

Sala 5  
Gab. —  
Est. 55  
Tab. 20  
N.º 34

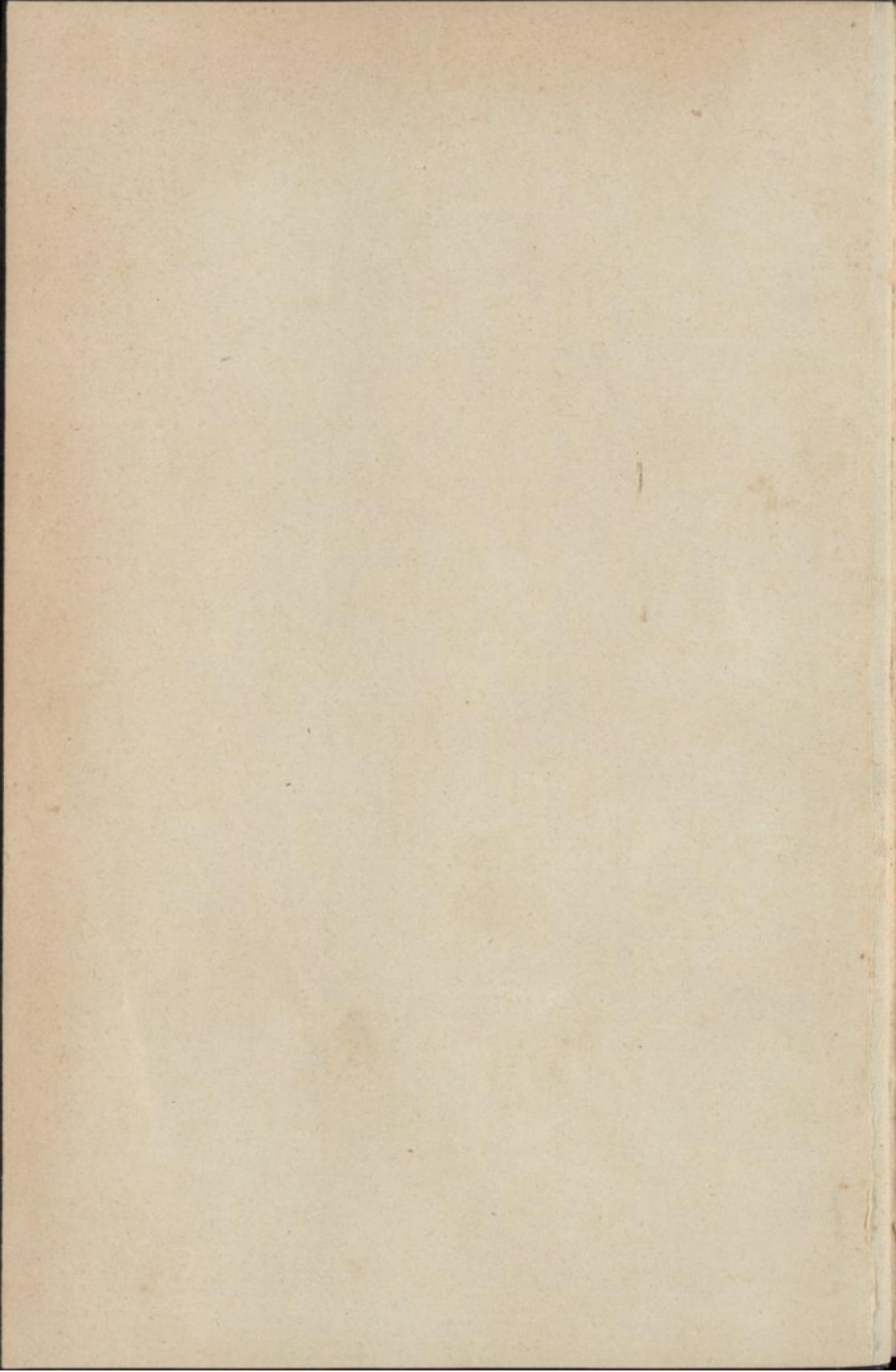


UNIVERSIDADE DE COIMBRA  
Biblioteca Geral



1301088046

v b12237486



76

O PROBLEMA

DA

GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

POR

MANUEL DOS REIS



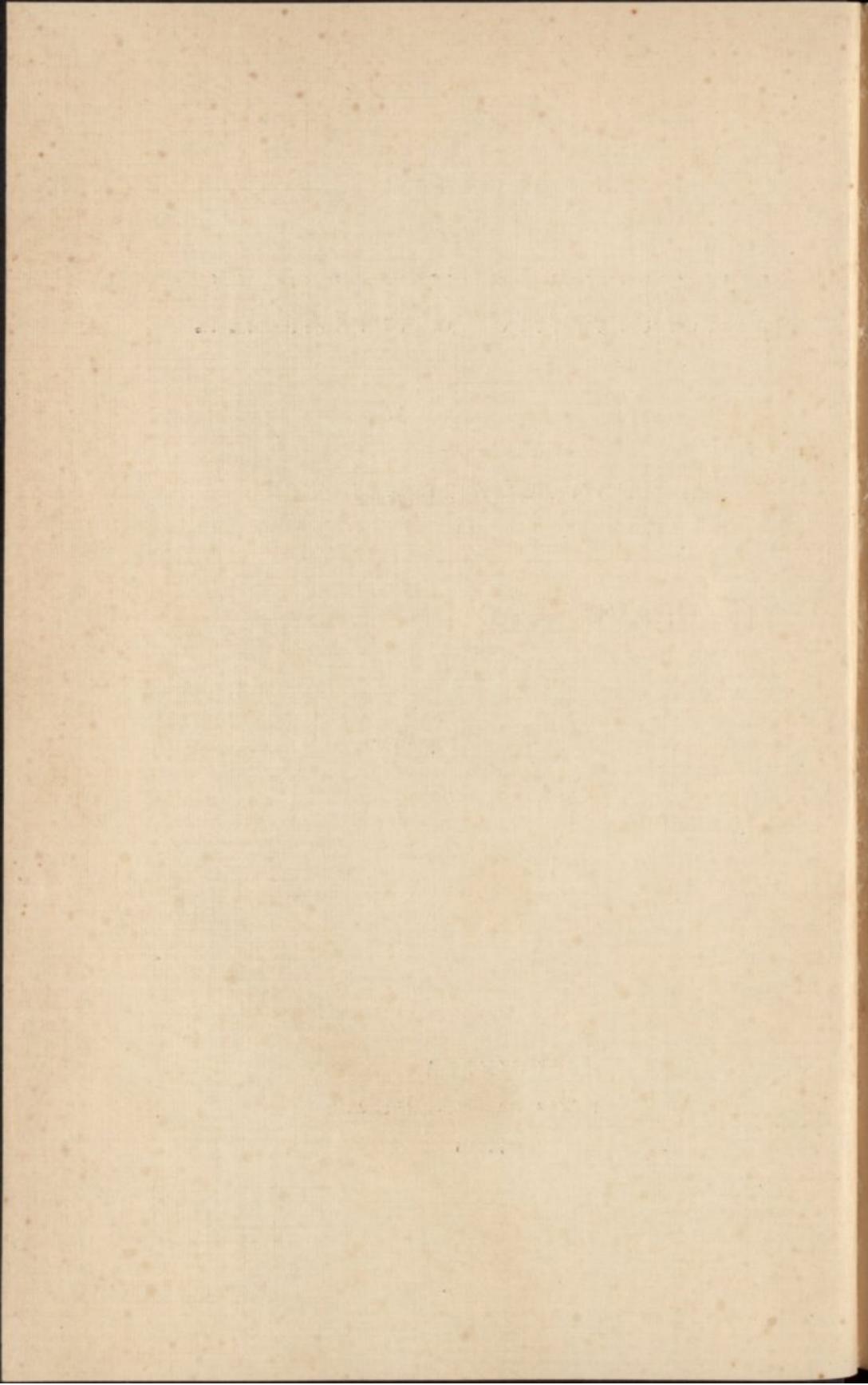
COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

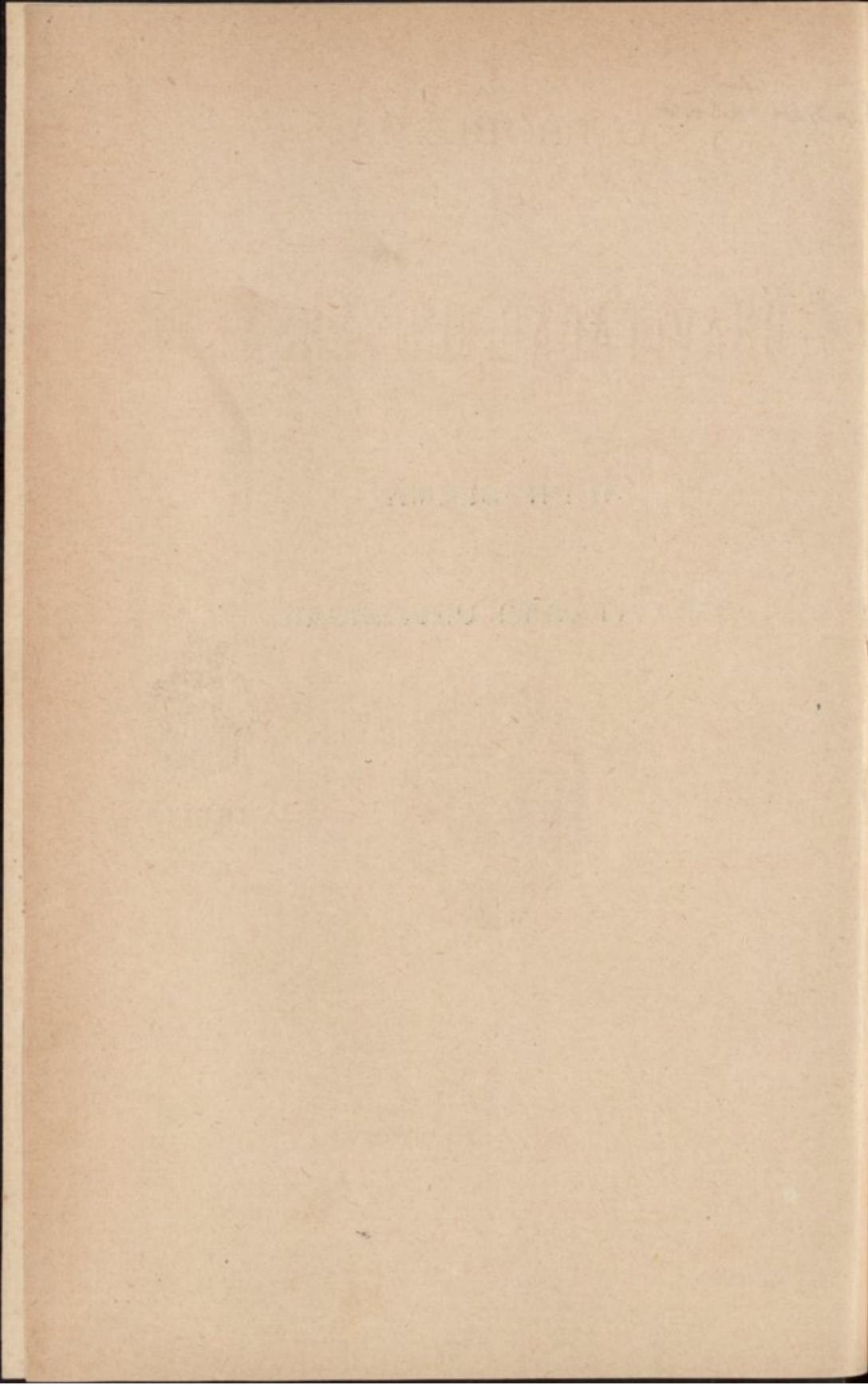
1933

vertical text on the left edge

e



O PROBLEMA  
DA  
GRAVITAÇÃO UNIVERSAL



O PROBLEMA

DA

# GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

POR

MANUEL DOS REIS



12 ABR. 33

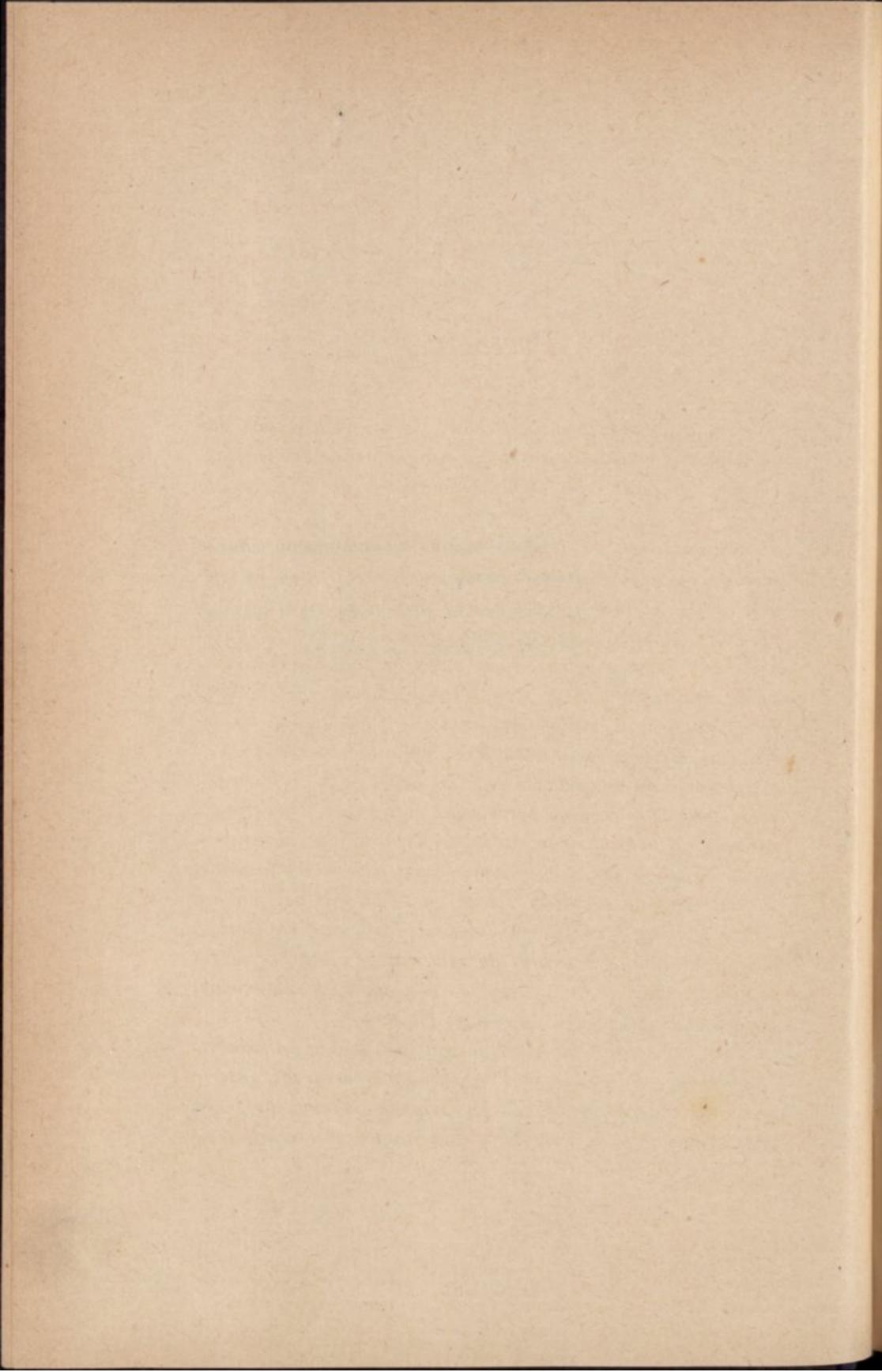
COIMBRA

IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1933

THE HISTORY OF THE

Dissertação de concurso para professor catedrático do 2.<sup>o</sup> grupo da 1.<sup>a</sup> secção da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra.



## Prefácio

Com o presente trabalho tentamos um estudo crítico das principais teorias da gravitação propostas desde Newton. Cumpre-nos dizer aqui algumas palavras sobre a forma do livro.

Naturalmente, as diversas teorias da gravitação não se sucedem ao acaso, mas relacionadas entre si e com os progressos da teoria e da observação gerais da natureza. A própria descoberta da gravitação universal é o resultado duma evolução. Uma e outras, como todas as coisas, só consideradas nesta evolução se tornam completamente inteligíveis. Daí o não termos hesitado em acentuar o inevitável carácter histórico da obra, remontando aos gregos na nossa exposição.

A teoria da relatividade especial impõe-se tão fortemente, que entendemos dever ser breve sobre as teorias da gravitação pré-relativistas; em rigor são todas falsas se aquela teoria é verdadeira. Assim, os resultados são referidos sem demonstração. Quanto à crítica, limitámo-nos ao que nos pareceu suficiente para estabelecer a inaceitabilidade de tais teorias, independentemente da teoria da relatividade; esta norma foi seguida também para as teorias da gravitação relativistas, incluindo, mutatis mutandis, a de Einstein.

As teorias relativistas são o principal objecto da presente dissertação. Por tal motivo pensámos que seria útil inserir uma exposição da teoria da relatividade especial, desde os fundamentos até aos resultados importantes que teríamos de

utilizar constantemente no estudo daquelas teorias. Assim fizemos, não obstante reconhecermos que isso tornou o livro muito longo; que no-lo releve o leitor familiarizado com a matéria.

O problema da gravitação é um problema matemático porque é um problema físico, não reciprocamente. Daí o termos ligado grande importância ao lado físico da questão, em vez de considerá-la como coisa interessante pelos desenvolvimentos matemáticos que sugere, mas em si indiferente. O nosso ponto de vista não podia ser o do matemático puro, mas o de quem procura estudar matematicamente os fenómenos da natureza.

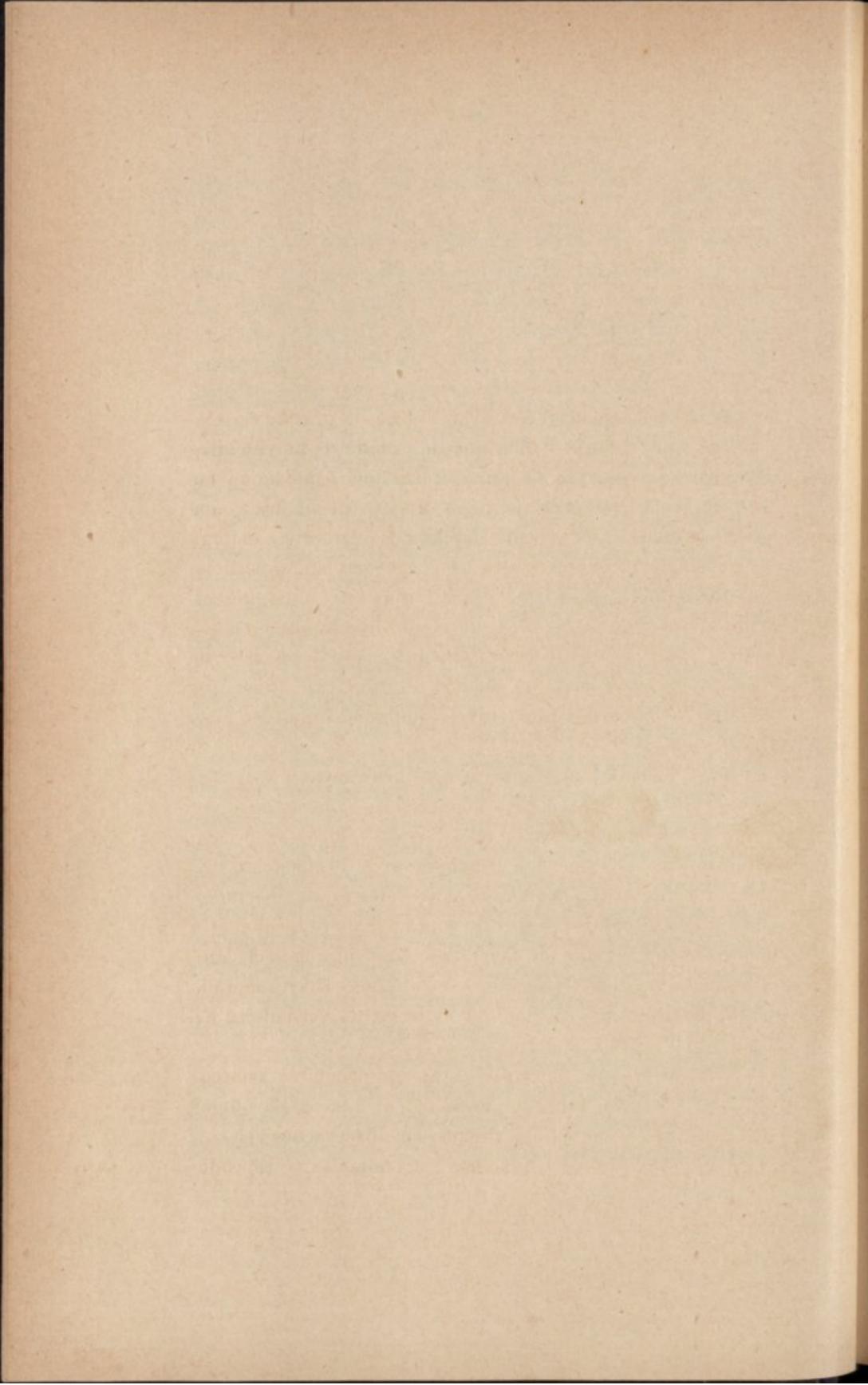
No capítulo I referimos as ideas teóricas que, desde a antiguidade, contribuíram para os progressos da astronomia e da física, e prepararam lentamente o aparecimento da teoria da gravitação de Newton. No capítulo II tratamos brevemente das teorias da gravitação propostas desde Newton até à teoria da relatividade especial. No capítulo III occupamos-nos das dificuldades da física teórica que provocaram a elaboração desta teoria. O capítulo IV é consagrado à exposição das bases da teoria da relatividade especial e daqueles dos seus resultados que nos serão indispensáveis adiante. No capítulo V damos uma sistematização dos princípios da dinâmica analítica relativista dos sistemas de pontos materiais, de que adiante faremos também aplicação. No capítulo VI occupamos-nos das teorias da gravitação que apareceram sob a influência da teoria da relatividade especial, ou das que, como as de Lorentz e Poincaré, se adaptam a esta teoria sem modificações essenciais. Finalmente, o capítulo VII é dedicado à teoria da gravitação de Einstein.

