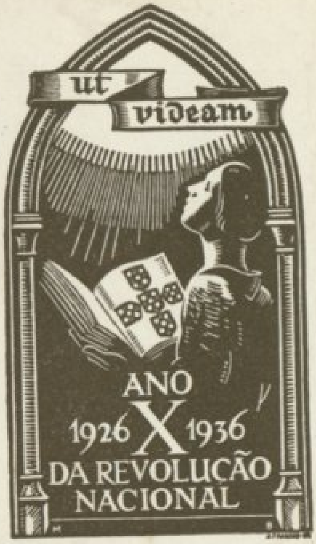
ut
videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

SERIES DE NUMEROS

SERIES DE NUMEROS

POR

Sidonio Bernardino Cardoso da Silva Paes

DOUTOR EM MATHEMATICA

COIMBRA
Imprensa da Universidade

1898

DISSERTAÇÃO PARA CONCURSO

A UM LOGAR DE LENTE SUBSTITUTO

DA

Faculdade de Mathematica

DA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

AO

Illustrissimo e Excellentissimo Senhor

DOUTOR ANTONIO CANDIDO RIBEIRO DA COSTA

Do Conselho de Sua Magestade, Ministro de Estado Honorario, Digno Par do Reino,
Membro do Conselho Superior de Instrucção Publica,
Lente Cathedratico da Faculdade de Direito da Universidade de Coimbra,
etc., etc., etc.

SERIES DE NUMEROS

I

Generalidades preliminares

1. Definição de serie.—Seja (C) um *conjuncto* de quantidades (funcções ou numeros), *infinito, numeravel*, a *i dimensões*. Sirva o symbolo

$$u_{m_1, m_2, \ldots, m_i}$$

para representar cada elemento de (C), conservando a lettra u constante e fazendo variar d'um para outro elemento as coordenadas *inteiras* do ponto $(m_1, m_2, \ldots, m_i)$.

Á expressão

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_i} u_{m_1, m_2, \ldots, m_i} \qquad (1)$$

chamaremos *serie*, a cada elemento do conjuncto *termo* da serie e ao symbolo $u_{m_1, m_2, \ldots, m_i}$, d'onde se derivam todos, *termo geral* da serie.

2. Series de numeros e series de funcções. — Conforme os termos das series são numeros ou funcções de variaveis $x, y, z, \ldots$, as series dizem-se *de numeros* ou *de funcções*.

Suppondo estas funcções *definidas*, a cada ponto $(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ corresponde um valor numerico para cada termo, e portanto á serie de funcções uma serie de numeros.

As propriedades que vamos estudar referem-se ás series de numeros ou ás series de funcções para cada ponto.

Se uma propriedade tem logar não só para um ponto mas para um *campo* dado, diz-se que a serie gosa *nesse campo* da propriedade considerada.

3. Divisão das series sob o ponto de vista da sua complexidade. — Quando o conjuncto (C) é a uma dimensão, e não existem elementos do conjuncto com indices negativos, cada indice é ao mesmo tempo a *ordem* do termo a que pertence e a serie será

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Neste caso particular a serie chama-se *simples*.

Se o indice póde tomar valores positivos e negativos a serie diz-se *simples* e *de duplo sentido* e será a expressão

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = \ldots + u_{-m} + \ldots + u_{-2} + u_{-1} + u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots .$$

No caso geral a serie é *multipla* ou de *multipla entrada*, podendo tambem ser de duplo sentido ou d'um só sentido conforme ha a considerar valores positivos e negativos dos indices ou sómente d'um signal. Em particular chama-se *dupla* ou de *dupla entrada,* a serie cujos termos dependem de dois indices, *tripla* ou de *tripla entrada* se dependem de tres, e assim por diante.

4. Valor da serie. — Considere-se a parte limitada de (C) que contém todos e sómente os elementos $u_{m_1, m_2, \ldots m_i}$, cujos indices positivos satisfazem ás condições

$$m_1 \overline{\gtrless} \alpha, m_2 \overline{\gtrless} \beta, \ldots, m_i \overline{\gtrless} \lambda$$

e os negativos ás

$$m_1 \overline{\gtrless} -\alpha', m_2 \overline{\gtrless} -\beta', \ldots, m_i \overline{\gtrless} -\lambda',$$

onde $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \alpha', \beta', \ldots, \lambda'$ são numeros inteiros positivos quaesquer.

Forme-se a somma d'estes elementos, que designaremos por $S^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}_{-\alpha', -\beta', \ldots, -\lambda'}$.

Valor ou *somma da serie* (1) é o limite, caso exista, para que tende a funcção $S^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}_{-\alpha', -\beta', \ldots, -\lambda'}$, quando as variaveis $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \alpha', \beta', \ldots, \lambda'$ *crescem* alem de todo o limite segundo leis arbitrarias.

5. Caracter da serie. — Quando a serie tem *valor,* isto é, quando existe o limite considerado, diz-se que é *convergente.*

Se, porém, esse limite não existe póde esta circumstancia provir:

1) de que a funcção $S^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}_{-\alpha', -\beta', \ldots, -\lambda'}$ cresça alem de todo o limite para toda e qualquer lei de variação dos indices; a serie chama-se neste caso *divergente* e diz-se que tem um *valor infinito;*

2) de que a mesma funcção oscille indefinidamente entre certos valores finitos;

3) de que essa funcção tenda para um limite determinado para certas leis de variação dos indices, mas não tenda para nenhum limite determinado para as outras, ou mesmo tendendo para limites determinados sempre, todavia esses limites não sejam eguaes para todas as leis.

Nos casos 2) e 3) a serie chama-se *indeterminada* e diz-se que o seu *valor* é *indeterminado.*

Dá-se o nome de *caracter* da serie á propriedade que ella possue de ser convergente, divergente ou indeterminada.

6. NOTA RELATIVA ÁS SERIES SIMPLES.— Como dissemos no n.º anterior, uma serie em geral póde ser indeterminada da maneira 2) ou 3). Nas series simples, por haver só um indice, ordem do termo, é evidente que só poderá dar-se a indeterminação da primeira maneira.

7. PRINCIPIOS GERAES DE CONVERGENCIA E DIVERGENCIA. — A condição necessaria e sufficiente para a convergencia d'uma serie é, por definição, a mesma que para a existencia de limite da funcção $S^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda,}_{-\alpha', -\beta', \ldots, -\lambda'}$, quando as variaveis tendem por valores inteiros positivos para ∞.

Essa condição será, pois, que a cada valor da quantidade positiva ε, por mais pequeno que seja, corresponda um numero inteiro positivo A tal que a desigualdade

$$| S'' - S' | < \varepsilon$$

tenha logar para todos os pares de valores S′ e S″ d'aquella funcção, correspondentes a valores das variaveis maiores do que A.

Em particular, tractando-se d'uma serie simples $\sum_1^\infty u_n$ cujo valor é evidentemente o limite da successão

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2, \ldots, s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ldots$$

ou da funcção s_n da variavel inteira n, a condição póde enunciar-se assim: que *a todo o valor da quantidade positiva* ε, *arbitrariamente pequeno, corresponda um numero* ν *tal que a desigualdade*

$$| s_{n+p} - s_n | < \varepsilon \tag{2}$$

seja satisfeita para todos os valores de $n > \nu$, *qualquer que seja* p.

8. Condição sufficiente para a convergencia d'uma serie simples. — D'aqui se conclue, visto ser

$$\begin{aligned} | s_{n+p} - s_n | &= | u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p} | \\ &\overline{\overline{<}} | u_{n+1} | + | u_{n+2} | + \ldots + | u_{n+p} |, \end{aligned}$$

uma condição *sufficiente* muito importante para a convergencia d'uma serie simples, a saber: que a serie formada com os modulos dos seus termos possua o mesmo caracter.

9. Condição necessaria para a mesma convergencia. — Deduz-se immediatamente de (2), fazendo $p=1$, que é necessario, para a convergencia d'uma serie simples, que seja

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

II

As series e os polynomios

I. Inversão dos termos das series simples

10. Nota preliminar. — Se o conjuncto (C) fosse finito a serie reduzir-se-hia a uma somma indicada e o resultado da operação gosaria em relação aos termos das propriedades conhecidas seguintes:

1) A somma é *commutativa,* isto é, independente da ordem dos termos.

2) É *associativa,* isto é: obtem-se o mesmo resultado reduzindo por meio de sommas parciaes o numero dos seus termos a um numero menor.

Se porém (C) é, como suppozemos, infinito, nada nos diz *a priori* que a somma da serie, embora haja identidade de designação, tenha as mesmas propriedades das sommas verdadeiras.

Creou-se uma entidade nova, que é como que uma extensão aos conjunctos infinitos da somma propriamente dicta. Mas o sentido da nova entidade é differente e torna-se necessario procurar se as propriedades 1) e 2) acima enunciadas subsistem ou não.

O sentido d'estas propriedades mesmo, por se tractar agora d'um numero infinito de termos, precisa de ser esclarecido.

11. Definição. — Diz-se que duas series simples

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

$$u_1' + u_2' + \ldots + u'_m + \ldots \tag{2}$$

differem sómente pela ordem dos termos, quando existe uma correspondencia univoca e reciproca entre os indices dos termos d'uma das series e os dos termos da outra tal que, se n e m são dois numeros *correspondentes,*

$$u_n = u'_m.$$

Póde tambem dizer-se que se passa d'uma das series para a outra por uma *inversão* de termos; e é dada a inversão quando é dada a correspondencia entre os indices.

12. Propriedade commutativa. — Diremos que uma serie gosa d'esta propriedade quando conserva o caracter qualquer que seja a inversão, e distinguil-a-hemos pela palavra «*absolutamente*» anteposta á que indica esse caracter.

Quando ao contrario se quizer dar a entender que uma serie não gosa d'esta propriedade empregaremos a palavra «*simplesmente*», em vez de «*absolutamente*».

13. 1) Series absolutamente convergentes. — Seja (1) uma serie simples de termos complexos, convergente e de somma s.

Produza-se uma inversão qualquer dos seus termos e seja (2) a serie assim formada.

Tomemos nesta sómente o numero de termos precisos para que entre elles se achem os n primeiros da serie (1) e seja m esse numero. Façamos

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$
$$s'_m = u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_m .$$

Será

$$s'_m = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n_1} + u_{n_2} + \ldots + u_{n_i} ,$$

$n_1, n_2, \ldots, n_i$ sendo inteiros positivos determinados maiores que n, os quaes supporemos escriptos por ordem crescente; e

$$\begin{aligned} |s'_m - s| &= |s_n - s + u_{n_1} + u_{n_2} + \ldots + u_{n_i}| \\ &\leqq |s_n - s| + |u_{n_1}| + |u_{n_2}| + \ldots + |u_{n_i}| \\ &\leqq |s_n - s| + |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n_i}| . \end{aligned}$$

Fazendo tender n para ∞, por ser s a somma da serie (1), será

$$\lim_{n=\infty} . |s_n - s| = 0 ;$$

e a somma

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n_i}|$$

tenderá ou não para zero conforme fôr ou não convergente a serie formada com os modulos dos termos de (1).

No primeiro caso será, visto ser $m \geqq n$

$$\lim_{m=\infty} . |s'_m - s| = 0$$

e portanto a serie (2) será convergente e terá a mesma somma que (1).

No segundo caso nada se póde concluir da deseguald ade e é necessario seguir outro caminho.

Antes d'isso faremos notar que ficou demonstrado neste numero, tendo presente o n.º 8: que *para uma serie ser absolutamente convergente é sufficiente que seja convergente a serie dos modulos dos seus termos.*

14. Nota. — É importante observar que *toda a serie parcial, formada com os termos d'uma serie absolutamente convergente sem repetição, é tambem absolutamente convergente.*

Seja (1) a serie primitiva e (2) a serie parcial assim formada.

Tomando m bastante grande para que entre os m primeiros termos de (2) se encontrem todos os termos de (1) de ordem menor do que n, que entrem na formação da serie parcial (2), os termos d'esta de ordem superior a m serão em (1) de ordem maior do que n.

Ter-se-ha evidentemente

$$|u'_{m+1}| + |u'_{m+2}| + \ldots + |u'_{m+p}| \overline{\gtrless} |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+q}|,$$

designando por u_{n+q} aquelle dos termos $u'_{m+1}, u'_{m+2}, \ldots, u'_{m+p}$ que tem na serie (1) ordem mais elevada.

Ora por virtude da convergencia absoluta de (1) o segundo membro da deseguald ade tende para zero, qualquer que seja q, logo tambem o primeiro, qualquer que seja p, o que demonstra o theorema.

15. 2) Series simplesmente convergentes. — Supponhamos agora que a serie dos modulos dos termos de (1) é *divergente,* persistindo todavia na hypothese da convergencia da proposta.

Façamos

$$u_n = a_n + b_n i \ , \ s = A + B i,$$

onde a_n, b_n, são quantidades reaes, A é a somma de $\sum_1^\infty a_n$ e B a de $\sum_1^\infty b_n$.

Como

$$|u_n| = +\sqrt{a_n^2 + b_n^2} \overline{\lessgtr} |a_n| + |b_n|$$

e é por hypothese $\Sigma |u_n|$ divergente, a serie

$$\sum_1^\infty (|a_n| + |b_n|)$$

será *a fortiori* divergente, para o que é necessario que pelo menos uma das series $\sum_1^\infty |a_n|$ e $\sum_1^\infty |b_n|$ o seja tambem.

