DISSERTAÇÃO INAUGURAL

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARALLAXE DO SOL

POR

José Freire de Sousa Pinto

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1879

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O

ACTO DE CONCLUSÕES MAGNAS

NA

FACULDADE DE MATHEMATICA

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

A MEU TIO

VISCONDE DE S. JERONYMO

Em seus conselhos sabio, bom, prudente...

CASTRO FREIRE.

TESTIMUNHO DE RESPEITO E GRATIDÃO

José Freire de Sousa Pinto.

INTRODUCÇÃO

PARALLAXE DO SOL

INTRODUCÇÃO

A determinação da fórma e dimensões do systema planetario, a que pertence o globo que habitamos, constitue, sem duvida, um dos principaes problemas que têm pretendido resolver os esforços combinados da astronomia e da mechanica celeste.

O conhecimento das leis de Kepler e dos valores dos elementos das orbitas planetarias, bem como das variações que devem applicar-se a estes elementos, a fim de attender ás perturbações que os corpos do systema exercem uns sobre os outros no movimento elliptico dos planetas em torno do sol, são os requisitos necessarios para a resolução d'esse problema.

A astronomia incumbe-se da determinação dos elementos das orbitas, os quaes fixam as suas dimensões e posições, e a situação em cada uma d'ellas do respectivo planeta n'um certo instante. A mechanica celeste, por outra parte, fornece as formulas das variações d'estes elementos.

Vê-se portanto como as duas sciencias contribuem junctamente para o conhecimento completo do systema do mundo, no que diz respeito á sua fórma e dimensões; e claro está que tudo o que, n'uma ou n'outra, fizer parte do papel que lhe coube na resolução d'este momentoso problema, é de summo interesse e importancia.

A terceira lei de Kepler, ligando a duração das revoluções planetarias com a grandeza dos eixos maiores respectivos, dá immediatamente as relações d'estes eixos entre si; e assim, se tomarmos um d'elles para unidade linear, os valores de todos os outros poderão deduzir-se da mesma lei.

D'este modo, e suppondo determinados todos os outros elementos, a fórma do systema planetario será conhecida; mas não succederá outro tanto com as suas dimensões absolutas: o conhecimento d'estas depende da determinação do eixo maior de qualquer das orbitas em unidades conhecidas.

Emquanto esta determinação não fôr effectuada, está-se, como diz Delaunay, n'um caso analogo áquelle em que, conhecendo todos os angulos d'uma rede trigonometrica, não se conhece nenhum dos lados: desde que um d'elles fôr determinado, todas as dimensões da rede o ficarão.

A determinação do eixo maior d'uma das orbitas planetarias tem pois, na resolução do problema das dimensões do systema do mundo, uma importancia tão grande como a da medida da base no calculo d'uma rede trigonometrica.

E é por isso que o conhecimento do valor da parallaxe solar, que vale o mesmo que a distancia do sol á terra, tem merecido a attenção dos astronomos antigos e modernos.

No estudo, que nos propomos, vamos occupar-nos d'este problema fundamental.

O caminho, que temos em vista seguir, é: 1.º dar uma succinta relação dos primeiros trabalhos dos astronomos sobre a questão; 2.º expôr os methodos que a resolvem, cujos resultados merecem confiança, e que, como taes, têm sido modernamente applicados, comparando-os entre si, em seguida, a fim de dar preferencia ao que nos parecer mais vantajoso; 3.º dar noticia das applicações que os astronomos modernos têm feito d'estes methodos, e do modo como, segundo os principios do calculo das probabilidades, têm combinado os seus resultados para chegar ao valor adoptado da parallaxe do sol.

O caminho que temos de seguir será: 1.° dar uma succinta relação dos primeiros trabalhos dos astronomos sobre a questão; 2.° expôr os methodos [illegible] cujos resultados merecem confiança, e que, como taes, têem sido modernamente applicados, comparando-os entre si, em seguida, a fim de dar preferencia ao que nos parecer mais vantajoso; 3.° dar noticia das applicações que os astronomos modernos têem feito d'estes methodos, e do modo como, segundo os principios do calculo das probabilidades, têem combinado os seus resultados para chegar ao valor adoptado da parallaxe do sol.

[illegible]

D'este modo, e suppondo determinados todos os outros elementos, [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] problema fundamental.

PARTE I

NOÇÕES HISTORICAS PRELIMINARES

Trabalhos dos astronomos até á passagem de Venus de 1761

1. As avaliações grosseiras que os astronomos antigos fizeram da distancia do sol á terra deram-lhes ideias muito acanhadas das dimensões do systema do mundo.

Á medida porém que se iam desenvolvendo as noções verdadeiras sobre a natureza dos movimentos dos planetas e aperfeiçoando os meios de observação, as dimensões do systema planetario alargavam-se tambem cada vez mais, até que, a applicação dos preciosos methodos fundados sobre a investigação da parallaxe de Marte e sobre as observações das passagens de Venus pelo disco do sol, os quaes opportunamente exporemos, começou a approximar sensivelmente os astronomos do verdadeiro valor da parallaxe solar.

2. A primeira avaliação da distancia da terra ao sol, de que temos noticia, é a de Pythagoras, que viveu no seculo V antes da era christã. Este geometra attribuia á distancia entre os dois corpos apenas um valor de 16 ou 18 mil legoas, isto é, proximamente 12 ou 14 raios terrestres.

Aristarcho de Samos, astronomo notavel, pertencente á Escola de Alexandria, e que viveu no seculo II antes de Christo, procurou tambem obter o valor da parallaxe do sol, pela observação da distancia angular entre elle e a lua, na epocha em que esta se acha no seu primeiro quarto.

Posto que esse methodo o conduzisse a um resultado ainda muito inexacto, todavia a consideração, sobre que elle se funda, é simples e verdadeira.

Com effeito, na epocha do quarto crescente lunar, o triangulo *L T S* (fig. 1), formado pelo sol, pela lua, e pela terra, é necessariamente rectangulo em *L*, e portanto o valor do angulo *T* fará conhecer o do angulo *S*. Pela observação da distancia angular entre a lua e o sol, determina-se pois o angulo que no sol subtende o raio da orbita lunar.

E como, pelo valor da parallaxe da lua, se conhece a relação que existe entre o raio da orbita lunar e o raio terrestre, póde calcular-se o angulo que no sol subtende este ultimo, isto é, a parallaxe solar.

A observação deu *T* egual a 87°, donde Aristarcho concluiu o valor de 3° para o angulo *S* e portanto o de 3′ para a parallaxe do sol, pois que, sendo o raio da terra proximamente 60 vezes menor que o da orbita da lua, o angulo subtendido por elle, será tambem 60 vezes menor que *S*.

Segundo este valor, a distancia da lua á terra deveria ser apenas 20 vezes menor que a do sol, resultado muito distante da verdade. Assim era de esperar, embora fosse exacta a consideração em que o methodo se funda, pois que ao valor do angulo *S* transmittir-se-iam os erros commettidos na observação do angulo *T;* e a pouca precisão dos meios de que, para esta observação, Aristarcho poderia dispôr, leva a suppôr consideraveis esses erros.

Todavia este valor da parallaxe solar, deduzido das observações de Aristarcho, posto que muito distante ainda do verdadeiro, já recuou os limites do systema planetario muito para além do termo que até então se lhes tinha assignado, e foi geralmente adoptado desde Aristarcho até Tycho Brahe inclusivamente.

Kepler foi o primeiro que, depois d'este longo intervallo de tempo, retomou a questão no principio do seculo XVII, quando se occupava dos seus celebrados trabalhos sobre o movimento de Marte. O resultado das suas investigações foi reduzir a 1′ o limite superior da parallaxe solar.

3. Pouco depois d'estes trabalhos de Kepler, lembrou-se finalmente Cassini de resolver o problema d'um modo indirecto, procurando deduzir a parallaxe solar da de Marte.

Pelo estudo do movimento de Marte sabe-se que, quando este planeta está em opposição, a distancia d'elle á terra é muito menor que a do sol, e portanto a sua parallaxe uma quantidade muito mais sensivel que a parallaxe solar. Tal foi a consideração que despertou em Cassini a lembrança de deduzir este ultimo angulo da observação d'aquelle.

Para obter pela observação a parallaxe de Marte, propunha Cassini a comparação de observações simultaneas do planeta, feitas na epocha da sua opposição, em dois logares da terra muito distantes entre si.

Vê-se com effeito que, para uma dada distancia entre os dois logares, a maior ou menor differença dos resultados da observação depende evidentemente da menor ou maior distancia do planeta observado; e concebe-se assim como a comparação dos mesmos resultados póde conduzir ao conhecimento da grandeza da parallaxe.

A fim de pôr em pratica este methodo, a Academia das Sciencias de Paris enviou, nos fins do seculo XVII, o astronomo Richer a Cayenna, na Africa, em quanto Cassini, Roemer e Picard ficaram em differentes logares de França. A comparação das observações simultaneas do planeta, feitas por estes astronomos, levou-os a julgar insensivel, isto é, comprehendido nos limites dos erros, o effeito da parallaxe de Marte. Em vista d'isto concluiram que esta parallaxe não podia ser superior a 25″, e portanto a do sol tambem não excederia 10″. Cassini fixou o seu valor em 9″,5.

Em 1751 Lacaille fez observações de Marte no Cabo da Boa Esperança, tambem com o fim de determinar a parallaxe do sol. A comparação d'ellas com muitas feitas na Europa deu para este elemento o valor de $10''$. E observações similhantes de Venus, que se achava então em conjuncção inferior, mas não ecliptica, deram aproximadamente o mesmo resultado.

4. As passagens d'este ultimo planeta pelo disco do sol, que tiveram logar em 1761 e 1769, offereceram, em seguida, aos astronomos um novo meio de conhecer o valor da parallaxe do sol; e foi principalmente esta ultima passagem que os levou ao primeiro valor d'ella, sensivelmente approximado do que lhe assignam todas as determinações posteriores, feitas com os maiores cuidados e nas condições mais provaveis d'um resultado verdadeiro.

Quando Venus passa entre a terra e o sol, isto é, na epocha da sua conjuncção inferior, concebe-se que deve projectar-se sobre o sol, formando no disco brilhante d'este astro como que uma mancha negra.

Vê-se tambem que, em virtude da combinação do seu movimento proprio com o do sol, o planeta parecerá descrever uma corda do disco solar; e, attendendo á differença de parallaxes entre os dois corpos celestes, é claro que, a logares diversos da terra, corresponderão cordas diversas descriptas pelo planeta no disco do sol, e que a differença de grandeza d'ellas será dada pela da duração das passagens.

Prevê-se portanto que, observando o phenomeno em diversos logares do globo, se poderá obter a differença das parallaxes do sol e de Venus.

Esta differença e a relação das mesmas parallaxes, dada para qualquer epocha pela theoria dos movimentos ellipticos, serão depois elementos sufficientes para determinar os valores absolutos das parallaxes dos dois astros.

Taes são as considerações sobre que se funda o methodo das passagens de Venus, que tem contribuido em grande parte para a determinação da verdadeira parallaxe solar.

Este methodo ingenhoso e simples, que adeante devidamente desenvolveremos, foi, pela primeira vez, concebido por Halley em 1678, apenas de 22 annos de edade, quando se occupava em Santa Helena de determinar as posições das estrellas circumpolares austraes. A observação d'uma passagem de Mercurio, que teve logar n'essa epocha, suggeriu-lhe a ideia de applicar este phenomeno á determinação da parallaxe do sol, e em 1691 publicou o seu methodo nas *Transacções philosophicas* da Sociedade Real de Londres.

Em 1716 publicou de novo nas mesmas *Transacções* uma Memoria, na qual desenvolvia o methodo, a fim de mostrar a sua importancia e utilidade, quando fosse applicado ás passagens de Venus, exhortando os astronomos a prepararem-se para a que devia ter logar em 1761, e dando-lhes todas as indicações necessarias para a sua conveniente observação.

Este celebre astronomo inglez julgava-se no dever de suppôr a parallaxe do sol inferior a 15″, por singulares considerações sobre a relação de grandeza entre a lua e Mercurio, e entre Venus e a terra, fundadas na harmonia do systema do mundo, as quaes mostram em Halley um espirito penetrante, mas não têm valor scientifico (Arago, *Astronomia Popular*, tom. 3.º, pag. 366).

5. As observações da passagem de 5 de Junho de 1761, a qual foi a primeira que offereceu aos astronomos o ensejo de pôr em pratica o methodo de Halley, não deram resultados satisfactorios.

Dubois na sua conhecida obra — *Passagens de Venus* — apresenta um quadro de 120 estações, onde se observou esta passagem, com os nomes dos respectivos observadores e os resultados immediatos da observação.

D'estas observações as mais notaveis, segundo De Lalande, foram as completas feitas por Wargentin em Stockolmo, por Chappe d'Auteroche em Tobolsk, por Bergmann em Upsal e por Planman em Cajaneburgo, e a incompleta feita por Mason no

Cabo da Boa Esperança, cuja longitude, contada de Paris, se julgava bem conhecida.

A comparação das duas primeiras observações deu a parallaxe 10″,4, a das observações de Upsal e Cajaneburgo com as de Tobolsk deu 9″, e finalmente a observação incompleta do Cabo da Boa Esperança deu 8″,6.

A differença d'estes resultados, que se reputavam de maior confiança, mas que, ainda assim, excedia a dos limites já admittidos antes da passagem, provinha certamente, não só da diversidade e imperfeição dos instrumentos com que se fizeram as observações, e das difficuldades inherentes á observação do phenomeno, mas tambem da situação desfavoravel das estações, onde as differenças das durações da passagem não excediam dois minutos.

D'este modo as comparações não mereciam grande confiança, por isso que bastavam menos de 5 segundos de erro n'aquellas para produzir não menos de meio segundo de erro na parallaxe (De Lalande, *Astronomia*, n.os **2142** a **2144**).

Encke, astronomo allemão, publicou em **1822** uma Memoria sobre a distancia do sol á terra, deduzida das observações relativas á passagem de Venus de **1761**. A discussão das observações pelo methodo das equações de condição, de que daremos noticia, levou o illustre astronomo ao valor medio da parallaxe

8″,490525.

Este resultado porém, como acabamos de ver, não póde inspirar confiança alguma.

6. A passagem de **1769** satisfez melhor a expectativa dos astronomos, que não se pouparam aos mais extraordinarios esforços a fim de obter por ella, com precisão, o valor da parallaxe do sol. É d'aquella epocha que datam as determinações d'este importante elemento do systema do mundo, os quaes, pela quasi completa concordancia de seus resultados parciaes, levam a considerar o resultado final como pouco distante do verdadeiro.

Em vista d'isto, interrompemos n'este ponto o resumido esboço historico, que havemos traçado, dos admiraveis trabalhos a que, desde remotos tempos até aos nossos dias, se têm entregado os astronomos, para a resolução do problema; a fim de expormos com o devido desenvolvimento os methodos de que ultimamente se tem feito uso.

Depois continuaremos mais circumstanciadamente com a historia dos trabalhos dos astronomos desde a passagem de 1769 até a epocha actual.

forços a fim de obter por elle, com precisão, o valor da parallaxe do sol. E d'aquella epocha que datam as determinações d'este importante elemento do systema do mundo, os quaes, pela quasi completa concordancia de seus resultados parciaes, levam a considerar o resultado final como pouco distante do verdadeiro.

Em vista d'isto, interrompemos n'este ponto o resumido esboço historico, que havemos traçado, dos aturados trabalhos a que, desde remotos tempos até aos nossos dias, se tem entregado os astronomos, para a resolução do problema; a fim de expormos com o devido desenvolvimento os methodos de que ultimamente se tem feito uso.

Depois continuaremos mais circumstanciadamente com a historia dos trabalhos dos astronomos desde a passagem de 1769 até a epocha actual.

PARTE II

METHODOS DIRECTOS E INDIRECTOS

PARTE II

METHODOS DIRECTOS E INDIRECTOS

METHODOS DIRECTOS

Observações de Marte em opposição.
Passagens de Venus.

São de duas naturezas os methodos de que se tem feito uso na determinação da parallaxe solar, podendo por isso dividir-se em duas classes: *directos* e *indirectos*.

Os methodos directos determinam o valor da parallaxe pela relação immediata que ella tem com os dados que a observação ministra; os indirectos deduzem-a de relações em que ella entra, já adoptadas nas equações perturbadoras dos movimentos celestes.

Na primeira classe entram as determinações: 1.º pelas observações de declinação ou ascensão recta de Marte na epocha da sua opposição; 2.º pelas passagens de Venus.

Na segunda classe entram as determinações: 1.º pela desegualdade lunar do movimento da terra; 2.º pela desegualdade parallactica da lua; 3.º pelo conhecimento da constante da aberração.

Começamos pelos methodos directos, dos quaes nos occuparemos especialmente n'este estudo.

METHODOS DIRECTOS

Observações de Marte em opposição.

Passagens de Venus.

CAPITULO I

Determinação da parallaxe solar pelas observações de Marte

Noções preliminares

7. Constante da parallaxe solar. — A parallaxe solar não é uma quantidade constante, pois que, como se sabe, a distancia do sol á terra varia continuamente, á medida que este planeta descreve a sua orbita em torno d'aquelle astro. O valor da parallaxe do sol que se pretende conhecer, e que, como dissemos, é um elemento fundamental do systema do mundo, deve pois ser um dos que toma esta quantidade durante uma revolução completa da terra.

A distancia da terra ao sol cresce successivamente desde que ella se acha na extremidade perihelia do eixo maior, que corresponde á minima distancia, até que chega á extremidade aphelia, distancia maxima; depois decresce successivamente tomando os mesmos valores em ordem inversa até voltar á extremidade perihelia. A distancia media, ou a semi-somma das distancias perihelia e aphelia, que é tambem a grandeza do semi-eixo maior da orbita terrestre, é aquella cujo valor se procura.

Portanto, em termos precisos, o que se pretende determinar é a parallaxe horizontal do sol correspondente á epocha em que a sua distancia á terra é egual ao semi-eixo maior da orbita terrestre, e a este valor da parallaxe dá-se o nome de *parallaxe horizontal media do sol* ou de *constante da parallaxe solar*.

Posto isto, vejamos como, pelas observações de Marte, se póde chegar á sua determinação.

8. Essencia do methodo. — Nas primeiras applicações que se fizeram d'este methodo, proposto por Cassini, o caminho, que se seguia, era determinar pela observação a parallaxe de Marte, e deduzir depois do valor d'esta o da parallaxe do sol, mediante a relação entre as distancias do sol e de Marte á terra, n'essa epocha, dada pelas taboas dos dois astros.

Porém, ainda que se escolhessem as circumstancias mais favoraveis para a observação, fazendo-a na epocha em que o planeta está mais proximo da terra, a sua parallaxe é em todo o caso muito pequena, de modo que os erros da observação deviam ter sobre o valor absoluto d'ella uma influencia consideravel.

Para fugir a este inconveniente usando de observações mais seguras, tem-se ultimamente applicado o methodo do modo que vamos expôr.

A essencia do processo consiste em deduzir das observações de comparação com uma estrella vizinha, feitas em dois logares differentes, a differença das parallaxes respectivas do planeta em qualquer sentido; achar a expressão da mesma differença na parallaxe horizontal média do sol, e deduzir depois esta parallaxe da egualdade entre a expressão e o valor obtido d'aquella differença.

As observações podem fazer-se ou no instante da passagem do planeta pelo meridiano do logar, ou antes e depois d'esta passagem. Vamos ver separadamente como devemos servir-nos d'umas e d'outras.

Observações meridianas

9. Distancias zenithaes meridianas. — Supponhamos primeiramente que se têm escolhido os dois logares de observação situados em latitudes muito differentes, mas quasi no mesmo meridiano. O motivo da primeira condição é obvio, porque a differença das parallaxes, que se quer deduzir da observação, será tanto mais sensivel, quanto maior fôr a distancia entre os dois logares. Em quanto á segunda condição, o que vamos expôr a justifica.

Escolhidos os logares, supponhamos que, na epocha mais favoravel e na mesma noute, se observa em ambos elles a distancia zenithal meridiana do planeta; e sejam z e z_1 estas distancias observadas, já correctas da refracção, isto é, as *distancias zenithaes meridianas apparentes.*

Designemos agora por z' e z'_1 as mesmas distancias apparentes, correctas dos angulos ω e ω_1 que as verticaes dos dois logares formam com os raios terrestres correspondentes, e das parallaxes respectivas p e p_1, isto é, as *distancias zenithaes meridianas verdadeiras.*

Para evitar confusões, desde já advertimos que, na deducção que vamos fazer, suppomos os dois logares collocados no mesmo hemispherio, o do norte por exemplo, e o planeta ao sul dos dois zeniths respectivos. Opportunamente veremos as mudanças de signaes que se devem applicar ás quantidades que entram nas formulas, quando estas condições variarem.

Attendendo á fórma da terra, teremos pois

$$z' = z - \omega - p, \qquad z'_1 = z_1 - \omega_1 - p_1$$

Por outra parte, se chamarmos φ' e φ'_1 as latitudes geocentricas dos dois logares, e δ e δ_1 as declinações tambem geocentricas do planeta nos dois instantes da observação, serão

$$z' = \varphi' - \delta, \qquad z'_1 = \varphi'_1 - \delta_1.$$

Podemos portanto estabelecer a relação

$$(z-\omega-p)-(z_1-\omega_1-p_1)=(\varphi'-\delta)-(\varphi'_1-\delta_1),$$

donde

$$p-p_1=z-z_1-[(\varphi'+\omega)-(\varphi'_1+\omega_1)]+\delta-\delta_1;$$

e como, attendendo ás significações de φ', φ'_1, ω e ω_1, as expressões $\varphi'+\omega$ e $\varphi'_1+\omega_1$ representam as latitudes astronomicas φ e φ_1, isto é, as latitudes referidas, não ao raio da terra como φ' e φ'_1, mas á vertical, temos finalmente

$$p-p_1=z-z_1-(\varphi-\varphi_1)+\delta-\delta_1 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Por meio d'esta formula póde deduzir-se da observação a differença das parallaxes $p-p_1$.

A primeira parte do segundo membro $z-z_1-(\varphi-\varphi_1)$ é, na verdade, dada pela observação, como se sabe; mas a quantidade $\delta-\delta_1$ não o póde ser immediatamente, visto que δ e δ_1 representam as declinações geocentricas.

Todavia, se nos lembrarmos agora de que os dois logares foram escolhidos quasi no mesmo meridiano, vemos que o movimento do planeta em declinação, durante a sua passagem d'um meridiano para o outro, deve ser quasi insensivel, e portanto $\delta-\delta_1$ uma quantidade pequenissima. Em vista d'isto não se commetterá erro sensivel prescindindo d'ella, ou usando do seu valor tirado das ephemerides ou das taboas, cujos erros não influem sensivelmente na differença.

Passamos agora a deduzir a expressão da mesma differença de parallaxes $p-p_1$ em funcção da parallaxe horizontal média do sol, que designamos por π_0, e que suppomos referida ao raio terrestre equatorial.

Chamando π e π_1 as parallaxes horizontaes equatoriaes do planeta nos dois instantes da observação, e ρ e ρ_1 os raios terrestres nos respectivos logares, $\rho \operatorname{sen} \pi$ e $\rho_1 \operatorname{sen} \pi_1$ serão os senos das parallaxes horizontaes do planeta nos mesmos instantes, referidas aos raios ρ e ρ_1, quando se toma para unidade o raio equatorial, ao qual se referem, como π_0, as parallaxes π e π_1.

Segundo a formula conhecida da parallaxe, e attendendo sempre á fórma da terra, teremos pois

$$\operatorname{sen} p = \rho \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen}(z - \omega), \quad \operatorname{sen} p_1 = \rho_1 \operatorname{sen} \pi_1 \operatorname{sen}(z_1 - \omega_1)$$

ou, com sufficiente approximação,

$$p = \rho\pi \operatorname{sen}(z - \omega), \qquad p_1 = \rho_1 \pi_1 \operatorname{sen}(z_1 - \omega_1) \ldots\ldots \quad (2)$$

pois que, embora se escolha para a observação a epocha em que p, p_1, π e π_1 são maximos, por se observar o planeta quando elle se acha mais proximo da terra, comtudo os valores d'estes arcos são sempre só d'alguns segundos, e por isso não se commette erro sensivel tomando-os pelos senos respectivos.

Por outro lado temos

$$\operatorname{sen} \pi = \frac{1}{D}, \ \operatorname{sen} \pi_1 = \frac{1}{D_1}, \ \operatorname{sen} \pi_0 = \frac{1}{D_0}$$

notando que se tomou para unidade o raio equatorial, e chamando D e D_1 as distancias do planeta ao centro da terra, nos instantes da sua passagem pelos meridianos dos dois logares; e egualmente D_0 a distancia média do sol á terra. D'estas relações tira-se

$$\operatorname{sen} \pi = \frac{D_0}{D} \operatorname{sen} \pi_0, \qquad \operatorname{sen} \pi_1 = \frac{D_0}{D_1} \operatorname{sen} \pi_0,$$

ou, mais simplesmente,

$$\pi = \frac{D_0}{D} \pi_0, \qquad \pi_1 = \frac{D_0}{D_1} \pi_0,$$

tendo em vista o que se disse a respeito de π e π_1, e que, com mais razão ainda, se póde dizer de π_0.

A theoria dos movimentos ellipticos planetarios faz conhecer as relações $\frac{D_0}{D}, \frac{D_0}{D_1}$; por quanto, quer o Nautical Almanac, quer as taboas dos planetas, dão, o primeiro immediatamente e as segundas por formulas apropriadas (*Calc. das Ephem. astr.* de Coimbra, n.º 36), os valores Δ, Δ_1..., das distancias dos planetas á terra em qualquer instante, referidas á distancia média D_0 do sol, como unidade, e portanto teremos

$$\Delta = \frac{D}{D_0}, \quad \Delta_1 = \frac{D_1}{D_0}.$$

Introduzindo estes valores nas formulas precedentes, vem as relações

$$\pi = \frac{\pi_0}{\Delta}, \quad \pi_1 = \frac{\pi_0}{\Delta_1},$$

que poderiam logo deduzir-se das definições de π, π_1, Δ e Δ_1; entendendo que, na sua applicação, devemos substituir por Δ e Δ_1 os valores das distancias do planeta á terra nos dois instantes da observação, fornecidos pelos logares citados.

Se substituirmos agora as expressões de π e π_1 nas formulas (2), e subtrahirmos depois estas uma da outra, vem a relação

$$p - p_1 = \pi_0 \left[\frac{\rho}{\Delta} \operatorname{sen}(z - \omega) - \frac{\rho_1}{\Delta_1} \operatorname{sen}(z_1 - \omega_1) \right] \ldots\ldots (3),$$

a qual exprime, na parallaxe horizontal equatorial média do sol π_0, a differença das parallaxes $p - p_1$, que se deduz da observação por meio de (1).

Emfim a comparação das expressões (1) e (3) dá

$$\pi_0 = \frac{z - z_1 - (\varphi - \varphi_1) + \delta - \delta_1}{\frac{\rho}{\Delta}\,\mathrm{sen}\,(z - \omega) - \frac{\rho_1}{\Delta_1}\,\mathrm{sen}(z_1 - \omega_1)}$$

ou

$$\pi_0 = \frac{n}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

chamando n e a as quantidades deduzidas da observação pelas formulas

$$\left.\begin{aligned} n &= z - z_1 - (\varphi - \varphi_1) + (\delta - \delta_1) \\ a &= \frac{\rho}{\Delta}\,\mathrm{sen}\,(z - \omega) - \frac{\rho_1}{\Delta_1}\,\mathrm{sen}\,(z_1 - \omega_1) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

O systema das equações (4) e (5) parece pois sufficiente para resolver o problema da parallaxe solar por meio das observações meridianas de Marte.

Todavia na pratica é conveniente introduzir alguma modificação, como passamos a expor.

10. Differenças de declinação meridianas. — A differenciação da relação (4) dá a formula

$$d\,\pi_0 = \frac{dn}{a} - \frac{da\,\mathrm{sen}\,\pi_0}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6);$$

por onde se reconhece que os erros dn do numerador têm sobre π_0 uma influencia muito maior que os da do denominador, por quanto, no valor de $d\pi_0$, o coefficiente d'aquelles erros é maior que o d'estes na relação de 1 para sen π_0. D'aqui se vê que deve haver o maximo cuidado na avaliação de n.

Ora, se para obter esta quantidade nos servirmos, como dissemos, da primeira das formulas (5), os erros das distancias zenithaes absolutas z e z_1, provenientes da inexactidão das divisões dos circulos, e das taboas das refracções, assim como os erros das latitudes φ e φ_1 dos dois logares, não deixarão ter grande confiança no seu valor. Para o determinar com maior precisão substitue-se, como vamos ver, a observação d'estas quantidades absolutas pela das differenças de declinação apparente entre o planeta no instante da sua passagem meridiana e uma estrella, cuja declinação conhecida d seja tão pouco differente da do planeta n'aquelle instante que, conservando o instrumento na mesma posição, ambos os astros passem pelo campo do oculo, a fim de obter por medidas micrometricas as differenças de declinação. Estas differenças, observadas nos dois logares, devem depois ser corrigidas das differenças de refracção respectivas, que, sendo muito pequenas em virtude da vizinhança dos parallelos dos dois astros, podem avaliar-se com muita exactidão.

Sejam $\Delta\delta$ e $\Delta\delta_1$ estas differenças de declinação apparente já correctas da refracção: teremos

$$\Delta\delta = (\delta - p) - d, \qquad \Delta\delta_1 = (\delta_1 - p_1) - d$$

visto que os valores das parallaxes em distancia zenithal e declinação meridianas são os mesmos, mas de signaes contrarios.

É pois

$$n = p - p_1 = \delta - \delta_1 - (\Delta\delta - \Delta\delta_1) \; \ldots\ldots \; (7),$$

onde $\Delta\delta$ e $\Delta\delta_1$ representam sempre a declinação apparente do planeta menos a da estrella, devendo, por isso, applicar-se-lhe o signal + ou —, conforme a estrella escolhida fica mais ou menos longe do polo que o planeta.

