitur, *ratio* alterutrius *duplicata* nominatur; quæ ex tribus, *triplicata*; quæ ex quatuor, *quadruplicata* &c; quælibet autem rationum componentium erit in primo casu rationis compositæ *subduplicata*, in altero *subtriplicata* &c. Positis ex. gr. rationibus æqualibus 2 : 3 & 4 : 6, quæ ex iis componitur 8: 18 ratio erit duplicata ipsius 2: 3, vel 4 : 6; harum vero alterutra erit ratio subduplicata ipsius 8 : 18.

190 *Si duæ proportiones ordinatim multiplicentur, id est, si primus unius terminus per primum alterius, secundus per secundum &c multiplicentur, quatuor inde orta producta proportionem constituent.*

Quum

Quum enim proportiones ita multiplicantur; nihil aliud fit, quàm duas rationes æquales per duas alias similiter æquales multiplicare (n. 172.); duæ igitur quæ emergunt rationes compositæ æquales sunt; igitur quatuor producta inde orta proportionem constituunt (n. 172.).

191 Unde consequitur, *quadrata*, *cubos*, & generatim *potentias similes quatuor quantitatum proportionalium, proportionales itidem esse*; siquidem, ut potentiæ hujusmodi formentur, nihil aliud requiritur quàm ut proportio data per se ipsam semel, iterum &c multiplicetur.

192 Et Similiter, *radices quadratæ*, *cubicæ*, & generatim *radices similes quatuor quantitatum proportionalium, proportionales sunt*. Radicibus enim extractis, nihil aliud agitur, quàm a rationibus æqualibus ejusdem ordinis radices extrahere (n. 142. 157. 168.); quæ igitur rationes emergunt æquales habentur; ac proinde radices proportionales erunt (n. 172.).

Propositionum superiorum usus.

193 QUas hactenus Propositiones, seu, ut vocant, *proportionum Regulas* demonstravimus, frequentissimi per universam Mathesim usus sunt. Sed ea tantum in præsentia attingemus, quæ Arithmeticam spectant, & imprimis propositionis ejus paulo superius traditæ (n. 179.) usum indicabimus, quæ cæteris ferè omnibus fundamento est.

De regula trium *directa & simplici.*

194 REgula *trium*, quæ ob insignem usum *aurea* quoque nominatur, plures in species dividitur, quibus omnibus id propositum est,

eſt, ut ex tribus proportionis terminis datis reliquus inveniatur.

Quæ vero *regula trium directa & ſimplex* appellatur, *ſimplex* dicitur, quia enuntiatum quæſtionum, quibus accommodatur, plures haud involvit quàm quatuor quantitates, quarum tres cognitæ ſunt, quarta invenienda proponitur.

Directa etiam dicitur, quia ex quatuor quæ ibi conſiderantur quantitatibus duæ ſunt præcipuæ inter ſe homogeneæ, a quibus duæ aliæ ita determinantur, ut quemadmodum illarum prior alteram continet, aut in illa continetur, ita quæ a priore dependet eam contineat quæ ab altera dependet, aut in illa contineatur. Id autem fiet, quoties quantitas principalis & quæ ab illa pendet antecedentium ſimul, aut conſequentium ſedem occupant, quod in *regula trium inverſa* fieri nequit, ut poſtea demonſtrabitur.

Ad quartum verò proportionis terminum inveniendum, adeoque ad regulam trium directam ac ſimplicem peragendam, cum methodus ſit jam ſatis expoſita (n. 179.), id unum ſupereſt, ut regulæ uſum exemplis illuſtremus.

Exemplum I.

SI 40 operarii dato tempore 268 operis hexapedas conficiunt, 60 operarii eodem tempore quot hexapedas conficient?

Per ipſammet quæſtionis enuntiationem liquet, duplicem operariorum numerum 40 & 60 terminos principales exhibere, a quorum priore pendet opus 268 hexapedarum, & a poſteriore numerus hexapedarum quæſitus definietur. Liquet præterea hunc numerum auctum iri in ratione operariorum, ut duplus, triplus, quadruplus &c eorum numerus, duplum, triplum, quadruplum &c opus eodem

dem tempore conficiat; adeoque numerum hexapedarum quæsitum esse debere ad numerum hexapedarum datum, ut numerus operariorum 60 a quibus illæ sunt conficiendæ ad numerum operariorum 40 a quibus hæ confectæ ponuntur. Proinde termini heterogenei invicem dependentes aut antecedentium simul, aut consequentium sedem occupare debent, quod proportionem directam ostendit. Quærendus igitur erit quartus proportionalis ad tres terminos sequentes - - - - - - - - - -

$$40 : 60 :: 268 :$$

Sive, prioris rationis terminis divisis per 20 (n. 170.), ad tres sequentes - - - - - - - - - - - - - - -

$$2 : 3 :: 268^{T} :$$

Quare (n. 179.) numerum 268^{T} multiplicabimus per 3, productumque 804^{T} dividemus per 2; & quotus 402^{T} erit quartus terminus quæsitus, opus scilicet a 60 operariis conficiendum, si eodem tempore eademque diligentia elaborent, atque illi 40, qui 268^{T} perfecerunt.

Exemplum II.

NAvis vento uniformi 275 leucarum iter 3 diebus confecit. Quæritur, quot diebus 2000 leucarum cursum conficiet, si ventus cæteraque eadem maneant?

Perspicuum est, tempus eò maius requiri quò plures fuerint leucæ percurrendæ, adeoque dierum numerum quæsitum toties debere 3 dies complecti, quoties 2000 leucæ continent 275 leucas. Quærendus itaque est quartus proportionalis ad tres terminos sequentes - - - - - - - - - - - - - - - - -

275

$$275 :: 2000 :: 3^d :$$

Quare numerum 2000 per 3^d multiplicabimus, & productum fiet 6000^d; quo diviso per 275, quotus erit $21^d \frac{9}{11}$, tempus scilicet quod 2000 leucis conficiendis juxta quæstionis conditiones requiritur.

Exemplum III.

SOluto pretio $168^{lb}\ 9^f\ 4$ pro $52^T\ 4^P\ 5^p$ operis, quæritur pretium pro $77^T\ 1^P\ 8^p$ solvendum.

Ex ipsa quæstione palam est, pretium ipsis $77^T\ 1^P\ 8^p$ respondens complecti toties debere pretium ipsis $52^T\ 4^P\ 5^P$ constitutum, quoties numerus $77^T\ 1^P\ 8^p$ numerum $52^T\ 4^P\ 5^P$ continet. Igitur quærendus erit quartus proportionalis ad tres terminos sequentes - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$52^T\ 4^P\ 5^p : 77^T\ 1^P\ 8^p :: 168^{lb}\ 9^f\ 4^d :$$

Quod quidem fiet, si numerum $168^{lb}\ 9^f\ 4^d$ per $77^T\ 1^P\ 8^p$ multiplicemus, & productum per $52^T\ 4^P\ 5^p$ dividamus, juxta regulas pro hujusmodi numerorum calculo jam traditas (n. 122. 128.).

Sed multò commodius erit prioris rationis terminos ad infimæ speciei unitates, *pollices* videlicet, revocare; & quæstio eò redibit, ut quartus terminus proportionalis inveniatur ad tres sequentes -

$$3797 : 5564 :: 168^{lb}\ 9^f\ 4^d :$$

Tunc multiplicato numero $168^{lb}\ 9^f\ 4^d$ per 5564 productum habebitur $937348^{lb}\ 10^f\ 8^d$; quo diviso per 3797, quotus $246^{lb}\ 17^f\ 3^d\ \frac{2789}{3797}$ pretiū erit solvendum pro $77^T\ 1^P\ 8^p$, Si fractiones præterea terminis iisdem adhæreant, postquam ad infimæ speciei unitates revocati fuerint, ut in tradito exemplo, eorum ratio simpliciori forma donabitur, quemadmodum paulo superius ostensum est (n. 171.).

De regula trium *inversa & simplici.*

195 REgula *trium simplex & inversa*, *sive reciproca* est, quum terminus quæsitus ad homogeneum datum eam rationem habere debet, quam hujus terminus relativus habet ad relativum illius; & id quidem inversum ordinem præ se fert, quia in regula directa terminus quæsitus est ad homogeneum datum ut illius terminus relativus ad relativum hujus. Unde in regula inversa, terminis convenienter dispositis, altera quantitatum principalium cum sua relativa extremorum, altera cum sua mediorum sedem occupare debent.

Cæterum, terminis rite dispositis, juxta quæstionis naturam, operatio nihil differt a superiori, cum sit inveniendus quartus terminus proportionalis ad tres datos.

Exemplum I.

SI 30 operarii certum opus 25 diebus conficiunt, quot operarii adhibendi sunt, ut idem opus 10 diebus absolvatur?

Perspecta quæstionis natura, illico intelligimus eò plures operarios requiri quò dierum numerus minor fuerit. Quare numerus operariorum quæsitus continere debet homogeneum datum (30 operarios), quemadmodum hujus terminus relativus (25 dies) continet relativum illius (10 dies). Quærendus adeo erit quartus terminus proportionalis ad tres sequentes - - - - - - - - - - - - -

$10^{d} : 25^{d} :: 30^{oper.} :$

Et

Et ſecundo per tertium multiplicato, productoque per primum diviſo, quotus erit 75, numerus operariorum quæſitus.

Exemplum II.

SI claſſiariis cibaria fuerint ad 15 dies, ipſis vero 20 dierum iter ſuperſit, quæritur qua ratione ſit uniuſcujuſque diarium minuendum?

Sumpta unitate pro conſueto cujuſque diario, perſpicuum eſt, diarium quæſitum eo futurum unitate minus quò 20 dierum numerus ipſis 15 diebus maior eſt; adeoque inveniendum eſſe quartum terminum proportionalem ad tres ſequentes - - -

$$20^{d} : 15^{d} :: 1 :$$

Qui reperietur $\frac{15}{20}$, ſive $\frac{3}{4}$; ac proinde tres quiſque quadrantes ejus diarii accipiet, quod ferre deberet, ſi iter diebus 15 abſolvendum foret.

De Regula trium *compoſita.*

196 In Regula trium compoſita quantitatis inveniendæ ratio ad homogeneam datam per rationem ſimplicem duarum aliarum quantitatum, ut in regulis ſuperioribus non determinatur, ſed per plures rationes ſimplices, quæ, facto quæſtionis examine, ſunt componendæ (n. 187.). Iis verò ſemel compoſitis, quæſtio ad regulam trium ſimplicem redit, quemadmodum ea quæ ſubjicimus exempla ſatis oſtendent.

Exemplum. I.

SI 30 operarii 132 operis *hexapedas* 18 diebus conficiunt, 54 operarii quotnam *hexapedas* 28 diebus conficient? M Perſ-

Perſpicuum eſt, opus quæſitum pendere non modo ab operariorum, ſed etiam a dierum numero. Ut utriuſque ratio habeatur, conſiderare oportet, 30 operarios 18 diebus idem opus conficere atque decies & octies 30, ſive 540 operarios die una; & ſimiliter, 54 operarios 28 diebus tantum operis, quantum 1512 operarios die una præſtare. Quæſtio proinde huc redit: Si 540 operarii 132 operis hexapedas conficiunt, 1512 operarii quotnam hexapedas conficient? Adeoque inveniendus erit quartus terminus proportionalis ad tres ſequentes -

$$540 : 1512 :: 132^{T} :$$

Et multiplicato ſecundo per tertium, productoque diviſo per primum, numerus quæſitus prodibit $369^{T}\ 3^{P}\ 7^{P}\ 2^{l}\ \frac{2}{5}$.

Exemplum II.

Viator quidam, ſeptem quotidie horis itineri datis, intra 30 dies 230 leucas confecit. Quæritur, quotnam diebus 600 leucas conficeret, ſi 10 quotidie horas eadem velocitate incederet?

Si horarum numerus in utroque caſu idem eſſet, apertum eſt, tempus eò requiri longius, quò diſtantia maior percurrenda foret; ſed cum plures ſint in altero caſu horæ itineri dandæ minor inde dierum numerus requiretur; ac proinde quæſtio a regula trium directa ſimul atque inverſa pendet. Ad regulam verò ſimplicem revocabitur, ſi attendamus nihil aliud eſſe 30 dies incedere, 7 quotidie horis itineri datis, quàm 210 horarum iter habere. Quæſtio igitur ad hanc redit: Confecto 230 leucarum itinere intra 210 horas, quotnam horæ requiruntur,

tur; ut 600 leucæ conficiantur? Inventus autem horarum numerus huic quæstioni conveniens dividendus erit per 10, (quia nimirum viator quo de agitur 10 singulis diebus horas viæ impendit), ut quæsitus dierum numerus habeatur. Quærendus adeo est quartus terminus proportionalis ad tres sequentes -

$$230^{l} : 600^{l} :: 210^{h} :$$

quem inveniemus esse $547^{h}\ \frac{19}{23}$, eoque diviso per 10, numerus dierum quæsitus prodibit $54\ \frac{18}{23}$.

De Regula Societatis.

197 REgula hæc nomen sortita est a Societatibus mercatoriis, in quibus usum potissimum habet, quum lucrum vel damnum inter Socios distribuendum est pro cujusque sorte. Ejus autem in universum est numerum datum in partes dividere, quæ datam inter se rationem habeant. Quæ ad id peragendum methodus traditur eo principio innititur, quod paulo superius ostendimus. (n. 186.), quemadmodum ex subjecto exemplo fiet perspicuum.

Exemplum I.

SIt numerus 120 in tres partes dividendus, quarum rationes sint eædem ac numerorum datorum 4, 3, 2.

Quæstionis ipsius enuntiatum hasce duas proportiones suggerit: 4 ad 3 ut 1^{a} pars quæsita ad 2^{am}, & 4 ad 2 ut 1^{a} pars ad 3^{am}; sive (n. 182.) duas istas: 4 ad 1^{am} partem ut 3 ad 2^{am}, & 4 ad 1^{am}; ut 2 ad 3^{am}; unde tres habentur rationes æquales, ſcilicet: 4 ad 1^{am} partem quæſitam, ut 3 ad 2^{am}, ut 2 ad 3^{am}.

