MANUEL ESPARTEIRO

ELEMENTOS DA TEORIA DAS CÚBICAS

COIMBRA
TIPOGRAFIA DA "ATLÂNTIDA"
1929


ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

ELEMENTOS
DA
TEORIA DAS CÚBICAS

Dissertação

MANUEL ESPARTEIRO

ELEMENTOS DA TEORIA DAS CÚBICAS

COIMBRA
TIPOGRAFIA DA "ATLÂNTIDA"
1929

Comp. e Imp. nas oficinas
da "Atlântida,, — R. Ferreira
Borges, 103 a 111 — Coimbra

DISSERTAÇÃO PARA CONCURSO AO MAGISTÉRIO DA FACULDADE DE SCIÊNCIAS.

PREFÁCIO

O presente volume é, sobretudo, a explanação de meia dúzia de lições sôbre as cúbicas planas. Por êste motivo, só excepcionalmente — a título de complemento — estudámos uma ou outra proposição menos elementar.

Os resultados, alheios na sua quási totalidade, são na maior parte do sábio Professor Gomes Teixeira.

Para que a leitura do livro se faça correntemente, sem consultas aos tratados de Geometria, resumiram-se na Introdução aquelas propriedades gerais das curvas algébricas que importava recordar.

Coimbra, Outubro de 1929.

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

Curvas planas algébricas

§ 1.º

Equação de uma curva

1. Os diferentes pontos de uma curva são identificados pelas suas coordenadas que, como é evidente, não podem tomar valores arbitrários e satisfazem portanto a uma relação

$$(1) \qquad f(x, y) = o$$

que se chamará *equação da curva* se, reciprocamente, só fôr satisfeita pelas coordenadas dos pontos desta linha.

A curva diz-se algébrica quando o primeiro membro de (1) é um polinómio inteiro em x e y; diz-se transcendente no caso contrário.

O grau do polinómio chama-se grau ou *ordem* da curva.

2. Muitas vezes é mais cómodo fazer corresponder a cada ponto da curva um número t, denominado *parâmetro*. As coordenadas dos pontos da curva são nesse caso expressas em função de t:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t).$$

Estas equações são susceptíveis de tomar uma infinidade de formas, visto a correspondência entre um ponto da curva e o parâmetro t ser arbitrária.

Assim, dada uma função qualquer $\pi(x, y)$, sujeita a certas condições estudadas na teoria das funções implícitas, as equações paramétricas obtêm-se resolvendo o sistema

$$\pi(x, y) = t,$$
$$f(x, y) = o.$$

Como caso particular, o parâmetro pode coincidir com x ou y e a equação da curva assume então qualquer das formas

$$x = g(y)$$

ou

$$y = f(x).$$

3. Certos problemas da geometria analítica têm uma resolução mais simples com o emprêgo das coordenadas homogéneas. É por isso que nós usaremos, quando o julgarmos conveniente, a equação da curva neste sistema de coordenadas.

Como sabemos, aos três números X, Y e Z, coordenadas homogéneas de um ponto, correspondem como coordenadas cartesianas dêsse mesmo ponto os números

$$x = \frac{X}{Z} \text{ e } y = \frac{Y}{Z}.$$

A equação $f(x, y) = o$ escreve-se pois em coordenadas homogéneas

$$f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = o;$$

no caso das curvas algébricas, será, em particular,

$$Z^n f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = \varphi(X, Y, Z) = o,$$

designando por φ um polinómio homogéneo com o mesmo gráu n do polinómio f.

§ 2.º

Algumas propriedades das curvas algébricas

4. A equação geral de uma curva de grau m,

$$f(x, y) = a + b\,x + c\,y + d\,x^2 + e\,x\,y + f\,y^2 + \\ + \ldots + k\,x^m + l\,x^{m-1} + \ldots + s\,y^m = o,$$

mostra-nos que o número dos seus têrmos é

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

e que o número das constantes arbitrárias é

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1=\frac{m(m+3)}{2}.$$

A determinação de uma curva algébrica de grau m exige, pois, em geral, o conhecimento de $\frac{m(m+3)}{2}$ dos seus pontos, visto cada um dêles dar origem a uma única relação linear entre os coeficientes a, b, ..., s.

Substituindo na equação $f(x, y)=o$ x e y pelas coordenadas dêsses pontos e resolvendo o sistema das $\frac{m(m+3)}{2}$ equações assim obtidas, as constantes a, b, ..., s ficam todas determinadas em função de uma delas.

Assim, uma cónica é determinada por 5 pontos, uma cúbica por 9, etc.

5. *Teorema. Duas curvas de ordem* m *e* n *cortam-se em* mn *pontos, quando muito.*

É uma conseqüência do teorema de Bezout, segundo o qual duas equações de grau m e n, respectivamente, admitem apenas mn soluções comuns (1).

§ 3.º

Centro e diâmetro

6. Centro de uma curva é qualquer ponto de simetria para essa curva.

(1) Incluindo as raízes imaginárias e infinitas.

É evidente que se o centro coincide com a origem das coordenadas, a equação da curva não se altera pela mudança de x e y em $-x$ e $-y$. Uma curva algébrica com centro na origem só tem, pois, têrmos de grau par ou só de grau ímpar, faltando portanto neste caso o têrmo independente.

A posição do centro de uma curva determina-se como nas cónicas: transporta-se a origem das coordenadas para o ponto (x', y') e exprime-se em seguida que a nova origem é um ponto de simetria. Em geral uma curva não tem centro.

7. Os meios das cordas paralelas a uma dada direcção constituem uma linha chamada diâmetro: o *diâmetro conjugado* com essa direcção.

O centro, quando existe, é comum a todos os diâmetros.

§ 4.°

Contacto de curvas

8. Dadas duas curvas

$$y = f(x), y = F(x),$$

com o ponto comum (x', y') no qual as primeiras derivadas são iguais, escrevamos

$$\mathrm{F}(x') - f(x'+h) = \frac{h^2}{2!}\left[\mathrm{F}''(x') - f''(x')\right] + \dots$$

$$+ \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\left[\mathrm{F}^{(p+1)}(x') - f^{(p+1)}(x')\right] + \dots$$

Esta diferença, que não muda de sinal com h, anula-se duas vezes para $h=o$, visto o segundo membro conter o factor h^2. As curvas correspondentes tocam-se no ponto (x', y'), mas não se atravessam. Diz-se, neste caso, que elas têm um contacto de primeira ordem ou dois pontos confundidos em (x', y').

Mais geralmente, quando seja

$$F'(x')=f'(x'), \; F''(x')=f''(x'), \ldots,$$

$$F^{(p)}(x')=f^{(p)}(x'), \; F^{(p+1)}(x') \lesseqgtr f^{(p+1)}(x'),$$

virá

$$F(x'+h)-f(x'+h)=$$

$$=\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\left[F^{(p+1)}(x')-f^{(p+1)}(x')\right]+\ldots,$$

e as curvas têm um contacto de ordem p, ou $p+1$ pontos confundidos em (x', y'), cortando-se, se p é par, e tocando-se sem se cortarem, se p é ímpar.

9. Uma curva fica toda para o mesmo lado da sua tangente nas vizinhanças do ponto de tangência quando o contacto é de ordem ímpar, isto é, quando a tangente tem com ela um número par de pontos confundidos em (x', y'); é atravessada pela tangente quando o contacto é de ordem par.

§ 5.º

Classe de uma curva

10. Chama-se classe de uma curva ao número das tangentes que se lhe podem tirar por um ponto do seu plano.

As coordenadas dos pontos comuns à curva

$$f(x, y, z) = o$$

e à recta

$$\frac{x - x'}{\alpha} = \frac{y - y'}{\beta} = \frac{z - z'}{\gamma} = \rho,$$

tirada pelo ponto (x', y', z') desta curva, obtêm-se resolvendo a quação em ρ

$$f(x' + \alpha\rho, y' + \beta\rho, z' + \gamma\rho) =$$
$$= \rho(\alpha f'_{x'} + f'_{y'} + \gamma f'_{z'}) + \frac{\rho^2}{2!}(\alpha f'_{x'} + \beta f'_{y'} + \gamma f'_{z'})^{(2)} + \ldots = o.$$

A condição

$$(2) \qquad \alpha f'_{x'} + \beta f_{y'} + \gamma f'_{z'} = o \text{ (1)}$$

significa que a recta considerada encontra a curva em dois pontos confundidos em (x', y', z'), visto o segundo membro da equação anterior conter o factor ρ^2.

---

(1) O símbolo $f'_{x'}$ substitúi por comodidade $f'_{x'}(x', y', z')$.

A eliminação de α, β γ entre (2) e as equações da recta dá-nos a equação da tangente no ponto (x', y', z')

$$(x-x')\,f'_{x'}+(y-y')\,f'_{y'}+(z-z')\,f'_{z'}=0.$$

Como, porém, em virtude do teorema de Euler, seja

$$x'\,f'_{x'}+y'\,f'_{y'}+z'\,f'_{z'}=m\,f\,(x', y', z'),$$

esta equação escreve-se mais simplesmente

$$x\,f'_{x'}+y\,f'_{y'}+z\,f'_{z'}=0.$$

O número m, como é sabido, designa o grau de homogeneidade do polinómio $f\,(x, y, z)$.

Toda a recta tangente à curva no ponto (x'', y'', z'') e que passe pelo ponto (x', y', z') tem por equação

$$x\,f'_{x''}+y\,f'_{y''}+z\,f'_{z''}=0,$$

desde que seja

$$x'\,f'_{x''}+y'\,f'_{y''}+z'\,f'_{z''}=0.$$

As coordenadas dos pontos de tangência das rectas que contêm o ponto (x', y', z') satisfazem pois ao sistema

$$f\,(x, y, z)=0,$$
$$x'\,f'_{x}+y'\,f'_{y}+z'\,f'_{z}=0,$$

cujas soluções são, pelo teorema de Bezout, em número de $m\,(m-1)$; logo:

Teorema: Por um ponto (x', y', z') *do plano de uma curva podem tirar-se em geral* $m(m-1)$ *tangentes à curva.*

§ 6.º

Polos e polares

11. A recta definida pelos pontos A (x_0, y_0, z_0) e M (x, y, z) corta a curva $f(x, y, z) = o$ num certo número de pontos cujas coordenadas satisfazem à equação

$$(3) \qquad f(x_0 + \lambda x, y_0 + \lambda y, z_0 + \lambda z) =$$
$$= f(x_0, y_0, z_0) + \lambda (x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0}) + \ldots + \lambda^m f(x, y, z) = o.$$

Igualando sucessivamente a zero os coeficientes de λ, $\lambda^2 \ldots$, λ^{m-1} obtêm-se as *polares* da curva dada em relação ao ponto A.

Assim, a polar de ordem $m - 1$ ou polar principal é definida pela equação

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = o$$

e a polar de primeira ordem ou polar rectilínea é

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = o$$

12. Póde afirmar-se que a polar rectilínea é o lugar geométrico dos pontos M para os quais é nula a soma dos produtos distintos de $m - 1$ factores:

$$\frac{P_1 A}{P_1 M} \cdot \frac{P_2 A}{P_2 M} \cdots \frac{P_{m-1} A}{P_{m-1} M} + \cdots + \frac{P_k A}{P_k M} \cdots \frac{P_{k+m-2} A}{P_{k+m-2} M},$$

representando dum modo geral P_i um dos pontos onde a recta A M corta a curva.

De facto, os m pontos P, P_2,... P_m onde a recta A M corta a curva são fixados pelas raízes da equação (3) em λ. Ora, como sabemos, uma qualquer dessas raízes λ_i é igual ao produto de

$$\frac{P_i A}{P_i M}$$

por um factor constante; e, por outro lado, a soma dos produtos das raízes da equação (3), tomadas $m-1$ a $m-1$, é igual a

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0},$$

coeficiente do têrmo do primeiro grau em λ.

Dividindo essa soma de produtos pelo produto das m raízes, também se pode dizer que a polar rectilínea é o lugar geométrico dos pontos M para os quais a soma dos inversos das raízes λ_i é nula:

$$\frac{P_1 M}{P_1 A} + \frac{P_2 M}{P_2 A} + \ldots + \frac{P_m M}{P_m A} = o.$$

Substituindo nesta equação P_i M por A M — A P_i, resulta

$$\frac{m}{A M} = \frac{1}{A P_1} + \frac{1}{A P_2} + \ldots + \frac{1}{A P_m}.$$

Diz-se que M é conjugado harmónico de A em relação aos pontos de intersecção da recta A M com a curva; logo:

A *polar rectilínea* de *A é o lugar dos conjugados harmónicos do ponto* A *em relação à curva e por isso se chama também polar harmónica do ponto A (polo).*

13. *Teorema. As polares de um ponto da curva tocam a curva nêsse ponto.*

A equação $f(x, y, z) = o$ da curva referida a êsse ponto é

$$\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) z + \ldots + \varphi_1(x, y) z^{m-1} = o,$$

onde $\varphi_i(x, y)$ designa a soma dos têrmos de grau $m - i$ em x e y.

Nas equações das polares em relação ao ponto (o, o, z), só entra a derivada em ordem a z e em todas elas aparece o polinómio do primeiro grau $\varphi_1(x, y)$, que igualado a zero representa a equação da tangente naquele ponto a todas as curvas. O teorema é pois verdadeiro.

§ 7.°
Assíntotas

14. *Definições.* Diz-se que uma dada curva tem um ramo infinito quando sôbre êsse ramo a distância de dois pontos pode crescer além de todo o limite; e chama-se assíntota de um ramo infinito de uma curva a uma recta da qual se aproxima indefinidamente o ponto que descreve êsse ramo infinito.