Para calcular o coefficiente a por meio d'estes novos dados da observação, basta introduzir na segunda das formulas (5) as relações

$$d+\Delta\delta=\varphi-z, \quad d+\Delta\delta_1=\varphi_1-z_1,$$

o que dá

$$a=\frac{\rho}{\Delta}\operatorname{sen}[\varphi'-(d+\Delta\delta)]-\frac{\rho_1}{\Delta_1}\operatorname{sen}[\varphi'_1-(d+\Delta\delta_1)] \,.\,. \quad (8)$$

Do que deixamos dicto conclue-se que, observando com cuidado, pelos movimentos micrometricos do fio movel, as differenças de declinação entre o planeta, no instante da sua passagem meridiana, e uma estrella previamente escolhida, e tomando nota da declinação absoluta da estrella, podem calcular-se a e n por meio das formulas (7) e (8), e portanto π_0 pela formula (4), suppondo conhecidas as latitudes geocentricas dos dois logares de observação e os respectivos raios terrestres.

11. Disposição relativa dos dois logares e do planeta. — Temos supposto na deducção precedente os dois logares situados no mesmo hemispherio, e o planeta abaixo dos zeniths respectivos, isto é, mais longe do polo que elles. É preciso indagar agora as modificações que experimentarão as formulas (7) e (8), quando variarem estas condições, para em todos os casos sabermos applicar, por meio d'ellas, a formula (4).

Imaginemos primeiramente os dois logares ainda no mesmo hemispherio e o planeta situado entre os seus zeniths, ou acima de ambos elles, o que, com o caso supposto, constitue todas as hypotheses imaginaveis.

Os signaes das quantidades, que entram no segundo membro da formula (7), não dependem das posições dos dois logares relativamente ao planeta; por isso só temos a occupar-nos da (8).

N'esta é claro que as differenças

$$\varphi' - (d + \Delta\delta), \quad \varphi'_1 - (d + \Delta\delta_1)$$

entre as latitudes dos logares e as respectivas declinações apparentes do planeta, isto é, as distancias zenithaes meridianas, que, na hypothese em que se fez a deducção, são positivas, tornam-se ambas negativas, se o planeta passa para cima de ambos os zeniths; o que não faz senão mudar o signal de a.

Se o planeta se acha entre os zeniths, mudará de signal sómente aquella das mesmas differenças que se refere ao logar de observação, cujo zenith fica abaixo do planeta: n'esta hypothese o segundo membro de (8) converte-se n'uma somma, e portanto o seu valor augmenta. Ora, se attendermos á formula (6), em que a quantidade a entra no denominador de ambos os termos, torna-se evidente que a precisão do valor calculado de π_0 será tanto maior quanto mais consideravel fôr este coefficiente a. Portanto na pratica a disposição mais favoravel dos dois logares, em relação á posição do planeta na epocha da observação, é a de ficar este entre os dois zeniths respectivos.

Se os logares não estão situados no mesmo hemispherio, as latitudes respectivas φ' e φ'_1 tornam-se de signaes contrarios, subsistindo tudo o que fica dicto com relação á posição do planeta.

Observações extrameridianas

12. Differenças de declinação extrameridianas. — Supponhamos agora que, com um equatorial, se observam, nos dois logares, as differenças de declinação entre uma estrella e o planeta, antes ou depois das respectivas passagens meridianas.

Sejam ainda d a declinação da estrella, (δ) e (δ_1) as declinações geocentricas do planeta correspondentes ás duas epochas de observação, e $\Delta(\delta)$ e $\Delta(\delta_1)$ as differenças de declinação observadas. Chamando ϖ e ϖ_1 as respectivas parallaxes de distancia polar, que são eguaes ás de declinação, só com differença de signal, teremos

$$\Delta(\delta) = (\delta) - \varpi - d, \qquad \Delta(\delta_1) = (\delta_1) - \varpi_1 - d$$

d'onde

$$\varpi - \varpi_1 = (\delta) - (\delta_1) - [\Delta(\delta) - \Delta(\delta_1)]$$

Portanto, observando as differenças de declinação extrameridianas do planeta e da estrella, póde obter-se o valor da differença das respectivas parallaxes de distancia polar $\varpi - \varpi_1$ exactamente pela mesma formula que dá a differença das parallaxes $p - p_1$ na passagem pelo meridiano.

Se exprimirmos agora a mesma differença $\varpi - \varpi_1$ em funcção da parallaxe do sol π_0, poderemos, como acima, determinar esta ultima pela formula (4).

Ora a parallaxe de distancia polar, desprezando os quadrados e productos das parallaxes, é dada pelas formulas

$$\tilde{\omega} = \frac{N \operatorname{sen}[(\delta) - \psi]}{\operatorname{sen} 1''}, \quad N = \frac{\rho \operatorname{sen} \pi \operatorname{sen} \varphi'}{\operatorname{sen} \psi}, \quad \operatorname{tang} \psi = \frac{\operatorname{tang} \varphi'}{\cos P'},$$

representando P' a differença entre o tempo sideral e a ascensão recta verdadeira, e sendo ainda π a parallaxe horizontal equatorial do planeta no instante da observação feita no logar correspondente á latitude φ' e ao raio terrestre ρ. Teremos pois, como ha pouco,

$$\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_1 = \pi_0 \left[\frac{\rho \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen}[(\delta) - \psi]}{\Delta . \operatorname{sen} \psi} - \frac{\rho \operatorname{sen} \varphi'_1 \operatorname{sen}[(\delta_1) - \psi_1)}{\Delta_1 . \operatorname{sen} \psi_1} \right]$$

O systema de formulas

$$\left. \begin{aligned} n &= (\delta) - (\delta_1) - [\Delta(\delta) - \Delta(\delta_1)] \\ a &= \frac{\rho \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen}[(\delta) - \psi]}{\Delta . \operatorname{sen} \psi} - \frac{\rho_1 \operatorname{sen} \varphi'_1 \operatorname{sen}[(\delta_1) - \psi_1]}{\Delta_1 . \operatorname{sen} \psi_1} \\ \pi_0 &= \frac{n}{a} \end{aligned} \right\} \ldots\ldots \quad (9)$$

resolve portanto o problema pela observação das differenças de declinação extrameridianas, como o resolvia o systema (4), (7) e (8) pela das differenças meridianas.

Em quanto ás declinações absolutas (δ) e (δ_1), cuja differença $(\delta)-(\delta_1)$ entra em n, que deve ser calculado com o maximo cuidado, diremos, como acima, que se podem tomar por seus valores os que dão as ephemerides ou as taboas.

No valor de a entram tambem estas coordenadas absolutas, não debaixo da fórma de differença, mas separadamente em cada termo; e, além d'estas, os angulos horarios P' e P'_1, de que dependem ψ e ψ_1. Todavia a pequena influencia dos erros de a no valor de π_0, especialmente quando a é consideravel (n.º **10**), torna ainda sufficiente a approximação dos valores d'estas coordenadas absolutas, fornecidos pelas taboas.

O que temos dicto parece-nos pois bastante para deduzir um valor de π_0 de cada par de observações, meridianas ou extrameridianas, das differenças de declinação entre o planeta e uma mesma estrella.

13. Differenças de ascensão recta.— Supponhamos finalmente que, nos dois logares, se observam, com um equatorial, as differenças $\Delta\alpha$ e $\Delta\alpha_1$ entre as respectivas ascensões rectas do planeta e a ascensão recta A da estrella.

Chamando $\tilde{\omega}'$ e $\tilde{\omega}'_1$ as parallaxes em angulo horario nos dois instantes, eguaes, em valor absoluto, ás de ascensão recta, temos, como acima,

$$\Delta\alpha = \alpha - \tilde{\omega}' - A, \qquad \Delta\alpha_1 = \alpha_1 - \tilde{\omega}'_1 - A$$

d'onde

$$\tilde{\omega}' - \tilde{\omega}'_1 = \alpha - \alpha_1 - (\Delta\alpha - \Delta\alpha_1)$$

Por outro lado a formula, que dá a parallaxe em angulo horario, é

$$\tilde{\omega}' = \frac{\rho\,\pi \cos\varphi' \operatorname{sen} P'}{\cos\delta},$$

onde ρ, π, ψ', P' e δ têm as significações que lhes temos dado até aqui.

Será pois

$$\varpi' - \varpi'_1 = \pi_0 \left[\frac{\rho \cos \varphi' \operatorname{sen} P'}{\Delta . \cos \delta} - \frac{\rho_1 \cos \varphi'_1 \operatorname{sen} P'_1}{\Delta_1 . \cos \delta_1} \right]$$

Portanto, para applicar a relação (4), basta fazer

$$\left.\begin{aligned} n &= \alpha - \alpha_1 - (\Delta\alpha - \Delta\alpha_1) \\ a &= \frac{\rho \cos \varphi' \operatorname{sen} P'}{\Delta . \cos \delta} - \frac{\rho_1 \cos \varphi'_1 \operatorname{sen} P'_1}{\Delta_1 . \cos \delta_1} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

São estas as formulas que resolvem o problema pela observação das differenças $\Delta\alpha$ e $\Delta\alpha_1$ de ascensão recta entre o planeta e uma estrella de comparação. Além d'estes dados fundamentaes da observação, é porém necessario tirar das taboas ou ephemerides as ascensões rectas absolutas do planeta α e α_1, que entram em n e calcular, por meio d'ellas, os angulos horarios P' e P'_1, que entram em a bem como as declinações δ e δ_1, as quaes se obtêm ainda pelas taboas ou ephemerides.

O movimento do planeta em ascensão recta, bem mais rapido que o de declinação, não dá logar a dizer-se aqui, a respeito da differença $\alpha - \alpha_1$, que entra em n, o mesmo que se disse com relação a $\delta - \delta_1$ e $(\delta) - (\delta_1)$. Todavia, se as observações, que se comparam, forem proximamente simultaneas, ainda não será grande o erro commettido em tomar por α e α_1 os valores que fornecem as taboas.

Em quanto ás coordenadas absolutas que entram em a, diremos aqui o mesmo que dissemos no n.º 12.

Pelo que respeita á observação das differenças de ascensão recta, $\Delta\alpha$ e $\Delta\alpha_1$, entre o planeta e a estrella de comparação, é evidentemente necessario que seja feita com o maximo cuidado e nas circumstancias mais favoraveis, vista a grande influencia que os erros do tempo têm nos resultados.

Para dar ao methodo uma precisão comparavel com a dos dois precedentes, devem determinar-se estas differenças $\Delta\alpha$ e $\Delta\alpha_1$ de ascensão recta por pequenos movimentos micrometricos do fio movel, escolhendo, para esse fim, estrellas de comparação muito vizinhas do planeta. E emquanto aos logares de observação, convém escolhel-os em latitudes não muito grandes, em geral inferiores a 40°, para que as parallaxes de ascensão recta sejam mais consideraveis.

14. Reducção das observações extrameridianas feitas n'uma noute com a mesma estrella. — Antes de terminarmos o que diz especialmente respeito ás observações extrameridianas, de differenças de declinação ou de ascensão recta, convém indicar o modo de combinar as diversas comparações que n'uma noute se podem fazer com a mesma estrella, a fim de as reduzir todas a uma só comparação.

Ás observações meridianas não se applica esta advertencia, porque cada estrella não póde dar logar a mais que uma comparação em cada noute.

Para incluir n'um só systema de formulas o que, sob este ponto de vista, temos a dizer a respeito das observações extrameridianas de declinação ou ascensão recta, designaremos geralmente por e e e_1 umas ou outras d'estas coordenadas nos dois instantes de cada par de observações, por Δe e Δe_1 as differenças respectivas entre cada uma das coordenadas do planeta, e e e_1, e a correspondente da estrella de comparação, e finalmente por c e c_1 os dois termos de a no systema (9) ou (10).

Estes dois systemas de formulas, segundo a notação indicada, ficam assim incluidos no systema geral

$$n = e - e_1 - (\Delta e - \Delta e_1)$$

$$a = c - c_1$$

$$\pi_0 = \frac{n}{a}$$

Supponhamos agora que é m o numero commum de observações feitas em uma noute, nos dois logares, com a mesma estrella. Estas observações dariam as equações seguintes:

$$e - e_1 - (\Delta e - \Delta e_1) = (c - c_1)\,\pi_0$$

$$e' - e'_1 - (\Delta e' - \Delta e'_1) = (c' - c'_1)\,\pi_0$$

. . . .

$$e^{(m-1)} - e_1{}^{(m-1)} - (\Delta e^{(m-1)} - \Delta e_1{}^{(m-1)}) = (c^{(m-1)} - c_1{}^{(m-1)})\,\pi_0$$

d'onde, sommando e tomando a média, resulta

$$\pi_0 = \frac{\dfrac{\Sigma e - \Sigma e_1}{m} - \dfrac{\Sigma \Delta e - \Sigma \Delta e_1}{m}}{\dfrac{\Sigma c}{m} - \dfrac{\Sigma c_1}{m}}.$$

Visto que os erros se dividem por m, e o erro provavel da somma das m partes, egualmente precisas, de que se compõe o numerador, é $\sqrt{m}$ vezes maior que o ε de cada uma d'ellas, será $\frac{\varepsilon\sqrt{m}}{m}=\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ o erro provavel do resultado médio. Por conseguinte a precisão d'este resultado será $\sqrt{m}$ vezes maior que a do proveniente d'uma só observação.

Reducção geral das observações meridianas e extrameridianas

15. Resta finalmente indicar o modo de combinar as comparações meridianas ou extrameridianas, feitas em noutes successivas, com diversas estrellas, a fim de deduzir d'uma serie de observações o valor mais provavel de π_0.

Cada comparação meridiana do planeta, ou cada série de comparações extrameridianas, feitas n'uma noute, com a mesma estrella, nos dois logares, dá, como temos visto, um valor de π_0 pela formula $\pi_0=\frac{n}{a}$, tendo este valor uma precisão proporcional á raiz quadrada do numero m de observações correspondentes. Haverá pois tantas equações de condição

$$\left.\begin{array}{c}\sqrt{m}\,(a\pi_0-n)=o,\quad \sqrt{m'}\,(a'\pi_0-n')=o,\\ \sqrt{m''}\,(a''\pi_0-n'')=o,\ldots\sqrt{m^{(i)}}\,(a^{(i)}\pi_0-n^{(i)})=o\end{array}\right\}(11)$$

quantas forem as estrellas com que se tiver comparado o planeta.

..

O methodo dos menores quadrados, applicado a estas equações, affectadas dos erros da observação, dará o valor mais provavel de π_0.

Para o applicar, sommaremos os primeiros membros, depois de os ter multiplicado pelos coefficientes $a\sqrt{m}$, $a'\sqrt{m'}$, ... da incognita, o que dará

$$\pi_0 \Sigma m^{(i)} a^{(i)2} - \Sigma a^{(i)} m^{(i)} n^{(i)} = o;$$

e assim obteremos finalmente o valor mais provavel

$$\pi_0 = \frac{\Sigma m^{(i)} a^{(i)} n^{(i)}}{\Sigma m^{(i)} a^{(i)2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Se forem mais que dois os logares de observação, combinar-se-hão, duas a duas, as comparações feitas com as mesmas estrellas em todos elles, a fim de formar todas as equações de condição (11), e por meio d'ellas o valor de π_0 com a maxima probabilidade.

É este um dos processos que póde empregar-se na reducção geral das observações. O calculo das probabilidades offerece porém outros meios de reducção, como se verá na terceira parte d'este trabalho, quando dermos noticia da applicação do methodo á opposição de Marte em 1862.

No emtanto o exposto é sufficiente para, mediante uma série de observações meridianas e extrameridianas do planeta, feitas em epocha conveniente e em differentes logares da terra, determinar a parallaxe do sol.

Convém ainda discutir uma questão importante, principalmente quando se tracta de pôr em pratica este methodo. Fallamos da comparação, a que vamos proceder, das vantagens que offerecem, na resolução do problema, os dois generos de observações — meridianas e extrameridianas. —

Comparação das observações meridianas e extrameridianas

16. Principios geraes. — Quando, para deduzir de quantidades observadas outra desconhecida, se tem de escolher um d'entre diversos methodos, que levam á solução do problema, é necessario attender á perfeição das operações, ao numero d'ellas e á influencia que o erro, commettido em cada uma das quantidades observadas, póde ter na incognita.

Seja, em geral,

$$A=f(B, C, \ldots) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

a relação que liga a quantidade desconhecida A com as observadas $B, C, \ldots$

Se fôr m o numero de vezes que se repetem as observações, teremos mais exactamente

$$A=\frac{\Sigma f(B, C, \ldots.)}{m},$$

e a differenciação dá

$$\delta A=\frac{\Sigma\left(\frac{df}{dB}\delta B+\frac{df}{dC}\delta C+\ldots.\right)}{m} \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Esta expressão mostra que o erro δA da quantidade desconhecida, proveniente dos erros $\delta B, \delta C, \ldots\ldots$ commettidos nas quantidades observadas, é tanto menor quanto menos consideraveis são $\delta B, \delta C \ldots\ldots$, o que depende da perfeição das observações; quanto menores forem $\frac{df}{dB}, \frac{df}{dC}, \ldots\ldots$, que representam separadamente a influencia de cada um d'aquelles erros no valor deduzido de A; e, finalmente, quanto maior fôr m, isto é, o numero de vezes que se repete a observação.

Guiados por estes caracteres, examinemos as vantagens que podem offerecer as observações meridianas e extrameridianas.

17. Applicação dos principios precedentes. — No problema, de que nos occupamos, a relação (13) tem a fórma especial

$$\pi_0 = \frac{n}{a}$$

sendo n e a quantidades deduzidas da observação por meio de (7) e (8) em funcção das differenças de declinação meridianas entre o planeta e estrellas de comparação convenientes, ou por meio de (9) ou (10) em funcção das differenças de declinação ou de ascensão recta extrameridianas.

Umas e outras d'estas coordenadas differenciaes observadas são medidas por movimentos micrometricos, o que augmenta consideravelmente o grau de precisão das observações; portanto, debaixo d'este ponto de vista, a perfeição das operações é a mesma nas duas classes de observações, que queremos comparar.

Todavia é geralmente sabido que os instrumentos meridianos, pela sua simplicidade e collocação sobre um eixo horizontal fixo, offerecem mais estabilidade e melhores verificações, durante o seu uso, do que os instrumentos equatoriaes, com que se fazem as observações extrameridianas, e por isso devem geralmente reputar-se mais exactas que estas as observações meridianas, isto é, menores n'ellas os erros δa e δn das quantidades deduzidas da observação.

O segundo caracter de vantagem é, como dissemos, terem estes erros pouca influencia sobre o valor de π_0, isto é, serem muito pequenos os valores das expressões $\frac{df}{dB}$, $\frac{df}{dC}$, ..., que, n'este caso especial, são da fórma $\frac{1}{a}$ e $\frac{\operatorname{sen} \pi_0}{a}$, segundo a relação (6). Ora estes coefficientes serão tanto menores, quanto maior fôr a, ou a differença das parallaxes observada. E como o crescimento da parallaxe com a diminuição da altura é pequeno e quasi todo em ascensão recta, perto do meridiano, e longe augmenta a incerteza das refracções, ainda debaixo d'este ponto de vista não são ordinariamente menos vantajosas as observações meridianas.

Resta examinar umas e outras com respeito á grandeza de m, isto é, ao numero de vezes que, com proveito, se pódem repetir as observações.

Nas observações meridianas, como já notámos, em cada noute não se póde observar o planeta, nem cada uma das estrellas de comparação, senão uma vez em cada estação, ao passo que, nas extrameridianas, podem fazer-se diversas observações do planeta e de cada uma das estrellas na mesma noute. Sob esta relação, parecem pois ser consideravelmente mais vantajosas as observações extrameridianas. No emtanto não é absolutamente assim.

Com effeito, comprehende-se que, para que o grande numero das observações dê vantagem, é necessario que todas, ou grande parte d'ellas, possam aproveitar-se para o fim que se tem em vista; e aqui serão aproveitaveis, como vimos, só aquellas observações que tiverem correspondentes em alguma das outras estações, isto é, unicamente os pares de observações referidas á mesma estrella.

Ora, posto que o numero absoluto de observações meridianas possivel seja menor que o das extrameridianas, todavia aquellas são todas, ou a maior parte, aproveitaveis, ao passo que não succede ordinariamente o mesmo com estas. De facto, nas observações meridianas as estrellas de comparação são escolhidas previamente pela condição de passarem pelo meridiano pouco antes ou depois da passagem do planeta, differindo d'este em declinação tão pouco, que possam essas differenças ser medidas pelo movimento micrometrico do fio horizontal. D'este modo cada observador, munido da relação das estrellas escolhidas, tem a certeza de que todas, ou, pelo menos, o maior numero das suas observações têm correspondentes nas outras estações.

Pelo contrario, nas observações extrameridianas, o observador, nas diversas posições em que o oculo do instrumento equatorial se vai collocando para seguir o movimento do planeta, toma todas as differenças que se lhe offerecem entre as declinações ou ascensões rectas d'este e de estrellas muito vizinhas; e assim haverá uma grande cópia de observações d'estas differenças, mas não se poderá ter tanta esperança de que grande numero d'ellas seja aproveitavel, a não ser que haja muitas estações de observação repartidas por todo o globo, porque então, como o planeta só se compara com estrellas muito vizinhas, é natural que, entre todas as estações, haja duas, ao menos, em que se tenha tomado a mesma estrella de comparação.

Do que fica exposto deduz-se portanto que, emquanto ao terceiro caracter de vantagem, isto é, o numero das observações, não se póde absolutamente dar preferencia ás observações meridianas ou extrameridianas. Póde dizer-se, em geral, que, se o numero das estações é pouco consideravel, devem preferir-se as observações meridianas; se ha muitas estações, deve dar-se preferencia ás observações extrameridianas.

18. Applicação do methodo a Marte a Venus e aos

PLANETAS TELESCOPICOS.—O methodo, que temos desenvolvido, applica-se em geral a um planeta, que se approxima sufficientemente da terra para que a differença das parallaxes $p-p_1$, $\varpi-\varpi_1$ ou $\varpi'-\varpi'_1$ seja consideravel, a fim de poder deduzir-se da observação pelas formulas respectivas. É por isso que de proposito na sua exposição nos temos referido a qualquer planeta, suppondo implicitamente que elle se acha n'aquellas condições. Examinemos agora por que motivo o methodo se applica especialmente a Marte.

Os planetas que, durante o seu movimento em torno do sol, mais se approximam da terra, são Venus e Marte, entre cujas orbitas fica comprehendida a da terra; sendo as epochas da opposição de Marte e da conjuncção inferior de Venus as das menores distancias d'estes planetas, visto a orbita do primeiro ser exterior e a do segundo interior á orbita terrestre.

Segundo esta disposição, vê-se tambem claramente que a distancia de Venus á terra, na epocha da conjuncção inferior, é egual á distancia da terra ao sol menos a distancia de Venus ao sol; e a de Marte, na epocha da opposição, é egual á sua distancia ao sol, menos a da terra tambem ao sol.

Se, com os valores médios d'estes elementos que se encontram no *Annuaire du Bureau des longitudes de 1878*, calcularmos aquellas differenças, acharemos 0,277 para valor da distancia média de Venus em conjuncção inferior, e 0,524 para valor da distancia média de Marte em opposição. E se, em vez das distancias médias ao sol tiradas do logar citado, calcularmos com ellas e com os valores das excentricidades, que tambem lá se acham, as maximas e minimas distancias $a(1+e)$, $a(1-e)$, e depois deduzirmos d'estas, como acima, as de Venus e Marte á terra, acham-se respectivamente 0,255 e 0,365 para valores minimos d'estas distancias, attendendo a que Venus em conjuncção inferior estará o mais proximo possivel da terra, quando fôr maxima a sua distancia ao sol e minima a distancia da terra tambem ao sol; e inversamente Marte distará da terra o menos possivel, quando forem respectivamente minima e maxima as distancias d'elle e da terra ao sol.

Vê-se pois, pelo que respeita á condição da pequenez da distancia á terra, que as conjuncções inferiores de Venus offerecem muito mais vantagem do que as opposições de Marte, para a applicação do methodo que expendemos.

Todavia notemos que, na epocha da opposição de Marte, este planeta projecta-se sobre a esphera celeste em pontos quasi diametralmente oppostos ao sol, e por isso conserva-se acima do horizonte durante toda a noute. Ao passo que Venus, projectando-se em pontos muito vizinhos do sol na epocha da conjuncção inferior, faz o seu curso acima do horizonte quasi ao mesmo tempo que o sol, tornando-se assim visivel, e portanto observavel, sómente pouco tempo antes do nascimento do sol e pouco depois do seu occaso.

Em vista d'isto, ainda que, pela sua menor distancia á terra, Venus em conjuncção inferior fosse mais favoravel á observação do que Marte em opposição, o pequenissimo espaço de tempo em que, cada noute, Venus é observavel, comparado com o grande numero de observações que se podem fazer de Marte durante toda a noute, tem feito preferir sempre este áquelle planeta na applicação do methodo da determinação da parallaxe solar que expozemos.

O doutor Gall lembrou, para o mesmo fim, o uso dos planetas telescopicos (*Astronomische Nachrichten,* vol. LXXX, pag. 1), o qual, posto que menos favoravel que o de Marte, em quanto á condição da distancia á terra, tem, por outra parte, a vantagem da perfeição com que podem fazer-se as observações, por ser mais exacta a bissecção d'um pequeno ponto luminoso pelo fio do reticulo do que a d'um disco consideravel.

CAPITULO II

Determinação da parallaxe solar pelas passagens de Venus

Noções preliminares

19. Essencia do methodo. — O methodo fundado sobre a observação das passagens de Venus, que agora vamos desenvolver, consiste, na sua essencia, como vimos (n.º 4), em deduzir da observação do phenomeno a differença das parallaxes horizontaes $\pi - \pi'$ de Venus e do sol n'essa epocha; calcular a relação d'estas parallaxes mediante a das distancias dos dois astros á terra, que se tira das taboas respectivas; e finalmente deduzir dos valores da differença e da relação das parallaxes assim obtidos, o valor absoluto de cada uma d'ellas.

Determina-se d'este modo a parallaxe horizontal π' do sol na epocha da observação, e depois é facil passar para o valor π_0 da parallaxe média, que se pretende obter como resultado final.

Vê-se portanto que a parte principal das operações, pelas quaes o methodo resolve este importante problema, é a observação das passagens de Venus, no intuito de determinar a differença das parallaxes $\pi - \pi'$.

20. Phases do phenomeno. — No seu trajecto $P\,P'$ (fig. 2) sobre o disco do sol, Venus offerece quatro phases distinctas, que são os contactos, dois externos V_1 e V_4, e dois internos V_2 e V_3, dos seus bordos com os do sol.

Os instantes precisos d'estes contactos de entrada e de sahida do planeta no disco solar, que, pelas suas differenças, dão evidentemente a duração da passagem, são os dados immediatos que se pedem á observação.

Com effeito, tendo observado o phenomeno em diversos logares da superficie da terra, e, se podesse ser, no seu centro, os instantes obtidos dos contactos differiriam unicamente em virtude da differença das distancias dos dois astros á terra ou da das suas parallaxes, o que vale o mesmo.

Comprehende-se portanto que o tempo de cada phase vista de um logar da superficie terrestre, é egual ao da phase geocentrica respectiva, addicionado com uma correcção positiva ou negativa, que será muito pequena por ser da ordem da differença das parallaxes de Venus e do sol, e que poderá exprimir-se n'esta differença. E prevê-se assim que, observando os tempos de contacto á superficie da terra, calculando os das mesmas phases para o centro, e determinando a expressão das correcções que é necessario applicar a estes para os converter n'aquelles, poderá obter-se o valor da differença $\pi - \pi'$.

N'este intuito vamos pois, em primeiro logar, deduzir as expressões dos instantes das phases do phenomeno para um observador collocado no centro da terra.

Póde resolver-se a questão empregando as coordenadas eclipticas ou as equatoriaes dos dois astros. Indicaremos separadamente o meio de usar d'umas e d'outras.

Coordenadas eclipticas

21. Instantes dos contactos geocentricos. — Imaginemos o plano da figura 3 perpendicular ao da ecliptica e á linha que, n'este ultimo, une a terra ao sol no instante preciso da conjuncção geocentrica, isto é, no momento em que Venus e o sol têm a mesma longitude verdadeira; e sejam n'esta hypothese: S a projecção do centro do sol; $V_1\ V_4$ a da corda percorrida pelo planeta no disco solar, que é representado pelo circulo descripto em torno de S como centro; CC' o traço do plano da ecliptica, e AA' o d'um plano perpendicular a este e ao de projecção.

A posição de Venus no instante θ da conjuncção será V; e concebe-se que, para se dar o phenomeno da passagem do planeta pelo disco solar, é necessario que, n'este momento, a sua latitude $VS = \lambda$ seja menor que o semi-diametro do sol, visto nunca ser muito grande a inclinação α sobre a ecliptica da corda descripta por Venus.

Se esta inclinação podesse ter um valor consideravel, comprehende-se que seria possivel haver passagens que se effectuariam inteiramente antes ou inteiramente depois do instante preciso da conjuncção, sendo, n'este instante, a latitude λ do planeta maior que o semi-diametro solar: é o que mostram as figuras 4 e 5, em que conservamos as denominações anteriores.

E na verdade, para haver passagem, basta que a distancia de S a VV_1 seja menor que o semi-diametro do sol, ou antes que a somma dos semi-diametros do sol e de Venus; isto é, deve verificar-se a relação

$$\lambda \cos\alpha < \text{sem.}\ \odot + \text{sem.}\ ♀$$

e portanto

$$\lambda < \frac{\text{sem.}\ \odot + \text{sem.}\ ♀}{\cos\alpha},$$

o que, quando α fosse muito consideravel, poderia dar-se sem que se realisasse a condição indicada a respeito de λ.

Mas, admittindo que α tem sempre um valor muito pequeno, por ser o movimento do planeta em latitude muito menos rapido que o de longitude, não póde com effeito dar-se o phenomeno da passagem, sem que no instante da conjuncção a latitude de Venus seja menor que o semi-diametro do sol.