Oſtenſum eſt autem (n. 186.) ſummam antecedentium plurium rationum æqualium eſſe ad ſummam conſequentium, ut antecedens quiſque ad ſuum conſequentem; igitur & in exemplo propoſito ſumma partium datarum 9 erit ad ſummam quæſitarum 120, ut datarum quælibet ad quæſitam quæ illi reſpondet.

Regula igitur eo redibit, ut regula trium toties inſtituatur, quot ſunt partes inveniendæ, adhibita ubique partium datarum ſumma pro termino primo, numerus diſtribuendus pro ſecundo, pro tertio autem ea partium datarum, quæ parti inveniendæ reſpondet. Sic in quæſtione propoſita tres quæ ſequuntur proportiones adimplendæ ſunt. -

$$9 : 120 :: 4 :$$
$$9 : 120 :: 3 :$$
$$9 : 120 :: 2 :$$

Et prioris quidem quartus terminus invenietur $53\frac{1}{3}$, alterius 40, tertiæ $26\frac{2}{3}$ (n. 179.), qui ſimul efficiunt 120, & datam numerorum 4,3,2, inter ſe rationem obtinent.

¶¶ Hujus Regulæ praxis compendioſior erit, *ſi numerus diſtribuendus per ſummam datarum partium dividatur, & quotus deinde per ſingulas partes datas multiplicetur.* Siquidem in regula quaque trium inſtituenda idem eſt ſecundum per tertium multiplicare productumque dividere per primum, ac ſecundum dividere per primum quotumque multiplicare per tertium. Cum autem in Regula Societatis, primus & ſecundus terminus iidem maneant, unica diviſio regulis trium omnibus peragendis ſufficiet.

Sic

Sic in exemplo propoſito, ſi numerus diſtribuendus 120 per ſummam datarum partium 9 dividatur, quotus habebitur 13 $\frac{1}{3}$; quo ſingulatim multiplicato per partes datas 4, 3, 2, producta 53 $\frac{1}{3}$, 40, 26 $\frac{2}{3}$ partes quæſitas oſtendent. §§

Cæterum quo demum cumque pacto operatio inſtituatur, pars quæſitarum poſtrema ut directè inveniatur neceſſe non eſt; ſed inventarum ſummam a numero propoſito ſubducere ſufficiet,& reſiduum partem reliquam oſtendet.

Exemplum II.

SIt navis hoſtilis præda 800000 *librarum* pretio habita tres inter Socios diſtribuenda, quorum primus expoſuit 120000, alter 60000, & tertius 20000 *libras*. Quæritur uniuſcujuſque pars.

Agitur itaque de numero 800000^{lb} in tres partes dividendo, quæ inter ſe datam numerorum 120000, 60000, 20000, ſive (n. 170.) 12, 6, 2, rationem habeant, quia lucrum cujuſque ſorti proportionale eſſe debet. Facta igitur ſumma 20 partium datarum 12, 6, 2, quartus erit terminus inveniendus in ſubjectis proportionibus - - - - - - -

20 : 800000^{lb} : : 12 :
20 : 800000^{lb} : : 6 :
20 : 800000^{lb} : : 2 :

Et primi Socii pars invenietur 480000^{lb}, alterius 240000^{lb}, & tertii 80000^{lb}.

Exemplum III.

TRes mercatores, inita ſocietate, lucrati ſunt 12050 *libras*. Primus contulit 3000^{lb} per menſes 6, alter 4000^{lb} per menſes 5, tertius 8000^{lb} per

per menſes 9; quantum ſingulis debetur?

Quæſtionis enuntiatum ad Regulam Societatis compoſitam pertinet, quæ nullo negotio ad ſimplicem revocatur. Primi enim ſors 3000^{lb} per 6 menſes idem producit, atque ſexies 3000, ſive 18000^{lb} uno menſe; ſimiliter alterius ſors 4000^{lb} per menſes 5 idem præſtat, atque quinquies 4000, ſeu 20000^{lb} uno menſe; & tertii ſors 8000^{lb} per menſes 9 idem valet, ac novies 8000, ſeu 72000^{lb} uno menſe. Quæſtio igitur eò redit, ut lucrum 12050^{lb} tribus ſociis diſtribuatur, quorum primus ſymbolam contulit 18000^{lb}, alter 20000^{lb}, tertius 72000^{lb}; & operatione inſtituta, ut in exemplo ſuperiori, primo debebitur pars 1971^{lb} $16^{ſ}$ 4^{d} $\frac{4}{11}$, alteri 2190^{lb} $18^{ſ}$ 2^{d} $\frac{2}{11}$, & tertio 7887^{lb} $5^{ſ}$ 5^{d} $\frac{5}{11}$.

198 Ad eandem Societatis Regulam quæſtiones revocantur quamplurimæ, præparatione adhibita, quas, cum tironibus negotium faceſſere poſſint, duobus exemplis illuſtrare ſupervacuum non erit.

Si numerus detur 650 in tres partes ita diſtribuendus, ut prima ad ſecundam ſit ut 5 ad 4, ad tertiam vero ut 7 ad 3, quæſtioni ita enuntiatæ per Regulam Societatis ſatis fieri non poterit, quia nimirum rationes datæ 5 : 4 & 7 : 3 priorem terminum eundem non habent. Sed poſſunt tamen, valore immutato (n. 170.), ad id facile adduci, ſi uterque cujuſque terminus per priorem alterius multiplicetur. Sic rationis 5 : 4 terminis per 7, & rationis 7 : 3 per 5 multiplicatis, rationes reſpective æquales emergent 35 : 28, & 35 : 15; ac proinde quæſtio eò redibit, ut numerus 650 in tres partes diſtribuatur proportionales numeris 35, 28, 15, quod per regulam datam obtinebitur.

Si numerus fuiſſet in quatuor partes dividendus,

qua-

quarum prima esset ad secundam ut 5 ad 4, ad tertiam ut 9 ad 5, & ad quartam ut 7 ad 3, datæ rationes priori termino communi donarentur, utroque uniuscujusque termino multiplicato per factum ex prioribus reliquarum terminis. Sic rationes datæ abirent in 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135, & quæstio eo reduceretur, ut numerus propositus quatuor in partes distribueretur, quæ numeris 315, 252, 175, & 135 proportionales essent.

De Regula Falsi.

199 REgula *falsi*, quæ etiam *Regula Positionis* appellatur, tunc adhibetur, quum numerum quemvis loco quæsiti in quæstionem inducimus, & quod inde fit cum eo quod fieri debuisset conferimus, ut inde verum, qui quæstioni satisfaciat, numerum eliciamus. Simplex autem dicitur, quum una sufficit hypothesis; duplex, quum duæ sunt necessariæ.

Simplex ad regulam trium revocatur, in qua *prior terminus erit numerus qui ab hypothesi juxta quæstionis ductum inventus est, alter numerus datus qui inveniendus erat, & tertius ipsa hypothesis.* Quapropter in iis tantum quæstionibus adhibenda erit, in quibus numerus quæsitus est ad propositum ab illo derivatum, ut quivis alius ad eum quem similiter producit; quod profectò ex ipsius quæstionis natura dignoscendum est: sin minus, tentari regula poterit, & periculo facto innotescet, an inventus re ipsa numerus satisfaciat.

Exemplum.

QUæritur numerus, cujus partes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{7}$ simul efficiant datum numerum 808.

Ut fractionum molestiam vitemus, hypothesis

asiu

aſſumatur, cujus partes 3^a, 5^a, & 7^a integræ habeantur, quod facile fiet, numeris 3, 5, 7 invicem multiplicatis, productoque 105 in hypotheſim adhibito. Hujus verò partes juxta quæſtionis enuntiatum ſunt 35, 21, & 45, quibus additis efficitur numerus 101, cum emergere debuiſſet 808. Quærendus igitur erit juxta Regulam quartus proportionalis ad tres ſequentes.

101 : 808 :: 105 :

Prodibit autem numerus 840, qui re ipſa quæſtionem ſolvit.

Regula duplicis poſitionis latius patet. Ejus ope quæſtiones univerſæ, quæ per ſimplicem hypotheſim ſolvuntur, ſimiliter enodantur, & aliæ præterea quamplurimæ, quæ illius indaginem fugiunt. Eſt autem hujuſmodi:

Ponatur quivis numerus loco quæſiti, & quod inde fit juxta quæſtionis naturam eliciatur. Rurſus quivis alius in hypotheſim aſſumatur, & ſimiliter quod inde gignitur adnotetur. Tum fiat: *Ut differentia inter numeros qui ab utraque hypotheſi prodiere, ad differentiam inter id quod exurgere deberet & quod per hypotheſim primam habitum eſt, ita differentia hypotheſium ad quartum.* Et numerus inventus addendus vel ſubtrahendus erit primæ hypotheſi, prout ipſa minus vel plus quam par erat exhibuit, ſi tamen aucta hypotheſi quod inde fit etiam augeatur; ſecus, inventus erit addendus vel ſubtrahendus, prout prima hypotheſis plus vel minus juſto produxit. Nihil vero intereſt, quænam hypotheſis prima dicatur, proinde duplici ratione numerus quæſitus haberi poteſt.

Exemplum.

TRes lucrati ſunt 6954^{lb}. Lucrum ſecundi 54^{lb} ſuperat lucrum primi, lucrum vero tertii 78^{lb} excedit lucra primi & ſecundi ſimul. Quæritur lucrum ſingulorum.

Ponatur facilioris calculi gratia lucrum primi eſſe 1^{lb}. Erit ergo lucrum ſecundi $1^{lb} + 54^{lb}$, ſeu 55^{lb}, & lucrum tertii $1^{lb} + 55^{lb} + 78^{lb}$, id eſt, 134^{lb}, quibus additis efficitur ſumma 190^{lb}.

Rurſus ponatur lucrum primi eſſe 2^{lb}, & erit lucrum ſecundi 56^{lb}, tertii vero 136^{lb}, quorum ſumma emergit 194^{lb}.

Ex duplici itaque hypotheſi 1^{lb}, & 2^{lb}, ſummæ proficiſcuntur 190^{lb}, & 194^{lb}, cum haberi debuiſſet 6954^{lb}. Differentia inter ſummas ab hypotheſibus exhibitas eſt 4^{lb}, differentia inter ſummam a prima hypotheſi prodeuntem & veram ſummam 6954^{lb} eſt 6764^{lb}, differentia hypotheſium 1^{lb}. Quærendus adeo erit quartus proportionalis ad tres qui ſequuntur - - - - - - - - - -

$$4 : 6764 :: 1^{lb} :$$

Inventus autem 1691^{lb} addendus erit primæ hypotheſi 1^{lb}, & lucrum primi habebitur 1692^{lb}, adeoque lucrum ſecundi 1746^{lb}, & tertii 3516^{lb}, quæ ſimul efficiunt 6954^{lb}, & juxta quæſtionis legem ſe invicem ſuperant.

Manifeſtum verò eſt regulam adhiberi non poſſe niſi in quæſtionibus, ubi differentia hypotheſium fuerit differentiæ numerorum juxta conditiones datas emergentium perpetuo proportionalis, quod periculo facto tandem dignoſcitur. Quum tamen hypotheſes ſumuntur, quæ à vero parum abludant, in univerſis quæſtionibus ea proportio quam proximè habetur; quo fit ut hujus

Regulæ uſus in æquationibus altioris gradus, plurimiſque aliis per univerſam Matheſim quæſtionibus ſolvendis, inſignis evadat.

Si duæ fuiſſent quantitates inveniendæ, tribus opus eſſet poſitionibus. Primum enim pro quæſitis ponerentur quantitates quælibet, deinde manente earum prima alteram data quacunque quantitate augere vel minuere, & tandem manente altera primam viciſſim mutare neceſſe eſſet. Eodem modo oſtenditur, quatuor opus eſſe poſitionibus, ſi tres fuerint quantitates, & ita porrò. Sed implicatiſſimum eſſet, Regulas pro iis Arithmeticas ſtatuere, cum aliàs formulis Algebraicis ad id inſtitutis calculus faciliori negotio dirigi queat.

De Regula Alligationis.

200 HÆc Regula verſatur circa res diverſi pretii inter ſe miſcendas. Eſt autem duplex: Directa, quum datis quantitatibus miſcendis, earumque pretio, mixti inde conflati pretium quæritur; Inverſa, quum mixti conflandi pretium, miſcendarumque rerum numerus datur, & pars uniuſcujuſque adhibenda inquiritur.

Prior ſolvitur ad hunc modum: *Singulæ quantitates in valorem ſuum ducantur, producta omnia addantur, ſumma per numerum quantitatum dividatur, & quotus erit pretium quæſitum.*

Exemplum.

SInt conflandæ 5 ſelibræ auri puriſſimi 24 graduum, 8 aliæ 21 graduum, & 6 tandem 17 graduum. Quæritur gradus mixti.

Multiplicentur 5 ſelibræ per ſuos gradus 24, fietque productum 120, deinde 8 per 21, & 6 per 17, fientque producta 168, 102. Tribus hiſce ac productis additis, ſumma habebitur 390, qua diviſa per 19 totius ſelibras, quotus erit $20\frac{10}{19}$, gradus ſcilicet auri ex partibus datis conflati.

In Regula inverſa, ubi duæ tantum res alligandæ proponuntur ad pretium quodvis inter earum pretia conſtitutum, methodus erit hujuſmodi. Fiat: *Ut differentia inter pretia data, ad differentiam inter pretium medium & datorum minus, ita quantitas totius alligandi, ad quantitatem rei maioris pretii.* Et rurſus: *Ut differentia inter pretia data, ad differentiam inter medium & datorum maius, ita totum ad partem minoris pretii adhibendam.*

Exemplum.