15. Determinemos em primeiro lugar as equações das assíntotas paralelas ao eixo das ordenadas.

Se a recta $x = a$ é assíntota, a coordenada y do ponto variável M aumenta indefinidamente quando êsse ponto descreve o ramo infinito aproximando-se da assíntota, isto é, y aumenta indefinidamente quando x tende para a.

A equação da curva ordenada segundo as pontências decrescentes de y:

$$y^k F_0(x) + y^{k-1} F_1(x) + \ldots + F_k(x) = o$$

deve dar valores infinitos para y quando se substituir x por a; logo:

As raízes da equação

$$F_0(x) = o$$

dão as abcissas das assíntotas paralelas ao eixo das ordenadas.

16. Passemos agora ao estudo das assíntotas não paralelas a êste eixo.

Teorema. Se a curva $y = f(x)$ *admite a assíntota* $y = cx + d$, *será*

$$c = \lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } d = \lim_{x=\infty} \left[f(x) - c\,x \right].$$

A distância $\overline{MP}$ de um ponto M da curva à assíntota:

$$MP = \frac{[f(x) - c\,x - d] \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 + c^2 + 2\,c \cos \theta}},$$

tende para zero quando e só quando o mesmo acontece à expressão

$$f(x) - c\,x - d.$$

A diferença $v = f(x) - c\,x - d$ deve pois tender para zero quando x aumenta infinitamente, motivo por que a igualdade

$$\frac{f(x)}{x} = c + \frac{d + v}{x}$$

nos dá

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = c + \lim_{x=\infty} \frac{d + v}{x} = c$$

e

$$\lim_{x=\infty} [f(x) - c] = \lim_{x=\infty} (d + v) = d.$$

Recíprocamente, quando

$$\lim_{x=\infty} [f(x) - c\,x] = d$$

é também

$$\lim_{x=\infty} (f(x) - c\,x - d) = o$$

e portanto a distância $\overline{\text{M P}}$ tende para zero quando x tende para infinito.

17. Pondo $y = t\,x$ na equação da curva

$$\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + \varphi_1(x, y) + \varphi_0(x, y) = o$$

e designando $\varphi_k(1, t)$ por $f_k(t)$, teremos, depois de dividir por $x,^m$

$$f_m(t)+\frac{1}{x}f_{m-1}(t)+\ldots+\frac{1}{x^m}f_0(t)=0$$

Fazendo tender x para infinito obteremos a equação

$$f_m(t)=0,$$

cujas raízes

$$t=\lim_{x=\infty}\frac{y}{x}$$

nos dão os coeficientes angulares das assíntotas.

Seja c uma destas raízes e façamos

$$y=c\,x+\partial$$

ou

$$t=\frac{y}{x}=c+\frac{\partial}{x}$$

Substituindo êste valor de t na equação da curva, virá

$$f_m\left(c+\frac{\partial}{x}\right)+\frac{1}{x}f_{m-1}\left(c+\frac{\partial}{x}\right)+$$
$$+\frac{1}{x^2}f'_{m-2}\left(c+\frac{\partial}{x}\right)+\ldots=0$$

ou

$$f_m(c)+\frac{\partial}{x}f'_m(c)+\frac{\partial^2}{2x^2}f''(c)+\frac{1}{x}f_{m-1}(c)+$$
$$+\frac{\partial}{x^2}f'_{m-1}(c)+\frac{\partial^2}{2x^3}f''_{m-1}(c)+\frac{1}{x}f_{m-2}(c)+\ldots=0$$

ou ainda

$$\delta f'_m(c)+f_{m-1}(c)+\frac{1}{x}\left[\frac{\delta^2}{2}f''_m(c)+\delta f'_{m-1}(c)+f_{m-2}(c)\right] + \ldots = o$$

Tendendo $\frac{1}{x}$ para zero, a equação anterior vem a reduzir-se a

$$d\, f'_m(c)+f_{m-1}(c)=o$$

e a equação da assíntota será,

$$y=c\,x+\frac{f_{m-1}(c)}{f'_m(c)}.$$

Se $f'_m(c)=o$, a ordenada na origem é infinita e a assíntota é projectada para o infinito. O ramo correspondente da curva chama-se ramo paralólico.

No caso particular de ser $f_m(c)=f_{m-1}(c)=o$, teremos as duas assíntotas

$$y=c\,x+d',$$
$$y=c\,x+d'',$$

representando d' e d'' as raízes da equação do 2.º grau:

$$\frac{\delta^2}{2}f''_m(c)+\delta f'_{m-1}(c)+f_{m-2}(c)=o$$

18. A equação que dá as abcissas dos pontos de intersecção da assíntota $y = c\,x + \delta$ com a curva considerada,

$$f_m(c) + \frac{1}{x}\left[\delta f'_m(c) + f_{m-1}(c)\right] +$$
$$+ \frac{1}{x^2}\left[\frac{\delta^2}{2} f''_m(c) + \delta f'_{m-1}(c) + f_{m-2}(c)\right] + \ldots = o,$$

indica que, por ser $f_m(c) = o$ e $\delta f'_m(c) + f_{m-1}(c) = o$, aquela recta encontra a curva em dois ou mais pontos situados a distância infinita.

§ 8.º

Singularidades de uma curva

19. *Definições*. Um ponto M de uma curva é ponto ordinário se a curva tem nele um contacto de primeira ordem com a sua tangente; e é um ponto de inflexão quando êsse contacto fôr, pelo menos, de segunda ordem. Neste caso, a curva e a sua tangente têm três pontos comuns confundidos em M. A tangente atravessa a curva.

São singulares todos os pontos não ordinários.

20. O ponto M (x, y, z) é um ponto múltiplo de ordem p se as suas coordenadas anulam as derivadas parciais da equação da curva até à ordem $p - 1$ e não anulam, pelo menos, uma das derivadas parciais de ordem p.

Nesta hipótese, uma recta qualquer A M corta a curva em p pontos confundidos em M e ainda em $m - p$ outros pontos, como é fácil de vêr, supondo, por comodidade, que se trata dum ponto duplo.

Representando por (x, y, z) e (x', y', z') as coordenadas dos pontos M e A, as coordenadas dos pontos de intersecção da recta A M com a curva são dadas pela equação

$$f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') = f(x, y, z) +$$
$$+\lambda(x' f'_x + y' f'_y + z' f'_z) + \frac{\lambda^2}{2!}(x' f'_x + y' f'_y + z f'_z)^{(2)} +$$
$$+ \ldots + \lambda^m f(x', y', z') = o.$$

Como M é um ponto duplo, será

$$f'_x = f'_y = f'_z = o$$

e, em consequência, teremos

$$f(x+\lambda x', y+\lambda y', z+\lambda z') =$$
$$= \frac{\lambda^2}{2!}(x' f'_x + y' f'_y + z' f'_z)^{(2)} + \ldots + \lambda^m f(x', y', z') = o.$$

A presença do factor λ^2 no segundo membro mostra que a recta A M corta a curva em dois pontos confundidos em M.

21. Geométricamente, a intersecção de dois ramos de uma curva produz um ponto duplo com duas tangentes distintas ou coincidentes.

Um ponto duplo com duas tangentes distintas chama-se *nódo* ou ponto *nodal;* ponto *de reversão,* se as tangentes são coincidentes ([1]).

([1]) Num ponto duplo isolado uma curva admite duas tangentes imaginárias.

Chama-se tangente dupla a uma recta tal que por qualquer dos seus pontos se não podem tirar mais de $n-2$ tangentes à curva (suposta de classe n).

§ 9.º

Determinação dos pontos de inflexão

22. Entre os conhecidos processos de determinação dos pontos de inflexão, seguiremos aquele que mais proveitosos ensinamentos oferece nesta exposição.

Num ponto de inflexão, uma curva, como vimos no n.º 19, tem um contacto de segunda ordem com a sua tangente. Deve ser, pois,

$$y''=0,$$

visto que são nulas as derivadas da função

$$y=a\,x+b$$

a partir da de segunda ordem, e, por conseguinte, será também

$$f'^2_y\cdot f''_{x^2}-2\,f''_{x,y}\cdot f'_x\cdot f'_y+f'^2_x\cdot f''_{y^2}=0$$

ou

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{x,y} & f'_x \\ f''_{x,y} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Por outro lado, supondo a equação da curva sob a forma

$$f(x, y, z) = o$$

e tendo em atenção as conhecidas igualdades:

$$\begin{aligned}
x f'_x + y f'_y + z f'_z &= m f(x, y, z) = o,\\
x f''_{x^2} + y f''_{x y} + z f''_{x,z} &= (m-1) f'_x (x, y, z),\\
x f''_{x,y} + y f''_{y^2} + z f''_{y,z} &= (m-1) f'_y (x, y, z),\\
x f''_{x,z} + y f''_{y,z} + z f''_{z^2} &= (m-1) f'_z (x, y, z),
\end{aligned}$$

pode dar-se a êste resultado uma forma mais simétrica.

Multiplicando as colunas do determinante anterior por x, y e $m-1$, respectivamente, subtraindo as duas primeiras da última e renovando estas mesmas operações sôbre as linhas do determinante obtido, virá

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{x,y} & f''_{x,z} \\ f''_{x,y} & f''_{y^2} & f''_{y,z} \\ f''_{x,z} & f''_{y,z} & f''_{z^2} \end{vmatrix} = o.$$

A curva representada por esta equação é de grau $3(m-2)$ e chama-se *hesseana*.

O número de pontos de inflexão de uma curva de ordem m não pode pois exceder $3m(m-2)$, visto o número de soluções comuns à hesseana e à curva ser exactamente $3m(m-2)$

Uma curva de terceira ordem possúi pois nove pontos de inflexão.

A equação (4) indica que a hesseana passa pelos pontos duplos da curva, porque as condições

$$f'_x = o, f'_y = o$$

dão uma linha de zeros para aquele determinante.

23. Demonstra-se que os pontos duplos e de reversão da curva são duplos e triplos, respectivamente, da hesseana. As duas curvas são tangentes no ponto duplo e dois ramos da hesseana admitem por tangente no ponto triplo a tangente de reversão da curva proposta.

24. Uma curva tem um número limitado de pontos duplos.

De facto, uma curva não pode admitir um ponto de ordem de multiplicidade superior a $m-1$ porque, no caso contrário, a sua equação referida a êsse ponto seria a equação homogénea

$$\varphi_m(x, y) = o$$

que representa m rectas concorrentes na origem das coordenadas.

Ora, um ponto de ordem $m-1$ equivale a $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ pontos duplos; logo:

Teorema. O número máximo de pontos duplos de uma curva de ordem m *é* $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

Corolário. As curvas de segunda ordem não têm pontos duplos e as de terceira ordem só podem conter um [1], quando muito.

---

[1] O corolário não é verdadeiro no caso de degenerescência.

É notável — como mostrou Plücker — a influência dos pontos múltiplos e de reversão na apreciação da classe das curvas, segundo veremos no parágrafo imediato.

§ 10.º

Fórmulas de Plücker

25. Como já dissemos, a classe de uma curva é o número $m(m-1)$ das soluções comuns à curva e à sua primeira polar, a qual passa pelos pontos duplos da curva dada. Na avaliação da classe, cada ponto duplo deve pois ser contado por dois pontos simples. A tangência da primeira polar à curva nos pontos de reversão implica a existência de três pontos confundidos e portanto a redução de três unidades na classe da curva por cada um daqueles pontos.

Logo, designando δ e r os números de pontos duplos e de reversão, respectivamente, a classe da curva é dada pela fórmula de Plücker:

$$n = m(m-1) - 2\delta - 3r.$$

26. Plücker determinou também uma fórmula para calcular o número de pontos de inflexão de uma curva. A hesseana tem os pontos duplos da curva como pontos duplos e é tangente [1] á curva nêsses pontos. Logo, cada ponto duplo implica a diminuição de seis unidades no número $3m(m-2)$ dos pontos comuns à curva proposta e à sua hesseana, visto estas curvas

---

[1] Carnoy, *Cours de Gémétrie Analytique.*

terem dois pontos duplos confundidos e ainda outros dois pontos simples por serem tangentes: ao todo seis pontos comuns.

A existência de um ponto de reversão arrasta a diminuição de oito unidades ao número $3\,m\,(m-2)$, porque êsse ponto é triplo para a hesseana e, além disso, é um ponto de tangência. Logo, representando por δ e r o número dos pontos duplos e de reversão, o número i de pontos de inflexão é

$$i = 3\,m\,(m-2) - 6\,\delta - 8\,r$$

§ 11.º

Curvas unicursais

27. As curvas cujas coordenadas cartesianas se podem exprimir por funções racionais de um parâmetro t,

$$x = \frac{f(t)}{\varphi(t)},$$

$$y = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)},$$

chamam-se curvas unicursais.

Se a cada ponto (x, y) da curva corresponde um só valor para t, diz-se que a representação é normal; ela é imprópria no caso contrário.

28. *Teorema. Se a representação é normal e* m *é o mais elevado dos graus dos polinómios* $f(t)$, $f_1(t)$ *e* $\varphi(t)$, *a equação da curva em coordenadas cartesianas é de grau* m.

Com efeito, nos pontos comuns à recta

$$a\,x+b\,y+c=o$$

e à curva proposta deve ter-se

$$a\,f(t)+b\,f_1(t)+c\,\varphi(t)=o$$

e esta equação é de grau m, o que demonstra o teorema.

Demonstra-se que estas curvas admitem o número máximo $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ de pontos duplos.

§ 12.°

FOCOS

29. Chama-se foco de uma curva a um ponto F que é intersecção de duas tangentes tiradas pelos *pontos circulares* $(1, i, o)$ e $(1, -i, o)$.

Também se chama foco a um ponto pelo qual se podem conduzir duas tangentes de coeficientes angulares $+i$ e $-i$.

Laguerre classificou os focos em ordinários e singulares, conforme os pontos de contacto das tangentes estão situadas a distância finita ou infinita.