Posto isto, se, por meio das taboas dos dois astros, determinarmos um instante θ em que se verifiquem as duas condições — terem ambos a mesma longitude, e Venus uma latitude menor que o semi-diametro do sol —, haverá então o phenomeno da passagem; e pretendemos obter as expressões dos instantes T_1, T_2, T_3 e T_4 em que um observador collocado no centro da terra veria os contactos V_1, V_2, V_3 e V_4.

N'estes instantes as distancias dos centros dos dois astros, são evidentemente $s+s'$ para V_1 e V_4 e $s'-s$ para V_2 e V_3, sendo s e s' os semi-diametros de Venus e do sol. Portanto, se obtivermos a expressão geral do tempo T em que Venus se acha n'uma posição qualquer V' (fig. 3) á distancia $\Delta = SV'$ do sol, bastará, em seguida, fazer na formula $\Delta = s' \pm s$, antes e depois da conjuncção, para ter as expressões de T_1, T_2, T_3 e T_4.

Supponhamos calculados, para a epocha θ da conjuncção, os movimentos horarios geocentricos de Venus em longitude e latitude m e l, e o movimento horario geocentrico m' do sol em longitude. Estas quantidades, que se deduzem das taboas dos dois astros, devem empregar-se taes como se observariam, isto é, affectadas da aberração.

Considerando implicitos em m, l e m' os respectivos signaes, $m-m'$ e l serão as variações horarias da distancia dos dois astros em longitude e latitude na epocha θ.

Emquanto aos signaes de m e m', vê-se bem que o movimento apparente do sol na ecliptica e o movimento real de Venus na sua orbita são, na epocha da conjuncção, em sentido contrario; e portanto, se considerarmos m' positivo, m será negativo, ou inversamente.

Com relação a l, segundo o astro se approxima ou se affasta do polo boreal da ecliptica, assim este movimento horario se considera positivo ou negativo.

Posto isto, tiremos na figura as linhas $V'D'$ e VD respectivamente perpendicular e parallela a CC'.

Se chamarmos t o tempo que decorre desde a conjuncção até que o planeta toma a posição V', serão $(m-m')\,t$ e $l\,t$ as variações em longitude e latitude da distancia dos dois astros, durante este intervallo, suppondo que, n'elle e durante todo o phenomeno, se podem considerar constantes, em primeira approximação, os movimentos horarios m', m e l calculados para o instante θ.

O triangulo $S\,V'\,D'$ dará a relação

$$\Delta^2=(m-m')^2t^2+(\lambda+lt)^2 \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

que, resolvida em ordem a t, dá

$$t=\frac{-\lambda l\pm\sqrt{\Delta^2\left[(m-m')^2+l^2\right]-\lambda^2(m-m')^2}}{(m-m')^2+l^2}$$

e portanto o tempo $T=\theta+t$ em que o planeta se acha á distancia Δ do sol.

A expressão de t póde porem simplificar-se introduzindo o angulo α de inclinação, cujo valor

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{l}{m-m'}$$

deduzido do triangulo $V\,V'\,D$, mostra, por ser constante na approximação que levamos, que se deve, com effeito, considerar rectilinea a trajectoria do planeta sobre o sol.

Dividindo por l os dois termos da fracção que exprime t, e attendendo ao valor de tang α, acha-se immediatamente

$$t=\frac{-\lambda\pm\sqrt{\Delta^2\left[\cot^2\alpha+1\right]-\lambda^2\cot^2\alpha}}{l\,(\cot^2\alpha+1)},$$

ou emfim

$$t = \frac{-\lambda \operatorname{sen}^2\alpha \pm \operatorname{sen}\alpha\sqrt{\Delta^2 - \lambda^2\cos^2\alpha}}{l}.$$

Em vista da hypothese que se fez sobre t, é claro que os valores positivos correspondem a instantes posteriores ao da conjuncção θ, e os negativos a instantes anteriores a este.

Substituindo agora n'esta formula $s+s'$ e $s'-s$, em vez de Δ, temos, como dissemos, os instantes dos quatro contactos

$$\left.\begin{aligned}
T_1 &= \theta + \frac{-\lambda \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha\sqrt{(s+s')^2 - \lambda^2\cos^2\alpha}}{l}\\
T_2 &= \theta + \frac{-\lambda \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}\alpha\sqrt{(s'-s)^2 - \lambda^2\cos^2\alpha}}{l}\\
T_3 &= \theta + \frac{-\lambda \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha\sqrt{(s'-s)^2 - \lambda^2\cos^2\alpha}}{l}\\
T_4 &= \theta + \frac{-\lambda \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}\alpha\sqrt{(s'+s)^2 - \lambda^2\cos^2\alpha}}{l}
\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

22. Temos supposto até aqui que os movimentos horarios m, l e m' dos dois astros, calculados para o instante θ da conjuncção, conservam o mesmo valor durante todo o phenomeno. Em rigor, não é isto exacto; e, ainda que as variações d'aquelles movimentos sejam muito pequenas, durante o intervallo de 6 ou 7 horas que póde durar o phenomeno, em todo o caso, convém saber calcular as correcções correspondentes aos tempos de contacto, que provêm da inexactidão d'aquella hypothese, para as applicar, quando se julgar necessario.

Conhecendo as leis que ligam com o tempo as variações dos movimentos horarios de Venus e do sol, isto é, as relações

$$m = f_1 t, \qquad l = f_2 t, \qquad m' = f t,$$

o caminho, que mais naturalmente parecia offerecer-se para deduzir o valor de t, n'esta segunda approximação, á similhança do que se faz n'outras questões da mesma natureza, era estabelecer a equação (15) para o elemento infinitesimo de tempo dt, no qual sempre poderão suppôr-se constantes os movimentos horarios, o que dava

$$d\Delta^2 = (m - m')^2 dt^2 + (\lambda + l\,dt)^2;$$

substituir depois, em vez de m, l e m', as suas expressões em funcção do tempo; e finalmente deduzir, pela integração, o valor de t em funcção de Δ. Tomando o integral primeiramente entre os limites o e $s + s'$, teriamos os valores de t_1 e t_4 ou de $T_1 = \theta + t_1$ e $T_4 = \theta + t_4$, e depois entre o e $s' - s$, teriamos t_2 e t_3 ou $T_2 = \theta + t_2$ e $T_3 = \theta + t_3$.

Mas a pequenez das correcções δT_1, δT_2, δT_3 e δT_4, que é necessario applicar aos instantes obtidos T_1, T_2, T_3, T_4, para ter os verdadeiros T'_1, T'_2, T'_3 e T'_4, torna sufficiente a sua determinação approximada por qualquer dos processos seguintes.

Se os instantes T_1, T_2, T_3 e T_4, determinados na supposição de m, l e m' constantes, fossem os verdadeiros, as coordenadas geocentricas correspondentes do sol e de Venus, calculadas pelas taboas, deveriam satisfazer á relação geral já empregada $S V'^2 = S D'^2 + V' D'^2$.

Portanto, sendo $\odot_1$ a longitude geocentrica do sol, e M_1 e L_1 a longitude e a latitude geocentricas de Venus, para o instante T_1 do primeiro contacto, deveria verificar-se a relação

$$(\odot_1 - M_1)^2 + L_1^2 = (s + s')^2 \ldots\ldots\ldots (17)$$

Sendo porém o instante T_1 sómente approximado do verdadeiro, esta relação não se verificará completamente. A fim de calcular então o tempo verdadeiro da phase, abstrahindo dos erros tabulares, bastará deduzir das taboas as coordenadas geocentricas do sol e de Venus para instantes muito vizinhos de T_1, até encontrar dois muito proximos $T_1 + h$ e $T_1 + h'$, para os quaes sejam respectivamente

$$(\odot'_1 - M'_1)^2 + L'^2_1 < (s + s')^2,$$
$$(\odot''_1 - M''_1)^2 + L''^2_1 > (s + s')^2,$$

e determinar depois pela interpolação o instante $T_1 + \delta T_1$ que satisfaz á equação (17).

Do mesmo modo se corrigiriam T_2, T_3 e T_4.

De passagem notámos já, e advertimos de novo que, não obstante os tempos, assim correctos, serem sufficientemente approximados para o fim que se tem em vista, o qual é obter epochas muito proximas dos instantes das phases, observadas da superficie terrestre, não deverão, ainda assim, julgar-se exactos, attendendo aos erros das taboas d'onde se tiram os elementos que entram em (17).

Poderia evitar-se a interpolação, determinando as correcções δT por approximações successivas.

Com effeito, chamando ainda $\odot_1$, M_1 e L_1 as coordenadas geocentricas dos dois astros calculadas para a epocha T_1, e calculando egualmente para a mesma epocha os movimentos horarios correspondentes m'_1, m_1 e l_1, teremos exactamente, abstrahindo, como ha pouco, dos erros tabulares,

$$[\odot_1 - M_1 + (m_1 - m'_1)\,\delta T_1]^2 + [L_1 + l_1\,\delta T_1]^2 = (s+s')^2$$

d'onde se tira

$$\delta T_1 = \frac{(s+s')^2 - (\odot_1 - M_1)^2 - L_1^2}{2(m_1 - m'_1)(\odot_1 - M_1) - 2l_1 L_1 + [(m_1 - m'_1)^2 + l_1^2]\,\delta T_1}$$

que por uma, ou, quando muito, duas approximações successivas, dará o valor da correcção δT_1, sufficientemente approximado.

Em resultado vê-se portanto que, com as coordenadas eclipticas geocentricas do sol e de Venus, podem calcular-se, pelas formulas anteriores, os instantes

$$T'_1 = T_1 + \delta T_1, \qquad T'_2 = T_2 + \delta T_2,$$

$$T'_3 = T_3 + \delta T_3, \qquad T'_4 = T_4 + \delta T_4$$

em que um observador, collocado no centro da terra, observaria as phases principaes que offerece o phenomeno das passagens de Venus pelo disco solar, isto é, os quatro contactos dos dois astros.

23. Instantes dos contactos apparentes. — Os tempos T''_1, T''_2, T''_3 e T''_4, em que um observador, collocado na superficie da terra, vê as quatro phases do phenomeno, pouco differem, como já notámos, dos tempos T'_1, T'_2, T'_3 e T'_4 das mesmas phases para o centro, calculados pelas formulas dos numeros antecedentes: as differenças são da ordem da differença das parallaxes dos dois astros, que é muito pequena, attenta a pequenez da sua distancia mutua, comparada com as distancias á terra.

Deduzir em funcção da differença das parallaxes $\pi - \pi'$ as pequenas correcções $\delta T'_1$, $\delta T'_2$, $\delta T'_3$ e $\delta T'_4$, que é preciso applicar aos tempos dos contactos geocentricos para ter os tempos dos contactos apparentes, é o objecto de que vamos occupar-nos agora.

Consideremos a correcção $\delta T'_1$ do primeiro contacto externo; e tudo o, que dissermos com relação a ella, se applicará ás outras $\delta T'_2$, $\delta T'_3$ e $\delta T'_4$.

No muito pequeno intervallo $\delta T'_1$ podem, sem erro sensivel, julgar-se constantes os movimentos horarios m'_1, m_1 e l_1, do sol e de Venus em longitude e latitude, calculados para o instante T'_1. E por isso, sendo ainda $\odot_1$, M_1 e L_1 as coordenadas eclipticas geocentricas dos dois astros n'este instante, as da mesma especie, relativas ao instante $T''_1 = T'_1 + \delta T'_1$, serão:

$$\odot_1 + m'_1 \delta T'_1, \quad M_1 + m_1 \delta T'_1, \quad L_1 + l_1 \delta T'_1;$$

ou, com mais exactidão,

$$\odot_1 + m'_1 \delta T'_1 + x', \quad M_1 + m_1 \delta T'_1 + x, \quad L_1 + l_1 \delta T'_1 + y,$$

se attendermos aos erros tabulares x', da longitude do sol, e x e y, da longitude e latitude de Venus.

Se não fosse o effeito da parallaxe, estas coordenadas, que assignam precisamente os logares do sol e de Venus, vistos do centro da terra no momento T''_1, marcariam tambem as posições dos mesmos astros n'esse instante, para o logar da superficie considerado.

A fim de obter estas ultimas, bastará portanto junctar ás primeiras o effeito da parallaxe no sentido de cada uma d'ellas, o que dá

$$\left.\begin{array}{ll} \odot_1 + m_1 \delta T'_1 + x' + \alpha' \ldots & \text{longitude apparente} \\ + \beta' \ldots & \text{latitude apparente} \end{array}\right\} \text{do sol}$$

$$\left.\begin{array}{ll} M_1 + m_1 \delta T'_1 + x + \alpha \ldots\ldots & \text{longitude apparente} \\ L_1 + l_1 \delta T'_1 + y + \beta \ldots\ldots & \text{latitude apparente} \end{array}\right\} \text{de Venus,}$$

chamando α, β, α', β' as parallaxes dos dois astros no sentido das coordenadas respectivas.

Applicando agora, com estes elementos que se referem ao instante apparente T'_1 do primeiro contacto, a relação geral deduzida do triangulo $S\,V'\,D'$ e de que já nos temos servido, obtem-se

$$[s+s'+\varepsilon]^2 = \left\{ \begin{array}{l} [M_1 - \odot_1 + (m_1 - m'_1)\delta T'_1 + (\alpha - \alpha') + x - x']^2 \\ + [L_1 + l_1 \delta T_1 + (\beta - \beta') + y]^2 \end{array} \right.$$

designando por ε o erro commettido em $s+s'$, pela incerteza que ha na determinação precisa dos semi-diametros. E substituindo por α, β, α' e β' as suas expressões

$$\left. \begin{array}{c} \alpha = -\dfrac{\pi \cos \Lambda}{\cos L_1} \operatorname{sen}(\Omega - M_1) = -h\pi, \\ \beta = -\pi [\operatorname{sen}\Lambda \cos L_1 - \cos\Lambda \operatorname{sen} L_1 \cos(\Omega - M_1)] = -k\pi \\ \alpha' = -\pi' \cos\Lambda \operatorname{sen}(\Omega - \odot_1) = -h'\pi', \\ \beta' = -\pi' \operatorname{sen}\Lambda = -k'\pi' \end{array} \right\} (18)$$

onde Ω e Λ representam a longitude e latitude do zenith, vem

$$[s+s'+\varepsilon]^2 = \left\{ \begin{array}{l} [M_1 - \odot_1 + (m_1 - m'_1)\delta T'_1 - (h\pi - h'\pi') + x - x']^2 \\ + [L_1 + l_1 \delta T_1 - (k\pi - k'\pi') + y]^2 \end{array} \right\} (19)$$

As expressões (18) representam simplesmente os effeitos da parallaxe sobre as coordenadas geocentricas (M_1, L_1) e ($\odot_1$, 0) de Venus e do sol, tiradas das taboas para o instante T'_1.

Rigorosamente deveriamos substituir por α, β, α' e β' os effeitos da parallaxe nas coordenadas geocentricas dos mesmos astros

$$(M_1 + m_1 \delta T_1 + x, L_1 + l_1 \delta T_1 + y), (\odot_1 + m'_1 \delta T'_1 + x', 0),$$

que se referem ao instante T''_1, e se acham correctas dos erros tabulares. Desprezamos portanto os effeitos da parallaxe sobre os movimentos horarios m_1, l_1 e m'_1, e sobre os erros x, y e x', provenientes da imperfeição das taboas.

A pequena influencia da parallaxe nos valores d'estes erros, geralmente muito pouco consideraveis, deve na verdade ser insensivel. Não acontece porém o mesmo com os movimentos horarios, porquanto a differença d'estes movimentos observados do centro da terra para os observados da superficie é da ordem das parallaxes. No emtanto, como taes differenças deviam ser multiplicadas por $\delta T'_1$, que, segundo vimos, é da mesma ordem, não poderiam provir d'ahi senão termos da segunda ordem das parallaxes, que se desprezam em virtude da pequenez d'ellas.

Póde portanto julgar-se sufficientemente approximada a equação (19) a que chegámos.

Notemos agora que, no instante T''_1 ao qual se refere esta equação, e durante todo o phenomeno de que nos occupamos, a distancia angular entre os dois astros é pouco consideravel, e assim serão muito pequenas tambem as differenças das suas coordenadas. Vê-se portanto que h e h', bem como k e k', pouco differem entre si, podendo por isso, com approximação sufficiente, tomar-se $h'(\pi - \pi')$ e $k'(\pi - \pi')$, em vez de $h\pi - h'\pi'$ e de $k\pi - k'\pi'$, o que transforma a equação precedente em

$$[s + s' + \varepsilon]^2 = \begin{cases} [M_1 - \odot_1 + (m_1 - m'_1)\delta T'_1 - h'(\pi - \pi') + x - x']^2 \\ + [L_1 + l_1 \delta T'_1 - k'(\pi - \pi') + y]^2. \end{cases}$$

Finalmente, desenvolvendo os quadrados, desprezando as segundas potencias das pequenas quantidades h', k', x, x', y, ε e $\delta T'_1$, e attendendo á condição (17), á qual devem satisfazer as coordenadas geocentricas $\odot_1$, M_1 e L_1, relativas ao instante geocentrico T'_1, acha-se

$$\delta T'_1 = \frac{(M_1 - \odot_1)[h'(\pi - \pi') - (x - x')] + L_1[k'(\pi - \pi') - y] + (s + s')}{(M_1 - \odot_1)(m_1 - m'_1) + L_1 l_1}. \qquad (20)$$

Se fôsse porém requerida maior approximação, não se fariam aquelles desprezos, e resolver-se-ia a equação por duas approximações successivas, como fizemos relativamente a δT_1.

Os valores Ω e Λ da longitude e latitude do zenith, que entram em h' e k', podem obter-se pelas formulas conhecidas da transformação das ascensões rectas e declinações em longitudes e latitudes, attendendo a que são

A R. zenith = A R. sol + ang. hor. sol

D C. zenith = latit. geogr. do logar;

ou por meio das taboas do nonagesimo, isto é, do ponto da ecliptica mais elevado acima do horizonte, as quaes dão, para cada instante, a distancia zenithal e a longitude do mesmo ponto, que são respectivamente eguaes á latitude e longitude do zenith.

Em rigor vê-se bem que, para obter Ω e Λ por um ou outro meio, devia conhecer-se o tempo $T''_1 = T'_1 + \delta T'_1$ a que se referem estas coordenadas: attendendo porém á pequenez de $\delta T'_1$, póde primeiramente tomar-se T'_1 em vez de T''_1; e depois, se assim fôr necessario, usar, em segunda approximação, do valor achado de T''_1.

Formulas analogas a (20) darão as correcções $\delta T'_2$, $\delta T'_3$ e $\delta T'_4$ e portanto os tempos T'_2, T'_3 e T'_4 das outras phases do phenomeno.

24. Visto que o instante θ da conjuncção tirado da ephemeride, como dissemos no n.º 21, é contado do meridiano para o qual ella se acha calculada, serão tambem contados do mesmo meridiano os tempos dos contactos apparentes T''_1, T''_2, T''_3 e T''_4, deduzidos de θ por meio das correcções respectivas: t_1, t_2, t_3 e t_4, calculadas no mesmo n.º 21 ; δT_1, δT_2, δT_3 e δT_4, calculadas no n.º 22; e $\delta T'_1$, $\delta T'_2$, $\delta T'_3$ e $\delta T'_4$, que acabamos de determinar. Se, por exemplo, se usou das ephemerides astronomicas de Coimbra, os valores de T''_1, T''_2, T''_3 e T''_4, deduzidos das formulas antecedentes, representarão tempo medio de Coimbra.

Para ter os tempos locaes correspondentes, isto é, os instantes dos contactos I_1, I_2, I_3 e I_4, contados do meridiano do logar da observação, é necessario subtrahir de T''_1, T''_2, T''_3 e T''_4 a longitude G d'este, referida ao meridiano da ephemeride, contada de oriente para occidente e convertida em tempo.

Portanto os instantes locaes dos quatro contactos serão finalmente

$$\left.\begin{aligned}
I_1 &= T'_1 - G + \left\{\begin{aligned} & A_1[h'(\pi-\pi')-(x-x')] \\ & + B_1[k'(\pi-\pi')-y] + \frac{B_1(s+s')\,\varepsilon}{L_1}\end{aligned}\right. \\
I_2 &= T'_2 - G + \left\{\begin{aligned} & A_2[h''(\pi-\pi')-(x-x')] \\ & + B_2[k''(\pi-\pi')-y] + \frac{B_2(s'-s)\,\gamma}{L_2}\end{aligned}\right. \\
I_3 &= T'_3 - G + \left\{\begin{aligned} & A_3[h'''(\pi-\pi')-(x-x')] \\ & + B_3[k'''(\pi-\pi')-y] + \frac{B_3(s'-s)\,\gamma}{L_3}\end{aligned}\right. \\
I_4 &= T'_4 - G + \left\{\begin{aligned} & A_4[h''''(\pi-\pi')-(x-x')] \\ & + B_4[k''''(\pi-\pi')-y] + \frac{B_4(s+s')\,\varepsilon}{L_4}\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

chamando ζ o erro, analogo a ε, commettido em $s'-s$, e fazendo

$$A_1 = \frac{M_1 - \odot_1}{(M_1 - \odot_1)(m_1 - m'_1) + L_1 l_1},$$

$$B_1 = \frac{L_1}{(M_1 - \odot_1)(m_1 - m'_1) + L_1 l_1};$$

e similhantemente com relação a A_2 e B_2, A_3 e B_3, A_4 e B_4.

Nas outras estações serão respectivamente os mesmos os valores dos A e B, que se referem a cada um dos tempos geocentricos T'_1, T'_2, T'_3 e T'_4, assim como as incognitas $x-x'$, y, ε e γ, por serem insensiveis as suas variações durante o phenomeno: mudarão porém os valores das longitudes G e dos coefficientes h' e k' das parallaxes.

25. Deducção do valor da differença $\pi - \pi'$ das parallaxes. — Se poderem formar-se tantas equações (21) relativas a uma ou a muitas estações, quantas forem as incognitas que n'ellas entrarem; como uma d'estas é a differença $\pi - \pi'$, que se pretende determinar, a resolução das mesmas equações dará immediatamente a solução do problema.

Ora, suppondo conhecida a longitude G da estação a que se applicarem as equações (21), em cada uma d'ellas entrarão quatro incognitas, que são $\pi - \pi'$, $x - x'$, y e ε ou γ, e portanto cinco no systema completo. D'este modo, ainda que n'uma estação se podessem observar os quatro contactos I_1, I_2, I_3 e I_4, não seriam sufficientes estes elementos para resolver o problema, pois que haveria cinco incognitas e quatro equações sómente. É pois indispensavel fazer as observações em mais d'uma estação.

Por outra parte, dos quatro instantes I_1, I_2, I_3 e I_4, relativos a cada estação, sómente os dois I_2 e I_3, que correspondem aos contactos internos, é que, em geral, podem obter-se com a precisão requerida, quando não haja alguma circumstancia eventual, que torne impossivel a observação de qualquer d'elles.

Alguns astronomos modernos têm procurado meios indirectos de obter os instantes I_1 e I_4 dos contactos externos, do que opportunamente daremos noticia; mas estes processos, ainda quando chegassem a attingir a precisão requerida, não poderiam empregar-se no tempo de Halley, no qual eram completamente desconhecidos. Não contando pois com elles, o maior numero de equações (21), que se poderão esperar das observações feitas em i estações, é $2i$.

Além d'isto, a grande difficuldade que ha na determinação exacta das longitudes, em estações onde faltam os meios necessarios para obtel-a, faz que raras vezes se alcancem valores de G que possam adoptar-se com segurança. E esta difficuldade, que subsiste ainda hoje, seria bem maior no tempo d'Halley. Considerando pois tambem desconhecidas as i longitudes das estações de observação, teremos, ao todo, $5+i$ incognitas nas equações (21) que se tiverem formado.

Portanto, no caso mais favoravel, isto é, quando podessem formar-se $2i$ equações (21), seria necessario que, pelo menos, fossem cinco as estações, pois que então seria dez o numero das incognitas e o das equações formadas.

Mas, em geral, como a observação precisa dos contactos depende de muitas circumstancias accidentaes, raras vezes se póde esperar que, em todos os logares, tenham sido observados os dois contactos internos; o que augmentará o numero das estações necessarias, e portanto o das incognitas $5+i$ e o das equações a resolver.

Halley evitou o grande trabalho e difficuldades, que este processo exigia, d'um modo muito simples, como vamos ver.

26. Methodo de Halley. — Se em duas estações X e Y se observarem os mesmos dois contactos, geralmente os dois internos, teremos, attendendo ao que se disse no fim do n.º 24,

$$X \dots \begin{cases} I_2 = T'_2 - G + \begin{cases} A_2 [h''(\pi - \pi') - (x - x')] \\ + B_2 [k''(\pi - \pi') - y] + \dfrac{B_2 (s' - s)\gamma}{L_2} \end{cases} \\ I_3 = T'_3 - G + \begin{cases} A_3 [h'''(\pi - \pi') - (x - x')] \\ + B_3 [k'''(\pi - \pi') - y] + \dfrac{B_3 (s' - s)\gamma}{L_3} \end{cases} \end{cases}$$

$$Y \dots \begin{cases} I'_2 = T'_2 - G' + \begin{cases} A_2 [h_1''(\pi - \pi') - (x - x')] \\ + B_2 [k''_1(\pi - \pi') - y] + \dfrac{B_2 (s' - s)\gamma}{L_2} \end{cases} \\ I'_3 = T'_3 - G' + \begin{cases} A_3 [h'''_1(\pi - \pi') - (x - x')] \\ + B_3 [k'''_1(\pi - \pi') - y] + \dfrac{B_3 (s' - s)\gamma}{L_3} \end{cases} \end{cases}$$

donde se deduzem os valores $H = I_3 - I_2$ e $H' = I'_3 - I'_2$ da duração das passagens:

$$H = \begin{cases} T'_3 - T'_2 + (\pi - \pi')[A_3 h''' - A_2 h'' + B_3 k''' - B_2 k''] \\ -(A_3 - A_2)(x - x') - (B_3 - B_2) y + (s' - s)\gamma \left(\dfrac{B_3}{L_3} - \dfrac{B_2}{L_2} \right), \end{cases}$$

$$H' = \begin{cases} T'_3 - T'_2 + (\pi - \pi')\,[A_3 h'''_1 - A_2 h''_1 + B_3 k'''_1 - B_2 k'_1] \\ -(A_3 - A_2)(x - x') - (B_3 - B_2)y + (s' - s)\gamma\left(\dfrac{B_3}{L_3} - \dfrac{B_2}{L_2}\right), \end{cases}$$

cuja differença dá

$$H - H' = (\pi - \pi')\left[\begin{array}{l} A_3(h''' - h'''_1) - A_2(h'' - h''_1) \\ + B_3(k''' - k'''_1) - B_2(k' - k''_1) \end{array}\right]$$

e portanto

$$\pi - \pi' = \frac{H - H'}{A_3(h''' - h'''_1) - A_2(h'' - h''_1) + B_3(k''' - k'''_1) - B_2(k'' - k''_1)} \quad (22)$$

Temos pois a formula que dá a differença das parallaxes $\pi - \pi'$ de Venus e do sol, expressa na differença $H - H'$ das durações da passagem de Venus pelo disco do sol, obtida pela observação dos dois contactos internos em duas estações.

Em virtude do que dissemos relativamente aos contactos externos, é, com effeito, aos dois internos que se applica geralmente o methodo de Halley; mas em theoria, póde applicar-se a quaesquer, comtanto que sejam os mesmos dois em ambas as estações. Em todo o caso a differença $H - H'$ será a dos tempos que decorrem entre as mesmas phases, observadas nos dois logares.

Em quanto ao calculo do denominador, é sufficiente o que fica exposto nos n.[os] anteriores.

Com o valor de $\pi - \pi'$, deduzido da observação por meio de (22), e com o valor calculado de $\frac{\pi}{\pi'}$, é facil obter finalmento π' e depois π_0.

Com effeito, sendo, na epocha da observação, r e R as distancias de Venus e da terra ao sol, referidas ao valor médio d'esta ultima, o que dá $R - r = \rho$ para distancia de Venus á terra, ou, mais rigorosamente, calculando ρ como indicámos no n.º 9, teremos a relação

$$\frac{\pi}{\pi'} = \frac{R}{\rho},$$

a qual, combinada com $D = \pi - \pi'$, dará

$$\pi' = \frac{\rho}{R - \rho} D \text{.............} \quad (23)$$

e por conseguinte o valor da parallaxe horizontal media

$$\pi_0 = R\pi' \text{..............} \quad (24)$$

27. Não attendendo aos erros tabulares, é claro que a precisão do valor de π_0, assim determinado, depende da exactidão com que D se deduziu da observação por meio de (22); bem como a precisão d'este valor de D resulta da exactidão do valor obtido da differença $H - H'$ da duração das passagens nos dois logares, isto é, da perfeição com que se tiverem tomado os instantes dos contactos.

Mas notemos que, quanto maior fôr aquella differença, que é o numerador da fracção (22), tanto maior será tambem o denominador, por ser D uma quantidade fixa, isto é, independente das posições dos logares considerados; e é claro que, quanto maior fôr o denominador, tanto menos influirá em D, e portanto em π_0, qualquer erro commettido no numerador $H-H'$.

É mesmo facil provar que o erro relativo de π_0 é egual ao erro relativo commettido em $H-H'$.

De facto, chamando i e Q os dois termos da fracção (22), e attendendo ás equações (23) e (24), temos

$$\delta\pi_0 = \frac{R\rho}{Q(R-\rho)}\delta i = \frac{\pi_0}{QD}\delta i,$$

e portanto

$$\frac{\delta\pi_0}{\pi_0} = \frac{\delta i}{i}$$

que é a expressão do que dissemos; sendo assim $\delta\pi_0$ tanto menor quanto maior fôr i.

Devem pois escolher-se os dois logares de sorte que as durações da passagem do planeta sobre o sol, observada d'elles, diffiram entre si o mais possivel.

