Teorema. — *Qualquer involução do grupo cremoniano é equivalente a uma das seguintes:*

a) *homologia harmónica;*

b) *involuções de Jonquières;*

c) *involuções com sete ou oito pontos fundamentais distintos tendo como invariante um sistema irredutível de cúbicas com êsses pontos bases.*

70. — *Involuções de Jonquières.* A involução tem como invariante um feixe de rectas, podendo todas as rectas serem invariantes ou não.

No primeiro caso, é evidente que todos os pares de pontos conjugados hão de estar alinhados com o ponto F_{m-1}, e a involução é perspectiva; ao ponto F_{m-1} chama-se centro da involução e designamo-lo por O.

Uma involução perspectiva é de classe zero. Com efeito, uma recta arbitrária do plano tem por conjugada uma curva de ordem m que a encontra em m pontos, cada um dos quais, devendo ter o conjugado sôbre a recta, e, ao mesmo tempo, alinhado com O, só pode ser duplo. O logar dêstes é uma curva dupla de ordem m. Esta propriedade é inversa da demonstrada no n.° 26, *d*.

Cada raio do feixe O encontra a curva dupla em dois pontos, que separam harmónicamente qualquer par de pontos conjugados existentes nesse raio. Se um raio do feixe é tangente à curva dupla num ponto fora de O, a involução sôbre êsse raio é parabólica e todos os seus pontos teem por conjugado o referido ponto de contacto; logo êste ponto é um dos pontos fundamentais simples e a tangente a recta fundamental respectiva.

Se a curva dupla não contêm singularidades fora de O, isto é, se tem o género $m-2$, por uma bem conhecida fórmula de Plücker, a classe é igual a $4m-6$, e pelo ponto O, àlêm das tangentes aos $n-2$ ramos que por êle passam, podemos conduzir outras $2m-2$ tangentes, cujos pontos de contacto são todos os pontos fundamentais simples; as tangentes são as respectivas rectas fundamentais.

Por outro lado qualquer raio r do feixe O, encontra a curva dupla em dois pontos P e Q e a primeira polar dessa curva relativamente a O num ponto M, tal que $\frac{PO}{PM}+\frac{QO}{QM}=$ $=0$, donde $(PQOM)=-1$, por onde se reconhece que M é conjugado de O na involução. Obrigando r a descrever o feixe O, reconhece-se que a curva fundamental de ordem $m-1$ relativa a O é a primeira polar indicada.

71. — Suponhamos agora que a curva dupla tem singularidades fora de O. É evidente que êsses pontos só podem ser duplos. Se a curva fôr de género $p<m-2$, ainda podemos conduzir por O $2p+2$ tangentes à curva dupla, cujos pontos de contacto são pontos fundamentais simples. Cada um dos $m-p-2$ pontos duplos deve contar-se por dois pontos fundamentais simples infinitamente próximos. Se submetermos o plano π da involução a uma transformação quadrática com os pontos fundamentais em O, num dos pontos duplos da curva dupla e em qualquer dos $2p+2$ pontos simples, é facil de calcular a ordem da involução equivalente de π'. Com efeito, a uma recta de π' corresponde uma cónica de π circunscrita aos três pontos fundamentais; esta cónica tem por conjugada na involução dêste plano uma curva de ordem m passando com $m-2$ ramos por O, e simplesmente pelos pontos duplos da curva dupla e pontos fundamentais simples. Esta curva transforma-se em π' numa curva de ordem $m-1$ com um ponto múltiplo de ordem $m-2$, correspondente a recta donde partimos; como a curva dupla se transforma numa curva dupla em π' de ordem $m-1$ com

um ponto de ordem $m-2$ e $m-p-3$ pontos duplos, a involução de π' é da natureza da de π com a ordem diminuida duma unidade.

Operando repetidas vezes, chegar-se há a uma involução em que a curva dupla não tem pontos duplos; logo êste caso é redutível ao primeiro.