Consideremos então uma serie de termos *reaes* tal como $\sum_1^\infty a_n$ e supponhamos divergente $\sum_1^\infty |a_n|$.

Designemos por P_p e $-N_q$ respectivamente as sommas dos p primeiros termos positivos e q negativos de $\sum_1^\infty a_n$; se $p + q = n$, ter-se-ha

$$P_p - N_q = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

$$P_p + N_q = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

Em virtude da convergencia de $\sum_1^\infty a_n$ de valor A, é

$$\lim_{n=\infty} |P_p - N_q| = A;$$

e, pela divergencia de $\Sigma|a_n|$, é

$$\lim_{n=\infty} . |P_p + N_q| = \infty .$$

Logo

$$\lim_{n=\infty} . P_p = \infty , \lim_{n=\infty} . N_q = \infty ,$$

isto é, *são divergentes as series formadas com os termos positivos e com os termos negativos, tomados pela sua ordem numa serie convergente de termos reaes, quando a serie dos modulos é divergente.*

Notemos, além d'isso, que os termos de ambas as series, a dos termos positivos e a dos termos negativos, tendem para zero quando n augmenta, por ser $\sum_1^\infty a_n$ convergente (n.º 9).

Com estas duas observações é agora facil de ver que o valor de $\sum_1^\infty a_n$ depende da ordem por que se succedem os termos d'um signal aos de outro signal.

Consideremos um numero σ qualquer e forme-se a somma

$$N_q + \sigma .$$

Na successão crescente

$$P_1 , P_2 , \ldots , P_{p-1} , P_p , P_{p+1} , \ldots$$

haverá dois termos P_{p-1} e P_p entre os quaes ficará comprehendida aquella quantidade, isto é, taes que

$$P_p > N_q + \sigma \geqq P_{p-1} . \tag{3}$$

ou

$$P_p - N_q > \sigma \geqq P_{p-1} - N_q$$

Fazendo tender q e portanto p para ∞, a differença entre os dois membros extremos

$$P_p - N_q - (P_{p-1} - N_q) = P_p - P_{p-1}$$

tende para zero, por ser egual a um termo da serie proposta. Logo cada um d'elles tende para σ e teremos

$$\lim_{q=\infty} (P_p - N_q) = \lim_{n=\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \sigma,$$

suppondo, é claro, os termos da proposta dispostos por uma ordem tal que se verifique sempre a desegualdade (3).

É facil além d'isso de vêr que o raciocinio feito é applicavel ainda quando se suppõe σ uma quantidade, que tende para ∞ ao mesmo tempo que n, ou ainda uma quantidade indeterminada.

Portanto numa serie de termos complexos nas condições da proposta $\sum\limits_1^\infty u_n$, póde dar-se um valor arbitrario á parte real, ou á parte imaginaria ou a ambas, conforme é $\sum\limits_1^\infty |a_n|$ divergente ou $\sum\limits_1^\infty |b_n|$ ou ambas.

A serie em qualquer dos casos é *simplesmente convergente*.

16. Inversões que não alteram o valor das series simplesmente convergentes. — O que acabamos de demonstrar mostra-nos o cuidado que é preciso ter no calculo sobre estas series, visto que o seu valor e caracter póde ser alterado por uma mudança na ordem dos termos.

Nem sempre, porém, esta alteração tem logar e conviria determinar as condições necessarias e sufficientes para que as inversões sejam permittidas.

Conhece-se já a seguinte condição *sufficiente,* mas não necessaria:

Se o producto do deslocamento maximo dos primeiros termos até á ordem n pelo maximo do modulo dos termos de ordem mais elevada tender para zero quando n tende para ∞, *a inversão não muda o valor da serie.*

Para a verificar seja $\sum_1^\infty u_n$ a serie proposta de somma s e $\sum_1^\infty v_m$ a serie que resulta d'uma inversão na primeira, sendo numeros correspondentes n e m.

O *deslocamento* do termo da ordem n é, por definição, $|n-m|$. Designemos por δ_n o maior dos deslocamentos dos primeiros n termos e formemos a successão de numeros inteiros:

$$1+\delta_1=p_1\,,\ 2+\delta_2=p_2\,,\ldots,\ n+\delta_n=p_n\,,\ldots,$$

onde p_n tende para ∞, quando n tender tambem.

Cada numero p_n dá a ordem maxima que podem occupar na segunda serie os n primeiros termos da proposta.

Consideremos na segunda serie a somma S'_p dos p primeiros termos e escolhamos n tal que

$$p_n \leqq p < p_{n+1}\,.$$

Podemos escrever

$$S'_p = S'_{p_n} + \sigma\,,$$

onde σ é a somma de termos da proposta de ordem superior a n em numero egual a

$$p-p_n \overline{\overline{<}}\, p_{n+1}-p_n-1 \,\overline{\overline{<}}\, \delta_{n+1}\,.$$

Por outro lado S'_{p_n} contém um numero de termos da proposta egual a $n+\delta_n$, entre os quaes os n primeiros.

Designando por S_n a somma d'estes ultimos, por α_n o modulo dos termos da proposta que seguem o da ordem n, e por θ, θ' quantidades comprehendidas entre -1 e $+1$, ter-se-ha evidentemente

$$S'_p = S_n + \theta\,\delta_n\,\alpha_n + \theta'\,\delta_{n+1}\,\alpha_n\,.$$

Fazendo tender n para ∞ e portanto p, os dois ultimos termos do segundo membro tenderão para zero, pela hypothese feita, e S_n para s. Logo

$$\lim.\, S'_p = s\,.$$

17. Theorema de Dirichlet. — Na hypothese da proposta ser convergente, estudamos os dois casos de ser a serie dos modulos convergente ou divergente. Estes casos são os unicos a considerar, porque é evidente que uma serie de termos positivos não póde ser indeterminada.

Ora no primeiro caso a serie é absolutamente convergente, no segundo simplesmente convergente. Resulta portanto que a condição, que no numero anterior demonstramos ser sufficiente para a convergencia absoluta, é tambem necessaria.

É esta dupla proposição que constitue o theorema de Dirichlet.

18. 3) Series absolutamente divergentes. — Seja agora $\sum_1^\infty u_n$ divergente. Pelo menos uma das series

$$\sum_1^\infty a_n \text{ e } \sum_1^\infty b_n$$

sel-o ha tambem.

Estudemos uma serie de termos *reaes* divergente e seja $\sum_1^\infty a_n$. Usando das mesmas notações que acima, teremos as duas condições

$$\lim_{n=\infty} |P_p - N_q| = \infty$$

e

$$\lim_{n=\infty} |P_p + N_q| = \infty,$$

a primeira das quaes significa que a serie $\sum_1^\infty a_n$ é divergente e a segunda que o é tambem a serie $\sum_1^\infty |a_n|$, o que é evidente.

Uma das series parciaes será divergente, a outra convergente, e, como os termos são positivos, a serie convergente sel-o-ha absolutamente.

Resta considerar uma serie divergente de termos positivos e seja

$$p_1 + p_2 \ldots + p_n + \ldots.$$

Produza-se uma inversão qualquer e seja a nova serie

$$p'_1 + p'_2 + \ldots, p'_m + \ldots.$$

Tome-se nesta um numero de termos m, bastante para que se achem entre elles os n primeiros da serie primitiva.

Será

$$m \gtreqqless n \text{ e } S'_m \gtreqqless S_n,$$

onde S'_m designa a somma d'aquelles m termos e S_n a dos n.

E, como

$$\lim_{n=\infty} S_n = \infty,$$

tambem

$$\lim_{m=\infty} S'_m = \infty.$$

D'onde se conclue: 1.º *que toda a serie divergente de termos positivos é absolutamente divergente; 2.º que uma serie divergente de termos positivos e negativos é absolutamente divergente, quando uma das duas series, formadas com os termos positivos e com os valores absolutos dos termos negativos, é convergente e a outra divergente.*

Voltemos agora á serie $\sum_1^\infty u_n$ de termos complexos.

Esta serie será absolutamente divergente, sempre que uma das series $\sum_1^\infty a_n$ ou $\sum_1^\infty b_n$ o seja.

19. 4) SERIES INDETERMINADAS.—Notando que uma serie de termos positivos não póde ser indeterminada, reconhece-se immediatamente que não póde haver series absolutamente indeterminadas. Com effeito, na discussão precedente examinaram-se todos os casos que se podiam dar em relação ás series de termos positivos e negativos, a saber:

1) As duas series formadas com os termos positivos e os valores absolutos dos termos negativos da proposta são ambas convergentes: a serie é absolutamente convergente.

2) Ambas as series são divergentes: a proposta é simplesmente convergente ou simplesmente divergente ou ainda simplesmente indeterminada.

3) Uma das duas series é convergente, a outra divergente: a proposta é absolutamente divergente.

Logo *toda a serie indeterminada é reductivel por inversão a uma serie convergente com uma somma dada ou a uma serie divergente ou ainda a uma serie indeterminada com uma indeterminação arbitraria.*

20. ALTERAÇÃO DA ORDEM D'UM NUMERO FINITO DE TERMOS. — É quasi ocioso notar que uma inversão, que altere a ordem sómente d'um numero finito de termos, não póde mudar o caracter nem o valor d'uma serie, porque existiria um termo a partir do qual a serie proposta e a transformada não differiririam uma da outra.

II. Associação dos termos das series simples

21. PROPRIEDADE ASSOCIATIVA. — Procuraremos agora estudar a influencia que póde ter sobre o caracter e o valor d'uma serie, o agrupamento dos seus termos em numero finito ou infinito, ou mais precisamente a substituição d'um numero finito de termos pela sua somma ou de uma classe e ainda d'uma infinidade de classes, contendo cada uma uma infinidade de termos da proposta, pelos seus valores.

Quando essa influencia é nulla diz-se que a serie gosa da propriedade associativa.

22. AGRUPAMENTOS QUE INTERESSAM UM NUMERO FINITO DE TERMOS. — Estes agrupamentos deixam invariavel o caracter e o valor da serie, analogamente ao que foi observado no n.º 20.

Teremos, pois, sómente de occupar-nos dos agrupamentos em numero infinito d'um numero finito de termos e dos agrupamentos d'um numero infinito de termos.

23. Agrupamento de termos consecutivos. Theorema. — *Numa serie convergente ou divergente póde substituir-se qualquer numero de termos consecutivos pela sua somma.*

1) Se

$$u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots$$

é uma serie convergente de somma s, é possivel determinar um numero ν tal que para todos os valores de $n \geqq \nu$

$$| s_n - s | < \varepsilon,$$

sendo ε uma quantidade dada antecipadamente e tão pequena quanto se quizer.

Forme-se a serie

$$S_1 + S_2 + \dots S_m + \dots,$$

onde S_1 representa a somma d'um certo numero de termos consecutivos da proposta a partir do primeiro, S_2 uma somma analoga, cujo primeiro termo é consecutivo ao ultimo de S_1, e assim por diante.

Supponhamos que o ultimo termo de S_m é u_n. Será, qualquer que seja m,

$$S_1 + S_2 + \dots + S_m = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

E como $n \geqq m$, para todos os valores de $m \geqq \nu$ será tambem

$$| (S_1 + S_2 + \dots + S_m) - s | < \varepsilon.$$

2) Seja agora a serie dada divergente. Então, por maior que seja o numero positivo A, póde determinar-se um numero ν tal que, para todos os valores de $n \gtreqless \nu$, se tenha

$$| s_n | - A > 0.$$

E, como $n \gtreqless m$, será tambem

$$| (S_1 + S_2 + \dots S_m) | - A > 0 \qquad [m \gtreqless \nu].$$

c. s. p. d.

24. Nota 1.ª — Series indeterminadas. — O theorema do n.º anterior não tem logar para as series indeterminadas. É facil de demonstrar, ao contrario, que por *agrupamentos de termos consecutivos d'uma serie indeterminada convenientemente escolhidos é sempre possivel reduzil-a a uma serie convergente ou divergente.*

A demonstração funda-se no seguinte theorema da Theoria dos limites: Toda a successão é decomponivel em um numero finito ou infinito de successões, cada uma das quaes tem um limite finito ou infinito; os termos d'estas seguem-se pela ordem da successão primitiva.

Logo, se

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

é a serie proposta, da successão

$$s_1 = u_1 \,,\; s_2 = u_1 + u_2 \,,\; \dots \,,\; s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n \,,\; \dots$$

póde destacar-se uma outra, tendo um limite finito ou infinito,

$$s_p \,,\; s_q \,,\; s_r \,,\; \dots,$$

em que $p, q, r, \ldots$ são numeros inteiros crescentes alem de todo o limite. E portanto a serie

$$s_p + (s_q - s_p) + (s_r - s_q) + \ldots$$

ou

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_p) + (u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_q) + \ldots,$$

cujos termos se obtêem por agrupamentos satisfazendo a determinadas condições, é convergente ou divergente.

25. Nota 2.ª — É claro que nas series simplesmente convergentes ou divergentes os agrupamentos da especie até aqui considerada serão os unicos sempre permittidos, porque são esses os unicos que não envolvem inversão dos termos da proposta.

26. Transformação das series simplesmente convergentes em absolutamente convergentes. — Seja $\sum_1^\infty u_n$ uma serie simplesmente convergente.

É possivel escolher inteiros n_1, $n_2 > n_1 + 1$, $n_3 > n_2 + 1, \ldots$ taes que a serie

$$\sum_1^{n_1} u_n + \sum_{n_1+1}^{n_2} u_n + \sum_{n_2+1}^{n_3} u_n + \ldots \tag{4}$$

seja absolutamente convergente.