Sem dúvida, esta teoria ainda não satisfaz completamente sob o ponto de vista filosófico, sobretudo porque o campo de gravitação e o campo electromagnético se mantêm nela essencialmente diferentes. É desejável que a métrica do universo

quadridimensional, que evidentemente deve ser uma generalização da métrica pseudo-riemanniana, possa explicar os dois campos; e se uma tal teoria unitária do campo físico puder incluir orgânicamente as equações fundamentais da mecânica ondulatória, ter-se-á conseguido a unificação da física. A avaliar pelos ensaios notáveis de Weyl, Eddington, Kaluza, Einstein e outros, este ideal parece de próxima realização. Mas é claro que aqui não podíamos ocupar-nos desta extensão da teoria da relatividade geral.

Em notas citámos a bibliografia consultada. Acrescentamos que, na redacção da parte do capítulo I que se refere à Renascença, seguimos de perto a clássica História da filosofia moderna de Harald Høffding.

Coimbra, Fevereiro de 1933.



## I

1. O pensamento central da teoria da gravitação cósmica é que a causa física, que determina os movimentos dos astros, tem a mesma natureza que aquela que faz mover os projecteis terrestres. Mais precisamente, cada astro manifesta ser a sede duma acção atractiva análoga à que a terra exerce sobre os corpos da sua superfície, produzindo a gravidade; a acção dum astro qualquer incide sobre todos os outros, variando directamente com a massa e inversamente com a distância, e do concurso de tais acções e da inércia da matéria resultam os movimentos relativos dos corpos inumeráveis que vemos disseminados no espaço.

Para formular nitidamente este pensamento e dar-lhe uma expressão matemática concordante com as observações, foi preciso percorrer uma longa evolução científica e filosófica. Em especial, o homem teve de construir lentamente a descrição dos movimentos celestes, de libertar-se nessa descrição do ponto de vista terrestre a que está naturalmente fixado, de fazer triunfar o princípio da uniformidade das leis da natureza, e de desenvolver o método experimental a-fim-de elaborar as bases da verdadeira Física.

Foi na Hélade que apareceram os primeiros esforços para penetrar no segredo cosmológico. Já os astrólogos caldeus tinham acumulado numerosas observações celestes e notado que muitos fenómenos astronómicos se reprodu-

zem em ciclos determinados. O conhecimento destes ciclos sugeriu aos gregos a idea da regularidade dos movimentos dos astros, e a feição filosófica do seu espirito levou-os a procurar para essa regularidade uma explicação racional. Logo esta questão foi generalizada. A admirável ordem do mundo era preciso descrevê-la correctamente e desvendar-lhe a origem, o termo e o processo de evolução. Tal foi o problema imenso com que despontou a Filosofia.

2. De Tales a Demócrito a Cosmografia faz notáveis progressos. O fundador da escola de Mileto sabe que a Lua está mais próxima da Terra que o Sol; Anaximandro afirma que a Terra ocupa o centro do mundo e se sustenta no espaço sem apoio algum; Anaxímenes distingue os planetas das estrêlas fixas; Empédocles ensina que a Lua reflecte a luz solar; em Demócrito encontram-se os astros dispostos na ordem que definitivamente lhes attribuiu a Antigüidade, com a idea de que os seus movimentos diurnos são desiguais e decrescem desde a abóbada das estrêlas fixas até à Lua. Esta cosmografia é geocêntrica, mas deve abrir-se uma excepção a favor do pitagórico Filolau, para quem a Terra, o Sol e os outros astros giravam em volta do fogo central, fonte de tôda a luz, invisível por se encontrar sempre no hemisfério oposto ao nosso; o que implicava o movimento de rotação da Terra com o mesmo período que o seu movimento de translação. Afirmando o duplo movimento da Terra, Filolau é o precursor de Aristarco de Samos e de Copérnico; e a idea pitagórica da harmonia das esferas, que exigia relações numéricas invariáveis entre as distâncias e as revoluções dos diversos planetas, influiu em Kepler.

Na física destes velhos filósofos houve intuições de génio. Sustentando que todos os corpos do universo provêm duma substância única, água, infinito ou ar dos três

Milésios, unidades de Pitágoras, fogo de Heraclito, átomos de Leucipo e Demócrito, ou consistem na mistura de várias substâncias irreductíveis em proporções diversas, como os quatro elementos de Empédocles ou as homeomerias de Anaxágoras; e frizando a universalidade do processo de formação dos corpos a partir da matéria primordial, os pensadores prosocráticos esboçavam o princípio da uniformidade da natureza, base da idea da gravitação. Alguns chegaram a emitir sôbre os movimentos celestes e sôbre a gravidade uma opinião que oferece pontos de contacto com as teorias modernas. Para Anaximandro, Empédocles, Anaxágoras e Demócrito, o mundo que observamos é um turbilhão, visível no movimento do céu, ao qual se deve a formação das matérias da nossa experiência, e também a manifestação da maior ou menor gravidade latente que possuem. Todos os corpos pesam para a Terra, centro do movimento turbilhonar; se certos se elevam à superfície dela, é porque são expulsos por corpos mais pesados; se os astros não caem, é porque a acção centrífuga do turbilhão compensa a gravidade. A analogia com a doutrina newtoniana é claríssima. Há outra analogia, mais surpreendente: a manifestação da gravidade latente subordinada à impulsão turbilhonar lembra a identificação da gravidade com a inércia, efectuada por Einstein. Demócrito disse expressamente que a maior gravidade dos corpos mais densos resulta da sua menor capacidade de movimento, em virtude da qual tendem para a região central, onde é mais lento o turbilhão.

O geocentrismo de Demócrito não era universal e parece que o mesmo se tinha dado com o de Anaximandro. A Terra é o centro do nosso mundo, mas fora dêste há mundos inumeráveis, que são outros tantos turbilhões em diversos estados de evolução. Os corpos pesam para o centro do mundo a que pertencem, mas os mundos não

pesam uns para os outros, porque se movem independentemente. Destas ideas se inspiraram Giordano Bruno e Descartes decorridos dois mil anos.

3. Contra Demócrito vão erguer uma fisica infeliz dois homens não menos eminentes, afirmando enèrgicamente o geocentrismo universal e a diferença radical de estrutura entre as regiões terrestre e celeste do mundo. Para Platão como para Aristóteles, o céu, compreendido entre as estrêlas fixas e a Lua, é a região perfeita. A sua substância é o éter incorruptível, e nêle só existe o género excelente de movimento, que não consiste pròpriamente numa mudança de lugar: a rotação uniforme dum anel circular ou duma esfera em volta do eixo respectivo, perpétuamente mantida por uma actividade divina. A região sublunar, constituída pelos quatro elementos empedoclianos, mas susceptíveis de transmutação recíproca, está sujeita à geração e à corrupção e é a sede de movimentos imperfeitos, ordinariamente translações de um lugar inicial para um lugar final. Esta região não tem movimento de conjunto e ocupa o centro do mundo. O mundo é limitado pela esfera das estrêlas fixas, para além da qual não há espaço. Platão ainda perfilha a opinião de Demócrito sôbre a gravidade; outro tanto não faz Aristóteles, que distingue gravidade e levitação absolutas e relativas no mundo sublunar, e recusa ao mundo celeste qualquer destas qualidades. Cada elemento do mundo sublunar tem um lugar natural, para onde se dirige rectilineamente quando abandonado sem violência: a terra, absolutamente grave, desce na direcção do centro do mundo; o fogo, absolutamente leve, sobe para a atmosfera ígnea adjacente à esfera da Lua (a Via Láctea, os cometas, as estrêlas cadentes e outros «meteoros» formam-se nesta atmosfera); a água e o ar, dotados de gravidade e levitação relativas, sobem ou

descem entre o oceano e a atmosfera inferior. É pois a «forma» de cada elemento que constantemente actua sobre elle e produz o seu movimento natural. Porque, para Aristóteles, tudo o que se move é a cada instante movido por outra coisa. As esferas celestes são movidas pela acção ininterrupta da divindade suprema, extramundana, ou dos astros, que são os deuses secundários (analogamente ao que pensava Platão). O movimento dum projectil é devido a que, no início, o ar sofre um abalo na vizinhança do móvel, e este abalo, propagando-se a outros pontos do ar, impele o projectil continuamente; à medida que o abalo amortece, o móvel cede cada vez mais à gravidade, acabando por se precipitar no seu lugar natural. Dificilmente se conceberá maior antítese em relação à sciência moderna que a desta filosofia da natureza.

Platão é o fundador da astronomia matemática da Antiguidade. No seu sistema atribuem-se pela primeira vez dois movimentos a cada planeta: o movimento comunicado pela rotação da esfera das estrelas fixas em volta do eixo do equador e o movimento produzido pela rotação do «círculo», a que está ligado o planeta, em volta do próprio eixo, que coincide com o eixo da eclíptica; o sentido do segundo movimento é contrário ao do primeiro e a sua duração varia com o astro. A idea da explicação do movimento aparente dos planetas por composição de movimentos circulares uniformes imperou até Kepler.

4. A Astronomia teórica desenvolvem-se na senda traçada por Platão, à medida que progrediam as observações. Eudóxio contruiu o sistema das esferas homocêntricas, que foi aceite, com modificações, por Aristóteles. Mais tarde, Apolónio simplificou muito este sistema pela invenção dos epiciclos, e Hiparco aperfeiçoou a obra de Apolónio introduzindo os excêntricos. Por fim Ptolemeu, continuando

Hiparco, fêz a sistematização astronómica que veio a transmitir-se à Idade média.

A conformidade às aparências imediatas, a fôrça de prejuizos seculares e a autoridade das grandes filosofias metasocráticas explicam o triunfo do geocentrismo na astronomia grega. Epicuro restaurara a física de Demócrito, com algumas alterações, das quais a mais interessante para nós é a atribuição aos átomos de gravidade essencial nunca latente; mas o epicurismo era pouco apropriado para fazer mudar de rumo astrónomos e físicos. Primeiro, Epicuro depressa deixava os outros mundos para se ocupar do nosso, e a êste continuava a dar por centro a Terra, como os seus predecessores; depois, o estudo da Física não o interessava directamente, sendo puro instrumento moral; emfim, pois que o nosso mundo era um dos inumeráveis mundos de todos os tipos possíveis formados casualmente na infinidade do tempo decorrido, cada fenómeno podia receber uma pluralidade de explicações que era útil procurar, mas entre as quais não havia meio de decidir.

A-pesar-de tudo, a Grécia viu nascer o heliocentrismo. Já o platónico Heraclides do Ponto tinha construído um heliocentrismo parcial, fazendo mover Mercúrio e Vénus em volta do Sol para explicar mais simplesmente o facto de os dois primeiros astros sempre acompanharem o terceiro. Aristarco de Samos, inspirando-se de Filolau, foi muito mais longe que Heraclides: para êle, a Terra possui um duplo movimento em volta do seu eixo e em volta do Sol; em tórno dêste astro, que é o centro imóvel do mundo, movem-se também os outros planetas; e o céu imóvel das estrêlas fixas deve estar enormemente afastado do Sol, porque não se observam paralaxes estelares. Para conceber êste sistema, Aristarco teve de romper com a física dominante; estava preparado para isso pelo seu mestre

Estratão, escolarca peripatético que abandonou a filosofia natural aristotélica sob a influência do atomismo. Estratão ensinava que a gravidade é a única força activa do mundo e se estende a todos os corpos, frizando que não há lugares naturais, nem éter, e que os astros são corpos ígneos.

A astronomia heliocêntrica foi duramente combatida pelos filósofos, sobretudo pelos estóicos, que chegaram a atacar o princípio da composição dos movimentos aparentes dos planetas a partir de movimentos menos complexos, e pelos astrónomos, entre os quais só Seleuco fez excepção. A sciência grega repudiava a mais simples e mais fecunda das cosmografias para se embrenhar definitivamente num sistema abstruso, onde, a partir de Hiparco, os fenómenos só puderam ser encaixados à força de complicações sucessivas.

5. Circunstâncias históricas bem conhecidas fazem que Aristóteles e Ptolemeu dominem completamente a física e a astronomia medievais. Só no século XIV os nominalistas parisienses esboçam discordâncias. Buridan encontra num comentador grego de Aristóteles a noção de «ímpeto», e serve-se dela para explicar a possibilidade do movimento dum corpo sem a acção ininterrupta duma impulsão exterior. O ímpeto conserva-se se nada o contraria nem o favorece (movimentos celestes), decresce se sofre resistências (subida dos graves, choques) e cresce se é coadjuvado (queda acelerada dos graves). Começa a ressurgir o pressentimento democritiano da lei de inércia e da identidade das mecânicas celeste e terrestre. Alberto da Saxónia e Oresme procuram a lei da queda dos corpos, e o último sustenta que não é impossível a rotação da Terra e a imobilidade da esfera das estrêlas fixas.

Foi a Renascença que derrubou a concepção escolástica do mundo. Nicolau de Cusã ensina que o universo não

pode ter circunferência, de contrário haveria um espaço exterior ao universo, o que é absurdo. Não tendo circunferência, não pode ter centro absoluto: parece-nos centro a Terra porque nos encontramos nela; dar-se hia o mesmo com um astro qualquer se nos transportássemos para lá. Não sendo centro absoluto, a Terra não pode dizer-se absolutamente imóvel. Desta relatividade do movimento se inspirou Copérnico na sua reforma astronómica. Ao grande polaco o artificio e a confusão do sistema ptolemaico pareceram contrários à simplicidade que a natureza manifesta noutros domínios; deve haver um ponto de vista que permita descrever os movimentos dos astros dum modo mais simples. Êste ponto de vista será o verdadeiro centro imóvel do mundo, embora pareça que êle e os outros astros se movem em volta de nós; porque o facto de um corpo aparentar certo movimento não exige que êle se mova efectivamente como parece e que o observador seja imóvel: pode isso resultar só do movimento do observador, ou do movimento de ambos. Firmado nestes princípios, Copérnico, depois de refutar as razões de ordem estritamente física alegadas desde a Antiguidade contra o movimento da Terra, restaura o heliocentrismo antigo e demonstra, muito mais copiosamente do que Aristarco poderia fazer, que tal concepção fornece uma astronomia mais simples que a geocêntrica e tão completa como ela. Copérnico admite ainda que os movimentos celestes, como naturais, são circulares e uniformes. O movimento rectilíneo só existe quando uma parte se separa do seu todo; é o caso dos corpos à superfície da Terra, que são atraídos por ela, não porque ela é o centro, mas porque é um todo que tende a permanecer como tal. Estamos ainda longe da universal gravitação, mas foi a nobre audácia dêste homem que abriu o caminho para ela.

No século xvi poucas pessoas aderiram à concepção

copernicana. Tycho-Brahe, a quem repugnava o movimento da Terra, imaginou um sistema cinematicamente equivalente ao de Copérnico, mas fisicamente muito diverso. À maneira de Heraclides, Tycho admitia a Terra imóvel no centro do mundo, a Lua e o Sol móveis em volta da Terra, os outros planetas móveis em volta do Sol, e o movimento diurno da esfera das estrélas fixas transmitindo-se aos astros interiores. Com Aristarco, Copérnico afirmara que a esfera das estrélas devia ter um raio muito grande relativamente às dimensões da órbita da Terra, por não se observarem paralaxes nas estrélas; Tycho-Brahe tirava daqui um argumento contra o heliocentrismo, perguntando para que serve o espaço enorme compreendido entre as estrélas fixas e Saturno. Felizmente, o argumento era demasiado pobre para impedir que Giordano Bruno, Kepler e Galileu aderissem a Copérnico e o continuassem brilhantemente.

6. Deve-se ao maior filósofo da Renascença o ter fundado nas suas linhas gerais o sistema do mundo tal como actualmente o concebemos. Bruno aceita a idea fundamental de Copérnico, mas vai muito mais longe que êle. A relatividade do lugar e a relatividade do movimento provam que nem a Terra nem nenhum corpo celeste se pode dizer centro absoluto ou absolutamente imóvel. É perfeitamente possível que o universo, visto de qualquer astro, apresente uma perspectiva análoga à nossa, semelhantemente ao que sucede com o horizonte visual terrestre, que se reforma sempre em volta de nós; o universo será então infinito, e as estrélas inumeráveis, em vez de estarem fixadas a uma esfera-limite, estarão espalhadas pelo espaço etéreo a grandes distâncias mútuas. Isto concorda com a faculdade que possui o nosso espírito de prolongar indefinidamente as grandezas e as formas; é

impossível que o espírito humano supere a natureza, e a infinidade do universo tem de ser real.

Conseqüentemente, Bruno emite uma idea notável, que devia esperar Einstein para ser renovada e desenvolvida: a idea da relatividade do tempo. O tempo mede-se pelos movimentos celestes, e é impossível provar que entre estes movimentos existe algum absolutamente regular; como elles variam com o astro donde são observados, para os diversos astros haverá tempos diferentes.

A gravidade dos corpos terrestres não pode significar que a Terra seja um lugar privilegiado, porque também nos outros astros há gravidade. As partes da Terra juntam-se à Terra, como as do Sol se juntam ao Sol. Afirmando mais que partes do Sol aproximadas da Terra caíriam para a Terra e *vice versa*, Bruno está muito mais perto que Copérnico da idea da gravitação universal.

Bruno põe ainda o princípio de que a natureza é indifferente ao lugar, donde conclui que os astros longínquos devem ser análogos ao Sol e aos planetas, e ter movimentos semelhantes; as estrélas serão sóis, centros de sistemas planetários como o nosso. Além disso, todos os sóis devem mover-se relativamente, e o facto de que ainda não pudemos apreciar estes movimentos explica-se pelas distâncias enormes que separam os sóis entre si e também porque a antiga cosmografia impedia os astrónomos de orientar neste sentido as suas observações. Halley devia provar mais tarde que Bruno tinha razão.

Com a esfera das estrélas fixas, esta concepção derrubava a velha doutrina das esferas homocêntricas. As observações de Tycho-Brahe sobre os cometas, mostrando que estes corpos se aproximam e depois se afastam consideravelmente do Sol, foram apontadas por Bruno como confirmação do seu modo de ver sobre este ponto. De resto as esferas são inteiramente inúteis; a divindade

imamente mantém os movimentos dos astros sem intermediários quaisquer. A cosmologia de Bruno radicava-se no fundamento metafísico a que acabamos de aludir; o universo é a forma desenvolvida da divindade infinita e como tal necessariamente infinito, animado e por tóda a parte análogo.

Kepler perfilha o heliocentrismo rejeitando a opinião de Bruno sôbre a infinidade do universo. Mas ajunta a idea pitagórica de que o espírito divino que preside ao mundo deve revelar-se em relações harmoniosas entre as dimensões e os movimentos dos orbes planetários. A aspição ardente de descobrir estas relações, reforçada pelas ideas da simplicidade da natureza e da maior facilidade de encontrar as relações quantitativas do mundo que quaisquer outras, conduziu-o a estudar profundamente as observações de Tycho-Brahe; os frutos desta actividade foram as três leis célebres das áreas, das elipses e harmónica, que derruíram o velho princípio do movimento circular uniforme e permitiram a Newton edificar a teoria matemática da gravitação. Kepler é de resto um dos precursores directos de Newton.

O sistema heliocêntrico impôs-se definitivamente com Galileu. Adoptando-o primeiro pela razão de simplicidade, Galileu viu depois que a favor dele podiam militar argumentos duma ordem muito diferente. A invenção da luneta permitiu-lhe, com efeito, observar fenómenos até então ignorados ou hipotéticos, como os satélites de Júpiter, as fases de Vénus e as manchas do Sol, cujo estudo decidia irrevogavelmente entre Copérnico e os geocentristas. Ao contrário de Kepler, Galileu admite a infinidade bruniana do universo. A importância de Galileu perante a doutrina da gravitação reside ainda em que, graças ao seu método experimental, foi um dos fundadores da mecânica moderna, formulando o princípio da inércia,

precisando o conceito de fôrça e descobrindo as leis da queda dos corpos terrestres.

7. Germina já o newtonismo, e eis que surge uma vasta síntese cosmológica que há-de criar embaraços à sua difusão.

O ponto de partida da filosofia natural de Descartes é que a única substância do mundo físico é a extensão; tóda a diversidade de aspectos da matéria resulta da divisibilidade indefinida da extensão combinada com o movimento das suas partes. O movimento é, portanto, o fenómeno por excelência, e as leis do movimento serão as leis gerais da Física. Descartes estabelece estas leis *a priori*, deduzindo-as da imutabilidade divina: são a lei da conservação da quantidade de movimento, a lei de inércia e a lei da transmissão do movimento no choque (a primeira e a última inexactamente formuladas). Pela aplicação de tais leis, todos os fenómenos podem explicar-se mecânicamente a partir do estado inicial produzido pelo impulso criador.

Na origem, a matéria ou extensão infinita foi dividida numa infinidade de pequenas partes e a estas foi impresso movimento turbilhonar em volta de centros inumeráveis. Nestes turbilhões, as partes da matéria fragmentaram-se diversamente e certas aglomeraram-se junto dos centros; assim se formaram os astros. Alguns astros vieram a cobrir-se duma crosta sólida; tais crostas diminuíram a velocidade dos turbilhões respectivos, que por fim perderam a independência deixando-se arrastar por outros turbilhões; foi o que sucedeu à Terra, e, antes dela, à Lua. Dêste modo se constituíram os diversos sistemas planetários, que têm por centros o Sol e as estrelas. A permanência dos turbilhões originaes em cada sistema explica os movimentos de rotação e translação dos corpos que lhe pertencem.

Cada astro tem a forma esférica por virtude das pressões em todos os sentidos que nêle exerce a matéria subtil do respectivo turbilhão. Estas pressões explicam a gravidade: um corpo cai para a Terra, por exemplo, porque o turbilhão desta o cola à sua superfície.

Descartes desenvolve estes e outros pontos da sua física até aos últimos pormenores. A-pesar-da sua impo-nência, o sistema cartesiano não era isento de defeitos, e tinha principalmente uma insuficiência manifesta: era impreciso do ponto de vista quantitativo, a-pesar-de serem quantitativas as suas leis fundamentais. Descartes faz ver que as órbitas dos planetas podem não ser perfeitamente circulares; mas limita-se a isto, e as leis de Kepler não aparecem na sua obra. O mesmo succede com as leis de Galileu sôbre a queda dos graves. A evolução posterior da Sciência devia tornar cada vez mais evidente a impossibilidade de conceber a realidade física em tôda a sua plenitude como um mecanismo puro.

Não obstante, fora da Inglaterra preferir-se há por muito tempo a física de Descartes à física dinamista de Newton. Foram necessários esforços consideráveis de homens como Voltaire e Maupertuis para fazer aceitar o sistema newtoniano nos países continentais.

