V

35. Do ponto de vista dum sistema de inércia S consideremos um sistema de pontos materiais, regressando à unidade ordinária de tempo. As equações do movimento sob a forma (24) do Cap. IV, combinadas com o princípio de d'Alembert e com o princípio dos deslocamentos virtuais, dão a equação geral da dinâmica relativista

$$(1) \qquad \sum \left\{ \left[X_k - \frac{d}{dt}(m_k \dot{x}_k) \right] \delta x_k + \ldots + \ldots \right\} = 0.$$

m_k é a massa do ponto material M_k, x_k, y_k, z_k são as suas coordenadas, δ simboliza um deslocamento virtual arbitrário compatível com as ligações do sistema no instante t, e o ponto colocado sôbre uma letra representa derivação em ordem ao tempo. X_k, Y_k, Z_k são as componentes da fôrça dada que actua em M_k; supõe-se, é claro, que as ligações são bilaterais e sem atrito.

Geomètricamente, a posição do sistema é determinada por um certo número (mínimo) de coordenadas independentes. Em função destas coordenadas e do tempo se exprimem as coordenadas cartesianas dos pontos do sistema por equações da forma

$$(2) \qquad x_k = x_k(q_1, q_2, \ldots, t).$$

Um cálculo clássico permite dar a (1) a forma

$$\sum_i \left[Q_i - \frac{d}{dt} \sum_k \left(m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} + \ldots + \ldots \right) + \right. \tag{3}$$

$$\left. + \sum_k \left(m_k \dot{x}_k \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} + \ldots + \ldots \right) \right] \delta q_i = 0,$$

onde

$$Q_i = \sum_k \left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \ldots + \ldots \right)$$

são as componentes lagrangianas da fôrça. Façamos

$$T^* = \sum m^0{}_k c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2{}_k}{c^2}} \right), \tag{4}$$

onde $m^0{}_k$ é a massa própria do ponto M_k e v_k a sua velocidade; atendendo à relação

$$v_k{}^2 = \dot{x}_k{}^2 + \dot{y}_k{}^2 + \dot{z}_k{}^2,$$

verifica-se fàcilmente que (3) pode escrever-se

$$\sum \left[Q_i + \frac{\partial T^*}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \tag{5}$$

Uma transformação simples desta equação dá

$$\delta T^* + \sum Q_i \delta q_i = \frac{d}{dt} \sum \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i;$$

integrando entre os instantes t_0 e t_1, e supondo nulos os δq_i nos limites de integração, resulta imediatamente

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T^* + \sum Q_i \delta q_i\right) dt = 0,$$

que exprime em Relatividade o princípio de Hamilton sob a forma mais geral. Variando virtualmente o movimento efectivo dum sistema entre dois instantes (mas não nêles), infinitamente pouco e compativelmente com as ligações, sem fazer variar o tempo, o integral precedente anula-se.

Se o sistema é holónomo, o que admitiremos no que segue, não há equações de ligação além das equações (2); os δq_i são todos arbitrários, e o princípio de Hamilton, ou a equação equivalente (5), dá imediatamente as equações de Lagrange.

O princípio de Hamilton, que acabamos de deduzir, permite construir a dinâmica analítica relativista. A diferença em relação ao princípio clássico consiste em que a função T^* não é a energia cinética total, mas sim a soma dos produtos das energias cinéticas dos pontos do sistema pelos respectivos factores de contracção

$$\sqrt{1 - \frac{v^2_k}{c^2}}$$

(cf. fórmula (27) do Cap. IV). Para os sistemas materiais ordinários esta diferença é geralmente insignificante do ponto de vista prático.

Se as fôrças admitem uma energia potencial V dependente só da posição do sistema (campo conservativo), tem-se

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

e o princípio de Hamilton dá

$$(6) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} L\,dt = 0$$

com

$$(7) \qquad L = T^* - V.$$

A função L é a função de Lagrange, ou potencial cinético do sistema; o integral de L é a acção hamiltoniana. O princípio de Hamilton exprime pois, neste caso, que a acção hamiltoniana é estacionária no movimento real. As equações de Lagrange escrevem-se agora, pois que V não depende dos $\dot{q}_i$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

e não são mais que as equações eulerianas do problema de variações (6). Assim, o movimento dum sistema holónomo num campo conservativo é inteiramente determinado pelo potencial cinético (e pelas condições iniciais). Estes resultados ficam válidos quando a energia potencial varia com o tempo em cada ponto do espaço.

No caso em que as fôrças admitem uma energia potencial generalizada, isto é, dependente da posição e das velocidades, tem-se

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

e verifica-se imediatamente que o princípio de Hamilton e as equações de Lagrange conservam a forma precedente, com o potencial cinético dado ainda por (7). Também aqui a energia potencial pode variar com o tempo em cada ponto do espaço.

Quando L não depende explìcitamente de t, tem-se

$$\frac{dL}{dt}=\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i+\sum\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i;$$

atendendo às equações de Lagrange, o segundo membro pode escrever-se

$$\frac{d}{dt}\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i,$$

donde resulta, representando por h uma constante arbitrária,

$$\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i-L=h, \tag{8}$$

que é um primeiro integral daquelas equações (integral da energia). Em particular, se o campo é conservativo e as ligações são independentes do tempo, a soma que figura em (8) é igual a

$$\sum\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i$$

ou

$$\sum\frac{m^0{}_k\, v^2{}_k}{\sqrt{1-\frac{v^2{}_k}{c^2}}},$$

por (4) e porque os $v^2{}_k$ são formas quadráticas nos $\dot{q}_i$; ora esta expressão, como imediatamente se verifica, é idêntica à soma

$$T^*+T,$$

onde o segundo têrmo é a energia cinética do sistema, e portanto (8) escreve-se, atendendo a (7),

$$T^*+T-(T^*-V)=h$$

ou

$$(9) \qquad T + V = h,$$

que é a lei da conservação da energia. Note se que a energia total é igual à soma de h com a energia própria

$$\sum_k m^0_k c^2.$$

Consideremos um movimento do sistema entre os instantes t_0 e t_1, para o qual a constante de energia h tem um valor determinado. Se variamos êste movimento nas condições fixadas para o princípio de Hamilton, conservando o valor de h, resulta por (8)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (L + h) \, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L \, dt,$$

donde, por (6),

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) dt = 0.$$

Esta igualdade exprime que a acção maupertuisiana é estacionária para o movimento real nas condições admitidas. Para ligações independentes do tempo num campo conservativo, tem-se

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T^* + T) \, dt = 0.$$

Êste teorema não deixa de ter lugar quando se suprime a condição de não fazer variar o tempo, conservando as outras condições (princípio da menor acção). Encontra-se sem dificuldade, com efeito, que é então

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} L\,dt = \left(L - \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta t\,\Big|_{t_0}^{t_1},$$

donde resulta, por (8), o princípio referido.

36. Voltemos ao caso dum sistema holónomo num campo de fôrça que admite energia potencial, mesmo generalizado. Pondo

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{10}$$

as equações de Lagrange dão

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{11}$$

Com (10) e (11) as equações do movimento desdobram-se num sistema de primeira ordem, de incógnitas q_i e p_i. Dando a estas incógnitas variações infinitesimais, resultam variações infinitesimais para os $\dot{q}_i$ e $\dot{p}_i$, e tem-se evidentemente

$$\delta L = \Sigma(\dot{p}_i\,\delta q_i + p_i\,\delta \dot{q}_i) = \delta\Sigma p_i\,\dot{q}_i + \Sigma(\dot{p}_i\,\delta q_i - \dot{q}_i\,\delta p_i),$$

isto é

$$\delta H = \Sigma(\dot{q}_i\,\delta p_i - \dot{p}_i\,\delta q_i) \tag{12}$$

com

$$H = \Sigma p_i\,\dot{q}_i - L. \tag{13}$$

Se consideramos H expressa nos q_i, p_i, t por meio de (10), a equação (12) dá imediatamente

$$\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

que é a forma canónica hamiltoniana das equações do movimento.

Quando L não contém t, o mesmo sucede à função de Hamilton H. Neste caso é

$$\frac{dH}{dt}=\Sigma\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)=0$$

em virtude das equações canónicas e

$$H=h$$

é um integral destas equações. Êste integral é idêntico ao integral da energia (8). Se o campo é conservativo e as ligações são independentes do tempo é pois, segundo (9),

$$H=T+V,$$

como na mecânica newtoniana.

Obtêm-se imediatamente as equações canónicas anulando a variação que sofre o integral

$$\int_{t_0}^{t_1}(\Sigma p_i\dot{q}_i-H)\,dt$$

por virtude de variações dos q_i, p_i (considerados como independentes) nulas nos limites. Esta observação permite resolver fàcilmente o importante problema da determinação das transformações dos q_i, p_i que deixam a forma canónica inalterada (transformações canónicas).

Se designarmos por q'_i, p'_i as novas variáveis numa transformação, é claro que é necessário e suficiente, para que esta seja canónica, que exista uma função H' tal que

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\Sigma p'_i\dot{q}'_i - H')dt = 0$$

para variações dos q'_i, p'_i nulas nos limites; H' será a nova função de Hamilton. Pondo

$$\Sigma p_i \dot{q}_i - H = \Sigma p'_i \dot{q}'_i - H' + K,$$

é pois necessário e suficiente que a variação do integral de K se anule idênticamente, isto é, que se tenha

$$K = \frac{dW}{dt},$$

sendo W uma função dos q'_i, p'_i, t ou, o que é o mesmo, dos q_i, q'_i, t. Assim, as transformações canónicas são as que satisfazem à equação

$$\text{(14)} \qquad \Sigma p_i\, d q_i - \Sigma p'_i\, d q'_i - (H - H')\, d t = d W,$$

onde W é arbitrária.

A equação (14) determina imediatamente, desenvolvolvendo dW e igualando os coeficientes das mesmas diferenciais dum e doutro membro, aquelas transformações canónicas para as quais é impossível alguma relação entre os q_i, q'_i, t. Em geral, sejam

$$\text{(15)} \qquad \Omega_l(q, q', t) = 0$$

as relações distintas dêste género. A aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange dá

$$
\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial W}{\partial q_i} - \sum_k \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_i}, \\
p'_i &= -\frac{\partial W}{\partial q'_i} + \sum_k \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q'_i}, \qquad (16) \\
H' &= H + \frac{\partial W}{\partial t} - \sum_k \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial t};
\end{aligned}
$$

estas equações, juntas às (15), fornecem, por eliminação dos λ_k, tôdas as transformações canónicas que com (15) são compatíveis.

O número mínimo de equações (15) é zero, e o máximo é o número de graus de liberdade do sistema. No primeiro caso desaparecem de (16) os termos em que figuram os λ_k. No segundo caso, as equações (15) definem uma transformação pontual no espaço abstracto dos q_i; a transformação canónica é pois uma transformação pontual prolongada.

É evidente que se obtêm as transformações canónicas combinando as equações (15) com a equação

$$(17) \qquad \Sigma p_i \delta q_i - \Sigma p'_i \delta q'_i = \delta W,$$

onde δ indica que se fazem variar as coordenadas q_i, q'_i sem fazer variar o tempo. A equação (17) mostra imediatamente que o produto de duas transformações canónicas é ainda uma transformação canónica, e que a inversa duma transformação canónica é canónica também: as transformações canónicas formam grupo.

É fácil de ver que êste grupo é um sub-grupo das transformações de contacto, as quais satisfazem à equação

$$(18) \qquad \delta z' - \Sigma p'_i \delta q'_i = \rho (\delta z - \Sigma p_i \delta q_i),$$

com ρ função dos z, q_i, p_i e dum parâmetro t que não se faz variar. Com efeito, no caso particular em que tais transformações são determinadas por equações directrizes da forma (15) mais uma da forma

$$z' = z - W(q, q', t)$$

tem-se

$$\delta z' = \delta z - \delta W,$$

por onde (18) dá $\rho = 1$ e se converte em (17).

37. Efectuemos nas equações hamiltonianas

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

a transformação canónica

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial W}{\partial q'_i}; \tag{19}$$

resultará o sistema de equações

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial H'}{\partial p'_i}, \quad \dot{p}'_i = -\frac{\partial H'}{\partial q'_i},$$

onde é, por (16),

$$H' = H(q, p, t) + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Se W, como função dos q_i, t, satisfaz à equação diferencial parcial

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0, \tag{20}$$

H' anula-se idênticamente em virtude das primeiras (19). Os q'_i, p'_i são então constantes arbitrárias, e as equações (19) dão a solução geral das equações canónicas dadas, porque transformam estas em identidades. O problema da integração das equações canónicas reduz-se pois ao da determinação dum integral completo da equação de Hamilton (20) (teorema de Jacobi).

A resolução do segundo problema simplifica-se quando alguma das coordenadas q_i não entra em H (coordenada cíclica). Se q_1 fôr cíclica, com efeito, as equações canó-dão imediatamente o integral

$$p_1 = \alpha_1$$

e ter-se há, segundo (19),

$$W = \alpha_1 q_1 + W_1,$$

onde W_1 não depende de q_1; fazendo esta substituïção em (20), baixa de uma unidade o número de variáveis independentes. No caso de serem cíclicas tôdas as coordenadas q_i, a equação de Hamilton reduz-se dêste modo a uma equação diferencial ordinária, que se integra imediatamente por quadratura.

Anàlogamente, quando H não depende explìcitamente de t tem-se o integral da energia

$$H = h$$

e é pois

$$W = -h\,t + V,$$

onde V não depende de t explìcitamente. Substituindo em (20) desaparece a variável t. Se $V(q, h, \alpha)$ for um integral completo da equação resultante, a solução geral das equações canónicas será

$$p_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad \gamma = t - \frac{\partial V}{\partial h}, \quad \beta_j = -\frac{\partial V}{\partial a_j};$$

o último grupo, que tem menos uma equação que o primeiro, defina a trajectória do sistema no espaço das variáveis q_i.

Basta que H contenha duas das variáveis q_i, t para que a redução precedente deixe ainda uma equação diferencial parcial. Em muitas aplicações, porém, o primeiro membro desta equação é uma soma de termos, que dependem individualmente duma só variável e da derivada parcial respectiva. Igualando êstes termos a constantes arbitrárias (uma das quais evidentemente não é essencial) e atribuindo à função desconhecida a forma duma soma em que cada termo depende duma só variável, scinde-se a equação diferencial parcial em equações diferenciais ordinárias que se integram por quadratura (método da separação das variáveis).

Suponhamos que a função de Hamilton tem a forma

$$H_0 + H_1$$

e que foi possível, abstraindo de H_1, integrar o sistema canónico pela aplicação do teorema de Jacobi. Encontrou-se pois um integral completo $W +$ const. da equação de Hamilton

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H_0\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}, t\right) = 0 \tag{21}$$

e formou-se a solução geral

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad \beta_i = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}.$$

Consideremos agora os α_i, β_i como novas variáveis e façamos no sistema hamiltoniano dado a transformação canónica definida por estas equações. A nova função de Hamilton é

$$H_0 + H_1 + \frac{\partial W}{\partial t},$$

ou simplesmente H_1 em virtude de (21); portanto o novo sistema canónico tem a forma notável

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H_1}{\partial \beta_i}, \quad \dot{\beta}_i = -\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_i}.$$

Se H_1 é muito pequeno perante H_0, os α_i, β_i variam muito pouco perante os q_i, p_i e esta circunstância facilita o seu cálculo aproximado quando a natureza da função H_1 torna impraticável a integração rigorosa. Nisto se funda a teoria das perturbações, em mecânica celeste e em mecânica atómica, segundo o método da variação das constantes arbitrárias.