Da primeira definição de foco conclúi-se que uma curva de classe n tem em geral n^2 focos, pontos de intersecção das n tangentes do ponto I $(1, i, o)$ com as tangentes do ponto Y $(1-i, o)$.

30. Vejamos como se determinam as coordenadas dos focos.

Se as rectas

$$y \pm i\, x + C = o$$

são tangentes à curva, são focos os seus pontos de intersecção. Logo, comparando as equações anteriores com a da tangente

$$x f'_x + y f'_y + z f'_z = o,$$

temos as condições

$$\frac{f'_x}{\pm i} = \frac{f'_y}{1} = \frac{f'_z}{C},$$

que por eliminação de x, y e z com a equação da curva dão o valor de C.

31. Podemos também determinar as coordenadas (α, β) de um foco, interceptando a curva pelas rectas

$$y - \beta = \pm i\,(x - \alpha).$$

As condições de tangência permitem calcular os valores de α e β.

Do expôsto, resulta que os centros dos círculos bitangentes [1] de raio nulo são focos da curva, pois que da equação do círculo

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = o$$

se tira

$$y - \beta = \pm i\,(x - \alpha).$$

---

[1] Os círculos tangentes a uma curva em dois pontos distintos chamavam-se círculos bitangentes.

§ 13.°

Transformações

32. Diz-se que duas curvas C e C′ são transformadas uma da outra quando aos elementos de qualquer delas correspondem elementos bem determinados da outra.

Os elementos correspondentes chamam-se *homólogos*.

É bem de vêr que uma propriedade conhecida da curva C tem por correspondente uma propriedade verdadeira da curva C′.

Inversamente, se se quer conhecer a veracidade de uma propriedade duvidosa de C, pode recorrer-se ao estudo da propriedade correspondente em qualquer das curvas transformadas.

33. Uma transformação diz-se *pontual* quando a correspondência é feita entre pontos.

Analiticamente, a correspondência pontual contínua é definida pelas equações contínuas

$$X = f(x, y), \quad Y = \varphi(x, y),$$

se designarmos por $m(x, y)$ e $M(X, Y)$ dois pontos homólogos das curvas C e C′.

Uma transformação diz-se de contacto quando duas curvas tangentes num ponto têm por transformadas duas curvas tangentes no ponto correspondente.

Teorema. Toda a transformação pontual é uma transformação de contacto.

Das equações de transformação, tira-se, com efeito, a igualdade

$$\frac{dY}{dX}=\frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}}=\frac{f'_x+f'_y\cdot y'}{f'_x+\varphi'_y\cdot y'},$$

pela qual se vê que se duas curvas C e C' são tangentes num ponto — caso em que são iguais as primeiras derivadas y' — as curvas homólogas são também tangentes no ponto correspondente.

34. Chama-se transformação homográfica à transformação definida pelas igualdades

$$(5)\qquad X=\frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''},\qquad Y=\frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''};$$

ou, em coordenadas homogéneas,

$$X=ax+by+cz,$$
$$Y=a'x+b'y+c'z,$$
$$Z=a''x+b''y+c''z,$$

com

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

A transformação homográfica mais geral depende de 8 parâmetros, razões de 8 dos coeficientes das equações de transformação para o restante.

As coordenadas de dois pontos homólogos determinam entre aqueles parâmetros duas relações e por isso quatro pontos homólogos bastam, em geral, para fixar uma transformação homográfica.

Logo, existe sempre uma transformação homográfica que faz corresponder n *pontos de uma figura a* n *pontos de outra figura dada, contanto que seja* $n \leq 4$.

Das relações de transformação decorrem as seguintes conseqùências.

a) As variáveis x e y podem também exprimir-se em função de X e Y por relações da forma (5).

b) A transformada de uma curva algébrica é uma curva do mesmo grau.

c) A uma recta que corta uma curva em n pontos distintos ou coincidentes corresponde outra recta que corta a curva homóloga em n pontos distintos ou coincidentes.

Conseqùentemente, aos pontos de inflexão de uma curva correspondem também pontos de inflexão na curva homóloga.

35. *Teorema. As transformações homográficas conservam a razão anarmónica entre quatro pontos.*

As coordenadas

$$x+\lambda_i x',\ y+\lambda_i y',\ z+\lambda_i z' \qquad (i=1,2,3,4)$$

de quatro pontos m_i em linha recta têm por correspondentes as coordenadas

$$X+\lambda_i X',\ Y+\lambda_i Y' \text{ e } Z+\lambda_i Z'$$

dos quatro pontos M_i. Ora, como é sabido, tem-se

$$(m_1\, m_2\, m_3\, m_4) = (\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 \lambda_4)$$

e

$$(M_1\, M_2\, M_3\, M_4) = (\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3\, \lambda_4);$$

logo,

$$(m_1\, m_2\, m_3\, m_4) = (M_1\, M_2\, M_3\, M_4).$$

A igualdade entre estas razões anarmónicas é a propriedade fundamental das transformações homográficas.

No estudo destas transformações é basilar o seguinte:

Teorema. Toda a projecção cónica de um plano α sôbre um plano β estabelece entre êsses planos uma correspondência homográfica.

Sejam M_1, M_2, M_3 e M_4 quatro pontos do plano α e m_1, m_2, m_3, e m_4 as suas projecções sôbre o plano β.

Como sabemos, é sempre possível construir uma transformação homográfica que tenha os pontos m_1, m_2, m_3 e m_4 por correspondentes de M_1, M_2, M_3 e M_4.

Tomemos um ponto M qualquer do plano α e o seu correspondente m definido por essa transformação homográfica.

Se M é a intersecção das rectas $M_1\, M_2$ e $M_3\, M_4$, o seu correspondente m e a sua projecção m' coincidem com a intersecção de $m_1\, m_2$ e $m_3\, m_4$, visto que êstes segmentos são as projecções de $M_1\, M_2$ e $M_3\, M_4$.

Designando por P a intersecção de $M_1\, M_2$ com $M_3 M_4$ e supondo que $M_1\, M_2$ contem M, a recta $m_1\, m_2$ contem também m e m', e pela propriedade fundamental das homografias, será

$$(M_1\, M_2\, P\, M) = (m_1\, m_2\, p\, m) = (m_1\, m_2\, p\, m'),$$

onde p diz respeito a intersecção de $m_1\ m_2$ e $m_3\ m_4$; logo, os pontos m e m' coincidem.

Se M está fora das rectas definidas pelos pontos M_1 e M_2, M_3 e M_4, uma recta qualquer que passe por M encontra as rectas $M_1\ M_2$, $M_2\ M_3$, $M_3\ M_4$ e $M_1\ M_4$ nos pontos A_1, A_2, A_3 e A_4, que têm por correspondentes os pontos a_1, a_2, a_3 e a_4.

Será pois

$$(A_1\ A_2\ A_3\ M) = (a_1\ a_2\ a_3\ m) = (a_1\ a_2\ a_3\ m');$$

logo, os pontos m e m' coincidem ainda, ficando assim demonstrado o teorema.

O geometra Chasles ([1]) demonstrou que, reciprocamente, duas figuras homográficas podem colocar-se em posição de perspectividade. É por isso que as propriedades conservadas nas transformações homográficas se chamam *propriedades projectivas*.

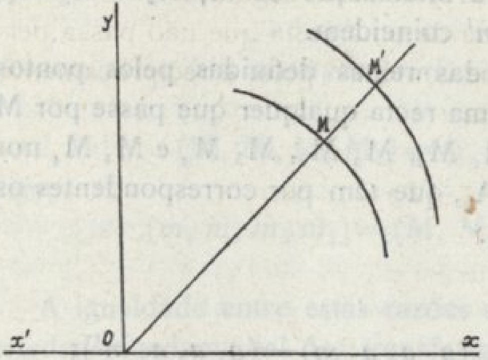
§ 14.°

Inversão ou transformação por raios vectores recíprocos

36. Dada a curva C e um ponto fixo O, se numa recta qualquer que passe por O e corte C no ponto M marcarmos um ponto M' tal que

$$O\,M \,.\, O\,M' = k^2$$

([1]) Gomes Teixeira, *Courbes Speciales remarquables.*



representando k^2 uma constante qualquer, positiva ou negativa — *o lugar geométrico dos pontos M' chama-se curva inversa da curva* C.

A constante k^2 é potência ou módulo de transformação.

Tomando o ponto O para origem das coordenadas e designando por (x, y) e (x', y') as coordenadas dos pontos M e M', será

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{OM}{OM'} = \frac{k^2}{x'^2 + y'^2},$$

donde

$$x = k^2 \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \; y = k^2 \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

O ponto O é o *polo* ou *centro de inversão.*

O círculo de centro O e raio k chama-se *círculo de inversão* e é formado pelos pontos duplos da transformação, isto é, pelos pontos que coincidem com os seus homólogos.

Em coordenadas polares ([1]) as fórmulas de transformação são

$$\omega = \omega_1,$$
$$r\rho = k^2.$$

([1]) Carnoy, *Cours de Géométrie Analytique.*

São imediatas as propriedades seguintes:

a) A transformada de uma recta que não passa pelo polo é um círculo que contém o polo, e reciprocamente.

Com efeito, à recta

$$ax + by + c = 0$$

corresponde a circunferência

$$k^2 (ax + by) + c (x^2 + y^2) = 0.$$

No caso particular de ser $c = 0$, a linha inversa da recta é a própria recta.

b) A curva inversa de uma circunferência que não contém o polo é uma circunferência que também não passa por êsse ponto.

A circunferência

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = c$$

transforma-se, com efeito, em

$$c (x^2 + y^2) + 2\alpha k^2 x + 2\beta k^2 y = k^4.$$

Quando fôr $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e $c = k^2$, a curva transformada coincide com a proposta: é o círculo de inversão.

c) A curva inversa de uma cónica que passa pelo polo é uma cúbica circular [1], que tem o polo como ponto duplo.

---

[1] Chama-se cúbica circular à curva de terceira ordem em que os têrmos do terceiro grau têm a forma $(ax + by)(x^2 + y^2)$.

Á cónica

$$A y^2 + B x y + C x^2 + D y + E x = o$$

corresponde, com efeito, a curva

$$(D y + E x)(x^2 + y^2) + k^2 (A y^2 + B x y + C x^2) = o.$$

No caso particular de ser $D = E = o$, as rectas

$$A y^2 + B x y + C x^2 = o$$

(que formam uma cónica degenerescente) coincidem com as suas inversas.

d) Círculos tangentes a uma dada recta no centro de inversão convertem-se em paralelas a essa mesma recta.

Tomando a recta para eixo das ordenadas, temos os círculos

$$x^2 + y^2 - 2 \alpha x = o,$$
$$x^2 + y^2 - 2 \beta x = o,$$

cujas transformadas são

$$k = 2 \alpha x,$$
$$k = 2 \beta x.$$

e) As tangentes a uma curva e à sua transformada nos pontos correspondentes formam um triângulo isósceles com a recta que une os pontos de contacto.

Em coordenadas polares, da equação de transformação.

$$r\rho = k^2,$$

tira-se, por derivação,

$$r\frac{d\rho}{d\omega} + \rho\frac{dr}{d\omega} = o$$

ou

$$r\frac{d\omega}{dr} + \rho\frac{d\omega}{dr} = o$$

ou ainda

$$\text{tang } U = -\text{tang } V,$$

sendo U e V os ângulos que as tangentes correspondentes formam com o raio vector. Como êstes ângulos são suplementares, provada fica a propriedade.

Corolário. Se duas curvas formam um ângulo φ num ponto que não seja o centro de inversão, as curvas transformadas cortam-se segundo um ângulo igual no ponto correspondente.

f) A transformada de uma recta que passa pelo ponto circular $(1, i, o)$ é uma recta que contem o ponto circular $(1, -i, o)$.

Das fórmulas

$$x = k^2\frac{x'}{x'^2 + y'^2} \quad y = k^2\frac{y'}{x'^2 + y'^2},$$

tiram-se, com efeito, as igualdades

$$x + iy = \frac{k^2}{x' - iy'},\ x - iy = \frac{k^2}{x' + iy'},$$

por meio das quais a recta

$$x + iy + c = o,$$

que contem o ponto $(1, i, o)$, se transforma na recta

$$c\,(x' - i\,y') + k^2 = o,$$

que passa pelo ponto $(1, -i, o)$.

E reciprocamente. Logo:

Na transformação de uma cónica, a curva inversa admite como focos os pontos inversos dos focos da transformada.

As curvas que coincidem com as suas inversas chamam-se *analagmáticas*. Veremos mais tarde exemplos destas curvas.

CAPÍTULO II

Cúbicas circulares

§ 1.º

Simplificação da equação da cública

37. *Definições.* Á curva representada pela equação do terceiro grau:

$$A x^3 + B x^2 y + C x y^2 + D y^3 + E x^2 + F x y + G y^2 + H x + K y + L = o$$

chama-se cúbica.

Ás cúbicas que passam pelos pontos circulares ou cíclicos dá-se o nome de *cúbicas circulares* ou *cíclicas de terceira ordem*.

Como adiante veremos, estas curvas gozam da notável propriedade de reproduzirem por projecção todas as outras cúbicas. Por êste motivo e ainda por razões de simplicidade, é por elas que começaremos o estudo das curvas de terceira ordem.

Devendo a cúbica circular, por virtude da sua definição, conter os pontos cíclicos, a sua equação será necessáriamente da forma

$$(a\mathrm{X}+b\mathrm{Y})(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)=$$
$$=\mathrm{PX}^2\mathrm{Z}+\mathrm{QXYZ}+\mathrm{RYZ}^2+\mathrm{KXZ}+\mathrm{UXZ}+\mathrm{VZ}^3,$$

ou em coordenadas cartesianas

$$(a x+b y)(x^2+y^2)=\mathrm{P}x^2+\mathrm{Q}xy+\mathrm{R}y^2$$
$$+\mathrm{K}x+\mathrm{U}y+\mathrm{V}.$$

38. Entre as propriedades mais notáveis destas curvas, uma há que muito concorre para a simplificação da respectiva equação:

Teorema. Toda a cúbica circular admite uma assíntota real.