8. Como sempre acontece, Newton teve precusores directos, mesmo no campo exclusivo da teoria da gravitação. Kepler foi talvez o primeiro a emitir a idea de que a gravidade solicita reciprocamente todos os corpos do universo em função das distâncias e das massas. O Sol atrai os planetas, a Terra atrai a Lua, a Lua atrai a Terra; a atracção da Lua sôbre as águas do oceano é a causa das marés. Se uma fôrça não retivesse os astros distanciados, estes precipitar-se hiam uns para os outros em proporção das suas massas. Quanto à variação com a distância,

Kepler hesitou entre a razão inversa do quadrado e a razão inversa da distância simples. A isto retorquiu Bouilleau que, se num corpo qualquer reside realmente a força atractiva concebida por Kepler, a cada distância ela se reparte uniformemente sobre uma superfície esférica; ora a área desta superfície varia proporcionalmente ao quadrado do raio, logo a força variará necessariamente na razão inversa do quadrado da distância. Este raciocínio, que Kant repetirá a-pesar-de não concludente, deve ter sido um indicador para os contemporâneos. Borelli tenta explicar os movimentos dos satélites de Júpiter a partir duma atracção exercida pelo planeta na razão inversa do quadrado da distância, contrabalançada pela força centrífuga. Hooke, o precursor mais nítido de Newton, formula a intenção de construir uma teoria geral dos movimentos planetários fundada nestas três proposições: *a*) cada astro é a sede duma força atractiva, que não só se exerce sobre as suas partes mas também sobre os outros astros; *b*) é esta força que deforma o movimento rectilíneo que a inércia confere aos corpos celestes; *c*) a atracção dum astro por outro é tanto maior quanto menor é a distância que os separa. Servindo-se dum pêndulo, Hooke demonstra experimentalmente que a acção duma força atractiva pode tornar elíptico um movimento não acelerado; mas não obtém resultado algum nas experiências que executa para descobrir a lei de variação da força gravitacional com a distância. Contudo, suspeita que esta lei seja a da razão inversa do quadrado, e tenta resolver o problema da determinação matemática do movimento dum ponto material atraído por uma força central desta natureza; esbarrou, como Borelli, nas dificuldades de ordem técnica que o problema apresentava então.

O génio de Newton soube realizar o programa de Hooke. O seu ponto de partida foi a reflexão de que, não decres-

cendo a gravidade sensivelmente do nível do mar para os cumes das montanhas, era possível que esta força se fizesse sentir na Lua e fôsse justamente a causa de êste astro se não mover conforme à lei de inércia, rectilínea e uniformemente. Mas a verificação desta conjectura exigia o conhecimento da lei de variação da gravidade com a distância. Newton foi procurar esta lei aos movimentos dos planetas em volta do Sol. Se a Terra é sede duma força atractiva, que se exerce sôbre as suas partes e se estende até à Lua, o Sol deve sê-lo também e a atracção solar deve exercer-se sôbre os planetas, causando os movimentos curvilíneos dêstes astros como a Terra causa o do seu satélite. Supondo as órbitas circulares, homocêntricas ao Sol e percorridas uniformemente, a aplicação dos princípios da Dinâmica, definitivamente estabelecidos pelo próprio Newton, e o conhecimento das distâncias e revoluções planetárias mostraram-lhe facilmente que a força atractiva do Sol decresce na razão inversa do quadrado da distância. Anos depois duma tentativa que se frustou devido à utilização duma medida inexacta do raio da Terra, Newton pôde verificar que a gravidade terrestre inversamente proporcional ao quadrado da distância basta para explicar quantitativamente a queda da Lua para a Terra num intervalo de tempo muito pequeno. Mas Kepler tinha provado que as órbitas dos planetas não são circulares; era preciso saber, pois, se a lei encontrada para a força de gravitação podia determinar órbitas elípticas. Mais feliz do que Hooke, Newton achou que a órbita é em geral uma secção cónica focada no Sol, e em particular uma elipse se a velocidade inicial não ultrapassa certo limite. Com esta restrição, chegou a estabelecer a equivalência matemática entre a sua lei de atracção e as leis de Kepler (abstraindo das acções mútuas dos diversos planetas, pequeníssimas em comparação com a do Sol). Notando

finalmente que estas leis regem ainda os movimentos dos satélites em volta dos planetas respectivos, pôde concluir que dois astros quaisquer se atraem na razão inversa do quadrado da distância e proporcionalmente às massas, e dum modo mais geral, visto que à superfície da Terra o pêso dum corpo sempre se divide pelos seus fragmentos, que se atraem segundo a mesma lei dois pontos materiais arbitrários. De posse desta lei universal, Newton funda a dinâmica celeste que Hooke tinha entrevisto, explicando as perturbações do movimento kepleriano dos planetas e da Lua, o movimento dos cometas e o fenómeno das marés. A Astronomia teórica atravessava o momento mais fecundo da sua história.

O cartesianismo e Leibniz, e no mundo estritamente científico Huygens, opuseram-se à teoria da gravitação; mas por fim dirigiram-se para ela atenções mais benévolas. A concepção newtoniana, para mais sólidamente apoiada em factos, oferecia uma visão do mundo verdadeiramente grandiosa: a gravidade, longe de se localizar na Terra, é uma força universal; é por ela que se mantém a união dos astros em sistemas com movimentos admiráveis, como o sistema solar a que pertence o planeta que habitamos; e esta força obedece a uma lei quantitativa simples, que torna possível em princípio o cálculo rigoroso dos movimentos celestes. A efectivação dèste cálculo apresenta dificuldades técnicas que ainda hoje parecem insolúveis. Mas é claro que basta fazê-lo com a aproximação que podem atingir as observações, ou pouco mais. A criação de métodos para obter tal aproximação, iniciada pelo próprio Newton, applicaram-se os maiores géometras do século XVIII, de Euler a Laplace; o resultado foi explicarem-se tanto melhor os movimentos planetários quanto mais êsses métodos se aperfeiçoavam. Isto assegurou o triunfo da teoria da gravitação universal.

## II

9. A realidade da gravitação parece incontestável e pode dizer-se ainda hoje que a lei de Newton exprime quantitativamente este fenómeno com uma exactidão quasi absoluta. Dessa lei não só se deduzem os movimentos keplerianos que os planetas e cometas executam em primeira aproximação, mas também as perturbações sofridas por estes movimentos, com uma precisão atestada eloqüentemente pelo descobrimento de Neptuno. As determinações experimentais da constante da gravitação, feitas nas mais variadas condições, concordam satisfatoriamente. A proporcionalidade da atracção às massas é suficientemente garantida pelo confronto da teoria com certas observações astronómicas, pelas referidas determinações da constante da gravitação e por outras experiências, tais como: comparação das oscilações de pêndulos da mesma substância ou de substâncias diferentes, pesagem de reagentes e de produtos da reacção, pesagem de corpos antes e depois de cristalizados. A proporcionalidade inversa ao quadrado da distância provam-na directamente os movimentos dos periélios, como Newton já fizera notar, e também experiências de laboratório. As experiências demonstram ainda que a constante da gravitação é de facto uma constante universal e não, como o coeficiente da lei de Coulomb, uma constante de meio; e já Laplace tinha mostrado que os movimentos da Terra e da Lua são incompatíveis

com uma absorpção sensível da gravitação por parte dos corpos. Finalmente, não se registou qualquer influência da temperatura.

A-pesar disso, a teoria da gravitação dada por Newton não deve considerar-se intangível. Assim, entre a lei de Newton e os factos nem tudo são concordâncias. No domínio astronómico, principalmente, há desacordos que inquietaram, ainda que pouco numerosos e muito pequenos. Segundo Newcomb, o continuador de Leverrier na grande obra da comparação da teoria dos movimentos planetários com as observações, as diferenças seguintes entre os movimentos observados e os movimentos calculados resistiram a todos os esforços de eliminação: 41" no movimento secular do periélio de Mercúrio, cinco vezes o êrro provável no movimento do nodo de Vénus e três vezes o êrro provável no movimento do periélio de Marte; menos importantes, a primeira pelo seu carácter de incerteza e as outras por desenvolvimento insuficiente da teoria, são a diferença de duas vezes o êrro provável na variação secular da excentricidade de Mercúrio, as irregularidades notáveis no movimento do cometa de Encke e as pequenas irregularidades do movimento da Lua. As observações astronómicas (como as medições físicas) não são pois incompatíveis com uma lei da gravitação diferente da de Newton, desde que essa lei admita esta como aproximação muito forte. Por outro lado, embora Newton tivesse declarado expressamente que considerava a acção a distância filosoficamente impossível e que se limitara a estabelecer a existência da gravitação sem nada pretender quanto à sua natureza, é inegável que a teoria exposta nos *Principia* admite que a atracção dum corpo por outro se modifica instantâneamente quando o segundo corpo se desloca, de modo a manter-se a cada momento a validade da lei newtoniana. Êste inconveniente impele a reduzir

a misteriosa força a algum fenómeno menos ininteligível, ou pelo menos a enquadrá-la numa teoria que lhe atribua uma velocidade finita de propagação.

Tais possibilidades de transformação da teoria de Newton realizaram-se tôdas, e de múltiplos modos, com mais ou menos êxito. Ao intuir a gravitação universal, Newton punha perante si um problema que afinal não resolveu definitivamente: edificar uma teoria matemática do fenómeno novo, sujeita o menos possível a objecções filosóficas e em tudo conforme à experiência.

10. Das discordâncias existentes entre a teoria newtoniana e as observações, aquela que mais preocupou os astrónomos e os físicos foi a do periélio de Mercúrio. Não só é ela muito maior que as outras, mas ainda aumentou de 3'' entre Leverrier e Newcomb, a-pesar-de êste astrónomo ter trabalhado sôbre dados muito mais numerosos e de maior precisão que os daquele. Presentemente, esta discordância é mesmo elevada a 43''. Isto prova que ela não é illusória, mas real. Portanto, ou existe massa perturbadora capaz de produzi-la, ou a lei de Newton não é a verdadeira lei da gravitação.

A hipótese da massa perturbadora foi já examinada por Leverrier. Êste astrónomo encontrou que um planeta intramercurial único seria tal que poderia ver-se sem luneta nas suas grandes digressões, e estaria pois descoberto há muito tempo; é mais admissível a suposição dum grupo de asteróides intramercuriais, mas as observações da superfície do Sol empreendidas posteriormente nunca puderam confirmá-la. Newcomb procurou saber se a massa perturbadora seria a protuberância equatorial do Sol devida ao achatamento ignorado dêste astro; mostrou-lhe o cálculo que entre os diâmetros equatorial e polar do Sol existiria então a diferença de 1'', quantidade incompatível com as

observações. A suposição dum anel de asteróides e a de matéria intramercurial difusa são também afastadas por Newcomb. Parece impor-se a conclusão de que a massa perturbadora não existe.

A lei ordinária da gravitação deve pois ser substituída. Newton demonstrará que a menor alteração do expoente da sua lei introduz modificações nos movimentos dos periélios. Êste resultado sugeriu a Hall a proposta da expressão

$$f \frac{m m'}{r^{2+\lambda}},$$

onde  $f$  é a constante de Newton e  $\lambda=0,00000016$ , como lei de atracção entre duas massas  $m$  e  $m'$  distantes de  $r$ . A lei de Hall explica o movimento anómalo do periélio de Mercúrio, sem deixar de explicar, graças à pequenez de  $\lambda$ , tôdas as observações conformes à lei de Newton. Mas é uma lei forjada *ad hoc* (o valor de  $\lambda$  foi calculado a partir da anomalia referida) e nem elimina a acção a distância.

11. Procurou-se a solução da dificuldade numa generalização da Lei de Newton para corpos em movimento. Gauss, Riemann e Weber tinham proposto, para exprimir a acção mútua de duas cargas eléctricas pontuais, fórmulas que se reduziam à lei de Coulomb, portanto formalmente à lei de Newton, no caso de duas cargas em repouso. Naturalmente, ocorreu transportar para a gravitação estas leis electrodinâmicas. Fê-lo primeiro Zöllner com a lei de Weber: a atracção, que a massa  $m$  exerce sôbre a massa  $m'$  à distância  $r$ , deriva do potencial generalizado

$$V = f \frac{m m'}{r} \left( 1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right),$$

onde  $f$  é a constante newtoniana e  $c$  é outra constante.

Êste potencial reduz-se ao potencial newtoniano se  $m'$  repousa relativamente a  $m$  e difere dêle muito pouco se  $m'$  se move;  $c$  é com efeito a velocidade com que o potencial se propaga a partir de  $m$  e vale, segundo Weber, 439450 km. por segundo. A lei proposta por Zöllner dá para o periélio de Mercúrio o movimento anómalo de  $7''$  e não afecta os outros movimentos. Se se faz  $c=300000$  km./sec., obtém-se  $14''$  em vez de  $7''$ . A anomalia explica-se inteiramente supondo  $c$  sensivelmente igual a metade da velocidade da luz.

Tisserand propôs a adopção da lei de Gauss. A atracção de  $m$  sôbre  $m'$  seria em grandeza

$$F = f \frac{m m'}{r^2} \left( 1 + \frac{2v^2}{c^2} - \frac{3}{c^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 \right),$$

onde  $v$  designa a velocidade de  $m'$  relativamente a  $m$ . Para o mesmo valor de  $c$ , esta lei dá um movimento perielíaco duplo do que dá a lei de Weber. Objectou-se a Tisserand que a lei de Gauss não admite potencial.

A lei de Riemann foi examinada por Lévy. O potencial é agora

$$V = f \frac{m m'}{r} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right),$$

e obtém-se com êle o mesmo movimento do periélio que com a lei de Gauss, se o valor de  $c$  é o mesmo nas duas leis. Considerando provável que a gravitação se propague com a velocidade da luz, Lévy propõe a lei

$$V = V_{\text{Weber}} + \alpha (V_{\text{Riemann}} - V_{\text{Weber}})$$

que, com  $c=300000$  km./sec., explica o movimento do

periélio de Mercúrio para  $\alpha=2$ , e pode ser aceite em Electrodinâmica, tanto como a lei de Weber.

Estas soluções representam um progresso evidente sôbre a solução de Hall, mas pecam ainda por um certo grau de artificialidade.

As ideas de Lorentz sôbre a natureza da gravitação conduziram-no a extrair a lei dêste fenómeno das equações fundamentais da sua teoria electrónica. A lei de Lorentz difere da de Newton em dois termos adicionais, que contêm respectivamente os factores  $\frac{p^2}{c^2}$  e  $\frac{pv}{c^2}$ , onde  $p$  é a velocidade (constante) do corpo attraente,  $v$  a velocidade do corpo attraído e  $c$  a velocidade da luz. Como na lei de Gauss, os dois termos adicionais são muito pequenos e não produzem alteração sensível nos movimentos explicados pela lei newtoniana. Mas esta ausência de alteração subsiste quási inteiramente no movimento do periélio de Mercúrio, de modo que a teoria de Lorentz, a-pesar-das suas qualidades, tem de declarar-se insufficiente.

Laplace já indicara uma generalização da lei de Newton para corpos em movimento. Em seu parecer, do corpo attraente, suposto imóvel, saem ondas de gravitação newtoniana que se propagam no espaço com velocidade finita  $c$ ; no instante em que uma destas ondas chega aó corpo attraído, animado da velocidade  $v$ , tudo se passa como se êste corpo estivesse em repouso e a onda possuísse uma velocidade igual e directamente oposta (além da sua velocidade de propagação). Laplace conclui daqui, violentando um pouco as coisas, que o segundo corpo é attraído por duas fôrças: uma dirigida para o corpo attraente e sensivelmente igual à fôrça newtoniana, outra oposta à sua velocidade e de grandeza  $f \frac{mm'}{r^2} \cdot \frac{v}{c}$ . É o resultado que se encontraria se se jüntasse simplesmente à atracção de

Newton uma resistência de meio, proporcional à velocidade e inversamente proporcional ao quadrado da distância. A lei de Laplace não dá deslocamento secular do periélio, e introduz na longitude média uma alteração secular tão forte que, no caso da Lua, é preciso supor a velocidade de propagação das ondas igual a trinta milhões de vezes a da luz para não haver contradição com as observações.

Posteriormente, Lehmann-Filhès propôs uma hipótese análoga. A atracção que, num dado instante, o corpo *B* recebe da parte do corpo *A* é uma atracção newtoniana emitida num instante anterior, quando *A* ocupava outra posição no espaço absoluto; em geral, essa atracção não será dirigida para a posição actual de *A*, nem dependerá newtonianamente da distância actual de *A* e *B*. Como na hipótese de Laplace, há uma velocidade finita de propagação; mas a causa do desvio em relação à lei de Newton é aqui o movimento absoluto do corpo atraente e não o movimento relativo do corpo atraído. A influência deste desvio é também uma grande alteração secular das longitudes médias; para a Lua, esta alteração só será aceitável se a velocidade com que se propaga a gravitação fôr um milhão de vezes maior que a da luz.

Outra teoria que conserva a lei de Newton só para corpos em repouso é a de Gerber. O corpo atraente *A* emite para o corpo atraído *B* um potencial, que se exprime newtonianamente em função da distância dos dois corpos no momento da emissão; mas, além de que este potencial se propaga relativamente a *A* com grande velocidade *c*, há uma demora na comunicação efectiva ao corpo *B* do potencial que o atinge, demora que dilata a duração do transporte do potencial de *A* para *B* na razão da velocidade *c* para a velocidade do potencial relativamente a *B*. Tais hipóteses conduzem à seguinte expressão do potencial uni-

ário efectivamente recebido por  $B$  à distância  $r$  de  $A$ :

$$V = \frac{fm}{r \left(1 - \frac{1}{c} \frac{dr}{dt}\right)^2},$$

onde  $m$  é a massa de  $A$ . A aplicação desta fórmula ao movimento de Mercúrio dá a anomalia secular do periélio para  $c = 305500$  km. por segundo. A teoria de Gerber é pois compatível com as observações quando se atribui à gravitação velocidade de propagação igual à da luz; mas algumas das hipóteses que lhe servem de base são difficilmente aceitáveis.

12. As tentativas no sentido de reduzir a gravitação a outro fenómeno físico surgiram muito cedo. O próprio Newton emitiu a hipótese, mais tarde renovada por Euler, de que a gravitação é um puro efeito de diferenças na pressão exercida pelo éter sobre os corpos. O éter é para Newton um meio muito subtil e muito elástico, que existe por tôda a parte, dentro dos corpos e fora dêles. A presença dum corpo único produziria neste meio uma heterogeneidade tal, que a sua densidade seria mínima no interior do corpo e crescente com a distância no exterior. Se em vez dum corpo se supõem dois, as duas heterogeneidades que êles produziriam isoladamente combinam-se numa heterogeneidade mais complexa, mas é claro que o éter que rodeia um qualquer dêstes corpos é menos denso do lado do outro corpo que do lado oposto; como o meio deformado é sede de fôrças elásticas, que causam à superficie dum corpo uma pressão tanto maior quanto mais denso é o éter que está em contacto com ela, resulta que os dois corpos considerados devem atrair-se mutuamente.

A heterogeneidade do éter concebida por Newton foi

admitida por João Bernoulli, e depois por Riemann. Mas, para estes autores, o éter é um fluido, no qual a heterogeneidade determina correntes dirigidas para o interior dos corpos; são estas correntes que explicam a gravitação. Segundo Bernoulli, o éter acumula-se dentro dos corpos; na opinião de Riemann, o éter extingue-se ao penetrá-los, « passando ao mundo do espírito »: soluções pouco satisfatórias duma dificuldade.

Maxwell fêz a objecção decisiva a estas teorias. A energia de gravitação, idêntica para elas à energia de deformação do éter, será mais elevada onde a deformação fôr mais intensa; no caso dum corpo attraente único, portanto, será tanto maior quanto menor fôr a distância. Ora a verdade é justamente o contrário: a energia diminui com a distância, porque a fôrça de gravitação é atractiva.

Alguns físicos attribuiram a gravitação a vibrações do éter propagadas sob a forma de ondas longitudinais. Para Hooke, os átomos de qualquer corpo vibram perpétuamente; as vibrações comunicam-se ao éter, propagam-se através dêste e, ao atingirem outro corpo, aproximam-no do primeiro. A experiência mostra efectivamente que, em certas condições, um corpo vibrante atrai pequenos objectos vizinhos; mas noutras condições observa-se uma repulsão, e assim a hipótese de Hooke é insufficiente, necessitando ser completada com hipóteses adicionais que garantam sempre uma atracção. Bjerknæs encontrou estas hipóteses estudando a questão matematicamente. Partindo da suposição dum éter incompressível, ao qual se comunicam e através do qual se propagam longitudinalmente pulsações perpétuas dos átomos supostos esféricos e geomètricamente iguais, Bjerknæs pôde demonstrar que dois átomos, situados a distância grande relativamente ao raio comum, devem atrair-se proporcionalmente às intensidades das suas pulsações e na razão inversa do quadrado

da distância, desde que estas pulsações tenham a mesma frequência e estejam em fase. Se se admite pois a igualdade de frequência e de fase para as pulsações de todos os átomos, supondo além disso as intensidades das pulsações proporcionais às massas, explica-se a lei de Newton qualitativa e quantitativamente. Objectou-se a Bjerknæs que o sincronismo das pulsações atómicas é suficientemente extraordinário para exigir por seu turno uma explicação.

Outras teorias com o mesmo objectivo basearam-se na hipótese de que o éter é constituído por partículas iguais extremamente pequenas, que se movem em tôdas as direcções com enorme velocidade e produzem a gravitação pelos seus choques com os corpos. Segundo Lesage, o primeiro autor que desenvolveu semelhante idea, um átomo ponderável único no seio do éter não teria movimento; as impulsões que lhe comunicariam as partículas etéreas compensar-se-hiam exactamente, pela razão de simetria. Mas se existem dois átomos a distância, o equilíbrio é impossível: cada um intercepta parte dos choques que o outro receberia se fôsse único, donde resulta o equivalente duma atracção mútua. Admitindo que os átomos são muito grandes relativamente às partículas etéreas, pode provar-se que esta atracção é inversamente proporcional ao quadrado da distância, e directamente proporcional às massas se a substância dos átomos é a mesma. Para evitar que a atracção se anule por virtude da reflexão das partículas à superfície dos átomos, Lesage supõe-as desprovidas de elasticidade; assim, serão reflectidas com uma velocidade muito menor e a atracção é possível. Lesage admite também que os átomos possuem uma grande porosidade para as partículas etéreas, afim de conformar a sua teoria ao facto de não haver obstáculos à gravitação.

Mais tarde, Isenkrahe aperfeiçoou esta teoria em certos

pontos. A concepção do éter como um gaz permite-lhe utilizar os resultados da teoria cinética dos gazes na expressão matemática da idea fundamental de Lesage; a porosidade dos átomos para as partículas etéreas é substituída pela porosidade dos corpos, que são constituídos por átomos muito distantes entre si; e a proporcionalidade da atracção às massas resulta de serem estes átomos absolutamente iguais (talvez idênticos às próprias partículas de éter). A obra de Isenkrahe foi melhorada por Rysanek com a introdução da lei de distribuição das velocidades devida a Maxwell.