VI

38. Vimos que tôdas as tentativas, feitas nos séculos passados com o fim de melhorar a teoria da gravitação, resultaram infrutíferas. Afinal a teoria de Newton, não obstante os seus defeitos, era preferível pela sua extrema simplicidade.

A teoria da relatividade especial veio renovar o problema da gravitação porque, se ela é universalmente válida, a lei da gravitação tem de ser covariante para a transformação de Lorentz. Ora a isto não satisfaz a lei de Newton, a qual atribui à gravitação uma propagação instantânea que, segundo a teoria da relatividade, não pode existir. Urgia pois substituir a lei newtoniana por uma lei relativista, que se afaste dela tão pouco quanto possível no caso das velocidades astronómicas, e por um duplo motivo: era preciso verificar se o princípio da relatividade, provado experimentalmente em mecânica e em electrodinâmica, se estende ou não à gravitação; e se sim, isto é se a lei relativista não cedesse vantagem à de Newton nos factos que esta pode explicar, era necessário saber se aquela permite uma explicação mais satisfatória para os factos em que a lei de Newton se mostrou insuficiente.

Foi o que procuraram fazer, cada um a seu modo, Poincaré, Minkowski e Lorentz. Naturalmente, animava-os a esperança de que o princípio da relatividade não seria desmentido pela mecânica celeste e de que o problema da gravitação ia encontrar, pelo menos quanto à forma da lei da acção mútua de dois pontos materiais, a solução definitiva. Com efeito a transformação de Lorentz difere muito pouco da transformação de Galileu para as velocidades do nosso sistema planetário; e o facto de a teoria da relatividade exigir que a gravitação se propague com velocidade finita vem ao encontro duma aspiração geral, que há muito ardia por satisfazer-se.

39. A-pesar de fazer uso de métodos de cálculo essencialmente idênticos ao método quadridimensional de Minkowski, Poincaré (1) trata a questão dentro da teoria lorentziana de 1904, anterior à teoria de Einstein. Por isso, atribuindo à gravitação velocidade de propagação finita não se vê obrigado a identificá-la com a velocidade da luz. Por fim fixa-se nesta velocidade, é certo; mas fá-lo por puro motivo de simplicidade. Nós colocar-nos-hemos desde logo dentro da teoria einsteiniana; os resultados em que Poincaré se detém não sofrem com isto modificação.

Se um ponto material está em repouso num sistema de inércia S', a fôrça de gravitação que êle emite deve propagar-se com a mesma velocidade em tôdas as direcções, por motivo de simetria. Segundo a teoria da relatividade, esta velocidade não pode ser superior à da luz. Admitamos por um momento que ela lhe é inferior; então, para o observador doutro sistema de inércia S, relativamente ao qual o ponto considerado está em movimento rectilíneo uniforme, a velocidade da gravitação dependeria da velocidade do ponto e variaria com a direcção, em virtude do teorema da composição das velocidades. Ora isto, que equivaleria a aceitar que a gravitação consiste numa

(1) H. Poincaré, *Sur la dynamique de l'électron*, 1906, *op. cit.*

emissão de partículas de massa própria positiva, é altamente improvável. Deve antes admitir-se que a velocidade de propagação da gravitação é independente do estado de movimento da fonte respectiva, e portanto igual à velocidade da luz ([1]). Vale a mesma conclusão para a velocidade de qualquer acção física que repugne reduzir a uma emissão corpuscular como aquela a que a luz era reduzida por Newton.

Pôsto isto, procuremos a lei relativista da fôrça de gravitação que um ponto material de massa própria m' (corpo atraente) exerce sôbre um ponto material de massa própria m (corpo atraído). Sejam, num sistema de inércia arbitrário, $x, y, z, \mathfrak{v}$ as coordenadas e a velocidade de m no instante t, e $\mathfrak{K}$ a fôrça que actua em m no mesmo instante. Esta fôrça partiu de m' num instante anterior t', no qual m' ocupava a posição x', y', z' e possuía a velocidade $\mathfrak{v}'$. Representando por $\mathfrak{r}$ o vector de componentes

$$x-x', \quad y-y', \quad z-z',$$

tem-se evidentemente

$$t=t'+\frac{r}{c}, \tag{1}$$

onde r é o módulo de $\mathfrak{r}$.

Admitiremos que a fôrça $\mathfrak{K}$ depende da posição actual do corpo atraído relativa à posição retardada do corpo atraente, e das respectivas velocidades, isto é de $\mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}'$, mas não das acelerações. Para obter uma lei que satisfaça

([1]) Pode acrescentar-se que, na hipótese de a velocidade da gravitação ser menor que a da luz, se um corpo se afastasse doutro com velocidade superior à daquela fôrça não haveria entre êles gravitação mútua; a gravitação deixaria de ser universal.

ao princípio da relatividade, o meio mais simples consiste em introduzir os vectores do universo quadridimensional correspondentes aos vectores considerados; uma equação linear homogénea entre aquêles será covariante para a transformação cinemática relativista se os seus coeficientes forem invariantes para a mesma transformação. Introduzamos pois os vectores: fôrça universal

$$(2) \qquad K^i = \left\{ \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \ \frac{1}{c^2} \cdot \frac{(\mathfrak{K}\mathfrak{v})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right\},$$

raio-vector universal

$$(2) \qquad R^i = \left\{ \mathfrak{r}, t-t' \right\} = \left\{ \mathfrak{r}, \frac{r}{c} \right\},$$

velocidades universais

$$(2) \qquad V^i = \left\{ \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right\},$$

$$(2) \qquad V'^i = \left\{ \frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}, \ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \right\},$$

onde v e v' são respectivamente os módulos de $\mathfrak{v}$ e $\mathfrak{v}'$, $(\mathfrak{K}\mathfrak{v})$ é um produto escalar ordinário e a determinação métrica do universo é a da fórmula (18), IV, 26. A lei que buscamos estará contida na expressão geral

$$(3) \qquad K^i = \alpha R^i + \beta V^i + \gamma V'^i,$$

com α, β, γ invariantes, dependentes de $\mathfrak{r}, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}'$.

Êstes invariantes possuem uma forma geral que é fácil de descobrir. Com efeito, os invariantes distintos que dependem de R^i, V^i, V'^i hão-de procurar-se evidentemente entre os três módulos dêstes vectores

$$0, \; c, \; c$$

e os seus três produtos escalares

$$(4) \qquad \begin{gathered} R^i \, V_i = \frac{c\, r - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad R^i \, V'_i = \frac{c\, r - (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r})}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}, \\ V^i \, V'_i = \frac{c^2 - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}')}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}}; \end{gathered}$$

são portanto os três últimos. Os invariantes α, β, γ são funções dêles e devem satisfazer à relação

$$(5) \qquad \alpha R^i \, V_i + \beta c^2 + \gamma \, V_i \, V'^i = 0,$$

que se obtém multiplicando (3) escalarmente por V_i.

Até aqui, duas das funções α, β, γ são completamente indeterminadas, o que significa que há uma infinidade de leis relativistas da gravitação possíveis *a priori*, como era de si evidente. Para ir mais longe deve atender-se a que a lei de Newton representa os movimentos celestes com uma aproximação muito grande. Assim, a lei relativista da gravitação tem de diferir muito pouco da de Newton para pequenas velocidades, a ponto de se reduzir rigorosamente a esta no caso de dois corpos em repouso. As investigações de Laplace e Lehmann-Filhès, como vimos, mostraram que a adição de termos de primeira ordem torna a lei de Newton incompatível com certas observações se se atribui à gravitação a velocidade da luz. Por isso Poincaré procura determinar os invariantes α, β, γ pela condição de que a lei relativista difira da de Newton só em termos de segunda ordem ou de ordem superior. Sendo as quantidades de segunda ordem, no nosso sistema planetário, cêrca de 10.000 vezes menores que as de primeira, é provável que a lei assim obtida não seja contradita pela experiência.

Segundo (2), as três equações espaciais de (3) escrevem-se vectorialmente

$$(6) \quad \mathfrak{K} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(\alpha \mathfrak{r} + \beta \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \gamma \frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\right),$$

e a nova hipótese exige que esta lei se reduza à de Newton pelo desprêzo dos termos de segunda ordem. Para confrontar com a lei de Newton, porém, é preciso referir ao mesmo instante t tôdas as grandezas que figuram na equação (6). Sejam x'', y'', z'' as coordenadas de m' no instante t; visto que o intervalo de tempo $t-t'$ é pequeno e que são muito fracas as acelerações no sistema solar, podemos ter por rectilíneo e uniforme o movimento de m' durante o tempo $t-t'$ e escrever, atendendo a (1),

$$(7) \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}' + \frac{r}{c}\mathfrak{v}',$$

onde $\mathfrak{r}'$ representa o vector de componentes

$$x-x'', \quad y-y'', \quad z-z'',$$

isto é a distância orientada dos dois corpos no instante t.

Desta fórmula resulta, por um lado,

$$(8)\qquad (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}') + \frac{r}{c}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}'),$$

$$(8)\qquad (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}') + \frac{r}{c}\,v'^2,$$

e por outro lado, quadrando-a escalarmente e resolvendo,

$$(8)\qquad r\left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right) = \frac{(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}')}{c} + r'\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}+\frac{(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}')^2}{c^2\,r'^2}}.$$

Desprezando a segunda ordem tem-se

$$(9)\qquad \begin{gathered} (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}'), \quad (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}'), \\ r = r' + \frac{(\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}')}{c}, \end{gathered}$$

e os invariantes fundamentais (4) reduzem-se a

$$(10)\qquad \begin{gathered} R^i\,V_i = c\,r' + (\mathfrak{v}'\,\mathfrak{r}') - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}'), \\ R^i\,V'^i = c\,r', \quad V^i\,V'_i = c^2. \end{gathered}$$

Ora, dentro da aproximação adoptada, a equação (6) escreve-se, atendendo a (7) e (9),

$$(11)\qquad \mathfrak{K} = \alpha\,\mathfrak{r}' + \beta\,\mathfrak{v} + \left(\gamma + \alpha\frac{r'}{c}\right)\mathfrak{v}',$$

onde em vez de α, β, γ se devem pôr funções das quantidades (10) limitadas à primeira ordem. Mas esta equação deve coïncidir com a lei de Newton; portanto o invariante α há-de reduzir-se a

$$-\frac{f m' m}{r'^3}$$

(onde f é a constante da gravitação) e o invariante β a zero ou a uma quantidade de primeira ordem. Poincaré toma, e isto tem ainda um alto grau de arbitrariedade,

$$\alpha = -\frac{f m' m c^3}{(R^i V'_i)^3}, \quad \beta = 0;$$

de (5) resulta então

$$\gamma = -\alpha \frac{R^i V_i}{V^k V'_k},$$

e (3) dá a lei procurada

$$\text{(I)} \qquad K^i = -\frac{f m' m c^3}{(R^h V'_h)^3}\left(R^i - \frac{R^k V_k}{V^l V'_l} V'^i\right).$$

Verifica-se fàcilmente que o coeficiente de $\mathfrak{v}'$ em (11) é de primeira ordem, como devia ser.

Guiado por analogia com a expressão da fôrça ponderomotriz do campo electromagnético, que é linear na velocidade da carga atraída, Poincaré propõe também a lei

$$\text{(II)} \qquad K^i = -\frac{f m' m c}{(R^h V'_h)^3}(V^k V'_k \,.\, R^i - R^k V_k \,.\, V'^i),$$

a qual se obtém conservando $\beta = 0$ e tomando para α o valor precedente multiplicado por

$$\frac{V^k V'_k}{c^2};$$

é outra lei possível, com efeito, porque esta quantidade se reduz à unidade mediante desprêzo da segunda ordem.

As duas leis precedentes são das mais simples entre a infinidade de leis possíveis. Tôdas se afastam da lei de Newton em quantidades de segunda ordem e portanto tôdas são capazes de explicar suficientemente, como a lei newtoniana, a maior parte dos movimentos planetários. No que respeita aos movimentos residuais que escapavam à lei de Newton, é claro que só uma discussão adeqüada poderá mostrar se elas são ou não aceitáveis.

40. Sem dizer como a descobriu, Minkowski (1) propôs para a gravitação a lei seguinte.

Consideremos as linhas universais dos pontos materiais m' e m, e um ponto B da segunda. Construamos a fôlha anterior do cone das geodésicas nulas relativo a B e seja B' o ponto em que êle corta a linha universal de m' (êste ponto existe sempre e é único, porque a direcção das linhas universais da matéria é sempre temporal). Tiremos por B' a tangente à linha universal de m', por B a perpendicular a esta tangente e designemos por D' o ponto de intersecção destas duas rectas. A fôrça universal que se exerce no ponto material m colocado em B será o vector normal à velocidade universal de m e soma geométrica do vector

$$\frac{f m' m}{\left|\overrightarrow{B' D'}\right|^3} \cdot \overrightarrow{B D'}$$

e dum vector apropriado na direcção $B' D'$.

(1) H. Minkowski, *Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, 1907, *Anhang;* in-*Fortschritte der math. Wissensch.*, Heft 1, Leipzig und Berlin, 1910.

É fácil de reconhecer que esta lei é idêntica à lei (I) de Poincaré. Com efeito, tem-se aqui

$$\vec{K} = \frac{f m' m}{\left|\overrightarrow{B' D'}\right|^3} \left(\overrightarrow{B D'} + \lambda \vec{V'}\right);$$

ora a relação

$$K^i V_i = 0$$

dá para o coeficiente λ o valor

$$\lambda = -\frac{\left(\overrightarrow{B D'} \cdot \vec{V}\right)}{V^i V'_i};$$

por outro lado, é

$$\overrightarrow{B D'} = -\vec{R} + \overrightarrow{B' D'} = -\vec{R} + \frac{R^i V'_i}{c} \cdot \frac{\vec{V'}}{c},$$

$$\left|\overrightarrow{B' D'}\right| = \frac{R^i V'_i}{c};$$

resulta pois

$$\vec{K} = -\frac{f m' m c^3}{(R^h V'_h)^3} \left(\vec{R} - \frac{R^k V_k}{V^l V'_l} \vec{V'}\right),$$

como tínhamos afirmado.

De outra lei proposta por Minkowski falaremos adiante.

41. Poincaré procurou a lei relativista da gravitação sob as hipóteses seguintes: *a*) a fôrça que se exerce no corpo atraído dependerá da posição actual dêste corpo relativamente à posição retardada do corpo atraente e também das velocidades dos dois corpos nessas posições; *b*) desprezando a segunda ordem deve recaír-se na lei de Newton. Estas hipóteses deixaram o problema altamente indeterminado. Á primeira vista parecerá que temos de conformar-nos com esta indeterminação, e de ensaiar uma a uma as diversas leis possíveis enquanto se não encontrar lei que satisfaça plenamente; porque, em primeiro lugar, desde que é necessário admitir que a gravitação se propaga com a velocidade da luz, a hipótese *a*), pelo menos (a expressão da fôrça poderia conter também as acelerações), é inevitável; depois, se não queremos entrar em conflito com as observações astronómicas, a condição *b*) tem de ser respeitada. Em rigor assim é. Mas a física teórica mal daria um passo se se apegasse à generalidade máxima quando pretende formular leis. É forçoso restringir criteriosamente. ¿Não é mais metódico admitir, pelo menos numa primeira investigação, que a fôrça da gravitação é independente da velocidade do corpo atraído, e portanto exactamente dada pela lei de Newton, no caso do repouso do corpo atraente? Ora sucede que, nesta hipótese, o princípio da relatividade determina univocamente a lei da gravitação, e a lei assim determinada é idêntica à lei (II) de Poincaré.