De facto, a recta

$$y=cx+d$$

é assíntota quando c é uma raiz da equação (n.º 18)

$$(a+bt)(1+t^2)=0,$$

isto é, quando se tem

$$t=-\frac{b}{a} \text{ ou } t=\pm i,$$

e d é determinado pela susbstituição destas raízes na expressão

$$-\frac{\mathrm{P}-\mathrm{Q}t-\mathrm{R}t^2}{b(1+t^2)+2(a+bt)t}.$$

Temos assim duas assíntotas imaginárias

$$y = \pm i\,x + \frac{Qa - Pb + Rb \mp (P - R)\,a\,i}{2\,(a^2 + b^2)}$$

e a assíntota real

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{Pb^2 - Qab + Ra^2}{a^2 + b^2}$$

ou

$$ax + by = \frac{Pb^2 - Qab + Ra^2}{a^2 + b^2}.$$

Tomando agora para eixo das ordenadas uma recta paralela à assíntota, desaparece da equação desta o têrmo em by e a equação da cúbica toma a forma

$$x\,(x^2 + y^2) = P_1\,x^2 + Q_1 xy + R_1\,y^2 + K_1\,x + H_1\,y + V_1,$$

que se simplificará ainda mais com a mudança da origem para o ponto (o, β). Além dos têrmos já escritos, a equação transformada apresenta ainda outros têrmos, entre os quais $2\,\beta\,x\,y$, que se anulará com $Q_1\,x\,y$, quando fôr $\beta = \frac{1}{2}Q_1$.

Temos pois para a cúbica a forma mais simples, que usaremos de futuro:

$$(6)\quad x\,(x^2 + y^2) = A\,x^2 + A'\,y^2 + 2\,C\,x + 2\,C'\,y + F.$$

§ 2.°

Geração das cúbicas

39. Semelhantemente ao que se faz nas cónicas, indaguemos a maneira como se gera uma cúbica circular e vejamos se daí se podem tirar vantagens para a sua construção.

Teorema. Uma cúbica circular admite, em geral, quatro séries de círculos bitangentes com centros sôbre outras tantas parábolas (parábolas deferentes).

Com efeito, o círculo

$$x^2+y^2=2(\alpha x+\beta y+\gamma)$$

e a cúbica (6) têm quatro pontos comuns a distância finita, os quais são também comuns à cónica

$$2(\alpha x+\beta y+\gamma)x=Ax^2+A'y^2+2Cx+2C'y+F.$$

As suas coordenadas satisfazem portanto à equação

$$2(\alpha x+\beta y+\gamma)x-Ax^2-A'y^2-2Cx-2C'y$$
$$-F-h(x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma)=o$$

ou

$$(2\alpha-A-h)x^2+(-A'-h)y^2+2\beta xy$$
$$+2(\gamma-C+h\alpha)x+2(h\beta-C')y-F+2h\gamma=o,$$

qualquer que seja a constante arbitrária h.

Ora, se o primeiro membro desta última equação fôr um quadrado perfeito

$$(mx+ny+p)^2,$$

o círculo propôsto é bitangente à cúbica, visto êste quadrado representar duas rectas coincidentes, que cortam a cúbica nos quatro pontos por onde passa o círculo.

Identificando pois o quadrado anterior com a equação da cónica, teremos as condições:

$$
\begin{gathered}
m^2 = 2\alpha - A - h, \\
n^2 = -(A' + h), \\
mn = \beta, \\
pm = \gamma - C + h\alpha, \\
pn = \beta h - C', \\
p^2 = 2h\gamma - F,
\end{gathered}
$$

que dão

$$
\begin{gathered}
\beta^2 + (2\alpha - A - h)(A' + h) = o, \\
(h\beta - C'^2)^2 + (A' + h)(2h\gamma - F) = o, \\
\beta(h\beta - C') + (A' + h)(\gamma - C - C\alpha) = o,
\end{gathered}
$$

ou

$$
\alpha = \frac{1}{2}(A + h) - \frac{\beta^2}{2(A' + h)}, \tag{7}
$$

$$
\gamma = \frac{1}{2h}\left[F - \frac{(h\beta - C')^2}{A' + h}\right]. \tag{8}
$$

Substituindo êstes valores na última das três equações anteriores, virá

$$
h^2(A + h)(A' + h) + F(A' + h) - 2Ch(A' + h) - C'^2 = o.
$$

Esta equação do quatro grau dá os valores que devem ser atribuidos a h nas equações (7) e (8) para que os valores correspondentes de α e γ assegurem a bitangência da cúbica e do círculo considerado.

Conclúi-se também da equação (7) que o centro do círculo descreve a parábola deferente

$$x = \frac{1}{2}(A + h) - \frac{y^2}{2(A' + h)}.$$

As quatro parábolas correspondentes aos quatro valores de h são confocais (1), de foco comum no ponto

$$\frac{1}{2}\left[(A - A'),\, o\right].$$

No caso particular de ser $h = o$, os centros dos círculos bitangentes correspondentes descrevem o eixo das abcissas, visto ser

$$\beta^2 = o.$$

Quando a cúbica é unicursal, uma das séries de círculos bitangentes é simplesmente tangente e passa pelo ponto duplo da cúbica, visto os círculos encontrarem a cúbica em dois pontos coincidentes com o ponto duplo (2).

Enfim, os círculos bitangentes de uma mesma série são todos ortogonais a um círculo fixo, perfeitamente determinado. É o que vamos vêr no parágrafo seguinte.

---

(1) Carnoy, *Cours de Géométrie Analytique*.

(2) Ver-se há mais adiante (n.º 42) confirmada esta propriedade.

§ 3.º
Círculo director

40. Examinemos pois a existência do círculo fixo a que nos acabamos de referir, o qual traz para o estudo das cúbicas subsídios de grande importância.

Como é sabido, a ortogonalidade dos círculos

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=o,$$
$$x^2+y^2-2\alpha' x-2\beta' y+\gamma'=o$$

traduz-se por

$$2\alpha\alpha'+2\beta\beta'=\gamma+\gamma';$$

sabe-se também que existindo uma relação linear entre α, β e γ,

$$a\alpha+b\beta+c\gamma+d=o,$$

o primeiro círculo é ainda normal a um outro círculo perfeitamente determinado.

Ora, das fórmulas

$$\alpha=\frac{1}{2}(A+h)-\frac{\beta^2}{2(A'+h)},$$
$$\gamma=\frac{1}{2h}\left[F-\frac{(h\beta-C')^2}{A'+h}\right],$$

tira-se a seguinte relação linear entre α, β e γ:

$$2h^2(A'+h)\alpha+2hC'\beta=$$
$$=2h(A'+h)\gamma-(A'+h)F+h^2(A+h)(A'+h)+C'^2.$$

Logo, o círculo variável

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=o$$

é ortogonal a um círculo fixo.

Comparando a relação linear anterior com a condição de ortogonalidade, conclúi-se:

$$\frac{\alpha'}{h^2(A'+h)}=\frac{\beta'}{h\,C'}=\frac{-1}{h(A'+h)}=$$
$$=\frac{\gamma'}{h^2(A+h)(A'+h)-(A'+h)F+C'^2}$$

ou

$$\alpha'=-h,\ \beta'=-\frac{C'}{A'+h}$$

e

$$\gamma'=\frac{(A'+h)F-C'^2-h^2(A+h)(A'+h)}{h(A'+h)}.$$

A equação do círculo fixo é pois

$$x^2+y^2+2hx+\frac{2C'y}{A'+h}+\frac{F}{h}-\frac{C'^2}{h(A'+h)}$$
$$-h(A+h)=o.$$

Atendendo à equação do quarto grau em h do n.º 39, o seu raio é determinado pela igualdade

$$R^2=3h^2+\frac{C'^2}{(A'+h)^2}+2Ah-2C.$$

Dá-se a êste círculo o nome de *círculo director*. Em correspondência com os valores de h existem, em geral, quatro círculos directores, que se transformam em

$$x^2+y^2+\frac{2\,C'}{A'}y+2\,C=o,$$

quando seja $h=o$,
visto que

$$\alpha'=o,\ \beta'=-\frac{C'}{A'},\ \gamma'=2\,C.$$

Passemos agora a estudar algumas propriedades do círculo director.

41. *Teorema. A corda que une os pontos de contacto de um círculo bitangente é dividida ao meio perpendicularmente pela tangente (no centro do círculo) à parábola deferente.*

Com efeito, a equação da corda dos pontos de contacto é

$$y=-\frac{m}{n}x-\frac{p}{n},$$

e pode, em virtude das igualdades

$$-\frac{m}{n}=\frac{\beta}{A'+h},\ -\frac{p}{n}=\frac{\beta h-C'}{A'+h},$$

escrever-se sob a forma

$$y=\frac{\beta}{A'+h}x+\frac{\beta h-C'}{A'+h}$$

$$=\frac{\beta}{A'+h}(x+h)-\frac{C'}{A'+h}.$$

Por outro lado, a tangente à parábola

$$\frac{y^2}{2(A'+h)}+x-\frac{1}{2}(A+h)=o$$

é um diâmetro do círculo bitangente e é perpendicular ao meio da corda, visto o seu coeficiente angular ser

$$-\frac{A'+h}{\beta}.$$

A equação da corda mostra ainda que esta recta contem o centro do círculo director.

Corolário I. As normais à cúbica nos pontos de contacto dos círculos bitangentes cruzam-se no ponto de contacto da tangente à parabola que corta perpendicularmente ao meio a corda de união daqueles dois pontos.

As normais à cúbica são raios do círculo bitangente e por conseguinte passam pelo ponto de contacto da tangente à parábola (centro do círculo).

Corolário II. A parábola deferente é a envolvente das rectas que dividem perpendicularmente ao meio as cordas que unem os pontos de bitangência dos círculos (¹).

Na verdade, as perpendiculares ao meio das cordas que unem pontos de bitangência são tangentes á parábola.

Teorema. O lugar geométrico dos meios das cordas que unem pontos de contacto dos círculos bitangentes é uma cúbica unicursal.

(¹) A envolvente de uma família de rectas é uma curva que é em cada um dos seus pontos tangente a uma daquelas rectas.

Como sabemos, a intersecção das rectas

$$(A' + h)\, y = \beta\,(x + h) - C'$$

e

$$y - \beta = -\frac{A' + h}{\beta}(x - \alpha)$$

é o ponto médio da corda considerada.

A eliminação de y entre estas equações, tendo em vista a fórmula

$$\alpha = \frac{1}{2}(A + h) - \frac{\beta^2}{2\,(A' + h)},$$

dá

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{(A' - h)\,\beta^2 + 2\,C'\beta + (A + h)\,(A' + h)}{(A' + h)^2 + \beta^2},$$

e também se vê que

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{(A' + h)\,\beta^3 - C'\,\beta^2 + (A' + h)^2 (A + 3\,h)\,\beta - 2\,C'(A' + h)^2}{(A' + h)\,[(A' + h)^2 + \beta^2]}$$

Estas fórmulas mostram que as coordenadas x e y são funções racionais de um parâmetro β e representam por isso uma curva unicursal do terceiro grau (1).

Êste teorema, supomos nós, só era conhecido para o caso das cúbicas com eixo e foi demonstrado, por

(1) Quando $A' + h = o$, uma daquelas curvas transforma-se numa recta paralela à assíntota real, visto que nêsse caso C' é igual a zero e $x = \frac{1}{2}(A' - h)$.

meio de uma análise muito diferente da do texto, pelo matemático japonês Tôda Ono (Separata Gomes Teixeira, vol. 47, II série).

Corolário. As curvas unicursais mencionadas no teorema anterior são as pedárias das parábolas deferentes em relação aos centros dos círculos directores.

Efectivamente, a tangente à parábola deferente divide ao meio a corda que a cúbica determina na perpendicular baixada do centro do círculo director sôbre essa mesma tangente.

42. *Teorema. Quando o quadrado do raio do círculo director é igual ao módulo de transformação, a cúbica circular é analagmática em relação ao centro dêste círculo.*

Designando por A e B dois pontos de um círculo variável bitangente à cúbica, por O o centro do círculo director e por R o seu raio, podemos, com efeito, escrever

$$OA \cdot OB = R^2,$$

visto o círculo variável ser normal ao círculo director e a corda A B conter o ponto O. Como B é o homólogo ou inverso de A em relação a O, a curva é analagmática.

Se o ponto A é duplo, coincide com B e

$$\overline{OA}^2 = R^2,$$

prova de que o círculo director passa pelo ponto duplo da cúbica.

A recta A B é neste caso tangente e passa pelo centro O; por isso os círculos directores cortam a curva nos pontos de contacto das tangentes tiradas pelo seu centro.

Teorema. Se o centro do círculo director é um ponto duplo da cúbica, o seu raio é igual a zero.

Os centros dos círculos directores estão sôbre a cúbica, porque as suas coordenadas $\left(-h, -\frac{C'}{A'+h}\right)$ [1] satisfazem à equação dessa curva.

Substituindo nas derivadas parciais da equação da cúbica x e y por $-h$ e $-\frac{C'}{A'+h}$, respectivamente, vem

$$3h^2 + \frac{C'^2}{(A'+h)^2} + 2Ah - 2C = o,$$
$$2hC' + 2A'C' - 2(A'+h)C' = o.$$

A última expressão é uma identidade e a primeira é igual ao quadrado do raio do círculo director.

Reciprocamente, se o raio do círculo director é nulo, o centro dêsse círculo é um ponto duplo da cúbica.