No entanto, se é $p=0$, a involução quadrática, a que se chega, pode reduzir-se á homologia harmónica, mediante uma transformação quadrática com os pontos fundamentais nos dois pontos fundamentais da involução situados na cónica dupla e noutro ponto qualquer da mesma curva.

Se a curva dupla fôr redutível, como cada raio do feixe O deve encontrá-la em dois pontos, não pode uma das partes ser um raio dêsse feixe; a curva só pode decompor-se em duas partes de ordens δ_1 e δ_2 $(\delta_1+\delta_2=m)$ passando por O respectivamente com δ_1-1 e δ_2-1 ramos.

Estas curvas encontram-se ainda em $\delta_1+\delta_2-1$ pontos fora de O, que podemos identificar com os pontos duplos do caso anterior.

Procedendo análogamente, chegamos a êstes resultados: se $\delta_1=\delta_2$ chega-se à homologia harmónica; se $\delta_1\neq\delta_2$ chega-se a uma involução perspectiva com uma curva dupla de ordem $\delta_1-\delta_2$ com um ponto múltiplo de ordem $\delta_1-\delta_2-1$ em O, caso que vamos estudar.

Se a curva dupla tem em O um ponto múltiplo de ordem $m-1$, sôbre cada raio do feixe com centro em O, há uma involução em que um dos pontos duplos é êsse mesmo ponto.

Dos pontos simples $m-1$ são infinitamente próximos de O e sôbre a curva dupla; os restantes não podem estar sôbre esta curva, porque das suas intersecções com uma curva conjugada duma recta arbitrária do plano deve haver m variáveis; ora com os $m-1$ mencionados temos $m^2-[(m-1)^2+(m-1)]=m$. Mas, como devem ser infinitamente proximos de O, as curvas correspondentes às rectas do plano teem nesse ponto contactos de ordem s_1+1, s_2+1, ... tais que $s_1+s_2+\ldots=m-1$. Submetendo o plano a uma transformação quadrática tal que um ponto fundamental seja O, outro o ponto infinitamente próximo sôbre a tangente a um daqueles ramos das curvas correspondentes às rectas do plano, e o terceiro em qualquer ponto da curva dupla, a involução equivalente que se obtêm é de ordem inferior e da mesma natureza. Repetindo a construção chega-se à homologia harmónica.

72. — Se a involução não é perspectiva, o feixe invariante tem apenas dois raios invariantes, podendo dar-se os casos de serem ambos constituidos por pontos duplos, um apenas, ou nenhum.

a) Se os dois raios invariantes são constituidos por pontos duplos, transformando quadráticamente o plano noutro, pondo um ponto fundamental em O, outro num ponto fundamental simples e outro em qualquer ponto duma daquelas rectas, obtem-se uma involução equivalente nas condições de *b*).

b) Se um dos raios invariantes é constituido por pontos duplos, transformemos o plano, pondo um ponto fundamentado em O, outro num ponto fundamental simples e outro num ponto da recta dupla; obtemos uma involução nas condições de *c*).

c) Resta analisar o caso de as duas rectas invariantes não serem duplas. Os pontos conjugados sôbre estas rectas formam involuções que conterão quatro pontos duplos isolados da involução cremoniana considerada. Transformando o plano de modo que o triângulo fundamental tenha num vértice em O e os outros em dois pontos fundamentais simples, tais que a recta fundamental relativa a qualquer não passe pelo outro, a involução muda numa equivalente de ordem inferior; assim se chegará à involução quadrática a que nos referimos no n.º 53, da qual se passa para a homologia harmónica, pondo dois pontos fundamentais em dois dos pontos fundamentais da involução e o terceiro num ponto duplo.

Como as transformações quadráticas indicadas são exequíveis em todos os casos, vemos que as involuções de *Jonquières* podem deduzir-se da homologia harmónica, excepto quando teem uma curva dupla não unicursal, porque se reduzem ao caso indicado no n.º 70.