Em termos mais precisos, admitiremos que num sistema de inércia, no qual o corpo atraente está momentâneamente em repouso, vale exactamente a lei de Newton qualquer que seja o movimento do corpo atraído. Reconhece-se aqui um método normal na teoria especial da relatividade. É claro que dêste modo abstraímos da aceleração do corpo atraente, mas o mesmo fez Poincaré com a sua hipótese *a*); demais isto é legítimo, porque as acelerações astronómicas são muito pequenas. Seja S_0 o sistema de inércia no qual o corpo atraente m' estava momentâneamente em repouso no instante t'_0, em que emitiu a fôrça de gravitação que chega ao corpo atraído no instante t_0. Designando por $\mathfrak{r}_0$ o vector que liga estas posições dos dois corpos, dirigido de m' para m, ter-se-há

$$(12) \qquad t_0 = t'_0 + \frac{r_0}{c}$$

e, para valor daquela fôrça em S_0,

$$\mathfrak{K}_0 = -\frac{f\,m'\,m}{r^3_0}\,\mathfrak{r}_0.$$

A fôrça universal correspondente, se fôr $\mathfrak{v}_0$ a velocidade de m, será

$$K_0 = -\frac{f\,m'\,m}{r^3_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2_0}{c^2}}}\left\{\mathfrak{r}_0,\ \frac{1}{c^2}(\mathfrak{r}_0\mathfrak{v}_0)\right\},$$

onde deve entender-se que o factor exterior ao colchete multiplica as duas grandezas interiores. Introduzamos as velocidades universais e o raio-vector universal e formemos os seus três produtos escalares. Atendendo a que é nula a velocidade $\mathfrak{v}'_0$ de m', teremos por (4)

$$(V_0\,V'_0) = \frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}},\quad (R_0\,V'_0) = c\,r_0,$$

$$(R_0\,V_0) = \left[\frac{r_0}{c} - \frac{(\mathfrak{v}_0\,\mathfrak{r}_0)}{c^2}\right]\cdot(V_0\,V'_0).$$

Daqui resulta para K_0 a expressão

$$K_0 = -\frac{f\,m'\,m\,c}{(R_0\,V'_0)^3}(V_0\,V'_0)\left\{\mathfrak{r}_0,\quad \frac{r_0}{c} - \frac{(R_0\,V_0)}{(V_0\,V'_0)}\right\}.$$

Reconhece-se agora que as grandezas que figuram no colchete são exactamente o vector de espaço e a componente de tempo relativos ao vector universal

$$R_0 - \frac{(R_0\,V_0)}{(V_0\,V'_0)}\,V'_0;$$

a nossa lei é pois idêntica em S_0 à lei (II) de Poincaré; àlém disso, (12) pode escrever-se

$$(R_0 R_0) = 0;$$

porque esta equação e a precedente são covariantes, a lei tem a mesma forma em todos os sistemas de inércia ([1]).

42. Pela aplicação de (2) e (4) encontra-se fàcilmente que a fôrça, que se exerce em m, é então, num sistema de inércia qualquer,

$$(13)\quad \mathfrak{K} = -\frac{f m' m \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}{r^3 \left(1 - \frac{(\mathfrak{v}' \mathfrak{r})}{c r}\right)^3} \left[\left(1 - \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}\right)\mathfrak{r} - r\left(1 - \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{r})}{c r}\right)\frac{\mathfrak{v}'}{c} \right].$$

Aplicando (8) obtém-se

$$(14)\quad \mathfrak{K} = -\frac{f m' m \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}{r'^3 \left(1 - \frac{v'^2}{c^2} + \frac{(\mathfrak{v}' \mathfrak{r}')^2}{c^2 r'^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\left(1 - \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}\right)\mathfrak{r}' + \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{r}')\mathfrak{v}'}{c^2} \right];$$

onde tôdas as grandezas se referem ao mesmo instante t. Vê-se que o desvio em relação à lei de Newton é de segunda ordem, como Poincaré mostrara doutro modo.

A lei de Lorentz ([2]), a que nos referimos no n.º 38, deduz-se de (14) desprezando a terceira ordem.

([1]) Cf. F. Kottler, *Gravitation und Relativitätstheorie*, in-*Encykl. d. math. Wissensch.*, VI, 2 B, 1.

([2]) H. A. Lorentz, *Das Relativitätsprinzip, drei Vorlesungen gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem. Nachdruck*, Leipzig und Berlin, 1920.

43. A primeira prova, e a mais simples, a que deve submeter-se a lei (13) é a de verificar se ela é efectivamente aceitável para o problema dos dois corpos, tal como êle é pôsto em Astronomia para o nosso sistema planetário. Consideremos um planeta de massa própria m e designemos por M a massa própria do Sol. A equação vectorial do movimento de m é

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\Sigma\,\mathfrak{K},$$

onde o segundo membro é uma soma de termos da forma (13), representativos das acções que o Sol e os outros planetas exercem em m. Suprimindo o factor m, comum aos dois membros, fica o segundo membro linear e homogéneo em M e nas massas próprias dos outros planetas. A equação do movimento do Sol é análoga à precedente; o seu segundo membro fica linear e homogéneo nas massas próprias de todos os planetas depois da supressão do factor comum M. Em primeira aproximação podemos desprezar as massas dos planetas perante a massa do Sol. Então o segundo membro da equação do movimento do Sol reduz-se a zero, o que dá para o Sol um movimento rectilíneo e uniforme; e o segundo membro da equação do movimento de m reduz-se ao termo representativo da acção do Sol. Cai-se assim num caso particular do problema dos dois corpos: aquêle em que um dêstes tem massa infinitamente pequena perante a do outro.

Visto que, na ordem de aproximação admitida, o movimento do Sol não é acelerado, podemos utilizar como sistema de referência um sistema não rotante ligado ao Sol, em vez dum sistema de inércia qualquer. Para obter maior simplificação suporemos além disso que o Sol ocupa a origem do novo sistema. Nestas condições a equação do movimento de m reduz-se a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=-\frac{fM}{r^3}\mathfrak{r}, \tag{15}$$

onde $\mathfrak{r}$ tem as componentes x, y, z.

A equacão (15) é a equação do movimento dum ponto material livre, de massa própria 1, num campo conservativo de energia potencial $-\frac{fM}{r}$. Há pois, nêste caso, potencial cinético

$$L=T^*-V=c^2\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)+\frac{fM}{r},$$

$$v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2, \quad r^2=x^2+y^2+z^2$$

e por conseguinte função hamiltoniana

$$H=p_x\dot{x}+p_y\dot{y}+p_z\dot{z}-L,$$

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_y=\frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_z=\frac{\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Como L não depende explicitamente de t e o campo é conservativo, tem-se simplesmente

$$H=T+V=c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right)-\frac{fM}{r};$$

por outro lado, é

$$p_x^2+p_y^2+p_z^2=c^2\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}-1\right);$$

as equações cartesianas do movimento assumem pois a forma canónica

$$(16)\quad \frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_x},\quad \ldots,\quad \ldots,\quad \frac{dp_x}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad \ldots,\quad \ldots$$

com

$$(17)\quad H=c^2\left(-1+\sqrt{1+\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{c^2}}\right)-\frac{fM}{r}.$$

Desenvolvendo o radical, obtém-se

$$H=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)-\frac{fM}{r}+H_1,$$

onde é

$$H_1=-\frac{1}{8c^2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)^2+\ldots$$

Anulando H_1, têm-se equações formalmente idênticas às do movimento kepleriano. Poderia pois tratar-se o movimento relativista do planeta como um movimento formalmente idêntico ao kepleriano, perturbado pela função muito pequena H_1; limitando esta função ao seu primeiro termo, ter-se-hia uma aproximação suficiente. Mas o problema pode resolver-se dum modo rigoroso e com muito maior simplicidade.

As equações canónicas (16) admitem o integral da energia

$$H=h,$$

e é fácil formar três outros integrais. Verifica-se com efeito que

$$y\dot{p}_z-z\dot{p}_y=0,$$

donde resulta por integração

$$y p_z - z p_y = A,$$

sendo A uma constante arbitrária; obtém-se anàlogamente

$$z p_x - x p_z = B,$$

$$x p_y - y p_x = C.$$

Dêstes três integrais, que correspondem aos integrais das áreas do movimento kepleriano, resulta imediatamente

$$A x + B y + C z = 0;$$

logo a órbita do planeta está situada num plano que passa pelo Sol, como aliás era evidente.

Tomemos êste plano para plano dos xy. Então será constantemente

$$z = p_z = 0.$$

Do integral das áreas subsistente e do integral da energia poderia deduzir-se o movimento; mas é mais elegante operar canònicamente.

Nenhuma das coordenadas x, y é cíclica, nem a equação diferencial parcial de Hamilton admite separação das variáveis. O facto de que x e y só entram em H por intermédio de r indica o emprêgo das coordenadas polares. Façamos pois a transformação canónica pontual prolongada, definida por

$$\Omega_1 = x - r \cos \varphi = 0,$$

$$\Omega_2 = y - r \sin \varphi = 0,$$

com W constante arbitrária (fórmulas (16), V, 36). Teremos

$$p_x = -\lambda_1, \quad p_y = -\lambda_2,$$
$$p_r = -\lambda_1 \cos\varphi - \lambda_2 \sin\varphi,$$
$$p_\varphi = \lambda_1 r \sin\varphi - \lambda_2 r \cos\varphi,$$

com H invariante; resulta destas equações

$$p_x^2 + p_y^2 = p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2,$$

e portanto a nova função hamiltoniana é

$$(18) \quad H = c^2\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2\right)}\right) - \frac{fM}{r}.$$

A resolução do problema consiste agora, segundo o teorema de Jacobi, na determinação dum integral completo da equação de Hamilton

$$\frac{\partial W}{\partial t} + c^2\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\right]}\right) - \frac{fM}{r} = 0.$$

Visto que a coordenada φ é cíclica e que t também não figura explìcitamente em H, tem-se por V, 37

$$W = -h t + \alpha\varphi + U(r),$$

onde h é a constante da energia e $\alpha = C$ é a constante das áreas; a função U satisfaz à equação diferencial

$$(19) \quad \left(\frac{dU}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} = 2\left(h + \frac{fM}{r}\right) + \frac{1}{c^2}\left(h + \frac{fM}{r}\right)^2,$$

que se integra imediatamente por quadratura. Obteve-se o integral completo desejado, e as equações

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
&\beta=\varphi+\frac{\partial U}{\partial \alpha}, \quad k=t-\frac{\partial U}{\partial h},\\
&p_\varphi=\alpha, \quad p_r=\frac{dU}{dr},
\end{aligned}
$$

onde β e k designam novas constantes arbitrárias, dão a solução geral do problema; a primeira é a equação da órbita, a segunda exprime o raio-vector em função do tempo; as outras duas são consequências delas e não são outra coisa que os integrais das áreas e da energia.

A correcção de relatividade em (19) é de segunda ordem (termo em c^{-2}) e por isso o movimento dado pelas duas primeiras (20) difere muito pouco do movimento kepleriano. O que mais importa saber, por causa da questão da anomalia secular do periélio de Mercúrio, é como se manifesta esta diferença na forma da órbita. Ora a primeira (20) pode escrever-se

$$\frac{d\varphi}{dr}=-\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{dU}{dr}\right),$$

donde resulta fàcilmente, por (19),

$$\frac{\alpha^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2=N+\frac{2P}{r}+\frac{Q}{r^2}$$

com

$$N=2h+\frac{h^2}{c^2}, \quad P=fM\left(1+\frac{h}{c^2}\right), \quad Q=\frac{f^2M^2}{c^2}-\alpha^2;$$

a mudança de variável

$$s=\frac{1}{r}$$

dá

$$\alpha^2 \left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 = N + 2Ps + Qs^2$$

e, portanto,

$$(21) \qquad \alpha^2 \frac{d^2 s}{d\varphi^2} = P + Qs,$$

ou

$$(22) \qquad \frac{d^2 s}{d\varphi^2} + \gamma^2 \left(s - \frac{1}{p}\right) = 0$$

onde é

$$(23) \qquad \gamma = \sqrt{1 - \frac{f^2 M^2}{\alpha^2 c^2}}, \quad \frac{1}{p}\gamma^2 = \frac{fM}{\alpha^2}\left(1 + \frac{h}{c^2}\right).$$

O integral geral de (22), se γ não é nulo, é

$$s - \frac{1}{p} = \frac{e}{p} \cos\gamma(\varphi - \omega),$$

com e e ω constantes arbitrárias, ou

$$(24) \qquad r = \frac{p}{1 + e\cos\gamma(\varphi - \omega)}.$$

Sendo esta equação equivalente à primeira (20), a constante ω é idêntica a β e a constante e é função de α e de h. Vê-se que a órbita difere duma secção cónica pelo factor γ que figura dentro do coseno.

No caso dum planeta ou dum cometa sob a acção do Sol, α é tal que γ não só é real, mas é mesmo muito próximo de 1 por causa do grande valor de c^2; a órbita difere então muito pouco duma cónica (num sentido que a discussão seguinte evidenciará). Mas, em geral, γ pode ter qualquer valor real compreendido entre 0 e 1 e até, para $|\alpha|$ suficientemente pequeno, ser nulo ou imaginário puro; na primeira hipótese a órbita afasta-se duma cónica tanto mais quanto menor for γ; nas outras duas difere duma cónica essencialmente.

O resumo da discussão é o que segue. Para $|\alpha| < \dfrac{fM}{c}$ é γ imaginário puro. Em (24) figura então um coseno hiperbólico e a órbita comporta-se na vizinhança da origem à maneira duma espiral logarítmica. Para $|\alpha| = \dfrac{fM}{c}$ é $\gamma = 0$. Tem-se então $Q = 0$ e (21) dá para r o inverso dum polinómio do segundo grau em φ; comportamento na vizinhança da origem análogo ao precedente. Para $|\alpha| > \dfrac{fM}{c}$ é $0 < \gamma < 1$. Então r é mínimo para $\varphi - \omega = 0$ (periélio). Se for $e \geqq 1$, êste mínimo é atingido uma só vez: quando $|\varphi - \omega|$ cresce a partir de zero e se aproxima do limite

$$\frac{1}{\gamma} \operatorname{Arc\,cos}\left(-\frac{1}{e}\right),$$

r cresce e tende para infinito. No caso $e = 1$ a órbita é do género parabólico e envolve a origem $\dfrac{1}{\gamma}$ vezes; no caso $e > 1$ tem-se coisa análoga, mas a órbita é do género hiperbólico. Se fôr porém $e < 1$, todos os pontos da órbita estão a distância finita; r é mínimo e vale $\dfrac{p}{1+e}$ para

$$\varphi - \omega = \frac{2n\pi}{\gamma} \quad (n \text{ inteiro});$$

é máximo e vale $\dfrac{p}{1-e}$ para

$$\varphi - \omega = \frac{(2n+1)\pi}{\gamma}.$$

A órbita é então uma espécie de rosácea, como a que descreveria um ponto obrigado a mover-se segundo as leis de Kepler numa elipse animada de rotação uniforme, no seu plano e no mesmo sentido, em volta do foco.