28. Methodos das equações de condição e de De l'Isle. —No methodo de Halley, sómente se aproveitam, como acabamos de ver, as observações analogas feitas em estações conjugadas, a fim de eliminar as longitudes: mas, se poderem obter-se valores d'estas que mereçam confiança, haverá, em todas as equações (21) que se formarem, só as cinco incognitas que apontámos no principio do n.º 25; e combinando então essas equações pelo methodo das equações de condição ou pelo dos menores quadrados, como fizeram Encke e Powalky, poderão deduzir-se das equações resultantes os valores das mesmas incognitas e portanto de $\pi - \pi'$.

Finalmente, se em duas estações de longitudes conhecidas G e G' se observar o mesmo contacto, as equações (21) correspondentes, nas quaes os A e B são os mesmos, darão, pela sua differença,

$$l_2 - l'_2 = G' - G + A_2(\pi - \pi')(h'' - h''_1) + B_2(\pi - \pi')(k'' - k''_1)$$

e portanto

$$\pi - \pi' = \frac{l_2 + G - (l'_2 + G')}{A_2(h'' - h''_1) + B_2(k'' - k''_1)} \ldots\ldots (25)$$

onde $l_2 + G$ e $l'_2 + G'$ representam os tempos da phase observada nas duas estações, contados do meridiano da ephemeride.

É o methodo de l'Isle, applicado ás coordenadas eclipticas, do qual, bem como do das equações de condição, fallaremos mais desenvolvidamente ao resolver a questão por meio das coordenadas equatoriaes, no que vamos entrar.

Coordenadas equatoriaes

29. Instantes dos contactos geocentricos. — Sejam S e V (fig. 6.) as posições geocentricas do sol e de Venus na esphera celeste, para uma epocha θ proxima do instante da conjuncção verdadeira em ascensão recta, P o polo e EE' o equador, e imaginemos traçados o arco SV de circulo maximo, que é a distancia dos dois astros, e os circulos horarios d'elles PSs e PVv.

Tendo deduzido da ephemeride, calculada para o meridiano d'onde se conta a epocha θ, a ascensão recta e declinação verdadeiras de Venus α e δ, e as do sol α' e δ' para a mesma epocha, o triangulo PSV, no qual designamos por Q e $180^\circ - Q'$ os angulos em S e V, dá (Delambre, *Resumo de Astronomia*, Lic. IV, n.º 61) as formulas

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta\operatorname{sen}\frac{1}{2}(Q+Q') &= \operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta') \\
\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta\cos\frac{1}{2}(Q+Q') &= \cos\frac{1}{2}(\alpha-\alpha')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\delta-\delta')
\end{aligned}\right\}(26$$

que, por ser θ muito proximo do instantes da conjuncção, são ainda sufficientemente exactas sob a fórma

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\operatorname{sen}P &= (\alpha-\alpha')\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta') \\
\Delta\cos P &= \delta-\delta'
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(27)$$

designando P a semi-somma $\frac{1}{2}(Q+Q')$.

Como, durante o phenomeno da passagem de Venus pelo disco solar, a distancia Δ dos centros dos dois astros fica sempre menor que o semi-diametro do sol, cujo valor médio é de $16'$ pouco mais ou menos, as equações approximadas, que acabamos de formar, serão practicamente exactas para todos os instantes da passagem, incluindo os dos quatro contactos geocentricos T_1, T_2, T_3, T_4.

Appliquemol-as pois ao instante $T=\theta+t$ d'um dos contactos externos, nos quaes é $\Delta=s+s'$, designando ainda s e s' os semi-diametros de Venus e do sol.

Sejam p e q os movimentos horarios de Venus em ascensão recta e declinação, e p' e q' os do sol, calculados para a epocha θ por meio das taboas dos dois astros, ou tirados das ephemerides: $p-p'$ e $q-q'$ serão respectivamente as variações horarias da distancia entre os astros, para a mesma epocha, tambem em ascensão recta e declinação. Portanto, suppondo, por emquanto, que estes movimentos horarios se conservam constantes durante todo o phenomeno, serão

$$\alpha-\alpha'+(p-p')\,t \quad \text{e} \quad \delta-\delta'+(q-q')\,t$$

as differenças de ascensão recta e declinação dos dois astros no instante T.

Com estes elementos, e chamando S o valor de $P=\frac{1}{2}(Q+Q')$ n'esta epocha, as equações (27), applicadas a ella, dão

$$(s+s')\,\text{sen}\,S=(\alpha-\alpha')\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')+t\,(p-p')\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')$$

$$(s+s')\cos S=\delta-\delta'+(q-q')\,t$$

ou, mais simplesmente,

$$\left.\begin{array}{l}(s+s')\,\text{sen}\,S=\Delta\,\text{sen}\,P+n\,t\,\text{sen}\,N\\(s+s')\cos S=\Delta\cos P+n\,t\cos N\end{array}\right\}\ldots\ldots\quad(28)$$

em virtude das mesmas equações (27), e fazendo, analogamente a ellas, as hypotheses

$$\left.\begin{array}{l}n\,\text{sen}\,N=(p-p')\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta')\\n\cos N=q-q'\end{array}\right\}\ldots\ldots\quad(29)$$

onde n e N representam evidentemente o movimento horario de Venus na sua trajectoria sobre o sol e a inclinação d'esta sobre o circulo horario, visto serem os segundos membros os movimentos horarios relativos dos dois astros no sentido do parallelo e do circulo horario. Considerando n sempre positivo, o signal será dado pelo valor de N.

Se nas equações (28) se substituem os valores de Δ, P, n e N determinados por meio de (27) e (29), só ficam nas mesmas equações as incognitas S e t, que poderão portanto deduzir-se da sua resolução.

Eliminando t entre ellas, obtem-se, com effeito, o valor de S pela formula

$$\text{sen}\,(S-N)=\frac{\Delta\,\text{sen}\,(P-N)}{s+s'}\ldots\ldots\ldots\quad(30)$$

a qual, por terem Δ, P e N, valores fixos, relativos á epocha θ, dá para $S-N$ dois valores que differem entre si de $180°$.

Depois a somma das mesmas equações, multiplicadas respectivamente por $\operatorname{sen} N$ e $\cos N$, dá t pela relação

$$t = -\frac{\Delta}{n}\cos(P-N) + \frac{s+s'}{n}\cos(S-N) \ldots (31),$$

correspondendo a t_1 aquelle dos dois valores de $S-N$ que torna t *negativo*, e a t_4 o que o torna *positivo*. E, mudando $s+s'$ em $s'-s$, teremos a formula que dá os valores de t_2 e t_3 correspondentes aos instantes dos contactos internos T_2 e T_3; advertindo que a mesma mudança, feita na formula (30), dá outros dois valores de $S-N$, diversos dos que se deduzem d'esta, mas differindo tambem entre si de $180°$.

Portanto, fazendo na formula (30) $\operatorname{sen}(S-N) = \operatorname{sen}\psi$, isto é, $S-N=\psi$ ou $S-N=180°-\psi$ para os contactos externos; e egualmente $\operatorname{sen}(S-N) = \operatorname{sen}(\psi)$ na formula que deriva d'esta pela mudança de $s+s'$ em $s'-s$, o que dá $S-N=(\psi)$ ou $S-N=180°-(\psi)$ para os contactos internos: teremos finalmente os instantes das quatro phases geocentricas

$$T_1 = \theta - \frac{s+s'}{n}\cos\psi - \frac{\Delta}{n}\cos(P-N)$$

$$T_2 = \theta - \frac{s'-s}{n}\cos(\psi) - \frac{\Delta}{n}\cos(P-N)$$

$$T_3 = \theta + \frac{s'-s}{n}\cos(\psi) - \frac{\Delta}{n}\cos(P-N)$$

$$T_4 = \theta + \frac{s+s'}{n}\cos\psi - \frac{\Delta}{n}\cos(P-N)$$

30. As formulas (30) e (31) foram deduzidas na hypothese de poderem considerar-se constantes, durante todo o phenomeno, os movimentos horarios p, q, e p', q' de Venus e do sol em ascensão recta e declinação, calculados para a epocha θ. Portanto, ainda que se considerem as equações (27) praticamente exactas em todos os instantes da passagem, e se abstraia dos erros tabulares, os valores de S e t, calculados pelas mesmas formulas, serão apenas approximados, em virtude d'aquella hypothese, que não é rigorosa. Querendo levar mais longe a approximação, será pois necessario attender ás variações dos movimentos horarios durante o phenomeno.

Parece-nos que póde conseguir-se isso, como vamos mostrar, por processos analogos aos que se empregaram (n.º 22) relativamente ás coordenadas eclipticas.

Se os valores de S e t, calculados por meio de (30) e (31), fossem os que correspondem exactamente ao instante do contacto, as equações (27), substituindo n'ellas por α, δ, α' e δ' os valores α_1, δ_1, α'_1 e δ'_1 das ascensões rectas e declinações de Venus e do sol, tirados das taboas para o instante calculado $T = \theta + t$, deviam dar para Δ o valor $s + s'$, e para P o valor de S já calculado por meio de (30). Não acontecerá porém assim, em virtude da hypothese inexacta d'onde se partiu.

Mas, tirando então das taboas os valores de α, δ, α' e δ' para epochas muito proximas do instante T calculado, determinando, com cada um d'estes systemas de valores, os correspondentes de Δ e P por meio de (27), e procurando finalmente dois d'estes systemas que, correspondendo a epochas muito visinhas $T + h$ e $T + h'$, dêm respectivamente

$$\Delta < s + s', \qquad \Delta > s + s';$$

será facil obter depois pela interpolação o verdadeiro valor $T + \delta T = T'$ relativo a $\Delta = s + s'$.

Do mesmo modo se corrigiriam os instantes dos contactos internos.

O valor correspondente de S, que será o verdadeiro, não coincidirá tambem com o deduzido de (30), embora este seja independente de t, pois que a formula (30), tirada das equações (28) como a (31), suppõe, por isso, egualmente a constancia dos movimentos horarios.

Poderia tambem calcular-se a correcção δT por meio de approximações successivas. Com effeito, em virtude de (27), temos exactamente

$$(s' \pm s) \operatorname{sen} S = [\alpha_1 - \alpha'_1 + (p_1 - p'_1)\,\delta T] \cos \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} \delta_1 + \delta'_1 \\ + (q_1 + q'_1)\,\delta T \end{array} \right]$$

$$(s' \pm s) \cos S = \delta_1 - \delta'_1 + (q_1 - q_1)\,\delta T$$

sendo ainda α_1, α'_1, δ_1 e δ'_1 os valores das ascensões rectas e declinações de Venus e do sol, tirados das taboas para o instante T deduzido de (31), e p_1, p'_1, q_1 e q' os valores dos movimentos horarios correspondentes, calculados para o mesmo instante.

Desenvolvendo o coseno que entra na primeira d'estas equações, desprezando no desenvolvimento as segundas potencias de δT, e fazendo, para simplicidade,

$$X = (\alpha_1 - \alpha'_1) \cos \frac{1}{2} (\delta_1 + \delta'_1),$$

$$Y = \begin{cases} (p_1 - p'_1) \cos \dfrac{1}{2} (\delta_1 + \delta'_1) \\ - \dfrac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha'_1)(q_1 + q'_1) \operatorname{sen} \dfrac{1}{2} (\delta_1 + \delta'_1) \end{cases}$$

$$X' = \delta_1 - \delta'_1, \quad Y' = q_1 - q'_1,$$

o systema das duas equações transforma-se em

$$(s' \pm s) \operatorname{sen} S = X + Y \delta T$$

$$(s' \pm s) \cos S = X' + Y' \delta T$$

as quaes, quadradas e sommadas, dariam por approximações successivas o valor de δT, mediante a formula

$$\delta T = \frac{(s' \pm s)^2 - (X^2 + X'^2)}{2(XY + X'Y') + (Y^2 + Y'^2)\delta T}$$

e depois S por qualquer d'ellas.

31. Instantes dos contactos apparentes. — Procuremos agora as correcções δT_1, $\delta T'_2$, $\delta T'_3$ e $\delta T'_4$ que é necessario applicar aos instantes dos contactos geocentricos T_1, T_2, T_3 e T_4, calculados como acabamos de indicar, para ter os dos contactos apparentes T'_1, T'_2, T'_3 e T'_4.

Sejam, em geral, τ e τ' os instantes da mesma phase do phenomeno para o centro da terra e para um logar da superficie, e Δ a distancia dos centros dos dois corpos que caracterisa a phase. No instante τ' a distancia geocentrica será $\Delta' = \Delta + \delta\Delta$, representando por $\delta\Delta$ a variação de Δ no intervallo de tempo $\tau' - \tau = \delta\tau$. E como este intervallo é sempre muito pequeno, em virtude da pequenez das parallaxes, não se commetterá erro sensivel suppondo n'elle uniforme a variação da distancia: teremos pois

$$\Delta' = \Delta + \delta\tau \frac{d\Delta}{dt}$$

d'onde

$$\delta\tau = \frac{\Delta' - \Delta}{\frac{d\Delta}{dt}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (32)$$

Para obter a expressão das correcções $\delta T'$, que convertem os tempos dos contactos geocentricos T' nos dos apparentes T'', basta portanto deduzir as de $\Delta' - \Delta$ e $\frac{d\Delta}{dt}$, applical-as aos instantes T' já determinados, e substituil-as depois em (32).

32. Derivando em ordem a t as duas equações (27), temos

$$\frac{d\Delta}{dt}\operatorname{sen} P + \Delta\frac{dP}{dt}\cos P = (p - p')\cos\frac{1}{2}(\delta + \delta')$$

$$\frac{d\Delta}{dt}\cos P - \Delta\frac{dP}{dt}\operatorname{sen} P = q - q'$$

ou, fazendo a hypothese (29),

$$\frac{d\Delta}{dt}\operatorname{sen} P + \Delta\frac{dP}{dt}\cos P = n\operatorname{sen} N$$

$$\frac{d\Delta}{dt}\cos P - \Delta\frac{dP}{dt}\operatorname{sen} P = n\cos N$$

Eliminando agora $\frac{dP}{dt}$ entre estas equações, vem immediatamente

$$\frac{d\Delta}{dt} = n\cos(P-N) = n\cos\omega$$

fazendo $P-N=\omega$.

O valor de $\frac{d\Delta}{dt}$, calculado por meio d'esta formula com os de n, P e N relativos aos instante T' da phase geocentrica, que se considera, é pois o que deve substituir-se em (32) para ter a correcção ΔT.

Note-se bem que este angulo ω não é o angulo ψ que entra nas expressões de T_1, T_2, T_3 e T_4. Aqui, para cada uma das quatro phases, teremos valores particulares de n e $\omega = P - N$, determinados por meio de (27) e (29) com os valores correspondentes de Δ, α, δ, α', δ', p, q, p' e q'.

33. Passamos agora a deduzir a expressão de $\Delta' - \Delta$.

Chamando z e z' as distancias zenithaes verdadeiras de Venus e do sol, relativas ao instante τ' e ao logar da observação, cujas longitude e latitude designaremos por G e φ, e representando por π e π' as parallaxes horizontaes equatoriaes dos dois corpos n'esta epocha, $\operatorname{sen}\pi \operatorname{sen} z$ e $\operatorname{sen}\pi' \operatorname{sen} z'$, ou $\pi \operatorname{sen} z$ e $\pi' \operatorname{sen} z'$, em vista da pequenez de π e π', serão as parallaxes dos dois corpos em distancia zenithal.

Posto isto, sejam (fig. 7): Z o zenith do logar, S e S' as posições geocentricas de Venus e do sol e s e s' as posições apparentes; e designemos respectivamente por $180° - K$ e K' os angulos ZSS' e $ZS'S$. Os pequenos augmentos Ss e $S's'$ das distancias zenithaes $z = ZS$ e $z' = ZS'$ serão os effeitos $\pi \operatorname{sen} z$ e $\pi' \operatorname{sen} z'$ da parallaxe, que poderão, sem erro apreciavel, considerar-se differenciaes.

Ora, d'um triangulo, cujos lados são a, b, c, e A, B, C os angulos, tira-se facilmente a relação differencial muito conhecida

$$da = db \cos C + dc \cos B + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} C\, dA \ldots \quad (33)$$

mediante as relações fundamentaes

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C$$

differenciando a primeira; substituindo depois, no coefficiente de db, as expressões de $\operatorname{sen} c \cos A$ e $\cos c$ tiradas da primeira e da terceira, e no coefficiente de dc, as de $\operatorname{sen} b \cos A$ e $\cos b$ tiradas da primeira e da segunda; attendendo a $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} c = \operatorname{sen} C \operatorname{sen} a$; e finalmente dividindo pelo factor commum $\operatorname{sen} a$.

Fazendo pois no triangulo ZSS'

$$db = \pi \operatorname{sen} z, \quad dc = \pi' \operatorname{sen} z'$$

e por conseguinte

$$da = \Delta - \Delta' \quad \text{e} \quad dA = o$$

visto ser nulla a parallaxe em azimuth, teremos, segundo (33),

$$\Delta - \Delta' = -\pi \operatorname{sen} z \cos K + \pi' \operatorname{sen} z' \cos K' \ldots \quad (34)$$

Resta portanto accommodar esta formula ao calculo por meio das coordenadas equatoriaes, que estamos empregando.

Seja (fig. 7) S_0 o meio de SS' e designemos por z_0 a distancia zenithal ZS_0 d'este ponto, e por K_0 o angulo ZS_0S. O triangulo SZS_0 dá immediatamente

$$\cos z_0 = \cos\frac{1}{2}\Delta\cos z - \operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta\operatorname{sen} z\cos K$$

$$\cos z = \cos\frac{1}{2}\Delta\cos z_0 + \operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta\operatorname{sen} z_0\cos K_0$$

d'onde

$$\operatorname{sen} z\cos K = -\cos z_0\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta + \cos\frac{1}{2}\Delta\operatorname{sen} z_0\cos K_0;$$

e egualmente se tira do triangulo $S'ZS_0$ a relação

$$\operatorname{sen} z'\cos K' = \cos z_0\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta + \cos\frac{1}{2}\Delta\operatorname{sen} z_0\cos K_0.$$

Substituindo em (34) estas expressões, vem

$$\Delta - \Delta' = (\pi + \pi')\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta\cos z_0 - (\pi - \pi')\cos\frac{1}{2}\Delta\operatorname{sen} z_0\cos K_0$$

Dá-se a esta expressão uma forma muito simples, fazendo n'ella as hypotheses

$$\left.\begin{array}{l}(\pi+\pi')\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta=g\operatorname{sen}\gamma\\[2ex](\pi-\pi')\cos\frac{1}{2}\Delta=g\cos\gamma\end{array}\right\}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (35)$$

que a transformam em

$$\Delta-\Delta'=g\,(\operatorname{sen}\gamma\cos z_0-\cos\gamma\operatorname{sen}z_0\cos K_0);$$

e, como a expressão que fica dentro do parenthesis é, com signal contrario, a do coseno do lado d'um triangulo, no qual são K_0 o angulo opposto, e $90^\circ+\gamma$ e z_0 os outros dois lados, isto é, o coseno do lado $Z\,O=\lambda$ do triangulo $Z\,O\,S_0$, onde suppomos $O\,S_0=90^\circ+\gamma$, teremos emfim

$$\Delta-\Delta'=-g\cos\lambda\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (36)$$

Antes de passarmos adiante, notaremos que esta formula encerra uma propriedade notavel, e de summa vantagem na escolha das estações, como veremos opportunamente. Deve-se a Lagrange esta simplificação da formula, e a consequencia importante que d'ella se tira e que se resume no theorema seguinte:

— N'um dado tempo, a distancia apparente dos dois corpos celestes é a mesma para todos os logares da superficie da terra que têm o mesmo valor de λ, isto é, para todos os logares cujos zeniths ficam situados n'um circulo descripto em torno de O como polo, e com uma distancia polar $Z\,O = \lambda$.

34. Das relações (35) tira-se com facilidade

$$g^2 = \pi^2 + \pi'^2 - 2\pi\pi' \cos\Delta$$

ou, com sufficiente approximação,

$$g = \pi - \pi' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Por outra parte, sendo P (fig. 7) o polo, o triangulo $P\,O\,Z$ dá

$$\cos\lambda = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} D + \cos\varphi \cos D \cos(A - \zeta) \ldots \quad (38)$$

chamando A e D a ascensão recta e a declinação geocentricas do ponto O, e ζ e φ as de Z.

O conhecimento de λ, suppondo determinados ζ e φ, fica pois dependente da determinação das coordenadas equatoriaes A e D do ponto O.

Pelas formulas (38) e (36) vê-se que o maximo valor de $\cos\lambda$, e portanto de $\Delta' - \Delta$, corresponde ao logar da superficie terrestre cujas coordenadas ζ e φ são respectivamente

$$\zeta = A, \qquad \varphi = D$$

se Δ é menor que Δ'; ou

$$\zeta = 180^\circ + A, \qquad \varphi = -D$$

se Δ é maior que Δ', isto é — o effeito da parallaxe é maximo no logar unico determinado pelas primeiras d'estas coordenadas, se a parallaxe diminue a distancia apparente dos dois corpos, e pelas segundas se ella as augmenta —.

Note-se mais que, n'estes dois logares, os valores de $\cos\lambda$, correspondentes á phase respectiva, são eguaes e de signaes contrarios.

35. Resta deduzir as formulas por onde devem calcular-se as coordenadas A e D, de cujo conhecimento depende a determinação de λ por meio de (38).

Attendendo á posição média de S_0 entre S e S', podemos muito approximadamente tomar, para valores da sua ascensão recta e declinação α_0 e δ_0, as médias das mesmas coordenadas d'aquelles dois pontos, isto é, suppor

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha'), \qquad \delta_0 = \frac{1}{2}(\delta + \delta')$$

e egualmente

$$PS_0O = \frac{1}{2}(PSO + PS'O) = P$$

Ora o triangulo PS_0O, no qual são $S_0PO = A - \alpha_0$ e $PS_0 = 90^o - \delta_0$, dá

$$\cos D \operatorname{sen}(A - \alpha_0) = \cos\gamma \operatorname{sen} P$$

$$\cos D \cos(A - \alpha_0) = -\cos\delta_0 \operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\delta_0 \cos\gamma \cos P$$

$$\operatorname{sen} D = -\operatorname{sen}\delta_0 \operatorname{sen}\gamma + \cos\delta_0 \cos\gamma \cos P;$$

e portanto, accommodando estas relações ao calculo logarithmico, por meio das hypotheses

$$\operatorname{sen}\gamma = f \operatorname{sen} F, \quad \cos\gamma \cos P = f \cos F,$$

o systema de formulas

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang} F = \dfrac{\operatorname{tang}\gamma}{\cos P}, \quad f = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen} F} \\ \operatorname{tang}(A - \alpha_0) = -\dfrac{\cos\gamma \operatorname{sen} P}{\operatorname{sen}(\delta_0 + F)}, \operatorname{sen} D = f\cos(\delta_0 + F) \end{array}\right\} \quad (39),$$

determina, como pretendiamos, A e D em funcção de α, δ, α' e δ', mediante os valores $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')$ e $\frac{1}{2}(\delta + \delta')$ de α_0 e δ_0 e os de P e γ, que se calculam pelas formulas (27) e (35).

36. Do que deixamos dicto conclue-se que podemos calcular, em funcção da differença das parallaxes $\pi - \pi'$, as correcções

δT dos tempos dos contactos geocentricos, necessarias para a sua conversão nos dos apparentes, por via da formula

$$\delta T = \frac{g \cos \lambda}{n \cos \omega} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

e usando das relações (27), (29), (30), (37), (38) e (39) para determinar as quantidades que n'ella entram, em funcção das ascensões rectas e declinações verdadeiras de Venus e do sol, calculadas para o instante T do contacto geocentrico respectivo.

Os signaes das correcções δT correspondentes ás quatro phases do phenomeno, observado d'uma estação, dependem do signal de $\cos \lambda$, determinado por (38), e do de $\cos \omega$, determinado pelos valores respectivos de P e N.

Os valores positivos de δT representam *accelerações*, os negativos representam *atrazos*, isto é: as phases, a que correspondem os primeiros, serão vistas, mais tarde do que se veriam do centro, pelo observador collocado á superficie; aquellas, a que correspondem os segundos, serão vistas mais cedo.

Em differentes logares da terra os valores d'estes atrazos e accelerações variam, e concebe-se que serão maximos nas estações onde fôr maximo tambem o effeito da parallaxe, isto é, nos logares determinados pelas coordenadas (A, D) ou $(180° + A, -D)$, que, como se vê, ficam nas extremidades d'um diametro terrestre. Por outra parte, reflectindo um pouco no que se disse no fim do n.º 34, comprehende-se facilmente que, se n'um d'estes logares corresponde uma acceleração ao tempo d'uma phase, no outro corresponderá um atrazo á mesma phase, sendo esta acceleração e este atrazo maximos eguaes entre si

---

Fazendo, para simplicidade, $v = \frac{1}{n \cos \omega}$ na formula (40), e chamando v_1, v_2, v_3 e v_4 os valores de v correspondentes aos quatro contactos, e λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 os valores respectivos de λ, temos pois finalmente as relações

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= T'_1 - G = T_1 + g\,v_1 \cos\lambda_1 - G \\ I_2 &= T'_2 - G = T_2 + g\,v_2 \cos\lambda_2 - G \\ I_3 &= T'_3 - G = T_3 + g\,v_3 \cos\lambda_3 - G \\ I_4 &= T'_4 - G = T_4 + g\,v_4 \cos\lambda_4 - G \end{aligned}\right\} \ldots (41)$$

que dão os instantes I_1, I_2, I_3 e I_4 dos quatro contactos apparentes, em tempo médio do logar.

Para outra estação teriamos as mesmas formulas, variando simplesmente os valores de λ_1, λ_2, λ_3 e λ_4 e de G. Os instantes geocentricos T e os coefficientes v_1, v_2, v_3, v_4, que devem calcular-se com os valores n_1 e ω_1, n_2 e ω_2, n_3 e ω_3, n_4 e ω_4, determinados, como dissemos (n.º 32), para cada um dos instantes T, por meio de elementos geocentricos, conservam evidentemente os mesmos valores nas differentes estações.

37. Methodo de Halley. — Se quizessemos applicar aqui o methodo de Halley, para deduzir dos instantes dos mesmos dois contactos, observados em duas estações, a differença das parallaxes $\pi - \pi'$, deveriamos seguir, com relação ás equações (41), o que se fez (n.º 26) relativamente a (21), e teriamos assim a formula

$$\pi - \pi' = \frac{H - H'}{v_3(\cos\lambda_3 - \cos\lambda'_3) - v_2(\cos\lambda_2 - \cos\lambda'_2)} \quad (42)$$

que, como (22), dá a differença das parallaxes $\pi - \pi'$ de Venus e do sol, expressa na differença dos tempos H e H' que decorrem, nas duas estações, entre os contactos observados, mas dependente dos valores das longitudes G e G' dos dois logares; como acontecia tambem na formula (22), onde estes valores eram necessarios para o calculo dos coefficientes h'', h''_1, k'' e k''_1 das expressões das parallaxes em longitude e latitude.

Com effeito, embora em (42) desappareçam os valores de G e G', que entravam explicitamente em (41), conservam-se todavia implicitamente em $\cos\lambda_3$, $\cos\lambda_2$ e $\cos\lambda'_3$, $\cos\lambda'_2$ que, determinados por meio de (38), são dependentes d'elles.

Não sabemos porém que se tenha feito uso da formula (42). É, em geral, pelo methodo de De l'Isle que se procura deduzir das equações (41) a differença $\pi - \pi'$.

38. METHODO DE DE L'ISLE. — O methodo d'este illustre sabio póde considerar-se como uma extensão do de Halley.

Este, como temos visto, só póde applicar-se quando em duas estações se tem observado os instantes dos mesmos dois contactos. Todas as observações, que não estiverem n'estas circumstancias, ficam inuteis. Ora a difficuldade da observação dos contactos externos, e por outra parte as circumstancias accidentaes que muitas vezes impedem a observação, mais facil, dos internos, taes como uma nuvem que encubra o astro no momento da phase, ou qualquer incidente na pratica da observação, tornam muito frequente a impossibilidade de observar na mesma estação os dois contactos. O methodo de Halley deixaria pois na pratica muitas observações inaproveitaveis. De l'Isle ampliou estes limites, exigindo simplesmente, para a applicação do seu methodo, a observação do mesmo contacto em duas estações.

Em taes circumstancias acham-se sempre, póde dizer-se, as observações dos contactos internos, pois que, sendo só duas estas phases, egualmente faceis de observar, é, em geral, muito superior o numero das estações em que ellas se observam, Emquanto aos contactos externos, cuja difficuldade de observação torna muito raros os resultados d'ella que merecem confiança, póde acontecer que a observação d'um d'elles não tenha correspondente em nenhuma das outras estações, e, em tal caso, o proprio methodo de De l'Isle deixaria inutil esta observação unica. Veremos brevemente que o methodo das equações de condição, extensão ainda do de De l'Isle, torna aproveitaveis taes observações, e portanto todas as que se tiverem effectuado com a precisão que o problema requer.

Sejam I_2 e I'_2 os instantes do primeiro contacto interno, observado em duas estações de longitudes G e G'; e λ_2 e λ'_2 os valores correspondentes de λ. Teremos, segundo (41),

$$I_2 = T'_2 + (\pi - \pi') v_2 \cos \lambda_2 - G$$

$$I'_2 = T_2 + (\pi - \pi') v_2 \cos \lambda'_2 - G'$$

Subtrahindo estas equações uma da outra, e resolvendo a resultante em ordem a $\pi - \pi'$, acha-se immediatamente

$$\pi - \pi' = \frac{I_2 + G - (I'_2 + G')}{v_2 (\cos \lambda_2 - \cos \lambda'_2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Tal é a formula de De l'Isle.

Se, por um lado, ella dá logar a que se aproveitem observações, que ficariam inuteis pela formula de Halley, por outro, vemos que exige, mais que esta, o conhecimento exacto das longitudes G e G', e dos estados absolutos das pendulas ou chronometros que marcarem os instantes I_2 e I'_2. D'aqui provém necessariamente novas causas de erros, mas estes, por isso que taes causas podem considerar-se como fortuitas, serão attenuados no resultado medio final pelo maior numero de valores particulares de $\pi - \pi'$ que, pela formula (43), se deduzem do mesmo numero de observações.