Corolário. Se a equação

$$(9) \quad -\frac{C'^2}{2h(A'+h)} + \frac{F}{h} - C + \frac{1}{2}h(A+h) = o$$

tem raízes iguais, a cubica é unicursal.

A derivada de (9) dá, com efeito,

$$3h^2 + \frac{C'^2}{(A'+h)^2} + 2AC - 2C = o,$$

---

[1] Vê-se agora bem que a corda $y = \frac{\beta}{A'+h}(x+h) - \frac{C'}{A'+h}$ passa pelo ponto duplo da cúbica.

e o primeiro membro desta igualdade é o quadrado do raio do círculo director.

A equação (9) pode escrever-se

$$h^2(A+h)(A'+h)+(A'+h)F-2C(A'+h)-C'^2=0$$

ou

$$(10)\qquad \begin{aligned} h^4+(A+A')h^3+(AA'-2C)h^2 \\ +(F-2A'C)h+A'F-C'^2=0. \end{aligned}$$

Quando o discriminante

$$\begin{aligned} D=\frac{1}{27}\Big\{[AA'-2C)^2-3(A+A')(F-2A'C) \\ +12(A'F-C'^2)]^3-[27(A+A')^2(A'F-C'^2) \\ +27(F-2A'C)^2+2(AA'-2C)^3 \\ -72(AA'-2C)(A'F-C'^2)^2 \\ -9(A+A')(AA'-2C)(F-2A'C)^2]\Big\} \end{aligned}$$

desta equação fôr diferente de zero, a cúbica é a envolvente de quatro séries de círculos bitangentes, sendo todos os círculos de cada série perpendiculares a um círculo fixo.

A cúbica não é unicursal.

Quando o discriminante é nulo, a cúbica possúi um ponto duplo ou um ponto de reversão [1].

---

[1] Com o discriminante nulo, a curva é unicursal. Tomando o ponto duplo para origem das coordenadas, temos a equação

$$x(x^2+y^2)=Mx^2+Nxy+Qy^2,$$

No primeiro caso, a curva é a envolvente de duas séries de círculos bitangentes e de uma outra série de círculos simplesmente tangentes; no segundo, há apenas uma série de cada espécie.

A resolução da equação (10) dá-nos portanto a situação do ponto duplo ou de reversão da cúbica unicursal.

43. Conforme mostrou Gomes Teixeira (*Annali di Matematica*, Milão, série 3.ª t. XI), *os centros dos círculos directores são determinados pela intersecção de uma hipérbole com a cúbica.*

Com efeito, da equação da cúbica resolvida em ordem a y,

$$y = \frac{C' \pm \sqrt{C'^2 - (x - A')(x^3 - A x^2 - 2 C x - F)}}{x - A'},$$

---

que, por transporte da origem para a ponto $(o, \frac{1}{2} N)$, dá

$$x(x^2 + y^2) = M x^2 + Q y^2 + \frac{1}{4} N x + Q . N y + \frac{1}{4} Q . N^2.$$

Comparando com a equação da cúbica, vem

$$A = M, \ A' = Q, \ 2 C = \frac{1}{4} N^2,$$
$$2 C' = Q . N, \ F = \frac{1}{4} Q . N^2,$$

e (10) toma então a forma

$$h^4 + (Q + M) h^3 + (Q . M - \frac{1}{4} N^2) h^2 = o.$$

Há pois ponto duplo se $Q . M - \frac{1}{4} N^2 \gtrless o$, e de reversão na hipótese contrária.

conclúi-se que a hipérbole

$$y = \frac{C'}{x - A'}$$

tem a mesma assíntota real $x = A'$ que a cúbica, e passa pelo ponto $\left(-h, -\frac{C'}{A'+h}\right)$, centro do círculo director. Os centros dos quatro círculos directores encontram-se assim ao mesmo tempo sôbre a hipérbole e sôbre a cúbica.

Como aquela hipérbole corta ao meio as cordas da cúbica que são paralelas à assíntota real, segue-se que *os pontos de contacto das tangentes paralelas à assíntota real são centros dos círculos directores.*

Da posição especial da hipérbole conclui-se ainda que ela passa pelo ponto duplo ou pelo ponto de reversão, sendo no último caso tangente á cúbica neste ponto, como se verá também nos n.os 53 e 54.

Temos assim uma, duas ou quatro séries de círculos bitangentes, segundo a natureza da cúbica.

Em conclusão:

Uma cúbica é analagmática em relação a um, dois ou quatro pontos, conforme tem um ponto de reversão, um ou dois pontos duplos.

Se $C' = o$, a curva possúi um eixo e a hipérbole degenera em duas rectas

$$x = A', \; y = o.$$

No infinito da recta $x = A'$ existe o centro de um círculo director; e sôbre a recta $y = o$ há três centros quando a curva não é unicursal, dois se tem um ponto duplo, e um se existe um ponto de reversão.

A curva é então analagmática em relação a três, um ou zero pontos, respectivamente.

§ 4.º

Curvatura

11. *Teorema. Se os pontos A, B, C e D de uma cúbica circular estão sôbre um círculo, as rectas A B e C D ou A C e B D ou A D e B C interceptam a cúbica em dois pontos situados sôbre uma paralela à assíntota real.*

Tomando A C e A B para eixo dos x e dos y respectivamente, a equação da cúbica escreve-se

$$(x^2+y^2+\mathrm{H}\,xy)(px+qy)=$$
$$=\mathrm{A}_1 x^2+\mathrm{B}_1 xy+\mathrm{C}_1 y^2+\mathrm{D}_1 x+\mathrm{E}_1 y.$$

O eixo dos x encontra a cúbica nos três pontos de abcissas o, a, λ; o eixo dos y nos três pontos de ordenadas o, b, λ_1. Será portanto

$$(11)\qquad px^3-\mathrm{A}_1 x^2-\mathrm{D}_1 x=px(x-a)(x-\lambda),$$

$$(12)\qquad qy^3-\mathrm{C}_1 y^2-\mathrm{E}_1 y=qy(y-b)(y-\lambda_1).$$

Ora, o círculo que passa pelos pontos A, B e C,

$$x(x-a)+\mathrm{H}\,xy+y(y-b)=o,$$

corta a cúbica num quarto ponto D e, atendendo a (11) e (12), a equação da cúbica é

$$[x(x-a)+\mathrm{H}\,xy+y(y-b)](px+qy)=$$
$$=\mathrm{A}_2\,x(x-a)+\mathrm{B}_2\,xy+\mathrm{C}_2\,y(y-b).$$

Logo, o sistema constituido por esta equação e pelo círculo anterior determina as coordenadas dos pontos A, B, C e D.

Eliminando entre estas duas equações $y(y-b)$, obteremos as duas rectas

$$x=o \text{ e } (\mathrm{A}_2-\mathrm{C}_2)(x-a)+\mathrm{B}_2-\mathrm{H}\,\mathrm{C}_2)y=o$$

que passam pelos pontos A, B, E e C, D, F, respectivamente, sendo λ_1 e λ as abcissas dos pontos E e F.

Substituindo $\mathrm{B}_2 y$ na equação da cúbica por

$$-(\mathrm{A}_2-\mathrm{C}_2)(x-a)+\mathrm{H}\,xy,$$

teremos

$$x(x-a)+\mathrm{H}\,xy+y(y-b)=o,$$
$$(13) \qquad px+qy=\mathrm{C}_2.$$

Como estas duas equações devem ser satisfeitas pelas coordenadas dos pontos de intersecção da cúbica com a recta C D e como o círculo anterior passa pelos pontos C e D, segue-se que a recta (13) corta a cúbica no ponto F.

Por outro lado, a recta A B ($x=o$) intercepta a cúbica nos pontos fixados pela equação

$$qy^2(y-b)-\mathrm{C}_2\,y(y-b)=o,$$

que dá

$$y = o, y = b, q y = C_2.$$

Os dois primeiros estão sôbre o círculo; o terceiro é o ponto E da cúbica e pertence também à recta $p x + q y = C_2$, que corta o eixo dos x naquele ponto.

Fica pois provado que esta recta, que é paralela à assíntota real, contem os pontos E e F.

Corolário I. A tangente à cúbica no ponto A e a secante A D cortam a cúbica em dois pontos situados sôbre uma paralela à assíntota.

Basta, de facto, fazer coincidir B e C com A.

O círculo considerado no teorema anterior é o círculo osculador em A.

Podemos pois construir um círculo osculador num ponto qualquer A da curva, conhecido o seu raio, visto que o ponto D se determina fácilmente: Tira-se pelo ponto E, intersecção da cúbica com a tangente em A, uma paralela à assíntota que encontra a cúbica em F. A recta A F determina o ponto D onde o círculo osculador corta a cúbica.

Corolário II. As tangentes à cúbica nos pontos de contacto de um círcuto bitangente cortam a curva em dois pontos situados sôbre uma paralela à assíntota real.

Efectivamente, se A coincide com B e C com D, o círculo dado é bitangente nos pontos A e C e as rectas A B e C D são tangentes nêsses pontos.

Teorema. Se os quatro pontos A, B, C e D de uma cúbica se encontram sôbre um mesmo círculo, os seis pontos A, B, O e C, D, O definem dois círculos que cortam a cúbica em dois pontos E e F, tais que o círculo E F O é tangente à cúbica em O.

Á cúbica

$$x(x^2+y^2)=\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+2\,\mathrm{C}x+2\,\mathrm{C}'y,$$

que passa pela origem, corresponde a cúbica inversa

$$2(x_,^2+y_,^2)(\mathrm{C}x_,+\mathrm{C}'y_,)+m^2(\mathrm{A}x_,^2+\mathrm{B}y_,^2)-m^4x_,=o,$$

por efeito da transformação

$$x=\frac{m^2x_,}{x_,+y_,^2},\ y=\frac{m^2y_,}{x_,+y_,^2}.$$

Tomemos nesta cúbica os pontos A_1, B_1, C_1, D_1 e F_1, que nas condições do teorema anterior correspondem aos pontos A, B, C, D e F, e seja O a origem das coordenadas.

A recta $\mathrm{A}_1\,\mathrm{B}_1$ tem por correspondente um círculo que passa por A, B, E e O; à recta $\mathrm{C}_1\,\mathrm{D}_1$ corresponde o círculo que contem C, D, F e O; e a recta E F, que encontra a curva a distância infinita, tem por correspondente um círculo que passa por E, F e O e pelo homólogo do ponto situado a distância infinita, que é também O.

Êste círculo é portanto tangente à curva no ponto O. Quando O está no infinito da assintota, temos o teorema anterior.

§ 5.º

Pontos de inflexão

45. Pelas fórmulas de Plücker, uma cúbica não unicursal tem nove pontos de inflexão. Um, pelo menos, será pois real.

É nas cúbicas que aparecem pela primeira vez os pontos desta espécie.

Teorema. Numa cúbica não unicursal existem sempre três e só três pontos reais de inflexão.

A equação da cúbica circular,

$$y = \frac{C' \pm \sqrt{C'^2 - (x - A')(x^3 - A\,x^2 - 2\,C\,x - F)}}{x - A'},$$

mostra-nos que, quando $x - A'$ se aproxima de zero por valores positivos ou negativos, se apresentam dois valores para y: um finito e outro infinitamente grande em valor absoluto.

Efectivamente, designando $x - A'$ por h teremos

$$y = \frac{C' \pm \sqrt{C'^2 - \varepsilon}}{h},$$

onde ε representa uma quantidade que tende para zero com h.

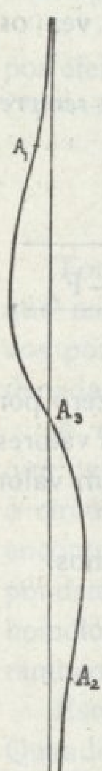
Fazendo tender h para zero, obteremos os três valores

$$\frac{2\,C'}{\pm o} = \pm \infty$$

e

$$\frac{A'^3 - A A'^2 - 2 A' C - F}{2 C'}.$$

A curva corta pois a assíntota real $x = A'$ a distância finita e como a toca em $-\infty$ e $+\infty$ terá certamente um ramo infinito, como mostra a figura.



Realmente, a função representada pela curva é contínua para todos os valores de x, salvo para $x = A'$. A curva é pois formada por um traço contínuo que se estende de $-\infty$ a $+\infty$ na direcção da assíntota e que corta esta recta no ponto

$$\left(A', \frac{A'^3 - A A'^2 - 2 A' C - F}{2 C'}\right).$$

Uma curva constituida dêste modo não pode ser traçada sem que por duas vezes se modifique o sentido da sua concavidade com respeito à assíntota: haverá pois dois pontos de inflexão, em A_1 e A_2 por exemplo. Por atravessar a assíntota, a curva terá necessáriamente um outro ponto de inflexão, A_3 por exemplo, resultante da união dos dois arcos com concavidades diferentes.

Teorema. Uma cúbica nunca pode ter mais de três pontos reais de inflexão e êstes pontos encontram-se sôbre uma linha recta.

Designemos por M, N e P os pontos reais de inflexão de uma cúbica e tracemos as tangentes de inflexão que se cortam nos pontos M_1, N_1 e P_1.

O teorema da Carnot [1] dá

$$\overline{M_1 P^3} . \overline{N_1 M^3} . \overline{P_1 N^3} = - \overline{M_1 N^3} . \overline{N_1 P^3} . \overline{P_1 M^3}$$

ou

$$\overline{M_1 P} . \overline{N_1 M} . \overline{P_1 N} = - \overline{M_1 N} . \overline{N_1 P} . \overline{P_1 M}.$$

Esta igualdade mostra-nos que os pontos M, N e P são as intersecções dos lados do triângulo $M_1 N_1 P_1$ por uma recta.

Se a curva admitisse outro ponto real de inflexão R, também se demonstrava que M, N e R eram colineares, e uma mesma recta encontraria a cúbica em quatro pontos, o que é absurdo.