É êste o caso do nosso planeta. A distância periélia é atingida duas vezes consecutivas com uma diferença de ângulo polar igual a

$$\frac{2\pi}{\gamma};$$

a cada revolução há pois um movimento perielíaco de

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\gamma} - 2\pi = 2\pi\left[\left(1 - \frac{f^2 M^2}{\alpha^2 c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right],$$

ou seja, desprezando as ordens superiores,

$$(25) \qquad \Delta\varphi = \frac{f^2 M^2}{\alpha^2 c^2}\pi.$$

Para o cálculo numérico notemos que é

$$\alpha = x p_y - y p_x = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{dS}{dt} = 2\frac{dS}{d\tau},$$

onde S representa a área varrida pelo raio-vector e τ o tempo próprio do planeta; α é pois o dôbro da área varrida pelo raio-vector na unidade de tempo próprio (forma relativista da primeira lei de Kepler). Pondo em (24)

$$p = a(1 - e^2),$$

é claro que a área varrida pelo raio-vector durante uma revolução é em valor absoluto

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2};$$

tem-se portanto

$$(26) \qquad |\alpha| = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{\mathrm{T}},$$

onde T representa a duração da revolução expressa em tempo próprio do planeta. A fórmula (25) dá então

$$(27) \qquad \Delta\varphi = \frac{f^2 M^2 \mathrm{T}^2}{4\pi a^4 (1-e^2) c^2}.$$

O produto fM pode eliminar-se. De (23) resulta, com efeito,

$$\frac{\alpha^2 - \frac{f^2 M^2}{c^2}}{a(1-e^2)} = fM\left(1 + \frac{h}{c^2}\right),$$

isto é, por (26),

$$\frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{T}^2} = fM\left(1 + \frac{h}{c^2}\right) + \frac{f^2 M^2}{a(1-e^2)c^2};$$

é a forma relativista da terceira lei de Kepler, que dá

$$fM = \frac{4\pi^2 a^3}{\mathrm{T}^2} + \cdots,$$

onde a parte omitida contém c^2 em divisor. Na ordem de aproximação admitida em (25) deve tomar-se para valor de fM em (27) a parte principal escrita, e tem-se em definitivo

$$\Delta \varphi = \frac{4 \pi^3 a^2}{T^2 (1 - e^2) c^2}$$

(pela mesma razão substituiu-se T pela duração T da revolução expressa em tempo do sistema de referência).

Com os valores de a, e, T relativos a Mercúrio encontra-se $\Delta \varphi = 7'',2$ por século, o que é só a sexta parte do efeito observado: a lei que vimos estudando é pois insuficiente.

44. ¿Que resultado se obteria com a lei (I) de Poincaré-Minkowski nesta questão do periélio de Mercúrio? Vimos oportunamente (n.º 39) que a lei (I) dá para a fôrça $\mathfrak{K}$ um valor igual ao produto do valor (13) pelo factor

$$\frac{c^2}{V^k V'_k} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}}{1 - \frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}}.$$

No caso do repouso do corpo atraente êste factor reduz-se a

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

e a equação (15) escreve-se então

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}}{d \tau^2} = - \frac{fM}{r^3} \mathfrak{r}, \tag{28}$$

onde τ, como no n.º anterior, é o tempo próprio do corpo atraído.

Ora (28) coincide com a equação vectorial newtoniana do problema, salvo a substituïção do tempo do sistema de referência pelo tempo próprio do móvel. Portanto tôdas as leis clássicas do movimento dum planeta não perturbado se transportam para o caso presente mediante aquela simples substituïção. Como a equação da órbita não contém o tempo, segue-se que a lei (I), para um planeta não perturbado, dá órbita rigorosamente elíptica: não há movimento do periélio, e a lei (I) resulta pior que a lei (II).

45. Em face disto não é tentador o estudo de outras leis que o processo de Poincaré permite construir. Estamos afinal numa posição análoga àquela em que nos encontrávamos na física newtoniana: as leis relativistas compatíveis com a generalidade das observações são em número ilimitado e tôdas arbitrárias *a priori;* as mais simples não explicam a anomalia secular do periélio de Mercúrio. Se por acaso se encontrasse uma que desse esta explicação, com que outras razões a justificaríamos? Ainda mais importante é que essas leis, sendo puras leis de acção pontual, mal ultrapassam o ponto de vista da acção a distância. O ponto de vista moderno é o de que as acções de gravitação devem ser acções dum campo originado pela presença das massas e modificando-se com a velocidade da luz se a distribuïção das massas se modifica; a lei elementar da acção dum ponto material sôbre outro será então uma conseqüência particular das equações diferenciais do campo. Como no campo electromagnético, também no campo gravitacional há de haver distribuïção e transporte de impulsão e de energia; a descrição completa dêstes fenómenos só as equações gerais do campo podem fornecê-la.

Certas teorias, que mencionámos no Cap. II, tendiam a satisfazer uma aspiração fundamentalmente idêntica a esta, concebendo a gravitação como fenómeno elástico, hidrodinâmico ou corpuscular cinético. Mas só depois do aparecimento da teoria maxwelliana do campo electromagnético é que a aspiração se precisou e adquiriu a forma moderna referida. Deve-se isto principalmente a Lorentz (1900) (1). Por duas vezes falámos da sua teoria no Cap. II; vamos fazê-lo terceira vez, mais pormenorizadamente, não só porque ela é a primeira teoria do campo gravitacional na ordem cronológica, mas também porque, dado o seu carácter electromagnético, satisfaz ao princípio da relatividade, e conduz a uma lei elementar gravitacional relativista que mais tarde foi proposta por Minkowski e generaliza a lei (II) de Poincaré.

Como então dissemos, a teoria de Lorentz parte da hipótese de que a atracção de duas electricidades de nomes contrários é um pouco maior que a repulsão de duas electricidades do mesmo nome; neste excesso de atracção eléctrica reside a essência da gravitação. Atracção e repulsão obedecem à lei de Coulomb no caso do repouso, mas com coeficientes diferentes. Daqui resulta imediatamente a lei de Newton para duas partículas neutras em repouso, porque o átomo neutro é constituído por electrões e protões em número igual. Sôbre a unidade de massa da matéria em repouso actua uma fôrça de gravitação $\mathfrak{E}^g$, resultante de duas fôrças eléctricas opostas e quási iguais. Mas se a matéria se move, a estas duas fôrças eléctricas juntam-se duas fôrças magnéticas também opostas e quási iguais, ligadas às primeiras pelas equações do campo electromagnético, cuja resultante $\mathfrak{H}^g$ determina outra fôrça de gravitação que actua na matéria

(1) Cf. M. Abraham, *Neuere Gravitationstheorien*, in *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, Bd. XI, 1914.

juntamente com $\mathfrak{E}^g$. Os dois vectores $\mathfrak{E}^g$, $\mathfrak{H}^g$ caracterizam o campo da gravitação, e estão ligados entre si por equações da mesma forma que as do campo electromagnético $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, salvo a diferença de sinal na densidade de massa da matéria. Mediante esta simples troca de sinal todos os resultados da electrodinâmica se transportam para a teoria da gravitação de Lorentz.

Assim (cf. IV, 33 e 34), o campo da gravitação $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ (para simplificar a escrita suprimimos o índice $_g$) é um tensor universal antissimétrico de segunda ordem F_{ik},

$$(F^{23},\ F^{31},\ F^{12}) = \mathfrak{H}, \quad (F^{41},\ F^{42},\ F^{43}) = \frac{1}{c}\,\mathfrak{E},$$

que deriva dum potencial vectorial universal

$$\varphi^i = \left\{ \mathfrak{A},\ \frac{1}{c}\varphi \right\},$$

onde $\mathfrak{A}$ e φ são respectivamente o potencial-vector tridimensional e o potencial escalar; tem-se

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^i} = 0, \quad \square\, \varphi^i = -g^{kl}\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^k\, \partial x^l} = \frac{1}{c}\, s^i, \tag{30}$$

sendo s^i a corrente universal de massa,

$$s^i = \{ \rho \mathfrak{v},\ \rho \}$$

(a densidade ρ é aqui a massa própria por unidade de volume medido no sistema de referência). As equações do campo escrevem-se

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{1}{c}\, s^i, \quad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0, \tag{31}$$

e equivalem a (30) e (29) respectivamente. Conseqüência imediata da primeira (31) é a equação de continuïdade

$$\frac{\partial s^i}{\partial x^i} = 0.$$

A densidade da fôrça ponderomotriz universal

$$f^i = \left\{ \mathfrak{f},\ \frac{1}{c^2}\rho(\mathfrak{E}\mathfrak{v}) \right\} = \left\{ \mathfrak{f},\ \frac{1}{c^2}(\mathfrak{f}\mathfrak{v}) \right\},$$

onde $\mathfrak{f}$ é a densidade da fôrça ponderomotriz tridimensional, é dada pela equação

$$f_i = -\frac{1}{c} F_{ik} s^k. \tag{32}$$

Consideremos a massa própria m de volume próprio muito pequeno V_0, e seja V o seu volume no sistema de referência. A fôrça ponderomotriz que actua nela é

$$\mathfrak{K} = V\mathfrak{f},$$

donde

$$V_0 f = \frac{\mathfrak{K}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

tem-se pois

$$V_0 f^i = K^i,$$

sendo K^i a fôrça ponderomotriz universal aplicada a m. Resulta então de (32)

$$K_i = -\frac{m}{c} F_{ik} u^k, \tag{33}$$

onde u^k é a velocidade universal da massa considerada. Finalmente, tem-se

$$(34) \qquad f_i = \frac{\partial S_i^k}{\partial x^k},$$

onde

$$S_i^k = -F_{ir} F^{kr} + \frac{1}{4} g_i^k F_{rs} F^{rs}$$

é o tensor de impulsão-energia do campo. Ao contrário dos n.os 33 e 34, usamos aqui a unidade de tempo ordinária, como temos feito no resto dêste livro.

A lei elementar da gravitação terá portanto a mesma forma que a lei elementar electrodinâmica. A integração de (30) dá, como é sabido ([1]),

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho \, dV}{r}; \quad \mathfrak{A} = -\frac{1}{4\pi c}\int \frac{\rho \mathfrak{v} \, dV}{r},$$

onde r é a distância do elemento de volume dV ao ponto Q, para o qual são calculados os potenciais no instante t, e as grandezas ρ e $\mathfrak{v}$ são tomadas no instante $t - \frac{r}{c}$; os potenciais são «retardados», propagam-se com a velocidade da luz. Para a massa pontual m' deduzem-se destas fórmulas as seguintes ([2]):

$$(35) \qquad 4\pi\varphi = -\frac{m'}{r - \frac{(\mathfrak{v}'\mathfrak{r})}{c}}, \quad 4\pi\mathfrak{A} = -\frac{m'\mathfrak{v}'}{r - \frac{(\mathfrak{v}'\mathfrak{r})}{c}},$$

onde $\mathfrak{r}$ é o vector tirado da posição da massa no instante

([1]) Cf. H. A. Lorentz, *Theory of Electrons*, Note 4, 2.nd ed., Leipzig, 1916.

([2]) Cf. id., ibid., Note 19.

$t' = t - \frac{r}{c}$ para o ponto Q, e $\mathfrak{v}'$ é a sua velocidade no mesmo instante. As fórmulas (35) traduzem em electrodinâmica a lei elementar de Wiechert. Introduzindo os vectores universais R^i, V_i' do n.º 39, e atendendo às fórmulas (4), obtém-se imediatamente

$$(36) \qquad 4\pi\varphi_i = -\frac{m' V_i'}{R^k V_k'}.$$

Como precedentemente, designemos por x', y', z' as coordenadas de m' no instante t' e por x, y, z as de Q no instante t. Porque $(x', y', z', t') = x'^i$ são funções do tempo próprio τ' de m', a relação

$$R^i R_i = 0$$

determina τ' como função de $(x, y, z, t) = x^i$. Derivando essa relação, vem

$$R_i \frac{\partial R^i}{\partial x^k} = 0,$$

ou, por ser $R^i = x^i - x'^i$,

$$R_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k} - \frac{d x'^i}{d\tau'} \cdot \frac{\partial \tau'}{\partial x^k} \right) = 0,$$

donde

$$(37) \qquad \frac{\partial \tau'}{\partial x^k} = \frac{R_k}{R^i V_i'}.$$

A equação (29) dá então sem dificuldade, por (36) e (37),

$$(38) \qquad 4\pi F_{ik} = \frac{m'}{(R^h V_h')^3} (c^2 - R^l J_l')(R_i V_k' - R_k V_i') +$$

$$+ \frac{m'}{(R^h V_h')^2} (R_i J_k' - R_k J_i'),$$

onde J_i' é a aceleração universal de m'.

Suponhamos agora situada no ponto Q a massa pontual m, de velocidade universal V^i. A equação (33) dará então, por (38), a fôrça universal que m' exerce em m

$$(39)\quad K_i = -\frac{f\,m'\,m}{c\,(R^h V_h')^3}\Big\{\left[(c^2 - R^l J_l')V^k V_k' + R^l V_l' \,.\, V^k J_k'\right] R_i - \\ -(c^2 - R^l J_l')\,R^k V_k \,.\, V_i' - R^l V_l' \,.\, R^k V_k \,.\, J_i'\Big\},$$

na unidade ordinária de massa, visto que a unidade lorentziana adoptada nas equações do campo (31) é $\sqrt{4\pi f}$ vezes menor que aquela, sendo f a constante newtoniana da gravitação. Vê-se que, na teoria de Lorentz, a fôrça elementar da gravitação depende também da aceleração do corpo atraente. A lei (39) foi aínda proposta por Minkowski, que a transportou imediatamente da electrodinâmica [1].

Por ser, segundo (29), (33) e (36), na unidade ordinária de massa,

$$K_i = \frac{f\,m'\,m}{c}\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i}\right) V^k,$$

onde

$$\phi_i = \frac{V_i'}{R^h V_h'},$$

tem evidentemente

$$(40)\qquad K_i = -\frac{\partial P}{\partial x^i} + \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial P}{\partial V^i}\right),$$

sendo τ o tempo próprio de m e

$$(41)\qquad P = \frac{f\,m'\,m}{c} \cdot \frac{V^i V_i'}{R^h V_h'}.$$

---

[1] H. Minkowski, *Raum und Zeit*, 1908, op. cit.

Verifica-se fàcilmente que (40) e (41) dão para as componentes da fôrça ordinária $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{K}_x = -\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathfrak{v}_x}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

onde

$$L = -P\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{f m' m}{r} \cdot \frac{1-\frac{(\mathfrak{v}\mathfrak{v}')}{c^2}}{1-\frac{(\mathfrak{v}'\mathfrak{r})}{c r}}.$$

A fôrça da gravitação admite pois potencial generalizado. Estas fórmulas correspondem exactamente à lei elementar electrodinâmica de Schwarzschild (1).