73. *Tipo com sete pontos fundamentais.* Pomos de parte os casos de três pontos estarem em linha recta ou de seis formarem um hexágono de Pascal, porque seria redutível a rêde de cúbicas com êsses pontos bases. Designando por $k_1, k_2, \ldots k_7$ as suas ordens, temos

$$\sum_{l=1}^{7} k_l = 3m - 3;$$

por outro lado para as cúbicas determinadas pelos mesmos pontos com um ponto duplo num dêles, será

$$k_i + \sum_{l=1}^{7} k_l \leq 3m \quad (i = 1, 2, \ldots 7).$$

Destas relações deduz-se $m \leq 8$ e $k_i \leq 3$, sendo $i = 1, 2, \ldots 7$, isto é a involução não pode ter ordem superior a oito, nem pontos fundamentais de ordem superior a três.

Se um dos pontos fôr simples, por exemplo $k_7 = 1$, e a recta fundamental respectiva passar por êle, a involução é doutro tipo, em virtude do n.º 44. Se a recta é a que une os pontos fundamentais de ordem k_2 e k_3, transformando o plano noutro por uma transformação quadrática, com os pontos fundamentais nestes e noutro de ordem k_1 obtem-se uma involução equivalente, cuja ordem

$$m' = m - 4k_1 + \alpha_{11} + 2\alpha_{12} + 2\alpha_{13}$$

se deduz seguindo um raciocínio bem conhecido. Como é $k_1 > \alpha_{11}$ e $k_1 \geq \alpha_{12} + \alpha_{13}$, vem $m' < m - k_1$, e a involução é redutível.

Se a involução tem um ponto fundamental duplo ($k_7 = 2$) e a cónica correspondente passa por êle, atendendo ao n.º 44, a involução tem um feixe invariante de curvas unicursais, caso já estudado.

Se ela passa pelos pontos de ordem $k_1, k_2, \ldots k_5$ temos

$$\sum_{l=1}^{5} \alpha_{il} = 2k \quad (i = 1, 2, \ldots 5),$$

de modo que transformando o plano e pondo os pontos fundamentais nos três primeiros dêstes pontos, a ordem da involução equivalente que se obtêm é

$$m' = \alpha_{44} + \alpha_{55} + 2\alpha_{45};$$

mas $\alpha_{44} + \alpha_{45} \leq k_4$ e $\alpha_{55} + \alpha_{45} \leq k_5$; logo $m' \leq k_4 + k_5$. Se $k_4 + k_5$ fôsse igual a m, a recta que unia êsses pontos era fundamental e estariamos no caso anterior; logo é sempre $m' < m$.

Resta considerar o caso $m = 8$, $k_i = 3$. As curvas fundamentais serão cúbicas, que devem ser determinadas pelos pontos fundamentais; logo devem passar por todos e ter um ponto duplo num dêles.

Se êste ponto não fôsse o correspondente, a involução conteria um feixe invariante de curvas unicursais (n.º 44) e seria redutível.

Resta tomar como tipo a involução de 8.ª ordem com sete pontos fundamentais triplos, tendo cada curva fundamental um ponto duplo no respectivo ponto fundamental.

A jacobiana da rêde de cúbicas é uma curva de 6.ª ordem com pontos duplos nos sete pontos fundamentais e é a curva dupla da involução.

Esta involução foi descoberta por Geiser, a propósito dum problêma diferente [1]. Designá-la hemos pelo seu nome.

74. *Tipo com oito pontos fundamentais.* Esta involução conterá como invariante o sistema de curvas de 6.ª ordem com êsses pontos bases duplos. Êstes pontos, àlêm de distintos, não podem estar três em linha recta, seis não podem formar um hexágono de Pascal, nem passar por êles uma cúbica com um ponto duplo num dêles, aliás o sistêma seria redutível, o que nos levaria aos casos anteriores.