Aurifex opus conflare ſibi proponit ad gradum Legis $20\frac{1}{2}$, quod 8 ſelibras pendat, auri vero duo genera adhibenda habet, quorum alterum 22 gr. alterum 17 gr. eſt. Quæritur pars utriuſque ſumenda.

Differentia ſumatur inter gradus datos 22, 17, nimirum 5, inter gradum propoſitum $20\frac{1}{2}$ & utrunque datum, nimirum $3\frac{1}{2}$ & $1\frac{1}{2}$. Deinde duplex inſtituatur proportio - - - - - - - - - - - - - - - -

$5 : 3\frac{1}{2} :: 8 ;$ five (n. 171.) $10 : 7 :: 8 :$

$5 : 1\frac{1}{2} :: 8 :$ $10 : 3 :: 8 :$

Quarum prior dabit $5\frac{3}{5}$, hoc eſt, 5 ſelibras, 4 octav. $57\frac{3}{5}$ gran. partem ſcilicet auri purioris; poſterior autem $2\frac{2}{5}$, ſive 2 ſelibras, 3 octav. $14\frac{2}{5}$ gran. partem nimirum auri poſterioris adhibendam.

Ubi autem plures quam duæ pretii diverſi res alli-

alligandæ fuerint, primum omnes, quarum pretium proposito maius, per Regulam directam inter se alligentur, sumptis uniuscujusque partibus prout libuerit, mixtique pretium inquiratur. Idem fiat circa omnes, quarum pretium fuerit proposito minus. Hoc pacto duæ tandem res alligandæ supersunt ad pretium datum, ut in exemplo postremo, inventisque partibus utriusque adhibendis, earum etiam partes innotescent, ex quibus illas coalescere ad lubitum posuimus.

Exemplum.

QUatuor sunt vini genera. Prioris sextarius 120 *regalium* pretio venditur, alterius 90, tertii 60, & quarti 50. Hæc autem ita sunt commiscenda, ut sextarius 70 *regalibus* vendi possit.

Primum misceantur duo priora, sumptis utriusque partibus ut libuerit, duæ ex. gr. mensuræ ejus cujus pretium est 120, & 3 ejus cujus pretium est 90, & mixti pretium erit 102. Duo similiter posteriora misceantur, quibusvis utriusque partibus assumptis, duæ ex. gr. mensuræ ejus quod valet 60 & 3 ejus quod valet 50, & mixti pretium habebitur 54. His peractis res eo redit, ut duo vini genera, quorum alterum valet 102, alterum 54, ad pretium datum 70 revocentur, & instituta operatione ut in exemplo superiori, reperiemus prioris adhibendam esse partem quæ sit ut $\frac{1}{3}$, posterioris autem ut $\frac{2}{3}$, sive prioris ut 1 & posterioris ut 2. At utrumque constat ex duobus aliis quorum partes posuimus ut 2 & 3; quatuor igitur vina ita erunt commiscenda, ut partes sint, ut 2, 3, 4, 6; id est, pro 2 primi sextariis, 3 alterius, 4 tertii, e 6 quarti admiscendi sunt. Eadem quæstio aliter atque aliter solveretur, prout duo quæ ad ad lubitum composita partialia alligantur, juxta diversam partium rationem assumerentur.

Regulæ aliæ ad Proportionem spectantes.

201 PLurimæ aliæ apud Arithmeticos Regulæ passim occurrunt, quæ ad Regulam trium revocantur, & perspecta quæstionum natura nullum iis, qui superiora probè intellexerint negotium afferre possunt.

202 Hujusmodi est Regula circa pecuniam fenori datam. Pacto enim fenore annuo in singula centum præstando, quid pro quaque summa præstandum sit pro ratione sortis & temporis facile colligitur.

Quæritur ex. gr. fenus summæ 449200 *regalium* 7 annis & 3 mensibus debitum, posito fenore annuo 5 in singula 100: Cum 100 lucrentur 5 singulis annis, tempore dato $7\frac{1}{4}$ lucrari debent $36\frac{1}{4}$, adeoque erit: Ut 100 ad $36\frac{1}{4}$, ita sors data 449200 ad fenus illi debitum, quod invenietur 162835.

Si detur numerus 612035 summa sortis & fenoris intra 7 annos & 3 menses in eadem ratione debiti, & quæratur sors; cum 100 eodem tempore lucrentur $36\frac{1}{4}$, erit: Ut $136\frac{1}{4}$ ad 100, ita summa data ad sortem quæsitam, quam inveniemus 449200.

Si quæratur sors, quæ intra 7 annos & 3 menses fenus 162835 producat, posita ratione sortis ad fenus annuum 100 : 5; cum 100 intra datum tempus producant $36\frac{1}{4}$, habebitur: Ut $36\frac{1}{4}$ ad 100 ita fenus datum 162835 ad sortem quæsitam 449200.

Si quæratur tempus, intra quod sors 449200 fenus

nus 162835 in ratione annua 100 : 5 lucrari debet, fiet: Ut 449200 ad 162835, ita 100 ad quartum, nimirum 36 $\frac{1}{4}$. Hic autem numerus est fenus sortis 100 intra tempus quæsitum, ac proinde dividendus erit per fenus annuum 5 ejusdem sortis, & quotus 7 $\frac{1}{4}$ tempus ostendet, 7 videlicet annos & 3 menses.

Si tandem quæratur fenus annuum in singula centum, quo pacto sors 449200 intra 7 $\frac{1}{4}$ annos fenus 162835 reddat, fiet: Ut sors 449200 ad fenus 162835, ita 100 ad quartum, 36 $\frac{1}{4}$. Hoc autem diviso per tempus 7$\frac{1}{4}$, prodibit fenus annuum 5 ad sortem 100.

Est & aliud usurarum genus, quod *anatocismum* vocant, quum fenus singulis annis debitum sorti accedit. Hoc autem, & plures aliæ circa usuras quæstiones in Algebra facilius expedientur.

203 Simili ratiocinio invenitur quantum de summa aliqua ad tempus datum solvenda deduci debeat, quum ante præstatur quam dies cedat, ut ex his quæ sequuntur exemplis liquet.

Emit quis agrum 4536 *librarum* pretio decem annis elapsis solvendo. Sed statim pecuniam numerare paratus præsentem venditori solutionem offert, facta deductione fenoris in ratione 4 $\frac{1}{2}$ ad 100. Quæritur summa præstanda.

Manifestum vero est, hic nihil aliud quæri quam sors, quæ simul cum fenore in ratione data intra decem annos efficiat 4536^{lb}. Cum igitur 100 singulis annis fenus 4 $\frac{1}{2}$ præstent, intra decem annos 45 præstent necesse est; adeoque habebitur: Ut 145 ad 100 ita 4536^{lb} ad quartum, scilicet 3128^{lb} 5^{f} 6^{d} $\frac{6}{29}$.

Obli-

Obligatur quis mercatori dato chirographo ad 2854 *libras* elapso anno præstandas, 7 vero mensibus elapsis de obligatione solvenda conveniunt, facta deductione in ratione 6 ad 100.

Cum ex pactione 100 intra annum fenus 6 lucrentur, intra septem menses $3\frac{1}{2}$ præstabunt. Igitur quod ab initio solvendum erat ut 100, elapso anno præstari deberet ut 106, & elapsis tantum 7 mensibus ut $103\frac{1}{2}$; adeoque fiet: Ut 106 ad $103\frac{1}{2}$, ita summa data 2854^{lb} ad summam quæsitam, nimirum $2786^{lb}\ 13^{s}\ 9^{d}\ \frac{15}{53}$.

Ad hunc fere modum, regula trium adhibita, aliæ quamplurimæ rei mercatoriæ quæstiones solvuntur, in quibus longiorem operam collocare necessarium non est, cum potissimum exemplis superioribus perspectis nullo negotio expediantur.

De Progressionibus Arithmeticis.

204 PRogressio *Arithmetica* est series terminorum ea lege succedentium, ut quisque præcedentem eadem perpetuo quantitate superet, aut ab eo deficiat. Hæc ex. gr. series

$$\div\ 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25 . \&c.$$

Progressio est Arithmetica, quia terminorum quisque sinistrè vicinum excedit eadem perpetuo quantitate 3. Hæc autem Progressio signo eodem $\div$ indicari consuevit, quo Proportio arithmeticè continua (n. 174.), quia re ipsa nihil est aliud, quam ea ipsa Proportio ultra tres terminos promota.

Progressio *crescens*, *ascendens*, vel *divergens* dicitur, quum termini evadunt perpetuo maiores, *decrescens*, *descendens*, vel *convergens*, quum minores. Quoniam vero utraque eisdem proprietatibus gaudent, mutata additione in subtractionem,

&

& viciſſim, Progreſſionem aſcendentem deinceps conſiderabimus; quæ enim de aſcendente dicta fuerint deſcendenti nullo negotio accommodari poſſunt.

205 Ex ipſa igitur Progreſſionis notione facile liquet, dato termino primo & communi omnium differentia, quæ & Progreſſionis *ratio* audit, reliquos omnes haberi poſſe, per additionem perpetuam ejuſdem rationis. Terminus enim ſecundus ex primo ſimul & ratione; tertius ex ſecundo & eadem ratione, ſeu ex primo & rationis duplo; quartus ex tertio itidem ac ratione conſtat, ſive ex primo & rationis triplo, & ita deinceps.

206 Unde, in univerſum, *terminus quicunque Progreſſionis Arithmeticæ conſtare intelligitur ex primo & ratione toties ſumpta quot ante illum ſunt termini.*

207 Si igitur prior terminus fuerit cifra, terminus quiſque æquabitur facto ex ratione multiplicata per numerum terminorum, quotquot ante illum ſunt.

208 Hujuſce principii ope terminum quemcunque Progreſſionis invenire poſſumus, quin reliquos ſupputemus, quot illi cunque præire debeant.

Quæratur ex. gr. quiſnam ſit futurus terminus ordine centeſimus in hac Progreſſione ÷ 4.9. 14.19. &c. Quoniam terminus quæſitus eſt loco centeſimus, 99 erunt ante illum termini. Conſtabit igitur ex primo termino 4 & ratione 5 per 99 multiplicata, adeoque erit 499.

209 Inde etiam intelligitur, quo pacto duo quicunque numeri, interjectis quotcunque aliis, committi debeant, ita ut omnes Progreſſionem Arithmeticam conſtituant, ſeu, qua ratione datus mediorum arithmeticorum numerus inter duos quoſcunque numeros inſerendus ſit. Id autem fiet, *ſi datorum minus a maiore ſubducatur, & reſiduum per nume-*

rum

rum mediorum unitate auctum dividatur. Quotus enim erit ratio Progreſſionis, qua inventa termini omnes medii facili negotio dignoſcuntur (n. 205.).

Etenim datorum maius tanquam poſtremum, minus tanquam primum Progreſſionis terminum habere licet. Poſtremus autem conſtat ex primo & ratione toties ſumpta, quot ante illum ſunt termini (n. 205.). Igitur, ſi a datorum maiore minus ſubducatur, reſiduum erit ratio ducta in numerum terminorum, qui ante poſtremum ſunt. Numerus autem terminorum poſtremo præeuntium unitate excedit numerum mediorum. Igitur, ſi reſiduum per numerum mediorum unitate auctum dividatur, quotus erit ratio Progreſſionis (n. 74.).

Si ex. gr. inter 4 & 11 octo ſint media arithmetica interſerenda, 4 ab 11 ſubducemus, & reſiduum 7 per 9 (numerum ſcilicet mediorum unitate auctum) dividemus, & quotus $\frac{7}{9}$ erit Progreſſionis ratio; adeoque habebitur $\div 4 . 4\frac{7}{9} . 5\frac{5}{9} . 6\frac{3}{9} . 7\frac{1}{9} . 7\frac{8}{9} . 8\frac{6}{9} . 9\frac{4}{9} . 10\frac{2}{9} . 11.$

Eodem modo, ſi inter 0 & 1 novem fuerint media inſerenda, ſubtracto datorum minore a maiori reſiduum erit 1, quo diviſo per 9 + 1, ſive per 10, erit Progreſſionis ratio $\frac{1}{10}$, ſive 0,1; proindeque Progreſſio erit hujuſmodi $\div$ 0. 0,1 . 0,2. 0,3 . 0,4 . 0,5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1.

210 Unde apertum eſt, inter duos numeros, quorum differentia ſit quantum libuerit exigua, numerum quemvis mediorum arithmeticorum utcunque magnum inſeri poſſe.

Plura de Progreſſionibus Arithmeticis in præſentia non ſuperaddimus, de quibus hîc ſermonem tantum injecimus, ut ea intelligantur quæ de Logarithmis paulo inferius tradituri ſumus. Reliquas earum proprietates quæ plurimæ habentur, & plurimis quæstionibus solvendis usum haud infrequentem vindicare consueverunt, commodior aliàs dabitur persequendi locus.

De Progressionibus Geometricis.

211 *Progressio Geometrica* est series terminorum ea lege sibi perpetuo succedentium, ut proximum quisque æque contineat, aut in illo contineatur. Hæc ex. gr. series.

∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 : &c.

Progressio Geometrica est, quia terminorum quisque sinistre vicinum eadem ratione continet, nimirum bis. Numerus autem exponens quoties terminus quivis proxime præcedentem contineat, ut in exemplo adducto numerus 2, Progressionis *denominator*, sive *ratio* appellatur. Huic Progressioni præfigi solet signum ∺, ut in Proportione Geometrica continua, quia nimirum Progressio nihil est aliud, quam ea ipsa Proportio tres ultra terminos promota.

Progressio Geometrica *crescens*, *ascendens*, ac *divergens* dicitur, quum termini evadunt perpetuo maiores; *decrescens*, *descendens*, & *convergens*, quum minores. De utraque seorsum præcipere opus non est, cum iisdem proprietatibus gaudeant, mutata tantum divisione in multiplicationem, & vicissim, præterquam quod inverso terminorum ordine altera in alteram transit. Ea de causa Progressionem crescentem deinceps tantummodo considerabimus: & quæ circa illam dicta fuerint, de Progressione decrescente intelligenda relinquemus.