46. A teoria de Lorentz não traz contribuïção nova para o problema dos dois corpos do nosso sistema planetário. Com efeito, se se faz igual a zero em (39) a aceleração do corpo atraente m' ($J'_i = 0$), recai-se na lei (II) de Poincaré (e portanto, desprezando a terceira ordem, na lei de Lorentz mencionada no n.º 42). Incapaz de explicar o movimento do periélio de Mercúrio, esta teoria apresenta ainda outras dificuldades. Já no Cap. II observámos que, em substância, a teoria de Lorentz não é mais que um transporte arbitrário das equações do campo electromagnético para a gravitação, que só tem a justificá-lo a semelhança formal das leis de Newton e de Coulomb. Podemos agora acrescentar o seguinte. Visto que são as mesmas que as da electrodinâmica as equações da teoria da gravi-

(1) Cf. H. A. Lorentz, *Weiterbildung der Maxwellschen Theorie: Elektronentheorie*, 1903, in-*Encykl. d. math. Wissensch.*, Bd. V, 2, Heft 1.

tação de Lorentz, salvo a diferença de sinal na densidade de massa, deve haver em gravitação, se esta teoria é verdadeira, um fenómeno correspondente ao da indução electrodinâmica. A aceleração duma carga eléctrica provoca fôrças que actuam sôbre cargas visinhas em sentido oposto ao dela; também a aceleração dum corpo deverá provocar fôrças de gravitação induzidas que actuarão sôbre corpos visinhos, acelerando-os no mesmo sentido por motivo da diferença de sinal. Ora a conseqüência disto é que um sistema de corpos gravitantes não teria estabilidade dinâmica, o que parece contrário aos factos. Além disso, a quarta das equações (34) escreve-se, como é fácil de ver,

$$(\mathfrak{f}\mathfrak{v}) + \operatorname{div} \mathfrak{S} = -\frac{\partial W}{\partial t}, \tag{42}$$

com

$$\mathfrak{S} = -c[\mathfrak{E}\mathfrak{H}], \quad W = -\frac{1}{2}(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2); \tag{43}$$

$\mathfrak{S}$ é pois a densidade da corrente de energia e W a densidade da energia do campo de gravitação. Esta densidade é negativa, ao contrário do que tem lugar no campo electromagnético; a razão disto reside ainda na referida diferença de sinal (cf. (34) e equação (36) do n.º 34): mudando o sinal do primeiro termo de (42) (a expressão de $\mathfrak{f}$ contém o factor ρ) tem-se a correspondente equação electromagnética, a qual toma a forma (42) com $\mathfrak{S}$ e W mudados de sinal. Ora, a ser negativa a densidade de energia do campo da gravitação, uma região do espaço onde existe campo conterá menor energia que se estivesse desprovida dêle; se pois se supõe um campo de gravitação penetrando numa região anteriormente livre, a corrente de energia terá um sentido oposto ao da propagação do campo. Esta conseqüência parece inaceitável.

47. Tais dificuldades conduziram Abraham (1) a uma teoria do campo da gravitação essencialmente diferente. Enquanto na teoria de Lorentz o campo é tensorial e deriva dum potencial vectorial segundo (29), na teoria de Abraham o campo é vectorial e deriva dum potencial escalar pela equação

$$(44) \qquad h_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \quad \text{ou} \quad h^i = \left\{ -\operatorname{grad} \varphi, \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}.$$

A densidade da fôrça ponderomotriz do campo é

$$(45) \qquad f_i = \rho_0 h_i,$$

onde ρ_0 é a densidade própria da matéria; h_i e f^i são a fôrça universal por unidade de massa própria e de volume próprio respectivamente. A equação do potencial

$$(46) \qquad \square \varphi = -g^{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} = \rho_0$$

acaba de fundar a teoria; no vácuo, o potencial propaga-se com a velocidade da luz. Estas três equações fundamentais correspondem respectivamente a (29), (32), (30) da teoria de Lorentz.

De (44) e (46) resulta a equação do campo

$$\frac{\partial h^i}{\partial x^i} = -\rho_0,$$

correspondente a (31). Depois (45) dá

$$f_i = -h_i \frac{\partial h^k}{\partial x^k},$$

(1) M. Abraham, *Neuere Gravitationstheorien*, op. cit.

por onde se verifica que é, correspondentemente a (34),

$$(47) \qquad f_i = -\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k}$$

com

$$(48) \qquad S_i^k = h_i h^k - \frac{1}{2} g_i^k h_r h^r ;$$

S_i^k é o tensor de impulsão-energia do campo: tensor simétrico, como se vê elevando o índice i.

A equação (47) desdobra-se na equação vectorial

$$\mathfrak{f} + \operatorname{div} T = -\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial t}$$

e na equação escalar

$$(\mathfrak{f}\mathfrak{v}) + \operatorname{div} \mathfrak{S} = -\frac{\partial W}{\partial t},$$

que exprimem respectivamente as leis da impulsão e da energia, e onde é

$$(49) \qquad T_{ik} = \mathfrak{h}_i \mathfrak{h}_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \left[\mathfrak{h}^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right],$$

$$(i, k = 1, 2, 3 ;\ \delta_{ik} = 1 \text{ se } i = k, \ = 0 \text{ se } i \neq k),$$

$$(49) \qquad \mathfrak{g} = \frac{1}{c^2} \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{h} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad W = \frac{1}{2} \left[\mathfrak{h}^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \right],$$

com

$$\mathfrak{h} = -\operatorname{grad} \varphi.$$

A densidade da energia é pois positiva, o que remove a respectiva dificuldade da teoria de Lorentz. Quanto às outras dificuldades, elimina-as o simples facto de a teoria de Abraham não provir da electrodinâmica. Só no campo de gravitação estático $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0\right)$ as grandezas (49) têm expressões formalmente idênticas às das grandezas correspondentes do campo electrostático.

Vejamos a que lei elementar da gravitação conduz a presente teoria. No caso estático, a equação (46) reduz-se à equação de Poisson e φ é o potencial newtoniano. No caso geral, a integração de (46) dá

$$\varphi=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho_0\, d\, V}{r},$$

onde r é a distância do elemento $d\, V$ ao ponto Q a que se refere φ no instante t, e ρ_0 é tomado no instante $t-\frac{r}{c}$. Para a massa quási pontual m' de volume próprio V_0 é simplesmente

$$4\pi\varphi=-\frac{\rho_0\, V}{r-\frac{(\mathfrak{v}'\mathfrak{r})}{c}},$$

onde $\mathfrak{r}$ é o vector tirado da posição de m' no instante $t-\frac{r}{c}$ para o ponto Q, $\mathfrak{v}'$ a velocidade de m' no mesmo instante, V o volume de m' no sistema de referência e também no mesmo instante. A relação entre V e V_0 permite escrever

$$4\pi\varphi=-\frac{m'\, c\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}{c\, r-(\mathfrak{v}'\mathfrak{r})},$$

isto é, segundo (4),

$$4\pi\varphi=-\frac{m'\, c}{R^1\, V_1'}. \tag{50}$$

Para o campo (44) obtém-se então, atendendo a (37),

$$(51) \quad 4\pi h_i = \frac{m' c}{(R^k V_k')^3} [R^k V_k' . V_i' - (c^2 - R^k J_k') R_i].$$

Se no ponto Q está colocada a massa pontual m no instante t, a fôrça universal que actua sôbre ela é por (45)

$$K_i = m h_i ;$$

desta relação e de (51) resulta emfim, passando à unidade ordinária de massa como no n.º precedente,

$$(52) \quad K_i = -\frac{f m' m c}{(R^k V_k')^3} [(c^2 - R^k J_k') R_i - R^k V_k' . V_i'].$$

Anulando a aceleração universal do corpo atraente obtém-se uma lei que não pertence à classe das leis de Poincaré. O motivo disto reside em que não é idênticamente nulo o produto $K_i V^i$, ao contrário do que exige a mecânica da relatividade se a massa própria é invariável, como supusémos. Tem-se com efeito

$$(53) \quad K_i V^i = m h_i V^i = m \frac{d\varphi}{d\tau},$$

sendo τ o tempo próprio do corpo atraído. Se se impõe à teoria de Abraham esta exigência necessária, terá de ser, como fàcilmente se verifica,

$$(\mathfrak{h}\mathfrak{v}) = \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

onde $\mathfrak{v}$ é a velocidade do corpo atraído; então torna-se lícito o termos tomado atrás $f_4 = (\mathfrak{f}\mathfrak{v})$; mas num campo estático a velocidade do corpo atraído seria sempre perpendicular ao campo, o que é inadmissível.

48. A teoria precedente só poderá subsistir se se admite que não é invariável a massa própria dum corpo num campo de gravitação. O próprio Abraham apresentou uma modificação da teoria, na qual a variabilidade da massa própria é afirmada expressamente. Esta massa é suposta inversamente proporcional ao potencial da gravitação, que por seu turno é identificado com a raiz quadrada da velocidade da luz; resulta daí, mediante alteração de algumas das equações precedentes (por exemplo, da equação do potencial (46)), que a fôrça de gravitação que se exerce num corpo é proporcional à energia (portanto à massa inerte) do corpo. A variabilidade da velocidade da luz no campo gravitacional e a proporcionalidade das massas inerte e gravitante foram bebidas por Abraham nos primeiros trabalhos de Einstein sôbre a generalização do princípio da relatividade. Mas Abraham repele a ideia-mãe dêstes trabalhos; a sua nova teoria colide com o princípio da relatividade, além de ser fundada em hipóteses demasiado artificiais e de não ter conduzido a nenhum resultado importante.

Nordström (1) corrigiu a primeira teoria de Abraham dentro do princípio da relatividade especial. A equação fundamental da dinâmica relativista

$$\frac{d}{d\tau}(m\,V^i) = K^i, \tag{54}$$

que traduz as leis da impulsão e da energia, dá, se a

(1) M. Abraham, *Neuere Gravitationstheorien*, op. cit.

massa própria m é variável, efectuando a derivação e multiplicando escalarmente por V_i,

$$(55) \qquad c^2 \frac{dm}{d\tau} = K^i V_i$$

ou, por (53),

$$c^2 \frac{dm}{m} = d\varphi,$$

donde resulta

$$(56) \qquad m = M e^{\frac{\varphi}{c^2}},$$

sendo M constante. A massa própria deve pois depender exponencialmente do potencial da gravitação. M é a massa própria correspondente ao potencial zero, isto é, se se escolhe convenientemente a constante arbitrária inseparável de φ, a massa própria na ausência de campo.

Por ser $K^i = m h^i$, a equação vectorial do movimento de m no campo gravitacional, segundo as três primeiras (54) (lei da impulsão), é pois

$$(57) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{\frac{\varphi}{c^2}} \mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = - e^{\frac{\varphi}{c^2}} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \operatorname{grad} \varphi;$$

a esta junta-se a equação não distinta (cf. (55))

$$(58) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{e^{\frac{\varphi}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{c^2} e^{\frac{\varphi}{c^2}} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

proveniente da quarta (54) (lei da energia). No caso do campo estático, (58) dá imediatamente o integral da energia

$$(59) \qquad \frac{e^{\frac{\varphi}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \text{const.},$$

por onde (57) se converte em

$$(60) \qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \operatorname{grad} \varphi.$$

Se emfim o campo estático é produzido por um só ponto material m', tem-se segundo (50)

$$4\pi\varphi = -\frac{m'}{r}$$

e (60) dá então, na unidade ordinária de massa,

$$(61) \qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \frac{f m'}{r^3} \mathfrak{r};$$

obter-se hia naturalmente o mesmo resultado a partir da lei elementar (52).

A diferença entre o movimento definido por (61) e o movimento kepleriano é de segunda ordem, como nas leis e teoria precedentes. Resta saber se a teoria de Nordström explica o movimento do periélio de Mercúrio.

As equações (61) admitem exactamente os integrais das áreas do movimento kepleriano; a órbita está pois situada num plano que passa pelo Sol m'. Tomemos êste plano para plano dos $x\,y$. Designando por k a constante arbitrária que figura em (59), esta equação permite escrever (60) sob a forma

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = -\operatorname{grad}\left(\frac{c^2}{2k^2}\, e^{\frac{2\varphi}{c^2}}\right);$$

portanto, se pomos

$$H = \frac{c^2}{2k^2}\, e^{-\frac{2fm'}{c^2 r}} + \frac{1}{2} v^2,$$

$$(r^2 = x^2 + y^2, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2),$$

as duas equações cartesianas do movimento tomam a forma canónica com a função hamiltoniana H e com as variáveis v_x, v_y conjugadas respectivamente de x, y.

Passemos para coordenadas polares r, θ, efectuando a transformação canónica utilizada no n.º 43. A nova função hamiltoniana será

$$H = \frac{c^2}{2k^2}\, e^{-\frac{2fm'}{c^2 r}} + \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\theta^2\right).$$

A coordenada θ é cíclica e o tempo não entra explicitamente; portanto a respectiva equação diferencial parcial de Hamilton admite o integral completo

$$W = -lt + \alpha\theta + U(r),$$

onde l e α são constantes e a função U é determinada pela equação diferencial

$$\left(\frac{dU}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} = 2l - \frac{c^2}{k^2}\, e^{-\frac{2fm'}{c^2 r}},$$

integrável por quadratura. A solução geral do nosso problema é pois, segundo o teorema de Jacobi,

$$(61^*) \quad \theta + \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \beta, \quad -t + \frac{\partial U}{\partial l} = \eta, \quad p_r = \frac{dU}{dr}, \quad p_\theta = \alpha,$$

onde β e η são novas constantes; as duas últimas equações reproduzem os integrais da energia e das áreas; as outras duas dão o movimento sob forma finita, sendo a primeira, em especial, a equação da trajectória. Há a notar que, depois de feitos todos os cálculos, se deve pôr $l = \frac{c^2}{2}$, valor constante de H segundo (59).

Efectuando sôbre a equação da trajectória um cálculo análogo ao do n.º 43, dá-se-lhe a forma diferencial correspondente a (21)

$$\frac{d^2 s}{d\theta^2} = \frac{f m'}{k^2 \alpha^2} e^{-\frac{2fm'}{c^2} s} - s,$$

onde é $s = \frac{1}{r}$. Desenvolvendo a exponencial e desprezando as ordens superiores à segunda, obtém-se uma equação da forma (22) com

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{2 f^2 m'^2}{k^2 \alpha^2 c^2}}, \quad \frac{1}{p} \gamma^2 = \frac{f m'}{k^2 \alpha^2},$$

donde resulta que o periélio do planeta m, a cada revolução, se desloca de

$$\Delta \theta = 2\pi \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right),$$

quantidade negativa por ser agora γ essencialmente maior que 1. A presente teoria dá pois para os periélios planetários movimento retrógrado, o que é contrário aos factos.

49. Nordström propôs uma segunda teoria da gravitação ([1]), que foi geralmente bem recebida enquanto se não desenvolveu suficientemente a teoria da gravitação de Einstein. Nas teorias precedentes (salvo na teoria não relativista de Abraham mencionada no começo do n.º 48) confundiam-se inconscientemente massa inerte e massa gravitante. A experiência ensina que as duas massas são proporcionais em cada lugar dum campo de gravitação estático, mas nada diz directamente sôbre a variação do factor de proporcionalidade com o lugar. Se se admite que tal variação é nula, êste factor é uma constante universal e tomará o valor 1 mediante escolha adequada da unidade de massa gravitante; esta massa e a massa inerte serão então idênticas. Se se admite, pelo contrário, que a massa gravitante M é igual ao produto da massa inerte m por uma certa função (não constante) do potencial da gravitação,

$$M = m\,G(\varphi), \tag{62}$$

as duas massas serão essencialmente diferentes. É introduzindo a segunda hipótese na primeira teoria de Abraham, e salvaguardando ainda o princípio de relatividade, que se obtém a segunda teoria de Nordström.