A recta real que une dois pontos de inflexão imaginários conjugados contem um ponto de inflexão real; logo:

Por cada ponto real de inflexão passam quatro rectas, uma real com três pontos de inflexão reais; outra real e duas imaginárias. Por cada ponto de inflexão imaginário passam também quatro rectas. São ao todo oito rectas imaginárias e quatro reais.

As cúbicas unicursais têm apenas um ou três pontos de inflexão, como se vê pelas fórmulas de Plücker.

(1) Carnoy, *Cours de Géométrie Analytique.*

§ 6.°

Focos

46. As cúbicas circulares têm o foco singular de coordenadas $\left[\frac{1}{2}(A - A'), o\right]$, resultante da intersecção das assíntotas

$$y = \pm i\left[x - \frac{1}{2}(A - A')\right],$$

o qual coincide com o foco das parábolas deferentes.

Examinemos agora como se determinam os focos ordinários.

Sabendo-se que a cúbica tem a distância infinita duas tangentes de coeficientes angulares $+i$ e $-i$ e passa pelos pontos circulares, o número de focos ordinários é igual a $(n-2)^2 = 16$, porque do ponto (o, i) da cúbica se podem traçar sómente $n-1$ tangentes, incluindo no número destas a que dá origem ao foco singular.

A posição dêstes focos é determinada pelo teorema muito conhecido de Hart:

Teorema. Os pontos de intersecção de cada parábola deferente com o círculo director correspondente são focos ordinários.

Com efeito, o ponto (x_1, y_1) é foco da cúbica se as rectas

$$y - y_1 = \pm i(x - x_1)$$

são tangentes à curva ou se o círculo imaginário de raio nulo

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)=o$$

é bitangente.

Comparando a equação dêste círculo com a equação geral do círculo bitangente, teremos

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y-\frac{2\beta C'}{A'+h}2h\delta-\frac{F}{h}$$

$$+\frac{C'^2}{h(A'+h)}+h(A'+h)=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$$

ou

$$x_1=\alpha, y_1=\beta$$

e

$$x_1^2+y_1^2+\frac{2C'y_1}{A'+h}+2hx_1+\frac{F}{h}-\frac{C'^2}{h(A'+h)}$$
$$-h(A'+h)=o,$$

o que demonstra o teorema.

Verifica-se fácilmente que o teorema é também verdadeiro na hipótese $h=o$. Já o mesmo se não pode dizer quando seja

$$A'+h=o,$$

visto o círculo director ter um raio infinito. Neste caso, os focos ficam situados sôbre o eixo dos x.

A equação do círculo bitangente à cúbica tem a forma

$$(x-\alpha)^2+y^2=\alpha^2+2\gamma,$$

visto que $\beta=o$.

A quantidade γ satisfaz à equação

$$(\gamma - C - \alpha A')^2 + (F + 2A')(2\alpha - A + A') = o$$

ou

$$\gamma^2 + 2[A'(2\alpha - A + A') - (C + \alpha A')]\gamma + (C + \alpha A')^2 + (2\alpha - A + A')F = o.$$

Em virtude da definição, o ponto (α, o) é foco se o raio do círculo anterior fôr nulo:

$$\alpha^2 + 2\gamma = o = \alpha^2 - 2[A'(2\alpha - A + A') - (C + A'\alpha)] \pm 2[A'(2\alpha - A' + A) - (C + A'\alpha)]^2 - [(2\alpha - A + A')F + (C + A'\alpha)]^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\alpha^4 - 4A'\alpha^3 + 4(AA' + C)\alpha^2 + 8(F + A'C)\alpha + 4C^2 + 4(A - A')F = o,$$

e esta fórmula identifica os quatro focos da cúbica.

O teorema de Hart também não é verdadeiro quando as cúbicas são unicursais, porque há círculos simplesmente tangentes que passam pelo ponto duplo.

Estudemos êste caso à-parte

47. Transformando por inversão a cónica

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dy + Ex = o,$$

obtem-se a cúbica unicursal

$$(x'^2 + y'^2)(Ex' + Dy') + m^2(Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2) = o$$

Ora, esta cúbica tem o seu ponto duplo na origem das coordenadas, onde admite as duas tangentes

$$A\, x'^2 + 2\, B\, x'\, y' + C\, y'^2 = o.$$

Logo, se $B^2 - A.C > o$, as tangentes são reais distintas e o ponto duplo é um nodo; se $B^2 - A.C = o$, as tangentes são reais coincidentes e o ponto duplo é um ponto de reversão; se $B^2 - A.C < o$, as tangentes são imaginárias e o ponto é isolado.

Assim, à hiperbole corresponde uma cúbica circular com um ponto duplo nodal; à parábola, uma cúbica com um ponto de reversão; e à elipse, uma cúbica com um ponto isolado.

É sabido que os focos de uma curva qualquer têm por inversos os focos da curva transformada; logo:

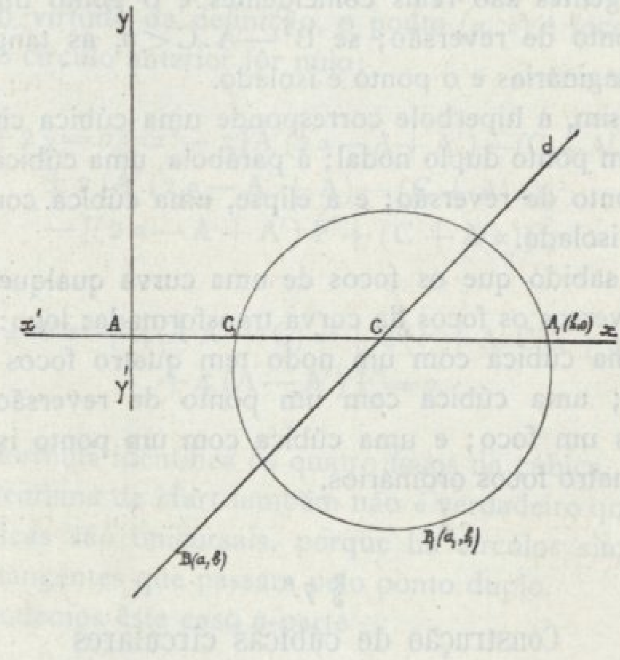
Uma cúbica com um nodo tem quatro focos ordinários; uma cúbica com um ponto de reversão tem apenas um foco; e uma cúbica com um ponto isolado tem quatro focos ordinários.

§ 7.°

Construção de cúbicas circulares

Resumidas assim as propriedades mais notáveis das cúbicas circulares, estudemos agora um processo de construção destas curvas.

48. *Teorema. Tomemos sôbre um plano quatro pontos A, B, A_1 e B_1. Pelo ponto B conduzamos uma recta* d *de direcção arbitrária que encontra em C a recta $A\,A_1$. Em* *seguida, marquemos sôbre esta recta um ponto C_1 tal que a razão $C\,A : C\,A_1$ seja igual a uma constante dada* c, *e descrevamos uma circunferência que passe por A_1, B_1 e C_1. Esta circunferência corta a recta* d *em dois pontos que descrevem uma cúbica circular, quando a direcção da recta varia.*



Tomemos A para origem dos coordenadas e A A_1 para eixo dos x e fixemos para eixo dos y uma direcção perpendicular a A A_1. Designando por (a, b), (a_1, b_1) e (h_1, o) as coordenadas dos pontos B, B_1 e A_1, a recta d, que passa por B, é representada pela equação

$$(14) \qquad y - b = m\,(x - a)$$

e intersepta o eixo dos x num ponto C de abcissa

$$x_1 = a - \frac{b}{m}.$$

Por outro lado, o círculo

$$(15) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y = h^2 - 2h\alpha_1$$

tem por centro (α_1, β_1), passa por A_1 e passará também por B_1 se fôr

$$(16) \quad a_1^2 + b_1^2 - 2\alpha_1 a_1 - 2\beta_1 b_1 = h^2 - 2h\alpha_1.$$

Combinando (15) e (16) na hipótese de ser $b_1 \gtrless o$, vem

$$(17) \quad b_1(x^2+y^2) - 2\alpha_1 b_1 x - (a_1^2 + b_1^2 - 2a\,\alpha_1 + 2h\alpha_1 - h^2)y = b_1(h^2 - 2h\alpha_1).$$

Ora, como êste círculo corta o eixo dos x no ponto C_1 de abcissa

$$x_1 = 2\alpha_1 - h,$$

tem-se

$$(18) \quad \frac{AC}{AC_1} = c = \frac{ma - b}{m(2\alpha_1 - h)},$$

e eliminando m e α_1 entre (15), (16) e (17), virá

$$(19) \quad [(ch+a)(y-b) - b(x-a)][b_1 x + (h-a_1)y - hb_1] = \\ = [c(y-b)(b_1(x^2+y^2) - (a_1^2 + b_1^2 - h^2)y - b_1 h^2],$$

ou

$$(20)\qquad c\,b_1(x^2+y^2)\,y = b\,b_1(c-1)\,x^2$$
$$+[(ch+a)\,b_1 - b\,(h-a_1)\,x\,y]$$
$$+[c\,(a_1{}^2+b_1{}^2+b\,b_1-h\,a_1)+a\,(h-a_1)]\,y^2$$
$$+b\,b_1\,h\,(1-C)\,x+[b\,c\,(h\,a_1-a_1{}^2-b_1{}^2)-a\,h\,b_1]\,y.$$

O teorema fica assim demonstrado, porque a curva representada por (19) passa pelos pontos A, A_1, B e B_1 e, como se vê em (20), é uma cúbica circular de assíntota paralela à recta A A_1.

Quando $b_1 = o$, os lugares geométricos são as rectas

$$y = o,\ b\,(h-o_1)\,x - [a_1\,c\,(a_1-h)+a\,(h-a_1)]\,y$$
$$-\,a_1\,b\,c\,(h-a_1) = o.$$

49. Passando à questão inversa, consideremos a cúbica circular representada pela equação

$$(21)\qquad y\,(x^2+y^2) = \mathrm{H}\,x^2+\mathrm{K}\,x\,y+\mathrm{L}\,y^2+\mathrm{M}\,x+\mathrm{N}\,y.$$

Multiplicando os dois membros da equação (21) por $c\,b_1$, conclúi-se que as cúbicas (20) e (21) são idênticas, quando se verificam as condições

$$(22)\qquad \begin{cases} b\,(c-1) = \mathrm{H}\,c, \\ h\,b\,(1-c) = \mathrm{M}\,c, \\ c\,(a_1{}^2+b_1{}^2+b\,b_1-h\,a_1)+a\,(h-a_1) = \mathrm{L}\,c\,b_1, \\ (c\,h+a)\,b_1 - b\,(h-a_1) = \mathrm{K}\,c\,b_1, \\ b\,c\,(h\,a_1-a_1{}^2-b_1{}^2)-a\,h\,b_1 = \mathrm{N}\,c\,b_1. \end{cases}$$

Uma das quantidades a, b, a_1, b_1, c e h é arbitrária, visto têrmos 5 relações entre 6 quantidades; podemos portanto tomar o ponto (a, b) arbitráriamente sôbre a cúbica.

As duas primeiras equações (22) determinam h e c:

$$h = -\frac{M}{H},$$

$$c = \frac{b}{b - H};$$

as duas últimas mostram-nos que o ponto (a_1, b_1) é a intersecção do círculo

$$(23)\qquad b\,c\,(x^2 + y^2) + (a\,h + \mathrm{N}c)\,y - b\,c\,h\,x = 0$$

e da recta

$$(24)\qquad (c\,h + a - \mathrm{K}c)\,y + b\,x = b\,h,$$

que se interceptam também no ponto (h, o).

Podemos pois, em virtude do teorema antecedente, construir a cúbica (21) de uma infinidade de maneiras.

Temos também, portanto, o seguinte:

Teorema. Tomemos sôbre uma cúbica circular qualquer quatro ponto A_1, A_1, B e B_1, tais que A e A_1 se encontrem sôbre uma paralela à assíntota real e B_1 coincida com o segundo ponto de intersecção da recta (24) com o círculo (23). Um círculo qualquer que passe por A_1 e B_1 corta a cúbica em dois pontos situados sôbre uma recta tirada por B e corta a recta $A\,A_1$ em dois pontos C e C_1 tais que $C\,A : C_1\,A$ é constante.

50. Suponhamos que A_1 coincida com A e que B_1, descrevendo a recta $x = k y$, se aproxime de A.

Pondo sucessivamente $h = o$, $a_1 = k b_1$ e $b_1 = o$, vem a cúbica circular

$$(25)\quad c(x^2 + y^2) y = b(c - 1) x^2 + (a + b K) x y + (c b - a K) y^2,$$

com o ponto duplo A na origem das coordenadas. Os círculos considerados que passam em A_1 e B_1 são, no limite, tangentes no ponto duplo à recta $x = k y$; logo:

Teorema. Tomemos sôbre um plano duas rectas $A A_1$, $A B_1$ e um ponto B. Por êste ponto conduzamos uma recta variável d *e designemos por C o ponto onde ela encontra $A A_1$. Sôbre esta última recta, tomemos um ponto C, tal que a razão $C A : C A$ seja igual a uma constante* c, *e descrevamos uma circunferência que seja tangente à recta $A B_1$ no ponto duplo e que passe por C_1. Esta circunferência corta a recta variável* d *em dois pontos situados sôbre uma cúbica circular unicursal, com o ponto duplo em A_1, e de assíntota paralela a $A A_1$.*

Esta cúbica tem a equação (25) e k é o inverso da tangente trigonométrica do ângulo das duas rectas $A B_1$ e d.