Consideremos uma serie convergente de termos positivos qualquer $\sum_1^\infty v_n$.

Pela convergencia da proposta corresponderão aos termos d'esta serie numeros inteiros $\nu_1, \nu_2, \ldots$, taes que as desegualdades

$$\left|\sum_{n_1+1}^{n_2} u_n\right| < v_1, \left|\sum_{n_2+1}^{n_3} u_n\right| < v_2, \ldots$$

tenham logar: a primeira para todos os valores de $n_1 > \nu_1$ e $n_2 > n_1 + 1$; a segunda para todos os valores de $n_2 > \nu_2$ e $n_3 > n_2 + 1$; e assim por diante.

Todas ellas serão, pois, satisfeitas tomando n_1 maior do que ν_1, n_2 maior do que $n_1 + 1$ e ν_2, n_3 maior do que $n_2 + 1$ e n_3, etc.

Resulta que a serie dos modulos dos termos de (4) tem, a partir do segundo, os seus termos inferiores aos da serie $\sum\limits_1^\infty v_n$. Ambas estas series tem os termos positivos e a segunda é, por hypothese, convergente. Nestas condições, é facil de demonstrar que a primeira tambem é convergente (vidé cap. III), e que são portanto absolutamente convergentes as series da forma (4), que derivam da proposta por agrupamentos de termos consecutivos realisados da maneira indicada.

27. Agrupamentos quaesquer. Series absolutamente convergentes. Theorema. — *Sejam convergentes as series*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (5),$$

e

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (6):$$

é convergente e tem a mesma somma que (5) *a serie*

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_m + \ldots,$$

cujos termos são as sommas de series parciaes, formadas com termos de (5) de maneira que exista um numero m assaz grande para que as m primeiras d'estas series contenham tantos termos de (5), quantos se queira, e nenhum d'estes termos, por maior que seja m, se encontre repetido.

Com effeito: Se uma serie de termos positivos é convergente, qualquer serie parcial formada com termos d'ella sem repetição é tambem convergente. Resulta d'ahi que as series parciaes, formadas com termos da proposta sem repetição, são absolutamente convergentes. Existirão pois os numeros v_1, $v_2, \ldots$, sem o que o theorema não teria sentido.

Consideremos as sommas

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

e

$$s_{pq} = v_{1q} + v_{2q} + \ldots + v_{pq},$$

onde v_{iq} representa a somma dos q primeiros termos da serie parcial cuja somma é v_i, e p e q são numeros bastante grandes para que s_{pq} contenha todos os termos de s_n. Então designando por $u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots, u_{n_i}$ os termos restantes de s_{pq}, será

$$\begin{aligned} |s_{pq} - s_n| &= |u_{n_1} + u_{n_2} + \ldots + u_{n_i}| \\ &\overline{\lessgtr} |u_{n_1}| + |u_{n_2}| + \ldots + |u_{n_i}| \\ &\overline{\lessgtr} |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+k}|, \qquad [n_i = n + k]. \end{aligned}$$

Pela convergencia de (6), o 2.º membro tende para zero, quando n tende para ∞. E como, tendendo n para ∞ e portanto p e q, é por uma parte

$$\lim_{n=\infty} s_n = s$$

e por outra

$$\lim_{(p,q=\infty)} s_{p,q} = v_1 + v_2 + \ldots + v_m + \ldots,$$

será tambem s a somma d'esta ultima serie.

28. Nota.—Vê-se que as series absolutamente convergentes gosam da propriedade associativa. O caracter e a somma d'estas series é independente não só da ordem dos termos, mas tambem da maneira de os agrupar.

Ellas podem portanto ser transformadas de muitas maneiras sem perderem nada da sua essencia, isto é, sem deixarem de representar o mesmo numero, ao contrario do que succede com as series simplesmente convergentes, que não possuem esta plasticidade. D'aqui resulta a grande importancia das series absolutamente convergentes em Analyse.

III. Decomposição dos termos das series simples

29. Observações diversas.—Póde tambem propôr-se, conhecidas as propriedades d'uma serie, descobrir as da transformada obtida pela substituição de cada termo da primeira por parcellas de que elle seja a somma; e extender ainda mais o problema se considerarmos os termos da primeira como sommas de series parciaes, cujos termos elementares, dispostos por certa ordem, formam a segunda. O que ha de mais importante sobre este assumpto é o theorema que demonstraremos no numero immediato.

Antes d'isso faremos algumas observações que o estudo anterior do problema inverso—a associação—nos suggeriu.

Póde, em primeiro logar, notar-se que as reciprocas do theorema do n.º 23 não são verdadeiras. Assim, usando das notações lá empregadas, não podemos, da convergencia da serie $\sum_1^\infty S_m$, concluir a da serie $\sum_1^\infty u_n$ ou, da condição

$$\left| \sum_1^m S_m - s \right| \overline{\overline{<}}\, \varepsilon \qquad [m \overline{\overline{>}} \nu],$$

deprehender a existencia da condição

$$\left| \sum_1^n u_n - s \right| \overline{\overline{<}}\, \varepsilon \qquad [n \overline{\overline{>}} \nu].$$

Com effeito, se a primeira tem logar para todos os valores de $m \overline{\overline{>}} \nu$, não se deve, embora seja sempre $\sum_1^m S_m = \sum_1^n u_n$, por maior que seja m, affirmar que a segunda tenha logar para todos os valores de $n \overline{\overline{>}} \nu$, mas sómente para os valores de n correspondentes aos de m; porque fazendo percorrer a m a serie natural dos numeros, n salta em geral d'um numero inteiro a outro differindo do primeiro por mais d'uma unidade.

A mesma nota se applica ao caso da serie proposta ser divergente.

Por outro lado vimos no n.º 24 que, por um conveniente agrupamento dos termos d'uma serie indeterminada, se podia transformal-a numa serie convergente ou divergente, o que mostra evidentemente que a decomposição dos termos d'uma serie convergente ou divergente póde, em muitos casos, transformal-a numa serie indeterminada.

30. THEOREMA. — *Seja* $\sum_1^\infty v_m$ *uma serie convergente. É absolutamente convergente e tem a mesma somma que a pro-*

posta toda a serie $\sum_1^\infty u_N$, *cujos termos são sem omissão nem repetição os termos de series parciaes* $\sum_1^\infty u_1^{(n)}, \sum_1^\infty u_2^{(n)}, \ldots, \sum_1^\infty u_m^{(n)}, \ldots$, *tendo respectivamente por sommas* $v_1, v_2, \ldots, v_m, \ldots$, comtanto que se verifiquem as seguintes condições: 1) *serem absolutamente convergentes as series parciaes;* 2) *ser convergente a serie* $\sum_1^\infty \rho_m$, cujos termos são os valores das series $\sum_1^\infty |u_1^{(n)}|$, $\sum_1^\infty |u_2^{(n)}|, \ldots \sum_1^\infty |u_m^{(n)}|, \ldots$.

Basta demonstrar que a serie $\sum_1^\infty u_N$ é absolutamente convergente. D'ahi se concluirá immediatamente a identidade da sua somma e da da proposta em virtude do theorema do n.º 27.

Consideremos então a serie dos modulos $\sum_1^\infty |u_N|$ e nella um numero N sufficientemente grande para que a somma $S_N = \sum_1^\infty |u_N|$ abranja todos os n primeiros termos de cada uma das m series

$$\sum_1^\infty |u_1^{(n)}|, \sum_1^\infty |u_2^{(n)}|, \ldots, \sum_1^\infty |u_m^{(n)}|, \ldots \qquad (7).$$

Chamemos S_{mn} a somma d'estes mn termos; será

$$S_N - S_{mn} = |u_\alpha| + |u_\beta| + \ldots,$$

onde $|u_\alpha|, |u_\beta|, \ldots$ são termos das series (7) de ordem mais elevada que n. Seja $n+p$ a ordem mais elevada d'estes termos, como pertencendo ás series (7). Em virtude da convergencia d'estas series, n poderá ser escolhido préviamente de fórma que, dado um numero ε, se verifiquem as desegualdades

$$\sum_{n+1}^{n+p} |u_1^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{m}, \sum_{n+1}^{n+p} |u_2^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{m}, \ldots \sum_{n+1}^{n+p} |u_m^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{m} \ldots,$$

qualquer que seja p, e portanto com mais forte razão a desegualdade

$$|S_N - S_{mn}| < \sum_{n+1}^{n+p} |u_1^{(n)}| + \sum_{n+1}^{n+p} |u_2^{(n)}| + \ldots + \sum_{n+1}^{n+p} |u_m^{(n)}|$$

$$< \varepsilon.$$

Fazendo tender n para ∞, S_{mn} tende para $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_m$, e esta somma, quando m tende para ∞, tem por limite o valor da serie $\sum_1^{\infty} \rho_n$, por hypothese, convergente. E como a tendencia de m e n para o infinito arrasta a de N, S_N tem por limite o valor d'esta ultima serie. Logo é absolutamente convergente a serie $\sum_1^{\infty} u_N$, como se pretendia demonstrar.

IV. Operações sobre series

31. Nota inicial. — Continuando a comparar as series com os polynomios, e tendo já estudado a influencia, que a alteração de ordem, o agrupamento e a decomposição dos termos d'uma serie exerce sobre o valor e o caracter d'ella, vamos agora tractar de certas combinações de duas ou mais series, que apresentam analogia com as operações dos polynomios e que se chamam tambem *operações* sobre series.

Definiremos a *addição* e *multiplicação* de duas series e ainda a *multiplicação d'uma serie por um numero,* que póde tambem considerar-se uma operação semelhante á multiplicação dos polynomios pelos monomios.

O interesse d'estas combinações está principalmente em obter uma serie que muitas vezes tem por valor a somma ou o producto e em geral uma funcção inteira dos valores das series propostas.

Tracta-se precisamente de determinar em que casos se obtêm taes resultados, e, sob este ponto de vista, é evidente que não teremos a occupar-nos senão das series convergentes.

32. Definições. — *Addicionar* duas series Σu_n e Σv_n é dar a serie

$$\Sigma (u_n + v_n) .$$

Multiplicar por um numero α uma serie Σu_n é dar a serie

$$\Sigma \alpha u_n .$$

Multiplicar duas series Σu_n e Σv_n é dar a serie

$$\Sigma (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1) .$$

33. Addição e multiplicação por um numero. — 1.º *Series convergentes em geral.*

As propriedades das duas primeiras operações são dadas com toda a generalidade pelo seguinte:

Theorema. — Da addição de muitas series convergentes multiplicadas préviamente por numeros resulta uma serie, cujo valor se obtem sommando os valores das propostas multiplicados respectivamente pelos mesmos numeros.

Sejam s', s'', ..., $s^{(i)}$ as sommas das series propostas, s'_n, s''_n, .., $s^{(i)}_n$ as sommas dos n primeiros termos d'essas series e a', a'', ..., $a^{(i)}$, os numeros por que se multiplicam respectivamente as mesmas.

Seja, além d'isso, S o valor da serie resultante das operações indicadas e S_n a somma dos seus n primeiros termos.

Será, por definição,

$$S_n = a' s'_n + a'' s''_n + \ldots + a^{(i)} s^{(i)}_n$$

e portanto

$$\lim. S_n = S = a' s' + a'' s'' + \ldots + a^{(i)} s^{(i)}.$$

c. s. p. d.

34. 2.º *Series absolutamente convergentes.* — 1) *A serie resultante das operações enunciadas no theorema anterior é absolutamente convergente, se as propostas o fôrem.* Basta notar que toda a inversão dos termos d'aquella serie póde sempre suppôr-se proveniente de determinadas inversões nestas.

Ora estas inversões em nada podem influir no valor S da serie resultante, pois que este depende sómente das sommas $s'. s''$, ..., $s^{(i)}$, invariaveis pela hypothese da absoluta convergencia, e dos numeros a', a'', ..., $a^{(i)}$, sempre constantes.

2) Segundo a definição dada, o termo da ordem n da serie, formada pela addição de duas ou mais series, obtem-se sommando os termos da mesma ordem n das series propostas. É evidente que, se estas ultimas são absolutamente convergentes, estabelecida uma correspondencia univoca e reciproca entre ellas, a serie, cujos termos sejam a somma dos

termos correspondentes das propostas, terá ainda a mesma somma que a serie que resulta da addição.

35. Multiplicação de series. — 1.º *Series convergentes em geral. Theorema. Da multiplicação de duas series convergentes não póde provir uma serie divergente; e, se a serie resultante for convergente, o seu valor será egual ao producto dos valores das propostas.*

Sejam $\sum_1^\infty u_n$ e $\sum_1^\infty v_n$ duas series convergentes de sommas s e s'; $\sum_1^\infty W_n = \sum_1^\infty (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1)$ a serie, que resulta da multiplicação das duas primeiras.

Supponhamos que esta ultima é *convergente*, e designemos por S o seu valor e por S_n a somma dos seus n primeiros termos, por s_n e s'_n as sommas analogas para as propostas.

Admittamos a seguinte proposição da Theoria dos limites:

A media arithmetica dos n primeiros termos d'uma successão *convergente* tende para o limite da successão, quando n tende para ∞.