212 Perspecta Progressionis notione consequitur, ex termino primo & ratione reliquos omnes prodire. Secundus enim fiet primo in rationem ducto; tertius secundo itidem per rationem multiplicato, seu, quod eodem redit, primo per qua-

quadratum rationis multiplicato; quartus, tertio similiter in rationem ducto, seu primo per cubum rationis multiplicato; & ita ulterius.

Sic in Progressione superiori terminus secundus 6 fit, primo 3 per rationem 2 multiplicato; tertius 12, secundo 6 per rationem 2, vel primo 3 per quadratum rationis 4 similiter multiplicato; quartus 24, tertio 12 in rationem 2, vel primo 3 in cubum rationis 8 ducto; & ita deinceps.

213 Quare in universum, *terminus quicunque in Progressione Geometrica habebitur, si primus multiplicetur per rationem evectam ad potentiam, cujus exponens sit numerus terminorum qui ante illum sunt.*

Si prior terminus fuerit 1, quicunque alius erit ipsa ratio ad eam potentiam evecta, quæ numero terminorum præeuntium respondeat, siquidem primus terminus, utpote unitas, productum multiplicando non auget.

214 Hinc terminum quemvis Progressionis Geometricæ data sede extiturum invenire licet, præcedentibus haud supputatis, quod est sæpe commodissimum.

Quæratur ex. gr. terminus duodecimus hujus Progressionis ∺ 3 : 6 : 12 : 24 &c. Cum ante duodecimum termini sint undecim, terminus quæsitus erit factum ex primo 3 & potentia undecima rationis 2. Hæc autem potentia habetur per continuam ipsius 2 multiplicationem, ita ut in producto tandem undecies factor deprehendatur. Sed compendii gratia primùm rationem 2 ad cubum 8 evehemus, deinde cubum 8 ad cubum 512, quæ erit potentia nona ipsius 2, & tandem multiplicato numero 512 per quadratum rationis 4, erit factum 2048 potentia undecima ipsius 2. Hac vero multiplicata per primum Progressionis terminum 3, productum erit terminus duodecimus 6144, qui requirebatur.

215 Inde etiam patet methodus numerum quemvis mediorum inter data extrema inserendi. Quod quidem fiet, si *extremorum maius per minus dividatur, & a quoto radix extrahatur ejus gradus, qui per numerum mediorum unitate auctum indicatur* Hujusmodi enim radix erit ratio Progressionis, qua semel inventa, termini quæsiti methodo supra tradita innotescent (n. 212.).

Siquidem extremorum maius æquabitur facto ex minore & ratione ad eam potestatem evecta, quæ per numerum terminorum præter postremum, sive per numerum mediorum unitate auctum indicatur (n. 213.). Si igitur extremorum maius per minus dividatur, quotus erit ratio Progressionis ad eam potestatem evecta, quæ per mediorum numerum unitate auctum exponitur (n. 74.). Proinde extracta radice ejusdem gradus, ratio Progressionis habebitur.

Sint ex. gr. inter 2, & 2048 novem termini in Progressione Geometrica medii interserendi. Primùm, numerus 2048 per 2 dividendus erit, & quotus prodibit 1024. Deinde hujus radix decima extrahenda (pag. 147.), quam inveniemus 2, eaque erit ratio Progressionis, qua inventa, termini quæsiti innotescent, ut habeatur $\div$ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Si quatuor forent media geometrica inter 6 & 48 inserenda, diviso postremo termino 48 per primum 6, quotus haberetur 8, cujus radix quinta invenienda esset. At cum numeri 8 radix ejusmodi accurata haberi nequeat, id argumento est, quatuor media geometrica inter 6, & 48 per numeros assignari exacte non posse. Cum tamen ad eam radicem accedere liceat quam proximè libuerit, media etiam quæsita, quam vero proxima opus fuerit, exhibere licebit. Sic radix quinta numeri 8 invenietur quam proxime 1,515767 (pag.

(pag. 148.), adeoque si media quæsita ad quartam usque decimalium sedem exprimere sufficiat, habebitur $\div\!\!\div$ 6 : 9,0943 : 13,7844 : 20,8932 : 31,6682 : 48.

Quibus perspectis manifestum fit, media geometrica quotcunque, aut exacta, aut vero quam proxime libuerit appropinquantia, inter datos numeros, utut fuerint inter se vicini, interjici posse. Et hæc sunt, quæ in præsentia de Progressionibus Geometricis præfari oportuit, ut gradum ad Logarithmos faciamus, cætera in Algebræ Elementis plenius tradituri.

De Logarithmis.

216 LOgarithmi sunt numeri in Progressione Arithmetica, qui ad numeros totidem in Progressione Geometrica excurrentes pro ratione sedium referuntur. Positis ex. gr. duabus Progressionibus -

$\div$ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17 &c.

$\div\!\!\div$ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 &c.

terminus quisque superioris Logarithmus dicitur termini inferioris, qui illi in eadem sede respondet; 3 nempe Logarithmus est numeri 2; 5 Logarithmus numeri 4 &c.

217 Numerus igitur quivis plures in infinitum habere Logarithmos potest, prout eidem Progressioni Geometricæ, in qua est, alias atque alias Progressiones Arithmeticas respondere pro lubitu posuerimus.

Quia tamen Logarithmorum usum potissimum spectamus, in diversis, quæ inter se Progressiones Arithmeticæ & Geometricæ componi possunt, contemplandis haud immorabimur, sed statim ad eas quæ in Tabulis usu receptis adhibitæ sunt veniemus.

218 Adhibita autem fuit Progressio Arithmetica

tica numerorum naturalium, & Geometrica in ratione decupla perpetuo excurrens, quæ scilicet ipsi numerationis legi convenientiores visæ sunt. Proinde duæ quæ sequuntur Progressiones Logarithmis vulgaribus fundamento sunt - - - -

÷ 0. 1 . 2 . 3 . 4 . 5 : 6 &c.

∺ 1 :10: 100 : 1000 : 10000: 100000: 1000000 &c.

219 Quare in hoc Logarithmorum systemate facillimum est Logarithmum nosse eorum numerorum, qui per unitatem addito quocunque cifrarum numero exprimuntur; totidem enim Logarithmus unitates, quot numerus post 1 cifras, continebit.

Quod autem spectat ad numeros intermedios assumptæ Progressionis decuplæ, ex principiis hactenus traditis methodum ostendere non possumus, qua eorum Logarithmi fuerunt re ipsa inventi. Sed viam tamen indicabimus, ipsi quidem supputationi ineundæ incommodam, sed Logarithmorum genesi ac naturæ concipiendæ aptissimam, qua utique idem opus conficeretur, si nulla præter ea, quæ ab Arithmetica suppeditantur principia, adfuissent.

220 Ut numeri cujusvis ex. gr. 3, Logarithmum deprehendamus, ex ipsa Logarithmorum notione constat, numerum propositum in Progressione Geometrica assumpta ∺ 1 : 10 : 100 : &c. locum esse habiturum. Si igitur inter 1, & 10 permagnum mediorum geometricorum numerum inseramus (n. 215.), alterutrum eveniat necesse est, ut vel eorum aliquod in numerum 3 accurate incidat, vel certe, ut duo se invicem consequantur, quorum alterum minus, alterum proxime maius illo sit, differentia eò minore existente quo mediorum numerus maior fuerit; proindeque eorum alterum, aucto quantum opus fuerit mediorum numero,

ro, pro eodem numero 3 haberi tandem quam proximè poterit.

Jam si inter 0 & 1 tot media arithmetica inserantur (n. 209.), quot inter 1 & 10 geometrica fuere interjecta, terminus hujusce Progressionis eadem sede respondens termino illius, qui vel 3 sit, vel numerus a 3 quam minime discrepans, Logarithmus erit ipsius 3; & ita de aliis.

221 Quare, insertis 1000000 mediis arithmeticis inter 0 & 1, totidemque inter 1 & 2, inter 2 & 3 &c, concipiendum est, 1000000 itidem media geometrica inter 1 & 10, inter 10 & 100, inter 100 & 1000 &c. interposita fuisse; Dispositis vero harum Progressionum terminis, quæsitos fuisse in Serie Geometrica numeros 1, 2, 3, 4, 5 &c, aut his proxime æquales, & in Arithmetica notatos fuisse numeros, qui illis singulis loco responderent, adeoque eorum Logarithmi forent; Inde vero, scriptis tantum numeris 1, 2, 3, 4, 5 &c. in columna verticali, ut in Tabula sequenti, uniuscujusque Logarithmum inventum e regione positum fuisse. Et huc redit Logarithmorum vulgarium genesis, quanquam, ut paulo superius indicavimus, ad eorum supputationem aliquanto expeditiori ratione ventum fuerit.

TABU-

TABULA
LOGARITHMORUM
Numerorum naturalium ab 1 ad 200.

Num.	Logarith.	Num.	Logarith.	Num.	Logarith.
0	Inf.negat.	33	1,518514	66	1,819544
1	0,000000	34	1,531479	67	1,826075
2	0,301030	35	1,544068	68	1,832509
3	0,477121	36	1,556303	69	1,838849
4	0,602060	37	1,568202	70	1,845098
5	0,698970	38	1,579784	71	1,851258
6	0,778151	39	1,591065	72	1,857332
7	0,845098	40	1,602060	73	1,863323
8	0,903090	41	1,612784	74	1,869232
9	0,954243	42	1,623249	75	1,875061
10	1,000000	43	1,633468	76	1,880814
11	1,041393	44	1,643453	77	1,886491
12	1,079181	45	1,653213	78	1,892095
13	1,113943	46	1,662758	79	1,897627
14	1,146128	47	1,672098	80	1,903090
15	1,176091	48	1,681241	81	1,908485
16	1,204120	49	1,690196	82	1,913814
17	1,230449	50	1,698970	83	1,919078
18	1,255273	51	1,707570	84	1,924279
19	1,278754	52	1,716003	85	1,929419
20	1,301030	53	1,724276	86	1,934498
21	1,322219	54	1,732394	87	1,939519
22	1,342423	55	1,740363	88	1,944483
23	1,361728	56	1,748188	89	1,949390
24	1,380211	57	1,755875	90	1,954243
25	1,397940	58	1,763428	91	1,959041
26	1,414973	59	1,770852	92	1,963788
27	1,431364	60	1,778151	93	1,968483
28	1,447158	61	1,785330	94	1,973128
29	1,462398	62	1,792392	95	1,977724
30	1,477121	63	1,799341	96	1,982271
31	1,491362	64	1,806180	97	1,986772
32	1,505150	65	1,812913	98	1,991226

Num.	*Logarith.*	*Num.*	*Logarith.*	*Num.*	*Logarith.*
99	1,995635	133	2,123852	167	2,222716
100	2,000000	134	2,127105	168	2,225309
101	2,004321	135	2,130334	169	2,227887
102	2,008600	136	2,133539	170	2,230449
103	2,012837	137	2,136721	171	2,232996
104	2,017033	138	2,139879	172	2,235528
105	2,021189	139	2,143015	173	2,238046
106	2,025306	140	2,146128	174	2,240549
107	2,029384	141	2,149219	175	2,243038
108	2,033424	142	2,152288	176	2,245513
109	2,037426	143	2,155336	177	2,247973
110	2,041393	144	2,158362	178	2,250420
111	2,045323	145	2,161368	179	2,252853
112	2,049218	146	2,164353	180	2,255273
113	2,053078	147	2,167317	181	2,257679
114	2,056905	148	2,170262	182	2,260071
115	2,060698	149	2,173186	183	2,262451
116	2,064458	150	2,176091	184	2,264818
117	2,068186	151	2,178977	185	2,267172
118	2,071882	152	2,181844	186	2,269513
119	2,075547	153	2,184691	187	2,271842
120	2,079181	154	2,187521	188	2,274158
121	2,082785	155	2,190332	189	2,276462
122	2,086360	156	2,193125	190	2,278754
123	2,089905	157	2,195900	191	2,281033
124	2,093422	158	2,198657	192	2,283301
125	2,096910	159	2,201397	193	2,285557
126	2,100371	160	2,204120	194	2,287802
127	2,103804	161	2,206826	195	2,290035
128	2,107210	162	2,209515	196	2,292256
129	2,110590	163	2,212188	197	2,294466
130	2,113943	164	2,214844	198	2,296665
131	2,117271	165	2,217484	199	2,298853
132	2,120574	166	2,220108	200	2,301030

222 Prior in ſingulis Logarithmis nota ad ſiniſtram *Characteriſtica* appellatur, quia ſcilicet, ad quam ſpectet decadam numerus Logarithmo reſpondens apertè deſignat. Si ex. gr. Logarithmus characteriſticam habuerit 3, argumento eſt, numerum illi reſpondentem ad *millia* pertinere. Siquidem Logarithmus numeri 1000 eſt 3, & numeri 10000 eſt 4, adeoque numerus omnis inter 1000 & 10000 Logarithmum habebit 3 cum fractione. Characteriſtica igitur erit 3, & reliquæ notæ decimales fractionem illam oſtendent. Verbo: *Numerus tot notis plus una conſtabit, quot in characteriſtica Logarithmi unitates fuerint.*

Logarithmi autem in Tabella ſuperiori, quam exempli loco adjunximus, ſex tantummodo notas poſt characteriſticam decimales habent, in Tabulis vero uſu receptis ſeptem. Sed id diſcrimen exemplis paulo poſt adducendis nihil obeſt.

Logarithmorum Proprietates.

223 CUm de Logarithmis aliis quam vulgaribus quæſtio in præſentia non ſit, manifeſtum eſt, eas quas tradituri ſumus proprietates, ad Progreſſiones Geometricas præcipuè referri, quæ ab 1; Arithmeticas vero, quæ a 0 initium ſumunt.