As equações (44) a (49) são assim conservadas nesta teoria, mas ρ_0 é agora a densidade própria da massa gravitante. Valem, portanto, as equações (50) a (53) mediante a substituïção das massas inertes m', m pelas massas gravitantes M', M. A função $G(\varphi)$ determina-se pela equação

([1]) M. Abraham, *Neuere Gravitationstheorien*, op. cit ; M. von Laue, *Die Nordströmsche Gravitationstheorie*, in-*Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, Bd. XIV, 1917.

(55), que dá presentemente

$$c^2 \frac{dm}{d\tau} = M \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Admitindo que a massa gravitante é independente do potencial, resulta desta equação, por (62),

$$c^2 . d\left(\frac{1}{G(\varphi)}\right) = d\varphi,$$

isto é

$$G(\varphi) = \frac{c^2}{\varphi}$$

englobando em φ uma constante. Na segunda teoria de Nordström a massa inerte depende pois do potencial pela relação

$$m = M \frac{\varphi}{c^2}, \tag{63}$$

que substitui (56).

Conclui-se de (63) que a densidade própria da massa gravitante está ligada à densidade própria da energia pela fórmula

$$\rho_0 = \frac{W_0}{\varphi}. \tag{64}$$

Mas esta fórmula, estabelecida para o ponto material, não pode aplicar-se a todos os casos; de outro modo, segundo (45) e (46), a energia electromagnética produziria gravitação e obedeceria à gravitação, e portanto a luz não teria propagação rectilínea, o que é contrário a uma das hipóteses fundamentais da teoria. Não é pois a energia só que produz gravitação, e aqui acode ao espírito que, com efeito, tanto a matéria como o campo electromagnético possuem impulsão além de energia e só são descritos completamente, sob êste aspecto, pelos tensores respectivos M_i^k e E_i^k. Em vez de W_0 deve figurar em (64) um escalar construído simètricamente com estes tensores, e tal que a contribuïção efectiva de E_i^k seja nula. Porque E_i^i é idênticamente nulo (n.º 34), satisfaz a estas condições o escalar

$$M_i^i + E_i^i,$$

e assim a forma geral de (64) será

$$\rho_0 = \frac{1}{\varphi} M_i^i . \tag{65}$$

O invariante M_i^i é igual à densidade de energia da matéria, diminuída da soma das respectivas tensões principais. Visto que as tensões são muito pequenas relativamente àquela densidade, a ela se reduz pràticamente M_i^i. Como, por outro lado, a densidade de energia da matéria coincide pràticamente com a densidade de energia dum sistema material e electromagnético, a fórmula (64) fica justificada em geral como fórmula aproximada.

Se o sistema é de pequenas dimensões, a integração de (64) reproduz (63). A fórmula (63) é mesmo rigorosa se o sistema é infinitamente pequeno e perfeitamente estático.

Segundo (65), a equação (46) escreve-se

$$\varphi \cdot \Box \varphi = M_i^i . \tag{66}$$

Tem-se por outro lado, segundo (48),

$$S_i^i = - h_i h^i = \mathrm{grad}^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2$$

e portanto é

$$\square(\varphi^2) = 2(\varphi . \square\varphi + S_i^i).$$

Resulta que a equação (66), como observou Einstein, pode assumir a forma

$$\frac{1}{2}\square(\varphi^2) = M_i^i + E_i^i + S_i^i,$$

onde figuram simètricamente os três tensores de impulsão-energia da matéria e dos campos electromagnético e gravitacional. Uma região do espaço vazia de matéria produz pois gravitação desde que um campo de gravitação existe nela. Em última análise, porém, segundo (66), a gravitação é devida à presença da matéria.

A equação do movimento dum ponto material sob a acção do campo,

$$\frac{d}{d\tau}(mV^i) = Mh^i,$$

cinde-se, por (44) e (63), na equação da impulsão

$$(67) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi}{c^2} \cdot \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\text{grad}\,\varphi$$

e na equação da energia

$$(68) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{c^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Se o campo é estático, resulta de (68) o integral da energia

$$(69)\qquad \frac{\varphi}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=k,$$

onde k é constante; (67) escreve-se então

$$(70)\qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-\frac{1}{k}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

No caso de o campo estático ser devido à presença dum só ponto material M', tem-se por (50), na unidade ordinária de massa gravitante,

$$(71)\qquad \varphi=A-\frac{fM'}{r},$$

onde A é a constante que englobámos em φ ao deduzir (63); a equação (70) dá agora

$$(72)\qquad \frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-\frac{1}{k}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\cdot\frac{fM'}{r^3}\mathfrak{r},$$

correspondente a (61).

Ainda aqui a órbita do planeta M está situada num plano que passa pelo Sol M', porque as equações (72) admitem os integrais das áreas. Tomando êste plano para plano dos xy, notando que (70) pode escrever-se, por (69),

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=-\mathrm{grad}\,\frac{\varphi^2}{2k^2c^2}$$

e atendendo a (71), vê-se que as equações cartesianas do movimento de M assumem a forma canónica com a função hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2\,k^2\,c^2}\left(A - \frac{f\,M'}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\,v^2,$$

$$\left(r^2 = x^2 + y^2, \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2\right),$$

sendo respectivamente v_x e v_y as variáveis conjugadas de x e y.

Passando para coordenadas polares como no n.º 48, obtém-se

$$H = \frac{1}{2\,k^2\,c^2}\left(A - \frac{f\,M'}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\,p_\theta^2\right),$$

donde resulta para a equação de Hamilton o integral completo

$$W = -l\,t + \alpha\,\theta + U(r),$$

com l e α constantes e $U(r)$ determinada pela equação

$$\left(\frac{d\,U}{d\,r}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{r^2} = 2\,l - \frac{1}{k^2\,c^2}\left(A - \frac{f\,M'}{r}\right).$$

O movimento finito é dado ainda por equações da forma (61*). Emfim, tratando a primeira destas equações como nos n.º 43 e n.º 48, obtém-se a equação diferencial da trajectória sob a forma (22) com

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{f^2\,M'^2}{k^2\,\alpha^2\,c^2}}, \quad \frac{1}{p}\,\gamma^2 = \frac{f\,M'\,A}{k^2\,\alpha^2\,c^2};$$

visto ser $\gamma > 1$, a segunda teoria de Nordström, como a primeira, dá movimento perielíaco de sentido contrário ao do movimento observado.

VII

50. Muito antes de Abraham e Nordström, Einstein [1] começara a tratar o problema da gravitação dum modo totalmente diferente. Duas questões o impeliram a isso. Em primeiro lugar o resultado da teoria da relatividade especial, de que a energia possui massa inerte, abre a questão de saber se a energia possui também massa gravitante. Em segundo lugar a limitação, feita nessa teoria, do princípio da relatividade aos sistemas de referência não acelerados põe a questão de saber se êste princípio é extensivo aos sistemas de referência dotados de aceleração.

Einstein resolve as duas questões em sentido afirmativo, para campos de gravitação homogéneos e sistemas de referência uniformemente acelerados, por meio do *princípio da equivalência*. Sejam Σ_1 e Σ_2 dois sistemas de referência, o primeiro uniformemente acelerado na direcção Oz (aceleração γ) [2], o segundo em repouso num campo de gravitação homogéneo que comunica a todos os corpos

---

(1) A. Einstein, *Ueber das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogen Folgerungen*, in-*Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik*, Band IV, 1907.

(2) Em rigor, deve entender-se por ponto uniformemente acelerado aquele cuja aceleração, relativamente a um sistema de inércia no qual êle está momentâneamente em repouso, é sempre a mesma. É o movimento dum ponto material sob a acção duma fôrça constante; relativamente a um dado sistema de inércia a sua aceleração decresce e tende para zero, a sua velocidade cresce e tende para a velocidade da luz. Contudo, no caso duma aceleração pequena durante um intervalo de tempo moderado, é inútil atender a esta correcção relativista.

a aceleração $-\gamma$ na direcção Oz. Sob o ponto de vista mecânico os sistemas Σ_1 e Σ_2 são equivalentes, isto é, as leis mecânicas são idênticas nos dois sistemas, porque todos os corpos são igualmente acelerados pelo campo de gravitação. Não havendo indicação positiva em contrário, é natural admitir que as outras leis físicas gozam da mesma propriedade. De facto, no estado actual dos nossos conhecimentos nada há que permita supor que os sistemas Σ_1 e Σ_2 se distinguem sob qualquer aspecto; admitiremos pois, e é o princípio da equivalência, que um campo de gravitação homogéneo e a correspondente aceleração do sistema de referência são completamente equivalentes, isto é, que tôdas as leis físicas são as mesmas nos dois casos.

Por meio do princípio da equivalência estende-se o princípio da relatividade aos sistemas de referência uniformemente acelerados: um tal sistema pode, com igual direito, supor-se em repouso num campo de gravitação homogéneo. A substituïção inversa dum campo de gravitação homogéneo por um sistema de referência uniformemente acelerado, o qual é directamente acessível à investigação teórica, permitirá estudar a influência da gravitação sôbre outros fenómenos físicos e portanto conhecer melhor a própria gravitação. Nisto reside o valor heurístico do princípio da equivalência.

Einstein começa, naturalmente, com o estudo do espaço e do tempo num sistema de referência uniformemente acelerado. Limitar-nos-emos a indicar os principais resultados obtidos, que adiante serão demonstrados mais fàcilmente e com maior generalidade. Seja Σ um sistema de referência uniformemente (e fracamente) acelerado na direcção Oz relativamente ao sistema de inércia S, movendo-se a origem de Σ no eixo Oz de S e sendo os eixos de Σ paralelos aos de S. Suponhamos que as réguas métricas e os relógios de Σ e de S são da mesma construção.

Existe a cada instante um sistema de inércia S' cujos eixos, no instante considerado (isto é, num tempo determinado t' de S'), coincidem com os de Σ e têm relativamente a S a mesma velocidade que os de Σ. Se se definem como simultâneos em Σ acontecimentos que se produzem no instante t' de S', encontra-se que a luz se propaga em Σ, durante um pequeno intervalo de tempo a partir de t', com a mesma velocidade c que em S'; pode pois empregar-se o princípio da constância da velocidade da luz para a definição da simultaneidade em Σ, sob a condição de só utilizar trajectos de luz muito pequenos.

Imaginemos agora os relógios de Σ regulados como fica indicado, mas para o tempo $t=0$ de S (em que Σ está momentâneamente em repouso relativamente a S). A totalidade das indicações dos relógios de Σ assim regulados denominar-se-á *tempo local* σ de Σ. O tempo local não pode chamar-se simplesmente *tempo* de Σ, porque, em geral, dois acontecimentos produzidos em pontos diferentes de Σ e em instantes locais iguais não são simultâneos no sentido da definição precedente. A significação física do tempo local é esta: utilizando-o para referir os fenómenos que se produzem nos diversos elementos espaciais de Σ, obteremos leis independentes do elemento espacial considerado, se em todos estes elementos nos servirmos não só dos mesmos relógios mas também dos mesmos instrumentos de medida em geral.

O tempo τ do sistema Σ podemos defini-lo como sendo a totalidade das indicações do relógio, situado na origem de Σ, simultâneas com os acontecimentos de Σ no sentido da definição precedente. Na definição de τ (ao contrário do que sucedia na definição de σ) não entra um instante arbitrário, mas um relógio situado num lugar arbitrário; utilizando o tempo τ, as leis naturais não dependerão do tempo, mas do lugar.

O uso dos tempos σ e τ não é indiferente, mas é imposto pelo carácter local ou não local do fenómeno a estudar. Suponhamos que em cada um de dois lugares diferentes (de cota diferente) de Σ há um sistema físico e que desejamos comparar as grandezas físicas dos dois sistemas; teremos de transportar-nos para o primeiro lugar com os nossos instrumentos, fazer lá as medições, depois transportar-nos para o segundo lugar com os mesmos instrumentos, fazer aqui também as medições. Se as medições dão os mesmos resultados nos dois lugares, diremos que os dois sistemas físicos são iguais. Entre os instrumentos mencionados figurará um relógio, com o qual mediremos tempos locais σ. Por conseguinte, para a definição de grandezas físicas num lugar de Σ utilizamos naturalmente o tempo σ. Suponhamos porém que se trata dum fenómeno em que devam considerar-se simultâneamente objectos situados em lugares de cotas diferentes; o tempo a utilizar será então o tempo τ, de contrário a simultaneidade não seria expressa pela igualdade dos valores do tempo.

O emprêgo da transformação de Lorentz permite a Einstein estabelecer a seguinte relação entre o tempo local σ e o tempo τ:

$$\sigma=\tau\left(1+\frac{\gamma\zeta}{c^2}\right), \tag{1}$$

onde c é a velocidade da luz num sistema de inércia, γ a aceleração do sistema Σ e ζ a cota, suposta não muito grande, do relógio que marca σ. Para um campo de gravitação homogéneo tem-se pois

$$\sigma=\tau\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right), \tag{2}$$

onde Φ é o potencial da gravidade (nulo à cota zero): um relógio, situado num lugar onde o potencial da gravitação é Φ, marcha $1+\frac{\Phi}{c^2}$ vezes mais ràpidamente que um relógio da mesma construção situado ao potencial zero.

Esta influência da gravitação sôbre a marcha dos relógios é observável, pelo menos em princípio. Um observador situado num lugar qualquer de Σ poderia receber as indicações dos dois relógios p. ex. por meio de sinais luminosos; visto que o intervalo de tempo decorrido entre a indicação dum relógio e a sua recepção é independente do tempo τ, o observador verificaria existir entre os dois relógios a desigualdade de marcha anunciada. Mas há mais. Existem efectivamente «relógios» em lugares de diferente potencial de gravitação, cuja marcha pode ser medida muito exactamente: são os emissores das riscas espectrais. Admitindo por agora que a relação (2) vale também para um campo de gravitação não homogéneo, deve uma luz monocromática, que recebemos duma substância situada à superfície do Sol, ou duma estrêla, ter menor freqüência, portanto maior comprimento de onda, que a luz produzida nas mesmas condições à superfície da Terra; o efeito não é tão pequeno que escape à observação.

Transformando as equações de Maxwell para o sistema uniformemente acelerado Σ, Einstein encontra, utilizando primeiro o tempo local σ, que aquelas equações conservam a sua forma, salvo que as componentes do campo electromagnético e a densidade eléctrica aparecem multiplicadas pelo factor que figura no segundo membro de (1). Utilizando em seguida o tempo τ, o mesmo sucede à velocidade da luz que, portanto, num campo de gravitação homogéneo satisfará a relação

$$c' = c\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right).$$

Resulta daqui que raios luminosos, que não tenham a direcção do campo de gravitação, são encurvados por êste. À superfície da Terra êste efeito é insensível.

As equações da Electrodinâmica mostram enfim que, num campo de gravitação homogéneo, a energia electromagnética E, medida localmente, figura na equação da energia multiplicada pelo factor $1+\frac{\Phi}{c^2}$. A energia E é portanto acrescida duma energia de posição igual á que corresponde à massa gravitante $\frac{E}{c^2}$; visto que êste é também o valor da massa inerte de E, a identidade das massas inerte e gravitante, provada experimentalmente para os corpos, é exigida como facto geral pelo princípio da equivalência. A verificação experimental da lei da inércia da energia é possível em princípio por meio da balança.