Em virtude d'isto, podemos escrever

$$\lim_{m=\infty} \frac{\sum_1^m s_n}{m} = s, \quad \lim_{n-m=\infty} \frac{\sum_1^{n-m} s'_n}{n-m} = s', \quad \lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n S_n}{n} = S. \qquad (8)$$

Por outro lado, se m for o maior inteiro contido em $\frac{n}{2}$, será

$$\lim_{n=\infty} \frac{m}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{n-m}{n} = \frac{1}{2}. \qquad (9)$$

Combinando as egualdades (8) e (9), vem immediatamente a seguinte :

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{\sum\limits_1^n S_n}{n}-\frac{s'\sum\limits_1^m s'_n}{m}\,\frac{m}{n}-\frac{s\sum\limits_1^{n-m} s'_n}{n-m}\,\frac{n-m}{n}\right]=S-ss' \quad (10).$$

Procuremos o valor numerico d'este limite.

A expressão, encerrada entre parenthesis, póde escrever-se como segue:

$$\frac{1}{n}\left(\sum_1^n S_n - s'\sum_1^m s_n - s\sum_1^{n-m} s'_n\right),$$

que, por ser

$$\sum_1^n S_n = s_1 s'_n + s_2 s'_{n-1} + \ldots + s_m s'_{n-m+1} + s_{m+1} s'_{n-m} + \ldots + s_n s'_1,$$

se transforma em

$$\frac{1}{n}\Big[s_1(s'_n - s') + s_2(s'_{n-1} - s') + \ldots + s_m(s'_{n-m+1} - s') +$$
$$+ s'_{n-m}(s_{m+1} - s) + \ldots + s_1'(s_n - s)\Big].$$

Mas, por virtude da convergencia das propostas, existirão duas successões de numeros $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, e $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n, \ldots$, positivos, não crescentes, e tendo por limite zero, taes que as desegualdades

$$|s_n - s| \overline{\overline{<}} \varepsilon_n \quad \text{e} \quad |s'_n - s'| \overline{\overline{<}} \varepsilon'_n \qquad (11)$$

tenham logar para todos os valores inteiros de n. D'aqui resulta que o modulo da expressão considerada, que, para abreviar, representaremos por $| \mathrm{E} |$ satisfará á condição

$$| \mathrm{E} | \overline{\overline{<}} \frac{1}{n}\Big[(|s_1|+|s_2|+\ldots|s_m|)\,\varepsilon'_{n-m+1} + \\ +(|s'_1|+|s'_2|+\ldots+|s'_{n-m}|)\,\varepsilon_{m+1}\Big]$$

ou

$$| \mathrm{E} | \overline{\overline{<}} \frac{|s_1|+|s_2|+\ldots+|s_m|}{m}\,\frac{m}{n}\,\varepsilon'_{n-m+1} + \\ + \frac{|s'_1|+|s'_2|+\ldots+|s'_{n-m}|}{n-m}\,\frac{n-m}{n}\,\varepsilon_{m+1}$$

cujo limite para $n=\infty$ é, pelas proposições citadas da Theoria dos limites, zero.

Logo tambem

$$\mathrm{S}-ss'=0,$$

como queriamos provar.

Resta, para completar a demonstração do theorema, ver se é possivel da multiplicação de duas series convergentes provir uma serie divergente.

Neste caso não teria logar a ultima das egualdades (8), por ser divergente a successão $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots, \mathrm{S}_n, \ldots$; e não teria sentido a egualdade (10).

Mas, como é sempre

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{E} = 0,$$

ter-se-hia tambem

$$\lim. \frac{1}{n}\sum_1^n \mathrm{S}_n = \lim.\left[\frac{s'\sum_1^m s_n}{m}\,\frac{m}{n} + \frac{s\sum_1^{n-m} s'_n}{n-m}\,\frac{n-m}{n}\right] \qquad (12)$$

egualdade impossivel, na hypothese supposta da divergencia de $\sum_1^\infty w_n$, pois que, tendo o segundo membro o valor ss', a funcção $\frac{1}{n}\sum_1^n S_n$ não poderia crescer alem de todo o limite.

36. *Póde, porém, a serie* $\sum_1^\infty w_n$ *ser indeterminada* sem que deixe de subsistir (11), comtanto que a successão

$$S_1, \frac{1}{2}S_2, \ldots, \frac{1}{n}S_n, \ldots \qquad (13)$$

tenda para um limite determinado.

É o que se dá com a multiplicação das duas series

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_1^\infty u_n \quad \text{e} \quad \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{\log(n+1)} = \sum_1^\infty v_n\,,$$

as quaes, como seria facil de vêr pelos criterios demonstrados adiante, são simplesmente convergentes.

O termo geral do producto é

$$w_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\log(n+1)} + \frac{1}{2\log n} + \ldots + \frac{1}{n\log 2}\right)$$

e o seu valor absoluto satisfaz á desegualdade

$$|w_n| > \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\log(n+1)}\,.$$

E, como é

$$\lim. \frac{\log(n+1)}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = \lim. \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= \lim. n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log e \ ,$$

resulta que w_n não tende para zero, quando n tende para ∞, prova da não convergencia da serie $\sum_1^\infty w_n$.

Todavia a successão (13) tem um limite. Para o demonstrar, notemos que, incidentemente, ficou estabelecida no numero antecedente a seguinte proposição muito notavel:

Se fôr

$$\lim_{n=\infty} a_n = a \quad \text{e} \quad \lim_{n=\infty} b_n = b,$$

será

$$\lim. \frac{1}{n}(a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) = ab.$$

Ora, applicando este theorema á egualdade, facil de achar,

$$S_n = u_1 s'_n + u_2 s'_{n-1} + \ldots + u_n s'_1 \ ,$$

vem immediatamente

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} S_n = s' \lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

37. *2.° Multiplicação d'uma serie absolutamente convergente por uma simplesmente convergente. Theorema.* — *O resultado d'esta operação é sempre uma serie convergente.*

Com effeito, se assim fôr, já sabemos, pelo theorema anterior, que o seu valor é ss'. Procuremos então verificar a egualdade

$$\lim_{n=\infty} |S_n - ss'| = 0,$$

na hypothese da absoluta convergencia, por exemplo, da serie $\sum_1^\infty u_n$.

Póde dar-se a S_n a forma

$$S_n = u_1 s'_n + u_2 s'_{n-1} + \ldots + u_m s'_{n-m+1} + u_{m+1} s'_{n-m} + \ldots + u_n s'_1,$$

onde suppomos ser m o maior inteiro contido em $\frac{n}{2}$, ou

$$S_n = u_1 (s'_n - s') + u_2 (s'_{n-1} - s') + \ldots + u_m (s'_{n-m+1} - s')$$
$$+ u_{m+1} (s'_{n-m} - s') + \ldots + u_n (s'_1 - s') + (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) s'.$$

E, em virtude da segunda das condições (11), será

$$|S_n - ss'| \overline{\overline{<}} (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_m|) \varepsilon'_{n-m+1}$$
$$+ (|u_{m+1}| + |u_{m+2}| + \ldots + |u_n|) \varepsilon'_1$$
$$+ |(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) s' - ss'|.$$

Cada uma das linhas do segundo membro tende para zero, quando n tende para ∞; a 1.ª porque

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon'_{n-m+1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n=\infty} \sum_1^m |u_n| = \sigma,$$

..

designando σ uma quantidade finita; a 2.ª por ser ε'_1 finito e

$$\lim_{n=\infty} \sum_{m+1}^{n} |u_n| = 0 ;$$

e finalmente a 3.ª por ser

$$\lim_{n=\infty} s' \sum_{1}^{n} u_n = ss' .$$

c. s. p. d.

38. 3.º *Multiplicação de duas series absolutamente convergentes.* 1) *Theorema.* Neste caso *a serie resultante é sempre absolutamente convergente.*

Por hypothese são convergentes as series $\sum_1^\infty |u_n|$ e $\sum_1^\infty |v_n|$, logo é tambem convergente a que resulta da sua multiplicação, isto é

$$\Sigma(|u_1||v_n| + \ldots + |u_n||v_1|). \qquad (14)$$

E, como

$$|w_n| = |u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1|$$
$$\overline{\overline{<}} |u_1||v_n| + |u_2||v_{n-1}| + \ldots + |u_n||v_1|,$$

deduz-se a convergencia de $\sum_1^\infty |w_n|$.

c. s. p. d.

2) Cabe aqui uma nota semelhante á que fizemos para a addição de duas series absolutamente convergentes. *A serie, cujos termos sejam os productos dois a dois dos das propostas,*

tomados de todas as maneiras possiveis e dispostos por qualquer ordem, será ainda absolutamente convergente e terá a mesma somma ss'. Basta observar que, por ser convergente a serie (14), é tambem convergente (n.º 30) a serie

$$|u_1||v_1|+|u_1||v_2|+|u_2||v_1|+\ldots+|u_1||v_n|+\ldots \quad (15),$$

que resulta da decomposição de cada uma das sommas de termos positivos

$$|u_1||v_n|+\cdots+|u_n||v_1|.$$

E, como (15) é absolutamente convergente, por todos os seus termos serem positivos, sel-o-ha tambem toda a serie $\sum_1^\infty |u_\alpha v_\beta|$ e ainda a serie $\sum_1^\infty u_\alpha v_\beta$, cujos termos satisfaçam ás condições enunciadas.

39. Generalisação. — É evidente que o theorema, que acabamos de demonstrar, se extende ao caso geral da multiplicação de n series.

Se estas series são eguaes, a operação chama-se *elevação a potencia* d'uma serie.

Tendo em attenção o theorema relativo á addição de series e multiplicação d'uma serie por um numero (n.º 33), reconhece-se tambem que para formar uma serie, cújo valor seja uma funcção inteira qualquer dos valores de series absolutamente convergentes dadas, se deve operar sobre estas como se fossem verdadeiros polynomios, e que a serie assim formada é ainda absolutamente convergente.

O mesmo não succede relativamente ás series, que não gosam da absoluta convergencia, as quaes, como temos visto, se afastam muito dos polynomios.

V. Series multiplas e suas relações com as series simples

40. Series de series. — Assim como a somma d'um numero finito de termos póde levar á concepção das series simples, assim tambem a addição d'estas series conduz á noção das series de series; e se as propriedades dos polynomios não subsistem senão em casos particulares, embora extensos, das series simples, tambem as propriedades da addição das series não se verificam em geral nas series de series.

Estas, como o nome o indica, são series, cujos termos, em vez de simples numeros, são tambem series. Os termos d'estas podem, por sua vez, ser novas series e assim por diante até chegar aos termos elementares da proposta.

41. Relação entre a noção precedente e a de series multiplas. — É facil de vêr que as series de series fazem parte integrante da noção de series multiplas, representando, quando estas são convergentes, uma maneira particular de effectuar a sua somma. Com effeito, voltando á consideração do conjuncto a i dimensões (C), definido no n.º 1, é sabido que um tal conjuncto póde transformar-se numa successão simplesmente infinita de conjunctos a $i-1$ dimensões, cada um d'estes numa successão simplesmente infinita de conjunctos a $i-2$ dimensões e assim successivamente até transformar o primitivo conjuncto numa successão multiplamente infinita.

Assim, suppondo, para simplificar, que em (C) ha só indices positivos, consideremos a somma $S_{\alpha, \beta, \ldots \delta, \lambda}$ dos elementos cujos indices satisfazem ás condições

$$m_1 \leqq \alpha,\ m_2 \leqq \beta, \ldots, m_i \leqq \lambda.$$

Se a serie multipla

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots, m_i} u_{m_1, m_2, \ldots, m_i} \qquad (16)$$

é convergente, qualquer que seja a lei por que se façam crescer os indices $\alpha, \beta, \ldots, \delta, \lambda$ para o infinito, deve obter-se para a funcção $S_{\alpha, \beta, \ldots \delta, \lambda}$ o mesmo limite, que, por definição, é o valor da serie.

Fazendo então crescer para o infinito *successivamente* $\alpha, \beta, \ldots, \delta, \lambda$ e designando por S aquelle valor, será

$$S = \lim_{\lambda=\infty} \left\{ \lim_{\delta=\infty} \left[\ldots\ldots (\lim_{\alpha=\infty} S_{\alpha, \beta, \ldots, \delta, \lambda}) \right] \right\},$$

que é tambem o valor da serie de series

$$\sum_{m_i=0}^{\infty} \sum_{m_{i-1}=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_1=0}^{\infty} u_{m_1, m_2, \ldots, m_i}. \qquad (17)$$

42. Inversão dos limites. — Se a serie multipla (16) é convergente, a ordem, por que se tomam os differentes limites, não influe no valor de S, e todas as series de series correspondentes terão em consequencia sommas eguaes.

A reciproca não é verdadeira. Não se póde concluir da egualdade d'estas sommas a convergencia da serie multipla, pois que, por definição, é indispensavel que o mesmo valor se obtenha, tomando o limite da funcção $S_{\alpha, \beta, \ldots, \delta, \lambda}$ para qualquer outra lei de crescimento dos indices.

43. Series multiplas absolutamente convergentes. — Uma noção importante resulta de que o conjuncto (C) é *equivalente* a uma successão linear, o que quer dizer que é possivel estabelecer entre as coordenadas inteiras do ponto $(m_1, m_2, \ldots, m_i)$ e a successão dos numeros inteiros positivos $1, 2, \ldots n, \ldots$ uma correspondencia univoca e reciproca. É o que tambem se exprime dizendo que o conjuncto é *numeravel*.

Seja, pois,

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

uma successão linear equivalente a (C) e

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{18}$$

a serie simples que lhe corresponde.

Ha uma infinidade de successões lineares equivalentes a (C), que são todas as que se podem derivar d'uma qualquer d'ellas por inversões dos termos, e portanto uma infinidade de series simples, taes como (18).