Os erros da observação, commettidos nos instantes I_2 e I'_2, assim como os das longitudes G e G', influirão tanto menos no valor de $\pi - \pi'$, e portanto no da constante π_0 da parallaxe solar (n.º 26), quanto maior for a differença $\cos\lambda_2 - \cos\lambda'_2$, o que terá logar quando $\cos\lambda_2$ e $\cos\lambda'_2$ tiverem signaes differentes e valores maximos. É o que se dá nas estações diametralmente oppostas, determinadas pelos dois systemas de coordenadas (A, D) e $(180° + A, -D)$ do n.º 34.

39. Comparação das formulas relativas ás coordenadas equatoriaes e eclipticas. — Como podia prever-se, as formulas (22) e (25) são, com relação á ecliptica, o mesmo que as (42) e (43) a respeito do equador.

Se nas ultimas mudarmos pois as ascensões rectas e declinações dos dois astros e os movimentos horarios correspondentes

$$\alpha,\ \delta,\ \alpha',\ \delta',\ p,\ q,\ p',\ q'$$

nas suas longitudes, latitudes e nos respectivos movimentos horarios

$$M,\ L,\ \odot,\ 0,\ m,\ l,\ m',\ 0,$$

bem como a ascensão recta e declinação ζ e φ do zenith do logar na sua longitude e latitude Ω e Λ, devemos obter as formulas (22) e (25), como vamos effectivamente mostrar, desprezando n'essa transformação as segundas potencias de L_2 e $M_2 - \odot_2$, e suppondo que, na determinação dos valores de A e D pelas relações do n.º 35, se póde fazer $\cos\gamma = 1$. Com effeito, se na expressão

$$v_2 = \frac{1}{n_2 \cos(P_2 - N_2)}$$

desenvolvermos o coseno que entra no denominador e depois substituirmos, em vez de $\operatorname{sen} P_2$, $\cos P_2$, $n_2 \operatorname{sen} N_2$ e $n_2 \cos N_2$, as suas expressões deduzidas de (27) e (29), acha-se

$$v_2 = \frac{s' - s}{(q_2 - q'_2)(\delta_2 - \delta'_2) + (p_2 - p'_2)(\alpha_2 - \alpha'_2)\cos^2 \frac{1}{2}(\delta_2 + \delta'_2)},$$

e, applicando agora a mudança indicada, vem immediatamente

$$v_2 = \frac{s' - s}{(M_2 - \odot_2)(m_2 - m'_2) + L_2 l_2}$$

suppondo, segundo dissemos, $\cos^2 \frac{1}{2} L_2 = 1$.

Por outra parte, a formula (38) dá a relação

$$C_2 = \cos\lambda_2 - \cos\lambda'_2 = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} D_2 \,[\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\varphi'] \\ + \cos D_2 \left[\begin{array}{l} \cos\varphi \cos(A_2 - \zeta) \\ - \cos\varphi' \cos(A_2 - \zeta') \end{array} \right] \end{array} \right.$$

que, desenvolvendo cos $(A_2 - \zeta)$ e cos $(A_2 - \zeta')$, substituindo, em seguida, sen D_2, cos D_2 sen A_2 e cos D_2 cos A_2 pelas suas expressões deduzidas das formulas do n.º 35, e attendendo, como ha pouco, ás relações (27), bem como aos valores approximados de α_0 e δ_0, toma a forma

$$C_2 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\delta_2 - \delta'_2}{s' - s} \cos \dfrac{\delta_2 + \delta'_2}{2} [\operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} \varphi'] \\ - \left[\begin{array}{l} \dfrac{\alpha_2 - \alpha'_2}{s' - s} \cos \dfrac{\delta_2 + \delta'_2}{2} \operatorname{sen} \dfrac{\alpha_2 + \alpha'_2}{2} \\ + \dfrac{\delta_2 - \delta'_2}{s' - s} \operatorname{sen} \dfrac{\delta_2 + \delta'_2}{2} \cos \dfrac{\alpha_2 + \alpha'_2}{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{r} \cos \varphi \cos \zeta \\ - \cos \varphi' \cos \zeta' \end{array} \right] \\ + \left[\begin{array}{l} \dfrac{\alpha_2 - \alpha'_2}{s' - s} \cos \dfrac{\delta_2 + \delta'_2}{2} \cos \dfrac{\alpha_2 + \alpha'_2}{2} \\ - \dfrac{\delta_2 - \delta'_2}{s' - s} \operatorname{sen} \dfrac{\delta_2 + \delta'_2}{2} \operatorname{sen} \dfrac{\alpha_2 + \alpha'_2}{2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{r} \cos \varphi \operatorname{sen} \zeta \\ - \cos \varphi' \operatorname{sen} \zeta' \end{array} \right] \end{array} \right.$$

Effectuando agora as mudanças indicadas e fazendo sempre os desprezos das segundas potencias de L_2 e $M_2 - \odot_2$, transforma-se esta equação em

$$C_2 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{L_2}{s' - s} (\operatorname{sen} \Lambda - \operatorname{sen} \Lambda') \\ + \dfrac{M_2 - \odot_2}{s' - s} [\cos \Lambda \operatorname{sen} (\Omega - \odot_2) - \cos \Lambda' \operatorname{sen} (\Omega' - \odot_2)] \end{array} \right.$$

Temos pois

$$C_2 v_2 = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{L_2}{(M_2 - \odot_2)(m_2 - m'_2) + L_2 l_2} (\operatorname{sen} \Lambda - \operatorname{sen} \Lambda') \\ \\ + \dfrac{M_2 - \odot_2}{(M_2 - \odot_2)(m_2 - m'_2) + L_2 l_2} \left[\begin{array}{r} \cos \Lambda \operatorname{sen} (\Omega - \odot_2) \\ - \cos \Lambda' \operatorname{sen} (\Omega' - \odot_2) \end{array} \right] \end{array} \right.$$

ou

$$v_2 C_2 = v_2 (\cos \lambda_2 - \cos \lambda'_2) = A_2 (h'' - h''_1) + B_2 (k'' - k''_1),$$

em virtude das expressões dos coefficientes A_2 e B_2 (n.º 24), e h'' e k'' (n.º 23).

Esta ultima relação, a que chegámos, mostra immediatamente a concordancia das formulas (25) e (43); e a que se deduz d'ella

$$v_3 C_3 - v_2 C_2 = v_3 (\cos \lambda_3 - \cos \lambda'_3) - v_2 (\cos \lambda_2 - \cos \lambda'_2)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} A_3 (h''' - h'''_1) - A_2 (h'' - h''_1) \\ + B_3 (k''' - k'''_1) - B_2 (k'' - k''_1) \end{array} \right.$$

mostra a das formulas (22) e (42).

40. Methodo das equações de condição. — Sejam na esphera celeste P (fig. 8) a posição do polo, S e V as posições apparentes do sol e de Venus; e tiremos o arco $V V'$ do parallelo em que Venus se acha, no momento considerado do phenomeno. Do pequeno triangulo $V V' S$, supposto rectilineo, deduz-se immediatamente a relação

$$VS^2 = VV'^2 + SV'^2$$

que, expressa nas coordenadas equatoriaes apparentes A e D de Venus e A' e D' do sol, dá

$$(A - A')^2 \cos^2 D_0 + (D - D')^2 = \Delta^2 \ldots\ldots \quad (44),$$

chamando D_0 a declinação média apparente $\dfrac{D + D'}{2}$ e Δ a distancia apparente dos centros dos dois astros.

Posto isto, é claro que, se substituissemos em (44), por A, A', D e D' os valores d'estas coordenadas, que correspondem precisamente ao instante d'um dos contactos, deveria deduzir-se para Δ o valor $s' \pm s$. No emtanto não se obtem este resultado, pois que, embora se abstraia da incerteza que ha sempre na determinação precisa do instante da phase observada, os erros das taboas d'onde se tiram, para este instante, os valores α, δ, α' e δ' das coordenadas geocentricas dos dois astros, e a inexactidão dos valores adoptados das parallaxes π e π' de Venus e do sol, são outras tantas causas de erro que se introduzem nos valores calculados de A, A', D e D'. Por outra parte, as grandezas, que se attribuem aos semi-diametros s e s', tambem não são as verdadeiras, pela difficuldade que ha na determinação exacta d'estes elementos. Tudo pois concorre para que não se obtenha precisamente $\Delta = s' \pm s$, por meio da relação (44), para o instante do contacto observado.

Chamando $d\,A$, $d\,A'$, $d\,D$ e $d\,D'$ as correcções, que deveriam applicar-se aos valores de A, A', D e D' a fim de obter os que correspondem a este instante, teremos, segundo (44),

$$\left.\begin{aligned}(\Delta+d\,\Delta)^2&=[s'\pm s+d\,(s'\pm s)]^2\\&=\left\{\begin{aligned}&[(A-A')+(dA-dA')]^2\cos^2\left[D_0+\frac{dD+dD'}{2}\right]\\&+[(D-D')+(d\,D-dD')]^2\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}(45),$$

representando tambem por $d\,s$ e $d\,s'$ as correcções dos valores attribuidos aos semi-diametros e por $d\,\Delta=s'\pm s+(d\,s'\pm d\,s)-\Delta$ a correcção da distancia calculada, proveniente de $d\,A$, $d\,A'$, $d\,D$ e $d\,D'$. E, se desenvolvermos agora o coseno que entra no primeiro termo do segundo membro, e depois todos os quadrados, desprezando no resultado os quadrados e productos das correcções, sempre muito pouco consideraveis, vem

$$\left.\begin{aligned}\Delta\,d\,\Delta&=\Delta[s'\pm s+(d\,s'\pm d\,s)-\Delta]\\&=(A-A')\,(dA-dA')\cos^2 D_0+(D-D')\,(dD-d\,D')\end{aligned}\right\}(46)$$

attendendo a (44), e dividindo toda a equação por 2.

O primeiro termo do segundo membro de (45) daria tambem em (46) o termo $-\frac{1}{2}(A-A')^2\,(d\,D+d\,D')$ sen $2\,D_0$, que desprezamos, embora não contenha quadrados ou productos das correcções, tendo em vista porém a pequenez de $A-A'$ durante o phenomeno.

N'este mesmo grau de approximação, e tomando as correcções de A, A', D, D' e Δ pelas respectivas differenciaes, poderia deduzir-se immediatamente (46) de (44), differenciando totalmente esta ultima equação e fazendo o desprezo que acabamos de indicar.

Segundo as formulas, sufficientemente approximadas, da parallaxe em angulo horario e distancia polar, que já empregámos (n.os 13 e 12), e chamando h_s o tempo sideral do logar, são

$$A - \alpha = \pi \cos\varphi \sec\delta \operatorname{sen}(\alpha - h_s)$$

$$A' - \alpha' = \pi' \cos\varphi \sec\delta' \operatorname{sen}(\alpha' - h_s)$$

e

$$D - \delta = \pi [\cos\varphi \operatorname{sen}\delta \cos(\alpha - h_s) - \operatorname{sen}\varphi \cos\delta]$$

$$D' - \delta' = \pi' [\cos\varphi \operatorname{sen}\delta' \cos(\alpha' - h_s) - \operatorname{sen}\varphi \cos\delta'],$$

d'onde

$$\left.\begin{array}{l} A - A' = \alpha - \alpha' + (\pi - \pi') \cos\varphi \sec\delta_0 \operatorname{sen}(\alpha_0 - h_s) \\ D - D' = \delta - \delta' + (\pi - \pi') \left[\begin{array}{l} \cos\varphi \operatorname{sen}\delta_0 \cos(\alpha_0 - h_s) \\ - \operatorname{sen}\varphi \cos\delta_0 \end{array}\right] \end{array}\right\} (47)$$

suppondo que, durante o phenomeno, se podem tomar

$$\alpha_0 = \frac{\alpha + \alpha'}{2} \text{ por } \alpha \text{ e } \alpha', \text{ e } \delta_0 = \frac{\delta + \delta'}{2} \text{ por } \delta \text{ e } \delta'$$

nas expressões dos muito pequenos valores das parallaxes em ascensão recta e declinação.

Fazendo agora, para simplicidade, nas relações (47), as hypotheses

$$\cos\varphi \operatorname{sen}(\alpha_0 - h_s) = h \operatorname{sen} H$$

$$\cos\varphi \cos(\alpha_0 - h_s) \operatorname{sen}\delta_0 - \operatorname{sen}\varphi \cos\delta_0 = h\cos H,$$

que as reduzem a

$$A - A' = \alpha - \alpha' + (\pi - \pi')\, h \operatorname{sen} H \sec\delta_0 = E$$

$$D - D' = \delta - \delta' + (\pi - \pi')\, h \cos H = F,$$

e substituindo, em seguida, estas expressões em (46), resulta

$$\Delta\, d\,\Delta = \Delta\,[s' \pm s + d(s' \pm s) - \Delta]$$

$$= \begin{cases} E\,d(\alpha - \alpha')\cos^2\delta_0 + F\,d(\delta - \delta') \\ + [E h \operatorname{sen} H \cos\delta_0 + F h \cos H]\, d(\pi - \pi') \\ - [E\dfrac{d(\alpha - \alpha')}{dt}\cos^2\delta_0 + F\dfrac{d(\delta - \delta')}{dt}]\, dG \end{cases}$$

tomando, como, ha pouco, dissemos, os erros pelas differenciaes respectivas, e attendendo tambem á correcção dG que deveria applicar-se ao valor attribuido á longitude G da estação; notando ao mesmo tempo que em (46) se póde tomar $D_0 = \delta_0$ com o desprezo das quantidades de segunda ordem relativamente a dA, dA', $D-\delta$ e $D'-\delta'$.

Deve advertir-se que na formação das differenciaes $d(A-A')$, $d(D-D')$ não fizemos variar α_0 nem δ_0, pois que a multiplicação pelo factor $\pi-\pi'$ tornaria insignificantes os termos respectivos.

Introduzamos agora na relação, a que chegámos, as hypotheses (29)

$$n \operatorname{sen} N = \frac{d(\alpha-\alpha')}{dt} \cos \delta_0$$

$$n \cos N = \frac{d(\delta-\delta')}{dt},$$

bem como as

$$\Delta \operatorname{sen} P = E \cos \delta_0$$

$$\Delta \cos P = F$$

que são, relativamente ao ponto considerado da superficie terrestre, inteiramente analogas ás formulas (27), visto representarem E e F as differenças das ascensões rectas e declinações apparentes dos dois astros. Teremos assim

$$\left.\begin{array}{l} d\Delta = s' \pm s + d(s' \pm s) - \Delta \\ = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} P \cos \delta_0\, d(\alpha-\alpha') + \cos P\, d(\delta-\delta') \\ + h \cos(P-H)\, d(\pi-\pi') + n\cos(P-N)\, dG \end{array} \right. \end{array}\right\} (48),$$

dividindo a equação pelo factor commum Δ.

Se a distancia $s' \pm s + d\,(s' \pm s)$, que corresponde realmente ao instante observado do contacto, fosse conhecida, cada observação daria pois uma equação de condição da fórma

$$O - C = \varepsilon = \left\{\begin{matrix} a\,d(\alpha - \alpha') + b\,d\,(\delta - \delta') + c\,d\,(\pi - \pi') \\ + e\,d\,G \end{matrix}\right\} \quad (49):$$

representando por O aquella distancia relativa ao instante observado, e por C a distancia calculada para o mesmo instante pela formula (44); e fazendo

$$\left.\begin{matrix} a = \text{sen}\, P \cos \delta_0, & b = \cos P \\ c = h \cos(P - H), & e = n \cos(P - N) \end{matrix}\right\} \ldots \quad (50).$$

Todavia, como a observação não dá a distancia O, mas sim o instante a que ella se refere, é necessario introduzir na equação (49) a differença dos tempos correspondentes ás distancias O e C, em logar das mesmas distancias, isto é, o erro τ do tempo, em vez do erro ε da distancia, o que se consegue dividindo a equação (49) por $\dfrac{d\,\Delta}{d\,t} = n \cos(P - N)$, segundo a formula (32), que é applicavel, tanto ao centro da terra, como a um logar da superficie. Chamando pois T_o e T_c os tempos correspondentes ás distancias O e C, teremos

$$T_o - T_c = \left\{\begin{matrix} a'd(\alpha - \alpha') + b'd(\delta - \delta') + c'd(\pi - \pi') \\ + d\,G \end{matrix}\right\} (51)$$

fazendo

$$\left.\begin{array}{l} a' = \dfrac{\operatorname{sen} P \cos \delta_0}{n \cos (P - N)}, \quad b' = \dfrac{\cos P}{n \cos (P - N)} \\ \\ c' = \dfrac{h \cos (P - H)}{n \cos (P - N)} \end{array}\right\} \ldots (52).$$

Tal é a doutrina de Dubois, apresentada aqui com algumas modificações, que julgamos necessarias.

Todavia a impossibilidade de calcular o tempo T_c, que corresponde realmente á distancia C, calculada para o instante T_0, mas affectada dos erros tabulares, parece-nos que torna inapplicavel na pratica a equação (51).

Para resolver praticamente o problema, comparando os tempos, calculado e observado, d'uma phase, deveriamos proceder da seguinte fórma.

Seja T'' o tempo deduzido das taboas pelas formulas (41), em que a distancia é $s' \pm s$. Segundo as mesmas taboas, será

$$T' + \frac{d(s' \pm s)}{n \cos (P - N)} = T''$$

o tempo em que a distancia é $s' \pm s + d(s' \pm s)$. Em resultado porém dos erros tabulares, não é esta, mas sim

$$s' \pm s + d(s' \pm s) + a\,d(\alpha - \alpha') + b\,d(\delta - \delta') + c\,d(\pi - \pi')$$

a distancia correspondente a T'''. E o tempo verdadeiro será

$$T'''+d\,T'''=T''+\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d\,(s'\pm s)}{n\cos(P-N)}\\[2ex]-a'\,d\,(\alpha-\alpha')-b'\,d\,(\delta-\delta')-c'\,d\,(\pi-\pi')\end{array}\right.$$

isto é, teremos a equação de condição

$$T_0-T''=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d\,(s'\pm s)}{n\cos(P-N)}\\[2ex]-a'\,d\,(\alpha-\alpha')-b'\,d\,(\delta-\delta')-c'\,d\,(\pi-\pi')\end{array}\right\}\quad(53)$$

sendo T_0 o tempo da observação reduzido ao primeiro meridiano.

E, se G carecer da correcção $d\,G$, poderemos, chamando l_0 o tempo local da observação, escrever no primeiro membro l_0+G, em vez de T_0, accrescentando ao segundo $-d\,G$.

41. Em resultado do que fica exposto, concluimos que a observação de cada phase n'uma estação qualquer, feita com o cuidado e precisão devidas, fornece uma equação da fórma (53), calculando, por meio das relações (52) e pelas dos n.os antecedentes, os coefficientes a', b' e c', em funcção das coordenadas geocentricas α, δ, α' e δ', tiradas das taboas para o instante determinado pela observação.

Depois combinando as equações de condição, assim formadas em numero sufficiente, achar-se-hão os erros tabulares de $\alpha - \alpha'$, $\delta - \delta'$, o de G e o da differença das parallaxes $\pi - \pi'$, que especialmente queriamos determinar.

Em rigor, bastariam $3 + i$ equações de condição (53), se i é o numero das estações a que ellas se referem; ou simplesmente 3, se as observações são feitas em estações de longitudes perfeitamente conhecidas, o que devemos suppor. Mas, se poderem formar-se, como convém, maior numero de equações, combinando-as pelo methodo dos menores quadrados ou pelo de Mayer, obter-se-hão valores das mesmas incognitas tanto mais provaveis, quanto maior fôr o numero das equações estabelecidas, com um limite d'erro determinado pelo methodo de combinação de que se usar.

Finalmente, por ser $\frac{\pi}{\pi'} = k$, teremos

$$\pi - \pi' = \pi' (k - 1)$$

que, differenciada por logarithmos, dá a formula

$$d\,\pi' = \frac{\pi'}{\pi - \pi'} d\,(\pi - \pi')$$

por meio da qual se deduzirá do valor calculado de $d\,(\pi - \pi')$ a correcção $d\,\pi'$ do valor attribuido á parallaxe solar π', e portanto a verdadeira grandeza d'esta, ou a da constante π_0 da mesma parallaxe (n.º 26).

Como já notamos, este methodo, que é verdadeiramente uma extensão do de De l'Isle, visto fazer entrar, por si só, cada observação na determinação do valor de π_0, exige, como elle, o conhecimento das longitudes das estações, porque este conhecimento é necessario para reduzir os tempos locaes da observação dos contactos aos do meridiano das taboas, das quaes devem tirar-se as coordenadas que entram na expressão (44) de C.

42. Passagens de mercurio.—Os dois planetas inferiores, Venus e Mercurio, são os unicos que, para nós, dão logar ao phenomeno da passagem pelo disco do sol, que temos estudado.

As passagens de Mercurio são mais frequentes do que as de Venus, que não se repetem, com o intervallo de 8 annos proximamente, senão depois d'um periodo de mais d'um seculo. Mas a sua observação não póde representar, na determinação da parallaxe do sol, o papel importante, que cabe ás passagens de Venus.

Mercurio, achando-se muito mais perto do sol do que Venus na epocha da respectiva conjuncção inferior, tem, no tempo da passagem, uma parallaxe muito menos differente da do sol. D'aqui resulta que esta differença se torna muito pouco sensivel nas observações, as quaes, por isso, não a podem dar com a precisão que o methodo requer, e com a qual se obtem a differença de parallaxes de Venus e do sol.

Já em 1725 Halley, n'uma Memoria que então publicou, respondeu a esta questão pelas palavras seguintes:—«A differença da parallaxe de Mercurio e da parallaxe do sol é tão pequena que se conserva sempre inferior á parallaxe solar, a qual se pretende obter. Emquanto a Venus, cuja parallaxe, durante a passagem, é quadrupla da do sol, a differença de parallaxes tornará muito sensiveis as differenças entre os espaços de tempo em que Venus é visivel sobre o sol, nas diversas regiões do nosso globo. Ora estas differenças constituem o elemento principal de que se deduz a parallaxe do sol.»

Na verdade, chamando $m = P - \pi'$ a differença de parallaxes do planeta e do sol, que se deduz da observação, e $n = \frac{P}{\pi'}$ a relação das mesmas dada pelas taboas, teremos

$$m = (n - 1)\,\pi'$$

Ora, com os valores medios 0,39 e 0,72 das distancias de Mercurio e de Venus ao sol, acha-se:

para Mercurio

$$n = \frac{1}{1 - 0{,}39} = 1{,}64;$$

e para Venus

$$n' = \frac{1}{1 - 0{,}72} = 3{,}57;$$

portanto

$$\frac{n' - 1}{n - 1} = 4$$

isto é, a differença das parallaxes de Mercurio e do sol é proximamente 4 vezes menor que a das parallaxes de Venus e do sol, e portanto a influencia dos erros da observação na determinação da parallaxe do sol será 4 vezes maior para Mercurio que para Venus.

É por isso que as passagens, mais frequentes, do primeiro d'estes planetas não podem ser empregadas com vantagem na resolução do delicado problema da parallaxe solar.

CAPITULO III

Observação d'uma passagem de Venus; e comparação dos methodos precedentes

Considerações preliminares

43. O fim que temos especialmente em vista, no estudo que estamos fazendo, é expor os processos pelos quaes devem combinar-se os resultados ministrados pela observação, a fim de deduzir d'elles a grandeza do elemento fundamental do systema do mundo que consideramos — *a constante da parallaxe solar.* — A nosso attenção dirige-se pois com particularidade aos trabalhos de gabinete, que este importante problema exige posteriormente ás observações.

Assim ficará quasi extranho ao plano que seguimos tudo o que diz respeito ao exame a que o observador deve dedicar-se antes da epocha das observações, a fim de as effectuar nas condições mais favoraveis, bem como o que se refere propriamente á pratica da observação. Partimos da supposição de que os elementos fornecidos por ella foram determinados nas circumstancias que o bom resultado do problema requer, tendo havido, da parte do observador, o cuidado necessario na operação ; e pretendemos simplesmente mostrar o modo como depois deveremos servir-nos d'esses elementos para o fim que se tem em vista, Não obstante isso, é tão essencial, para que possa alcançar-se um resultado satisfactorio, a parte que deixamos por tractar, e tão complicada e difficil no methodo exposto no capitulo precedente, que não podemos deixar de fazer agora sobre ella algumas considerações mais importantes, e que versarão especialmente: 1.° sobre a influencia da refracção atmospherica nos instantes dos contactos observados; 2.° sobre a observação dos contactos externos e internos; 3.° sobre a escolha das estações. Limitar-nos-hemos ao que é mais essencial, porque o exige a necessidade de não prejudicar com estas digressões, aliás interessantes e opportunas, o que faz parte propriamente do plano de estudo que nos propozemos.

O excellente e completo trabalho de Dubois, especialmente destinado á passagem de Venus de 1874, tracta estas questões com o desenvolvimento desejado.

Influencia da refracção atmospherica nos instantes das phases

14. Effeito da interposição da atmosphera. — O bom resultado da determinação da parallaxe do sol pela observação das passagens de Venus, qualquer que seja o methodo de deducção empregado, ou o de Halley, ou o de De l'Isle, ou o das equações de condição, repousa unicamente, como temos visto, sobre a exacta determinação dos instantes dos contactos.

Todas as causas de erro, que podem encontrar-se n'esta determinação, devem pois necessariamente chamar a attenção do observador, a fim de conhecer se a influencia d'ellas é inferior ao limite do erro que póde admittir-se no resultado da observação e que póde apreciar-se pela expressão

$$\delta(H - H') = \frac{H - H'}{\pi_0} \delta \pi_0$$

já deduzida (n.º 27). Sendo superior a esse limite o erro que a causa perturbadora introduz no instante da phase, torna-se então necessario desvial-a, se a sua natureza o permitte, ou, pelo menos, aprecial-a para applicar depois aos resultados o seu effeito.

A interposição da atmosphera, influindo, pela refracção, nas posições apparentes dos astros, apresenta-se naturalmente como uma das causas principaes, que póde retardar ou accelerar o instante do contacto.

Comprehende-se, na verdade, que, se não existisse a atmosphera, o contacto dos dois astros teria logar quando Venus viesse interpôr-se entre o olho O (fig. 9) do observador e um ponto a do contorno do disco solar, isto é, quando se achassem sobre a mesma recta os trez pontos V, O e a, pois que, para simplificação, suppomos reduzido a um ponto mathematico V o pequeno disco de Venus relativamente ao do sol.

Todavia, pelo effeito da atmosphera $\alpha\ \alpha'$, não será $a\,O$ o raio luminoso emittido por a que chega ao olho do observador, mas sim outro $a\,b$ que, encontrando em b a atmosphera, se refracta segundo a curva $b\,O$, fazendo ver o ponto a em a'.

Portanto, em quanto o raio luminoso, que se dirige de a para Venus, não coincidir com $a\,b$, não poderão as imagens de a e de Venus ser vistas na mesma direcção $O\,a'$, isto é, não poderá o planeta occultar a.

Só quando Venus, no seu movimento relativo a respeito do disco solar, vier collocar-se em um ponto V_1 da linha $a\,b$, é que o desvio angular produzido em a e V_1 pela atmosphera, ou a refracção, será o mesmo; e só então terá logar o contacto no ponto a' do contorno solar observado.

Não queremos dizer com isto que, se a é o ponto do disco solar onde teria logar o contacto, não existindo a atmosphera $\alpha\,\alpha'$, a sua posição observada a' seja ainda a do ponto do contacto que realmente se observa, isto é, que Venus no seu movimento relativo venha collocar-se na linha *a b*. Para isso seria necessario que o planeta, durante o tempo em que percorre o espaço angular *O a b*, não sahisse do plano vertical de *a*.

Como não succede assim, Venus não virá, em geral, encontrar a linha *a b*, mas sim outra que estará, relativamente ao ponto respectivo do contorno solar, nas mesmas condições em que *a b* se acha a respeito de *a*. E será na posição observada d'este novo ponto que terá logar o contacto.

É portanto manifesta a influencia da refracção, quer nos instantes dos contactos, quer nas posições dos pontos de tangencia respectivos, e por isso evidente tambem a necessidade de apreciar essa influencia, especialmente em quanto ao tempo, para averiguar se o altera de modo que exija uma correcção attendivel.

45. Apreciação do effeito da refracção nos instantes dos contactos. — Depois do que temos dicto, póde com facilidade conceber-se syntheticamente a questão da seguinte fórma:

Imaginemos o cone que tem por vertice o olho do observador e que envolve o sol, isto é, a superficie formada pela reunião de todas as linhas *a O*, correspondentes aos differentes pontos do contorno solar; bem como a que resulta do conjuncto de todas as linhas *a b O* relativas aos mesmos pontos, a qual póde, por assim dizer, considerar-se tambem como uma superficie conica *quebrada*, tendo o vertice no olho do observador e formando no sol cada uma das suas generatrizes um pequeno angulo *O a b* com as do primeiro.

Como as generatrizes do segundo cone representam as trajectorias reaes dos raios luminosos que chegam ao olho do observador, designal-o-hemos por *cone real*. E pelo contrario chamaremos *cone ideal* a primeira superficie considerada, pois que as suas generatrizes seriam as trajectorias dos mesmos raios luminosos, na hypothese ideal de não existir a atmosphera.

Posto isto, é claro que, se tal hypothese se realizasse, os contactos dos dois astros dar-se-iam quando Venus, pelo seu movimento relativo, viesse collocar-se no cone ideal. Existindo a atmosphera, terá logar o contacto quando Venus se achar na superficie do cone real. Portanto o tempo que decorre em quanto o planeta vai d'uma a outra superficie, representa evidentemente a influencia da refracção no instante da phase.

Além d'isto, vê-se bem que, segundo o planeta caminhar da superficie conica ideal para a real, ou vice-versa, assim o instante do contacto será retardado ou accelarado pela refracção.

Ora todas estas circumstancias dependem já do intervallo que separa os dois cones, definido pela expressão do angulo $b\,a\,O$, já da velocidade, direcção e sentido do movimento relativo de Venus na epocha do contacto.