A hipótese dos choques etéreos teve grande voga, e Poincaré discutia-a ainda no começo d'êste século. Entre nós, o Sr. Dr. Costa Lobo insistiu recentemente nela. Mas as dificuldades a que está sujeita aconselham antes a abandoná-la. A gravitação só pode existir se as partículas de éter perdem velocidade nos choques com os átomos, e a maneira mais simples de obter isto consiste em supôr os choques não elásticos; mas surge a questão de saber em que se transforma a energia cinética perdida nos choques. Se esta energia ficasse nos átomos sob a forma de calor, a temperatura da Terra, segundo Poincaré, elevar-se-hia de  $10^{26}$  graus por segundo. Encontrou-se que a posição dum corpo entre dois outros modifica essencialmente a atracção d'êstes, e numa proporção demasiado forte para ser compatível com os factos. Calculou-se que a resistência oferecida aos movimentos planetários pelo éter corpuscular não pode harmonizar-se com as observações se as partículas etéreas não possuem velocidades enormes, da ordem de grandeza do quadrado da velocidade da luz (em km./sec.). A hipótese particular de serem os átomos ponderáveis idênticos às partículas de éter contradiz a variação da atracção com a distância, porque então um átomo dum corpo só pode defender um átomo doutro

corpo dos choques das partículas que se movem na linha dos centros dos dois átomos, pelo menos (e é o caso dos astros) quando a distância dos dois corpos fôr tal que perante ella se possam considerar nulas as dimensões atómicas. Mencionemos ainda a objecção de du Bois-Reymond: suponha-se um corpo com a forma de tronco de cone circular recto e um átomo exterior situado no vértice da superfície cónica do corpo; a atracção que o corpo exerce sobre o átomo será medida pela diferença entre duas impulsões sofridas por este: a impulsão das partículas etéreas que provêm da região interior à segunda fôlha do cone, e a impulsão das partículas menos numerosas que, atravessando o corpo, provêm da região interior à primeira fôlha; o segundo termo da diferença diminui quando a massa do corpo aumenta; mas o primeiro termo mantém-se constante, donde resulta que a diferença não pode tornar-se arbitrariamente grande, como deveria ser. É evidente que se caíria numa dificuldade não menor declarando infinito este primeiro termo.

13. Convencidos da impossibilidade duma explicação mecânica da gravitação, como era a que se propunham dar as teorias precedentes, — tanto mais que tôdas tendiam a justificar a lei de Newton, já considerada pura aproximação da lei exacta desconhecida, — certos físicos tentaram para o fenómeno refractário uma explicação electromagnética. Lorentz começou por ensaiar uma forma nova da hipótese de Hooke: a gravitação seria devida a vibrações electromagnéticas especiais produzidas pelos iões constitutivos dos corpos e propagadas por meio de ondas etéreas de comprimento muito pequeno. O resultado obtido foi a possibilidade duma atracção, contanto que affluisse continuamente energia electromagnética à matéria ponderável: qualquer artifício, tendente a evitar esta con-

centração da energia nos corpos, tinha por consequência o desaparecimento da força atractiva. Em face disto, Lorentz decidiu-se a trilhar outro caminho. Aproveitando uma idea de Mossoti, Zöllner tinha opinado que cada átomo ponderável é constituído por duas partículas dotadas de cargas eléctricas iguais e contrárias, e que a gravitação mútua de dois átomos resulta de ser a repulsão eléctrica de duas cargas do mesmo sinal inferior à atracção eléctrica de duas cargas de sinais contrários respectivamente iguais em grandeza. Foi esta hipótese, primeiro tratada por Weber a partir da sua lei electrodinâmica, que Lorentz adaptou à teoria electrónica e desenvolveu completamente pela aplicação das equações fundamentais desta teoria. A gravitação reduzida a acções electromagnéticas, portanto propagada com a velocidade da luz, obedecendo a uma lei tão aproximada à de Newton para as velocidades astronómicas que ambas explicam quasi todos os factos, são motivos de sedução na teoria de Lorentz. Mas o movimento residual do periélio de Mercúrio, já atrás o dissémos, ergue-se como um testemunho vivo da sua insuficiência.

Acrescentemos que a redução da gravitação ao electromagnetismo, proposta por Lorentz, pode dizer-se puramente verbal. Basta fazer na sua teoria uma mudança de notações para obter a sobreposição das duas ordens de fenómenos. Desde o comêço, isto era inevitável. A idea de que a gravitação resulta de ser a atracção eléctrica de duas cargas elementares de sinais contrários superior à repulsão eléctrica de duas cargas elementares do mesmo sinal, e a idea de que tal superioridade é que resulta, pelo contrário, de se sobrepor àquelas acções eléctricas, rigorosamente iguais, a gravitação mútua das cargas, são duas ideas equivalentes desde que à segunda se junte a hipótese de que a gravitação é regida de certo modo pelas

leis da Electrodinâmica. Assim a teoria de Lorentz, essencialmente, não é mais que uma tentativa de transporte das equações da Electrodinâmica para a gravitação, e como tal a mencionámos noutra lugar (1).

14. Dois séculos de esforços não tinham conseguido uma solução satisfatória do problema da gravitação universal. Malogradas sucessivamente as tentativas de redução a fenómenos mecânicos ou electromagnéticos, malogradas também as teorias que atribuíam à gravitação o carácter de fenómeno irreductível, de propriedade *sui generis* da matéria, a Física transpunha o limiar do século xx numa atitude de verdadeira impotência perante o enigma formidável. Atingia-se um desses momentos históricos em que um problema rebelde exige imperiosamente uma revolução nas ideas. O sentido da revolução, porém, não podia tal problema indicá-lo neste caso; estava reservado esse papel a certas questões de Electrodinâmica, igualmente críticas para a sciência da época. Num rasgo de génio, Einstein elimina estas questões fundando a física da Relatividade; abrem-se logo rumos novos ao problema da gravitação, e um deles, o do próprio Einstein, ia conduzir à solução que finalmente se impõe, entre tôdas a mais original, a mais bela e a única conforme à experiência.

---

(1) Cf. Zenneck, *Gravitation*, in-*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Band V, Heft 1, Leipzig und Berlin, donde extraímos a maior parte da informação dêste capítulo.

### III

15. A concepção de Descartes, segundo a qual a luz consistiria numa emissão de partículas tenuíssimas, que se faria sentir instantâneamente a tôdas as distâncias por virtude da inexistência do vácuo, em breve foi arruinada por Rômer com a descoberta da velocidade finita da luz. Teve melhor fortuna a teoria newtoniana da emissão corpuscular através do espaço vasio, intermolecuar ou sideral. No comêço do século XIX, porém, os físicos foram forçados, pelo desenvolvimento da experiência óptica, a substituí-la pela teoria ondulatória que Fresnel, guiado por Huygens, acabava de propor. O conceito de éter, que neste momento se implantou na Física, foi fecundo em resultados positivos; aos problemas que levantou, todavia, mais que a estes resultados, deve êsse conceito a sua grande importância histórica.

Maxwell deu à teoria ondulatória uma forma nova, que suplantou a anterior depois das célebres experiências de Hertz. Para Fresnel, o éter é um meio imponderável susceptível de vibrações transversais como um sólido elástico, e nestas vibrações mecânicas consiste justamente a luz. Segundo Maxwell, o éter é o dieléctrico imponderável existente no espaço vulgarmente chamado vasio, e serve de suporte, como os outros dieléctricos, a campos electromagnéticos que se propagam ondulatôriamente; estes campos são a luz, se a freqüência está compreendida

em certos limites. A teoria electrónica de Lorentz, baseada nas equações de Maxwell, conservou o essencial desta concepção; a diferença é que o éter é agora o único suporte real dos campos: tôdas as propriedades eléctricas ou magnéticas, que manifestam macroscopicamente os corpos ponderáveis, são mero resultado estatístico das posições e dos movimentos dos electrões existentes nesses corpos.

As equações electrodinâmicas fundamentais foram estabelecidas por Maxwell para um sistema de referência imóvel no éter e para corpos em repouso neste sistema. Foi Hertz quem deu a primeira solução do problema da electrodinâmica dos corpos em movimento. As equações de Hertz possuem uma propriedade interessante: quando referidas a um sistema invariavelmente ligado ao corpo em que os fenómenos electrodinâmicos se produzem, tornam-se idênticas às equações de Maxwell. O que, portanto, Hertz ajunta à teoria de Maxwell é essencialmente, do ponto de vista atomista, a hipótese da convecção total do éter contido nos corpos. Mas esta hipótese é incompatível com a experiência de Fizeau, que prova que a convecção do éter, a existir, é parcial. Experiências eléctricas posteriores contradizem-na também; e duma experiência óptica feita por Michelson em 1925 conclui-se claramente que o éter não sofre convecção por virtude da rotação da Terra. Pode acrescentar-se que é difícil admitir que o éter seja transportado totalmente por um gaz, qualquer que seja o estado de rarefacção dêste.

A teoria electrónica deu outra solução do problema. Sem admitir convecção alguma do éter, Lorentz conseguiu explicar numerosos fenómenos electrodinâmicos, incluindo o próprio coeficiente fresneliano de «convecção» que Fizeau atestara experimentalmente. Tão grande êxito justifica o esforço que fez Lorentz para enquadrar nesta

teoria os resultados de experiências discordantes de que em breve falaremos.

O éter imóvel de Lorentz é o equivalente electrodinâmico do espaço absoluto de Newton. É para um sistema de coordenadas absolutamente fixo que as equações da mecânica newtoniana são originariamente válidas; para um sistema em movimento, estas equações adquirem em geral uma forma mais complexa, e os fenómenos mecânicos apresentam um aspecto diferente. Anàlogamente, as equações fundamentais da electrodinâmica de Lorentz valem para um sistema fixo no éter; perdem a sua forma simples, e o mesmo sucede aos fenómenos regidos por elas, se se passa a um sistema que não satisfaz a essa condição. Guiado por êste paralelismo, Lorentz chegou a identificar o éter com o espaço absoluto; a propriedade de desenvolver forças de inércia nos sistemas acelerados podia atribuir-se melhor ao éter concreto que a um espaço absoluto não substancial.

Há porém uma diferença importante a registar. Na Mecânica, para os sistemas em translação uniforme valem as mesmas equações que para um sistema fixo; donde resulta que o espaço absoluto é inacessível ao físico que faz experiências mecânicas num sistema não acelerado (princípio de relatividade da mecânica newtoniana). Na Electrodinâmica, a translação uniforme do sistema é bastante para dar às equações uma forma nova, que contém essencialmente a velocidade da translação; deve pois ser possível, por meio de experiências electrodinâmicas executadas num sistema não acelerado, determinar a velocidade absoluta do sistema. Estas conclusões valem em especial para a Terra, cuja aceleração é suficientemente pequena para não se manifestar na curta duração duma experiência.

Se a previsão se confirma, o homem terá feito um

grande descobrimento no domínio da natureza; o mais inacessível dos elementos cósmicos terá cedido à sua inteligência. ; Que não poderemos esperar no futuro da contínua aplicação do esforço humano ao mistério que nos envolve?

As experiências vão produzir uma decepção e uma surpresa; o homem não encontrará o éter que procurava, mas descobrirá que o espaço e o tempo, estas formas gerais do mundo, não são feitos como sempre pareceu, sim doutro modo; e esta descoberta será a fonte donde brotarão muitas outras, e dará uma física nova.

16. A questão já tinha sido formulada a propósito do éter de Fresnel. Segundo a teoria, os três caracteres dum raio luminoso, frequência, velocidade e direcção, devem alterar-se quando o observador passa do estado de repouso no éter, digamos como atrás repouso absoluto, ao estado de movimento; e estas alterações dependerão da velocidade absoluta do observador. Um fisico terrestre poderia portanto, mediante a observação cuidada de tais fenómenos, calcular a velocidade absoluta da terra. As alterações de frequência e de direcção (efeito Doppler e aberração de Bradley) foram medidas o melhor possível, mas não permitiram atingir o *desideratum*; quanto à alteração de velocidade, não foi confirmada pela experiência. A explicação do insucesso deu-a a própria teoria de Fresnel. As medidas dos experimentadores não podiam ultrapassar a primeira ordem, isto é a ordem de grandeza da razão da velocidade da matéria ponderável para a velocidade da luz; ora, se nas fórmulas se desprezam as quantidades de segunda ordem, a alteração da velocidade da luz anula-se, a aberração e o efeito Doppler deixam de depender da velocidade absoluta para depender essencialmente só da velocidade relativa. Para o efeito Doppler,

por exemplo, no caso particular em que a fonte luminosa e o observador se movem numa mesma recta com velocidades absolutas  $v_0$  e  $v_1$  contadas positivamente no sentido fonte-observador, tem-se rigorosamente

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{v_1}{c}}{1 - \frac{v_0}{c}},$$

onde  $\nu$  é a frequência própria,  $\nu'$  a frequência observada e  $c$  a velocidade da luz; encontra-se imediatamente, desenvolvendo e introduzindo a velocidade  $v$  do observador relativa à fonte,

$$\nu' = \nu \left( 1 - \frac{v}{c} - \frac{v v_0}{c^2} - \dots \right),$$

$$v = v_1 - v_0.$$

Bastaria que a segunda ordem fôsse acessível à medida para que o conhecimento de  $v$  desse um valor muito aproximado de  $v_0$  e, portanto, de  $v_1$ ; tendo de desprezar a segunda ordem, é simplesmente

$$\nu' = \nu \left( 1 - \frac{v}{c} \right),$$

onde já não figuram essencialmente velocidades absolutas.

A teoria de Lorentz confirmou estas conclusões e estendeu-as aos outros fenómenos electrodinâmicos. Limitando as fórmulas aos termos de primeira ordem, os efeitos electrodinâmicos, produzidos nos corpos em movimento, ou se anulam ou dependem só das velocidades relativas; não assim se se conservam os termos de segunda ordem, os quais dependem das velocidades absolutas de maneira essencial. Emquanto se furtarem à medida as quantida-

des de segunda ordem será pois impossível evidenciar o movimento absoluto da Terra; mas se se chega a vencer esta dificuldade técnica em qualquer experiência electro-dinâmica, o movimento absoluto da Terra ficará conhecido.

Tôdas as experiências se mostraram conformes à primeira parte da proposição. Não sucedeu o mesmo com a segunda parte. Em 1881, Michelson concebeu uma experiência óptica que permitia, pelo emprêgo dum interferómetro de alta precisão, medir um efeito de segunda ordem. Dois fascículos luminosos, saídos da mesma fonte monocromática, interferem depois de fazer trajecto de ida e volta ao longo de dois braços iguais e perpendiculares; se se permutam os braços dando ao instrumento uma rotação de  $90^\circ$ , deve observar-se nas franjas de interferência um deslocamento de segunda ordem. Com efeito, sejam:  $a$  o comprimento de cada braço,  $\varphi$  o ângulo que faz um deles com o sentido do movimento absoluto da Terra numa época arbitrária,  $x$  o trajecto absoluto dum raio luminoso que percorre êste braço no sentido positivo,  $y$  o trajecto do mesmo raio quando percorre o braço em sentido contrário,  $x'$  e  $y'$  os trajectos absolutos da Terra correspondentes a  $x$  e  $y$ ,  $\beta$  a razão da velocidade absoluta da Terra para a velocidade  $c$  da luz. Tem-se imediatamente

$$x^2 = a^2 + x'^2 + 2 a x' \cos \varphi,$$

$$y^2 = a^2 + y'^2 - 2 a y' \cos \varphi,$$

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \beta;$$

atendendo a que  $x$  e  $y$  são quantidades positivas, estas equações dão para a duração do duplo trajecto do raio luminoso

$$(1) \quad \frac{x+y}{c} = \frac{2a}{c} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \varphi}}{1-\beta^2}.$$

Se  $\psi$  é o ângulo análogo a  $\varphi$  para o outro braço, a diferença das durações dos dois duplos trajectos é

$$\frac{2a}{c} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} (\sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{1-\beta^2 \sin^2 \psi})$$

ou, desprezando a quarta ordem,

$$\varepsilon' = \frac{a}{c} \beta^2 (\sin^2 \psi - \sin^2 \varphi).$$

Dando ao instrumento uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$ , de modo que o primeiro braço venha a ocupar a posição anterior do segundo,  $\psi$  substitui-se a  $\varphi$  e  $\varphi + \pi$  a  $\psi$ ; a diferença das durações dos dois duplos trajectos na nova posição é pois

$$\varepsilon'' = -\varepsilon',$$

donde

$$\varepsilon' - \varepsilon'' = \frac{2a}{c} \beta^2 (\sin^2 \psi - \sin^2 \varphi).$$

O produto  $c(\varepsilon' - \varepsilon'')$  é a diferença entre as diferenças de marcha dos dois raios na primeira e na segunda posições do instrumento; o sistema das franjas de interferência deve pois, quando se passa duma posição à outra, deslocar-se de tantas franjas quantos os comprimentos de onda  $\lambda$  contidos em  $c(\varepsilon' - \varepsilon'')$ , ou seja da quantidade de segunda ordem

$$\frac{2a}{\lambda} \beta^2 (\sin^2 \psi - \sin^2 \varphi).$$

Esta quantidade atinge o máximo valor absoluto

$$\varepsilon = \frac{2a}{\lambda} \beta^2$$

se, na posição inicial, um dos braços do instrumento tem a direcção do movimento absoluto da Terra (p. ex.  $\varphi=0, \psi=\frac{\pi}{2}$ ).

Se se faz a experiência, utilizando várias posições iniciais do instrumento, sem observar deslocamento das franjas, poderá explicar-se o facto admitindo que a Terra, nessa época, se encontrava praticamente em repouso absoluto. Mas sendo assim, seis meses depois a Terra terá velocidade absoluta vizinha de 60 km./sec. e a repetição da experiência deve dar resultado positivo;  $\beta^2$  é agora da ordem de  $10^{-8}$  e  $\lambda$  é da ordem de  $10^{-5}$  cm., portanto não é necessário exagerar o valor de  $\epsilon$  para que  $\epsilon$  se torne apreciável.

Ora, em nenhuma posição do instrumento e em nenhuma época do ano Michelson verificou deslocamento das franjas superior aos erros de observação. O mesmo succedeu em 1887, quando, de colaboração com Morley, aquele físico repetiu a experiência em condições de precisão maior ainda. Por meio dum artifício simples, o comprimento de cada braço do interferómetro era elevado a 11 metros; a luz era a da risca do sódio com  $\lambda=0,59\mu$ ; tomando  $\beta^2=10^{-8}$ , que é a média mais desfavorável (correspondente à hipótese de ser a velocidade absoluta do Sol inferior ou igual à velocidade da Terra na sua órbita relativa), tem-se  $\epsilon=0,37$ . O máximo deslocamento encontrado não excedia a vigésima parte deste valor e caía dentro dos limites dos erros de observação.

17. Não havia dúvida: o efeito anunciado não existe. Michelson viu nisto uma prova da convecção total do éter pela Terra; já dissemos porque tal opinião é insustentável. É também inadmissível a hipótese explicativa formulada mais tarde por Ritz, de que a velocidade da luz

depende do movimento absoluto da fonte luminosa; De Sitter estabeleceu firmemente o contrário pelo estudo das observações das estrélas duplas. Para salvar a sua electrodinâmica, Lorentz emitiu uma hipótese audaciosa que as experiências, contudo, não puderam contradizer. É claro que o efeito de Michelson desapareceria rigorosamente da teoria se o segundo membro de (1) não dependesse de  $\varphi$ ; ora isto consegue-se formalmente multiplicando  $a$  por

$$(2) \quad \frac{f(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \varphi}},$$

onde  $f(\beta)$  é uma função positiva arbitrária independente de  $\varphi$ ; basta pois admitir que o movimento através do éter produz nos corpos a deformação caracterizada pelo coeficiente (2), para que a experiência de Michelson fique inteiramente explicada. Será inacessível à medição directa tal deformação, visto que também participam dela as réguas de medida.

A deformação suposta pode ser definida pelas suas componentes longitudinal e transversal, respectivamente

$$f(\beta) \quad \text{e} \quad \frac{f(\beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

obtêm-se pois as suas formas mais simples fazendo

$$f(\beta) = 1,$$

o que dá simplesmente uma dilatação transversal, ou

$$(3) \quad f(\beta) = \sqrt{1 - \beta^2},$$

o que dá simplesmente uma contracção longitudinal e é a hipótese de Lorentz (1).

O célebre físico holandês mostrou que a própria teoria electrónica tende a confirmar a hipótese da contracção longitudinal desde que se admita que as forças moleculares se transmitem pelo éter e se alteram por efeito do movimento como as forças electromagnéticas. Visto que a forma e as dimensões dum corpo fixo são determinadas pelas acções moleculares, a translação deve alterar forma e dimensões, e imprimir exactamente a contracção longitudinal definida por (3) se se supõem em repouso relativo as moléculas do corpo. Mas, na realidade, as moléculas dum corpo nunca estão em repouso relativo.

Em todo caso, segundo Lorentz, nenhuma consideração teórica se opõe terminantemente à hipótese da contracção. Se nós dirigimos à experiência encontramos uma conclusão análoga, mas também nos convencemos da impossibilidade de comprovar a hipótese positivamente. A contracção dos corpos terrestres não pode ser medida de maneira directa, porque atinge também as réguas métricas; acresce que ela deve ser extremamente pequena: se a velocidade absoluta do Sol é da mesma ordem de grandeza que as velocidades astronómicas relativas, a contracção longitudinal da Terra é quando muito da ordem de grandeza do metro; só uma experiência interferencial, portanto, permitiria medi-la para um objecto de laboratório; ora, é claro que tal experiência não é senão a de Michelson, e esta, em virtude da ausência de deslocamento das franjas, não pode dar o resultado desejado.

---

(1) H. A. Lorentz, *Der Interferenzversuch Michelsons*, 1895, in-Lorentz-Einstein-Minkowski, *Das Relativitätsprinzip*, 5 Aufl., Leipzig und Berlin, 1923. Independentemente de Lorentz, também Fitzgerald propôs a hipótese da contracção.

A experiência de Michelson foi repetida de novo, em 1905, por Morley e Miller, com braços doutra matéria no interferómetro. Se, na verdade, todos os corpos são contraídos longitudinalmente na razão  $\sqrt{1-\beta^2}:1$ , ainda a nova experiência deve dar resultado negativo. O dispositivo adoptado equivalia ao de 1881 com  $a=32$  metros, o que dava  $\epsilon=1,08$ ; e a precisão tinha sido aumentada de modo a poder medir-se a centésima parte desta quantidade. Mas nem desta centésima parte as franjas foram deslocadas. Confirmavam-se as duas experiências anteriores e ficava de pé a hipótese de Lorentz.