Jam vero ſint Progreſſiones quæcunque, quæ iis conditionibus ſubjiciantur, duæ ex. gr. quæ ſequuntur -

$\div$ 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32 &c.

$\because$ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561 &c.

Ex ipſa Progreſſionum indole, & terminorum eiſdem ſedibus ſibi mutuo reſpondentium comparatione conſtat, rationem toties ſumptam terminum quemvis prioris efficere, quoties ratio alterius in termino reſpondente factor exiſtit. Etenim

nim ratio Progressionis Arithmeticæ toties continetur, ratio uero Progressionis Geometricæ toties factor est in termino quocunque, quot ante illum sunt termini (n. 207. 212.); sed termini sibi respondentes in utraque Progressione eodem terminorum numero præeunte perpetuò gradiuntur: igitur &c.

Sic ex. gr. in termino prioris 28 ratio 4 septies continetur, & in respondente posterioris termino 2187 ratio 3 septies similiter factoris vices gerit; & ita de aliis.

224 Hinc, *si duo quicunque Progressionis Arithmeticæ termini addantur, & qui illis in Geometrica respondent invicem multiplicentur, horum factum & illorum summa termini erunt in iisdem Progressionibus sibi mutuo respondentes.*

Nam summa rationem Progressionis Arithmeticæ toties sumptam manifesto complectitur, quoties in terminis additis simul continetur; factum vero rationem Progressionis Geometricæ toties factorem habet, quoties in terminis invicem multiplicatis simul existit. At terminus quisque Progressionis Arithmeticæ rationem toties complectitur, quoties terminus in Geometrica illi respondens rationem factoris loco habet. Summa igitur toties rationem in Arithmetica Progressione contineat necesse est, quoties factum in Geometrica rationem sibi in factorem vindicat; ac proinde termini erunt in iisdem Progressionibus sibi mutuo respondentes.

225 Duobus igitur quibuscunque Progressionis Arithmeticæ terminis additis, terminorum illis in Geometrica respondentium factum inveniemus, si Progressiones ad id fuerint calculo semel facto satis promotæ.

Si ex. gr. terminos addamus 8 & 24, quibus respondent 9 & 729, fiet summa 32, cui in Progresgreſſione Geometrica reſpondebit numerus 6561; quem proinde cognoſcemus factum eſſe ex numeris 9 & 729 invicem multiplicatis, ut re ipſa eſt.

226 Hæc vero cum ad univerſa Progreſſionum ſyſtemata pertineant, quarum Arithmetica a 0, & Geometrica ab 1 incipiat, cumque numeri naturales 1, 2, 3, &c. in Tabella ſuperiori fuerint a Geometrica Progreſſione excerpti, quæ ab 1 initium ſumit, eorum vero Logarithmi a Progreſſione Arithmetica, quæ a 0 exorditur, habita ſedium ratione in quibus ſibi invicem reſpondebant; manifeſtum eſt, quod *ſi duorum quorumcunque numerorum Logarithmi addantur, ſumma erit Logarithmus producti.* Atque hinc Logarithmorum uſus, iſque longioribus operationibus abſolvendis, ut per univerſam Matheſim, maxime utilis, profluxit:

Logarithmorum uſus.

227 Ut igitur multiplicatio Logarithmorum ope inſtituatur, nihil aliud opus eſt, *quam factorum Logarithmos addere, & ſummam habere pro Logarithmo producti*; qua proinde quæſita inter Tabularum Logarithmos, productum erit numerus illi reſpondens.

Sit ex. gr. multiplicandus numerus 13 per 14. In Tabula ſuperiori inveniemus Logarithmos utriuſque factoris, videlicet:

Log. num. 13	- - - - - - - -	1,113943
Log. num. 14	- - - - - - - -	1,146128
Et ſumma	- - - - - - - - - - - - - - -	2,260071 erit

Logarithmus producti, quod proinde inveniemus eſſe 182, numerus ſcilicet, qui illi Logarithmo in Tabula reſpondet.

228 Hinc ſponte fluit, numerum quemvis ad quadratum Logarithmorum ope evectum iri, ſi ejus Logarithmus duplicetur. Cum enim numerus ad quadratum evehendus per ſe ipſum multiplicari debeat, ejus Logarithmus ſibi ipſi addendus, ſive duplicandus erit. Eodem modo intelligitur, Logarithmum triplicari oportere, quoties numerus quicunque fuerit ad cubicam dignitatem evehendus.

229 Et in univerſum: *Quo numerus quicunque ad potentiam ſeu dignitatem quamvis promoveatur, ejus Logarithmus erit toties ſumendus, quotus eſt ipſius potentiæ gradus, ſive* (quod eodem redit) *per exponentem ejuſdem potentiæ multiplicandus*; & Logarithmus prodibit, qui in Tabula potentiam quæſitam indicabit.

Sic ex. gr. ſi quæratur ſeptima poteſtas numeri 2, hujus Logarithmus 0,301030 per 7 multiplicabitur, fietque Logarithmus 2,107210, cui in eadem Tabula præfigitur numerus 128, qui potentia ſeptima ipſius 2 reapſe eſt.

230 Igitur & viciſſim: *Si a numero quocunque radix fuerit, quadrata, cubica, quarta, quinta &c., extrahenda, ejus Logarithmum per* 2, 3, 4, 5 *&c., ſive*, in univerſum, *per numerum qui radicis gradum exponit, dividere oportebit: & quotus erit Logarithmus ipſius radicis*; quæ proinde facili negotio ex Tabulis conſtabit.

Si ex. gr. invenienda proponatur radix quadrata numeri 144, ejus Logarithmum in Tabula reperiemus 2,158362, quo diviſo per 2 habebitur Logarithmus 1,079181, cui in eadem Tabula reſpondet numerus 12, ac proinde concludemus numerum 12 radicem eſſe quadratam ipſius numeri propoſiti 144, ut re ipſa eſt.

Si radicem ſeptimam numeri 128 invenire oporteat, ejus numeri Logarithmum 2,107210 Tabula ſuppeditabit, & eo diviſo per 7 (quia nimirum de ſeptimi gradus radice quæſtio eſt) Logarithmus prodibit 0,301030, cui in eadem Tabula præſigitur numerus 2, qui ſeptima profecto radix eſt numeri propoſiti 128; & ita de aliis.

231 Ut autem Diviſionem numerorum, adhibito Logarithmorum artificio, peragamus, *Logarithmum diviſoris a Logarithmo dividendi ſubtrahere oportet, & reſiduum erit Logarithmus ipſius quoti.*

Sit ex. gr. dividendus numerus 187 per 17. Id ut exequamur, quærendus eſt

Log. divid.	187 - - - - - - -	2,271842
Log. divif.	17 - - - - - - -	1,230449

Et reſiduum - - - - - - - - - - - - - - 1,041393 erit Logarithmus quoti, qui proinde in Tabula invenietur, nimirum 11.

Quum Logarithmus quoti in Tabulis accurate non reperitur, ſed inter duos quoſcunque earum Logarithmos incidit, argumento eſt, diviſionem abſque reſiduo fieri non poſſe. Quid tum faciendum ſit, paulo inferius declarabimus, ubi de numeris, quorum Logarithmi in Tabulis non extant, inveniendis ſermo fuerit.

Hujuſce Regulæ manifeſta ratio fiet, ſi attendamus ex diviſore per quotum multiplicato dividendum produci (n. 74.). Igitur ſi Logarithmi addantur tam diviſoris quam ipſius quoti, ſumma erit Logarithmus dividendi (n. 227.). Igitur ſi a Logarithmo dividendi Logarithmus diviſoris ſubtrahatur, reſiduum erit Logarithmus quoti (n. 39.).

232 Quare iis perſpectis, quæ hactenus tradita ſunt, pronum erit intelligere, qua ſit ratione inſtituenda Regula trium Logarithmorum ope. *Logarithmus enim termini ſecundi Logarithmo tertii*

adden-

addendus, & ab eorum ſumma Logarithmus primi ſubtrahendus eſt; & reſiduum erit Logarithmus quarti, qui proinde ex Tabulis conſtabit.

Si ex. gr. quartus ſit inveniendus proportionalis ad terminos 7 : 12 :: 105 :, operatio erit hujuſmodi :

Log. 3^{i}.	105 - - - - - - - - -	2,021189
Log. 2^{i}.	12 - - - - - - - - - -	1,079181
Summa	- - - - - - - - - - - - -	3,100370
Log. 1^{i}.	7 - - - - - - - - - - - -	0,845098
	Reſiduum - - - -	2,255272. ſive

Logarithmus numeri 180, qui adeo quartus erit terminus quæſitus.

233 Animadvertendum vero eſt, quod ſi operatione aliqua inſtituta Logarithmus tandem prodeat, qui cum Logarithmo Tabularum aliquo ad amuſſim conſentiat in notis omnibus præter poſtremam ad dextram, hujus differentiæ ratio nulla haberi debeat. Quippe cum Logarithmi ſinguli numerorum, qui inter Progreſſionis decuplæ terminos medii ſunt, accurati non ſint niſi ad dimidiam uſque unitatem poſtremæ decimalium ſedis, fieri poteſt, ut ex plurium Logarithmorum additione particulæ illæ, quæ utique in ſingulis dimidia poſtremæ ſedis unitate maiores nunquam abundant, nec deficiunt, tandem collectæ unam aut alteram unitatem exceſſus vel defectus in poſtremam notam conferant; cujus rei operatio præcedens exemplo eſt.

De Numeris, quorum Logarithmi in Tabulis non extant.

234 CUm Tabulæ Logarithmorum pro numeris integris in ſerie naturali gradientibus fuerint conſtructæ, fractorum qui inter illos

medii ſunt Logarithmos ab iis immediate haud exhiberi apertum eſt. Idem intelligendum de radicibus numerorum, qui potentiæ perfectæ non ſunt &c.

Quamobrem, ſi Logarithmus quæratur numeri, cui fractio quæcunque adhæreat, ipſe ad fractionis denominationem revocandus, illique addendus erit, ut totum ſub fractionis formam redigatur (n. 86.). Tum Logarithmus denominatoris a Logarithmo numeratoris ſubtrahatur, & reſiduum erit Logarithmus quæſitus.

Si ex. gr. quæratur Logarithmus numeri 8 $\frac{3}{11}$, hic primum revocabitur ad $\frac{91}{11}$, deinde 1,041393 Logarithmus denominatoris 11 ſubtrahendus erit a 1,959041 Logarithmo numeratoris 91;& reſiduum 0,917648 pro Logarithmo habebitur numeri propoſiti 8 $\frac{3}{11}$, ſive $\frac{91}{11}$; quia videlicet $\frac{91}{11}$ nihil eſt aliud quam quotus ex diviſione numeri 91 per 11 (n. 96.).

235 Eadem ratione oſtenditur, Logarithmum fractionis propriæ habitum iri, ſi Logarithmus denominatoris a Logarithmo numeratoris ſubducatur. At, cum ejuſmodi ſubtractio fieri nequeat, propterea nimirum quia Logarithmus denominatoris Logarithmo numeratoris maior eſt, Logarithmus hujus a Logarithmo illius ſubtrahendus erit; & reſiduum erit Logarithmus fractionis, præfixo tamen ſigno —, quo nimirum oſtenditur, illam quam præmiſimus ſubtractionem præpoſtero ordine fuiſſe inſtitutam. Sic Logarithmus fractionis $\frac{11}{91}$ habebitur — 0,917648.

236 Id vero ſignum quemadmodum declarat ſubtractionem fuiſſe aliter quam oporteret factam, ita etiam, ut id tandem penſetur, oſtendit Logarithmos fractionum adhibendos eſſe juxta regulam oppo-

oppoſitam illi, quam pro Logarithmis integrorum tradidimus. Id eſt, *ſi multiplicandum ſit per fractionem, ejus Logarithmus ſubtrahendus; ſi dividendum, addendus eſt* (*).

55 In univerſum, hæc circa multiplicationem Regula tenenda eſt: *Si Logarithmi factorum omnes poſitivi, vel omnes negativi, eorum ſumma cum eodem ſigno; ſi partim negativi, partim poſitivi, differentia inter utrorumque ſummas cum ſigno maioris Logarithmum facti exhibebit.* Circa diviſionem vero: *Diviſoris Logarithmus ſigno contrario donetur, & multiplicationis Regula obſervetur.*

Sunt qui fractionum Logarithmos aliter exprimere conſueverunt, ſola characteriſtica negativa inducta, retentiſque notis decimalibus perpetuo poſitivis. Hæc autem Logarithmorum forma exoritur, ſi Logarithmus denominatoris re ipſa ſubtrahatur a Logarithmo numeratoris a dextra verſus ſiniſtram, &, quum ad characteriſticas ventum fuerit, totidem unitates negativè ſumantur, quot characteriſticæ Logarithmi numeratoris deerunt, ut characteriſtica Logarithmi ipſius denominatoris ſubtrahi abſque reſiduo poſſit.

Ex. gr. Si quæratur Logarithmus fractionis $\frac{2}{151}$, a Logarithmo numeratoris 2, nimirum 0,301030 ſubtrahendus erit Logarithmus denominatoris 151, nimirum 2,178977. Quo autem ſubtractio fieri poſſet, addendæ eſſent 2 unitates ad characteriſticam Logarithimi numeratoris, ut fieret 2,301030, & reſiduum haberetur 0,122053. Logarithmus igitur fractionis propoſitæ erit − 2,122053, ſigno utique − ſolam characteriſticam afficiente. Sed ne hujuſce formæ Logarithmi cum ſuperioribus prorſus negativis aliàs uſu receptis confundantur,

(*) Numeri, quibus præfigitur ſignum −, *negativi* appellantur. Eorum indolem in Algebra diſtinctius explicabimus. Interim monuiſſe ſufficiat eos perperam concipi tanquam *nihilo* minores, cum infra *nihilum* nihil eſſe poſſit.

eos ſic deſignare placuit $\bar{2},122053$, interdum etiam ſigno $\dashv$ præfixo, ad hunc modum $\dashv$ 2,122053.