Designando por $k_1, k_2, \ldots k_8$ as ordens dêsses pontos temos

$$\sum_{l=1}^{8} 2\, k_l = 3\, m - 3\,;$$

para as curvas de 6.ª ordem tendo a mais um ponto triplo num dêles ter-se ha

$$k_i + \sum_{l=}^{8} 2\, k_l \leq 3\, m \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ 8).$$

---

[1] Geiser, *Uber zwei geometrische Probleme*, J. de Crelle T. 67 — p. 78 a 89.

Destas relações vem $m \leq 17$ e $k_i \leq 6$ sendo $i=1, 2 \ldots 8$.

Se a involução contêm um ponto fundamental simples ou duplo, é redutível, em virtnde do que dissemos no número anterior.

Se têm um ponto triplo ($k_8=3$), e a cúbica correspondente passa por êle, a involução não oferece interesse em virtude do n.º 44.

Suponhamos, então, que passa pelos outros sete pontos, com um ponto duplo no de ordem k_1 temos

$$k_1+\sum_{l=2}^{7} k_l=3\,m \quad \text{e} \quad \alpha_{1i}+\sum_{l=1}^{7} \alpha_{il}=3\,k_i \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

A cónica determinada pelos pontos de ordem k_1, k_4, k_5, k_6, k_7, não é fundamental, aliás estariamos no caso anterior; se designarmos por ε a ordem da curva conjugada e por ε_i o número de ramos com que esta passa pelo ponto de ordem k_i, temos

$$\Sigma\, k_l=2m-\varepsilon \quad (l=1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$$

$$\Sigma\, \alpha_{il}=2k_i-\varepsilon_i \quad (l=1,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7;\ i=1,\ 2,\ 3)$$

Destas relações vem

$$k_1+k_2+k_3=m+\varepsilon \quad \text{e} \quad \sum_{l=2}^{3} \alpha_{il}=k_i-\varepsilon_i \quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

Transformando o plano noutro, com os pontos fundamentais nos pontos de ordem k_1, k_2, k_3 vem uma involução de ordem $m'=m-(3\,\varepsilon-\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)<m$, que é inferior.

Se a involução contivesse um ponto fundamental de 4.ª ordem, a curva correspondente não podia ter um ponto triplo porque não ficaria determinada pelos oito pontos (n.º 21); logo deve ter tres pontos duplos e cinco simples; quer tenha no ponto correspondente um ponto simples ou duplo, estamos reduzidos a casos estudados, em virtude do n.º 44. O mesmo, se houvesse um ponto quíntuplo.

Resta o caso de serem sêxtuplos todos os pontos fundamentais e portanto $m = 17$. As curvas fundamentais são curvas de 6.ª ordem com um ponto triplo e sete duplos; o ponto triplo deve estar sôbre o ponto correspondente, aliás teriamos um caso já estudado.

Esta involução constitue um novo tipo, descoberto por BERTINI. Designá-la hemos pelo seu nome.

75. A discussão dêste § resume-se no seguinte:

TEOREMA. — *Qualquer involução do grupo cremoniano no plano pode deduzir-se, por meio duma transformação do mesmo grupo, duma das seguintes involuções tipos:*

I) *homologia harmónica.*

II) *involução perspectiva de Jonquières de ordem* m *com uma curva dupla de género $m-2$.*

III) *involução de oitava ordem com sete pontos fundamentais triplos* (GEISER).

IV) *involução de décima sétima ordem com oito pontos fundamentais sêxtuplos* (BERTINI).

76. — Ao teorema anterior pode dar-se outra forma baseada no que expuzemos no n.º 57.