Se todas estas series têem o mesmo valor, por outras palavras, se qualquer d'ellas é absolutamente convergente, diremos que é tambem *absolutamente convergente* a serie multipla, que deriva de (C).

44. THEOREMA.—*Toda a serie multipla absolutamente convergente é convergente, mas nem todas as series multiplas convergentes o são absolutamente.*

Consideremos de novo a funcção $S_{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}$ e uma lei de crescimento determinada para os indices, que supporemos, em primeiro logar, variando *conjunctamente*.

A cada valor dado a um d'estes indices corresponderão valores determinados para os outros e a cada ponto $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ um valor tambem determinado para a funcção.

Seja $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots$ a successão formada com estes valores.

O limite d'esta é o valor da serie multipla proposta e tambem o da serie simples

$$S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots, \tag{19}$$

cujos termos se podem considerar como agrupamentos de termos consecutivos d'uma das series (18). Ora, sendo todas estas series convergentes, o mesmo succederá ás series (19), cujo valor será, além d'isso, o valor commum das series (18).

Consideremos agora o crescimento successivo dos indices de $S_{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}$ para ∞, por uma ordem qualquer, por exemplo aquella por que se acham escriptos. Formamos assim a serie de series (17).

Ora, fazendo crescer m_1, vem a serie simples

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} u_{m_1, m_2, \ldots, m_i} \tag{20}$$

absolutamente convergente, por ser composta de termos da serie (18) sem repetição, embora com omissão.

Fazendo em seguida tender m_2 para ∞, vem

$$\sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} u_{m_1, m_2, \ldots, m_i}, \tag{21}$$

que é tambem absolutamente convergente, visto provir de agrupamentos de termos de (18) sem repetição, mas ainda com omissão. Formando com estes termos uma serie simples, que é absolutamente convergente, e cuja somma é egual á de (21), podemos agora fazer variar o indice m_3 e raciocinar como para dois indices. Vê-se bem d'este modo que a somma da serie de series (17) será egual á da serie simples (18), como pretendiamos demonstrar.

Resta sómente provar que nem todas as series multiplas convergentes o são absolutamente. Bastará citar o seguinte exemplo:

A serie dupla

$$\begin{array}{l} u_1 - u_2 + 0 + 0 + \dots \\ + 0 + u_2 - u_3 + 0 + \dots \\ + 0 + 0 + u_3 - u_4 + \dots \\ + 0 + 0 + 0 + u_4 - \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \qquad (22),$$

em que supporemos *simplesmente* convergente a serie simples

$$u_1 - u_2 + u_2 - u_3 + u_3 - u_4 + u_4 - \dots \qquad (23),$$

formada com os termos de (22), dispostos por uma certa ordem, é, apesar d'isso, convergente.

Formando com o quadro (22) a somma $S_{\alpha,\beta}$, vê-se facilmente, suppondo o primeiro indice crescendo na direcção horisontal e o segundo na vertical, que para $\alpha \overline{\gtrless} \beta$ e para $\alpha > \beta$ se tem respectivamente

$$\lim. S_{\alpha,\beta} = u_1 \text{ e } \lim. S_{\alpha,\beta} = u_1 - u_{\beta+1}.$$

Mas, pela convergencia de (23),

$$\lim. u_n = 0;$$

logo será, em todos os casos,

$$\lim. S_{\alpha,\beta} = u_1.$$

45. SERIES DUPLAS. — Seja uma serie dupla

$$\begin{aligned}\sum_{m_1, m_2} u_{m_1, m_2} = u_{11} + u_{12} + u_{13} + \dots \\ + u_{21} + u_{22} + u_{23} + \dots \\ + u_{31} + u_{32} + u_{33} + \dots \\ + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (24)$$

Se esta serie fôr convergente, sabemos já que poderá obter-se a sua somma, determinando o valor de qualquer das series de series

$$\sum_{m_1} \sum_{m_2} u_{m_1, m_2} \quad \text{ou} \quad \sum_{m_1} \sum_{m_2} u_{m_1, m_2},$$

cada uma das quaes póde considerar-se como uma serie simples, tendo respectivamente por termos as sommas das linhas ou das columnas de (24).

Chama-se *sommar horisontalmente* a serie dupla dada, obter a primeira d'estas series simples, e *sommar verticalmente*, obter a segunda.

As sommas de taes series simples são eguaes, quando a proposta é convergente, e o seu valor commum é tambem o d'esta ultima. A reciproca não é verdadeira, como vimos

Se, porém, *tomando os modulos dos termos da serie dupla dada, e sommando horisontalmente ou verticalmente se obtiver uma serie convergente, a proposta será absolutamente convergente.*

Esta proposição não é differente do theorema do n.º 30. Basta notar que, designando por $\sum_1^\infty u_N$ uma qualquer das series simples, que se obtêm ordenando arbitrariamente os termos da proposta, essa serie póde considerar-se como resultante da decomposição de $\sum_1^\infty v_m$, cujos termos são as sommas das linhas da serie dada; e que se realisam aqui as duas condições exigidas no theorema citado.

Será, pois, absolutamente convergente $\sum_1^\infty u_N$, e, por definição, sel-o-ha tambem a serie dupla proposta.

46. Transformação das series simples em series duplas e reciprocamente. — Diz-se que uma serie simples é *equivalente* a uma serie dupla convergente, quando tem o mesmo valor que esta.

1) Dada uma serie simples $\sum_1^\infty u_n$, ser-lhe-ha equivalente a serie dupla

$$\begin{array}{l} (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \ldots + (u_n - u_{n+1}) + \ldots \\ + (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{n+1} - u_{n+2}) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (u_m - u_{m+1}) + (u_{m+1} - u_{m+2}) + \ldots + (u_{m+n-1}) - u_{m+n}) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{25}$$

Com effeito, designando por s_n a somma dos n primeiros termos da serie simples, por s o valor da mesma serie e por S_{mn} a somma dos termos communs ás m primeiras linhas e n primeiras columnas de (25), será, evidentemente,

$$\begin{aligned} S_{mn} &= u_1 - u_{n+1} + u_2 - u_{n+2} + \ldots + u_m - u_{m+n} \\ &= s_m + s_n - s_{m+n} \end{aligned}$$

e

$$\lim. S_{mn} = s + s - s = s.$$

2) Vimos já uma maneira da transformar as series duplas nas series simples, sommando horisontalmente ou verticalmente.

Conhece-se outro processo, devido a Clausen, que vamos agora expôr.

Em vez de sommarmos separadamente as linhas ou as columnas, sommemos a linha da ordem n com a columna da mesma ordem a partir do seu ponto de cruzamento, de maneira a formar a serie

$$u_{nn} + (u_{n,n+1} + u_{n+1,n}) + (u_{n,n+2} + u_{n+2,n}) + \dots .$$

Esta serie será convergente, visto resultar da addição de duas series convergentes.

Seja t_n a sua somma; a serie $\sum_1^\infty t_n$ será equivalente á proposta.

Com effeito, designando S_n a somma das primeiras n linhas, S'_n a das primeiras n columnas, S a da serie dupla, será

$$\lim. (S_n + S'_n - S_{nn}) = S.$$

Mas

$$\begin{aligned} S_n + S_n' - S_{nn} = u_{11} &+ (u_{12} + u_{21}) + (u_{13} + u_{23}) + \dots \\ &+ u_{22} + (u_{23} + u_{32}) + (u_{24} + u_{42}) + \dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ u_{nn} + (u_{n,n+1} + u_{n+1,n}) + (u_{n,n+2} + u_{n+2,n}) + \dots \\ &= t_1 + t_2 + \dots + t_n. \end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{n=\infty} \sum_1^n t_n = S.$$

47. Exemplos de series duplas. — No n.º 5 enunciamos os casos a que dava logar, *a priori*, a consideração do limite da funcção $S_{-\alpha', -\beta', \ldots, -\lambda'}^{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}$. É facil de formar exemplos de series duplas, que estejam nesses diversos casos.

Já vimos, no numero anterior 1), como se podiam formar series duplas convergentes equivalentes a series simples dadas.

Mas, para construir á vontade series duplas convergentes, divergentes ou indeterminadas póde ainda notar-se que, por ser

$$S_{mn} - S_{m, n-1} = u_{1n} + u_{2n} + \ldots + u_{mn}$$

$$S_{mn} - S_{m-1, n} = u_{m1} + u_{m2} + \ldots + u_{mn}$$

e

$$S_{mn} - S_{m-1, n-1} = (u_{1n} + u_{m1}) + (u_{2n} + u_{m2}) + \ldots + (u_{m-1, n} + u_{m, n-1}) + u_{mn}$$
$$= 2S_{mn} - (S_{m, n-1} + S_{m-1, n}) + u_{mn},$$

será

$$u_{mn} = S_{mn} - (S_{m, n-1} + S_{m-1, n}) + S_{m-1, n-1}.$$

É possivel então escolher a funcção S_{mn} e calcular por esta formula os termos de series duplas, convergentes, divergentes ou indeterminadas.

Assim, fazendo $S_{mn} = \frac{1}{m+n}$, obtem-se uma serie convergente, porque é sempre lim. $S_{mn} = 0$, qualquer que seja a lei de variação dos indices.

A serie será divergente, se $S_{mn} = m + n$, porque lim. $S_{mn} = \infty$.

Se agora fizermos $S_{mn} = \frac{m}{m+n}$, é

$$\lim_{m=\infty} . (\lim_{n=\infty} . S_{mn}) = 0 \quad , \quad \lim_{n=\infty} . (\lim_{m=\infty} . S_{mn}) = 1$$

e para outras leis obtêm-se os valores comprehendidos entre 0 e 1; logo a serie é indeterminada [caso 3), n.º 5].

No mesmo caso está a serie em que fôr $S_{mn} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n$, que dá, sommando horisontalmente, ∞, verticalmente, 1, etc.

É muito notavel pela sua simplicidade o seguinte exemplo de serie indeterminada:

$$\begin{array}{l}
0 + 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
-1 + 0 + 1 + 0 + 0 + \dots \\
+0 - 1 + 0 + 1 + 0 + \dots \\
+0 + 0 - 1 + 0 + 1 + \dots \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{array}$$

a qual dá os valores 1, 0, -1, para o lim. S_{mn}, conforme fôr m menor, egual, ou maior do que n. Esta serie está ainda comprehendida no caso 3) do n.º 5.

Vamos finalmente apresentar um exemplo de indeterminação egualmente simples e correspondente ao caso 2) do mesmo numero. Na serie

$$
\begin{array}{l}
1+0+0+0+0+\dots \\
+0-1+0+0+0+\dots \\
+0+0+1+0+0+\dots \\
+0+0+0-1+0+\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

a funcção S_{mn} oscilla indefinidamente entre 0 e 1, qualquer que seja a lei de crescimento dos indices, como é facil de verificar.

III

Determinação do caracter d'uma serie simples

48. Principio geral de convergencia e divergencia. — A condição necessaria e sufficiente para a convergencia d'uma serie simples, enunciada no n.º 7, não constitue uma regra pratica geral para a determinação do caracter da serie, porque, envolvendo uma infinidade de condições, será imposivel verifical-a directamente.

Não bastaria reconhecer a existencia da egualdade

$$\lim_{n=\infty} |s_{n+p} - s_n| = 0 \tag{1}$$

para um ou muitos valores particulares de p, pois que a convergencia exige que ella subsista, qualquer que seja o valor de p, constante ou variavel com n.

Se, porém, se verificar que a egualdade não tem logar para um valor determinado de p, ou para uma determinada lei de variação de p com n, póde affirmar-se que a serie não é convergente, podendo ainda ser divergente ou indeterminada.

Assim a condição deduzida no n.º 9 é simplesmente necessaria, como se póde provar por exemplos de series divergentes e até indeterminadas em que essa condição se verifica.

D'entre as primeiras citaremos as comprehendidas na expressão

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a+n},$$

onde a é uma constante positiva ou nulla, correspondendo a este ultimo valor a serie chamada *harmonica* $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$. Na verdade é

$$|s_{2n} - s_n| = \sum_{n+1}^{2n} \frac{1}{a+n} > n \cdot \frac{1}{a+2n};$$

e, como

$$\lim_{n=\infty} \frac{n}{a+2n} = \frac{1}{2},$$

vê-se que a egualdade (1) não é satisfeita quando se suppõe $p=n$. A serie, por ser de termos positivos, não póde ser indeterminada; logo será divergente.

É exemplo das segundas a serie

$$\sum_1^\infty (\operatorname{sen} \pi \sqrt{n+1} - \operatorname{sen} \pi \sqrt{n})$$

$$= \sum_1^\infty 2 \operatorname{sen} \frac{\pi\sqrt{n+1} - \pi\sqrt{n}}{2} \cos \frac{\pi\sqrt{n+1} + \pi\sqrt{n}}{2},$$

cujo termo geral tem por limite zero, por ser

$$\lim_{n=\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi\sqrt{n+1} - \pi\sqrt{n}}{2} = \lim_{n=\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = 0$$

e o factor

$$2\cos\frac{\pi\sqrt{n+1}+\pi\sqrt{n}}{2}$$

ficar sempre finito.

Ora a somma dos n primeiros termos é $\operatorname{sen}\pi\sqrt{n}$, que não tende para um limite finito, nem para ∞. A serie é, pois, indeterminada.