Ratio hujus rei eſt, quia ſumpto Logarithmo 2,301030 pro 0,301030, numerus 2 huic reſpondens per 100 multiplicari cenſetur. Igitur, ſi a Logarithmo 2,301030 Logarithmum 2,178977 ſubtrahamus, reſiduum 0,122053 erit Logarithmus fractionis impropriæ $\frac{200}{151}$. Ut autem hæc redeat ad $\frac{2}{151}$, dividi debet per 100; adeoque ſubtrahi oportet 2 ab illius Logarithmi characteriſtica 0; Logarithmus igitur fractionis $\frac{2}{151}$ erit -2 $+ 0,122053$, ſive $\bar{2},122053$.

Quum iſtiuſmodi Logarithmi in calculum veniunt, regulæ ſuperiores ſervandæ erunt quoad utramque cujuſque partem. Si nimirum multiplicatio proponatur, addendæ erunt notæ decimales, omnes quippe poſitivæ; ſi quid inde ad characteriſticarum ſedem venerit, poſitivis adjungendum; & denique differentia inter ſummam poſitivarum & negativarum cum ſigno majoris characteriſticam dabit. Si diviſio inſtituatur, diviſoris Logarithmus, quoad partes decimales a Logarithmo dividendi ſubtrahitur; deinde characteriſtica illius mutato ſigno additur characteriſticæ hujus juxta regulam multiplicationis. Quum in ſubtractione decimalium peragenda petenda fuerit unitas a ſede characteriſticæ, & hæc fuerit 0, vel negativa, unitas inſuper inde detrahitur, quapropter pro 0 manebit $\bar{1}$, pro $\bar{1}$ manebit $\bar{2}$ &c.

Eodem modo: Quum Logarithmus per numerum aliquem fuerit multiplicandus, ut in formandis potentiis, multiplicantur primum notæ decimales, & ſi quid inde ad characteriſticæ ſedem venerit, mente retinetur ab ejuſdem facto ſubtrahendum. Quum vero dividendus, ut in radicibus extrahendis, si characteristica divisorem exacte continet, divisio solita ratione peragitur; sin minus, characteristica tot unitatibus negativis augetur, quod sufficiunt, ut divisorem exacte contineat, & totidem positivæ decadum loco notæ sequenti adjunguntur, ut illud pensetur, & divisio ulterius promoveatur. Sic, si $\bar{2},873245$ multiplicari oporteat per 5, factum erit $\bar{6},366225$; si dividi per 7, quotus erit $\bar{1},839035$. &c.

Cæterum Logarithmi, quibus de agimus, in alios prorsus negativos transeunt, si a characteristica unitas auferatur, & pro reliquis notis sumatur earum complementum ad 9, præter postremam ad dextram, cujus sumendum erit complementum ad 10. Contra, si Logarithmus omnino negativus sola characteristica negativa donandus fuerit, characteristica unitate augebitur, & notarum decimalium, ut modo diximus, complementum assumetur. Sic Logarithmus $\bar{2},374972$ in $-1,625028$, Log. $\bar{1},587430$ in $-0,412570$ transmutantur; & vicissim. §§

237 Quando numerus Tabularum (quæ fere ad 20000, vel saltem ad 10000 pertingunt) fines prætergreditur, ejus adhuc Logarithmus ex Tabulis haberi potest, si modo pluribus, quam Logarithmorum sedes decimales sunt, notis non constet.

238 Id ut expediamus, illud recolendum est, quod si 1, 2, 3, &c unitates ad characteristicam cujuscunque Logarithmi addantur, numerus ipsi respondens per 10, 100, 1000 &c multiplicatur; & contra, si 1, 2, 3 &c unitates a characteristica subtrahantur, numerus ipse per 10, 100, 1000 &c. re ipsa dividitur. Per id enim nihil aliud fit, quam Logarithmum numeri 10, vel 100, vel 1000 &c illi addere, vel subtrahere (n. 219. 227. 231.).

239 His positis, si quæratur ex. gr. Logari-

thmus numeri 357859, tot versus dextram notæ virgula secernendæ erunt, quot sufficiant, ut reliquæ ad sinistram intra Tabularum limites contineantur, duæ videlicet in hoc exemplo, & fiet numerus 3578,59 proposito centies minor (n. 28.). Deinde quærendus erit Logarithmus numeri 3578, nimirum 3,5536403, & differentia inter illum & Logarithmum proxime sequentem numeri 3579, quæ quidem est 1214. Tum Regulam trium conficiemus: Si 1 differentia numerorum 3578 & 3579 differentiam Logarithmorum habet 1214, differentia numerorum 0,59 quamnam Logarithmorum differentiam habebit? Cum prior terminus sit unitas, satis est secundum per tertium multiplicare, & factum 716,26, seu rejectis decimalibus 716 erit differentia addenda Logarithmo 3,5536403 numeri 3578, ut fiat 3,5537119 Logarithmus numeri 3578,59. Et tandem, cum 3578,59 multiplicari debeat per 100 ut fiat 357859, duæ ad characteristicam Logarithmi inventi unitates addendæ supersunt, ut fiat 5,5537119 Logarithmus numeri propositi 357859.

Si notæ ad dextram fuerint cifræ, manifestum est, nihil aliud facto opus esse, quam partis reliquæ ad sinistram Logarithmum invenire, ejusque characteristicæ tot unitates addere, quot fuerunt cifræ dextrorsum sejunctæ.

240 Quum decimales notæ numero adhærent, ejus Logarithmus quæritur quasi integer esset, sive in Tabulis immediate extet, sive methodo superiori utendum sit (n. 239.), & tandem ab ejus characteristica tot unitates subtrahuntur, quot in numero notæ decimales sunt. Si ex. gr. quæratur Logarithmus numeri 3,27 invenietur in Tabulis Logarithmus numeri 327, nimirum 2,5145477, & duabus a characteristica unitatibus subtractis, erit Logarithmus quæsitus 0,5145477. Si quæratur Logarithmus numeri 35,7859, invenietur Lo-

garithmus numeri 357859 (n. 239.) 5,5537119, & quatuor a characteristica demptis unitatibus, numeri propositi Logarithmus erit 1,5537119.

241 Quum tandem numerus solis notis decimalibus constat, quærendus itidem erit ejus Logarithmus, quasi integer esset; sed is tamen subtrahendus a totidem unitatibus, quot decimales sunt, & residuum signo − notandum. Ut ex. gr. Logarithmum numeri 0,03 habeamus, quærendus nobis erit Logarithmus numeri 3, qui quidem est 0,477121, eoque subtracto a 2, residuum − 1,522879 erit Logarithmus ipsius numeri 0,03.

¶¶ Quod si characteristica tantum negativa desideretur, quæratur numeri ejusdem Logarithmus, nulla virgulæ ratione habita, & ab illius characteristica tot unitates subtrahantur, quot partium decimalium sedes sunt. Ad hunc plane modum Logarithmus fractionis 0,03 invenietur $\bar{2}$,477121, fractionis autem 0,00327 Logarithmus erit $\bar{3}$,514548, & sic de aliis. ¶¶

De Logarithmis, quorum Numeri in Tabulis non extant.

242 UT in operationibus suscipiendis a numeris ad Logarithmos magno laboris compendio confugimus, sic re confecta a Logarithmis ad numeros redeamus necesse est. Vix autem fit, ut qui Logarithmus quæsitum tandem ostendit, numero respondeat & integro, & intra Tabularum cancellos contento, ac proinde ut inter earum statim Logarithmos ipse reperiatur. Quare methodo opus est, qua numerus Logarithmo cuicunque proposito respondens Tabularum auxilio deprehendatur. Est autem hujusmodi.

243 A Logarithmi characteristica tot unitates subtrahantur, quot opus fuerint, ut Tabularum limites Logarithmus non excedat. Tunc,

Si Logarithmus cum Logarithmo Tabularum aliquo omnino consentiat, numerus illi respondens tot ad dextram cifris additis, quot fuere unitates a characteristica sublatæ, quæsitum ostendet. Logarithmus ex. gr. 7,2273467, tribus a characteristica unitatibus subtractis respondet numero 16879; atque inde Logarithmum propositum 7,2273467 numero 1688900 respondere intelligimus (n. 238.).

Si autem characteristica ad Tabularum fines adducta, Logarithmus inter duos tabulares incidat, operatio fiet ad hunc modum; Quærendus ex. gr. sit numerus respondens Logarithmo 5,2432768. Ablatis 2 unitatibus a characteristica 5, Logarithmus 3,2432768 incidit inter Logarithmos numerorum 1750 & 1751, adeoque ejus numerus erit 1750 cum fractione. Hæc ut inveniatur, sumenda erit ex Tabulis differentia inter Logarithmos numerorum 1750 & 1751, nimirum 2481 & differentia inter Logarithmum propositum & Logarithmum numeri 1750, quæ quidem est 2388. Tum fiet: Ut differentia Logarithmorum 2481, ad differentiam numerorum 1, ita differentia Logarithmorum 2388, ad differentiam numerorum quæsitam. Cum autem secundus terminus sit perpetuo unitas, diviso tertio per primum, quotus erit quartus, in hoc exemplo 0,9625. Proinde 3,2432768 Logarithmus erit numeri 1750,9625, adeoque 5,2432768 Logarithmus numeri 175096,25 (n. 28. 238.).

244 Quum characteristica Logarithmi Tabularum limites non superat, manifestum est, nullas ab illa unitates esse subtrahendas, adeoque numero invento nullas cifras addendas, neque virgulam loco movendam.

245 Sed illud imprimis notandum est, methodum paulo superius traditam, ut fractio numero adjicienda inveniatur, id sumere, differentias Logarithmorum differentiis numerorum proportionales esse, quod ubi numeri sunt paulo

maiores vero proximum eſt; ubi autem minores, non item. Quapropter, ſi numerus fuerit minor quam 1800 in Tabulis quæ pertingunt ad 18000, vel minor quam 1000 in Tabulis quæ ad 10000 tantummodo excurrunt, tot characteriſticæ unitates addendæ erunt, quot ſuffecerint, ut numerus in ſupremo Tabularum ordine inquiratur. Eo autem invento, qui proxime Logarithmo reſpondeat, tot verſus dextram notæ pro decimalibus habendæ, quot fuerunt unitates ad characteriſticam adjectæ, quod plerumque ſatis erit. Si autem accuratio maior exigatur, proportio ſupra tradita (n. 243.) inſtituetur, & notæ decimales prodibunt, quæ prioribus adjungantur.

Ex. gr. Si quæratur numerus reſpondens Logarithmo 0,5432725, is inter 3 & 4 conſtat ex Tabularum inſpectione incidere. Si partes ibi proportionales ſumerentur, numerus prodiret 3,529 &c a vero non parum abhorrens. Sed tribus characteriſticæ unitatibus additis, Logarithmus 3,5432725 reſpondere invenietur numero paulo maiori quam 3493, minori autem quam 3494, adeoque ſi tertia nota decimali contenti ſumus, numerus Logarithmo 0,5432725 reſpondens erit 3,492. At ſi plures notæ decimales requirantur, methodo ſuperiori inveniemus Logarithmum 3,5432725 reſpondere numero 3493,594 (n. 243.), proindeque Logarithmum 0,5432725 numero 3,493594 (n. 238.).

Verum hæc numerorum accuratio limites habet ab ipſis Logarithmis circunſcriptos. Cum enim, ut paulo ſuperius notatum fuit, poſtrema eorum nota decimalis ad dimidiam uſque unitatem exacta tantum reddi potuiſſet, perſpicuum eſt, eorum differentias eandem ferre incertitudinem, adeoque ubi poſtrema differentiæ dividendæ nota in quotum cœpit influere, notæ inde incertæ emergant neceſſe fore; ut diviſionem ulterius promovere fruſtraneum videatur. Ex Tabulis vulgaribus numerus quiſque ad ſeptem uſque notas tuto colligitur, quod plerunque ſatis ſuperque eſt. Si quando pluribus opus fuerit, aut Tabulæ ampliores conſulendæ, aut Logarithmis non utendum.

246 Si Logarithmus negativus proponatur, ſubtrahendus erit a 4, 5 &c unitatibus, ita ut reſiduum in ſuprema Tabularum claſſe reperiatur, & a numero illi reſpondente totidem ad dextram notæ decimalibus addicendæ, quot unitates fuerunt, a quibus Logarithmum ſubtraximus.

Ex. gr. ſi quæratur fractio reſpondens Logarithmo − 1,532732, hunc a 5 ſubducemus, & reſiduum erit 3,467268, cui in Tabula reſpondet numerus paulo maior quam 2932, & minor quam 2933, adeoque fractio quæſita, ſi quinque notæ decimales ſufficiant, erit 0,02932. Et quidem Logarithmum − 1,532732 a 5 ſubducere nihil eſt aliud quam fractionem illi reſpondentem multiplicare per 100000 (n. 219. 236.). Igitur numerus reſiduo reſpondens dividendus erit per 100000, quinque ſedibus a dextra verſus ſiniſtram decimalibus conſignatis (n. 28.).

JJ Logarithmis penes unam characteriſticam negativis propoſitis, fractio decimalis facilius obtinetur. Logarithmus characteriſtica poſitiva pro lubitu donetur, & numerus quot opus fuerit notis contentus inquiratur: quo invento, fractio decimalis ita conficietur, ut prior numeri ipſius nota ad ſiniſtram tot ſedibus ab unitatum loco removeatur, quot in characteriſtica negativa Logarithmi propoſiti unitates ſunt. Sic ex. gr. ſi fractio reſpondens Logarithmo $\bar{2}$,235724 ad quartam uſque decimalium ſedem deſideretur, quærendus erit numerus in Tabulis proxime reſpondens Logarithmo 2,235724, nimirum 172, & fractio quæſita erit 0,0172. Si fractio respondens Logarithmo $\bar{1}$,732589 ad sextam usque notam decimalem quæratur, inveniendus erit numerus quam proxime respondens Logarithmo 5,732589, qui quidem reperietur 540242, proindeque fractio erit 0,540242. §§

247 Quæ dicta sunt hactenus permagnum perque commodum in Trigonometria, pluribusque aliis Matheseos partibus usum habitura sunt. Interim nonnullis exemplis ab ipsa Arithmetica petitis, supputationum compendia a Logarithmorum artificio profecta demonstremus.