Estes ultimos elementos, que se referem ao movimento de Venus, não são mais do que os valores de n e N calculados pelas formulas (29). Resta pois conhecer a expressão do angulo $b\,a\,O$.

Do triangulo $a\,b\,O$ tira-se immediatamente

$$b\,a\,O = b\,O\,a\,\frac{b\,O}{a\,b},$$

attendendo á pequenez dos angulos $b\,a\,O$ e $b\,O\,a$; e como o angulo $b\,O\,a$ é sempre um pouco menor que o da refracção $a\,O\,a' = R$, teremos

$$b\,a\,O < R\,\frac{b\,O}{a\,b}.$$

Mas $O\,b$ é tambem sempre um pouco menor que $O\,b'$, sendo

$$O\,b' = \sqrt{2\,r\,H + H^2},$$

onde r representa o raio da terra e H a altura da atmosphera; teremos pois ainda

$$b\,a\,O < R\,\frac{\sqrt{2\,r\,H + H^2}}{a\,b}.$$

Suppondo $H = 0{,}01\,r$ e $a\,b = \dfrac{r}{\text{sen}\,8'',86} = 23281\,r$, esta formula dá

$$b\,a\,O < 0{,}0000061 \times R$$

e por conseguinte

$$b\,a\,O < 0'',013$$

para o valor da refracção $R = 33'\,47''$ relativo ao horizonte, onde o effeito da parallaxe seria o maximo.

Parece-nos que bastariam estes dados para determinar um limite superior muito proximo do erro que a refracção introduz no instante do contacto, e assim ajuizar se a influencia d'ella póde ou não desprezar-se. O valor de N, que dá a direcção do movimento de Venus, e a grandeza approximada do intervallo $b\,a\,O$ entre as duas superficies, devem com effeito determinar approximadamente o comprimento da parte da trajectoria de Venus que fica entre éllas, conhecendo-se tambem a distancia do planeta á terra; e depois o valor d'este espaço percorrido entre as duas superficies, e o da velocidade n, farão conhecer o tempo respectivo, como se pretendia.

No emtanto indicaremos como, por outra fórma, Dubois resolve a questão.

46. Seja V_1 a posição de Venus sobre ab no momento em que o contacto tem logar em a'. O triangulo $a\,O\,V_1$ dá

$$V_1\,O\,a = V_1\,a\,O\,\frac{V_1\,a}{V_1\,O},$$

por serem muito pouco consideraveis os angulos $V_1\,O\,a$ e $V_1\,a\,O$; ou, attendendo ao n.º precedente,

$$V_1\,O\,a < R \times 0{,}0000061\,\frac{V_1\,a}{V_1\,O}:$$

e, segundo o valor approximado da distancia de Venus ao sol, que dá $\frac{V_1\,a}{V_1\,O} = \frac{7}{3}$, temos ainda

$$V_1\,O\,a < R \times 0{,}0000143$$

para uma altura correspondente á refracção R; ou

$$V_1\,O\,a < 0'',029$$

para o horizonte.

Sejam agora na esphera celeste Z (fig. 10) o zenith do observador, SS e dK a posição do disco solar e a direcção da trajectoria de Venus, na hypothese de não existir a atmosphera.

A interposição do envolucro atmospherico não faz mais do que approximar do zenith as posições observadas das mesmas linhas. Sejam pois $S'S'$ e $a'K'$ as posições de SS e dK vistas atravez da atmosphera.

Deve notar-se que, em vista da pequenez do desvio produzido pela refracção, relativamente á distancia do zenith Z, os traços dos planos verticaes dos pontos de SS e dK, donde a refracção os não desvia, podem, n'este pequeno espaço, considerar-se parallelos.

Posto isto, é claro que, se não existisse a atmosphera, o contacto teria logar quando Venus chegasse ao ponto d da trajectoria ideal dK. Na realidade porém, ver-se-ha a mesma phase do phenomeno no ponto a' da trajectoria observada $a'K'$. Ora, como este ponto corresponde na trajectoria ideal a V, que resulta da intersecção d'ella pela linha aa', parallela a ZC, será $Vd = ndt$ o espaço da trajectoria que Venus percorre entre o contacto observado em a', e o contacto ideal em d. Resta pois avaliar este espaço.

Do pequeno triangulo Vda, que póde considerar-se rectilineo, tira-se

$$\frac{Vd}{Va} = \frac{\operatorname{sen} Vad}{\operatorname{sen} Vda}$$

ou

$$Vd = Va \frac{\cos aCZ'}{\cos Cak},$$

sendo ak parallela a dK.

Ora a pequena distancia angular Va é precisamente o angulo $V_1 Oa$, e portanto, segundo a expressão do limite superior d'este augulo, ha pouco deduzida, será

$$Vd < R \times 0{,}0000143 \frac{\cos aCZ'}{\cos Cak}.$$

Attendendo pois a que aCZ' e Cak são respectivamente os angulos que fórma o raio do ponto de contacto com o circulo vertical do sol e com a direcção do movimento relativo de Venus, os quaes podem determinar-se pelo calculo, será facil conhecer o valor do limite superior de Vd, e portanto o do tempo procurado

$$\partial t = \frac{Vd}{n}$$

do qual a refracção retarda ou accelera o instante do contacto, segundo o valor de N.

E assim concluiriamos, como Dubois, que, supposto o caso mais desfavoravel de sen $a\,CZ' = 0$, na passagem de Venus de 1874, esta alteração, sendo inferior a $0'',64$, não se tornaria sensivel no resultado final.

Observação dos contactos

47. Contactos externos. — Fizemos já sentir a necessidade absoluta de obter com a maxima precisão os instantes em que tem logar as phases do phenomeno da passagem de Venus sobre o disco do sol. A confiança que se póde ter no valor da parallaxe do sol, deduzido de taes observações, depende essencialmente do grau de approximação com que ellas houverem sido effectuadas.

Indicámos tambem já que, se na pratica se encontram sempre difficuldades na apreciação do instante preciso do contacto, externo ou interno, sobem ellas de ponto na observação dos contactos externos.

Na verdade, a posição de Venus na esphera celeste não se torna sensivel senão pelo seu effeito negativo sobre os raios solares, que a superficie do planeta intercepta successivamente. D'aqui resulta que o filete luminoso, deixado pelo disco escuro de Venus immediatamente depois do primeiro contacto interno, e o que resta immediatamente antes do segundo, accusam, não sem incerteza e difficuldades, mas com sufficiente approximação, o momento do contacto; ao passo que nos externos, por não haver contraste entre a luz e a sombra, ao operar-se o contacto, a incerteza do momento em que elle tem logar, é muito maior.

Póde dizer-se que a observação directa dos contactos externos é impossivel para o fim que se tem em vista, o qual exige uma delicadeza de observação que não deve esperar-se em taes condições.

Como já notámos tambem, alguns astronomos, nomeadamente o P. Secchi em Roma e Zöllner na Allemanha, têm pretendido obviar a este inconveniente pelo emprego do espectroscopio, applicado convenientemente ao oculo, que se destina á observação.

O artificio consiste em regular a posição do espectroscopio, de modo que se possam observar as protuberancias e a chromosphera solares na occasião da passagem; e, mediante as raias do espectro, seguir o curso do planeta n'este envolucro solar, antes do primeiro contacto externo e depois do segundo.

Dubois, no paragrapho onde tracta da observação dos contactos externos, expõe desenvolvidamente o methodo do P. Secchi.

É uma bella applicação do methodo de Janssen, graças ao qual as protuberancias solares, antes observadas simplesmente durante os eclipses totaes, hoje se prestam ás observações em qualquer epocha.

O P. Secchi no seu excellente livro Le Soleil, capitulo VII, dá, sobre este methodo, os esclarecimentos necessarios para a boa intelligencia da doutrina expendida por Dubois no citado paragrapho.

Embora porém se diminua por este meio a incerteza da observação dos contactos externos, parece-nos que na pratica nunca poderão merecer a confiança que se presta ás observações directas dos contactos internos; além de que, como nota o P. Secchi, seria necessario averiguar se o diametro apparente do sol é o mesmo, quando se observa este astro directamente ou por meio do espectroscopio.

48. Contactos internos. — Não se conciliam as opiniões dos astronomos ácerca do grau de precisão que póde attribuir-se ás observações dos contactos internos feitas em condições favoraveis.

De Lalande chega a admittir apenas $\frac{1}{5}$ de segundo para limite superior do erro da observação.

Outros astronomos, como Halley e De Pingré, elevam a 1 ou 2 segundos este limite.

Outros finalmente estão longe de admittir uma tal precisão que excederia muito a que o methodo exige.

O que é certo é que, como nota Dubois, na penultima passagem de Venus em 1769, as observações, feitas aliás por habeis observadores e nas mesmas circumstancias, apresentam todavia differenças, que chegam a elevar-se a 30 segundos, contra a expectativa dos astronomos da epocha.

Ainda que uma tal discordancia, notada em muitas estações, deva attribuir-se, em parte, a variadas causas atmosphericas, instrumentaes ou pessoaes, umas perfeitamente accidentaes e inevitaveis, outras que poderiam talvez prever-se, e que os progressos da sciencia e da arte tendem, por ventura, a annullar, todavia, reconhecem-se hoje duas causas principaes, que se oppõem constantemente á observação exacta dos contactos, e que deveriam ter grande parte nas differenças que apresentam os resultados de 1769.

São estas causas: 1.º a variabilidade do instante em que apparece ou desapparece o filete de luz, que succede ou antecede immediatamente o contacto; 2.º o phenomeno optico, que se observa muitas vezes no momento d'um contacto e que os astronomos chamam — *gota ou ligamento negro* —.

A instantaneidade da apparição e desapparição do filete luminoso, em que De Lalande, Halley e os outros astronomos d'essa epocha, fundavam a expectativa d'um grau de precisão muito elevado, é, de facto, puramente uma illusão.

O P. Hell foi o unico astronomo que, antes de 1769, não contestando a instantaneidade do apparecimento ou desapparecimento do filete luminoso, sustentava todavia que não podia tomar-se o instante notado pelo do contacto preciso, pois que o filete de luz, comprehendido entre os bordos dos dois discos, não poderia tornar-se perceptivel senão depois do tempo necessario para tomar certa grandeza, o qual depende da força do instrumento, e, accrescenta Dubois, do poder de visão do observador, cuja limitação é a causa d'este phenomeno optico.

Mas, além d'isto, ha, como dissemos, a incerteza do momento que se deve tomar pelo do apparecimento ou desapparecimento do filete luminoso, a qual se tornou muito sensivel na observação d'uma passagem de Mercurio sobre o sol em 1868, feita por Oppolzer em Vienna, e Tremeschini em Paris. Estes astronomos notaram que, 8 segundos antes do desapparecimento do filete luminoso, o qual marca o segundo contacto interno, o planeta parecia levar o sol deante de si, conservando-se, durante este intervallo, sensivelmente o mesmo filete de luz no bordo brilhante d'este astro; e Oppolzer notou mais que 17 segundos depois do desapparecimento, os dois discos pareciam ainda em contacto geometrico.

Faye estudou a questão, e concluiu d'este exame que deviam considerar-se como causas principaes da limitação da visibilidade d'um filete isolado de luz do sol, o deslumbramento do olho do observador produzido pela viva illuminação do campo do instrumento, bem como as ondulações da atmosphera, que se tornam mais sensiveis na visinhança do sol, e a dispersão atmospherica.

Além d'estas causas geraes, Faye indica outras exclusivas do phenomeno especial da passagem de Venus, taes como o decrescimento rapido da intensidade luminosa nos bordos do sol, a interposição da atmosphera provavel de Venus, e a diffracção produzida nos seus bordos.

Faye pretende diminuir ou compensar o effeito d'algumas d'estas causas, propondo diversas precauções, como o emprego d'um diaphragma focal, imaginado por Dawes, a fim de obviar á excessiva illuminação do campo do instrumento, o d'um objectivo excellente, a fim de corrigir o effeito dispersivo da atmosphera, e a escolha de estações onde o coefficiente da parallaxe seja sufficientemente grande para attenuar d'esse modo a influencia das ondulações.

Resta-nos fallar do phenomeno conhecido pelo nome de gota negra.

Consiste este phenomeno em que, no momento do primeiro contacto interno, por exemplo, o bordo de Venus, em logar de se separar immediatamente do do sol, parece alongar-se juncto do ponto de contacto, deixando entre os dois bordos um ligamento escuro de largura muito menor que a do planeta; pouco depois este ligamento parte-se, por assim dizer, e apparece o filete luminoso entre os bordos dos dois astros. No segundo contacto interno dá-se um phenomeno analogo immediatamente antes do desapparecimento do filete luminoso.

Alguns astronomos têm querido attribuir estas circumstancias perturbadoras, que acompanham a observação precisa dos contactos, a um phenomeno optico, conhecido com o nome de *irradiação*, pelo qual um disco brilhante sobre fundo escuro parece maior do que é realmente, e pelo contrario um disco escuro sobre fundo brilhante parece mais pequeno. Explicavam por este meio o ligamento negro, admittindo que, na epocha do contacto, o effeito da irradiação se annulla no ponto de tangencia, ao passo que subsiste no resto do contorno.

Oppunha-se porém a esta explicação a affirmação, demonstrada por Bessel e Arago, de que a irradiação é insensivel nos oculos munidos d'um bom objectivo.

No intuito de esclarecer a questão, antes da passagem de 1874, dois astronomos do Observatorio de Paris, Wolf e André, dedicaram-se ao estudo minucioso do phenomeno, reproduzindo artificialmente as condições em que elle se opera, como Dubois indica pelas proprias palavras de Wolf.

D'este estudo attento e repetido concluiram os dois sabios: 1.° que o phenomeno da irradiação não existe nos oculos astronomicos, e que a apparição do ligamento negro é um phenomeno accidental, o qual não se produz necessariamente, mas, perturbando o phenoméno do contacto, póde induzir a erro o observador; 2.° que o ligamento negro, phenomeno extranho á irradiação, deve attribuir-se a uma aberração um pouco forte devida ao objectivo, o qual, em vez de concentrar na imagem geometrica toda a luz recebida, a diffunde n'uma porção notavel para fóra d'esta imagem, excepto no ponto do contacto geometrico; 3.° que, para annullar ou attenuar o mais possivel, o phenomeno do ligamento negro, será necessario empregar objectivos d'uma abertura não menor que 15 centimetros e, sobre tudo, o menos affectados de aberração que fôr possivel.

49. Dubois termina esta materia apontando uma terceira causa de erro nos instantes observados de contacto, a qual elle julga superior ás duas de que acabamos de fallar: é a deformação do contorno do disco solar, proveniente das agitações constantes do seu envolucro.

Diz Dubois que os estudos do P. Secchi sobre as observações da chromosphera solar, feitas segundo o methodo de Janssen, de que já fallámos, levaram aquelle illustre sabio italiano a concluir que o disco do sol tem um diametro apparente cerca de $8'',4$ menor que aquelle que lhe assignam as passagens ordinarias pelo meridiano, e attribue esta differença ao brilho devido á chromosphera, cuja variabilidade de extensão faz variar tambem o diametro apparente.

É certo, accrescenta Dubois, que a observação espectral apresenta a chromosphera separada do bordo do sol a uma distancia de 8 ou 10 segundos; mas o seu brilho é sufficiente para, apesar d'este pequeno intervallo, se confundir com o do bordo do sol, dando assim a este astro um diametro apparente um pouco maior, porém variavel.

Comprehende-se immediatamente que este augmento de diametro do sol deve accelerar ou retardar o apparecimento ou desapparecimento do filete luminoso e portanto o instante apreciado do contacto respectivo.

Attendendo ao movimento de Venus e ao augmento do diametro solar, Dubois pensa que esta acceleração ou retardamento podem elevar-se a 40 segundos!

Impressionado pela importancia d'esta causa d'erro, até aqui imprevista, o distincto sabio termina o artigo com as seguintes palavras:

— «Il réside donc, dans ce phénomène, une cause d'erreur plus terrible que toutes les autres; car on n'entrevoit pas encore le moyen de s'en affranchir!

Aussi éprouvons-nous un sentiment de crainte en pensant que la remarquable méthode de Halley, et qui consiste, rappellons-le bien, à substituer des mesures de temps à des mesures d'arc, viendra peut-être se heurter à cette difficulté, que l'on ne soupçonnait pas au commencement du XIX^e siècle.» —

Escolha das estações

50. Entre os estudos que devem preceder as observações d'uma passagem de Venus, merece especial attenção dos astronomos o que se refere á escolha conveniente das estações de observação, porque d'ella depende, em grande parte, o bom resultado que póde tirar-se de taes observações, feitas com o fim de determinar a parallaxe do sol.

Os tres methodos que expozemos, e pelos quaes, dos dados que a observação fornece, póde deduzir-se o valor d'este importante elemento do systema do mundo, embora siga cada um seu caminho especial, todos, pelo que respeita á escolha das estações, se combinam em sollicitar a condição essencial de ser n'ellas, senão maximo, pelo menos sufficientemente grande, o effeito da differença das parallaxes dos dois corpos. De facto o methodo de Halley repousa sobre a differença das durações da passagem observada em duas estações, sendo tanto mais provavel o resultado, quanto maior fôr esta differença, e portanto menor o factor pelo qual ella deve multiplicar-se, para obter a das parallaxes. O methodo de De l'Isle funda-se simplesmente sobre a differença das horas das mesmas phases nas diversas estações que se comparam, exigindo, pelo menos, que esta differença seja sufficientemente grande ou, o que vale o mesmo, que nas estações escolhidas a differença de parallaxes influa n'ellas sufficientemente. Finalmente, no methodo das equações de condição, tambem a probabilidade do resultado será tanto maior quanto mais consideraveis forem os coefficientes dos erros e portanto quanto mais avultar o effeito da parallaxe, na estação que se considera.

É pois commum a todos os tres methodos a necessidade de escolher estações de observação onde a differença das parallaxes de Venus e do sol engrandeça o mais possivel os resultados das observações por meio dos quaes ella se obtem.

Mas, além d'esta condição, que rege essencial e principalmente a escolha das estações, é necessario tambem attender n'ella ás condições que podem favorecer a exactidão da observação, attenuando as influencias da refracção e das ondulações das imagens, e que se reduzem a escolher as estações de modo que, na epocha da passagem, o sol tenha uma certa elevação acima do horizonte.

A fim de conciliar as duas condições, poderiam determinar-se, para grande numero de logares do globo tomados nos dois hemispherios, os instantes dos contactos apparentes, por quaesquer das formulas a que temos chegado, e ao mesmo tempo calcular por meio das ephemerides as alturas respectivas do sol; e por fim comparar os resultados sob o ponto de vista das mesmas condições. Todavia tornar-se-ha extremamente mais simples este trabalho pelo methodo graphico, de que vamos dar relação.

51. Supponhamos calculado o instante T' d'um dos contactos geocentricos, e, com os valores das ascensões rectas e declinações geocentricas, dos dois astros α, δ, α', δ' tirados das taboas para esse instante, determinemos, por meio das formulas do n.º 35, as coordenadas (A, D) e $(180° + A, - D)$ dos zeniths dos pontos N e N', onde o effeito da parallaxe é maximo, isto é, um dos quaes corresponde á acceleração maxima do instante da phase e outro ao maximo retardamento (n.º 36).

Tendo marcado, mediante estes elementos, as posições dos mesmos pontos sobre o globo, e descrevendo d'um d'elles como polo e com diversas distancias polares λ, arcos de circulo concentricos, sabemos, pelo theorema de Lagrange (n.º 33), que, para todos os pontos do mesmo circulo, o effeito da parallaxe é o mesmo e egual a $g \cos\lambda = \frac{(\pi - \pi')}{n \cos\omega} \cos\lambda$.

Basta portanto, a fim de satisfazer o mais possivel ás duas condições indicadas, comparar estes dados com os valores das alturas do sol correspondentes aos differentes pontos no instante do contacto, as quaes podem tambem deduzir-se immediatamente da inspecção do globo, havendo marcado sobre elle o logar que no mesmo instante tem o sol no zenith. Este logar é evidentemente o ponto da superficie terrestre cujas latitude e longitude são respectivamente eguaes á declinação e angulo horario do sol. As distancias d'elle aos pontos dos circulos que se consideram, representam os complementos das alturas respectivas do sol.

Em harmonia com os principios expendidos, podem construir-se cartas geographicas appropriadas a este fim, por meio das quaes se determinará, com extrema facilidade, o effeito da parallaxe e a elevação do sol, em qualquer logar, no momento do contacto que se considera.

Para isso basta descrever do ponto N (fig. 11) de maxima acceleração ou retardamento, tomado como centro, um circulo maximo, que represente a projecção orthogonal do hemispherio cujo polo é o mesmo ponto.

Como é evidente que N terá, no momento do contacto, o sol n'um ponto B do seu horizonte, comprehende-se que basta tomar a metade ABA' d'este circulo que B divide ao meio, pois que nenhum dos pontos do outro semi-circulo vê o phenomeno.

Descrevendo agora de novo do ponto N arcos de circulo concentricos com differentes raios, tem-se em cada um d'estes arcos os pontos onde o effeito da parallaxe é o mesmo; e tirando rectas parallelas ao diametro ANA', os pontos de cada uma d'ellas terão todos o sol á mesma altura no momento do contacto. Além d'isto, a grandeza do raio do circulo que se considera e a distancia da parallela ao ponto B, que podem determinar-se sobre a recta NB, préviamente dividida e graduada, dão immediatamente o valor do effeito da parallaxe, e a distancia zenithal do sol ou a sua altura.

Tendo pois marcado sobre a carta os pontos do globo correspondentes, será facil d'este modo comparal-os debaixo dos dois pontos de vista, e regular assim a conveniente escolha das estações.

É certo que este methodo de comparação não é rigoroso, já por não ser rigorosa a determinação dos pontos N e N', já por se fundar na formula approximada de Lagrange, já finalmente por serem o effeito da parallaxe e a altura do sol, correspondentes ao tempo T do contacto geocentrico, e não ao do contacto apparente, os elementos que se comparam.

No emtanto, apezar dos cuidados que este estudo merece aos astronomos que se destinam á observação d'uma passagem de Venus, parece-nos que a escolha das estações não demandará demasiado rigor, quando se attende, não á importancia do problema, mas á sua natureza; por quanto o que se pretende conhecer são localidades, e não pontos geometricos do globo, onde as duas condições se verifiquem em grau sufficiente.

Limitamo-nos, por isso, ao que temos exposto, na parte que respeita a esta materia, extranha ao nosso plano; e para maiores desenvolvimentos póde consultar-se, sendo necessario, o artigo onde Dubois applica a theoria á passagem de Venus em 1874.

Comparação dos dois methodos expostos

52. Para discutir os dois methodos directos, que temos desenvolvido, fundados sobre as observações de Marte em opposição e sobre as das passagens de Venus, é necessario, em harmonia com os principios expendidos no primeiro capitulo (n.º 16), comparal-os sob o ponto de vista dos tres caracteres que alli indicámos: 1.º influencia dos erros da observação; 2.º perfeição provavel das observações; 3.º numero possivel d'ellas.

A formula, por meio do qual se deduz a parallaxe solar da observação de Marte em opposição, é, como vimos,

$$\pi_0 = \frac{n}{a} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (54);$$

podendo calcular-se n e a mediante as relações a que chegámos no capitulo primeiro, e deduzindo immediatamente da observação as differenças de declinação meridianas ou extrameridianas, ou as de ascensão recta entre Marte e uma estrella vizinha, nas quaes as mesmas relações vêm expressas.

Segundo o methodo das passagens de Venus, são

$$\left.\begin{aligned} \pi - \pi' &= \frac{i}{M} \\ \pi_0 &= N(\pi - \pi') \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots (55)$$

as formulas por onde se calcula a constante π_0 da parallaxe do sol, sendo a differença i das durações da passagem, ou das horas do mesmo contacto, em dois pontos do globo, o elemento que immediatamente se deduz da observação do phenomeno.

O methodo das equações de condição corresponde a usar das expressões dos instantes I dos contactos, pondo n'ellas $\pi - \pi' + d(\pi - \pi')$ em vez de $\pi - \pi'$, e subtrahindo I, a fim de obter os valores da correcção $d(\pi - \pi')$ por meio das differenças δI entre as horas observadas e as calculadas dos contactos; o que não altera os coefficientes respectivos e deixa o methodo incluido no systema (55).

Consideraremos pois as formulas (54) e (55) communs a todos os processos especiaes que comportam os dois methodos da observação de Marte e da observação das passagens de Venus, que vamos comparar.

53. Vimos (n.º 10) que os erros do numerador de (54) são os que principalmente influem em π_0, pela grandeza do coefficiente com que entram na formula differencial (6), e por isso, embora em a tambem influam, ainda que pouco, os erros da observação, não consideramos n'esta analyse senão os que os mesmos erros introduzem em n, e depois em π_0. Do mesmo modo em (55) não consideramos senão os erros que a observação dos instantes dos contactos introduz completamente em i, não attendendo á influencia dos mesmos erros em M, a qual tambem é pouco consideravel.

Ora, como as relações, que ligam as quantidades n e i com os elementos da observação, mostram que os erros d'esta se introduzem completamente nas mesmas quantidades, e por outra parte as relações (54) e (55) fazem ver que os erros relativos de n e i são eguaes aos erros relativos de π_0, isto é, que são

$$\frac{d\pi_0}{\pi_0} = \frac{dn}{n}, \qquad \frac{d\pi_0}{\pi_0} = \frac{di}{i},$$

é claro que, sob este ponto de vista, a bondade dos resultados obtidos pelos dois methodos dependerá das circumstancias da sua applicação que tornam maiores n ou i.

Emquanto porém á escolha dos astros, por serem a parallaxe de Marte em opposição π'' e a differença das parallaxes de Venus e do sol $\pi - \pi'$, na epocha da passagem, grandezas pouco differentes uma da outra, proximamente eguaes ao triplo de π_0, e por se ter no primeiro methodo $\frac{d\,\pi_0}{\pi_0} = \frac{d\,\pi''}{\pi''}$ e no segundo $\frac{d\,\pi_0}{\pi_0} = \frac{d\,(\pi - \pi')}{\pi - \pi'}$, torna-se evidente que não ha vantagem sensivel d'um sobre o outro.

A superioridade de um dos methodos, no que offerece constante a sua comparação, não póde pois repousar senão na perfeição das observações, ou na possibilidade de as repetir mais frequentemente a fim de multiplicar os resultados.

Pelo que respeita á pratica das observações, o que temos dicto, com referencia a umas e outras, parece-nos sufficiente para demonstrar a vantagem das que exige o primeiro methodo.

Na verdade as observações de Marte, d'onde se deduz o valor da sua parallaxe, são da natureza das que se fazem todos os dias nos Observatorios; e assim os astronomos, que se destinam a taes observações, podem préviamente adquirir, na pratica d'ellas, a destreza conveniente que só o uso póde dar.

Em segundo logar os instrumentos, com que se effectuam, são, por isso mesmo, bem conhecidos, e em geral muito estaveis, especialmente quando se empregam as observações meridianas.

Por outra parte, a determinação das coordenadas differenciaes entre o planeta e a estrella de comparação, effectuando-se por meio de movimentos micrometricos, comporta uma precisão extrema, e attenua, ou destroe sensivelmente nos resultados os erros das refracções e os das taboas.

Finalmente a escolha das estações, não exigindo demasiado rigor nem o accordo de condições complicadas, permitte que as observações possam sempre fazer-se em logares de longitudes bem conhecidas, e onde se encontram as commodidades que só podem offerecer os observatorios permanentes.

Pelo contrario a novidade do phenomeno de Venus que se observa; as difficuldades reaes e enormes que se encontram na observação, provenientes: 1.º da variabilidade do instante em que apparece ou desapparece o filete luminoso; 2.º do phenomeno chamado ligamento ou gota negra; 3.º do augmento do diametro apparente do sol produzido pela chromosphera; e finalmente a escolha, que tem de fazer-se, das estações, e que obriga muitas vezes a observar o phenomeno em logares de longitude mal determinada e desprovidos das commodidades necessarias: são outras tantas causas que, não só tornam difficil este genero de observações, mas tambem deixam muito duvidoso o seu grau de precisão.

Em relação a este segundo caracter de vantagem parece-nos pois que deve dar-se preferencia ao methodo fundado sobre as observações de Marte.

Resta comparar os dois methodos relativamente ao terceiro caracter que apontámos: — numero possivel de observações —.

As opposições de Marte, repetindo-se com intervallos de pouco mais de dois annos, dão logar, com muito maior frequencia que a das passagens de Venus, a séries de observações taes como as que exige o primeiro methodo, que expozemos.

Além d'isto o phenomeno da passagem de Venus effectuando-se em poucos momentos, por uma só vez, para cada um dos pontos do globo, onde se observa, não permitte ao observador, em cada estação, mais que uma observação da phase; ao passo que as observações de Marte, em opposição, podem repetir-se em noutes successivas, durante essa epocha.

D'este modo, embora em ambos os methodos se possam multiplicar egualmente no espaço as observações respectivas, augmentando o numero das estações, no emtanto as de Marte podem multiplicar-se, não só no espaço, mas tambem no tempo, o que dá, em resultado, um maior numero de observações possivel em cada série.

Em conclusão, com quanto não queiramos, de modo algum, pôr em duvida o merito que sabios illustrados e competentissimos têm attribuido, desde Halley, ás passagens de Venus, no problema fundamental que estamos estudando; e embora reconheçamos tambem n'este segundo modo de solução, a vantagem de depender principalmente da observação do phenomeno e não da medição de arcos; todavia ousamos deduzir do exame precedente a superioridade do primeiro methodo relativamente ao segundo.

[illegible]

bem conhecidas, e onde se encontram as commodidades que [illegible]

[illegible] tas vezes a observar o phenomeno em logares de longitude mal determinada e desprovidos das commodidades necessarias; são outras tantas causas que, não só tornam difficil este genero de observações, mas tambem deixam muito duvidoso o seu grau de precisão.

Em relação á este segundo caracter de vantagem parece-nos pois que deve dar-se preferencia ao methodo fundado sobre as observações de Marte.