51. Num trabalho posterior (1) Einstein retomou o estudo do campo de gravitação homogéneo, porque entretanto tinha descoberto que uma das suas previsões anteriores, a da propagação curvilinea da luz sob a acção do campo, pode ser verificada pela observação. Nenhuma alteração essencial: o princípio da equivalência continua na base da investigação, mantêm-se os resultados precedentes; mas a dedução apresenta-se consideràvelmente simplificada.

Sejam: K um sistema de coordenadas em repouso num campo de gravitação homogéneo (aceleração da gravidade $=-\gamma$ na direcção Oz); K' um sistema de coordenadas existente numa região sem gravitação e animado de movi-

(1) A. Einstein, *Ueber den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*, 1911, in-Lorentz, Einstein, Minkowski, *op. cit.*

mento uniformemente acelerado na direcção $O'z'$ (aceleração γ). Para evitar complicações inúteis podemos primeiro abstrair da teoria da relatividade especial e, portanto, considerar os dois sistemas, e os movimentos que nêles se realizam, segundo a cinemática e a mecânica newtonianas.

Um ponto material abandonado a si mesmo move-se, tanto em K como em K', segundo as equações

$$\frac{d^2 x}{d t^2}=0, \quad \frac{d^2 y}{d t^2}=0, \quad \frac{d^2 z}{d t^2}=-\gamma.$$

Assim sucede em K' pelo princípio da inércia. Em K pela lei experimental de que, num campo de gravitação homogéneo, todos os corpos caem com a mesma aceleração constante. Não obstante ser uma das mais gerais que se conhecem, não se dava a esta lei, antes de Einstein, lugar algum nos fundamentos da nossa concepção do mundo.

Ora esta lei interpreta-se satisfatòriamente supondo que os sistemas K, K' são fisicamente equivalentes: assim, K pode considerar-se existente numa região sem gravitação, mas dotado de movimento uniformemente acelerado. Compreende-se agora a queda igual de todos os corpos num campo de gravitação. Além disso, torna-se ilícito falar de aceleração absoluta dum sistema de referência. O problema da gravitação e o problema da relatividade geral estão em via de resolução simultânea.

É claro que um campo de gravitação qualquer nem sempre pode ser completamente substituído por um sistema de referência acelerado. Mas isto não significa que o princípio da equivalência perca importância neste caso geral. Localmente e momentâneamente qualquer campo gravitacional pode ser assim substituído, o que basta, graças ao método infinitesimal, para permitir a utilização daquele princípio na teoria geral do campo de gravitação.

A equivalência de K e K' é certa para os fenómenos mecânicos do domínio de validade da mecânica newtoniana. Mas, se ela se restringisse a êstes fenómenos, de nada nos serviria o seu conhecimento. Postulando-a para os outros fenómenos físicos, isto é, supondo que as leis da natureza em K são as mesmas que em K', poderemos, caso a suposição seja exacta, descobrir as leis dos fenómenos num campo de gravitação homogéneo por meio do estudo teórico dos fenómenos num sistema de referência uniformemente acelerado. Esta significação heurística, só por si, justificaria a introdução do princípio da equivalência. Mas pode mostrar-se que a teoria da relatividade especial dá à exactidão do princípio uma grande probabilidade.

Segundo esta teoria, a massa inerte dum corpo cresce com a energia absorvida. O aumento E de energia dá o aumento $\frac{E}{c^2}$ de massa inerte (c = velocidade da luz). ¿Corresponde-lhe também um aumento de massa gravitante? Se não, um corpo cai num campo de gravitação com diferentes acelerações, segundo a maior ou menor energia que contenha; e a fusão da lei da conservação da massa com a lei da conservação da energia seria verdadeira para a massa inerte, mas não para a massa gravitante. Isto é altamente improvável. Ora, da teoria da relatividade especial não pode deduzir-se que o pêso dum corpo dependa da sua energia; o princípio da equivalência, porém, exige-o necessàriamente.

Sejam, com efeito, S_1 e S_2 dois sistemas físicos situados numa vertical do campo de gravitação homogéneo K, à distância mútua h, de modo que o potencial da gravitação em S_2 exceda o de S_1 em γh. As dimensões de S_1 e S_2

supomo-las muito pequenas relativamente a h. De S_2 enviemos a energia radiante E_2 (medida em S_2) para S_1; ¿ que valor terá esta energia em S_1, medida com instrumentos da mesma construção? [1]

Para responder à pregunta (o que é impossível *a priori*, porque desconhecemos a influência da gravitação sôbre a radiação e sôbre os instrumentos de medida), substituamos ao sistema K, segundo o princípio da equivalência, o sistema K' sem gravitação, mas animado de movimento uniformemente acelerado no sentido S_1 S_2. Seja K_0 o sistema de inércia no qual K' está momentâneamente em repouso quando S_2 emite a energia radiante E_2. A radiação chega a S_1 decorrido o tempo $\frac{h}{c}$ (em primeira aproximação); mas, nêste instante, S_1 tem a velocidade $v=\frac{\gamma h}{c}$ relativamente a K_0 e, portanto, segundo a teoria da relatividade especial (equação (16), IV, 25), a radiação tem em S_1, em primeira aproximação, a energia

$$E_1=E_2\left(1+\frac{v}{c}\right)=E_2\left(1+\frac{\gamma h}{c^2}\right).$$

No campo de gravitação K tem-se pois

$$E_1=E_2\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right)=E_2+\frac{E_2}{c^2}\Phi,$$

sendo Φ a diferença de potencial entre S_2 e S_1. Esta

---

[1] Os instrumentos utilizados em S_1 terão a mesma construção que os utilizados em S_2 se, transportados para um mesmo lugar do campo e aí comparados, forem completamente iguais.

equação mostra que a massa inerte $\frac{E_2}{c^2}$ de E_2 é também massa gravitante de E_2; o têrmo $\frac{E_2}{c^2}\,\Phi$, com efeito, representa a energia potencial da massa gravitante $\frac{E_2}{c^2}$, ou seja a energia que deve atribuir-se a E_2 em virtude da sua posição antes de ser emitida de S_2, conforme ao princípio da conservação da energia.

A gravidade da energia (e a sua identidade com a inércia da energia) pode deduzir-se ainda mais fàcilmente. Com efeito, segundo o princípio da equivalência, a massa gravitante relativa a K coincide com a massa inerte relativa a K'; logo a energia deve ter massa gravitante, igual à sua massa inerte. Em K' um corpo de massa inerte M, portanto com o pêso aparente $M\gamma$, adquire o pêso aparente $\left(M+\frac{E}{c^2}\right)\gamma$ se absorve a energia E; pelo princípio da equivalência, êstes pêsos são pêsos reais em K.

Justificado assim o princípio da equivalência, apliquemo-lo ao estudo de outros fenómenos num campo de gravitação homogéneo. Consideremos de novo a emissão de radiação de S_2 para S_1, supondo que se trata duma radiação monocromática cuja freqüência em S_2, medida com um relógio situado em S_2, é ν_2; em S_1 a sua freqüência, medida com um relógio da mesma construção situado em S_1, será, para o sistema de referência K',

$$\nu_1=\nu_2\left(1+\frac{\gamma h}{c^2}\right),$$

como o prova um raciocínio idêntico ao anterior apoiado na equação (11), IV, 25 do efeito Doppler (bastaria aliás notar que a energia e a freqüência duma radiação se transformam anàlogamente, como em IV observámos). No campo de gravitação K ter-se-á pois

$$\nu_1 = \nu_2 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{3}$$

Êste resultado importante permite a seguinte previsão. Seja ν_0 a freqüência dum emissor de luz, medida com um relógio situado junto dêle; é claro que esta freqüência é independente do lugar onde se encontrem juntos o emissor e o relógio. Suponhamo-los ambos situados à superfície do Sol; parte da luz aqui emitida chegará à Terra, onde medimos a sua freqüência ν com um relógio da mesma construção; será

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

supondo que a fórmula (3) é verdadeira (em primeira aproximação) também para um campo não homogéneo. Φ é agora a diferença (negativa) de potencial de gravitação entre as superfícies do Sol e da Terra. É pois $\nu < \nu_0$, isto é, as riscas do espectro solar devem apresentar-se deslocadas para o lado do vermelho em relação às riscas correspondentes dos espectros emitidos por fontes terrestres (primeiro efeito de Einstein). O valor relativo do deslocamento,

$$\frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = \frac{-\Phi}{c^2} = 2.10^{-6},$$

é acessível à medida; mas por ser muito pequeno e por haver outras causas que influem na posição das riscas espectrais, como p. ex. a pressão, é difícil verificar se há aqui realmente uma influência da gravitação.

Pode-se ser tentado a objectar o seguinte ao resultado precedente: visto que o campo de gravitação K é estático, se a radiação considerada é permanente o número de ondas existentes entre S_2 e S_1 é independente do tempo; a freqüência da radiação em S_1 não pode pois diferir da freqüência em S_2. Mas deve notar-se que a objecção supõe que se definiu um tempo para todo o sistema K, o que ainda se não fêz. As freqüências ν_1 e ν_2 são medidas localmente com relógios da mesma construção, mas nada prova que marchem igualmente relógios idênticos, quando situados em lugares onde o potencial da gravitação não é o mesmo. Pelo contrário, de que o tempo do sistema K deve ser definido de modo que a emissão de luz de S_2 para S_1 seja um fenómeno estacionário resulta precisamente, por (3), que o relógio de S_2 marcha $1+\frac{\Phi}{c^2}$ vezes mais ràpidamente que o relógio idêntico de S_1.

Se queremos que o tempo do sistema K seja indicado por relógios locais, êstes não podem ser da mesma construção; o relógio a colocar em S_2, quando comparado num mesmo lugar com o relógio a colocar em S_1, deve marchar $1+\frac{\Phi}{c^2}$ vezes mais lentamente que êste. Isto conduz a outro resultado importante. Medindo no sistema acelerado K' a velocidade da luz em diferentes lugares, com relógios da mesma construção, acha-se sempre o mesmo valor. Pelo princípio da equivalência, o mesmo sucede no campo de gravitação K. Utilizando portanto os relógios de desigual construção mencionados, a-fim-de introduzir o tempo geral de K, será a velocidade da luz, num lugar onde o potencial da gravitação é Φ, dada por

$$c = c_0\left(1+\frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{4}$$

Num campo de gravitação, a constância da velocidade da luz mantém-se só no sentido de que a velocidade da luz é independente do estado de movimento da fonte luminosa. No princípio da constância da velocidade da luz, que é uma das bases da teoria da relatividade especial, o essencial é justamente esta independência; a igualdade da velocidade da luz em todos os lugares de todos os sistemas de inércia resulta desta independência, da uniformidade da propagação num só sistema e do princípio da relatividade.

Sendo a velocidade da luz função do lugar, raios luminosos que não tenham a direcção do campo de gravitação devem ser encurvados por êste, como resulta imediatamente do princípio de Huygens. Se c_1, c_2 são os valores da velocidade da luz nos pontos vizinhos P_1, P_2, atingidos por uma onda luminosa no instante t, é evidente que o respectivo raio luminoso se encurva, entre os instantes $t, t + dt$, dum ângulo

$$\frac{(c_1 - c_2)\, dt}{P_1 P_2} = - \frac{\partial c}{\partial n} dt$$

contado positivamente se o raio se encurva para o lado dos n crescentes. Por unidade de caminho, o ângulo será

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial n}$$

ou, segundo (4),

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial n};$$

para um caminho finito qualquer ter-se-á

$$\alpha = -\frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, ds$$

para valor do ângulo das direcções inicial e final. Por conseguinte um raio luminoso que passa perto dum astro desvia-se, no sentido do campo, da quantidade

$$\alpha = \frac{1}{c^2} \int \frac{fM}{r^2} \cos \vartheta \, d s,$$

onde f é a constante da gravitação, M a massa do astro, r e ϑ as coordenadas polares correntes do raio luminoso $\left(\text{polo no centro do astro, } -\frac{\pi}{2} < \vartheta < +\frac{\pi}{2}\right)$. Utilizando a relação

$$\frac{r\,d\vartheta}{d s} = \frac{\Delta}{r},$$

onde Δ é a distância do centro do astro ao raio luminoso, obtém-se imediatamente

$$\alpha = \frac{fM}{c^2 \Delta} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \vartheta \, d\vartheta = \frac{2fM}{c^2 \Delta},$$

o que dá $\alpha = 4 . 10^{-6} = 0'',83$ para um raio luminoso que passe junto da superfície do Sol. Durante um eclipse total dêste astro deve observar-se um aumento na distância angular do seu centro às estrêlas vizinhas (segundo efeito de Einstein).

No que precede, mais uma vez transportámos para um campo não homogéneo resultados obtidos no caso dum campo homogéneo; e demos a Φ o seu valor newtoniano, como fizemos também para o efeito anterior. Até que ponto isto é legítimo vê-lo-emos adiante.

52. Obtidos os resultados precedentes, cumpria generalizá-los. Tornava-se claro que a construção da teoria da relatividade geral seria ao mesmo tempo a da teoria geral dos campos de gravitação. E como qualquer campo de gravitação é localmente e momentâneamente homogéneo, o princípio da equivalência e o método infinitesimal deviam ser suficientes para aquela construção. Os ensaios de Einstein neste sentido situam-se entre os anos de 1912 e 1916; neste último ano, numa memória célebre ([1]), Einstein apresentava a teoria como concluída nas suas linhas gerais.

Como atrás observámos, a equivalência dum sistema de referência em repouso num campo de gravitação homogéneo e dum sistema de referência uniformemente acelerado num espaço sem gravitação constitui uma primeira justificação do princípio da relatividade geral. Outra não menos importante é a seguinte. Tanto a mecânica newtoniana como a teoria da relatividade especial pretendem explicar o comportamento físico excepcional dos corpos em repouso num espaço de inércia (p. ex. a ausência de certas deformações) dizendo que as leis da mecânica, ou da física, valem sim para o espaço de inércia mas não para um espaço diferente. Ora esta explicação é apenas aparente, porque o espaço de inércia é uma causa fictícia, não uma coisa observável. Se dois corpos da mesma constituïção, um em repouso num espaço inercial, outro em repouso num espaço não inercial, têm formas diferentes, a causa disto deve ser qualquer coisa de material existente fora do sistema formado pelos dois corpos; o próprio sistema nada mais contém que os dois corpos animados de movimento relativo (acelerado). As leis gerais do movi-

([1]) A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, 1916, in-Lorentz, Einstein, Minkowski, *op. cit.*

mento devem ser tais que a diversidade de comportamento mecânico dos dois corpos seja devida à presença de massas distantes de que tínhamos abstraído, não a uma vantagem do espaço inercial sôbre o outro espaço. Noutros termos, as leis da física devem ser tais que valham para todos os sistemas de referência.