Recìprocamente, a cúbica

$$(x^2 + y^2) y = H x^2 + K x y + L y^2$$

é idêntica a (25), quando

$$(27)\quad \begin{aligned} b(c - 1) &= c H, \\ a + b K &= c K. \\ c b - a K &= c L. \end{aligned}$$

Uma das quatro constantes a, b, c e K é arbitrária, de modo que a, b e c podem exprimir-se em função de K, por exemplo; logo:

Teorema. Construamos duas rectas d_1 *e* d_2 *que se cruzem no ponto duplo A de uma cúbica circular unicursal, sendo* d_1 *paralela à assíntota real. Tracemos em seguida um círculo de raio variável, tangente em A à recta* d_2. *Este círculo passa pelos dois pontos de intersecção da cúbica com a recta que contem o ponto fixo B, e os pontos em que êle intercepta a recta* d_1 *são tais que* $CA : C_1A$ *é constante.*

No caso especial de as rectas d_1 e d_2 serem perpendiculares, é $K = o$ e a equação da cúbica toma a forma

$$c(x^2 + y^2)y = b(c - 1)x^2 + axy + cby^2.$$

§ 8.º

Representação gráfica das cúbicas

51. Resolvendo em ordem a y a equação

$$x(x^2 + y^2) = A x^2 + A' y^2 + 2 C x + 2 C' y + F,$$

vem

$$y = \frac{C' \pm \sqrt{C'^2 - (x - A')(x^3 - A x^2 - 2 C x - F)}}{x - A'}$$

ou ainda

$$y = \frac{C' \pm \sqrt{-(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)}}{x - A'},$$

designando por a_1, a_2, a_3 e a_4 as raízes da equação

$$(x - A')(x^3 - A x^2 - 2 C x - F) - C'^2 = o.$$

Deve notar-se que as cordas da cúbica paralelas à assíntota real $x = A'$ são divididas ao meio pela hiperbole

$$(28) \qquad y = \frac{C'}{x - A'},$$

que desempenha por isso um papel de grande importância na representação gráfica de que nos vamos ocupar.

Suponhamos em primeiro lugar que as raízes a_1, a_2, a_3 e a_4 são reais e distintas:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$$

e, para fixar idéas, admitamos que a assíntota passe entre a_1 e a_2.

Marquemos os pontos de abcissas a_1, a_2, a_3 e a_4 e tracemos a hiperbole (28).

No intervalo (a_1, a_2) a curva apresenta um ramo infinito, com a assíntota $x = A'$, o qual é de fácil traçado, logo que esteja indicada a hiperbole.

Tem três pontos reais de inflexão.

Examinemos com mais minucia a forma da curva no intervalo (a_3, a_4).

Como aqui não há assíntotas, a curva deve ser fechada, visto que as ordenadas dos seus pontos se obtem juntando e tirando às ordenadas da hiperbole a quantidade

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{-(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)}{x - A'}},$$

que é uma função contínua no intervalo (a_3, a_4), em cujos extremos se anula.

Será suficiente estudar apenas o comportamento do numerador do radicando da raiz, visto o denominador variar sempre no mesmo sentido no intervalo considerado.

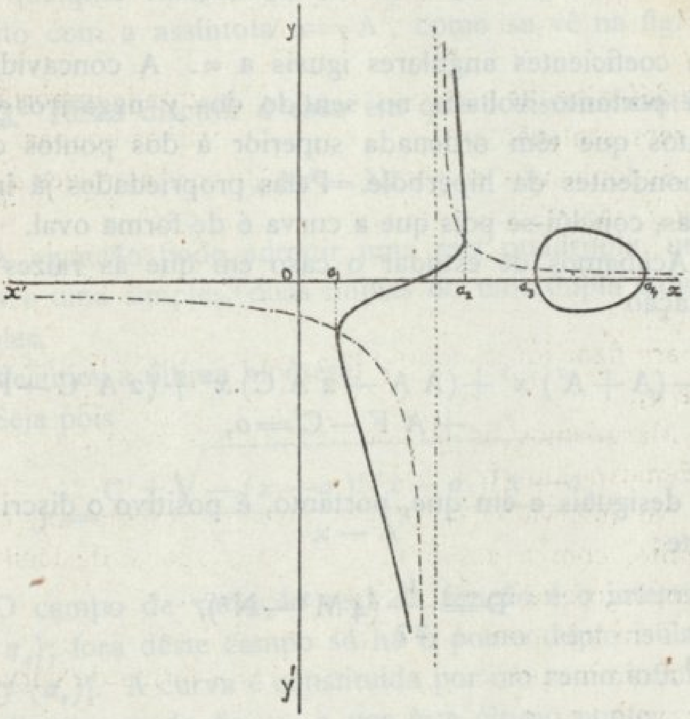


Fig. 1

O produto $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)$ é uma função contínua que admite um máximo dentro do intervalo (a_3, a_4), pois tem valores iguais nos extremos do intervalo. Além disso, a curva não admite pontos de inflexão, aliás a tangente num dêsses pontos cortaria ainda o ramo infinito, o que é absurdo, pois que uma recta não pode encontrar uma cúbica em mais de três pontos. A concavidade está pois voltada sempre no mesmo sentido. Acresce ainda que as tangentes à curva nos pontos

$$[a_3, y(a_3)] \text{ e } [a_4, y(a_4)]$$

têm coeficientes angulares iguais a ∞. A concavidade está portanto voltada no sentido dos y negativos nos pontos que têm ordenada superior à dos pontos correspondentes da hipérbole. Pelas propriedades já indicadas, conclúi-se pois que a curva é de forma oval.

Acabamos de estudar o caso em que as raízes da equação

$$x^4 - (A + A')\,x^3 + (A\,A' - 2\,A\,C)\,x^2 + (2\,A'\,C - F)\,x + A'\,F - C' = o,$$

são desiguais e em que, portanto, é positivo o discriminante:

$$D = \frac{1}{27}(4\,M^3 - N^2),$$

com

$$M = (A\,A' - 2\,A\,C)^2 + 3\,(A + A')\,(2\,A'\,C - F) + 12\,(A'\,F - C'^2)$$

e

$$N = 27\,(A + A')^2\,(A'\,F - C'^2) + 27\,(2\,A'\,C - F)^2 + 2\,(A\,A' - 2\,A\,C)^3 - 72\,(A\,A' - 2\,A\,C)\,(A'\,F - C'^2) + 9\,(A + A')\,(A\,A' - 2\,A\,C)\,(2\,A'\,C - F).$$

52. Passemos agora à hipótese

$$4\,M^3 - N^2 < o.$$

Duas raízes são imaginárias conjugadas, a_1 e a_2, por exemplo. A curva é real quando x varia no intervalo $(a_3,\ a_4)$, visto o produto $(x - a_1)\,(x - a_2)$ ser positivo para qualquer valor de x. Ela é formada por um ramo infinito com a assíntota $x = A'$, como se vê na fig. 1.

53. Resta discutir o caso em que o discriminante é nulo:

$$4\,M^3 = N^2.$$

A equação pode admitir uma raiz quádrupla, uma tripla e uma simples, duas duplas ou uma dupla e duas simples.

Vejamos a última hipótese.

Seja pois

$$y = \frac{C' \pm \sqrt{-(x-a_1)^2(x-a_3)(x-a_4)}}{x - A'}.$$

O campo de variação real da função é o intervalo $(a_3,\ a_4)$; fora dêste campo só há o ponto duplo isolado $[a_1, y\,(a_1)]$. A curva é constituida por um ramo infinito, semelhante ao da fig. 1, e por êste último ponto. Há pois três pontos reais de inflexão.

Na mesma hipótese, podemos dar ainda à equação da curva a forma

$$y = \frac{C' \pm \sqrt{-(x-a_1)(x-a_2)^2(x-a_4)}}{x - A'}.$$

A variável x pode tomar todos os valores desde a_1 a a_4 sem que a ordenada deixe de ser real. Supondo traçada a assíntota entre a_2 e a_4, prova-se como anteriormente que existe uma ordenada máxima no intervalo (a_1, a_2). A curva admite o ponto duplo $[a_2, y(a_2)]$. Se fôr $a_2 = A'$,

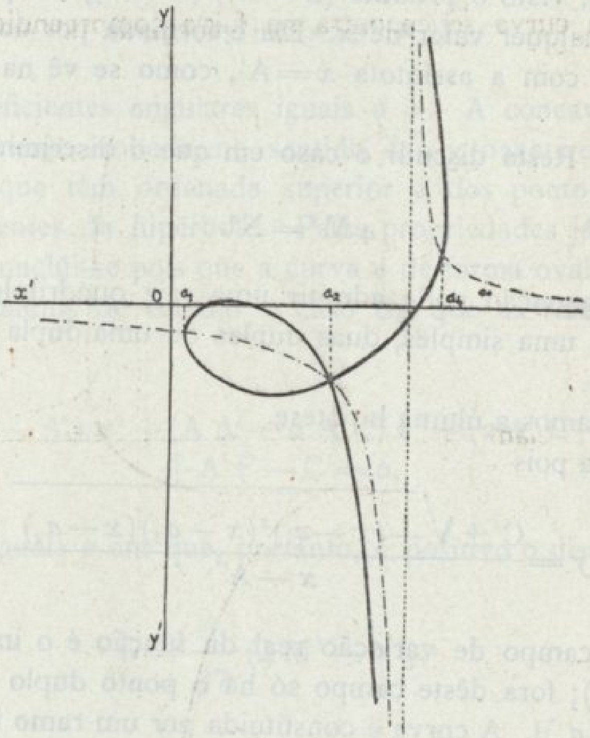


Fig 2

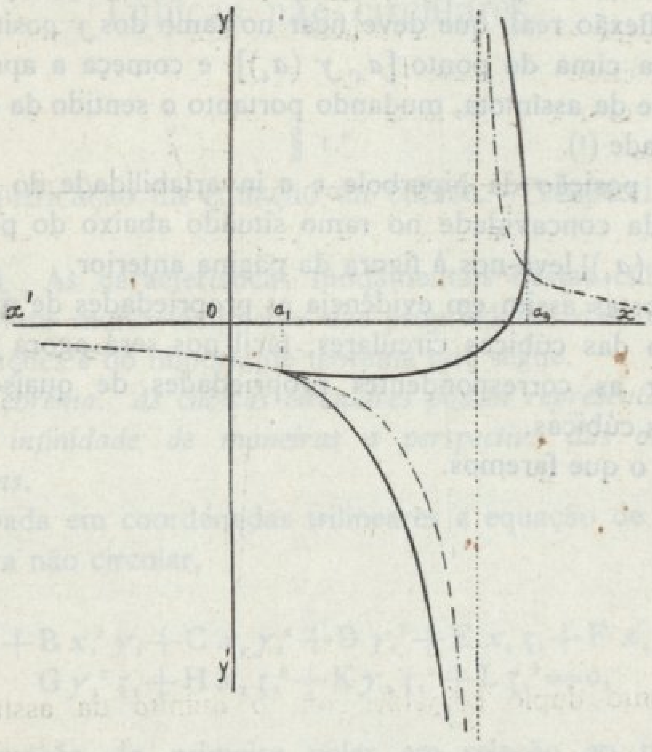
o ponto duplo coincide com o infinito da assíntota real.

No primeiro caso, a curva tem a forma indicada na fig. 2, que varia conforme a posição da assíntota. Apresenta apenas um ponto real de inflexão no ramo dos y positivos.

54. Finalmente, no caso de ser

$$y = \frac{C' \pm \sqrt{-(x-a_1)^3(x-a_4)}}{x - A'},$$

toda a curva se encontra na faixa compreendida entre



duas paralelas ao eixo dos y tiradas pelos pontos de abcissas a_1 e a_4. Há um ponto de reversão em $[a_1, y(a_1)]$ onde a hiperbole é tangente à curva.

Com efeito, o coeficiente angular da tangente à hiperbole e à cúbica no ponto $[a_1, y(a_1)]$ é

$$-\frac{C'}{(a_1 - A')^2}$$

A cúbica, como nos casos anteriores, é tangente à recta $x = a_4$ no ponto $[a_4, y(a_4)]$, porque o coeficiente angular da tangente nêsse ponto é ∞. Possúi um ponto de inflexão real, que deve ficar no ramo dos y positivos e para cima do ponto $[a_4, y(a_4)]$, e começa a aproximar-se da assíntota, mudando portanto o sentido da concavidade [1].

A posição da hiperbole e a invariabilidade do sentido da concavidade no ramo situado abaixo do ponto $[a_4, y(a_4)]$ leva-nos à figura da página anterior.

Postas assim em evidência as propriedades de maior relêvo das cúbicas circulares, fácil nos será agora descrever as correspondentes propriedades de quaisquer outras cúbicas.

É o que faremos.

---

[1] Carnoy, *Cours de Géométrie Analytique.*

CAPÍTULO III

Cúbicas não circulares

§ 1.º

Simplificação da equação da cúbica. Perspectiva.

55. As características fundamentais destas cúbicas decorrem muito fácilmente das propriedades das transformações e do importante teorema que segue.

Teorema. As cúbicas circulares podem representar de uma infinidade de maneiras a perspectiva das outras cúbicas.

Dada em coordenadas trilineares a equação de uma cúbica não circular,

$$A x_1^3 + B x_1^2 y_1 + C x_1 y_1^2 + D y_1^3 + E x_1 z_1 + F x_1 y_1 z_1$$
$$G y_1^2 z_1 + H x_1 z_1^2 + K y_1 z_1^2 + L z_1^3 = o,$$

a equação da primeira polar em relação ao ponto M $(x_1 = o,\ z_1 = o)$ é

$$B x_1^2 + 2 C x_1 y_1 + 3 D y_1^2 + F x_1 z_1 + 2 G y_1 z_1 + K z_1^2 = o.$$

Fixemos um triângulo de referência, tomando para lado z_1 uma das tangentes da cúbica, para lado x_1 uma recta qualquer que passe por M e por dois outros pontos A_1 e A_2 da mesma curva, e para lado y_1 a tangente à cónica anterior (primeira polar) no ponto onde ela é interceptada pela recta $A_1 A_2$.