Depois de Michelson, vários físicos conseguiram habilitar-se a medir efeitos de segunda ordem em experiências eléctricas. Executadas estas experiências, o resultado foi sempre negativo: nenhum desses efeitos foi observado, e a esperança de determinar a translação absoluta da Terra esvaiu-se geralmente. Entre as mais célebres experiências eléctricas de segunda ordem figura a de Trouton e Noble (1903). Segundo a electrodinâmica de Lorentz, um condensador carregado em repouso relativo é uma corrente de convecção, por virtude do movimento da Terra; e o campo magnético gerado por esta corrente deve imprimir ao condensador uma rotação de segunda ordem. O condensador foi suspenso por Trouton e Noble numa balança de torsão suficientemente sensível para evidenciar o efeito, mas este não se produziu.

Importa citar também a experiência óptica de Rayleigh (1902) e Brace (1904). A anisotropia causada nas matérias amorfas pela contracção de Lorentz deve dar lugar a um efeito de dupla refração, que é de segunda ordem; nenhum dos dois experimentadores, porém, encontrou vestígios de tal fenómeno. A manter-se a hipótese de Lorentz, a explicação da experiência de Rayleigh exige evidentemente uma hipótese suplementar.

Seja como fôr, tôdas as experiências concordam em justificar esta proposição importante: num corpo em translação uniforme, os fenómenos electrodinâmicos produzem-se segundo as mesmas leis que num corpo em repouso, até à segunda ordem *inclusive*, ou seja nos limites da mais alta precisão atingida pelos experimentadores.

18. De novo se encontrava em cheque a electrodinâmica de Lorentz. A hipótese da contracção longitudinal era incapaz de explicar totalmente as novas experiências. Que fazer? ¿Introduzir novas hipóteses adicionais? Poincaré já em 1900 indicara a possibilidade desta situação pouco cômoda. Muito mais satisfatório, com efeito, seria que a explicação daquelas experiências derivasse exclusivamente das hipóteses fundamentais da teoria. Foi ainda Lorentz quem tentou refazer neste sentido a electrodinâmica dos corpos em movimento (1). Na teoria nova, em consequência das hipóteses fundamentais muitos fenómenos electrodinâmicos ficam independentes do movimento uniforme do sistema de referência (de velocidade inferior à da luz), e rigorosamente, sem desprezo de termos de ordem superior. Já a hipótese da contracção longitudinal eliminava rigorosamente o pretenso efeito de Michelson. Agora, o acôrdo unânime de várias experiências da máxima precisão dava maior direito a considerar como lei da natureza a impossibilidade de evidenciar a translação uniforme. Contudo, Lorentz não conseguiu impor esta lei a todos os fenómenos.

O físico de Leyde parte das equações fundamentais da sua electrodinâmica dos sistemas em repouso. Referin-

---

(1) H. A. Lorentz, *Elektromagnetische Erscheinungen in einem System, das sich mit beliebiger, die des Lichtes nicht erreichender Geschwindigkeit bewegt*, 1904, trad. alemã in-Lorentz-Einstein-Minkowski, *op. cit.*

do-as, pelas fórmulas da cinemática ordinária, a um sistema  $Oxyz$  em translação uniforme no sentido  $Ox$ , de velocidade  $v$  inferior à da luz  $c$ , essas equações mudam de forma. Fazendo porém nas novas coordenadas a transformação

$$\begin{aligned} x' &= kx, & y' &= y, & z' &= z, \\ (4) \quad t' &= \frac{1}{k}t - k \frac{v}{c^2}x, \\ k &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \end{aligned}$$

e juntando-lhe uma transformação conveniente das outras grandezas que figuram nas novas equações, estas (salvo um termo de segunda ordem na equação da divergência do campo eléctrico, termo nulo no caso electrostático) readquirem a forma primitiva.

Lorentz interpreta este resultado dizendo que as equações em  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $t'$  dum dado campo electrostático, ou dum campo que difira dêste infinitamente pouco, são as equações dum campo também electrostático num sistema fictício  $\Sigma'$  obtido a partir do sistema real em movimento  $\Sigma$  multiplicando por  $k$  os comprimentos paralelos a  $Ox$ ;  $t'$  é o tempo de  $\Sigma'$ : são pois multiplicados por  $\frac{1}{k}$  os intervalos de tempo decorridos em cada ponto e são atribuídas diferentes origens aos tempos das diferentes abscissas (concepção do «tempo local»). No caso particular de  $\Sigma$  em repouso, é evidentemente  $\Sigma'$  idêntico a  $\Sigma$ .

Proseguindo, Lorentz introduz a hipótese de que o electrão, suposto esférico quando em repouso, toma a forma dum elipsóide de revolução achatado se adquire a translação  $v$ , dividindo por  $k$  a sua dimensão longitudinal.

Um electrão imóvel em  $\Sigma$  será portanto esférico e imóvel em  $\Sigma'$ . Isto permite a Lorentz postular a realidade do sistema  $\Sigma'$ ; êste sistema será justamente  $\Sigma$  immobilizado. A translação  $v$  produz pois em  $\Sigma$  contracção longitudinal das figuras e dilatação dos intervalos de tempo com rutura da simultaneidade.

Estabelecidas estas premissas, Lorentz mostra que muitos fenómenos, que na antiga teoria se apresentariam diferentemente num sistema em repouso e num sistema em movimento, devem apresentar-se com a mesma forma, rigorosamente, nos dois sistemas. Para a experiência de Michelson, por exemplo, isto é consequência imediata da contracção longitudinal do sistema em movimento. Rigorosa como é, esta identidade de forma existe para qualquer velocidade de translação que não atinja o valor da velocidade da luz, e não apenas para velocidades que permitam desprezar termos de ordem superior à primeira ou à segunda.

Com esta teoria, Lorentz preludiou muito mais nítidamente à teoria da Relatividade que com a simples hipótese da contracção a que o conduzira o resultado negativo da experiência de Michelson. A fórmula relativista, que dá a massa, electromagnética ou não, como função da velocidade, chega a aparecer na teoria de Lorentz. Mas tal teoria está ainda longe da de Einstein. Há nela um manifesto defeito de método, primeiro. Depois, a relatividade de Lorentz é parcial: existe só para certos fenómenos electrodinâmicos. Sôbretudo, é aparente: o sistema em repouso no éter tem ainda uma situação privilegiada, pois que as equações electrodinâmicas em  $\Sigma$  não têm a mesma forma que em  $\Sigma'$ , e as deformações, que o espaço e o tempo sofrem pela translação, são absolutas. Emfim, estas deformações destroem a relatividade mecânica newtoniana, que Lorentz não pensa em recons-

tituir. Dificilmente poderia ser doutro modo, desde que Lorentz se não tinha elevado ao objectivo eminentemente filosófico que veio a desenhar-se no espirito de Einstein.

Há na Memória de Lorentz um resultado formal muito importante. Se  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  são as coordenadas, no sistema fixo inicial, do ponto  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de  $\Sigma$ , tem-se com a disposição de eixos que adopta Lorentz

$$x = \xi - vt, \quad y = \eta, \quad z = \zeta,$$

donde, por (4), resulta fácilmente

$$(5) \quad \begin{aligned} x' &= k(\xi - vt), \quad y' = \eta, \quad z' = \zeta, \\ t' &= k\left(t - \frac{v\xi}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Dissémos que as equações electrodinâmicas em  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $t'$ , salvo uma restrição que mencionámos, têm a mesma forma que as equações em  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $t$ . A transformação (5) produz pois a invariância quási completa das equações fundamentais da electrodinâmica, se as outras grandezas que figuram nestas equações se transformam como foi indicado por Lorentz.

Poincaré<sup>(1)</sup> procurou estender a relatividade precedente a todos os fenómenos electrodinâmicos. Não podendo libertar-se do ponto de vista de Lorentz, de cuja teoria conserva as ideas essenciaes, encontrou todavia, independentemente de Einstein, que as fórmulas (5) representam um grupo contínuo de transformações, o qual deixa completamente invariantes as equações da electro-

(1) *Sur la dynamique de l'électron*, Nota, 1905; Memória, 1906; in-H. Poincaré, *La Mécanique nouvelle*, Paris, 1924.

dinâmica desde que as transformações propostas por Lorentz para a densidade eléctrica e para a velocidade sejam substituídas por outras. Sem a validade desta proposição, a relatividade einsteiniana não poderia subsistir.

19. Com que força se impõe a convicção de que é impossível revelar o movimento rectilíneo uniforme dum sistema de referência por meio de experiências electrodinâmicas efectuadas neste sistema, mostram-no bem os ensaios de Lorentz e Poincaré, e não fêz mais que confirmá-lo a experiência posterior. Assim, o éter imóvel de Lorentz é tão inacessível ao físico como o espaço absoluto abstracto de Newton, e deve ser declarado inexistente se nada mais o justifica. É este o caso; à Física, pois, deve ser estranha a noção de espaço absoluto sob qualquer das suas formas.

Dir-se-há que a natureza ondulatória da luz exige alguma coisa que ondule, portanto um éter. Mas pretender que é o próprio éter que ondula, seria regressar à teoria elástica de Fresnel. O que ondula na luz, desde Maxwell, principalmente desde Lorentz, é o campo electromagnético, idêntico à própria luz (ou parte integrante dela, na teoria dos fotões de Einstein). Os continuadores de Faraday pensavam que um campo de força exige um suporte material. Estavam convencidos de que a energia é distinta da matéria e só pode existir ligada a esta. Segundo a teoria da Relatividade, a matéria e a energia não se distinguem essencialmente; onde há matéria isolada no espaço, há energia isolada, e reciprocamente.

Pareceu a Newton que as forças centrífugas, que se manifestam num sistema acelerado, revelam o carácter absoluto da aceleração. Mas, como notou Mach, o que elas revelam positivamente é a aceleração relativa à Galaxia. Por ora não nos ocupamos de sistemas acelerados.

Adiante veremos que Einstein elucidou completamente a questão com a sua teoria da Relatividade geral.

Em todos os sistemas considerados como animados de translação absoluta rectilínea e uniforme, isto é em todos os sistemas que se movem rectilínea e uniformemente em relação à Galaxia (sistemas de inércia, a cuja família pertence a Terra em cada pequeno intervalo de tempo), os fenómenos electrodinâmicos obedecem às mesmas leis, tal como sucede aos fenómenos mecânicos. Eis o que resulta enérgica e unânime dos factos, em vez do almejado éter. Subordine-se a Física a esta proposição (princípio da relatividade especial de Einstein) e o tormentoso problema do movimento absoluto da Terra ficará *ipso facto* suprimido (4). ¿Quem sabe se tal princípio não virá dar à Física a capacidade que lhe faltava para resolver outros problemas assoberbantes?

Decidido a executar êste programa, Einstein deparou logo com uma difficuldade considerável. O seu princípio de relatividade exige que as equações da Física não mudem de forma pela passagem dum sistema de inércia arbitrário a outro da mesma espécie. Porém a transformação cinemática de Galileu (2)

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \\ t \text{ absoluto,}$$

que permite effectuar esta passagem, deixa invariantes as

(1) A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, 1905, in-Lorentz-Einstein-Minkowski, *op. cit.*; *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Braunschweig, 1920; *Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie*, Braunschweig, 1922.

(2) Eixos cartesianos ortogonais, na mais simples disposição;  $v$  é a velocidade (algébrica) de  $O'x'y'z'$  relativamente a  $Oxyz$ , e a origem do tempo é o instante em que  $O$  e  $O'$  coincidem.

equações fundamentais da Mecânica, mas não as da Electrodinâmica. Está vedado duvidar da exactidão das equações da Electrodinâmica, verificadas por inúmeras experiências de precisão extrema. Logo, a transformação de Galileu não pode ser verdadeira. Mas não resulta esta transformação, com tôda a evidência, das próprias noções fundamentais de espaço e tempo, tais quais existiram sempre em todos os espíritos? Pois bem: estas noções, sem dúvida aproximadas, não podem ser exactas. Haja ou não algum *a priori* sob as nossas noções de espaço e tempo, é certo que estas só perdem o que originalmente contêm de indefinido, de amorfo, por via da experiência física e pela introdução do número. Assim como as medidas de objectos em repouso relativo conduziram à forma euclidiana da noção de espaço, assim também a forma galileana das relações mútuas do espaço e do tempo é o resultado das medidas cinemáticas. Desde a descoberta das geometrias abstractas não euclidianas, sabe-se o que significa a afirmação da euclidianidade do espaço: é euclidiana a região do espaço acessível à nossa exploração actual (1). Naturalmente, estendemos esta euclidianidade ao espaço inteiro; mas nada garante tal extensão, que fica à mercê dos progressos da experiência. Ora a experiência cinemática, que justifica a transformação de Galileu, é totalmente feita sobre velocidades incomparavelmente menores que a maior velocidade conhecida: a da luz (2) no vácuo. Portanto a forma galileana das relações mútuas do espaço e do tempo carece absolutamente de funda-

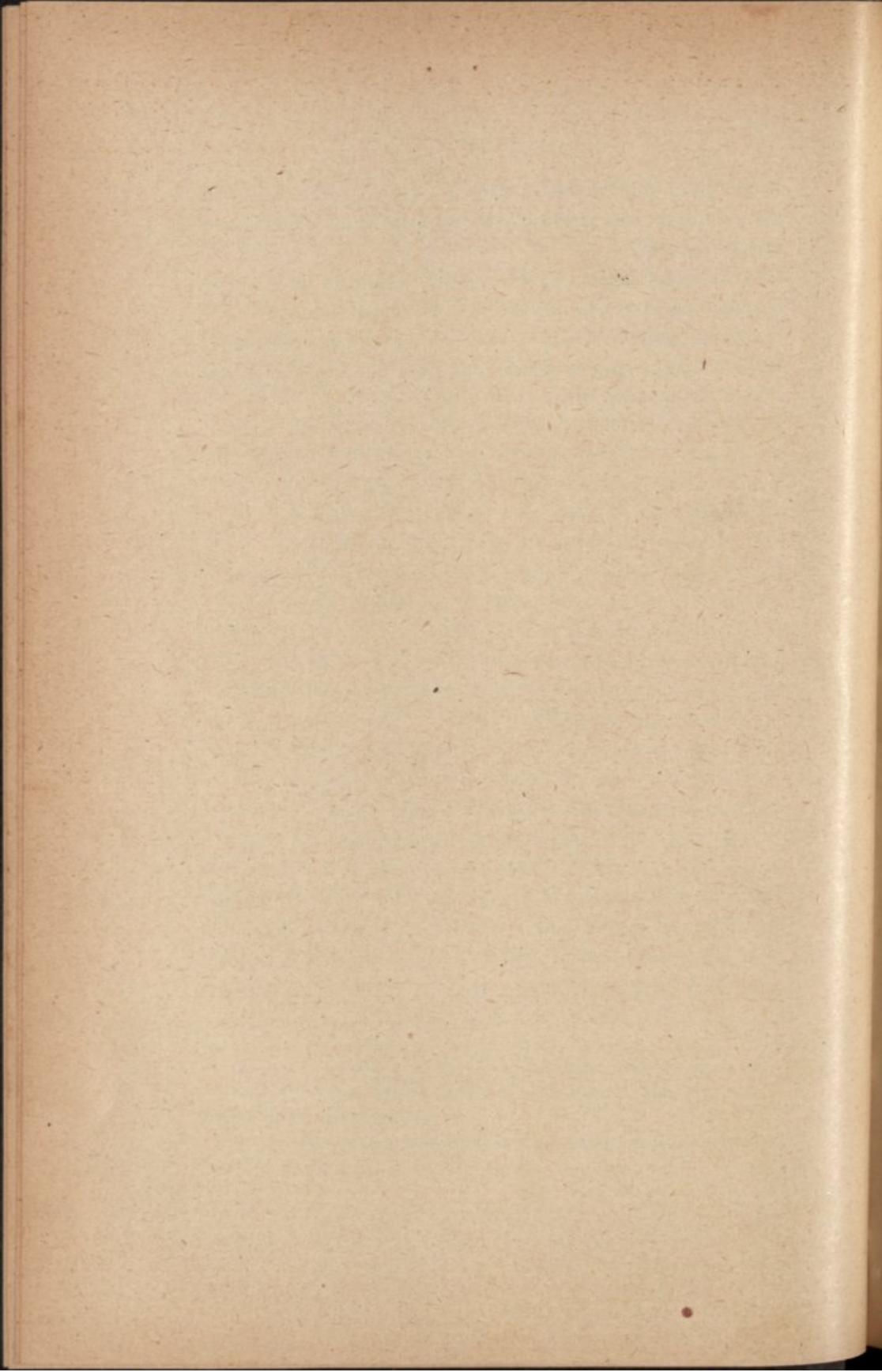
---

(1) Como veremos, a teoria da Relatividade geral previu, e a experiência confirmou, que na vizinhança dos grandes astros o espaço é essencialmente não euclidiano.

(2) Por luz entenderemos sempre uma radiação electromagnética qualquer.

mento para velocidades elevadas. ¿Como pode hesitar-se em corrigi-la sob as indicações seguras duma experiência menos restrita?

Nas bases lógicas da cinemática galileana deve haver o que seja de arbitrário, que é preciso, antes de tudo, descobrir. Abalado êsse edificio até aos alicerces, nada impedirá que se desmorone para dar lugar ao edificio da cinemática nova.



#### IV

20. A concepção ordinária do espaço e do tempo, em que se apoia a cinemática clássica, foi precisada por Newton nos termos seguintes (*Principia*, Def., Sch.):

«Tempus absolutum, verum et mathematicum, in se et natura sua sine relatione ad externum quodvis, æqualiter fluit, alioque nomine dicitur duratio; relativum, apparens et vulgare est sensibilis et externa quævis durationis per motum mensura (seu accurata seu inæquabilis) qua vulgus vice veri temporis utitur... Spatium absolutum, natura sua sine relatione ad externum quodvis; semper manet simile et immobile; relativum est spatii huius mensura seu dimensio quælibet mobilis, quæ a sensibus nostris per situm suum ad corpora definitur et a vulgo pro spatio immobile usurpatur...».

Para o espaço e o tempo absolutos postulou Newton as leis fundamentais da Mecânica. «In rebus philosophicis abstrahendum est a sensibus». Nada é mais inadmissível que este procedimento de Newton. Um tempo e um espaço em si, sem relação com um objecto exterior, não podem caber na Física, quanto mais servir-lhe de base. O espaço do físico é necessariamente o espaço relativo a um corpo rígido (espaço de referência), isto é o espaço que resulta de prolongar o corpo justapondo-lhe idealmente outros corpos rígidos até se atingir um corpo arbitrário. Também o tempo do físico é necessariamente dado por um movimento num espaço de referência. As

ideias de espaço em si e de tempo em si provieram da tendência vulgar de atribuir carácter absoluto àquilo que na vida ordinária tem elevada preponderância: tais o espaço relativo à Terra e o tempo astronómico nas apreciações de posição e de duração.

Só tem realidade física, portanto, o espaço e o tempo que Newton considerava aparentes. Se a sua mecânica tem algum valor é porque as leis fundamentais, embora enunciadas em termos de espaço absoluto e de tempo absoluto, são extraídas das experiências que Galileu referia a espaço e tempo relativos, e são aplicadas a espaço e tempo relativos também.

Em face disto, pode parecer que os conceitos de espaço absoluto e tempo absoluto não são indispensáveis à física newtoniana. Mas não é assim. O espaço e o tempo absolutos são o fundamento necessário do espaço e do tempo relativos de Newton; é porque existem aqueles que há entre estes, certas relações de importância capital. Os tempos relativos são medidas externas da duração absoluta, exactas ou inexactas; as exactas, únicas que convêm à Física teórica, são evidentemente iguais. Há pois um só tempo físico exacto e, neste sentido, a física newtoniana admite um tempo absoluto. Os espaços relativos são medidas móveis do espaço em si; supondo-as exactamente executadas, como faz a Física teórica, estas medidas são iguais. A métrica de qualquer espaço de referência, portanto, é também absoluta na física newtoniana.

O carácter absoluto das medidas de tempo e o carácter absoluto das medidas de espaço são essenciais para a cinemática clássica. Reconhece-se imediatamente que a demonstração da transformação de Galileu é impossível se não se admite que o intervalo de tempo decorrido entre dois acontecimentos, por um lado, e a distância de dois pontos dum corpo rígido, por outro lado, são independen-

tes do espaço de referência. Ora estas hipóteses não se impõem como à primeira vista parece. As medidas de intervalos de tempo e de distâncias exigem idealmente: a) que em cada pequena região de cada espaço de referência exista um físico provido dum relógio e duma régua rígida; b) que todos os relógios e régua sejam da mesma construção. Se fôsem possíveis sinais instantâneos a distância, e se houvesse a certeza de que o movimento não altera a marcha dos relógios, a hipótese do tempo absoluto teria fundamento físico; mediante a emissão dum tal sinal, todos os relógios adquiririam um sincronismo perpétuo. O mesmo se diria da hipótese da métrica espacial absoluta, se fôsse certo que as régua em movimento obedecem ao postulado euclidiano da invariabilidade. Mas nem há sinais instantâneos a distância, nem é evidente *a priori* que o movimento não influi na marcha dum relógio ou no comprimento duma régua. As duas hipóteses consideradas só não são arbitrárias na medida em que uma experiência relativamente grosseira as justifica (1).

É lícito tirar uma conclusão mais radical ainda. O tempo absoluto não pode existir sem acção instantânea a distância. Visto que é impossível defender seriamente uma acção deste género, o tempo absoluto tem que desaparecer da Física. Mais que arbitrária em alto grau, os próprios fundamentos da velha cinemática a declaram inadmissível, como já o fizeram o princípio de relatividade e as equações da Electrodinâmica.

21. Mas o abandono da transformação de Galileu não implica a queda do princípio de relatividade no do-

---

(1) A evidência aparente destas hipóteses baseia-se em que a luz parece informar-nos instantaneamente dos acontecimentos que se produzem a distância.

mínio da Mecânica? Esta observação, último argumento a favor da cinemática clássica, não pode deter-nos; pois é claro que tal se não dará, desde que à Mecânica se atribuam equações relativistas que se reduzam praticamente às equações newtonianas para as pequenas velocidades. É de prever que isto seja possível porquanto, para estas velocidades, a nova transformação cinemática tem de reduzir-se à transformação de Galileu sob pena de ser inadmissível. Que a previsão não é enganosa vê-lo hemos adiante.

Segundo o princípio de relatividade, nada de absoluto distingue os espaços de inércia; em todos a natureza manifesta as mesmas leis e, com igual direito, qualquer deles pode ser considerado imóvel pelos observadores respectivos. Imaginemos distribuídos localmente, em todos os espaços de inércia, relógios e régua métricas da mesma construção, e consideremos um destes espaços. Qualquer que êle seja, as medidas de espaço e de tempo nêle efectuadas são medidas reais (1). As régua permitirão medir comprimentos quaisquer e revelarão que o espaço de inércia considerado é euclidiano. Mas os relógios não permitirão medir o intervalo de tempo decorrido entre dois acontecimentos distantes se não estiverem sincronizados. Como obter êste sincronismo?