49. Os dois exemplos, que acabamos de estudar, mostram a insufficiencia da condição $\lim. u_n = 0$, ao mesmo tempo que nos indicam dois processos para a resolução do problema, de que nos estamos occupando. O primeiro, a que já nos tinhamos referido, consiste na verificação da não existencia da egualdade (1) para valores particulares de p; o segundo na formação da funcção s_n da variavel n e no estudo do seu limite para $n=\infty$.

Notemos, porém, que o primeiro sómente nos levou á negação da convergencia da proposta, e foi a circumstancia casual d'esta ser de termos positivos que nos permittiu distinguir a *divergencia* da *indeterminação*.

O segundo deriva immediatamente da definição de *caracter* e conduzirá, quando applicavel, á determinação sem ambiguidade não só do caracter da serie, mas até do seu valor.

É o que succede, em particular, com as progressões geometricas.

Seja a serie

$$\sum_0^\infty ax^n = a + ax + ax^2 + \ldots + ax^n + \ldots\ .$$

Sabe-se calcular s_n, que será

$$s_n = a\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{a}{1-x} - a\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Para $|x| < 1$ é

$$\lim_{n=\infty} s_n = \frac{a}{1-x}.$$

Para $|x| > 1$ e $x = 1$,

$$\lim_{n=\infty} s_n = \infty.$$

Finalmente para $x = -1$, a serie torna-se

$$a - a + a - a + \ldots,$$

evidentemente indeterminada.

D'este conhecimento lançaremos mão, mais tarde, para a determinação do caracter d'outras series.

Sejam ainda as series muito notaveis

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + \ldots + (\alpha_{n+1} - \alpha_n) + \ldots,$$
$$\alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2) + \ldots + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + \ldots\ .$$

Na primeira é

$$s_n = \alpha_1 - \alpha_n$$

e na segunda

$$s_n = \alpha_n.$$

Quando α_n tender para um limite determinado estas series serão convergentes, e se $\lim_{n=\infty} \alpha_n = 0$, a primeira terá por somma α_1 e a segunda zero.

O processo de que estamos tractando é, porém, d'uma applicação muito restricta, porque a maior parte das vezes não será conhecida a fórma de s_n.

50. Criterios de absoluta convergencia. — A condição dada no n.º 8, se fosse necessaria para a convergencia, restringiria o problema ás series de termos positivos. Ella é, porém, segundo o theorema de Dirichlet, necessaria e sufficiente para a absoluta convergencia e as series que gosam d'esta propriedade são, pelo que vimos no capitulo antecedente, as mais importantes em Analyse.

Haverá, pois, o maior interesse em procurar criterios de convergencia para as series de termos positivos.

I. Resolução do problema pela comparação de series

51. Processos de comparação das series. — O estudo comparativo d'uma serie com outra de caracter conhecido, póde levar á determinação do caracter da primeira. Esta comparação faz-se por dois processos: um d'elles consiste em estudar a relação de dois termos correspondentes das duas series; o outro em comparar a relação d'um termo para o precedente, tomada numa serie, com a relação correspondente na outra.

Os theoremas que seguem servem de fundamento a estes processos.

52. THEOREMA I. — *Sejam duas series de termos positivos* $\sum_1^{\infty} u_n = (U)$ *e* $\sum_1^{\infty} v_n = (V)$: *é sufficiente, para a convergencia (ou divergencia) da serie* (V), *que a serie* (U) *convirja (ou divirja) e que seja, além d'isso,*

$$\frac{v_n}{u_n} \overline{\underline{<}} 1, \quad \left(\text{ou } \frac{v_n}{u_n} \overline{\underline{>}} 1\right),$$

a partir d'um certo valor de n.

Se a serie (V) é convergente, existe um numero $m > \nu$, tal que a desegualdade

$$\sum_{n+1}^{n+p} u_n > \varepsilon,$$

por menor que seja ε, tenha logar para todos os valores de $n > m$, seja qual fôr o valor de p.

E, como $v_n \overline{\underline{<}} u_n$, será tambem

$$\sum_{n+1}^{n+p} v_n < \varepsilon;$$

o que demonstra a convergencia da serie (V).

Se, ao contrario, (U) é divergente, por maiores que sejam os numeros A e n, haverá um numero p tal que tenha logar a desegualdade

$$\sum_{n+1}^{n+p} u_n > \mathrm{A}.$$

E, para os valores de $n \overline{\geq} \nu$, *a fortiori* terá logar a desegualdade

$$\sum_{n+1}^{n+p} v_n > \text{A},$$

o que prova a divergencia de (V).

53. Corollarios. — 1) Se, a partir d'um certo valor ν de n, a relação $\frac{v_n}{u_n}$ fica comprehendida entre dois numeros positivos α e β, a serie (V) será convergente ou divergente ao mesmo tempo que a serie (U). Porque, sendo

$$\alpha u_n < v_n < \beta u_n$$

os termos da serie (V) estarão comprehendidos, a partir da ordem ν, entre os das series $\sum_1^\infty \alpha u_n$ e $\sum_1^\infty \beta u_n$, que (n.º 33) são convergentes ou divergentes ao mesmo tempo que (U).

Isto succederá, em particular, quando a relação $\frac{v_n}{u_n}$ tiver um limite differente de zero, para $n = \infty$.

2) Se a relação $\frac{v_n}{u_n}$ fica, a partir d'um certo valor ν de n, inferior (ou superior) a um numero positivo, e se (U) é convergente (ou divergente), será tambem (V) convergente (ou divergente).

É o que se dá, em particular, quando aquella relação tende para zero (ou ∞), quande n tende para ∞.

54. Theorema II. — *Sejam as mesmas duas series de termos positivos* (U) *e* (V): *é sufficiente, para a convergencia* *(ou divergencia) de* (V), *que convirja (ou divirja)* (U) *e seja*

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \theta_{n+1} \frac{u_n}{u_{n+1}}, \quad \theta_n \overline{\gtrless} 1 \ (\text{ou } \theta_n \overline{\lessgtr} 1),$$

a partir d'um certo valor ν *de* n.

Com effeito, é

$$v_{n+1} = \frac{1}{\theta_{n+1}} \cdot \frac{v_n}{u_n} \cdot u_{n+1}$$

$$v_{n+2} = \frac{1}{\theta_{n+2}} \cdot \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} \cdot u_{n+2} = \frac{1}{\theta_{n+1} \cdot \theta_{n+2}} \cdot \frac{v_n}{u_n} \cdot u_{n+2}$$

....

D'onde

$$\sum_{n+1}^{n+p} v_n = \frac{v_n}{u_n} \left(\frac{u_{n+1}}{\theta_{n+1}} + \frac{u_{n+2}}{\theta_{n+1} \cdot \theta_{n+2}} + \ldots + \frac{u_{n+p}}{\theta_{n+1} \cdot \theta_{n+2} \ldots \theta_{n+p}} \right)$$

$$\overline{\lessgtr} \frac{v_n}{u_n} \cdot \sum_{n+1}^{n+p} u_n, \quad \left(\text{ou } \overline{\gtrless} \frac{v_n}{u_n} \cdot \sum_{n+1}^{n+p} u_n \right);$$

que, por ser

$$\frac{v_n}{u_n} \overline{\lessgtr} \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} \overline{\lessgtr} \ldots \overline{\lessgtr} \frac{v_\nu}{u_\nu}, \quad \left(\text{ou } \frac{v_n}{u_n} \overline{\gtrless} \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} \overline{\gtrless} \ldots \overline{\gtrless} \frac{v_\nu}{u_\nu} \right),$$

demonstra a convergencia (ou divergencia) da serie (V).

As ultimas desegualdades mostram tambem que este theorema póde considerar-se como incluido no corollario 2) do theorema I.

55. Comparação com as progressões geometricas. — O conhecimento do caracter e a simplicidade d'estas series fazem-nos prevêr quanto será util tomal-as para termo de comparação.

Pela applicação dos theoremas anteriores, ou do primeiro sómente, se assim o quizermos, deduzem-se effectivamente duas regras simples e abrangendo um grande numero de casos, para determinar o caracter d'uma serie de termos positivos. São os criterios de Cauchy e de Dalembert.

1) *Criterio de Cauchy.*—Vimos que uma progressão geometrica $\sum_1^\infty a^n$ é convergente ou divergente, conforme fôr a menor ou maior do que a unidade.

Portanto, fazendo $u_n = a^n$ e notando que de $v_n \gtrless a^n$ resulta $\sqrt[n]{v_n} \lesseqgtr a$: *se fôr* $a<1$ (*ou* $a>1$) *e* $\sqrt[n]{v_n} < a$ (*ou* $> a$), *será* $\sum_1^\infty v_n$ *convergente* (*ou divergente*).

2) *Criterio de Dalembert.*— Resulta immediatamente do theorema II, tomando $u^n = a^n$, que: *se fôr* $a>1$ (*ou* <1) *e* $\frac{v_n}{v_{n+1}} < \frac{1}{a}$ $\left(ou > \frac{1}{a}\right)$, *será* $\sum_1^\infty v_n$ *convergente* (*ou divergente*).

56. Convergencia relativa das series. — O caso em que $\frac{v_n}{u_n}$ tende para zero é particularmente interessante.

Tem-se

$$\lim. \frac{v_n}{u_n} = \lim. \frac{S'_n - S'_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} = 0,$$

onde S_n, S'_n são respectivamente as sommas dos n primeiros termos das series (U) e (V).

Mas demonstra-se que

$$\lim. \frac{S'_n}{S_n} = \lim. \frac{S'_n - S'_{n-1}}{S_n - S_{n-1}},$$

quando existe o segundo membro e é $\lim. S_n = \infty$.

Logo será

$$\lim. \frac{S'_n}{S_n} = 0\,, \tag{2}$$

quando fôr

$$\lim. \frac{v_n}{u_n} = 0$$

e divergente a serie (U).

Semelhantemente, se $\lim. \frac{v_n}{u_n} = 0$, será

$$\lim. \frac{v_n}{u_n} = \lim. \frac{R'_n - R'_{n+1}}{R_n - R_{n+1}} = 0,$$

onde se fez

$$R_n = \sum_{n+1}^{\infty} u_n \text{ e } R'_n = \sum_{n+1}^{\infty} v_n\,.$$

Se, além d'isso, fôr convergente (V), será

$$\lim. \frac{R'_n}{R_n} = \lim. \frac{R'_n - R'_{n+1}}{R_n - R_{n+1}}$$

e portanto

$$\lim. \frac{R'_n}{R_n} = 0\,. \tag{3}$$

Quando se verifica (2), diz-se que (V) é *menos divergente* do que (U), e quando se verifica (3) diz-se que (V) é *mais convergente* do que (U).

No primeiro caso a serie (V) poderá ser divergente ou convergente, no segundo sómente convergente (n.º 53).

Notemos agora que o theorema I é decisivo quando (U) é convergente e $\lim. \frac{v_n}{u_n} = 0$, ou quando (U) é divergente e $\lim. \frac{u_n}{v_n} = 0$, por outras palavras, quando (U) é menos convergente ou divergente do que (V).

Convirá, portanto, procurar series menos convergentes ou divergentes do que (U) para servirem de termo de comparação, no caso em que, com a serie (U), nada se possa concluir da applicação do theorema.

Comprehênde-se então a vantagem da construcção d'uma escalla de series convergentes ou divergentes, cada uma das quaes o seja em menor grau do que todas os precedentes. A esta escalla corresponderá uma successão de criterios, cada um comprehendendo o precedente e applicando-se além d'isso em outros casos.

Antes de passarmos a este estudo, preparar-nos-hemos com as seguintes proposições.

57. Theoremas auxiliares. — A) *Designando por z um numero positivo e por l o logaritmo natural, será*

$$\frac{z}{1+z} < l(1+z) < z .$$

Com effeito, por ser

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots ,$$

é

$$e^z > 1 + z \quad , \quad e^{\frac{z}{1+z}} < 1 + \frac{z}{1+z} + \left(\frac{z}{1+z}\right)^2 + \ldots$$

ou

$$e^z > 1 + z \quad , \quad e^{\frac{z}{1+z}} < 1 + z$$

B) *Seja*

$$l_k\, \alpha = l.\, l_{k-1}\, \alpha \quad , \quad l_0\, \alpha = \alpha \quad , \quad \alpha_n > \alpha_{n-1} \quad , \quad l_{s-1}\, \alpha_{n-1} > 1$$

ter-se-ha

$$\frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n\, \mathrm{L}_{s-1}\, \alpha_n} < l_s\, \alpha_n - l_s\, \alpha_{n-1} < \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}\, \mathrm{L}_{s-1}\, \alpha_{n-1}} \,, \tag{4}$$

onde é $\mathrm{L}_k\, \alpha = l\alpha \,.\, l_2\alpha \ldots l_k\alpha$.

A proposição A), fazendo

$$z = \frac{l_{s-1}\, \alpha_n - l_{s-1}\, \alpha_{n-1}}{l_{s-1}\, \alpha_{n-1}} \,,$$

e portanto

$$l\,(1 + z) = l_s\, \alpha_n - l_s\, \alpha_{n-1} \,,$$

dá immediatamente

$$\frac{l_{s-1}\, \alpha_n - l_{s-1}\, \alpha_{n-1}}{l_{s-1}\, \alpha_n} < l_s\, \alpha_n - l_s\, \alpha_{n-1} < \frac{l_{s-1}\, \alpha_n - l_{s-1}\, \alpha_{n-1}}{l_{s-1}\, \alpha_{n-1}} \,.$$

Mudando s em $s-1$, $s-2$, …, 1, obtêem-se desegualdades analogas que transformam as precedentes em (4), como se queria demonstrar.