Resta comparar os dois methodos relativamente ao terceiro caracter que apontámos: — numero possivel de observações —.

As opposições de Marte, repetindo-se com intervallos de pouco mais de dois annos, dão logar, com muito maior frequencia que a das passagens de Venus, a séries de observações taes como as que exige o primeiro methodo, que expozemos.

Além d'isto o phenomeno da passagem de Venus effectuando-se em poucos momentos, por uma só vez, para cada um dos pontos do globo, onde se observa, não permitte ao observador, em cada estação, mais que uma observação da phase; ao passo que as observações de Marte, em opposição, podem repetir-se em noutes successivas, durante essa epocha.

METHODOS INDIRECTOS

Desegualdade lunar do movimento da terra.

Desegualdade parallactica da lua.

Constante da aberração.

CAPITULO IV

Methodos indirectos

Determinação da parallaxe solar pela deseguualdade lunar do movimento da terra

54. O movimento elliptico da terra em torno do sol apresenta uma deseguualdade, que a theoria attribue á acção da lua, e cuja expressão theorica contém, como factor, a parallaxe solar π_0. Portanto, se a observação dér o valor d'essa deseguualdade, e se podermos determinar a grandeza do coefficiente da parallaxe solar na expressão d'ella, conheceremos tambem o valor d'esta parallaxe.

A expressão, que a theoria assigna á maxima equação lunar do movimento de terra, é da fórma

$$P = 1{,}0080 \frac{\mu}{1+\mu} \frac{\pi_0}{p \operatorname{sen} 1''} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

representando μ a massa da lua referida á da terra tomada para unidade, p a parallaxe da lua expressa em segundos, e π_0 a constante da parallaxe do sol.

O valor da parallaxe da lua póde considerar-se conhecido com uma approximação que fica dentro dos limites da que comporta a determinação da parallaxe solar.

Por outra parte a comparação do valor $9'',223$ da nutação, assignado por Peters, e do valor $50'',378$ da constante da precessão luni-solar, deduzido do valor da constante da precessão geral dado por Struve e da massa de Venus que Leverrier concluiu dos seus estudos sobre o movimento d'este planeta, com a expressão das mesmas constantes segundo as formulas de Serret, dá a relação $\varepsilon = \frac{\mu p^3}{M \pi^3}$ das forças perturbadoras da lua e do sol.

E da comparação da queda dos graves para a superficie da terra com a d'este planeta para o sol deduz-se

$$\log M \pi_0{}^3 = 8,35488.$$

Donde resulta o valor

$$\mu = \frac{1}{81,08}.$$

A nota III que C. André inseriu no *Tractado de Astronomia Pratica* de Brunnow, donde extrahimos as breves noções sobre os methodos indirectos que estamos apresentando de passagem, dá o necessario desenvolvimento ao resumo, que aqui fazemos, d'esta doutrina, a qual, como indicámos no principio, entra secundariamente no nosso programma.

Finalmente, com este valor de μ e com o de p, a formula (56) dá

$$\pi = 8'',809$$

adoptando para P o valor $6'',520$, que resulta, com um erro provavel de 0″023, da combinação: 1.º do valor 6″,50 deduzido por Leverrier, com um erro provavel 0″,03, das observações feitas nas epochas das quadraturas da lua durante 35 annos (1816 a 1850) em Greenwich, 42 annos (1804 a 1845) em Paris, e 17 annos (1815 a 1832) em Koenisberg, attribuindo a este valor o pezo 11; 2.º do valor 6″,56 que Newcomb concluiu, com o erro provavel 0″,04, das observações feitas em Greenwich no espaço de 14 annos (1851 a 1864), dando a este valor o pezo 6; 3.º finalmente do valor 6″,51 a que chegou o mesmo astronomo, com o erro provavel 0″,07, por meio de observações feitas em Washington, em 5 annos (1861 a 1865), applicando o pezo 1 a este ultimo valor de P.

C. André attribue ao valor da parallaxe solar, assim deduzido, o erro provavel $\pm$ 0″,054, attendendo aos de P e μ.

É porém obrigação nossa dizer aqui que, n'uma Nota sobre a parallaxe equatorial do sol, e no additamento a ella, publicados em Coimbra no anno de 1869, o auctor se inclina, pelas razões expostas no additamento, a attribuir o valor 8″,86 á parallaxe solar deduzida das observações, acima citadas, de que se serviu Leverrier.

Determinação da parallaxe solar pela desegualdade parallactica da lua

55. O espirito do segundo methodo indirecto, por cujo meio se póde egualmente determinar o valor da parallaxe do sol, é o mesmo que o do methodo que acabamos de mencionar.

Ha no movimento da lua uma desegualdade, que contém ainda como factor a parallaxe solar, com um coefficiente quasi igual a 15. Resulta d'aqui que, se fosse possivel obter pela observação a grandeza d'esta desegualdade com uma approximação de 0″,1, e se por outro lado a theoria determinasse o valor exacto do coefficiente, poderia haver esperança de obter a grandeza da constante da parallaxe solar com uma approximação de 0″,007, isto é, muito superior á de qualquer dos methodos expostos e á que o problema requer.

Não se chega porém a um resultado tão satisfactorio, pela incerteza que ha na determinação da desegualdade parallactica.

Airy deduziu das observações meridianas da lua, feitas em Greenwich durante um seculo (1750 a 1851), para a equação parallactica da lua o valor 122″,79, ao passo que as observações extrameridianas, feitas com um altazimuth e tomadas separadamente, davam o valor 125″,50. Por outro lado, rejeitando as observações anteriores a 1811, em virtude da incerteza que, antes d'esta epocha, havia na grandeza do semi-diametro da lua, Airy achava ainda um terceiro valor de 124″,37 para a mesma desegualdade. Combinando todos estes resultados, o mesmo astronomo deduziu em fim, para valor mais provavel d'este elemento,

124″,7.

Hansen calculou theoricamente a mesma desegualdade do movimento da lua e achou-a egual a 122″,28, adoptando para a parallaxe solar o valor 8″,66; mas, comparando-se depois as posições da lua, que d'aqui resultam, com as que lhe assignam as observações de Greenwich e Dorpat, viu-se que era necessario multiplicar aquelle valor da desegualdade por 1,03573, o que dava em resultado

126″,56.

Stone, partindo de 2075 observações feitas em Greenwich, chegou ao valor

125″,36

sensivelmente medio entre os dois precedentes, e que por isso C. André, na citada nota, adopta como resultado final de todas as observações de Greenwich.

Depois, combinando este valor, a que attribue o pezo 8, com o de Hansen, a que dá o pezo 1, e ainda com o valor $125'',46$, deduzido por Newcomb da comparação das observações da lua feitas em 4 annos (1862 a 1865) no observatorio de Washington com as taboas de Hansen, attribuindo a este novo valor o pezo 4, C. André conclue para valor mais provavel da equação parallactica da lua

$$125'',49.$$

Partindo d'este valor e da formula da maxima equação parallactica, adoptada por Delaunay e Plana,

$$E \operatorname{sen} 1'' = F \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{1}{\left(1-\frac{m^2}{6}\right) \operatorname{sen} p} \operatorname{sen} \pi_0 \ldots \quad (57),$$

onde π_0 representa a constante da parallaxe do sol, μ a massa da lua, p a constante da parallaxe lunar, m a relação dos movimentos medios do sol e da lua, e F um factor constante, C. André acha emfim

$$\pi_0 = 8'',838 \pm 0'',025,$$

adoptando os valores $\mu = \frac{1}{81,5}$, $p = 3422'',7$ e $F = 0,24123$ segundo Delaunay.

A comparação dos dois methodos indirectos, que acabamos de expôr resumidamente, mostra que, se o segundo apresenta sobre o primeiro a vantagem da grandeza do coefficiente da parallaxe na desegualdade respectiva, a maior incerteza que ha na determinação d'esta desegualdade, proveniente de ser a theoria do movimento do sol muito mais simples que a do movimento da lua, annulla completamente na pratica, ou torna, pelo menos, muito menos sensivel, a superioridade theorica do segundo methodo, fundado sobre o conhecimento da desegualdade parallactica da lua.

Determinação da parallaxe solar pela constante da aberração

56. Resta-nos fallar do terceiro methodo indirecto, que se baseia nos resultados das celebradas experiencias de Foucault sobre a velocidade de propagação da luz, combinados com o valor da constante da aberração, ou da relação entre a velocidade da luz e a velocidade da terra, deduzido das observações de Struve.

De facto comprehende-se que o conhecimento dos dois elementos deve dar em resultado a velocidade do movimento da terra, e portanto as dimensões absolutas da orbita d'este planeta, visto ser conhecida a natureza d'ella e as suas dimensões relativas.

Este methodo de determinação da parallaxe do sol conduziu ao resultado

$$\pi_0 = 8'',86.$$

Como o erro porvavel da constante da aberração é proximamente $\frac{1}{20}$ de segundo, e por outra parte este elemento é sensivelmente duplo do que se pretende determinar, seriamos leva-dos a suppôr n'aquelle valor um erro apenas de $\frac{1}{40}$ de segundo, se podessem reputar-se exactos os resultados das experiencias de Foucault. No emtanto é para recear que experiencias tão delicadas como estas encerrem causas de erros constantes, que escapassem ao distincto physico, e a circumstancia de não terem sido publicadas com o desenvolvimento conveniente não deixará desfazer taes receios senão pela repetição dos mesmos trabalhos, feitos em condições differentes, o mais possivel, d'aquellas em que operou Foucault.

PARTE III

PASSAGEM DE VENUS DE 1769
OPPOSIÇÃO DE MARTE EM 1862

CAPITULO I

Passagem de Venus em 1769

57. O resultado pouco satisfactorio das observações da passagem de Venus que teve logar em 1761 (Parte I, n.º 5) não fez perder aos astronomos as esperanças, que haviam concebido, de deduzir d'este phenomeno o valor mais provavel da parallaxe do sol. Esperaram com anciedade a observação da nova passagem de 1769.

Desde 1763, tres distinctos sabios, De Lalande e Pingré em França, e Hornsby em Inglaterra, occuparam-se cuidadosamente da escolha das estações, a fim de evitar d'este modo o principal defeito das observações da passagem de 1761 —— a pequena influencia da parallaxe nas durações observadas da passagem —— (Parte I, n.º 5).

Do mappa construido por De Lalande em resultado dos seus trabalhos, e das Memorias que publicaram Pingré e Hornsby, concluiu-se que, com relação a esta influencia, convinha observar o phenomeno, ao sul, na California e Mexico, e ao norte, na Laponia e Kamtschatka.

Pela sua parte os governos da Russia, da Austria, da Suecia, da Dinamarca, da Inglaterra e de França empenharam-se tambem em promover a expedição scientifica que ia buscar a todos os logares appropriados do globo os elementos necessarios para a determinação da distancia do sol á terra.

Póde ver-se um quadro completo d'estas observações na obra de Dubois, que já temos citado por vezes.

D'entre as observações feitas em 19 estações, cujos resultados se acham consignados na *Astronomia* de Delambre (Tom. II, pag. 495), escolheu este astronomo a comparação das de Taiti, California, Bahia d'Hudson, Wardhus, Kola, Cajaneburgo, Paris e Petersburgo, por offerecerem a vantagem de serem n'ellas consideraveis as differenças das durações do phenomeno, quando se comparam, como fez Delambre, da seguinte forma:

Taiti com .... { Wardhus
Kola
Cajaneburgo
Bahia d'Hudson
Paris e Petersburgo

California com ..... { Wardhus
Kola
Cajaneburgo
Bahia d'Hudson
Paris e Petersburgo

Bahia d'Hudson com { Wardhus
Kola
Cajaneburgo
Paris e Petersburgo.

No primeiro grupo aquellas differenças elevam-se effectivamente a **23** minutos pouco mais ou menos, no segundo a **16** minutos e no terceiro a **8** minutos.

D'estas comparações deduziu Delambre, pelo methodo de Halley os valores da parallaxe inscriptos no quadro da pag. **505** da obra citada, o qual aqui reproduzimos:

	π	P
Taiti, Wardhus	8'',7094	21'',561
Taiti, Kola	8 ,5503	21 ,166
Taiti, Cajaneburgo	8 ,3865	20 ,762
Taiti, Bahia d'Hudson	8 ,5036	21 ,066
Taiti, Paris e Petersburgo	8 ,7780	21 ,730
California, Wardhus	8 ,6160	21 ,330
California, Kola	8 ,3880	20 ,765
California, Cajaneburgo	8 ,1630	20 ,208
California, Bahia d'Hudson	8 ,1521	20 ,284
California, Paris e Petersburgo	8 ,7155	21 ,576
Bahia d'Hudson, Wardhus	9 ,1260	22 ,592
Bahia d'Hudson, Kola	8 ,4589	20 ,941
Bahia d'Hudson, Cajaneburgo	8 ,1730	20 ,233
Bahia d'Hudson, Paris e Petersburgo	9 ,2491	22 ,897

onde os numeros da segunda columna representam os valores da parallaxe do sol π, que se deduzem, como temos visto, da combinação das differenças P da terceira columna entre as parallaxes de Venus e do sol, calculadas por meio das differenças das durações da passagem observada nos dois logares respectivamente designados na primeira columna, com a relação das mesmas parallaxes. Paris e Petersburgo entram conjugadas em todas as trez comparações com Taiti, California e Bahia d'Hudson, porque o conjuncto das observações feitas n'aquellas duas estações, reduzindo cada uma separadamente ao centro da terra, como faz Delambre, é que fórma uma observação completa, visto ter-se observado simplesmente a entrada em Paris, e a sahida em Petersburgo.

A media dos valores de π inscriptos no quadro é $8'',5694$; mas vê-se que aquelles resultados parciaes concordam tão pouco entre si, que não póde inspirar grande confiança o medio final.

Em 1824 o astronomo de Berlim Encke discutiu de novo cuidadosamente as observações de 1769, empregando algumas coordenadas geographicas determinadas com mais exactidão; e chegou d'este modo ao resultado final

$$8'',6030 - 0,0112\, d\rho,$$

com um erro inferior a $\pm\, 0,460$, sendo $d\rho$ o erro do diametro do sol no momento da observação.

Encke lamentava porém que na maior parte das estações as coordenadas geographicas fossem mal conhecidas, não podendo assim estabelecer um grande numero de equações de condição que, combinadas pelo methodo dos menores quadrados, dessem um valor da parallaxe solar que podesse reputar-se mais provavel.

Além da pouca precisão dos valores conhecidos das longitudes das estações, o illustre astronomo de Berlim desconfiava tambem da exactidão das observações, como se deprehende das seguintes linhas, que se encontram citadas na nota de C. André, a que já alludimos, inserta no *Tractado de Astronomia* de Brunnow:

— «Nas extremidades da base, diz Encke, que serviu por assim dizer, para determinar a parallaxe, as observações parecem sujeitas a causas d'erro muito graves. Todas as observações europeias apresentam o inconveniente de estar o sol muito perto do horizonte, e, se não póde dizer-se o mesmo de Taiti, o accordo pouco satisfactorio dos instantes marcados pelo mesmo observador, quer entre si, quer com os dos outros observadores, póde ainda fazer recear aqui uma incerteza similhante.

«As observações dadas forneceriam o valor da parallaxe com maior grau de certeza, se as longitudes fossem determinadas d'uma maneira mais segura, a fim de ser possivel fazer servir cada entrada e cada sahida separadamente para a formação das equações de condição.»

Como Delambre e Encke, muitos outros astronomos haviam discutido e combinado de differentes modos as observações de 1769, chegando a resultados muito discordantes. Dubois (*Astronomia*, 2.ª ed. pag. 424) dá o seguinte quadro dos valores da parallaxe do sol, obtidos por alguns d'estes sabios, incluindo o de Encke que foi geralmente adoptado, como mais provavel, até ha perto de 20 annos:

Calculadores	Parallaxe solar
Pinyré	8″,88
Hell	8 ,70
Hornsby	8 ,87
Lexell	8 ,68
Lalande	8 ,5
Encke	8 ,577
Littrow	8 ,571

58. Em 1862 Powalky, astronomo de Berlim, impressionado pela discordancia manifesta entre o valor adoptado da parallaxe do sol e outros valores do mesmo elemento, sensivelmente concordantes entre si, e obtidos então pelos methodos indirectos das desegualdades do movimento da lua e do movimento da terra, bem como pelas observações de Marte em opposição (*Connaissance des temps*, 1867 — Additions — pag. 3) emprehendeu uma nova discussão das observações da passagem de Venus de 1769. Para esse fim tractou, em primeiro logar, de corrigir algumas longitudes geographicas, que haviam sido determinadas pouco depois da passagem por observações de eclipses do sol e de occultações d'estrellas, servindo-se, para isso, das novas Taboas do sol de Olufsen e Hansen, das da lua de Hansen, e do Catalogo das estrellas fundamentaes, inserto nas Tabulae Regiomontanae, e das estrellas de Bradley, melhorado por Madler (*Astronomische Nachrichten*, n.º 1459; 1864). Depois, usando das longitudes correctas, e desprezando algumas das observações, estabeleceu 27 equações de condição, relativas a 13 estações, das quaes deduziu o valor $8'',832$.

Mas notando nas observações feitas em San José, que reputava muito boas, uma differença excessivamente grande entre o instante calculado do primeiro contacto interno e o instante observado, Powalky julgou dever augmentar arbitrariamente de 10 segundos a longitude d'esta estação, o que o conduziu finalmente ao valor $8'',86$ da parallaxe do sol, com o erro provavel $\pm 0'',021$, calculado para o primeiro valor, mas que C. André julga dever elevar a $0'',04$, attendendo á grande variação que determina no valor da parallaxe a pequena mudança de 10 segundos feita na longitude d'uma só das estações.

Em 1862 tambem Foucault, combinando o resultado dos seus trabalhos sobre a velocidade da luz com o valor da constante da aberração (n.º 56), havia apresentado á Academia das Sciencias de Paris, em sessão de 22 de Setembro do mesmo anno, o valor 8'',86 da parallaxe do sol a que Powalky chegou depois pela discussão das observações de 1769.

Attendendo a esta communicação, mostrou Leverrier, na sessão da mesma academia de 25 de Novembro de 1867, alguma duvida sobre as investigações do astronomo allemão, receando que, na exclusão, que elle fizera, d'algumas observações, insensivelmente influisse a prevenção resultante do valor que Foucault obtivera.

Powalky respondeu a esta duvida no vol. 7, n.º 1687 das ***Astronomische Nachrichten.***

de Paris, em sessão de 22 de Setembro do mesmo anno, segundo S. M. da parallaxe do sol a que Puiseux chegou, discutindo as observações de 1769.

Attendendo a esta communicação, Leverrier, na sessão da mesma academia de 21 de Novembro de 1867, chamou a attenção sobre os [illegible] de [illegible] que, na [illegible] que elle fez da [illegible] observações, [illegible] a parallaxe resultante do valor dos [illegible] adoptara.

Powalky respondeu a esta critica no [illegible] n.º 1663 das *Astronomische Nachrichten*.

Observações extra-meridianas

59. Depois das [illegible] feitas com o fim de determinar [illegible] Richer [illegible] Roemer e Picard [illegible] Cabo da Boa Esperança [illegible] seculo XVIII, de que demos [illegible] de Montevideu [illegible] 1832 por Henderson [illegible] outras [illegible] parallaxe [illegible].

Em [illegible] fez-se uma nova serie de observações, [illegible] antecedentemente,

[illegible] director do Observatorio [illegible]

CAPITULO II

Opposição de Marte em 1862

Observações extrameridianas

59. Depois das observações de Marte em opposição, feitas com o fim de determinar a distancia do sol á terra por Cassini, Roemer e Picard, nos fins do seculo XVII, e das de Lacaille no Cabo da Boa Esperança, feitas no meado do seculo XVIII, de que demos noticia nas breves noções historicas exaradas no principio d'este trabalho (Parte I n.º 4), as primeiras observações de Marte, que se fizeram com o mesmo fim, foram as de 1832 por Henderson tambem no Cabo da Boa Esperança e por outros astronomos em Greenwich, Cambridge e Altona. A discussão d'estas observações deu em resultado o valor 9″,028 da parallaxe do sol.

Em 1849 foi organizada para o mesmo fim, pelo governo dos Estados unidos, uma expedição ao Chili, sob os auspicios do capitão Gilliss, que depois em 1862 dirigiu uma nova serie de observações, de que vamos dar relação mais minuciosamente.

60. Por proposta dos illustre astronomo Gilliss, então director do Observatorio Naval dos Estados Unidos, fizeram-se com instrumentos equatoriaes, nos trez mezes mais proximos da opposição de Marte em 1862, observações micrometricas extrameridianas de differenças de declinação entre Marte e diversas estrellas, em Leiden, Upsala e Washington no hemispherio do norte, e Santiago do Chili no do sul, sendo calculados depois pelo professor Hall os resultados relativos ás tres ultimas estações (Washington *Astronomical Observations*, 1863 — Appendix — pag. LX).

Das observações feitas em Santiago do Chili, Upsala e Washington, cujas latitudes geographicas são respectivamente — 33° 26′ 42″ *S*; 59° 51′ 31″,5 N; 38° 53′ 38″,8 N — aproveitaram-se 18 de Santiago, desde 4 de Setembro até 2 de Novembro; 7 de Upsala, desde 8 de Setembro até 31 d'Outubro; e 14 de Washington, desde 4 de Setembro até 2 de Novembro, as quaes se acham todas respectivamente consignadas nos trez quadros seguintes, que transcrevemos do logar acima citado:

1.°

UPSALA

Data	$\Delta\delta$.	Δk.	Δp.	Red.	$\Delta\delta_0$	r.
Set. 8	−184″.30	−0″.17	+0″.01	−27″.07	−211″.53	±0″.07
20	−285 .02	−0 .28	0 .01	50 .50	−335 .79	0 .14
25	−131 .59	−0 .13	0 .00	63 .33	−195 .05	0 .05
27	− 55 .86	−0 .05	0 .00	65 .84	−121 .75	0 .05
Out. 5	−217 .61	−0 .22	0 .00	52 .75	−270 .58	0 .39
10	+174 .46	+0 .18	0 .01	−47 .21	+127 .44	0 .09
31	−232 .87	−0 .24	+0 .01	+40 .29	−192 .81	0 .07

2.º

SANTIAGO

Data	$\Delta\delta$.	Δk.	Δp.	Red.	$\Delta\delta_0$	r.
Set. 4	$-149''.85$	$-0''.07$	$-0''.02$	$-0''.78$	$-158''.22$	$\pm 0''.14$
5	$+54.56$	$+0.03$	0.02	1.03	$+53.54$	0.07
7	-88.93	-0.04	0.02	1.51	-90.50	0.09
8	-180.63	-0.08	0.02	1.75	-182.48	0.09
20	-301.09	-0.12	0.01	3.97	-305.19	0.09
23	$+75.75$	$+0.02$	0.01	4.25	$+71.51$	0.08
25	-159.91	-0.06	0.01	4.36	-164.34	0.06
27	-86.24	-0.03	0.01	4.41	-90.69	0.11
28	$+186.32$	$+0.07$	0.01	4.39	$+181.99$	0.08
Out. 5	-237.20	-0.09	0.01	3.90	-241.20	0.19
7	$+63.36$	$+0.0$[illegible]	0.03	3.64	$+59.72$	0.07
8	-137.76	-0.05	0.01	3.48	-141.30	0.09
10	$+160.77$	$+0.06$	0.02	-3.13	$+157.68$	0.08
24	-202.18	-0.08	0.02	$+0.45$	-201.83	0.07
27	-233.07	-0.09	0.03	1.36	-231.83	0.17
29	-45.36	-0.01	0.02	1.96	-43.43	0.06
31	-169.30	-0.07	0.03	2.56	-166.84	0.07
Nov. 2	$+152.90$	$+0.06$	-0.02	$+3.14$	$+156.08$	0.11

5.º

WASHINGTON

Data	$\Delta\delta$.	Δk.	Δp.	Red.	$\Delta\delta_0$.	r.
Set. 4	−175″.48	−0″.08	+0″.02	0″.00	−175″.54	±0″.16
5	+ 30 .45	+0 .01	0 .02	0 .00	+ 30 .48	0 .17
7	−113 .40	−0 .05	0 .02	0 .00	−113 .43	0 .23
8	−206 .37	−0 .09	0 .03	0 .00	−206 .43	0 .10
23	+ 45 .97	+0 .02	0 .02	0 .00	+ 46 .01	0 .21
25	−188 .56	−0 .08	0 .01	0 .00	−188 .63	0 .25
28	+156 .59	+0 .06	0 .01	0 .00	+156 .66	0 .11
Out. 7	+ 34 .44	+0 .01	0 .02	0 .00	+ 34 .47	0 .12
8	−165 .48	−0 .07	0 .01	0 .00	−165 .54	0 .19
24	−224 .85	−0 .10	0 .02	0 .00	−224 .93	0 .19
27	−256 .18	−0 .12	0 .03	0 .00	−256 .27	0 .42
29	− 64 .37	−0 .03	0 .02	0 .00	− 64 .38	0 .39
31	−187 .93	−0 .11	0 .03	0 .00	−188 .01	0 .25
Nov. 2	+135 .28	+0 .05	+0 .03	0 .00	+135 .36	0 .18

Na 1.ª columna de cada um d'estes quadros estão designadas, como se vê, as datas das observações; e na 2.ª as differenças de declinação medias $\Delta\,\delta$, reduzidas ao meridiano da estação. Na 3.ª, 4.ª e 5.ª columna encontram-se respectivamente as correcções $\Delta\,k$ das differenças de refracção, as $\Delta\,p$ da parallaxe, e as

de reducção ao meridiano de Washington. Na 6.ª columna acham-se as differenças de declinação já reduzidas a este meridiano; e finalmente na 7.ª o valor do erro provavel da media das observações de cada dia.

Comparando, duas a duas, as observações simultaneas feitas em hemispherios differentes, resultaram 17 combinações entre Santiago e Upsala e 14 entre Washington e Santiago.

Os resultados d'estas combinações acham-se inscriptos nos dois quadros seguintes, que tambem transcrevemos da Memoria citada do professor Hall:

4.º

UPSALA E SANTIAGO

Data	log p	log λ	π_0	w
Set. 8	1.30940	9.63660	8''.831	6.80
20	1.33279	9.61308	8 .828	3.56
25	1.33469	9.60891	8 .782	12.41
27	1.33982	9.60833	8 .875	6.90
Out. 5	1.31663	9.61254	8 .495	0.53
10	1.32960	9.62047	8 .914	6.57
31	1.26375	9.69031	8 .996	7.04

5.º

SANTIAGO E WASHINGTON

Data	log p	log Δ	π_0	w
Set. 4	1.32524	9.64761	9''.394	1.44
5	1.29330	9.64476	8 .671	1.95
7	1.29084	9.63924	8 .513	1.11
8	1.30977	9.63660	8 .838	3.79
23	1.33699	9.61013	8 .854	1.53
25	1.31410	9.60891	8 .376	1.18
28	1.33412	9.60828	8 .758	4.22
Out. 7	1.33281	9.61524	8 .873	3.92
8	1.31510	9.61682	8 .549	1.70
24	1.29427	9.66172	9 .036	1.18
27	1.31875	9.67347	9 .822	0.28
29	1.25183	9.68174	8 .582	0.36
31	1.25635	9.69031	8 .844	0.79
Nov. 2	1.24701	9.69914	8 .834	1.15

onde se encontram, para as datas da 1.ª columna: na 2.ª os logarithmos da parallaxe horizontal de Marte, que se calculam pela relação $p = \frac{n}{a\,\Delta}$, mediante os valores de n e a deduzidos das formulas (7) e (8) do n.º 13 com os de $\Delta\,\delta_0$ tirados dos quadros 1.º, 2.º e 3.º, e o valor da distancia Δ do planeta, cujo logarithmo se acha na terceira columna; e finalmente na 4.ª e 5.ª columna dos mesmos quadros encontram-se respectivamente os valores da constante π_0 da parallaxe do sol, calculados pela 2.ª e 3.ª usando da formula $\pi_0 = p\,\Delta$, e os pezos w d'estes valores.

Combinando em seguida estes resultados, obtem-se os valores

Para Upsala e Santiago.... $\pi_0 = 8'',859 \qquad w = 43,81$
Para Washington e Santiago $\pi_0 = 8'',810 \qquad w = 24,60$

que dão finalmente, para resultado mais provavel, os valores

$$\pi_0 = 8'',8415 \qquad w = 68,41\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

61. São estes os resultados que obteve Hall; mas parece-nos que a discussão do sabio professor, além de ser menos escrupulosa no processo de calculo dos pezos w, encerra uma inexactidão no valor d'um d'elles que se introduz depois no resultado final a que chega.

Resolvemo-nos, por este motivo, a seguir mais minuciosamente o calculo dos elementos das ultimas columnas dos quadros 4.º e 5.º; e, para isso, vamos recordar alguns principios do calculo das probabilidades, pelos quaes se guiou o illustre professor na sua formação.

1.º Sendo x uma quantidade observada e $y = k\,x$: a relação entre os *erros provaveis* r_x e r_y de x e y é

$$r_y = k\,r_x$$

2.º Sendo x e x' duas quantidades independentes, e $y = x \pm x'$, haverá entre os erros provaveis r_x, r_x', r_y a relação

$$r_y = \sqrt{r_x^2 + r_x'^2}.$$

3.º Sendo r o erro provavel da media M de m observações O_i de egual confiança, e ε_i o *erro apparente* de cada uma d'ellas, ou a differença entre a media M e cada uma das observações O_i, será

$$r = 0{,}67449 \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon_i^2}{m(m-1)}}$$

e $r\sqrt{m}$ o erro provavel de cada uma d'ellas.

4.º Os pezos são inversamente proporcionaes aos quadrados dos erros respectivos.

5.º O resultado mais provavel de m observações, cujos pezos respectivos são p_i, é

$$A = \frac{\Sigma A_i\,p_i}{\Sigma p_i}$$

e o pezo d'elle é $p = \Sigma p_i$.