É sabido que, no vácuo dum espaço de referência em que as equações da Electrodinâmica são válidas, a luz se propaga em todos os sentidos com a mesma velocidade  $c$ , igual à razão entre as unidades electromagnética e electrostática de carga eléctrica. Já dissémos que a experiência não permite duvidar destas equações para o espaço de

---

(1) Ao contrário do que pensou Lorentz, para quem eram illusórias as medidas de espaço e de tempo que não fôsem feitas por observadores imóveis no éter.

referência da Terra, qualquer que seja a posição desta na sua órbita; em virtude do princípio de relatividade, portanto, as equações da Electrodinâmica têm validade para todos os espaços de inércia. Segue-se que em todos estes espaços a velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor  $c$ . O significado desta proposição, em última análise, é que o caminho percorrido por uma onda luminosa num espaço de inércia qualquer varia proporcionalmente ao ângulo horário duma estrêla apreciado da Terra; é o movimento diurno da esfera celeste, com efeito, que define realmente o tempo na física clássica. Mas tal definição geocentrista do tempo só pode convir à Terra; se a física clássica podia contentar-se com ela, é porque admitia o tempo absoluto. Em verdade, necessitamos duma definição do tempo que seja applicável directamente a todos os espaços de inércia. Ora a proposição que estamos considerando dá justamente esta definição, se a elevamos à ordem dum princípio (princípio da constância da velocidade da luz, de Einstein); a uniformidade do movimento diurno torna-se então um puro factio da experiência terrestre, que a Mecânica terá de explicar.

Em princípio, pois, a velocidade da luz no vácuo é uma constante universal para os espaços de inércia. Isto permite, em primeiro lugar, attribuir aos relógios uma construção perfeita, isto é admitir que todos estão regulados pelo movimento da luz. Em segundo lugar, permite obter o sincronismo dos relógios no espaço de inércia arbitrário em que nos tínhamos fixado. Sejam com efeito, neste espaço, dois relógios distantes  $A$  e  $B$ . No instante  $t$  marcado por  $A$  envie-se de  $A$  um sinal luminoso que voltará a  $A$  depois de ser reflectido em  $B$ ; seja  $\tau$  o instante da reflexão em  $B$  marcado por  $B$  e  $t'$  o instante da recepção em  $A$  marcado por  $A$ ; o relógio  $A$  é perfeito se fôr sempre

$$t' = t + \text{const.};$$

os dois relógios perfeitos serão síncronos uma vez que seja

$$\tau = \frac{t + t'}{2}.$$

Dêste modo fica bem definido um tempo em cada espaço de inércia. Prevê-se já que êstes tempos não são idênticos, isto é que os sincronismos obtidos nos diversos espaços não se confundem num sincronismo universal, dado que a nossa definição se baseia numa acção progressiva e não na fantástica acção a distância.

Os observadores pertencentes a um espaço de inércia qualquer estão agora habilitados a situar os acontecimentos não só no espaço, referindo-os a um sistema de eixos rectangulares, mas também no tempo, referindo-os a um instante arbitrário. Resta saber que relações existem entre as coordenadas de espaço e tempo dum mesmo acontecimento em dois sistemas de inércia diferentes  $S$  e  $S'$ . A solução dêste problema será a transformação cinematográfica que vem substituir a transformação de Galileu.

22. Suponhamos que, no sistema  $S$ , um raio luminoso emitido em  $P_1(x_1, x_2, x_3)$  no instante  $t$  é recebido em  $P_2(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$  no instante  $t + \Delta t$ ; tem-se

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - c^2 \Delta t^2 = 0.$$

No sistema  $S'$ , o mesmo raio terá sido emitido em  $P_1'(x_1', x_2', x_3')$  no instante  $t'$  e recebido em  $P_2'(x_1' + \Delta x_1', x_2' + \Delta x_2', x_3' + \Delta x_3')$  no instante  $t' + \Delta t'$ , e tem-se análogamente

$$\Delta x_1'^2 + \Delta x_2'^2 + \Delta x_3'^2 - c^2 \Delta t'^2 = 0.$$

A primeira equação deve ser consequência da segunda

em virtude da transformação procurada. Será pois, para dois acontecimentos quaisquer,

$$\begin{aligned} \Delta x_1'^2 + \Delta x_2'^2 + \Delta x_3'^2 - c^2 \Delta t'^2 &= \\ = \lambda (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - c^2 \Delta t^2), \end{aligned}$$

onde  $\lambda$ , por motivo da homogeneidade do espaço e do tempo, é independente dos dois acontecimentos, só podendo, por isso, depender da velocidade de  $S'$  relativa a  $S$ . Façamos

$$i c t = x_4, \quad i c t' = x_4', \quad i = \sqrt{-1};$$

ter-se-há

$$\Delta x_1'^2 + \Delta x_2'^2 + \Delta x_3'^2 + \Delta x_4'^2 = \lambda (\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2).$$

É evidente que se obtêm as transformações, que convertem a primeira expressão na segunda, multiplicando por  $\sqrt{\lambda}$  os segundos membros das transformações que deixam a primeira expressão invariante; não sendo estas outra coisa que as transformações cartesianas ortogonais do espaço euclidiano de quatro dimensões, aquelas escrevem-se, nas notações correntes do cálculo tensorial,

$$(1) \quad x'_\mu = \sqrt{\lambda} (a_\mu + b_{\mu\alpha} x_\alpha),$$

com

$$(2) \quad b_{\mu\alpha} b_{\nu\alpha} = b_{\alpha\mu} b_{\alpha\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu), \\ 0 & (\mu \neq \nu). \end{cases}$$

Admitamos que os acontecimentos-origens coincidem, isto é que  $S$  e  $S'$  são tais que as suas origens coincidem quando os relógios respectivos marcam ambos zero; temos então

$$a_\mu = 0,$$

e a transformação (1), abstraindo do factor  $\sqrt{\lambda}$ , é uma rotação do sistema de eixos do espaço quadridimensional em volta da origem  $\Omega$ . O caso mais simples é aquele em que só dois eixos efectuam a rotação; esta dá-se então no plano dos dois eixos e só as coordenadas correspondentes se transformam. Por outro lado, se os dois sistemas  $S$  e  $S'$  pertencem a espaços de inércia diferentes, a orientação mais simples que pode atribuir-se-lhes é a que consiste em serem  $Ox_1$  e  $O'x_1'$  paralelos à direcção do movimento relativo (portanto permanentemente coincidentes), com  $Ox_2$  e  $O'x_2'$ , bem como  $Ox_3$  e  $O'x_3'$ , paralelos entre si, e coincidindo os sentidos positivos em cada par de eixos paralelos (4). Nestas condições, no espaço euclidiano quadridimensional a coordenada  $x_4'$  transforma-se; havendo pelo menos uma coordenada de espaço que se não transforma, a razão de simetria faz concluir que se não transformam  $x_2'$  e  $x_3'$ ; logo, tem que se transformar  $x_4'$ , e (1) converte-se, de harmonia com (2), em

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1' &= \sqrt{\lambda} (x_1 \cos \varphi - x_4 \sin \varphi), \\ x_2' &= \sqrt{\lambda} x_2, \\ x_3' &= \sqrt{\lambda} x_3, \\ x_4' &= \sqrt{\lambda} (x_1 \sin \varphi + x_4 \cos \varphi), \end{aligned}$$

onde  $\varphi$  é o ângulo da rotação dos eixos  $\Omega x_1'$  e  $\Omega x_4'$ .

A segunda e a terceira equações mostram que  $\lambda$  é positivo. Além disso, o radical que nelas figura deve tomar-se positivo, dada a disposição dos eixos em  $S$  e  $S'$ . Será por conseguinte, designando por  $v$  a velocidade al-

---

(4) A possibilidade desta orientação dos dois sistemas  $S$  e  $S'$  é garantida por simples razões de simetria.

gébica de  $S'$  relativa a  $S$ ,

$$x_2' = \rho(v) x_2,$$

onde  $\rho(v)$  é uma função positiva. Ao observador de  $S'$  a ordenada  $x_2$  appareceria alterada. Mas esta ordenada é normal à direcção do movimento e por isso tal alteração só dependerá da grandeza e não do sinal da velocidade  $v$ ;  $\rho(v)$  é pois uma função par. Por outro lado, o principio de relatividade exige que seja

$$x_2 = \rho(-v) x_2',$$

visto que a velocidade de  $S$  relativa a  $S'$  é  $-v$ . Tem-se assim

$$\begin{aligned} \rho(v) &= \rho(-v), \\ \rho(v) \cdot \rho(-v) &= 1, \end{aligned}$$

donde

$$\rho(v) = 1,$$

o que prova ser

$$\lambda = 1$$

e

$$\begin{aligned} x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_3. \end{aligned}$$

Introduzindo de novo os tempos  $t$  e  $t'$ , a primeira e a quarta fórmulas (3) dão

$$\begin{aligned} x_1' &= \sqrt{\lambda} (x_1 \cos \varphi - i c t \sin \varphi), \\ t' &= \sqrt{\lambda} \left( -i \frac{x_1}{c} \sin \varphi + t \cos \varphi \right); \end{aligned}$$

em cada uma destas equações,  $\sqrt{\lambda}$  tem um dos valores  $\pm 1$ .

Ora, de ser  $x_1 = vt$  para  $x_1' = 0$ , resulta

$$vt \cos \varphi - ict \sin \varphi = 0$$

ou

$$(4) \quad i \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{c},$$

o que dá

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad i \sin \varphi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

com o mesmo sinal para os dois radicais. É pois, finalmente,

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$(5) \quad x_2' = x_2,$$

$$x_3' = x_3,$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

com os radicais ambos positivos; com efeito, para cada valor de  $t$ ,  $x_1'$  cresce com  $x_1$  e, para cada valor de  $x_1$ ,  $t'$  cresce com  $t$ .

É claro que  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $t$  se exprimem em função de  $x_1'$ ,  $x_2'$ ,  $x_3'$ ,  $t'$  por equações da mesma forma, salvo a mudança de  $v$  em  $-v$ ; a fórmula (4) mostra efectivamente que  $\varphi$  e  $v$  mudam de sinal um com o outro.

Chegámos à transformação cinemática einsteiniana, a

qual coincide com a transformação (5) do n.º 18 e por isso se denomina transformação de Lorentz. Vê-se que ela se reduz à transformação de Galileu, praticamente, quando  $v$  é muito pequeno em relação a  $c$ , e rigorosamente, qualquer que seja  $v$ , se se substitui  $c$  por  $\infty$ . Assim se confirma o que dissémos precedentemente: a cinemática galileana vale para as velocidades que entram nas aplicações da mecânica clássica, mesmo astronómicas, mas só dum modo aproximado; é impossível considerá-la como rigorosa sem postular implicitamente uma transmissão instantânea a distância.

Sejam dados dois sistemas de inércia  $S_0$  e  $S_1$ , orientados dum modo qualquer. Introduzindo dois sistemas auxiliares orientados como precedentemente,  $S$  imóvel em  $S_0$  e  $S'$  imóvel em  $S_1$ , torna-se manifesto que se obtém a transformação cinemática entre  $S_0$  e  $S_1$  compondo uma transformação cartesiana, uma transformação de Lorentz e outra transformação cartesiana, prolongadas a primeira e a terceira pela transformação idêntica do tempo.

**23.** O intervalo de tempo, a simultaneidade e o comprimento não são absolutos na cinemática de Einstein.

Sejam  $x_1'$ ,  $x_1' + \Delta x_1'$  ( $\Delta x_1' > 0$ ) as abscissas de dois pontos dum corpo rígido, imóvel em  $S'$ , situados numa paralela à direcção do movimento relativo. A distância destes dois pontos, em  $S'$ , é  $\Delta x_1'$ ; em  $S$  é a de dois pontos, de abscissas  $x_1$ ,  $x_1 + \Delta x_1$ , que coincidem com êles num instante arbitrário  $t$ . A segunda e a terceira equações (5) mostram que os dois pontos de  $S$  estão situados também numa paralela à direcção do movimento relativo; mas a primeira equação dá

$$\Delta x_1 = \Delta x_1' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

isto é, as distâncias longitudinais de  $S'$  apresentam-se contraídas ao observador de  $S$ . Esta contracção é quantitativamente idêntica à contracção de Lorentz. As distâncias normais à direcção do movimento não apresentam alteração. Resulta que os volumes se apresentam contraídos na mesma proporção que as distâncias longitudinais.

Pela equação

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

inversa da quarta (5), acontecimentos simultâneos em  $S'$  são sucessivos em  $S$  se têm em  $S'$  abscissas diferentes (ruptura da simultaneidade). Assim como, através do tempo, um ponto arbitrário de  $S'$  se sobrepõe a todos os pontos duma recta de  $S$ , assim também, através do espaço (através de qualquer recta paralela à direcção do movimento), um instante arbitrário de  $S'$  se sobrepõe a todos os instantes de  $S$ . O puro ponto, ou o puro instante de  $S'$ , só para  $S'$  são tais. Pelo contrário, a cada acontecimento (ponto + instante) em  $S'$  corresponde sempre um só acontecimento em  $S$ ; o acontecimento tem carácter absoluto, e de facto é êle o verdadeiro elemento da descrição física.

A mesma equação conduz a outro resultado importante. Sejam  $t'$  e  $t' + \Delta t'$  ( $\Delta t' > 0$ ) dois instantes marcados por um relógio imóvel em  $S'$ , de abscissa  $x_1'$ . Entre êstes dois instantes decorre em  $S'$  o intervalo de tempo  $\Delta t'$ ; em  $S$ , entre os instantes  $t$ ,  $t + \Delta t$  correspondentes, decorre o intervalo de tempo  $\Delta t$  e tem-se

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

isto é, o intervalo de tempo decorrido no relógio de  $S'$  apresenta-se dilatado ao observador de  $S$ . Para este observador, os relógios de  $S'$  marcham mais lentamente que os seus. Por consequência a luz duma fonte monocromática, imóvel em  $S'$ , tem em  $S$  menor frequência, segundo a relação

$$\nu = \nu' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

este efeito sôbrepõe-se naturalmente ao efeito Doppler, mas é de segunda ordem e independente da direcção da velocidade.

A velocidade relativa de dois sistemas de inércia reais não pode ultrapassar, nem sequer atingir a velocidade da luz. Para  $v=c$ , os volumes e os intervalos de tempo de  $S'$  seriam respectivamente nulos e infinitos em  $S$ ; para  $v > c$  seriam imaginários. Num ou noutro caso,  $S'$  seria inexistente para o físico de  $S$ .

Nenhum processo físico pode ter velocidade superior à da luz. Imaginemos com efeito, em  $S$ , uma propagação que parte do ponto  $(x_1, 0, 0)$  no instante  $t$  e chega ao ponto  $(x_1 + \Delta x_1, 0, 0)$  no instante  $t + \Delta t$  ( $\Delta t > 0$ ), sendo

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} = k > c.$$

Ter-se hia em  $S'$ , pela transformação de Lorentz,

$$\Delta t' = \Delta t \frac{1 - \frac{vk}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

para  $v > \frac{c^2}{k}$  seria  $\Delta t' < 0$ , isto é, a propagação teria partido

do segundo ponto para o primeiro. Assim, em certos sistemas de inércia a causa seria posterior ao efeito, o que é absurdo. Segue-se que dois acontecimentos, que se produzem com um intervalo de tempo inferior ao que a luz gastaria em percorrer a sua distância no espaço, são necessariamente independentes e têm uma ordem de sucessão puramente relativa; em particular, existe um sistema de referência para o qual os dois acontecimentos são simultâneos ( $\Delta t' = 0$  se  $v = \frac{c^2}{k}$ ).

As transformações de Lorentz, sendo, como vimos, rotações planas dum espaço euclidiano quadridimensional (imaginário), formam evidentemente um grupo monoparamétrico. Sejam  $S$ ,  $S'$ ,  $S''$  três sistemas de inércia em translação relativa numa só direcção e com eixos dispostos do modo simples precedentemente adoptado. Designemos por  $v$  a velocidade de  $S'$  relativa a  $S$ , por  $v'$  a de  $S''$  relativa a  $S'$  e por  $u$  a de  $S''$  relativa a  $S$ . Compondo a transformação de  $S'$  em  $S$  e a de  $S''$  em  $S'$ , há-de obter-se a transformação de  $S''$  em  $S$ ; importa saber como se exprime  $u$  em função de  $v$  e de  $v'$ .

A questão resolve-se imediatamente pela aplicação da igualdade (4). Pondo

$$i \operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{c}, \quad i \operatorname{tg} \varphi' = \frac{v'}{c},$$

será

$$i \operatorname{tg} (\varphi + \varphi') = \frac{u}{c}$$

e portanto

$$u = \frac{v + v'}{1 + \frac{v v'}{c^2}};$$

esta equação é a forma mais simples do teorema da adição das velocidades de Einstein. Verifica-se que as desi-

gualdades simultâneas  $v < c$ ,  $v' < c$  exigem  $u < c$ , como devia ser.

Substituamos o sistema  $S''$  por um ponto  $M$  animado dum movimento qualquer. A transformação inversa de (5), pondo

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i, \quad \frac{dx'_i}{dt'} = u'_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

dá as equações

$$(6) \quad u_1 = \frac{v + u'_1}{1 + \frac{v u'_1}{c^2}}, \quad u_2 = \frac{u'_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u'_1}{c^2}}, \quad u_3 = \frac{u'_3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u'_1}{c^2}},$$

que generalizam a equação precedente. Se o ponto  $M$  pertence a uma onda luminosa plana, que se propaga paralelamente à direcção do movimento relativo de  $S$  e  $S'$ , deve ser  $u'_1 = \pm c$ ,  $u'_2 = u'_3 = 0$  e  $u_1 = \pm c$ ,  $u_2 = u_3 = 0$ ; êstes valores satisfazem efectivamente às equações (6).

A célebre experiência de Fizeau sôbre a propagação da luz num meio em movimento, que as teorias de Fresnel e de Lorentz explicavam com dificuldade, explica-se imediatamente pelo teorema de Einstein. Basta fazer em (6)

$$u'_1 = \frac{c}{n}, \quad u'_2 = 0, \quad u'_3 = 0,$$

sendo  $n$  o índice de refracção do meio em movimento  $S'$ , para se obter

$$u_1 = \frac{v + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v}{c n}}, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0;$$

a primeira fórmula pode escrever-se, desprezando a segunda ordem,

$$\frac{u_1}{c} = \frac{1}{n} + \frac{v}{c} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

ou

$$u_1 = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

que é exactamente a fórmula de Fresnel verificada por Fizeau (e posteriormente por Michelson e Morley, e por Zeemann).

**24.** O princípio da relatividade especial exige pois que as equações da Física sejam invariantes de forma perante a transformação de Lorentz. As equações clássicas da Electrodinâmica estão de tal modo comprovadas pela experiência que devem satisfazer ao princípio de relatividade sem modificação. Pode verificar-se directamente que assim é. Sejam, no sistema  $S$ ,  $\rho$  a densidade de carga,  $u$  a velocidade respectiva,  $E$  o campo eléctrico,  $H$  o campo magnético; as equações electrodinâmicas escrevem-se, em unidades mixtas da Lorentz,

$$(7) \quad \frac{1}{c} \left( \frac{\partial E}{\partial t} + \rho u \right) = \text{rot } H, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} = -\text{rot } E,$$

$$\text{div } E = \rho, \quad \text{div } H = 0,$$

onde  $c$  designa, como sempre, a velocidade da luz. Projectando sobre os eixos e efectuando a passagem ao sistema  $S'$  por meio da transformação de Lorentz, obtêm-se,

supondo primeiro  $\rho=0$ , equações da mesma forma com

$$\begin{aligned}
 E'_x &= E_x, & H'_x &= H_x, \\
 E'_y &= \frac{E_y - \frac{v}{c} H_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & H'_y &= \frac{H_y + \frac{v}{c} E_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\
 E'_z &= \frac{E_z + \frac{v}{c} H_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, & H'_z &= \frac{H_z - \frac{v}{c} E_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Atendendo a estas equações e ao teorema de adição das velocidades, a transformação das equações gerais (7) dá equações da mesma forma com

$$\rho' = \rho \frac{1 - \frac{v u_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.
 \tag{9}$$

As fórmulas de transformação (8) e (9), cuja inversão dá fórmulas análogas, como devia ser, contêm dois resultados importantes. O primeiro, evidente, é que a separação do campo electromagnético em campo eléctrico e campo magnético é puramente relativa. O segundo é que a carga eléctrica é um invariante: tem o mesmo valor em todos os sistemas de referência. Com efeito, seja  $d e'$  uma carga em repouso em  $S'$ , ocupando o volume  $d \omega'$ ; por ser então  $u_x = v$ , resulta de (9)

$$\rho = \frac{\rho'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},
 \tag{10}$$

isto é, a densidade da carga aumenta por efeito do movi-

mento. Ora, se fôrem  $d\omega$  e  $d\epsilon$  o volume e o valor da mesma carga para  $S$ , teremos

$$d\epsilon = \rho d\omega, \quad d\epsilon' = \rho' d\omega'$$

e portanto, atendendo à contracção dos volumes

$$d\omega = d\omega' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

e à fórmula (10),

$$d\epsilon = d\epsilon'$$

como tínhamos afirmado. Chama-se a  $\rho'$  densidade própria da carga considerada;  $d\omega'$  é o seu volume próprio. Análogamente, um intervalo de tempo medido por um relógio de  $S'$  é um intervalo de tempo próprio deste relógio, ou deste sistema.

Se se efectua a transformação de Lorentz nas equações da mecânica newtoniana, reconhece-se que estas equações não conservam a forma primitiva. Ao contrário da Electrodinâmica, a Mecânica tem de ser refundida de harmonia com o princípio de relatividade einsteiniano. Como já observámos, não há a recear conflito com a experiência desde que as novas equações coincidam praticamente com as antigas para velocidades muito pequenas em relação à da luz.

**25.** Consideremos uma fonte luminosa monocromática imóvel no sistema  $S$  e imensamente distante da origem das coordenadas. Numa certa região vasia que envolve esta origem, as ondas emitidas são planas e representam-se pelas equações

$$E = E^0 \sin \Phi, \quad H = H^0 \sin \Phi,$$

$$\Phi = 2\pi\nu \left( t - \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{c} \right),$$

onde  $E$  e  $H$  têm a significação do n.º precedente,  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são os cosenos directores dos raios e  $\nu$  é a freqüência da luz.