O segundo tipo tem còmo invariante um sistêma ∞^3 $|C^m|$ de ordem e grau m, com um ponto base de ordem $m-2$ no centro da involução, com pontos bases simples sôbre os $2m-2$ pontos fundamentais simples e mais $m-2$ pontos bases simplês em quaisquer pontos duplos da involução. Estabelecendo uma correspondência projectiva entre as suas curvas e os planos do espaço, a involução pode considerar-se imagem duma homografia involutiva entre os pontos duma superficie S^m. A curva C^{m-1} que tem no centro da involução um ponto múltiplo de ordem $m-3$ e passa simplesmente pelos $3m-4$ pontos bases simples de $|C^m|$ fica bem determinada. Qualquer curva dêste sistema ∞^3 encontra-a em $m-2$ pontos variáveis, tais que um determina todos os outros. Com efeito, se dois dêles fôssem arbitrarios, um terceiro (destinado a fixar uma curva de $|C^m|$) determinaria uma recta conduzida pelo centro da involução, que juntamente com C^{m-1} constituìria a curva do sistema obrigada a passar por êles. Por outras palavras, todas as curvas de $|C^m|$ que passam por um ponto de C^{m-1}, passam ainda por outros $m-3$, e formam uma rede; os planos homólogos do espaço formam, portanto, uma estrêla com o centro um ponto de S^m, o qual, tendo por imagem $m-2$ pontos do plano da involução, é um ponto múltiplo desta ordem.

O seu logar é uma recta múltipla de ordem $m-2$, existente na superficie. Esta não pode conter outra linha múltipla, porque as suas secções planas, tendo por imagens as curvas de género $m-2$ de $|C^m|$, devem possuir o mesmo género.

A involução de Geiser tem como invariante um sistêma ∞^6 de curvas de 6.ª ordem, com pontos bases duplos nos seus sete pontos fundamentais; mas as curvas dêste sistêma, que passam simplesmente por três pontos duplos da involução, D_1, D_2 e D_3, formam um sistêma ∞^3 de género três e grau cinco, tambêm invariante. Estabelecendo a conhecida correspondência entre as suas curvas e os planos do espaço, obtem-se uma superfície de 5.ª ordem com cincoenta e seis cónicas, correspondentes aos sete pontos fundamentais, às vinte e uma rectas de união dêstes, às vinte uma cónicas determinadas por cinco dêles, e às sete cúbicas que passam pelos mesmos pontos com um ponto duplo num dêles. Com efeito, qualquer destas linhas é encontrada em dois pontos variáveis pelas curvas do sistêma ∞^3 $|C^6|$.

A rede das cúbicas que passam por êsses sete pontos é representada por um sistêma ∞^2 de curvas de 4.ª ordem e género um sôbre a superfície.

Qualquer das três cúbicas que passam pelos sete pontos fundamentais e por dois dos pontos D, são encontradas pelas C^6 em dois pontos, um dos quais, apenas, é arbitrário, como se mostraria fácilmente, seguindo um raciocínio idêntico ao de há pouco. Essas curvas serão portanto representadas por três rectas duplas sôbre a superfície.

Como aquelas cúbicas se encontram em três pontos fóra dos pontos bases do sistêma $|C^6|$, tais que as curvas dêste, que passam por um dêles, passam necessáriamente pelos outros, os planos homólogos formam uma estrêla, cujo centro deve estar simultâneamente sôbre as rectas duplas. Logo estas são concorrentes.

A superfície não pode conter outras linhas múltiplas, porque as suas secções planas deverão ser de 5.ª ordem e género três.

Na involução de Bertini, as curvas de 9.ª ordem, com pontos triplos nos oito pontos fundamentais, constituem um sistema linear ∞^6 invoriante. As curvas dêste sistêma, que passam com dois ramos por um ponto duplo D da involução, formam nm sistêma linear ∞^3 de género 3 e gráu 5. Procedendo como nos casos anteriores, obtêm-se uma superfície de 5.ª ordem.

À cúbica que passa pelos pontos fundamentais e por D corresponde uma recta dupla sôbre a superfície.

Logo:

Teorema. — *Qualquer involução do grupo cremoniano* *no plano pode considerar-se imagem duma homografia involutiva entre os pontos dum plano, ou duma superficie de ordem* m *com uma recta múltipla de ordem* m — 2, *ou duma superficie de 5.ª ordem com tres rectas duplas concorrentes ou duma superficie de 5.ª ordem com uma recta dupla.*

ÍNDICE