C) *Seja*

$$\alpha_n > \alpha_{n-1} \quad , \quad \lim_{n=\infty} . \alpha_n = \infty \quad , \quad \lim . \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}} = 0 \, ;$$

para um valor de n sufficientemente grande a differença

$$\delta = \frac{\alpha_n \, \mathrm{L}_s \, \alpha_n}{\alpha_{n-1} \, \mathrm{L}_s \, \alpha_{n-1}} - \left[1 + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \left(1 + \frac{1}{\mathrm{L}_1 \, \alpha_{n-1}} + \frac{1}{\mathrm{L}_2 \, \alpha_{n-1}} + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\mathrm{L}_s \, \alpha_{n-1}} \right) \right]$$

será sempre positiva e infinitamente pequena de 2.ª ordem em relação a $\frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}}$.

Com effeito, a partir d'um valor de n bastante grande será real $l_s \alpha_{n-1}$ e ter-se-ha pelo theorema B)

$$l_s \alpha_n - l_s \alpha_{n-1} > \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n \, \mathrm{L}_{s-1} \, \alpha_n} \, ,$$

d'onde

$$\alpha_n \, . \, \mathrm{L}_s \, \alpha_n > \alpha_n \, \mathrm{L}_{s-1} \, \alpha_n \, . \, l_s \alpha_{n-1} + \alpha_n - \alpha_{n-1} \, .$$

Mudando s em $s-1$, $s-2, \ldots, 1$, resultam relações semelhantes, que transformam a precedente em

$$\alpha_n \, \mathrm{L}_s \, \alpha_n > \alpha_{n-1} \, \mathrm{L}_s \, \alpha_{n-1} + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \, . \left(\mathrm{L}_s \, \alpha_{n-1} + \frac{\mathrm{L}_s \, \alpha_{n-1}}{\mathrm{L}_1 \, \alpha_{n-1}} \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{L}_s \, \alpha_{n-1}}{\mathrm{L}_2 \, \alpha_{n-1}} + \ldots + \frac{\mathrm{L}_s \, \alpha_{n-1}}{\mathrm{L}_{s-1} \, \alpha_{n-1}} + 1 \right) .$$

Dividindo por $\alpha_{n-1} L_s \alpha_{n-1}$ e transpondo todos os termos para o primeiro membro, resulta

$$\delta > 0,$$

que é a primeira parte do theorema.

Para demonstrar a segunda, notemos que é ainda pela proposição B)

$$l_s \alpha_n - l_s \alpha_{n-1} < \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} L_{s-1} \alpha_{n-1}}$$

ou

$$\frac{l_s \alpha_n}{l_s \alpha_{n-1}} < 1 + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} L_s \alpha_{n-1}}$$

e tambem

$$\frac{l_{s-1} \alpha_n}{l_{s-1} \alpha_{n-1}} < 1 + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} L_{s-1} \alpha_{n-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = 1 + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}}.$$

Multiplicando membro a membro, vem

$$\frac{\alpha_n L_s \alpha_n}{\alpha_{n-1} L_s \alpha_{n-1}} < \left(1 + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}}\right)\left(1 + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} L_1 \alpha_{n-1}}\right) \cdots \left(1 + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1} L_s \alpha_{n-1}}\right).$$

D'onde se tira, designando por ε uma quantidade que tende para 1, quando n tende para ∞,

$$\delta < \left(\frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}}\right)^2 \frac{\varepsilon}{l \alpha_{n-1}}.$$

D) Demonstremos ainda que é

$$\lim_{z=\infty} \frac{z}{(\log z)^m} = \infty,$$

sendo m um numero positivo dado e log designando logarithmos de base maior do que 1.

Com effeito é sempre possivel determinar um inteiro n tal que sejam satisfeitas as relações

$$n^n \overset{=}{<} z < (n+1)^{n+1},$$

d'onde

$$\frac{z}{(\log z)^m} > \frac{n^n}{[\log (n+1)^{n+1}]^m}$$

ou

$$\frac{z}{(\log z)^m} > \frac{n^{2m}}{(n+1)^m \, [\log (n+1)]^m} \cdot n^{n-2m},$$

que fazendo tender z para ∞ e portanto n, tende tambem para ∞.

58. Escala de series. — Vejamos agora como se pódem construir series menos divergentes ou menos convergentes do que uma serie divergente ou convergente dada.

Seja

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

uma serie divergente de termos positivos.

Designando por s_n a somma dos n primeiros termos, a esta serie póde dar-se a fórma

$$s_1 + (s_2 - s_1) + \ldots + (s_n - s_{n-1}) + \ldots,$$

onde

$$\lim. s_n = \infty .$$

A serie

$$l s_1 + (l s_2 - l s_1) \ldots + (l s_n - l s_{n-1}) + \ldots$$

será menos divergente do que a proposta, visto que pela proposição D) é

$$\lim_{s_n = \infty} . \frac{s_n}{l s_n} = \infty .$$

Se, ao contrario, a serie proposta é uma serie convergente, de somma s, poderemos substituir-lhe a serie

$$\left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sigma_n} - \frac{1}{\sigma_{n-1}}\right) + \ldots,$$

onde é

$$\sigma_1 = \frac{1}{s}, \quad \sigma_{n+1} = \frac{1}{s - s_n}$$

e portanto

$$\lim. \frac{1}{\sigma_n} = 0 .$$

Será menos convergente, em virtude da mesma proposição D), a seguinte serie:

$$\left(\frac{1}{l\sigma_1}-\frac{1}{l\sigma_2}\right)+\left(\frac{1}{l\sigma_2}-\frac{1}{l\sigma_3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{l\sigma_n}-\frac{1}{l\sigma_{n+1}}\right)+\ldots\,.$$

59. THEOREMA. — *Seja*

$$\alpha_n > \alpha_{n-1}, \quad \lim_{n=\infty}.\ \alpha_n = \infty, \quad \rho > 0:$$

é divergente a serie

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}\,\mathrm{L}_k\,\alpha_{n-1}} \tag{5}$$

e convergente a serie

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n\,\mathrm{L}_{k-1}\,\alpha_n\,.\,(l_k\,\alpha_n)^{1+\rho}}, \tag{6}$$

tomando p assaz grande para que seja

$$l_{k-1}\,\alpha_p > 1\,.$$

Com effeito, a serie

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} (l_k\,\alpha_n - l_k\,\alpha_{n-1})$$

é divergente, visto ser a somma dos $n-p$ primeiros termos

$$s_{n-p} = l_k\,\alpha_n - l_k\,\alpha_p$$

e

$$\lim_{n=\infty} . \; l_s \alpha_n = \infty .$$

Será *a fortiori* divergente a serie

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n \, \mathrm{L}_{s-1} \, \alpha_n},$$

que tem os seus termos maiores do que os termos correspondentes da anterior [Theorema B)], e portanto tambem a serie (5), que se deduz d'esta fazendo

$$s = k + 1 .$$

Consideremos agora a serie

$$\sum_{n=p}^{\infty} \left(\frac{1}{l_s \alpha_{n-1}} - \frac{1}{l_s \alpha_n} \right),$$

evidentemente convergente por ser

$$s_{n-p+1} = \frac{1}{l_s \alpha_{p-1}} - \frac{1}{l_s \alpha_n}$$

e

$$\lim_{n=\infty} . \; \frac{1}{l_s \alpha_n} = 0 .$$

Será *a fortiori* convergente a serie

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_n \, \mathrm{L}_{s-2} \, \alpha_n \, . \, (l_{s-1} \, \alpha_n)^{1+\rho}},$$

por virtude dos theoremas A) e D), e portanto tambem a serie (6), que d'esta se deduz, fazendo

$$s = k + 1 .$$

c. s. p. d.

60. Corollarios. — D'este theorema são corollarios, os seguintes criterios de convergencia e divergencia:

1) Seja

$$\alpha_n > \alpha_{n-1}, \quad \lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty$$

e

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \overline{>} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \left[1 + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{L_1 \alpha_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{L_k \alpha_{n-1}} \right) \right]$$

para todos os valores de $n > p$: será divergente a serie de termos positivos $\sum_1^\infty u_n$.

2) Seja

$$\alpha_n > \alpha_{n-1}, \quad \lim. \alpha_n = \infty$$

e, sendo ε um numero fixo,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \overline{>} \frac{\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}}{\alpha_n - \alpha_{n-1}} \left[1 + \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{L_1 \alpha_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{L_{k-1} \alpha_{n-1}} + \frac{1 + \varepsilon}{L_k \alpha_{n-1}} \right) \right]$$

para todos os valores de $n > \nu$: será convergente a serie de termos positivos $\sum_1^\infty u_n$.

3) Seja

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n\,L_1 n} + \frac{a_3}{n\,L_2 n} + \ldots,$$

onde $a_1, a_2, a_3 \ldots$, são numeros determinados: conforme fôr maior ou menor do que a unidade o primeiro d'estes numeros que differe da unidade, assim a serie $\sum_1^\infty u_n$ será convergente ou divergente.

II. Resolução do problema pelo estudo da serie em si

61. Theorema de Kummer. — 1.º *Para que seja convergente uma serie de termos positivos $\sum_1^\infty u_n$ é necessario e sufficiente que exista uma funcção sempre positiva φ_n, tal que seja, para todos os valores de n,*

$$\varphi_n - \varphi_{n+1} \overline{\overline{>}} u_{n+1} \quad . \tag{7}$$

2.º *Para que seja divergente a serie de termos positivos $\sum_1^\infty u_n$ é necessario e sufficiente que exista uma funcção φ_n, sempre positiva e tal que seja*

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n = 0 \qquad \frac{\varphi_n - \varphi_{n+1}}{\varphi_n} \overline{\overline{<}} u_{n+1} \; . \tag{8}$$

1.º Se a condição (7) é satisfeita, ter-se-ha

$$\begin{aligned}
\varphi_n \quad &- \varphi_{n+1} \overline{\overline{>}} u_{n+1} \;, \\
\varphi_{n+1} \quad &- \varphi_{n+2} \overline{\overline{>}} u_{n+2} \;, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{n+p-1} &- \varphi_{n+p} \overline{\overline{>}} u_{n+p} \;,
\end{aligned}$$

d'onde

$$\varphi_n - \varphi_{n+p} \overline{\overline{>}} u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}\,.$$

E, como $\varphi_n \overline{\overline{>}} \varphi_{n+1} + u_{n+1}$, vê-se que, fazendo tender n para ∞, φ_n decrescerá sempre e tenderá, portanto, para um limite positivo ou nullo, que designaremos por l. Logo

$$\lim_{p=\infty} \sum_{n+1}^{n+p} u_n \overline{\overline{<}} \varphi_n - l \overline{\overline{<}} \varphi_n\,,$$

o que demonstra a convergencia da proposta, e a sufficiencia da condição.

Esta é tambem necessaria, porque, se a serie dada é convergente, será

$$\lim_{n=\infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots) = 0$$

e poder-se-ha fazer

$$\varphi_n = k_n \,.\, r_n\,,$$

onde r_n designa a serie que se deduz da proposta supprimindo os primeiros n termos, isto é o *resto* da ordem n da serie, e

$$k_n \overline{\overline{>}} k_{n+1} \overline{\overline{>}} 1\,.$$

D'onde

$$\varphi_n - \varphi_{n+1} \overline{\overline{>}} k_{n+1} (r_n - r_{n+1}) \overline{\overline{>}} u_{n+1}\,,$$

que é a condição do enunciado.

2.º Se existe uma funcção φ_n, que satisfaça ás condições da segunda parte do theorema, a serie é divergente. Com effeito, por ser

$$\lim. \varphi_n = 0 \quad \text{e} \quad \varphi_n > 0$$

é sempre possivel, qualquer que seja n, fixar um numero $m > n$, tal que

$$\varphi_m > \varphi_{m+k} . \qquad [k = 1, 2, 3, 4, \ldots]$$

Por virtude d'esta relação e pela restante condição imposta a φ_n será

$$\varphi_m - \varphi_{m+p} \overline{\overline{<}} \varphi_m . u_{m+1} + \ldots + \varphi_{m+p-1} u_{m+p} < \varphi_m . (u_{m+1} + \ldots + u_{m+p})$$

ou

$$\sum_{m+1}^{m+p} u_n > 1 - \frac{\varphi_{m+p}}{\varphi_m} .$$

Ora, como é $\lim\limits_{p=\infty} . \varphi_{m+p} = 0$, será

$$\lim_{p=\infty} . \sum_{m+1}^{m+p} u_n > 1.$$

Poder-se-ha, pois, tomar p sufficientemente grande para que seja

$$\sum_{m+1}^{m+p} u_n \overline{\overline{>}} 1$$

e portanto, visto que $n < m$,

$$\sum_{n+1}^{m+p} u_n > 1 ,$$

que, por ser n arbitrario, demonstra a divergencia da proposta.

Reciprocamente, se a proposta é divergente, a funcção

$$\varphi_n = \frac{\lambda_n}{s_n},$$

onde é

$$0 < \lambda_n \overline{\gtrless} \lambda_{n+1} \overline{\gtrless} 1$$

e s_n tem a significação usual, satisfaz ás condições citadas; porque, além de ser φ_n positiva, e, visto que lim. $s_n = \infty$, lim. $\varphi_n = 0$, é tambem

$$\frac{\varphi_n - \varphi_{n+1}}{\varphi_n} \overline{\gtrless} \frac{u_{n+1}}{s_n} < u_{n+1}.$$

62. Notas. — 1) É claro que, se existe uma funcção φ_n nas condições do enunciado da primeira ou da segunda parte do theorema, existirão infinitas funcções nas mesmas condições.