A aplicação da transformação de Lorentz e das fórmulas (8) dá, para a região correspondente do sistema  $S'$ , as equações

$$E' = E'^0 \sin \Phi', \quad H' = H'^0 \sin \Phi',$$

$$\Phi' = 2\pi\nu' \left( t' - \frac{\alpha'x' + \beta'y' + \gamma'z'}{c} \right) = \Phi,$$

que representam ondas planas também, e onde é, pondo  $\alpha = \cos \varphi$ ,  $\alpha' = \cos \varphi'$ ,

$$(11) \quad \nu' = \nu \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$(12) \quad \cos \varphi' = \frac{\cos \varphi - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}.$$

Pode escrever-se ainda, como é evidente,

$$(13) \quad \nu' = \frac{\nu \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi'}.$$

As fórmulas (11) ou (13) exprimem o efeito Doppler como na física clássica, se se despreza a segunda ordem. Quando a fonte luminosa se move transversalmente em  $S'$  ( $\cos \varphi' = 0$ ), tem-se rigorosamente

$$\nu' = \nu \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}};$$

êste efeito einsteiniano, extremamente pequeno, que não é outra coisa que a dilatação do tempo (cf. n.º 23), ainda não pôde ser directamente observado.

A fórmula (12) exprime a aberração. Dela resulta

$$\sin \varphi' = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sin \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}$$

e portanto

$$\sin(\varphi' - \varphi) = \frac{\frac{v}{c} - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \cos \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi} \sin \varphi,$$

o que dá o valor da teoria elementar

$$\frac{v}{c} \sin \varphi$$

pelo desprezo da segunda ordem. Difícil de explicar na teoria ondulatória clássica, como a experiência de Fizeau, a aberração é outra prova experimental da teoria da relatividade.

A intensidade da luz é definida pelo quadrado da amplitude do campo eléctrico (ou magnético). Tem-se no sistema  $S'$

$$A'^2 = (E'^0_x)^2 + (E'^0_y)^2 + (E'^0_z)^2$$

ou, por (8),

$$(14) \quad A'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = A^2 \left(1 - 2 \frac{v}{c} \cos \varphi\right) + \frac{v^2}{c^2} \Delta,$$

pondo

$$\Delta = (H^0_y)^2 + (H^0_z)^2 - (E^0_x)^2$$

e notando que o produto vectorial

$$E^0 \times H^0$$

tem o módulo  $A^2$  e o sentido da propagação; por outro lado, de

$$A'^2 \cos \varphi' = E'^0_y H'^0_z - E'^0_z H'^0_y$$

resulta

$$A'^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cos \varphi' = A^2 \left(\cos \varphi - \frac{v}{c} - \frac{v^2}{c^2} \cos \varphi\right) - \frac{v}{c} \Delta;$$

eliminando  $\Delta$  entre esta equação e (14), e atendendo a (12), obtém-se finalmente

$$(15) \quad A'^2 = A^2 \frac{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \varphi\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Esta fórmula conduz a um resultado notável que utilizaremos adiante. Nas unidades que adoptámos,  $A^2$  representa em  $S$ , e  $A'^2$  em  $S'$ , a densidade de energia das ondas planas consideradas. A esfera

$$(x - \alpha ct)^2 + (y - \beta ct)^2 + (z - \gamma ct)^2 = r^2,$$

que se move com a velocidade da luz no sentido da propagação e portanto contém uma quantidade invariável  $W$  de energia, é para  $S'$ , no instante  $t' = 0$ , o elipsóide

$$\frac{\left(1 - \alpha \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} x'^2 + \left(y' - \frac{\beta \frac{v}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 + \left(z' - \frac{\gamma \frac{v}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 = r^2$$

com a energia  $W'$ . Representando por  $V$  o volume da

esfera e por  $V'$  o do elipsóide, tem-se por um lado

$$W = A^3 V, \quad W' = A'^3 V'$$

e por outro lado, como facilmente se reconhece,

$$\frac{V'}{V} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi};$$

atendendo a (15) é pois

$$(16) \quad W' = W \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

O confronto com (11) mostra que a energia e a frequência da luz se transformam do mesmo modo. Assim, a equação quântica de Planck

$$\varepsilon = h \nu$$

satisfaz ao princípio de relatividade, e o coeficiente  $h$ , como a velocidade da luz, é uma constante universal.

**26.** Estabelecemos precedentemente (n.º 22) que a transformação cinemática entre dois sistemas de inércia, orientados dum modo qualquer, altera em geral as diferenças  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta t$  referentes a dois acontecimentos pontuais e instantâneos, mas deixa invariante, no valor e na forma, a expressão

$$(17) \quad \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,$$

análogamente ao que sucede em geometria euclidiana à

expressão do quadrado da distância de dois pontos

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

perante uma transformação cartesiana ortogonal. Esta observação conduziu Minkowski<sup>(1)</sup> a conceber o espaço e o tempo como secções dum contínuo quadridimensional real (universo) cuja métrica é determinada pela forma quadrática

$$(18) \quad ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

em coordenadas galileanas (coordenadas cartesianas ortogonais e tempo num espaço de inércia). A ideia de Minkowski tem uma importância considerável; sem ela não seria possível a teoria da Relatividade geral.

O universo é a forma absoluta dentro da qual decorrem os fenómenos, constituída por elementos absolutos chamados acontecimentos. O espaço e o tempo, construídos com elementos que não possuem existência independente, são formas relativas ao observador ligado a um corpo rígido. Entre dois pontos há uma relação de espaço (distância) e entre dois instantes uma relação de tempo (duração) que são igualmente relativas ao observador. Só é absoluta a relação de espaço-tempo (17) existente entre dois acontecimentos (intervalo universal).

É exprimindo-as no universo quadridimensional que se torna evidente a significação absoluta das leis da natureza. A sua expressão em termos de espaço e de tempo, idêntica nos sistemas de inércia em virtude do princípio de relatividade, indicava este carácter absoluto mas deixava-o

---

(1) H. Minkowski, *Raum und Zeit*, 1908, in-Lorentz-Einstein-Minkowski, *op. cit.*

incompreensível. O problema matemático, que se apresenta aqui, é resolvido pela teoria dos tensores.

A concepção do universo quadridimensional, no fundo, existia na física pre-relativista, a qual afirmava mesmo certa relatividade do espaço. Mas esta relatividade só fazia depender do sistema de referência as coordenadas dos pontos, não as distâncias mútuas. Isto e o carácter absoluto do tempo impossibilitavam de atribuir ao universo estrutura métrica no sentido riemaniano; do ponto de vista métrico, o espaço e o tempo eram realidades separadas.

O filósofo Bergson recusou-se a ver na noção de universo outra coisa que um puro esquema matemático indispensável ao teórico da Física<sup>(1)</sup>; pareceu-lhe que tal noção implica a identificação do tempo com uma coordenada de espaço. Como é possível conciliar esta recusa com a aceitação, feita também por Bergson, dos dois princípios de Einstein, dos quais a realidade física do universo quadridimensional decorre necessariamente, é o que não logramos compreender. Não há tal identificação do tempo com uma coordenada de espaço; o tempo e o espaço são definidos fisicamente de modo diverso, e a diferença de sinais na expressão (18) de  $ds^2$  caracteriza matematicamente esta diversidade.

A idea duma forma absoluta quadridimensional, que em si não é espaço nem tempo, mas na consciência se projecta scindida nestas duas formas relativas, não tem nada de anti-filosófico. Viu-se há poucos anos o filósofo Alexander construir um sistema sôbre ela<sup>(2)</sup>, como Spinoza construiu o seu sôbre a idea de substância. Para

---

(1) H. Bergson, *Durée et simultanéité, à propos de la théorie d'Einstein*, 3.<sup>e</sup> éd., Paris, 1926.

(2) S. Alexander, *Space, time and deity*, 2.<sup>th</sup> ed., London, 1927.

Alexander, o espaço e o tempo não são formas *a priori* da sensibilidade, como na teoria transcendental de Kant, nem ordens de coexistência ou sucessão, como na teoria relacional de Leibniz, mas sim entidades objectivas que constituem como que o estôfo do qual são feitos os fenómenos; à maneira cartesiana, quasi pode dizer-se que os fenómenos são modos das substâncias extensão e duração. Seja como fôr, considerar o espaço e o tempo em si mesmos não é praticar uma abstracção ilegítima, mas apreciar os fenómenos no seu carácter mais elementar. Ora o espaço e o tempo, pelos seus caracteres empíricos, longe de serem coisas separadas, são de tal modo interpendentes que não há um sem o outro: o espaço é temporal e o tempo é espacial. Num tempo sem espaço os instantes não poderiam distinguir-se; haveria um puro « agora » e o tempo deixaria de ser um contínuo sucessivo. Num espaço sem tempo os pontos seriam também indiscerníveis; o espaço não seria um contínuo extenso. Realmente há tempo e espaço, e são os pontos que distinguem os instantes como os instantes distinguem os pontos; puro ponto ou puro instante são abstracções, só o ponto-instante é real; o espaço e o tempo, entrelaçados intimamente, formam na realidade um espaço-tempo.

Pelo seu carácter de sucessividade, o tempo é unidimensional; o espaço, extenso, é unidimensional pelo menos. Sob pena de cada um ser afectado do carácter do outro, o tempo tem de se repetir no espaço como o espaço tem de se repetir no tempo: um instante ocupa vários pontos e um ponto vários instantes. Mas o tempo possui ainda o carácter de irreversibilidade e o de transitividade da anterioridade; cada um dêles, segundo Alexander, exige mais uma dimensão de espaço e reciprocamente. Não pode dizer-se ontologicamente que pelo tempo se prova o espaço ou *vice versa*, mas sim que o espaço e o

tempo da experiência estão numa relação mútua tão fechada e tão ramificada que têm de considerar-se como uma só entidade verdadeira descrita em termos diferentes e complementares. Naturalmente, esta descrição é relativa à consciência que a faz.

As relações do universo quadridimensional são por natureza difíceis para a representação concreta. Mas convém não esquecer que as do espaço euclidiano também se representam concretamente com certa dificuldade; o espaço euclidiano, altamente abstracto, está bem longe do espaço sensível.

27. A métrica do universo, caracterizada pela forma quadrática indefinida (18), é pseudo-euclidiana. A anulação de  $\Delta s^2$  não significa em geral a coincidência de dois acontecimentos, mas sim que eles podem constituir a origem e o termo dum raio luminoso. Dado o acontecimento  $(x, y, z, t)$ , a variedade tridimensional

$$(19) \quad \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0,$$

que o contém, é constituída pelos acontecimentos que podem ser ligados a êste pela propagação da luz no vácuo. Esta variedade divide o universo em duas regiões diferentes. Numa, onde é

$$\Delta s^2 > 0$$

ou seja

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 < c^2,$$

qualquer acontecimento pode ser ligado ao acontecimento dado pelo movimento rectilíneo uniforme duma partícula; no espaço de inércia da partícula os dois acontecimentos

ocorrem no mesmo lugar, o que significa que uma transformação apropriada de coordenadas galileanas dará ao eixo dos tempos a direcção do vector determinado pelos dois acontecimentos (vector temporal). Esta região, com (19), é a dos acontecimentos que podem ter com o acontecimento dado relações de causalidade no passado ou no futuro (necessariamente absolutos). A outra região, onde é

$$\Delta s^2 < 0,$$

é formada pelos acontecimentos que não podem estar ligados com o acontecimento dado por movimento algum real, visto que é impossível velocidade superior à da luz; assim, não pode haver relação de causalidade entre o acontecimento dado e qualquer destes acontecimentos, nem ordem de sucessão absoluta no tempo. Em particular, para um certo espaço de inércia os dois acontecimentos são simultâneos; uma transformação apropriada de coordenadas galileanas dará a um eixo de espaço a direcção do vector que os dois acontecimentos determinam (vector espacial).

Se se substituísse  $c$  por  $\infty$ , a equação da variedade (19) degeneraria em

$$\Delta t^2 = 0$$

e representaria o espaço de referência. Este appareceria como lugar dos acontecimentos de possível ligação com o acontecimento dado por acção instantânea; e das duas regiões quadridimensionais consideradas, a segunda anular-se-ia porque  $\Delta t^2$  é necessariamente positivo. Qualquer acontecimento do universo poderia pois ter relação de causalidade com o acontecimento dado, e seria absolutamente anterior, ou posterior, ou simultâneo a este acontecimento. É a concepção pre-relativista do universo;

mais uma vez o tempo absoluto aparece ligado à possibilidade de tódas as velocidades, incluindo a infinita.

Tudo isto se torna por assim dizer visível se construimos a imagem do universo pseudo-euclidiano no espaço euclidiano abstracto de quatro dimensões, o que não altera as relações topológicas. A variedade (19) tem por imagem um hipercone de revolução cujo vértice é a imagem do acontecimento dado; dentro dêste hipercone fica a imagem da região  $\Delta s^2 > 0$ , fora fica a imagem da região  $\Delta s^2 < 0$ . Vê-se que a variedade (19) e a primeira região se subdividem. Uma das fôlhas do hipercone, com o espaço que compreende, representa a totalidade dos acontecimentos que podem ser causados pelo acontecimento central; a outra fôlha, com os pontos interiores, representa a totalidade dos acontecimentos que podem ter causado o acontecimento central. Não se subdivide a região exterior ao hipercone, imagem da totalidade dos acontecimentos que não podem ter relação de causalidade nem ordem de sucessão absoluta com o acontecimento dado. Nas mudanças de coordenadas galileanas o eixo dos tempos desloca-se dentro do hipercone, e o hiperplano que contém os eixos de espaço desloca-se na região exterior; o segundo deslocamento mostra bem a relatividade da simultaneidade, que destrói o tempo absoluto e tem como consequência a relatividade do comprimento e da duração (1). Agora façamos tender  $c$  para  $\infty$ . A abertura do hipercone tenderá para o ângulo raso. No limite, esta variedade degenera no hiperplano que contém os eixos de espaço, a região exterior evola-se, a simultaneidade torna-se abso-

---

(1) Pode demonstrar-se directamente que o princípio da relatividade conduz necessariamente ao grupo de Lorentz se se admite que a simultaneidade não é absoluta, como conduz necessariamente ao de Galileu se se admite o contrário.

luta, como a anterioridade e a posterioridade; tem-se o universo degenerado da física clássica. A passagem dum a outro sistema de inércia traduz-se apenas por uma rotação do eixo dos tempos (abstraindo da eventual rotação dos eixos de espaço no respectivo hiperplano tornado absoluto) e só a relatividade newtoniana do espaço se conserva.

28. A cada partícula de matéria corresponde no universo uma linha, de que cada elemento é necessariamente um vector temporal ( $ds^2 > 0$ ); é a linha universal da partícula. O caso limite é o duma partícula de luz, cuja linha universal satisfaz à equação

$$ds = 0.$$

Designando por  $v$  a velocidade da partícula no sistema de inércia  $S$ , tem-se, segundo (18),

$$ds^2 = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

ou, pondo  $ds = c d\tau$ ,

$$(20) \quad d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Num sistema de inércia ligado momentaneamente à partícula no instante  $t$ , esta está momentaneamente em repouso. Portanto  $d\tau$  é o intervalo de tempo marcado por um relógio ligado à partícula e correspondente ao intervalo  $dt$  decorrido em  $S$ ; é o elemento de tempo próprio da partícula. A fórmula (20) exprime simplesmente a dilatação do tempo.

Integrando (20) sobre a trajectória da partícula entre

dois instantes quaisquer, obtém-se o intervalo finito de tempo próprio, que será sempre menor que o intervalo de tempo correspondente de  $S$ .

É natural procurar saber qual a significação das linhas universais geodésicas, para as quais é estacionário o comprimento dum arco qualquer de que se não fazem variar as extremidades, o que se exprime escrevendo

$$\delta \int ds = 0.$$

É sabido que esta equação, no caso geral em que é

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

equivale às seguintes, que não são mais que uma transformação das equações de Euler,

$$\frac{d^2 x^\mu}{dp^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{dp} \frac{dx^\beta}{dp} = 0,$$

onde  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  são os símbolos de Christoffel de segunda espécie e  $p$  é o parâmetro em função do qual se exprimem as coordenadas dos pontos da geodésica, parâmetro necessariamente linear no tempo próprio se  $ds^2 > 0$ . Nesta hipótese e em coordenadas galileanas, para as quais os símbolos de Christoffel se anulam idênticamente, têm-se as equações

$$(21) \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{d\tau^2} = 0, \quad \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0,$$

que mostram que as coordenadas correntes duma geodésica universal de comprimento positivo são funções lineares

do tempo próprio. Eliminando  $\tau$ , resulta que  $x, y, z$  são funções lineares de  $t$  e portanto que a geodésica universal duma partícula material é no espaço de inércia  $S$  um movimento rectilíneo uniforme. A recíproca também se prova imediatamente atendendo a (20). Assim, pode enunciar-se a lei da inércia de Galileu dizendo que uma partícula material, sôbre a qual não actua fôrça, tem por linha universal uma geodésica de comprimento positivo.

Há a notar que o comprimento duma tal geodésica universal não só é estacionário, mas máximo. Suponhamos com efeito, por um momento, que  $S$  é um sistema de inércia ligado à partícula livre de fôrça;  $dt$  é o elemento de tempo próprio desta partícula, e o comprimento da geodésica correspondente entre os instantes  $t_0$  e  $t_1$  é

$$\Delta s = c(t_1 - t_0).$$

Um arco de linha universal não geodésica com as mesmas extremidades tem, por (20), o comprimento

$$\Delta s' = c \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt < \Delta s,$$

visto que a velocidade  $v$  da partícula correspondente é uma função contínua não idênticamente nula.

Se  $ds=0$ , o parâmetro  $p$  pode ser o tempo  $t$  e as equações das geodésicas tomam a forma

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0, \quad t = t$$

em coordenadas galileanas. Para uma partícula de luz também a geodésica universal é no espaço de inércia  $S$

um movimento rectilíneo uniforme, e reciprocamente. Donde o enunciado seguinte da lei da propagação da luz fora da matéria: no vácuo, uma partícula de luz tem por linha universal uma geodésica de comprimento nulo.

29. As equações (21) são uma forma particular das equações da mecânica einsteiniana.

Pois que o elemento  $ds$  de linha universal é um vector de componentes contravariantes  $dx, dy, dz, dt$ , e que  $d\tau$  é um invariante, as quantidades

$$\frac{dx}{d\tau}, \quad \frac{dy}{d\tau}, \quad \frac{dz}{d\tau}, \quad \frac{dt}{d\tau}$$

e

$$\frac{d^2x}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2z}{d\tau^2}, \quad \frac{d^2t}{d\tau^2}$$

são componentes contravariantes de dois vectores, respectivamente denominados velocidade e aceleração universais; as três componentes de espaço destes dois vectores, em virtude de (20), reduzem-se praticamente às componentes da velocidade e da aceleração ordinárias se a velocidade da partícula é muito pequena relativamente à da luz. A velocidade universal é tangente à linha universal e o seu módulo é igual à velocidade da luz; e a derivação de

$$-\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 + c^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = c^2$$

em ordem a  $\tau$  mostra que os dois vectores aceleração e velocidade universais são perpendiculares entre si.

A lei da inércia (21) significa portanto que é nula a aceleração universal  $J^\mu$  duma partícula livre de força e

exprime-se pela equação tensorial

$$(22) \quad J^\mu = 0.$$

Visto que a forma tensorial é independente das coordenadas galileanas empregadas, é sob esta forma que devem exprimir-se as leis naturais na física da relatividade.

Nas equações gerais da Mecânica tem de figurar um vector universal, que represente a força ordinária por intermédio das suas componentes de espaço; êste vector será a força universal  $F^\mu$ . Pôsto isto, a lei fundamental da mecânica einsteiniana, generalização natural da lei da inércia, consiste em que a força e a aceleração universais são proporcionais:

$$m_0 J^\mu = F^\mu.$$

Supõe-se aqui que a partícula material conserva um estado invariável para o espaço de referência que lhe é próprio;  $m_0$  é uma constante característica de tal estado (massa própria), definida neste espaço pelo quociente duma força instantânea, suposta aplicada à partícula, pela aceleração que essa força produziria.

Designando por  $V^\mu$  a velocidade universal, a equação precedente pode escrever-se

$$(23) \quad \frac{d}{d\tau} (m_0 V^\mu) = F^\mu.$$

O vector entre parênteses é a impulsão universal. Nas suas componentes de espaço, êste vector reduz-se praticamente à impulsão newtoniana para as velocidades ordinárias da matéria; a sua componente de tempo é praticamente igual a  $m_0$  nas mesmas condições.

A expressão da lei da inércia por meio de (22) ou, o

que é o mesmo, por meio da conservação da velocidade universal, é uma expressão cinemática; nada figura nela que caracterize a substância da partícula, e esta bem poderia conceber-se como um ponto geométrico. A expressão dinâmica dessa lei deve conter a massa própria, e resulta de (23) pela anulação do segundo membro: para uma partícula livre de força, há conservação da impulsão universal.

Segundo (23), a impulsão universal não se conserva quando há força, mas a sua derivada em ordem ao tempo próprio é igual à força universal (lei da impulsão). É esta forma da lei fundamental da Mecânica que reteremos definitivamente.

30. Do ponto de vista do sistema de inércia  $S$ , a equação absoluta (23) scinde-se em quatro equações, três respectivas às componentes espaciais e uma às componentes temporais de  $V^{\mu}$  e  $F^{\mu}$ ; as três primeiras são, por (20),

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx}{dt} \right) = X, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dy}{dt} \right) = Y,$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dz}{dt} \right) = Z,$$

onde  $X, Y, Z$  são as componentes dum vector do sistema  $S$ , obtidas multiplicando por  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  as componentes espaciais de  $F^{\mu}$ . Estas equações exprimem a lei da impulsão da mecânica clássica, porém com uma diferença: a massa da partícula não é constante, mas depende da velocidade segundo a relação

$$(25) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Vê-se que a massa duma partícula em repouso coincide com a massa própria  $m_0$ , e vê-se como as componentes espaciais da força universal estão ligadas às componentes da força ordinária. As equações einsteinianas (24) reduzem-se praticamente às de Newton se  $v$  é muito pequena comparada a  $c$ , como devia ser.

Visto que a força e a velocidade universais são perpendiculares entre si, tem-se

$$-F^x V^x - F^y V^y - F^z V^z + c^2 F^t V^t = 0,$$

donde resulta

$$-X \frac{dx}{dt} - Y \frac{dy}{dt} - Z \frac{dz}{dt} + c^2 F^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0.$$

Pela quarta das equações em que se scinde (23),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = F^t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

a relação precedente dá a equação

$$(26) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt},$$

que exprime a lei da energia. Esta equação não é contraditória com (24), porque a quarta (23) é consequência das três primeiras. Se a partícula se move passando do repouso à velocidade  $v$ , a integração dá imediatamente a energia adquirida (energia cinética), igual ao trabalho

total da fôrça,

$$(27) \quad W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = (m - m_0) c^2;$$

com desprezo da segunda ordem, a expressão obtida reduz-se à expressão newtoniana  $\frac{1}{2} m_0 v^2$ . A variação da energia é pois igual ao produto da variação da massa pelo quadrado da velocidade da luz. Êste resultado exprime, num caso particular, a lei da inércia da energia<sup>(1)</sup> de Einstein, segundo a qual tôda a energia possui massa e reciprocamente, segundo a relação

$$W = m c^2.$$

Escolhendo a unidade de tempo de modo que a velocidade da luz seja igual a 1, a massa e a energia serão medidas pelo mesmo número. Energia e massa são pois dois aspectos diferentes duma só essência física.