Exemplum I.

Dividendus esto numerus 17954 per 12836, & quotus ad decimas usque millesimas exigatur. Res per Logarithmos fiet ad hunc modum:

Log. divid. 17954 - - - - 4,254161
Log. divis. 12836 - - - - 4,108430

Residuum - - - - - - 0,145731 characteristica 4 donatum respondet numero 13987; igitur quotus erit 1,3987 (n. 238.).

Exemplum II.

Quæratur radix cubica numeri 53 ad centesimas usque millesimas accurata.

Logarithmus numeri 53 est 1,724276, eoque diviso per 3 (n. 230.) quotus 0,574759 erit Logarithmus radicis, qui proinde characteristica 5 donatus numerum suppeditabit quam proxime 375628; adeoque radix quæsita erit 3,75628 (n. 238.).

Exemplum III.

Sit extrahenda radix quinta numeri 5736 ad cubum evecti, eaque ad millesimas usque exacta. Triplicetur Logarithmus numeri 5736, videlicet 3,758609, & fiet 11,275827 Logarithmus cubi ejusdem numeri, quo diviso per 5 prodibit 2,255165 Logarithmus radicis quæsitæ; hujus si characteristicæ 3 unitates addamus, numerum quam proximè reperiemus 179955, adeoque radix erit 179,955.

Exemplum IV.

Sint quatuor media geometrica inter numeros $2\frac{2}{3}$ & $5\frac{1}{4}$ inserenda. Cum dividere $5\frac{1}{4}$ per $3\frac{2}{3}$, & a quoto radicem quintam extrahere oporteret (n. 215.), ut ratio Progressionis haberetur; per Logarithmos res multo facilius expedietur.

A Logarithmo numeri $5\frac{1}{4}$ nempe 0,759668 subtrahatur Logarithmus numeri $2\frac{2}{3}$ nimirum 0,425969 (n. 231.), & residuum 0,333699 dividatur per 5 (n. 230.). Quotus 0,066740 erit Logarithmus rationis quæsitæ, qui si characteristica 4 donetur, in Tabula numerum 11661 ad unitatum usque sedem accuratum suppeditabit; ac proinde ratio erit 1,1661 ad decimas usque millesimas exacta. Nihil igitur aliud superest, quam primum terminum $2\frac{2}{3}$ per 1,1661 multiplicare, productum rursus per 1,1661, &c (n. 211.).

Sed hæ quoque operationes per Logarithmos commodissime absolventur, si Logarithmo prioris termini 0,425969 Logarithmus rationis 0,066740 addatur, deinde hujus duplum, triplum, & quadruplum; ut quatuor mediorum Logarithmi oriantur 0,492709; 0,559449; 0,626189; 0,692929; quibus quam proxime respondent numeri 3,109; 3,626; 4,228; 4,931.

De

De Complemento Arithmetico Logarithmorum, ejusque usu.

248 UBi Logarithmorum ope calculus instituitur,& alii addendi, alii deinde subtrahendi sunt, operatio reddi potest multo simplicior, si ad eorum complementa arithmetica confugiamus.

249 Quod ut perspicue intelligatur, notandum est, ad numerum quemvis ab alio, qui per unitatem adjecto quolibet cifrarum numero exprimatur, subtrahendum, nihil aliud opus esse, quam singulas notas a sinistra versus dextram a 9 subducere, præter postremam quæ subtrahenda est a 10. Sic ex. gr. si numerus 526927 subtrahendus proponatur a 1000000, singulas notas 5, 2, 6, 9, 2 mente subducemus a 9, & postremam 7 a 10, & residuum una eademque opera scribemus 473073. Si numerus 4873 a 1000000 subducendus sit, numerus considerabitur ut 004873, & regula eadem adhibita residuum habebitur 995127.

250 Hujuscemodi autẽ residuum dicitur *Complementũ Arithmeticum* numeri propositi,unde derivatur.

251 Cum vero sit tam facilis expeditaque complementi determinatio, ut vix operationis loco habenda videatur, ubi plures addendi subtrahendique sunt numeri, ad unam additionem reduci operationem posse manifestum est. Si ex. gr. addendi proponantur numeri 672736, 426452, & ab eorum summa subtrahendi 432752 & 18675, (quod alioquin duplicem additionem,subtractionem unam exigeret) operatio unica fiet ad hunc modum:

	672736
	426452
Compl. num. 432752 - - -	567248
Compl. num. 18675 - - -	981325
Summa - - - - - -	2]647761

Id est, priores duo numeri cum posteriorum complementis adduntur, & ſumma prodit 2647761; cujus prima nota 2 ſecernenda erit, & reliquæ 647761 numerum quæſitum oſtendent.

Hujuſce operationis ratio eſt, quia ubi pro ſubtractione numeri 432752, ejus cnmplementum additur, videlicet 1000000 − 432752, numerus quidem 432752 re ipſa ſubtrahitur, ſed ſimul numerus 1000000 inſuper ponitur, decas ſcilicet una ad ſiniſtram prioris numerorum addendorum ſedis. Pro ſingulis igitur complementis ſingulæ unitates a priori ſummæ nota rejiciendæ ſunt, ut numerus quæſitus habeatur.

252 Jam vero id quomodo Logarithmis accommodandum ſit, facile conſtat. Pro iis, qui ſubtrahendi ſunt, Complementum (quod litteris CL deſignari ſolet) addendum ſubrogatur, & ſumma confecta tot a characteriſtica decades rejiciuntur, quot ſunt complementa in operationem ingreſſa.

Exemplum I.

SIt inveniendus quartus proportionalis ad tres numeros 1677 : 1599 :: 129.

Cum Logarithmos numerorum 1599 & 129 addere, & a ſumma Logarithmum numeri 1677 ſubtrahere oporteret (n. 232.), res hoc modo facilius expedietur:

CL. num.	1677 - - - -	6,775467
Log. num.	1599 - - - -	3,203848
Log. num.	129 - - - -	2,110590

Et ſumma - - - - - - - - - - 2,089905, rejecta characteriſticæ decade, erit Logorithmus quarti, qui in Tabulis reperietur 123.

Exemplum II.

SInt multiplicandæ fractiones $\frac{675}{527}$, $\frac{952}{377}$, & productum dividendum per $\frac{631}{751}$.

Cum multiplicare invicem oporteret numeros 675, 952, 753; & numeros itidem 527, 377, 631; factumque prius per posterius dividere (n. 106. 109.), per Logarithmos calculus ita conficitur:

Log.	num. 675	- - - - - -	2,829304
Log.	num. 952	- - - - - -	2,978637
Log.	num. 753	- - - - - -	2,876795
CL.	num. 527	- - - - - -	7,278189
CL.	num. 377	- - - - - -	7,423659
CL.	num. 631	- - - - - -	7,199971

Et summa - - - - - - - - - - - - 0,586555, rejectis tribus a characteristica decadibus, quia nimirum tria complementa adhibita sunt, numerum quæsitum indicabit 3,8597 quam proximè.

253 Illud præterea calculo percommodum accidit, ut complementis adhibitis fractionum Logarithmi positivi reddantur. Sic ex. gr. ut Logarithmum habeamus fractionis $\frac{3}{4}$, quæ numerum 3 per 4 divisum exprimit (n. 96.), ad Logarithmum ipsius 3, nempe 0,477121, addendum est complementum Logarithmi ipsius 4, videlicet 9,397940, & summa 9,875061 erit Logarithmus fractionis $\frac{3}{4}$. Sed illud notandum, in hujusmodi Logarithmo complementum involvi, adeoque decadem a characteristica rejiciendam fuisse, quod idcirco factum non est, quia characteristica ipsa decade minor prodiit. Verum decas abundans mente retinetur, absolutis operationibus rejicienda demum, si fieri possit.

§§ Hujus formæ Logarithmi ab iis, qui unam characteristicam negativam præferunt, nihil re ipsa dissentiunt. Logarithmus enim 9,875061, ubi decas subintelligitur a characteristica subtrahenda, characteristica 9-10 proculdubio afficitur, idemque omnino exhibet, ac $\bar{1}$,875061. Si duæ decades auferendæ subintelligerentur, characteristica censeretur 9 — 20, adeoque Logarithmus idem exprimeret, ac $\bar{1}1,875061$.

Adde, quod Logarithmi complementorum vices sibi mutuo præstant. Ut enim 9,875061 complementum est Logarithmi 0,124939, ita vicissim 0,124939 complementum est Logarithmi 9,875061. Qui vero sibi mutua complementa exhibent Logarithmi, numeris itidem inter se reciprocis omnino respondent. *Reciproci* autem sunt numeri, quorum factum est unitas, ut 3, & $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{4}$, & $\frac{4}{3}$ &c. Unde, cum idem sit dividere per 3, ac multiplicare per $\frac{1}{3}$, ubi subtrahendus est Logarithmus numeri 3, addi potest Logarithmus ipsius $\frac{1}{3}$, complementum videlicet Logarithmi ejusdem numeri 3; & ita de aliis. §§

254 Idem de fractionibus decimalibus omnino intelligendum est. Si quæratur ex.gr. Logarithmus fractionis 0,575, quæ idem exhibet atque $\frac{575}{1000}$ ad Logarithmum numeri 575 addendum erit complementum Logarithmi numeri 1000, & summa 9,759668 quæsitum ostendet. Regula huc redit: Ut quæratur Logarithmus fractionis decimalis quasi numerus integer foret, & pro ejus characteristica alia supponatur, quæ a 10, 20 &c tot unitatibus deficiat, quot prior fractionis nota sedibus ab unitatum sede distat. Sic Logarithmus fractionis 0,05621 erit 8,749812; Logarithmus fractionis 0,0000000005621 erit 0,749812; fractionis autem 0,00000000005621 erit 9,749812; ita ut duo priores complemento uno, tertius vero duobus, affecti subintelligantur.

255 Quum vero a Logarithmis ad numeros redeundum est, si tot in Logarithmo prodeunte decades a characteristica rejici non possint, quot in operationem invecta fuere complementa, fractionem per ipsum designari perspicuum est. Hæc ut habeatur, deletis a characteristica decadibus quotcunque reji-

ci possunt, numerum Logarithmo respondentem investigabimus, quasi integrum designaret (n. 242. & seq.), quo invento, tot sedium decimalium decadas a dextra versus sinistram constituemus, quot in Logarithmo complementa superesse dignovimus.

Si ex. gr. Logarithmus prodeat 8,732235, qui complementum unum adhuc involvat, adeoque fractionem designet, ejus numerum, quasi integrum innueret, inveniemus 539802500 (n. 242.), & decem sedibus decimalibus constitutis, fractio habebitur 0,0539802500.

Verum, cum vix unquam fiat, ut fractiones adeo exquisitæ desiderentur, Logarithmi characteristica pro lubitu sumi potest, & numerus quot opus fuerint notis contentus ad fractionem decimalem ita revocabitur, ut prior ejus nota ab unitatum sede tot gradibus distet, quot characteristica Logarithmi propositi unitatibus distat a numero 10, si Logarithmus complementum unum involvit; a 20, si duo &c.

Sic Logarithmus 8,732235, substituta characteristica 3, numero respondet 5398 quam proxime: & quia a characteristica 8 ad 10 duæ sunt unitates, prior nota 5 duobus ab unitatum sede gradibus distabit, eritque fractio 0,05398. Si autem Logarithmus idem duo complementa secum afferret, fractio esset 0,000000000005398.

256 Quum hujus formæ Logarithmi multiplicantur, ut in formandis potentiis fractionum, notandum est, complementa simul multiplicari. Ea propter, rejectis quæ possunt a producto decadibus, dispiciendum est, quotnam adhuc complementa supersint, ut fractionis valor recte constituatur.

Ex. gr. Si Logarithmus 7,924753 complementum unum involvat, & fractio illi respondens ad potentiam quintam evehenda proponatur, Logarithmus per 5 multiplicabitur, & productum fiet 39,623765, quod 5 complementa continebit; ac proinde, cum 3 rejici tantum possint, Logarithmus qui ſupereſt 9,623765 duo adhuc complementa retinere, fractionique propterea 0,00000000004205 reſpondere cenſebitur.

257 Contra, quum iidem Logarithmi dividendi ſunt, ut in extrahendis fractionum radicibus, curandum eſt, ut adjectis ſi opus fuerit characteriſticæ decadibus, tot in iis complementa ponantur, quot ſunt unitates in exponente radicis, vel duplo, triplo &c plura; & diviſione facta, reſiduum complementum unum, vel duo, tria &c continebit.

Sit Logarithmus 9,702922, qui complementum unum complectatur, & a fractione per illum indicata extrahenda ſit radix cubica. Adjectis duabus characteriſticæ decadibus, Logarithmus fiet 29,702922 tribus complementis abundans, eoque diviſo per 3, quotus 9,900974 uno complemento afficietur, adeoque radicem quæſitam oſtendet 0,7961. Rurſus ſit Logarithmus 1,987542 duobus complementis donatus, & a fractione reſpondente extrahenda ſit radix quadrata. Dividatur is per 2 (quia decadas hic adjicere opus non eſt) & quotus 0,993771 complementum unum continebit, radicemque adeo indicabit 0,0000000009857. Sit tandem Logarithmus 9,887745 quinque complementis affectus, & a fractione illi reſpondente extrahenda ſit radix quarta. Adjectis tribus decadibus, Logarithmus 39,887745 octo complementis donabitur, eoque diviſo per 4, quotus 9,971936 duo complementa retinebit, ac proinde radicem indicabit 0,00000000009374; & ita de aliis.