6.º Chamando ξ_i as differenças entre A e A_i, o erro provavel de A é

$$\xi = \sqrt{\frac{\Sigma \xi_i^2}{p(m-1)}}$$

e o de cada observação é $\xi \sqrt{p}$.

Appliquemos agora estes principios á questão de que nos occupamos.

Aqui a relação, que liga a quantidade calculada com os elementos da observação, é

$$\pi_0 = \frac{n}{a};$$

e, com quanto n e a sejam quantidades que se determinam por meio das differenças de declinação observadas, e portanto subjeitas a erros fortuitos, no emtanto temos já notado mais de uma vez que basta ter em conta os erros de n, em vista da influencia pouco consideravel que os de a tem sobre π_0. D'este modo o erro provavel R de π_0 dependerá unicamente do erro provavel ρ de n e da grandeza do divisor a, sendo (Princ. 1.º do n.º 105)

$$R = \frac{\rho}{a}$$

a relação que liga estes erros.

Por outra parte, chamando w o pezo do valor de π_0, e tomando para unidade de pezo o do valor correspondente a um determinado erro provavel R_0, teremos (Princ. 4.°)

$$w = \frac{R_0^2}{R^2}$$

e portanto

$$w = \frac{a^2 R_0^2}{\rho^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59).$$

Por esta formula parece pois que poderiam calcular-se, com sufficiente approximação, os elementos w dos quadros 4.° e 5.°: mediante o valor conhecido de R_0; o de a que se deduz da relação $a = \frac{n}{\pi_0}$, usando do valor achado de ρ; e finalmente o de ρ, que se determina pelo principio 2.° com os valores de r relativos ás duas estações e ao dia considerado, os quaes se encontram nas ultimas columnas dos quadros 1.°, 2.° e 3.°, e que devem ter sido determinados pelo principio 3.°

No emtanto o professor Hall toma na formula precedente, em vez de a^2, o factor

$$\frac{1}{\Delta^2} \frac{\varphi - \varphi_1}{90},$$

chamando φ e φ_1 as latitudes das duas estações.

Parece-nos isto pouco exacto, porque a formula (8), (n.° 10), que dá o valor de a, mostra que este factor não é proporcional a a^2.

Como π_0 é uma constante que não depende dos logares da observação, a equação fundamental $\pi_0 = \frac{n}{a}$ mostra que a cresce proporcionalmente com n, isto é, com a differença das parallaxes do planeta relativas aos dois logares, ou, ainda por outras palavras, com o pequeno angulo $O\,L\,O'$ (fig. 12) que, no planeta L, formam os raios $O\,L$ e $O'\,L$ tirados para os dois pontos do globo O e O' que se consideram.

Ora por meio dos triangulos $O\,L\,C$, $O'\,L\,C$, póde effectivamente exprimir-se o angulo $O\,L\,O'$ nas latitudes φ e φ_1; mas parece-nos que a expressão resultante não transforma a formula (59) na

$$w = \frac{R_0^2\,(\varphi - \varphi_1)}{\rho^2\,\Delta^2\,90} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

que adopta o professor Hall. No emtanto sigamos a sua discussão.

Em primeiro logar toma para unidade de pezo o correspondente ao erro provavel da media de 10 observações, egualmente boas, suppondo $0'',4$ o de cada uma, isto é, (Princ. 3.º) proximamente ao erro $R_0 = \frac{0'',4}{\sqrt{10}} = 0'',1265$, cujo quadrado é $R_0^2 = [8.20412]$, designando por $[k]$ o numero cujo logarithmo é k.

Por outro lado, segundo os valores de φ relativos ás trez estações, temos:

$$\text{Para Upsala e Santiago} \ldots \ldots \quad \frac{\varphi - \varphi_1}{90} = 1{,}037$$

$$\text{Para Washington e Santiago} \ldots \quad \frac{\varphi - \varphi_1}{90} = 0{,}804$$

e portanto, pela formula (60),

$$\text{Para Upsala e Santiago} \ldots \ldots \quad w = \frac{[8.21990]}{\rho^2 \Delta^2}$$

$$\text{Para Washington e Santiago} \ldots \quad w = \frac{[8.10938]}{\rho^2 \Delta^2}$$

Assim: sendo no dia 8 de Setembro $r = 0{,}09$ em Santiago (quadro 2.º), e $r = 0{,}07$ em Upsala (quadro 1.º), donde

$$\rho^2 = \Sigma r^2 = [8.11394];$$

e dando o quadro 4.º, para mesmo dia, log. $\Delta = 9{,}63660$: a formula (60) dá finalmente $w = 6{,}80$, o que concorda com o primeiro termo da ultima columna do mesmo quadro 4.º

Do mesmo modo se formam os outros numeros d'esta columna, e os da correspondente do quadro 5.º Todavia, applicando o processo ao dia 25 de Setembro para Santiago e Upsala, acha-se $w = 16,47$, em vez de $12,41$ como se vê no quadro 4.º Julgamos pois haver erro n'este numero, erro que provirá talvez de se ter tomado $\rho^2 = 0,0081$, em vez do verdadeiro valor $\rho^2 = (0,06)^2 + (0,05)^2 = 0,0061$.

Resulta d'aqui que, em logar dos valores a que chegou o professor Hall (n.º 60), combinando os resultados parciaes do quadro 4.º, pelo principio 5.º, achariamos, segundo a mesma discussão,

$$\pi_0 = 8'',852, \qquad w = 47,87$$

para Upsala e Santiago; e, para resultado final mais provavel, os valores

$$\pi_0 = 8'',838, \qquad w = 72,47$$

em vez de (58).

62. Se nos servirmos, como indicámos, da formula (59), mais exacta, para o calculo dos elementos w, teremos

$$w = \frac{[8.20412] \times [2(\log n - \log \pi_0)]}{\rho^2} \ldots\ldots \quad (61)$$

adoptando ainda a mesma unidade de pezo.

Por esta formula, e notando que os valores de n, calculados pela relação (7) (n.º 10), são aqui as differenças entre os numeros respectivos das columnas 6.^as dos quadros 1.º, 2.º e 3.º, os quaes representam, como dissemos, as differenças médias de declinação entre o planeta e a estrella de comparação, reduzidas ao meridiano de Washington, acha-se, para o dia 8 de setembro, entre Santiago e Upsala,

$$n = -182'',48 + 211'',53 = 29'',05$$

e

$$w = 13,32.$$

Determinando por um processo similhante os pezos de todos os valores de π_0 inscriptos nos quadros 4.° e 5.°, chegámos aos resultados seguintes:

UPSALA E SANTIAGO

Data	π_0	w	$w\,\pi_0$
Set. 8	8'',831	13,32	117,62
20	8 ,828	6,94	61,27
25	8 ,782	32,08	281,68
27	8 ,875	13,42	119,12
Out. 5	8 ,495	1,02	8,64
10	8 ,914	12,70	113,20
31	8 ,996	13,61	122,40

SANTIAGO E WASHINGTON

Data	π_0	w	$w\,\pi_0$
Set. 4	9″,394	2,47	23,21
5	8 ,671	3,35	29,03
7	8 ,513	1,90	16,20
8	8 ,838	6,49	57,37
23	8 ,854	2,63	23,27
25	8 ,376	2,04	17,05
28	8 ,758	7,23	63,37
Out. 7	8 ,873	6,71	59,57
8	8 ,549	2,91	24,88
24	9 ,036	2,55	23,05
27	9 ,822	0,48	4,74
29	8 ,582	0,61	5,26
31	8 ,844	1,36	12,03
Nov. 2	8 ,834	1,98	17,47

A relação entre as sommas dos numeros inscriptos nas duas ultimas columnas do primeiro d'estes quadros dá immediatamente

$$\pi_0 = 8'',851 \qquad w = 93,09$$

para resultado mais provavel da comparação das observações de

Upsala e Santiago; e do segundo quadro tira-se egualmente

$$\pi_0 = 8'',815 \qquad w = 42,71$$

para Santiago e Washington.

Finalmente o resultado das duas comparações seria

$$\pi_0 = 8'',840 \qquad w = 135,80.$$

Observações meridianas

63. Expozemos nos n.os precedentes os resultados deduzidos por Hall das observações extrameridianas de Marte, feitas por iniciativa do capitão Giliss, com o intuito de determinar o valor da parallaxe do sol. A suspeita recente sobre o valor de Encke, despertada pela discordancia entre elle e outros valores então obtidos por methodos diversos, e, por outra parte, o intervallo de 12 annos, que ainda mediaria entre essa epocha e o da mais proxima passagem de Venus, excitaram os animos dos astronomos a lançar mão de todos os processos que comportava o methodo das observações de Marte em opposição, o qual assim recebeu n'esta epocha um impulso extraordinario.

Não se limitaram com effeito em 1862 os trabalhos dos astronomos aos que acabamos de referir.

Sob os auspicios do astronomo Winneck, organisou-se uma nova e mais extensa série de observações, de que vamos dar relação.

Segundo o plano do distincto astronomo, fizeram-se observações meridianas de differenças de declinação entre Marte e estrellas de comparação, préviamente escolhidas, nos observatorios de Williamstown, Cabo da Boa Esperança e Santiago, ao sul; e ao norte, nos de Pulkowa, Petersburgo, Helsingfors, Vienna, Berlim, Leiden, Greenwich, Albany, Washington.

Como diz Newcomb Washington *Astronomical Observations*, 1865 — Appendix II, pag. 3 —) depois da passagem de Venus nos fins do seculo passado, não se havia ainda visto um esforço cooperativo dos astronomos tão extenso.

Algumas d'estas observações foram pouco depois discutidas e combinadas parcialmente. Newcomb apresenta os resultados seguintes das discussões feitas por Winneck, Stone, e Fergusson:

1.º Vinneck, comparando as observações de Pulkowa e do Cabo da Boa Esperança, relativas a 13 noutes, achou $\pi_0 = 8'',964$.

2.º Stone discutindo as observações de Greenwich, Cabo da Boa Esperança e Williamstown, chegou ao valor $\pi_0 = 8'',943$.

3.º Fergusson, da comparação de 12 observações de Washington e Santiago, deduziu

$$\pi_0 = 8'',834,$$

e, de 15 observações de Albany e Santiago,

$$\pi_0 = 8'',611.$$

Estas comparações abrangiam, como se vê, uma pequena parte das observações effectuadas, e assim os seus resultados não podiam adoptar-se como o resultado definitivo d'uma tão grande série de observações. Desejava-se por isso, e com razão, uma discussão completa de todas ellas.

Foi encarregado d'este trabalho o astronomo Newcomb, que deu depois os resultados do seu estudo no logar que, ha pouco, citámos.

64. Vinneck, Stone e Fergusson, tinham chegado aos resultados expostos pela comparação de pares de observações correspondentes, feitas nos dois hemispherios. Mas uma discussão geral das observações não se conciliava com este methodo de comparação. A falta de observações correspondentes, embora as estrellas de comparação tivessem sido escolhidas préviamente, excluiria com effeito d'uma tal discussão muitas das observações effectuadas. É por isso que d'um total de mais de 300 observações, Vinneck sómente empregou 26, Stone 58 e Fergusson 46, sendo communs 5 das empregadas por Winneck e Fergusson, o que perfaz apenas a somma de 125 observações.

Newcomb sentiu portanto a necessidade de usar d'um novo plano de discussão, que fizesse entrar cada uma das observações, por si só, na formação do resultado final.

O calculo dos logares geocentricos d'um planeta depende necessariamente dos elementos das orbitas do planeta e da terra, com os quaes se tem calculado os logares heliocentricos dos dois corpos dados pelas taboas respectivas; e além d'isto, da distancia do planeta á terra, ou da sua parallaxe, a qual entra no calculo da passagem d'esta segunda especie de logares para a primeira.

Ora, como os valores adoptados d'estes 13 elementos, embora conhecidos com a maxima approximação relativamente a Marte na epocha das observações pela proximidade do planeta á terra, são em todo o caso affectados de erros, os logares geocentricos, assim calculados, sel-o-hão tambem. E comprehende-se que os erros d'estes logares geocentricos devem poder exprimir-se nos dos 13 elementos, mediante as relações por onde se calcularam os mesmos logares.

D'este modo cada observação de Marte dará logar a uma equação de condição da fórma

$$O = C + \varepsilon \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

sendo O o logar observado do planeta, C o mesmo logar calculado, e ε o erro d'elle, funcção, como acabamos de ver, dos erros dos seis elementos de cada uma das orbitas da terra e de Marte, e do da parallaxe de Marte ou da do sol, pois que uma depende da outra n'uma relação conhecida.

Resulta d'aqui que 13 observações bastariam, em rigor, para determinar os erros de todos estes 13 elementos; e que um um numero superior d'elles os determinaria com maior probabilidade de exactidão, resolvendo pelo methodo dos menores quadrados as respectivas equações de condição (62). Obteriamos pois assim a correcção desejada do valor da parallaxe solar, que se tivesse adoptado.

Tal é o espirito do plano geral de discussão seguido por Newcomb; mas a pequenez dos coefficientes dos erros dos elementos, principalmente n'uma série de observações que comprehenda um curto intervallo de tempo, um mez por exemplo, levou o illustre astronomo a modificar um pouco este plano, como vamos ver.

65. Examinando a tabella dos erros tabulares, dada por Winneck nas suas Observações de Marte na opposição de 1862, Newcomb achou que o erro tabular $\delta_1 z$ da distancia rectilinea $z = \Delta \operatorname{sen} d$ do planeta ao equador, sendo Δ a distancia á terra, e d a declinação, póde considerar-se, durante o intervallo de dois mezes, como representada pela série

$$\delta_1 z = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \ldots\ldots$$

sendo, n'esse intervallo, o coefficiente γ inferior a $0'',0004$. Póde pois tomar-se simplesmente

$$\delta_1 z = \alpha + \beta t$$

em intervallos de 20 a 25 dias, como são aquelles em que Newcomb dividiu as observações.

E, como, pela expressão de z, é

$$\delta_1 z = \Delta \delta_1 d \cos d,$$

temos tambem

$$\delta_1 d = \frac{1}{\Delta \cos d} (\alpha + \beta t).$$

É pois esta a expressão que pode assignar-se ao erro tabular da declinação, o qual provém, como dissemos, da inexactidão dos valores attribuidos aos elementos das orbitas de Marte e da terra. Para ter porém o erro total δz da declinação geocentrica calculada, será necessario junctar a δd o erro $\delta_2 d = \frac{\operatorname{sen} z'}{\Delta} \delta \pi_0$ introduzido pelo valor inexacto da parallaxe π_0 do sol, representando z' a distancia zenithal geocentrica apparente de Marte. Teremos então

$$\delta d = \frac{\operatorname{sen} z'}{\Delta} \delta \pi_0 + \frac{\alpha}{\Delta \cos d} + \frac{\beta t}{\Delta \cos d}$$

A differença entre a declinação correcta calculada $d + \delta d$ e a declinação observada d', que deveria ser nulla se as observações fossem exactas, será d'este modo

$$d - d' + \frac{\operatorname{sen} z'}{\Delta} \delta \pi + \frac{\alpha}{\Delta \cos d} + \frac{\beta t}{\Delta \cos d};$$

e, egualando a 0 esta differença, teremos portanto uma equação de condição. É o que fez Newcomb, tendo o cuidado de applicar a cada uma das equações relativas ás 5 séries de observações consideradas por elle, o respectivo pezo K, que chama *unidade de precisão*, o que dá

$$K\left(d - d' + \frac{\operatorname{sen} z'}{\Delta}\,\delta\pi_0 + \frac{\alpha}{\Delta\cos d} + \frac{\beta t}{\Delta\cos d}\right) = o \qquad (63)$$

66. Newcomb abrangeu na sua discussão uma massa de 297 observações, sendo: 31 de Pulkowa, 18 de Helsingfors, 29 de Leiden, 40 de Greenwich, 26 de Albany e 36 de Washington, o que dá 154 observações no hemispherio do norte; 51 de Wiliamstown, 43 do Cabo da Boa Esperança e 49 de Santiago, o que dá 143 observações no hemispherio do sul.

Para formar as equações de condição (63), o sabio astronomo dividiu, como já notámos, estas observações em 5 séries de 20 a 25 dias cada uma. E tractando separadamente, pelo methodo dos menores quadrados, cada grupo de equações correspondentes a estas 5 séries, chegou respectivamente ás seguintes equações normaes, onde designa por π' o quociente $\dfrac{\delta\pi_0}{0,89}$

$$1.^{\text{a}} \text{ série} \left\{ \begin{aligned} 0 &= +311,0\,\alpha_1 - 15,5\,\beta_1 - 32,4\,\pi' + 48'',5, \\ 0 &= -11,5\,\alpha_1 + 145,8\,\beta_1 + 144,0\,\pi' + 14'',0, \\ 0 &= -32,4\,\alpha_1 + 114,6\,\beta_1 + 533,9\,\pi' + 41'',8; \end{aligned} \right.$$

$$2.^{\text{a}} \text{ série} \left\{ \begin{aligned} 0 &= +308,0\,\alpha_2 + 6,2\,\beta_2 + 122,7\,\pi' + 2'',5, \\ 0 &= +6,2\,\alpha_2 + 41,1\,\beta_2 - 19,9\,\pi' - 1'',3, \\ 0 &= +122,7\,\alpha_2 - 19,9\,\beta_2 + 719,6\,\pi' - 22'',3; \end{aligned} \right.$$

$$3.^{a}\text{ série}\begin{cases}0=+237{,}0\,\alpha_3+4{,}8\,\beta_3+67{,}9\,\pi'+3'',9,\\ 0=+4{,}8\,\alpha_3+33{,}6\,\beta_3-12{,}4\,\pi'-7'',1,\\ 0=+67{,}9\,\alpha_3-12{,}4\,\beta_3+567{,}1\,\pi'+13''0;\end{cases}$$

$$4.^{a}\text{ série}\begin{cases}0=+292{,}0\,\alpha_4-23{,}8\,\beta_4+62{,}1\,\pi'+44{,}4,\\ 0=-23{,}8\,\alpha_4+27{,}4\,\beta_4-11{,}0\,\pi'-9''7,\\ 0=+62{,}1\,\alpha_4-11{,}0\,\beta_4+427{,}9\,\pi'+38''4;\end{cases}$$

$$5.^{a}\text{ série}\begin{cases}0=+264{,}0\,\alpha_5+23{,}5\,\beta_5-83{,}2\,\pi'+75',1,\\ 0=+23{,}5\,\alpha_5+45{,}4\,\beta_5+26{,}4\,\pi'+7'',5,\\ 0=-83{,}2\,\alpha_5+26{,}4\,\beta_5+378{,}1\,\pi'+38'',6.\end{cases}$$

Discutindo depois estas equações, Newcomb chega finalmente ao resultado definitivo

$$\pi'=0'',050$$

e por conseguinte ao valor mais provavel da parallaxe solar

$$\pi_0=8'',855\pm0{,}020,$$

visto ser $8'',9$ o valor adoptado.

CONCLUSÃO

67. Terminamos este trabalho com o seguinte quadro, apresentado por Newcomb, e transcripto na nota citada de C. André, onde se encontram reunidos os valores obtidos da parallaxe do sol, que merecem mais confiança, bem como os seus erros provaveis e os pezos respectivos.

Natureza das observações	Parallaxe	Pezo
Observações meridianas de Marte, 1862.....	$8'',855 \pm 0'',020$	25
Observações micrometricas de Marte, 1862..	$8\ ,842 \pm 0\ ,040$	6
Equação parallatica da lua................	$8\ ,838 \pm 0\ ,028$	16
Equação lunar da terra....................	$8\ ,809 \pm 0\ ,054$	3
Passagem de Venus em 1769.................	$8\ ,860 \pm 0\ ,040$	6
Experiencias de Foncault..................	$8\ ,860 \pm$	?

Ao ultimo valor, que não deve ser considerado como um resultado astronomico, entende Newcomb não poder assignar um erro provavel, pela difficuldade que se encontra na apreciação das experiencias de Foucault. Tomando a média dos outros valores, chega o illustre sabio, como resultado mais provavel de todas as observações em que se póde confiar, ao valor

$$8'',85$$

com o erro provavel

$$\pm\ 0'',013.$$

FIM.

NOTAS

PARTE II

No capitulo II d'esta secção representam π e π' as parallaxes horizontaes na estação. Para representarem as parallaxes horizontaes no equador, bastará multiplical-as pelo raio terrestre respectivo, referido ao equatorial como unidade.

Pagina 75

Das equações (35) póde tirar-se o valor de γ pela formula $\tang \gamma = \frac{\pi + \pi'}{\pi - \pi'} \tang \frac{1}{2} \Delta'$, que dá (pag. 61)

$$\tang \gamma = \frac{R + \rho}{R - \rho} \tang \frac{1}{2} \Delta'$$

Pagina 76

Para ter mais exactamente a expressão de g, o n.º 34 dá

$$g^2 = (\pi - \pi')^2 + 4\,\pi\,\pi' \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \Delta' = (\pi - \pi')^2 \left[1 + \frac{4\,R\,\rho \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \Delta'}{(R - \rho)^2} \right]$$

e portanto

$$g = (\pi - \pi') \left[1 + \frac{2\,R\,\rho \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \Delta'}{(R - \rho)^2} \right].$$

INDICE

ERRATAS

Pag.	*Linh.*	*Erros*	*Emendas*
5	8 sub.	Africa	America
9	3	os quaes	as quaes
24	3	ellipticos planetarios	planetarios
30	3, 9, 12	$(\delta) - \psi$; $(\delta_1) - \psi_1$	$\psi - (\delta)$; $\psi_1 - (\delta_1)$
51	6	$-2\, l_1\, L_1$	$+2\, l_1\, L_1$
79	4	(30)	(35)
90	5 sub.	$-[E \ldots$	$+[E \ldots$
107	9	$0'' 64$	$0^s,64$
139	7 sub.	Pinyré	Pingré
145	4	$-158'',22$	$-150'',72$
151	3	$\xi = \sqrt{\dfrac{\Sigma\, \xi i^2}{p\,(m-1)}}$	$\xi = 0{,}67449 \sqrt{\dfrac{\xi\, pi\, \xi i^2}{p\,(m-1)}}$
»	4	de cada observação	da unidade de peso
»	16	(Princ. 1.º do n.º 105)	(Princ. 1.º)
152	9	0;	π_0;
162	8; 9	$\delta\, z$; a $\delta\, d$	$\delta\, d$; a $\delta_1\, d$
163	3	peso K que chama *unidade*	factor K que chama *medida*
164	4 sub.	$0'',050$	$-0'',050$

Nas paginas 74, 75 e 76 *leia-se* Δ' em vez de Δ, excepto em $\Delta - \Delta'$.

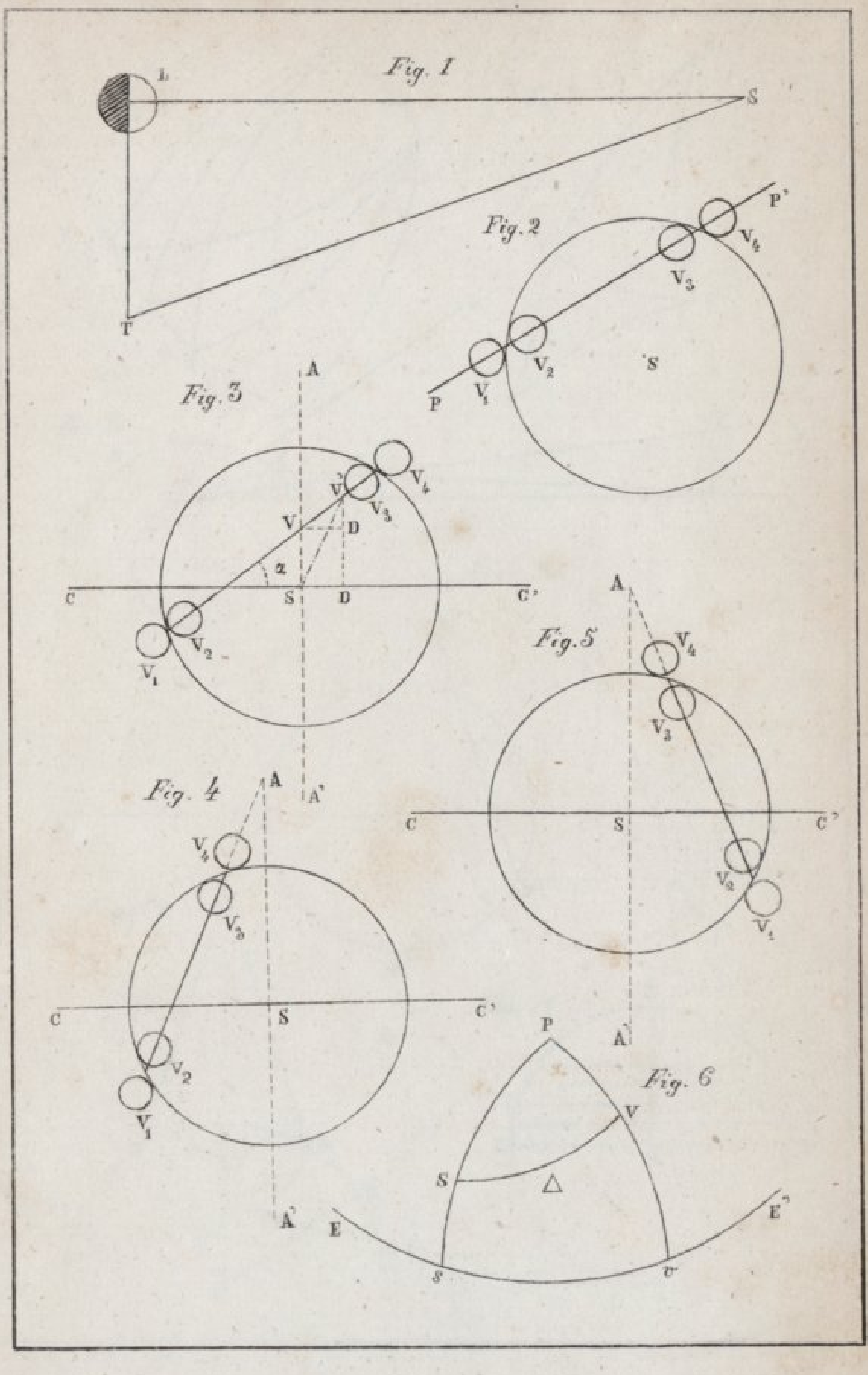


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6

Fig. 7

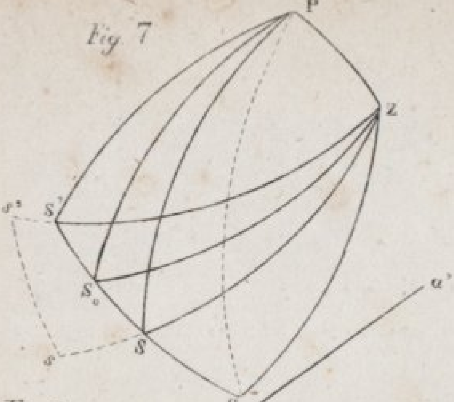


Fig. 8

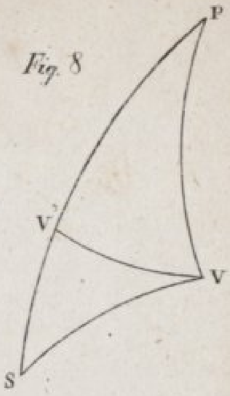


Fig. 9

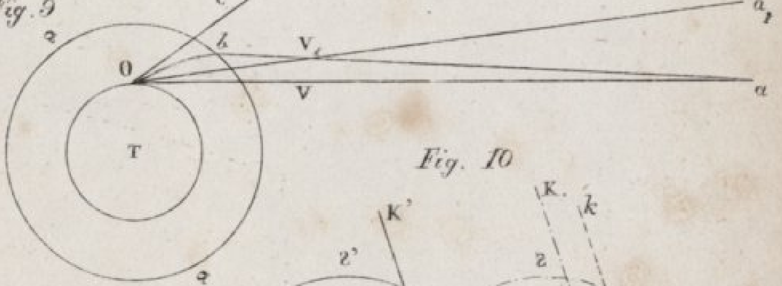


Fig. 10

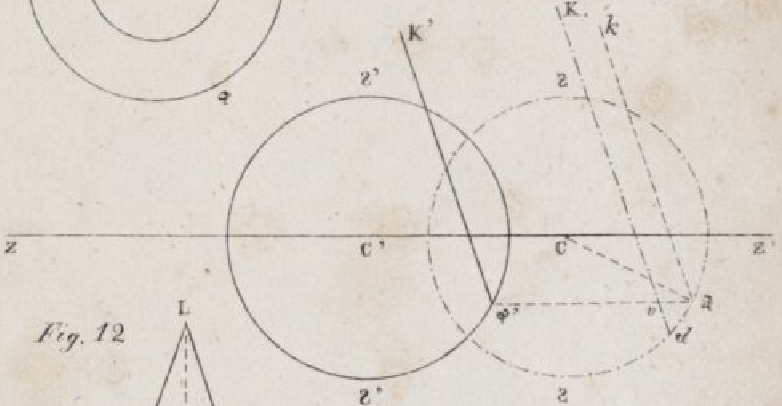


Fig. 11

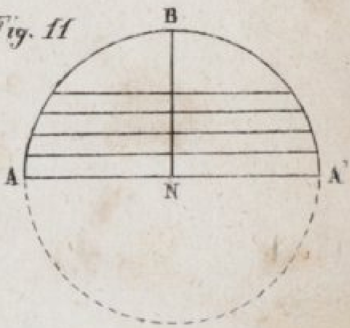
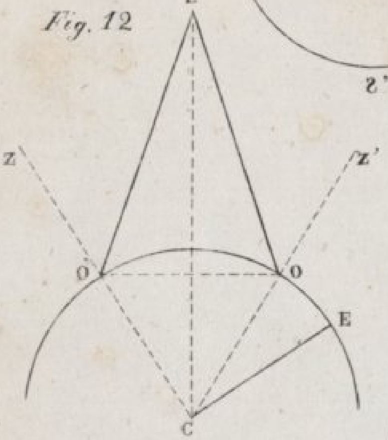


Fig. 12



MATHEMATICA

S. PINTO - DISSERTAÇÃO INAUGURAL

1875