Consideremos o caso da energia radiante. Seja uma partícula imóvel no sistema de inércia  $S$ , onde possui a energia  $E_1$ . Para o sistema de inércia  $S'$ , animado da velocidade  $v$  relativamente a  $S$ , a energia da partícula será  $E'_1$  e a diferença  $E'_1 - E_1$  representará a energia cinética da partícula, salvo uma constante aditiva que depende das constantes aditivas arbitrárias de  $E_1$  e  $E'_1$ . Suponhamos que a partícula vem a emitir a mesma quantidade  $\frac{E}{2}$  (apreciada em  $S$ ) de energia luminosa, sob a forma de ondas planas, em dois sentidos opostos que fazem com

(1) A. Einstein, *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig?* 1905, in-Lorentz-Einstein-Minkowski, *op. cit.*

$Ox$  ângulos de cosenos  $\cos \varphi$ ,  $-\cos \varphi$ , deixando logo de radiar. Em  $S$ , a energia da partícula é agora

$$E_2 = E_1 - E;$$

em  $S'$ , se o eixo  $O'x'$  se move sôbre  $Ox$ , reconhece-se pela aplicação da fórmula (16) que a partícula ficou com a energia

$$E'_2 = E_1 - \frac{E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

A diferença  $E'_2 - E_2$  é a nova energia cinética da partícula em  $S'$ , salvo a mesma constante aditiva de que falámos há pouco. A partícula perden portanto para  $S'$ , por efeito da radiação, a energia cinética

$$E_1 - E_1 - (E'_2 - E_2) = -\frac{E}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - E.$$

Pois que não variou a velocidade, diminuiu necessariamente a massa própria da partícula e, segundo a primeira fórmula (27), justamente da quantidade

$$\mu = \frac{E}{c^2}.$$

No sistema  $S$ , a perda de energia radiante foi acompanhada de perda de massa segundo a lei de Einstein. A luz, por conseguinte, transporta inércia.

Resulta de (25) ou de (27) que uma partícula de massa própria diferente de zero exige uma quantidade infinita de energia para atingir a velocidade da luz. A massa própria duma partícula de luz é portanto nula, e nula é

também a sua massa para qualquer velocidade menor que  $c$ . Isto significa que uma partícula de luz só existe como tal para a velocidade  $c$ ; quando absorvida por um corpo, a sua energia ou massa toma outra forma. Por partícula de luz temos entendido uma porção de energia luminosa que ocupa instantâneamente um volume muito pequeno. Desde a teoria dos fotões de Einstein sabe-se porém que a luz tem estrutura atómica como a matéria ordinária.

A variação da massa com a velocidade segundo (25) foi confirmada pela observação do desvio magnético dos raios  $\beta$ , que são constituídos por electrões animados de velocidade próxima da da luz. Outro êxito brilhante da mecânica de Einstein foi a explicação quasi completa da estrutura fina das riscas espectrais, devida a Sommerfeld. A explicação completa dá-a agora a Micromecânica; mas é digno de notar-se que a mecânica de Einstein, a-pesar-de macroscópica, dá no domínio intra-atómico resultados incomparavelmente mais exactos que os que dá no mesmo domínio a mecânica newtoniana.

A lei da inércia da energia recebeu aplicações importantes. Por ela se explica dum modo geral que os pesos atómicos não sejam múltiplos exactos do pêso atómico mínimo (1). A energia necessária para destruir o núcleo de hélio, por exemplo, é o que se encontra sob a forma de excesso de massa em quatro átomos de hidrogénio. Por virtude do factor  $c^2$  esta energia é relativamente muito grande, o que explica que o núcleo de hélio tenha enorme estabilidade. Parece que a persistência da radiação estelar através de biliões de anos, a-pesar-da elevadíssima perda de energia que acarreta, se deve explicar pela transformação de protões e electrões em radiação. Sendo

---

(1) A existência de isótopos, para muitos elementos, é outra causa destes desvios.

inegável que no interior das estrêlas se realizam condições que não têm paralelo com as da nossa experiência, a hipótese nada tem de inverosímil. O que é certo é que as outras explicações propostas, como a queda de meteoritos, a elevação de temperatura por contracção, mesmo a radioactividade, são insuficientes. Segundo Eddington, a massa das estrêlas diminui sempre; isto só pode explicar-se pela inércia da energia radiada, seja qual fôr a sua origem.

A conservação da impulsão universal numa partícula livre de fôrça, impulsão cujas componentes podem escrever-se, por (25),

$$m \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{dz}{dt}, \quad m,$$

compreende a conservação da impulsão ordinária e a conservação da massa (ou da energia). Três leis de conservação, que na física pre-relativista eram independentes, aparecem unificadas na física da relatividade.

**31.** Para maior simetria convém tomar como unidade de tempo a fracção  $\frac{1}{c}$  de segundo, conservando as outras unidades fundamentais. A velocidade da luz será então igual à unidade, o elemento de tempo próprio será  $ds$ , a energia será igual à massa. A forma métrica fundamental do universo será

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

com

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 (\mu = \nu = 1, 2, 3), \\ +1 (\mu = \nu = 4), \\ 0 (\mu \neq \nu); \end{cases}$$

$x^4$  será pois o tempo expresso na nova unidade.

Consideremos uma porção de matéria macroscopicamente contínua, sem tensões internas próprias (matéria desagregada). Designemos por  $\rho_0$  a densidade própria, por  $u^\mu$  as componentes contravariantes da velocidade universal, por  $f^\mu$  as da fôrça universal referida à unidade de volume próprio (densidade de fôrça universal). A equação tensorial do movimento (23)

$$\rho_0 \frac{d u^\mu}{d s} = f^\mu$$

ou

$$\rho_0 u^\alpha \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} = f^\mu,$$

pondo

$$M^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu$$

escreve-se

$$(28) \quad \frac{\partial M^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = f^\mu$$

em virtude da equação de continuidade

$$\frac{\partial (\rho_0 u^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0.$$

Se não há fôrça, tem-se

$$(29) \quad \frac{\partial M^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0;$$

a conservação da impulsão ordinária e a conservação da energia exprimem-se pela anulação da divergência do

tensor simétrico de segunda ordem  $M^{\mu\nu}$  (tensor energético mecânico).

Convém notar que  $f^{\mu}$  tem por componentes espaciais as da densidade de força ordinária e por componente temporal o trabalho da densidade de força na unidade de tempo (densidade de potência). Com efeito, a força universal no volume próprio  $dV_0$  é

$$dF^{\mu} = f^{\mu} dV_0,$$

donde resulta

$$dF^{\mu} \sqrt{1 - v^2} = f^{\mu} dV$$

introduzindo o valor  $dV$  do mesmo volume no sistema de referência escolhido; ora (n.º 30) as quatro grandezas representadas no primeiro membro são justamente as componentes da força e a potência para este sistema.

As fórmulas de transformação da massa e do volume mostram que a densidade se transforma pela equação

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - v^2}.$$

Atendendo a isto e introduzindo as componentes da velocidade ordinária, reconhece-se que as componentes puramente espaciais, as componentes espacio-temporais e a componente puramente temporal de  $M^{\mu\nu}$  são respectivamente

$$\rho v^i v^j, \quad \rho v^i, \quad \rho \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

as primeiras representam um tensor simétrico, as segundas um vector repetido e a última um escalar no espaço inercial de referência.

Segundo (28), a lei da impulsão e a lei da energia es-

crevem-se agora

$$\frac{\partial(\rho v^i v^j)}{\partial x^j} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^4} = f^i,$$

$$\frac{\partial(\rho v^j)}{\partial x^j} + \frac{\partial \rho}{\partial x^4} = f^4.$$

Vê-se que o vector  $\rho v^i$  deve ser interpretado como densidade de impulsão  $g^i$  na equação vectorial e como densidade de corrente de energia  $\sigma^i$  na equação escalar;  $\rho v^i v^j$  será o tensor  $l^{ij}$  das tensões (densidade de corrente de impulsão). O tensor energético  $M^{\mu\nu}$ , do ponto de vista do sistema de referência considerado, scinde-se pois em quatro grandezas segundo o esquema

$$\frac{l^{ij}}{\sigma^j} \Big| \frac{g^i}{\rho} :$$

tensor densidade de corrente de impulsão, vectores densidade de impulsão e densidade de corrente de energia, escalar densidade de energia. Esta scisão, como a da impulsão universal do n.º precedente no vector impulsão e no escalar massa (energia), deriva da scisão do universo em espaço e tempo, inerente à percepção.

Pelas últimas equações obtidas, a conservação da impulsão e a conservação da energia, expressas por (29) sob forma absoluta, escrevem-se num sistema de inércia

$$\text{div}^i l + \frac{\partial g^i}{\partial x^4} = 0,$$

$$\text{div} \sigma + \frac{\partial \rho}{\partial x^4} = 0;$$

por unidade de tempo e de volume, o acréscimo de impulsão (ou de energia) é igual ao fluxo de impulsão (ou de energia) recebido.

32. Para levantar a restrição da falta de tensões próprias, basta adicionar ao tensor universal precedente um tensor universal também simétrico, representativo dessas tensões. Teremos assim, no caso mais geral,

$$M^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu + p^{\mu\nu}.$$

Num sistema de inércia, êste tensor scinde-se segundo o esquema do n.º anterior; mas as densidades de corrente de impulsão, de impulsão, de corrente de energia e de energia são agora respectivamente

$$\rho v^i v^j + p^{ij}, \quad \rho v^i + p^{i4}, \quad \rho v^j + p^{4j}, \quad \rho + p^{44}.$$

É útil observar que estas componentes são insensíveis perante a última, que por sua vez não difere praticamente de  $\rho_0$ . Nas nossas unidades,  $\rho$  é enorme relativamente aos  $p^{\mu\nu}$  e os  $v^i$  são muito pequenos. Assim, em cálculos de aproximação, o tensor energético mecânico pode ser substituído pela densidade própria entendida ao modo ordinário.

A lei da impulsão-energia (28) dá presentemente

$$\rho_0 \frac{d u^\mu}{d s} + u^\mu \frac{\partial (\rho_0 u^\alpha)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial p^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = f^\mu.$$

Multiplicando escalarmente por  $u_\mu$  e atendendo à ortogonalidade da velocidade e da aceleração (ou da fôrça) universais, obtém-se

$$\frac{\partial (\rho_0 u^\alpha)}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial p^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} u_\beta = 0,$$

visto ser igual a 1 o módulo da velocidade universal. A última equação é a nova equação de continuidade; o se-

gundo termo, que não aparece na mecânica clássica, é extremamente pequeno. Combinando esta equação com a penúltima, têm-se as equações relativistas gerais da mecânica da matéria contínua

$$\rho_0 \frac{d u^\mu}{d s} + \frac{\partial p^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} - u^\mu u_\beta \frac{\partial p^{\alpha\beta}}{\partial x^\alpha} = f^\mu.$$

As três primeiras exprimem a lei da impulsão e correspondem às equações de Euler; a quarta traduz a lei da energia.

No caso simples dum fluido perfeito, as tensões próprias são determinadas pela pressão  $p$  segundo a equação

$$p^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} p,$$

em cujo segundo membro figura o tensor métrico fundamental expresso contravariantemente.

O que nos importa reter é que a matéria *strictu sensu* é caracterizada fisicamente por um tensor universal simétrico de segunda ordem, cuja divergência é igual à força universal exterior (lei da impulsão-energia). No caso da matéria isolada, a divergência do tensor energético é nula: a impulsão e a energia conservam-se.

Tanto as componentes mixtas

$$M_\mu^\nu = \rho_0 u_\mu u^\nu + p_\mu^\nu$$

como as covariantes

$$M_{\mu\nu} = \rho_0 u_\mu u_\nu + p_{\mu\nu}$$

do tensor energético não diferem em valor absoluto das contravariantes com os mesmos índices. A contracção de

$M^{\nu}_{\mu}$  dá o escalar universal

$$M^{\alpha}_{\alpha} = \rho_0 + p^{\alpha}_{\alpha},$$

que difere extremamente pouco de  $\rho_0$ .

**33.** As equações fundamentais da Electrodinâmica (7), pondo  $c=1$  e designando por  $v$  o vector velocidade da electricidade, são agora

$$(30) \quad \frac{\partial E}{\partial x^4} + \rho v = \text{rot } H, \quad \frac{\partial H}{\partial x^4} = -\text{rot } E,$$

$$\text{div } E = \rho, \quad \text{div } H = 0.$$

Representemos por  $\rho_0$  a densidade eléctrica própria e por  $u^{\mu}$ , como no n.º precedente, a velocidade universal da electricidade, expressa contravariadamente. O produto

$$\rho_0 u^{\mu} = I^{\mu}$$

é a expressão contravariante da densidade de corrente universal. Visto que se tem (10)

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2}},$$

as componentes espaciais e temporal da corrente universal são

$$\rho v^i, \quad \rho \quad (i=1, 2, 3),$$

isto é respectivamente as componentes da corrente ordinária e a densidade. A anulação da divergência da corrente universal

$$\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} = 0$$

exprime o princípio da conservação da electricidade.

É sabido que  $H$  e  $E$  derivam dum potencial-vector  $A$  e dum potencial escalar  $\varphi$  pelas fórmulas

$$(31) \quad H = \text{rot } A, \quad E = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial A}{\partial x^4};$$

$A$  e  $\varphi$  satisfazem a

$$(32) \quad \text{div } A + \frac{\partial \varphi}{\partial x^4} = 0$$

e são determinados pelas equações

$$(33) \quad \begin{aligned} \Delta A - \frac{\partial^2 A}{\partial x^4 \partial x^4} &= -\rho v, \\ \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^4 \partial x^4} &= -\rho, \end{aligned}$$

onde  $\Delta$  é o operador de Laplace. Façamos

$$A^i, \varphi = \varphi^\mu;$$

as equações (33) escrevem-se então, como imediatamente se verifica,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi^\mu}{\partial x^\beta} \right) = I^\mu,$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é sempre o tensor métrico fundamental do universo. Esta equação prova que  $\varphi^\mu$  é um vector universal (potencial electromagnético universal); o potencial-vector ordinário e o potencial escalar não são outra coisa que o resultado da scisão do universo em espaço e tempo relativa ao sistema de referência. A equação (32) dá

$$\frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0,$$

o que significa que a divergência de  $\varphi^\mu$  é nula.

Pondo

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x^\mu},$$

obtéem-se um tensor antissimétrico de segunda ordem; por ser

$$\varphi_i = -\varphi^i, \quad \varphi_4 = \varphi^4,$$

tem-se por (31)

$$F_{\mu\nu} = \begin{array}{cccc} 0 & H^3 & -H^2 & E^1 \\ \begin{array}{l} \mu\nu \rightarrow \\ \downarrow \end{array} & -H^3 & 0 & H^1 & E^2 \\ & H^2 & -H^1 & 0 & E^3 \\ & -E^1 & -E^2 & -E^3 & 0 \end{array}$$

e portanto

$$F^{\mu\nu} = \begin{array}{cccc} 0 & H^3 & -H^2 & -E^1 \\ \begin{array}{l} \mu\nu \rightarrow \\ \downarrow \end{array} & -H^3 & 0 & H^1 & -E^2 \\ & H^2 & -H^1 & 0 & -E^3 \\ & E^1 & E^2 & E^3 & 0. \end{array}$$

A relatividade do campo eléctrico e do campo magnético, que encontrámos no n.º 24, compreende-se agora melhor. Só o campo electromagnético, que é caracterizado por um tensor universal antissimétrico de segunda ordem, tem carácter absoluto; a separação dos campos  $E$  e  $H$  é relativa ao sistema de referênciã e determinada pela scisão do universo em tempo e espaço. Salta à vista a razão formal da diferença de propriedades dos dois campos; razão velada na electrodinâmica clássica, que descrevia ambos como vectoriais. É vectorial, sim, o campo eléctrico; mas o campo magnético é realmente um tensor antissimétrico de segunda ordem, e só aparentemente um vector graças ao número três das dimensões do espaço. No espaço de três dimensões, mas só nêlo, um tensor antissi-

métrico de segunda ordem apresenta outras tantas componentes essenciais.

Fácilmente se reconhece que a primeira e a terceira equações (30), por um lado, bem como a segunda e a quarta, por outro lado, se escrevem respectivamente

$$(34) \quad \frac{\partial F^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = I^\mu,$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = 0.$$

O tensor antissimétrico de terceira ordem, que constitui o primeiro membro da segunda equação, tem apenas quatro componentes essenciais, correspondentes às combinações sem repetição dos quatro primeiros números três a três. Têm-se assim as equações fundamentais da Electrodinâmica sob forma absoluta.

**34.** A densidade da fôrça ponderomotriz do campo electromagnético é, como se sabe,

$$(35) \quad f = \rho E + \rho [v H],$$

onde o símbolo [ ] designa a multiplicação vectorial. Verifica-se imediatamente que as três equações espaciais em que se scinde a equação

$$f^\mu = - F^{\mu\alpha} I_\alpha$$

coincidem com as três em que se divide a equação vectorial (35). Tem-se além disso

$$f^4 = \rho (E^1 v^1 + E^2 v^2 + E^3 v^3) = \rho (E v),$$

onde ( ) significa multiplicação escalar; ou, atendendo

a que o produto vectorial que figura em (35) é perpendicular a  $v$ ,

$$f^4 = (fv).$$

$f^4$  é pois o trabalho da densidade de força na unidade de tempo, ou seja a densidade de potência. O vector universal  $f^\mu$  é a densidade de força universal do campo electromagnético.

Vejamos se existe um tensor energético electrodinâmico análogo ao tensor mecânico, isto é, que satisfaça a uma equação da forma (28). De

$$f_\mu = -F_{\mu\beta} I^\beta$$

resulta, atendendo à primeira (34),

$$f_\mu = -F_{\mu\beta} \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\gamma} = -\frac{\partial}{\partial x^\gamma} (F_{\mu\beta} F^{\beta\gamma}) + F^{\beta\gamma} \frac{\partial F_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma}.$$

O segundo termo do terceiro membro é idêntico a

$$\frac{1}{2} F^{\beta\gamma} \left( \frac{\partial F_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\mu}}{\partial x^\beta} \right)$$

em virtude da antissimetria de  $F^{\mu\nu}$ , e portanto, pela segunda (34), a

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} F^{\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \\ & = -\frac{1}{4} \left( F^{\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} + F_{\beta\gamma} \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \right) = -\frac{1}{4} g_\mu^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (F_{\beta\gamma} F^{\beta\gamma}). \end{aligned}$$

É pois

$$f_\mu = -\frac{\partial E_\mu^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

com

$$E_{\mu}^{\nu} = -F_{\mu\beta} F^{\nu\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu}^{\nu} F_{\beta\gamma} F^{\beta\gamma};$$

o tensor procurado existe efectivamente.

As componentes cõntravariantes sãõ

$$E^{\mu\nu} = -g_{\beta\gamma} F^{\mu\beta} F^{\nu\gamma} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\beta\gamma} F^{\beta\gamma},$$

logo o tensor é simétrico. O cálculo destas componentes dá

$$E^{11} = \frac{1}{2} (|E|^2 + |H|^2) - E^1 E^1 - H^1 H^1,$$

$$E^{22} = - (E^1 E^2 + H^1 H^2),$$

.....

$$E^{44} = E^2 H^3 - E^3 H^2,$$

.....

$$E^{44} = \frac{1}{2} (|E|^2 + |H|^2);$$

vê-se que as componentes espaciais coincidem com as tensões de Maxwell, as componentes espacio-temporais com as do vector radiante de Poynting e a componente temporal com a densidade de energia. Como o tensor energético mecânico, o tensor energético electrodinâmico scinde-se em quatro grandezas para um espaço de inércia: o tensor simétrico das tensões ou densidade de corrente de impulsão, o vector densidade de impulsão, o vector densidade de corrente de energia e o escalar densidade de energia. Pois que a equação

$$(36) \quad f^{\mu} = - \frac{\partial E^{\mu\alpha}}{\partial x^{\alpha}}$$

traduz a lei da impulsão para  $\mu = 1, 2, 3$  e a lei da energia para  $\mu = 4$ , o vector de Poynting, com efeito, deve interpretar-se como densidade de corrente de energia só na última equação; nas primeiras representa a densidade de impulsão electromagnética, grandeza já conhecida da electrodinâmica pre-relativista. A igualdade dos dois vectores é um aspecto da lei da inércia da energia.

Se se abstrai da gravitação, pode actuar como força exterior sobre a matéria só a força ponderomotriz do campo electromagnético (por intermédio da carga). As equações (28) e (36) dão pois

$$\frac{\partial M^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = -\frac{\partial E^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha},$$

ou

$$(37) \quad \frac{\partial T^{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} = 0$$

pondo

$$T^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} + E^{\mu\nu}.$$

A equação (37) mostra que, abstraindo da gravitação, a impulsão-energia total mecânica e electrodinâmica é conservada. O tensor  $T^{\mu\nu}$ , de divergência sempre nula, é o tensor energético material.

A exclusão da gravitação constitui uma lacuna da teoria da relatividade especial, mas lacuna forçosa. Veremos que esta teoria só é rigorosamente válida no caso limite em que o campo de gravitação não existe.

Contraindo o tensor energético electrodinâmico obtém-se

$$E_\alpha^\alpha = 0,$$

ao contrário do que sucede com o tensor mecânico. Isto prova que o segundo tensor não pode derivar-se estatisti-

camente do primeiro. Nem sequer o seu termo  $p^{uv}$ , correspondente à existência de tensões próprias, porquanto, no caso dum fluido perfeito, é

$$p_a^a = 4p$$

sendo  $p$  a pressão. As tensões da matéria, por conseguinte, não podem ser tôdas de origem electromagnética. Muito menos podem explicar-se pela gravitação intercorpúscular, porque esta é infinitésima nos corpos de pequenas dimensões. É êste um problema que não há meio de resolver enquanto forem desconhecidas as forças que mantêm a electricidade aglomerada no electrão e no protão. No estado actual da Física somos forçados a servir-nos da descrição fenomenológica da matéria *stricto sensu* para determinar a estrutura do tensor energético respectivo.

Note-se emfim que tôdas as componentes de  $E^{uv}$  são muito pequenas perante a densidade da matéria  $\rho_0$  que figura em  $M^{uv}$ . A esta densidade se reduz pois, em primeira aproximação, o tensor material completo.