Com esta posição especial do triângulo de referência, a equação da cúbica simplifica-se.

De facto, quando se faz $z_1 = o$ na cúbica e $y_1 = o$ na cónica, vêm dois valores iguais a zero para x_1, devendo, portanto, nas equações

$$A x_1^3 + B x_1^2 y_1 + C x_1 y_1^2 + D y_1^3 = o,$$
$$B x_1^2 + F x_1 y_1 + K z_1^2 = o$$

ser $C = D = F = K = o$. A equação da cúbica reduz-se pois a

$$z_1(G y_1^2 + L z_1^2) + A x_1^3 + B x_1^2 y_1 + E x_1^2 z_1 + H x_1 z_1^2 = o.$$

As coordenadas dos pontos A_1, A_2 e M_1, intersecções da cúbica com o lado $x_1 = o$, são dadas pela equação

$$z_1 (G y_1^2 + L z_1^2) = o$$

ou

$$z_1 = o \text{ e } G y_1^2 + L z_1^2 = o.$$

Para o ponto M é

$$x_1 = o,\ z_1 = o;$$

e para os pontos A_1 e A_2 temos

$$x_1 = o, \quad \frac{y_1}{z_1} = \pm\sqrt{-\frac{L}{G}}.$$

Os pontos A_1 e A_2 são reais ou imaginários conforme L e G são de sinais contrários ou do mesmo sinal.

Supondo que é $L \gtrless o$ e $G \gtrless o$, e fazendo

$$x = \frac{y_1}{x_1}, \quad y = \frac{z_1}{x_1}\sqrt{\frac{L}{G}},$$

obteremos a equação da cúbica circular

$$(27) \quad y(x^2+y^2) + H_1 y^2 + E_1 y + B_1 x_1 + A_1 = o,$$

que é a perspectiva da cúbica dada (1).

56. Eis algumas conseqüências importantes desta análise.

A assintota real da cúbica (27) é a recta $y = o$; corresponde à tangente à cúbica dada no ponto M, por ser $z_1 = o$.

Se a recta $z_1 = o$ corta a cúbica em três pontos coincidentes em M (ponto de inflexão), a cúbica circular correspondente admite um eixo.

---

(1) Gomes Teixeira, *Courbes Speciales remarquables.*

Efectivamente, como a recta $z_1=o$ encontra a cúbica no ponto de inflexão M, devem resultar três valores iguais a zero para x_1 na resolução do sistema

$$z_1=o,$$
$$z_1(Gy_1^2+Lz_1^2)+Ax_1^3+Bx_1^2y_1+Ex_1z_1+Ax_1z_1^2=o$$

ou

$$Ax_1^2+Bx_1^2y_1=o,$$

o que implica $B=o$, e, portanto, $B_1=o$.

A curva encontra-se toda para um mesmo lado do eixo dos x.

57. Registemos ainda as seguintes consequências:

a) Segundo as equações de transformação, quando L e G são de sinais contrários aos pontos reais da cúbica dada correspondem pontos imaginários na cúbica circular.

b) Quando M é um ponto de inflexão, o lado y do triângulo de referência é a polar linear de M.

c) Os pontos no infinito das assíntotas imaginárias da cúbica circular têm por correspondentes os pontos A_1 e A_2; o ponto no infinito da assíntota real tem por correspondente o ponto M.

Na verdade, as assíntotas imaginárias da cúbica circular,

$$x=\pm i\left(y+\frac{H_1}{2}\right),$$

têm por correspondentes as rectas

$$y_1 = \pm i\left(\sqrt{\frac{L}{G}}z_1 + \frac{H_1}{2}x_1\right).$$

Ora, dos valores $x = \infty$ e $y = \infty$ tira-se

$$x_1 = o, y_1 = \pm i z_1 \sqrt{\frac{L}{G}},$$

que são as coordenadas dos pontos A_1 e A_2; o ponto M tem por correspondente o ponto

$$x = \infty, y = o.$$

Vejamos agora algumas propriedades das cúbicas circulares.

§ 2.°

Geração das cúbicas não circulares

58. Do teorema do n.º 39 e das propriedades das transformações homográficas, decorrem as seguintes conclusões.

Cúbicas circulares	Cúbicas não circulares
Teorema. Estas cúbicas admitem, em geral, quatro séries de círculos bitangentes.	*Teorema. Estas cúbicas admitem, em geral, quatro séries de cónicas bitangentes K_1, K_2, K_3 e K_4, que passam por dois pontos fixos A_1 e A_2.*

À equação do círculo bitangente à cúbica circular

$$x^2+y^2=2\alpha x+2\beta y+2\gamma,$$

corresponde no plano da cúbica não circular a cónica

$$y_1^2+\frac{L}{G}z_1^2=2\alpha x_1 y_1+2\beta\sqrt{\frac{L}{G}}x_1 z_1+2\gamma x_1^2,$$

que passa pelos pontos A_1 e A_2, visto que para $x_1=o$ é

$$y_1^2+\frac{L}{G}z_1^2=o,$$

Da conseqüência *b*) do número anterior resulta que uma das cónicas se transforma na polar linear de M quando êste ponto é de inflexão.

A doutrina do n.º 39 dá origem ao seguinte:

Teorema. As assíntotas de uma mesma família de círculos bitangentes interceptam-se nos pontos de uma parábola.	*Teorema. As tangentes às cónicas K_i nos pontos fixos A_1 e A_2 interceptam-se sôbre o lugar dos centros daquelas cónicas.*

Com efeito, os centros dos círculos bitangentes são as intersecções das assíntotas

$$y-\beta=\pm i(x-\alpha),$$

que têm por correspondentes as tangentes em A_1 e A_2, por ser, para $x_1 = o$,

$$y_1 = i\, z_1 \sqrt{\frac{L}{G}},$$

$$y_1 = -i\, z_1 \sqrt{\frac{L}{G}}.$$

Do exposto no n.º 41, conclúi-se que:

Teorema. As cordas que unem os pontos de contacto de cada série de círculos bitangentes cruzam-se no centro do círculo director.

Teorema. As cordas que unem os pontos de contacto de cada série de cónicas bitangentes cruzam-se no mesmo ponto: ao todo quatro pontos B_1, B_2, B_3 e B_4.

Ás cordas que unem os pontos de contacto dos círculos bitangentes e que se interceptam nos centros dos círculos directores correspondem as cordas que passam pelos pontos de contacto das cónicas bitangentes e que se encontram em quatro pontos.

Além disso, os centros dos círculos directores são os pontos de contacto da cúbica com as tangentes paralelas à assíntota real, e esta assíntota tem por correspondente a tangente à cúbica no ponto M; logo, os quatro pontos mencionados são os pontos de contacto das tangentes tiradas por M, isto é, intersecções da primeira polar de M com a cúbica.

Teorema. Os meios das cordas de contacto dos círculos bitangentes descrevem cúbicas unicursais.

Teorema Os meios das cordas de contacto das cónicas bitangentes descrevem cúbicas unicursais que passam pelos pontos A_1 e A_2.

Com efeito, à cúbica unicursal circular

$$(px+qy)(x^2+y^2)=\mathrm{P}x^2+\mathrm{Q}xy+\mathrm{R}y^2$$

corresponde a cúbica unicursal

$$\left(py_1+q\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{G}}}z_1\right)\left(y_1^2+\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{G}}z_1^2\right)=$$
$$=\mathrm{P}x_1y_1^2+\mathrm{Q}\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{G}}}x_1y_1z_1+\mathrm{R}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{G}}x_1z_1^2,$$

que passa pelos pontos A_1 e A_2, por ser, para $x_1=o$,

$$y_1=\pm i z_1\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{G}}}.$$

Teorema. Uma cúbica circular unicursal admite duas séries de círculos bitangentes e uma série simplesmente tangente que passa

Teorema. Uma cúbica unicursal admite duas séries de cónicas bitangentes e uma série simplesmente tangente que passa pelo ponto duplo *pelo ponto duplo; ou uma série bitangente e uma simplesmente tangente que passa pelo ponto de reversão.*

e pelos pontos A_1 e A_2; ou uma série bitangente e uma simplesmente tangente que passa pelo ponto de reversão e pelos pontos A_1 e A_2.

E também:

Teorema. Os círculos directores passam pelos pontos de contacto das tangentes à cúbica tiradas pelos seus centros.

Teorema. As cónicas (correspondentes aos círculos directores) H_1, H_2, H_3 e H_4 passam pelos pontos de contacto das tangentes à cúbica tiradas pelos pontos B_1, B_2, B_3 e B_4.

§ 3.º

Pontos de inflexão

59. Como nas cúbicas circulares, os pontos de inflexão de uma cúbica qualquer encontram-se distribuidos sôbre doze rectas: quatro reais e oito imaginárias.

Raciocinando como no n.º 45, observa-se que uma cúbica admite quando muito três pontos reais de inflexão.

Quando L e G são do mesmo sinal, são imediatas as conclusões anteriores, em vista das fórmulas

$$x = \frac{y_1}{x_1}, \; y = \frac{z_1}{x_1}\sqrt{\frac{L}{G}}$$

e também da conseqüência *b* do n.º 34.

§ 4.º
Focos e assíntotas

60. O resultado do n.º 46 dá o seguinte:

Teorema. Os focos ordinários de uma cúbica circular são os pontos de intersecção das quatro parábolas deferentes com os quatro círculos directores: 16 focos ao todo.

Teorema. Os pontos correspondentes aos 16 focos ordinários são as intersecções das quatro cónicas correspondentes às parábolas deferentes com as quatro cónicas H_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

61. *Teorema. As assíntotas imaginárias* $x = \pm i\left(y + \frac{H_1}{2}\right)$ *da cúbica circular cortam-se no ponto* $\left(0, -\frac{H_1}{2}\right)$.

Teorema. A tangente à primeira polar de M no ponto onde esta curva corta a recta A_1A_2 contem o ponto de intersecção das tangentes à cúbica nos pontos A_1 e A_2.

As assíntotas imaginárias têm por correspondentes as tangentes nos pontos A_1 e A_2, e ao eixo das ordenadas corresponde o lado $y_1 = o$, que é tangente à primeira polar de M no ponto onde esta curva corta a recta $A_1 A_2$.

§ 5.º

Construção de cúbicas

62. *Teorema. Dados sôbre um plano quatro pontos A, B_1, A_1 e A_2, tiremos pelo ponto B uma recta* d *e seja C o ponto onde ela encontra a recta $A\,A_1$. Marquemos em seguida um ponto C_1 sôbre esta recta, de modo que a razão $C\,A : C\,A_1$ seja igual à constante* c. *Tracemos emfim uma circunferência que passe por A_1, B_1 e C_1. Esta circunferência corta a recta* d *em dois pontos que descrevem uma cúbica, quando a direcção da recta varia.*

Teorema. Dados sôbre um plano quatro pontos A', B', A'_1 e B'_1, tiremos pelo ponto B' uma recta d' *e seja C' o ponto onde ela corta a recta $A'A'_1$. Marquemos em seguida sôbre esta recta um ponto C'_1, de modo que a razão $C\,A : C\,A_1$ seja igual à constante* c. *Tracemos emfim uma cónica que passe por A', B', C' e por dois outros pontos fixos. Esta cónica corta a recta* d' *em dois pontos que descrevem uma cúbica, quando a direcção da recta varia.*

Efectivamente, ao círculo A_1, B_1 e C corresponde uma cónica que passa por dois pontos fixos e por A'_1, B'_1 e C'_1 e à constante c corresponde o mesmo valor.

Do mesmo modo poderiamos enunciar os teoremas correspondentes aos do § 7.º do Capítulo II.

§ 7.º
Representação gráfica das cúbicas

63. Depois de estabelecidos os teoremas anteriores, era possível, como fez Newton, e mais tarde Plücker e Euler, classificar as cúbicas em grupos e espécies, referindo-se esta classificação à posição dos seus pontos de intersecção com a recta no infinito.

A exposição, porém, dêste assunto levar-nos hia muito longe e a natureza dêste trabalho não se harmoniza com tal desenvolvimento.

Limitar-nos hemos apenas a indicar muito resumidamente os resultados a que chegaram alguns matemáticos.

Foi Newton quem primeiro classificou as cúbicas em 72 espécies. Sterling, em 1717, juntou mais quatro espécies às 72 de Newton; Stone encontrou 78. Euler classifica-as em seis géneros e 80 variedades. Mais tarde Plücker classifica-as em 279 espécies.

Newton demonstra que todas as cúbicas podem ser obtidas pela perspectiva de 5 parábolas divergentes (1).

(1) Gomes Teixeira, *Courbes Speciales remarquables.*

ÍNDICE

CAPÍTULO I

Curvas planas algébricas

CAPÍTULO II

Cúbicas circulares

CAPÍTULO III

Cúbicas não circulares

ERRATAS

Pág.	Linhas	Erros	Emendas
44	18	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{a}{b}$
45	2	$\frac{Qa-Pb+Rb\mp(P-R)ai}{2(a^2+b^2)}$	$\frac{Qa-Pb+Rb\mp(P-R)ai\mp Qbi}{2(a^2+b^2)}$
48	7	$h=o$	$A'+h=o$
50	2	$+\gamma$	-2γ
58	21	um ou dois pontos duplos	um ponto duplo, ou nenhum
60	12	as abcissas dos pontos E e F	a ordenada e a abcissa dos pontos E e F
60	14	Hxy	HC_2y
61	7	A_1, B_1, C_1, D_1 e F_1	A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 e F_1
61	8	A, B, C, D e F	A, B, C, D, E e F
61	13	E F,	E_1 F_1
70	2	$CA : CA_1$	$CA : C_1A$
74	21	d	AA_1