2) Sendo evidente que o caracter d'uma serie não é alterado pela suppressão arbitraria d'um numero finito de termos, poder-se-ha ficar certo da convergencia ou da divergencia da proposta se fôr conhecida uma funcção φ_n, que satisfaça ás primeiras ou ás segundas condições, sómente para valores de n superiores a um certo numero.

A existencia de cada funcção φ_n, que verifica um dos grupos de condições para todos os valores de n, arrasta a d'uma funcção ψ_n, que sómente o verifica para os valores de n maiores do que um numero determinado m, e reciprocamente. Basta notar que de φ_n póde formar-se ψ_n, tomando $\psi_n = \varphi_n$ para $n > m$ e ψ_n arbitraria para $n \overline{\gtrless} m$; e de ψ_n deriva-se uma funcção φ_n, tomando ainda $\varphi_n = \psi_n$ para $n > m$ e escolhendo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ de fórma a satisfazer ás condições respectivas.

63. Corollarios. 1) Criterio de Dalembert. — Do criterio geral de Kummer deduzem-se, attribuindo a φ_n fórmas particulares, criterios especiaes de convergencia e divergencia, alguns dos quaes muito importantes pela sua facil e larga applicação. Assim, designando por k uma constante positiva, e fazendo

$$\varphi_n = \frac{u_n}{k},$$

resulta que é sufficiente para a convergencia que seja

$$u_n - u_{n+1} > k\, u_{n+1}$$

ou

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1}{1+k}, \tag{9}$$

a partir d'um certo valor de n.

Se, em vez d'isso, fôr

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \overline{>} 1 \tag{10}$$

para todos os valores de n superiores a um determinado numero, a serie será divergente, porque não se verificará a condição $\lim. u_n = 0$, necessaria para a convergencia.

É este o criterio de Dalembert, que já tinha sido demonstrado no n.º 55 por outro processo.

Para o applicar procura-se, em geral, o limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ para $n=\infty$ e póde succeder: *a*) que esse limite seja menor do que a unidade; *b*) que seja maior do que a unidade ou ∞; *c*) que seja egual á unidade; *d*) que a relação não tenda para nenhum limite finito ou infinito.

a) Neste caso existirá, em virtude da definição de limite, um numero ν, tal que para $n>\nu$ a relação $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ seja sempre inferior a um numero menor do que a unidade, comprehendido entre esta e o limite. Será satisfeita a desegualdade (9) e a serie será convergente.

b) Poder-se-ha determinar um numero ν tal que para $n>\nu$ a mesma relação seja sempre maior do que a unidade e a serie será divergente.

c) e *d*) São duvidosos estes casos porque não se póde deduzir d'elles nenhuma das desegualdades (9) ou (10). No caso *d*) a relação $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ oscilla, quando se faz tender n para infinito entre certos valores, podendo mesmo tornar-se, para uma successão de valores de n, destacada da successão dos numeros inteiros e positivos, superior a toda a grandeza, sem que a duvida deixe de subsistir, porque o criterio só é applicavel quando as desegualdades (9) ou (10) tiverem logar para *todos* os valores de n superiores a um certo numero.

64. 2) Criterio de Duhamel e Raabe. — Fazendo agora

$$\varphi_n = n k u_n,$$

onde k designa um inteiro positivo qualquer, virá a seguinte condição sufficiente para a convergencia

$$n k u_n - (n+1) k u_{n+1} > u_{n+1}, \qquad [n > \nu],$$

ou

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1 + \frac{1}{k}, \qquad [n > \nu].$$

Em segundo logar, será uma condição sufficiente de divergencia que seja

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1, \qquad [n > \nu],$$

ou $n u_n$ crescente com n.

A regra póde, pois, enunciar-se assim:

Uma serie de termos positivos será convergente ou divergente, conforme a expressão $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$ *tende para um limite superior ou inferior á unidade, quando n tende para ∞.*

Subsistem dois casos duvidosos: aquelle em que a expressão considerada tende para a unidade e aquelle em que ella não tende para um limite finito, nem para ∞.

Applica-se este criterio quando a relação $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tem por limite a unidade, caso em que o anterior é fallivel.

Se, porém, fôr ao mesmo tempo

$$\lim. \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 \quad \text{e} \quad \lim. n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1$$

é necessario recorrer a outras regras.

Collocando

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=1+\frac{\alpha}{n},$$

vamos estudar a funcção

$$\alpha=n\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right],$$

que permittirá levantar em muitos casos a difficuldade.

65. 3) Regra de Cahen.—Se no theorema de Kummer (1.º) fizermos $\varphi_n=a_n\sum\limits_1^n\frac{1}{a_n}$ ou, para mais simplicidade, $\varphi_n=a_n\,\sigma_n$, vê-se facilmente que será a serie proposta convergente, se a desegualdade

$$a_n\,\sigma_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\,\sigma_{n+1}+1=\left(a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\right)\sigma_n>1$$

tiver logar para todos os valores de n maiores que um certo numero.

Se, ao contrario, a funcção

$$\left(a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\right)\sigma_n$$

fica, a partir d'um certo valor de n, inferior á unidade, a serie será divergente.

Esta proposição tem como caso particular a regra de Cahen, cujo enunciado é o seguinte:

Se uma serie de termos positivos é convergente a funcção α cresce indefinidamente com n.

Com effeito, fazendo $a_n = n$, a serie proposta será divergente se fôr

$$\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right]\sigma_n < 1$$

ou

$$\alpha \frac{\sigma_n}{n} < 1 .$$

E, como a serie $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ é menos divergente do que a serie $\sum_1^\infty n^0$, a relação $\frac{\sigma_n}{n}$ entre as sommas dos seus n primeiros termos tenderá para zero, quando n augmenta. Logo a desegualdade só poderá deixar de subsistir, se α crescer indefinidamente com n.

66. 4) Criterios de Bertrand. — Fazendo

$$a_n = n \log n \quad , \quad a_n = n \log \log n, \ldots,$$

obtêem-se regras devidas a Bertrand.

67. Estudo da funcção $n u_n$. — Um outro criterio importante resulta da consideração do limite de $n u_n$ para $n = \infty$. É o seguinte: *É condição sufficiente para a divergencia d'uma serie, quaesquer que sejam os signaes dos termos, que seja*

$$\lim_{n=\infty} . \, n u_n = \lambda , \qquad [\lambda \lessgtr 0].$$

Por um theorema já citado da theoria dos limites sabe-se que, se a_n tende para um limite quando u tende para ∞, é satisfeita a seguinte egualdade

$$\lim. \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = \lim. a_n.$$

Se, pois, $n u_n$ tende para um limite λ, ter-se-ha evidentemente

$$\lim. \frac{1}{n}(u_1 + 2u_2 + \ldots + n u_n) = \lim. n u_n = \lambda.$$

ou

$$\lim. \frac{1}{n}\Big[s_1 + 2(s_2 - s_1) + \ldots + n(s_n - s_{n-1})\Big]$$

$$= \lim. \Big[\left(1 + \frac{1}{n}\right) s_n - \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n)\Big] = \lambda. \quad (11)$$

Ora, se a proposta fôr convergente, a applicação do mesmo theorema á succession $s_1, s_2, \ldots, s_n$ dá tambem

$$\lim. \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) = \lim. s_n,$$

que reduz (11) a

$$\lim. \left(1 + \frac{1}{n}\right) s_n - \lim. s_n = 0 = \lambda.$$

Portanto *se a serie é convergente e $n u_n$ tende para um limite finito, esse limite será zero.*

Se, ao contrario, este limite fôr differente de zero a serie não poderá ser convergente e, como, a partir d'uma ordem sufficientemente elevada, os termos serão todos do signal do limite, ella será divergente, e o theorema está demonstrado. A condição não é porém necessaria para a divergencia, como o demonstra o exemplo da serie $\Sigma \frac{1}{n \log n}$, que é divergente apesar de ser

$$\lim. \frac{1}{\log n} = 0.$$

Este mesmo exemplo prova tambem que a condição $\lim. n u_n = 0$ é insufficiente para a convergencia. E deve-se notar que esta condição nem mesmo é necessaria, porque a a serie póde convergir sem que o producto $n u_n$ tenda para nenhum limite. É o que succede numa serie de termos positivos, cujos valores são

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots \frac{1}{m^2}, \ldots,$$

quando as ordens respectivas fôrem

$$1,\ 2^3,\ 3^3, \ldots, m^3, \ldots, \tag{12}$$

e formam para as outras ordens uma outra serie convergente.

A serie total é tambem convergente e todavia o producto $n u_n$ póde exceder todo o limite, se se faz percorrer a n a successão (12), pois que para

$$n = m^3 \qquad \text{vem} \qquad n u_n = m = \sqrt[3]{n}\,.$$

68. Cesaró poz em evidencia a importancia do criterio de divergencia achado no numero precedente, demonstrando que elle é util precisamente quando as regras de Dalembert e de Raabe se tornam inuteis.

Com effeito, se

$$\lim. \, n\, u_n = \lambda \quad \text{e} \quad \lambda \gtrless 0,$$

ter-se-ha

$$\lim_{n=\infty}. \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty}. \frac{n}{n+1} \, \frac{(n+1)\, u_{n+1}}{n\, u_n} = \lim_{n=\infty}. \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{\lambda}{\lambda} = 1$$

e da regra de Dalembert nada se poderá concluir.

Devemos então applicar a de Duhamel e Raabe, procurando determinar o limite da funcção

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right).$$

Mas é facil de verificar a egualdade

$$\lim. \, n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1$$

ou

$$\lim. \frac{(n+1)\, u_{n+1} - n\, u_n}{u_{n+1}} = 0\,. \tag{13}$$

Bastará considerar a serie de termo geral

$$(n+1)\, u_{n+1} - n\, u_n = v_{n+1}\,,$$

que é convergente por ser evidentemente

$$\sum_1^n v_n = n\,u_n$$

e tender $n\,u_n$, por hypothese, para o limite finito λ.

O primeiro membro de (13) torna-se, depois de multiplicado por $\lambda = \lim. (n+1)\,(u_{n+1})$, em

$$\lim. (n+1)\,u_{n+1} \lim. \frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} = \lim. n\,v_n\,,$$

que é egual a 0, por virtude da convergencia de $\sum_1^\infty v_n$. Na verdade a funcção $n\,v_n$ não póde oscillar, porque a relação de dois termos consecutivos da mesma serie oscillaria tambem e não tenderia para a unidade, como é facil de vêr, que acontece neste caso.

Está, pois, verificada a egualdade e portanto a improficuidade do criterio de Duhamel e Raabe no caso considerado.

69. Series de termos positivos e negativos.—Quasi todos os criterios precedentes se referem a series de termos positivos, podendo, portanto, servir apenas para determinar o caracter das series absolutamente convergentes ou divergentes.

Sómente o ultimo criterio, que deduzimos da consideração da funcção $n\,u_n$, diz respeito a series de termos positivos e negativos.

No caso particular d'uma serie de termos alternadamente positivos e negativos, que abreviadamenee se chama serie *alternada,* conhece-se a seguinte proposição muito importante:

É convergente a serie alternada

$$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n,$$

em que fôr, a partir d'um certo valor de n

$$u_n > u_{n-1} \quad \text{e} \quad \lim_{n=\infty}.\ u_n = 0 .$$

Podemos suppôr, para a demonstração, que estas condições se verificam desde o primeiro termo, porque a suppressão d'um numero limitado de termos não altera o caracter d'uma serie, e ainda, pela mesma razão, que o primeiro termo é positivo.

A somma s_{2k} dos $2k$ primeiros termos será evidentemente positiva, e crescerá com k, por ser

$$s_{2(k+1)} - s_{2k} = u_{2k+1} - u_{2k+2} .$$

E, como é

$$s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k} ,$$

será ainda a mesma somma inferior a u_1.

Logo, designando por s um numero determinado inferior a u_1, será

$$\lim.\ s_{2k} = s < u_1 .$$

Se n é impar e egual a $2k+1$, é evidentemente

$$S_{2k+1} - S_{2k} = u_{2k+1}$$

e, como

$$\lim_{k=\infty} u_{2k+1} = 0 ,$$

$$\lim. S_{2k+1} = \lim. S_{2k} = s ,$$

o que demonstra o theorema.

70. Nota. — As condições enunciadas no theorema anterior para a convergencia das series alternadas são sufficientes, mas não necessarias. Assim uma serie alternada póde ser convergente sem que os termos decresçam sempre.

Existem, com effeito, series de termos positivos, em que a relação $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ póde tomar valores tão grandes quanto se quizer.

Exemplo: Na serie

$$\alpha + \beta^2 + \alpha^3 + \beta^4 + \alpha^5 + \beta^6 + \ldots,$$

onde $\beta < \alpha < 1$, a relação $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tende para zero ou para ∞, conforme n é impar ou par.

A serie alternada, que d'esta se deriva mudando os signaes aos termos da ordem par, será ainda convergente, e os termos não irão sempre decrescendo.

FIM.

INDICE

ERRATAS

Pag.	*Lin.*	*Onde se lê:*	*Leia-se:*
7	17	entidade nova	entidade
30	9	W_n	w_n

1898

S. PAES - DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

MATHEMATICA