Complementorum uſus in Trigonometricis potiſſimum rationibus ſubducendis, adeoque in Aſtronomia, cæteriſque Matheſeos Partibus, ubi triangulorum analyſis Logarithmorum ope inſtituenda eſt, maximum laboris compendium affert.

ARITHMETICÆ FINIS.

INDICE

Dos Principios que ſe contém neſtes Elementos.

riando quantas vezes entra o divifor na primeira letra do dividendo, ou nas primeiras duas, quando a primeira for menor que o divifor, e affim fe procederá de cafa em cafa até á ultima; advertindo, que naõ cabendo o divifor hum numero exacto de vezes na parte que fe divide, o refto fe ajuntará em lugar de dezenas á letra feguinte, e naõ chegando a caber huma vez, fe affentará cifra no quociente. n. 60.

Sendo tambem compofto o divifor, a operaçaõ he do mefmo modo: Toma-fe no dividendo huma parte naõ menor que o divifor, e confrontando as primeiras letras de hum e outro, fe acha a letra do quociente, a qual fe multiplica pelo divifor, e o producto fe diminue da parte do dividendo, e ao refto fe ajunta a letra feguinte do mefmo dividendo, para formar huma nova parte que fe torna a dividir do mefmo modo, e affim por diante. n. 62.

Quando o producto da letra do quociente pelo divifor fahe maior que a parte actual do dividendo, he final que a dita letra fe julgou maior do que devia fer; e quando, diminuido o dito producto da parte correfpondente do dividendo, ficar o refto naõ menor que o divifor, he final que a letra do quociente fe affentou menor do que convinha. n. 63.

Quando o dividendo, e o divifor acabaõ ambos em cifras, antes de fazer a divifaõ podem cortar-fe em ambos tantas, quantas forem as daquelle que menos tiver. n. 67.

A Divifaõ da dizima fe reduz á dos numeros inteiros, procurando-fe que no dividendo, e no divifor haja o mefmo numero de cafas decimais. n. 68.

Se ao refto final de huma divifaõ fe ajuntar huma cifra, e fe continuar a operaçaõ, achar-fe-ha a letra competente á cafa das decimas, e affim por diante. n. 68.

A Divifaõ, e Multiplicaçaõ provaõ-fe reciprocamente huma pela outra; porque dividindo o producto por hum dos factores deve fahir o outro no quociente; e multiplicando o divifor pelo quociente, deve fahir o producto igual ao dividendo. n. 74.

Fracçaõ, ou *Quebrado*, he o numero que reprefenta as partes da unidade, a qual fe fuppoem dividida em hum numero determinado de partes iguais. n. 78.

Para exprimir hum quebrado faõ neceffarios dous numeros, hum que moftre em quantas partes fe fuppoem dividida a unidade, o qual fe chama *denominador*; e o outro, que moftre de quantas deffas partes confta a quantidade que queremos fignificar, o qual fe chama *numerador*. n. 80. 81.

Tanto o numerador, como o denominador de hum quebrado, chamaõ-fe *termos* delle. n. 83.

O quebrado, que tiver o numerador maior que o denominador vale mais que a unidade. n. 84.

Para extrahir os inteiros envolvidos em huma expreffaõ fraccionaria, divide-fe o numerador pelo denominador. n. 85.

Para reduzir hum inteiro á fórma de quebrado, multiplica-fe pelo denominador que lhe queremos dar, e no producto virá o numerador. n. 86.

Hum quebrado naõ muda de valor, quando fe multiplicaõ, ou dividem ambos os feus termos por hum mefmo numero. n. 88. 89.

Para reduzir dous quebrados ao mefmo denominador, multiplicaõ-fe os dous termos de cada hum pelo denominador do outro. Sendo mais que dous quebrados, multiplicaõ-fe os dous termos de cada hum pelo producto dos denominadores de todos os outros. n. 90. 91.

zindo as especies inferiores a hũa fracçaõ da principal, antes de fazer as ditas operaçoens. n. 119.

Parte *aliquota* de hum numero he o numero, que nelle se contém algumas vezes exactamente. n. 120.

Para multiplicar os numeros complexos, resolvem-se as especies inferiores em partes aliquotas da especie principal, e humas das outras; e quando esta resoluçaõ naõ suggere productos faceis de calcular, supprе-se com productos subsidiarios. n. 121. 122. 123.

Para dividir hum complexo por incomplexo, no caso de ser o quociente da mesma natureza que o dividendo, parte-se pelo divisor a especie maior do dividendo, o resto se converte em unidades da especie seguinte, e se ajunta com as que houver no dividendo, e a summa se torna a partir pelo mesmo divisor; e assim por diante. n. 124.

Sendo porém o quociente de diversa natureza, reduzir-se-ha tanto o dividendo, como o divisor, ás unidades da infima especie do dividendo; e depois se praticará como no primeiro caso, tratando as unidades do dividendo assim reduzido, como se fossem da mesma especie das que devem sahir no quociente. n. 127.

Se tambem for complexo o divisor, reduz-se ás unidades da sua infima especie, e multiplica-se o dividendo pelo numero que dessas unidades he necessario para fazer a unidade principal; e pratica-se a divisaõ, como no caso do divisor incomplexo. n. 128.

Quadrado de hum numero he o producto delle multiplicado por si mesmo. n. 129.

Raiz quadrada de hum numero he o numero, que o produz sendo multiplicado por si mesmo. n. 130.

A raiz de hum numero, que naõ he quadrado perfeito, chama-se *surda*, *irracional*, ou *incommensuravel*. n. 132.

O quadrado de qualquer numero, composto de dezenas, e unidades, contém *o quadrado das dezenas*, *o dobro do producto das dezenas pelas unidades*, *e o quadrado das unidades*. n. 134.

Para extrahir a raiz quadrada de qualquer numero, divide-se este em classes de duas letras, começando da direita para a esquerda; da ultima classe á esquerda (que póde ser de huma só letra) busca-se a raiz, que será a primeira letra da raiz procurada; o quadrado desta letra se diminue da mesma classe, e ao resto, se o houver, se ajunta a classe seguinte, e se formará hum dividendo parcial, cujo divisor será o dobro da raiz achada, o qual se escreverá da segunda letra do dividendo para a esquerda; o quociente será a segunda letra da raiz, a qual se assentará tambem á direita do divisor, e se multiplicará por elle assim augmentado; o producto se diminuirá do dividendo, e ao resto se ajuntará á classe seguinte, e se formará outro dividendo, que se partirá pelo dobro da raiz achada: e assim por diante. n. 137. 139.

A raiz approximada de hum numero, que a naõ tem exacta, tira-se ajuntando ao dito numero tantas classes de duas cifras, quantas saõ as letras decimais, que se querem na raiz, e pratica-se a regra precedente. n. 140.

Para extrahir a raiz quadrada de hum quebrado, tira-se a raiz tanto do numerador, como do denominador, se os termos saõ quadrados perfeitos; quando naõ, reduz-se o quebrado á dizima, de sorte que ten a numero

Se

Se a proporçaõ arithmetica for continua, a soma dos extremos he dupla do meio; e reciprocamente. n. 177.

Em toda a proporçaõ geometrica, o producto dos meios he igual ao dos extremos; e reciprocamente. n. 178. 180.

Se a proporçaõ for continua, o producto dos extremos será igual ao quadrado do meio, e reciprocamente. n. 178.

Dados tres termos de huma proporçaõ geometrica conhecer-se-ha o quarto. Porque se este for hum dos extremos, o producto dos meios se dividirá pelo outro: e se for hum dos meios, o producto dos extremos se dividirá pelo outro meio. n. 179.

A proporçaõ de quatro termos naõ se perde, mudando os extremos para meios, e os meios para extremos: nem tambem, trocando entre si de lugar os meios, ou os extremos. n. 181, 182.

A proporçaõ naõ se póde alterar, multiplicando, ou dividindo ambos os antecedentes, ou ambos os consequentes por hum mesmo numero. n. 183.

Se em qualquer proporçaõ geometrica, a soma, ou differença do antecedente e consequente, se comparar com o antecedente ou consequente, em ambas as rasoens do mesmo modo, o resultado estará em proporçaõ. n. 183.

Em toda a proporçaõ geometrica, a soma, ou differença dos antecedentes he para a soma, ou differença dos consequentes, como qualquer dos antecedentes para o seu consequente. n 185.

Em qualquer numero de rasoens iguais, a soma de todos os antecedentes he para a soma de todos os consequentes, como qualquer antecedente para o seu consequente. n. 186.

Rasaõ composta he a que resulta de duas, ou mais rasoens, multiplicando entre si os antecedentes, e da mesma sorte os consequentes. n 187.

Rasaõ *duplicada*, *triplicada*, *quadruplicada* &c, he a que se compoem de duas, tres, quatro &c rasoens iguais. n. 189.

Os productos de duas ou mais proporçoens, multiplicadas por ordem, ou termo por termo, tambem estaõ em proporçaõ n. 190.

As potencias semelhantes de quatro termos proporcionais, tambem saõ proporcionais. n. 191.

As raizes semelhantes de quatro termos proporcionais, tambem saõ proporcionais. n. 192.

A *Regra de tres* tem por objecto achar hum dos termos de huma proporçaõ por meio dos outros. Esta he *simples*, quando a questaõ naõ involve mais do que quatro termos: e *composta*, quando involve mais de quatro. n. 194. 196.

A regra de tres *directa* he quando hum dos termos principais deve conter o outro do mesmo modo que o relativo do primeiro contém o relativo do segundo; e *inversa*, ou *reciproca*, quando hum dos termos principais devé conter o outro, como o relativo deste contém o daquelle. n. 194. 195.

Na Regra directa cada termo principal com o seu relativo devem occupar juntamente o lugar de antecedentes, ou de consequentes; e na inversa, devem ter juntamente ou o lugar de meios, ou o de extremos. n. 194. 195.

A *Regra de Companhia* tem por objecto dividir hum numero em partes proporcionais a quaisquer numeros dados. n. 197.

Para achar qualquer dellas, faremos: Como a soma dos numeros dados para o numero proposto, assim qualquer dos numeros dados para a parte que lhe he proporcional. n. 197.

A *Regra de falsa posiçaõ* he simples

dos inteiros, antes da dizima do mesmo Logarithmo. n. 222.

O numero correspondente a qualquer Logarithmo tem sempre tantas letras, quantas saõ as unidades da characteristica, e mais huma. n. 222.

A soma dos Logarithmos de dous numeros he igual ao Logarithmo do seu producto. n. 226.

O Logarithmo de qualquer potencia de hum numero he igual ao Logarithmo delle, multiplicado pelo expoente da mesma potencia. n. 229.

O Logarithmo de qualquer raiz de hum numero he igual ao Logarithmo delle, dividido pelo expoente da mesma raiz. n. 230.

O Logarithmo do quociente de huma divisaõ he igual ao Logarithmo do dividendo menos o Logarithmo do divisor. n. 231.

Pratica-se a regra de tres por Logarithmos, somando os Logarithmos do segundo e terceiro termo, e tirando da soma o Logarithmo do primeiro; o resto he o Logarithmo do quarto. n. 232.

O Logarithmo de hum numero acompanhado de fracçaõ, acharse-ha, reduzindo tudo a fracçaõ, e tirando o Logarithmo do denominador do Logarithmo do numerador. n. 234.

O Logarithmo de huma fracçaõ propria he igual á differença dos Logarithmos do numerador e denominador, precedida do sinal —, o qual mostra que esta differença he subtractiva; e por isso os Logarithmos das fracçoens proprias se devem tratar de hum modo contrario ao que se pratica com os Logarithmos dos numeros inteiros. n. 235.

Se á characteristica de hum Logarithmo se ajuntar huma, duas, tres unidades &c., corresponderá a hum numero dés, cem, mil vezes &c maior; e ao contrario. n. 238.

Para achar o Logarithmo de hum numero maior do que os das Taboas, busca-se nellas o Logarithmo que corresponde ás primeiras quatro, ou sinco letras delle, conforme o alcance das Taboas, e juntamente a differença deste Logarithmo ao immediatamente maior nas mesmas Taboas; esta differença se multiplicará pelo resto das letras do numero proposto, e do producto se cortaráõ outras tantas para a direita; as que ficarem se ajuntaráõ ao dito Logarithmo menor, e a soma com a characteristica competente será o Logarithmo procurado. n. 239.

O Logarithmo de hum numero seguido de dizima busca-se como se fosse inteiro, e da Characteristica se tiraõ tantas unidades, quantas saõ as casas decimais. n. 240.

O Logarithmo de huma fracçaõ decimal propria busca-se tambem, como se fosse numero inteiro, mas esse Logarithmo se tira de tantas unidades, quantas saõ as casas decimais, e ao resto se poem o sinal —.

Para achar o numero correspondente a hum Logarithmo, que se naõ acha nas Taboas, mas cahe entre dous Logarithmos da suprema classe dellas, tomar-se-ha a differença dos Logarithmos entre os quais elle cahe, e a differença entre o menor delles, e o Logarithmo proposto; e dividindo esta por aquella, o quociente nos dará as letras decimais, que devemos ajuntar ao numero correspondente ao Logarithmo proximamente menor. n. 243.

Se o Logarithmo tiver menor, ou maior characteristica, do que a classe suprema das Taboas, reduzir-se-ha a ella, ajuntandolhe, ou tirando-lhe as unidades necessarias; e no numero achado se adiantará a virgula

Pag.	*Linh.*	*Erratas*	*Emendas*
4.	29.	vezem	vezes
41.	4.	R partir	59. Repartir
55.	13.	Para que	68. Para que
116.	18.	Para iſto	121. Para iſto
109.	25.	2549 18 7	2549 18 5
128.	20.	4 oitav. 57 gr. $\frac{3}{5}$	4 onç. 6 oitav. 28 gr. e $\frac{4}{5}$
ibid.	22.	3 oitav. 14 gr. $\frac{2}{5}$	3 onç. 1 oitav. 43 gr. e $\frac{1}{5}$

ARITHME
DE BEZO