Mas êste enunciado do princípio da relatividade geral deve por sua vez ser generalizado. Na teoria da relatividade especial as coordenadas de espaço e de tempo eram determinadas imediatamente por meio de réguas rígidas idênticas (segundo as regras da geometria euclidiana) e por meio de relógios idênticos. Uma régua rígida em repouso tinha um comprimento independente do lugar, da orientação e do tempo; um relógio em repouso tinha uma marcha independente do lugar e do tempo. Ora esta concepção simples do espaço e do tempo não pode manter-se na teoria da relatividade geral. Já sabemos que num campo de gravitação homogéneo (ou num sistema de referência uniformemente acelerado) relógios idênticos marcham em geral diferentemente. Consideremos agora um sistema de referência K' animado de rotação uniforme relativamente a um sistema de inércia K, e suponhamos que as origens e os eixos dos zz dos dois sistemas coïncidem permanentemente. Por motivo de simetria, um círculo do plano xy de K centrado na origem é também um círculo do plano $x'y'$ de K'. Imaginemos que a circunferência e o diâmetro do círculo são medidos com uma pequena régua unitária, em K e em K'; o quociente dos dois números achados será em K igual a π, em K' porém, por causa da contracção sofrida pela régua quando colocada sôbre a circunferência (mas não quando colocada sôbre o diâmetro), maior que π. A geometria de K' não é pois euclidiana. A consideração da marcha de relógios idênticos em K' levar-nos-ia a uma conclusão análoga à que citámos sôbre sistemas uniformemente acelerados. Assim, a determinação das coordenadas de espaço e de tempo dos sistemas de inércia, que supõe a validade da geometria euclidiana e a independência da marcha dum relógio relativamente ao lugar e ao tempo, é inaplicável aos sistemas acelerados; na teoria da relatividade geral as diferenças de coordenadas espacio-temporais não podem medir-se imediatamente com a régua unitária e com o relógio normal.

Desta maneira desaparece o meio de fixar no universo quadridimensional sistemas de coordenadas cujo emprêgo permita formular as leis da natureza dum modo particularmente simples. Só resta considerar todos os sistemas de coordenadas possíveis como equivalentes para a descrição da natureza. As coordenadas serão parâmetros quaisquer, cujos valores correspondem a todos os pontos do universo quadrimensional de maneira unívoca e contínua. Esta descrição do universo é suficiente: tôdas as medidas físicas resultam da verificação de coïncidências espacio-temporais, fora das quais nada há de observável; ora, se dois acontecimentos têm iguais coordenadas num sistema, o mesmo sucede noutro sistema, que resulta do primeiro por uma transformação pontual. O princípio da relatividade geral deve pois enunciar-se dêste modo: as leis gerais da natureza têm de exprimir-se por equações que subsistam para todos os sistemas de coordenadas do universo quadridimensional, isto é, que sejam covariantes perante quaisquer transformações de coordenadas. Êste enunciado generaliza evidentemente o anterior, porque em tôdas as transformações de coordenadas contêm-se também as que correspondem a todos os movimentos relativos dos sistemas de referência tridimensionais.

53. Já aludimos à forma que toma o princípio da equivalência no caso geral dum campo de gravitação qualquer, isto é, no caso em que o universo real está referido a um sistema de coordenadas arbitrário. Modificando um pouco os termos que empregámos, diremos agora: para cada região infinitesimal do universo quadridimensional (isto é, suficientemente pequena para que possa desprezar-se a variação local e temporal da gravidade) existe um sistema de coordenadas K_0 relativamente ao qual não existe gravitação (onde, portanto, vale a teoria da relatividade especial). Em suma, em cada região infinitesimal do universo pode eliminar-se a gravitação por uma escolha conveniente das coordenadas. Um pequeno corpo em queda livre durante um pequeno intervalo de tempo realiza um sistema K_0.

Se X_1, X_2, X_3, $X_4 = c\,t$ são coordenadas galileanas em K_0, o intervalo de dois acontecimentos da região infinitesimal considerada é dado por

$$(5) \qquad d\,s^2 = -d\,X_1^2 - d\,X_2^2 - d\,X_3^2 + d\,X_4^2,$$

onde as grandezas do segundo membro são medidas directamente em K_0 por meio de réguas unitárias e relógios normais. Considerando agora o sistema de coordenadas x^1, x^2, x^3, x^4 a que está referido todo o universo, é claro que as diferenciais $d\,X_i$ são funções lineares homogéneas das diferenciais $d\,x^i$ e tem-se

$$(6) \qquad d\,s^2 = g_{ik}\,d\,x^i\,d\,x^k,$$

onde o segundo membro representa uma forma quadrática de diferenciais com coeficientes funções das coordenadas. É evidente que, dado o sistema de coordenadas x^i, as medidas feitas em K_0 determinam os valores correspondentes dos g_{ik}.

Visto que $d\,s$ é invariante, os g_{ik} são componentes covariantes dum tensor de 2.ª ordem. A equação (6) significa que o universo quadridimensional tem estrutura métrica pseudo-riemaniana.

Se os g_{ik}, numa certa região do universo, têm os valores que figuram em (5), vale nessa região, para o sistema de coordenadas dado, a teoria da relatividade especial. Passando para outro sistema de coordenadas, porém, os g_{ik} deixarão em geral de ser constantes nessa região, deixa de valer nela a teoria da relatividade especial; o movimento dum ponto material abandonado a si mesmo, que dantes era rectilíneo e uniforme, é agora curvilíneo e variado, independentemente da natureza do ponto material; na região considerada há agora um campo de gravitação. A presença dum tal campo está pois ligada à variabilidade dos g_{ik}.

Assim os g_{ik} caracterizam simultâneamente a métrica do universo (em particular a geometria do espaço tridimensional) e o campo de gravitação. O princípio da equivalência resolve pois satisfatòriamente dois problemas consideráveis: o problema da gravitação e o problema da geometria. O movimento dum ponto material num campo de gravitação é curvilíneo e variado, não porque o ponto material sofra a acção duma fôrça, mas porque o universo quadridimensional é não-euclidiano. A geometria do espaço não é dada *a priori*, mas é determinada pela matéria.

Podemos agora precisar o sentido da covariância das leis da natureza que exige o princípio da relatividade geral. As equações que as exprimem devem consistir na anulação dum tensor do universo quadridimensional dotado da métrica (6) (ou na igualdade de dois tensores da mesma ordem, o que é o mesmo). Tais equações mantêm a sua forma numa transformação de coordenadas, porque as componentes dum tensor se transformam linear e homogèneamente. A própria equação (6) é o primeiro exemplo de lei covariante.

Procuremos a lei do movimento do ponto material num campo de gravitação. No sistema K_0, em que a gravitação está eliminada, o movimento é rectilíneo e uniforme, ou seja uma geodésica universal; como a geodésica tem definição covariante, ela representa ainda o movimento em referência a qualquer sistema de coordenadas e tem-se

$$\frac{d^2 x^i}{d s^2} + \Gamma^i_{hk} \frac{d x^h}{d s} \frac{d x^k}{d s} = 0, \tag{7}$$

onde os Γ^i_{hk} são idênticos aos símbolos de 2.ª espécie de Christoffel. O raciocínio é concludente se K_0 é finito. Se K_0 é infinitesimal, é necessário admitir que a lei procurada não contém as segundas derivadas dos g_{ik}.

Se os Γ^i_{hk} se anulam, o movimento é rectilíneo e uniforme. Estas grandezas são pois as componentes do campo de gravitação; como elas são construídas linearmente com as primeiras derivadas dos g_{ik}, segue-se que os g_{ik} são as componentes do potencial da gravitação, que na teoria de Einstein, portanto, é um tensor simétrico de 2.ª ordem.

Anàlogamente se mostra que a linha universal dum raio luminoso é uma geodésica nula, definida por $d s = 0$ e por uma equação da forma (7), na qual, porém, a variável independente é um parâmetro arbitrário.

54. A equação (7) simplifica-se consideràvelmente se supomos que a velocidade do ponto material é pequena perante a da luz e que o campo de gravitação é fraco, isto é, que os g_{ik} diferem pouco dos valores galileanos que têm em (5). Desprezando a segunda ordem, a quarta

(7) desaparece e as três primeiras dão simplesmente

$$\frac{d^2 x^i}{d t^2} = -c^2 \Gamma^i_{44} \quad (i = 1, 2, 3;\ x^4 = c\,t).$$

Supondo além disso que o campo é estático ou quási estático, de modo que possam desprezar-se as derivadas dos g_{ik} relativamente ao tempo, Γ^i_{44} ou, o que é o mesmo segundo as suposições precedentes, $-\Gamma_{i,44}$ pode ser substituído por $\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial g_{44}}{\partial x^i}$ e têm-se as equações newtonianas

$$\frac{d^2 x^i}{d t^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i},$$

com

(8) $$g_{44} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2}.$$

A constante aditiva ligada a Φ foi escolhida de modo que g_{44} tenha o valor galileano 1 para $\Phi = 0$.

No facto de só figurar nas equações do movimento, com a aproximação adoptada, a componente g_{44} do potencial tensorial einsteiniano é que reside a possibilidade da descrição newtoniana do campo de gravitação por meio dum potencial escalar.

A mesma circunstância permite também calcular a influência do campo de gravitação sôbre os relógios sem conhecer a lei da gravitação a que deve satisfazer o potencial einsteiniano. Visto que o elemento de linha universal dum relógio em repouso é dado por

$$d s^2 = g_{44} (d x^4)^2,$$

tem-se aproximadamente

$$d\tau = \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) d t;$$

o relógio marcha tanto mais lentamente quanto mais baixo é o potencial de gravitação do lugar onde está situado. Obtém-se assim um resultado que já conhecemos, mas agora generalizado para campos fracos e quási estáticos, homogéneos ou não. O deslocamento das riscas espectrais do Sol ou duma estrêla para o lado do vermelho está agora bem demonstrado teòricamente. No caso do Sol, como vimos, o valor numérico do deslocamento relativo é 2.10^{-6}, correspondente ao efeito Doppler duma velocidade radial de 0,6 km / sec.

Há muito tempo que se observavam no espectro solar pequenos deslocamentos das riscas para o lado do vermelho; êstes deslocamentos eram explicados como efeito da pressão. Mostrou-se mais tarde que êle não coincidia com o efeito da pressão observado em fontes luminosas terrestres: certas riscas que no laboratório eram muito pouco influenciadas pela pressão apareciam no espectro solar tão deslocadas como as outras. Lembrou naturalmente explicar êstes deslocamentos pelo efeito de Einstein. As primeiras medidas pareceram desfavoráveis à teoria; mas as medidas posteriores de Grebe e Bachem, efectuadas na banda do cianogénio (que não sofre efeito de pressão), mostraram que as riscas não perturbadas por sobreposição apresentam deslocamentos que coincidem com os seus valores teóricos; e outras medidas de Grebe provaram que a média dos deslocamentos de 100 riscas perturbadas e não perturbadas corresponde à teoria. Sem que se possa dizer que o efeito de Einstein está definitivamente comprovado, é legítimo, do ponto de vista heurístico, partir dêle e atribuir os desvios a causas perturbadoras, como p. ex. correntes de matéria solar acompanhadas de efeito Doppler.

Quanto à verificação do efeito nas estrêlas, é claro que ela só é possível para aquelas cujas velocidades radiais são bem conhecidas; mas ainda aqui surgem dificuldades. Weber e Eddington indicaram uma possibilidade de verificação excepcional na estrêla dupla Sírius; das duas estrêlas, a menos luminosa tem uma densidade extraordinàriamente grande, portanto um campo de gravitação muito intenso à superfície, donde se deve esperar um forte deslocamento relativista nas riscas do respectivo espectro. A velocidade radial é conhecida pelo efeito Doppler da estrêla mais luminosa, para a qual o efeito de Einstein é insignificante. Ora Adams observou efectivamente em Sírius B um deslocamento para o vermelho de 0,3 angströms, que coincide com o valor teórico calculado a partir dos dados astronómicos (¹).

55. Antes de estabelecer a lei da gravitação da teoria de Einstein é necessário tratar da influência do campo de gravitação sôbre os fenómenos materiais (tomaremos aqui o têrmo matéria no sentido lato, para significar tanto a matéria pròpriamente dita como o campo electromagnético). Exprimir-se-á essa influência dando forma covariante geral às equações dêsses fenómenos, tais como as encontrámos na teoria da relatividade especial. Com efeito, seja K_0 um sistema de coordenadas no qual os g_{ik} têm os valores galileanos de (5) numa região universal finita. Neste sistema as leis naturais são as da teoria da relatividade especial. Passe-se agora de K_0 para um sistema de coordenadas qualquer e deduza-se pelo cálculo a forma das leis no segundo sistema; segundo o princípio da equivalência, tem-se assim a forma das leis dos fenómenos materiais num campo de gravitação. O resultado

(¹) Cf. W. Pauli jun., *Relativitätstheorie*, Leipzig, 1921; F. Kottler, *Gravitation und Relativitätstheorie, op. cit.;* G. Beck, *Allgemeine Relativitätstheorie*, in-*Handbuch der Physik*, Band IV, Berlin, 1929.

obtido vale também para o caso em que sistemas como K_0 só existem para regiões infinitesimais, contanto que se admita que naquelas leis não figuram as segundas derivadas dos g_{ik}.

Temos um exemplo dêste processo na dedução da equação (7) do movimento do ponto material (cf. equações (21), IV, 28). A sua aplicação à equação do movimento da matéria contínua (equação (28), IV, 31) e à equação da impulsão-energia do campo electromagnético (equação (36), IV, 34), que nos interessam particularmente, dá evidentemente êste resultado: as divergências no sentido pseudo-euclidiano, que figuram nessas equações, são substituídas por divergências no sentido pseudo-riemanniano, conforme à equação (6). Dêste modo a equação (37), IV, 34, que exprime a lei da impulsão-energia da matéria (no sentido lato) na ausência de campo de gravitação, dará

$$(9) \qquad \frac{\partial \mathfrak{T}^{ik}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl}\, \mathfrak{T}^{kl} = 0,$$

onde $\mathfrak{T}^{ik}$ designa a densidade tensorial de T^{ik}. No segundo têrmo do primeiro membro é visível a influência da gravitação por intermédio das componentes do campo. Por causa dêste segundo termo, a integração de (9) não pode dar leis de conservação para a energia total e para a impulsão total da matéria; e na verdade pode haver passagem de impulsão e de energia da matéria para o campo de gravitação e recìprocamente.

Podemos agora estabelecer a lei da gravitação. Segundo o princípio da equivalência, a fôrça de gravitação, que é proporcional à massa gravitante, é também proporcional à massa inerte e portanto à energia. Porém a densidade de energia não é um escalar universal, mas só a última componente do tensor de impulsão-energia T_{ik}. Na lei da gravitação deve pois figurar êste tensor como representativo das grandezas de estado da matéria. Por analogia com a equação de Poisson

$$\Delta \Phi = 4\pi f \rho, \tag{10}$$

admitiremos que o tensor T_{ik} é proporcional a um tensor formado com os g_{ik} e suas derivadas até à segunda ordem, linear nestas últimas; a lei que procuramos será pois da forma

$$c_1 R_{ik} + c_2 g_{ik} R + c_3 g_{ik} = k\, T_{ik}, \tag{11}$$

onde c_1, c_2, c_3 são constantes, R_{ik} é o tensor de Riemann contraído [1] e R o escalar de Riemann $g^{ik} R_{ik}$. Sabe-se com efeito que o 1.º membro de (11) é o único tensor que satisfaz às condições precedentes. Quanto à determinação das constantes, deve observar-se que, supondo dada qualquer solução das equações do campo (11), pode deduzir-se dela uma infinidade de outras soluções (fìsicamente equivalentes) por meio de transformações de coordenadas; como a transformação arbitrária das coordenadas contém quatro funções arbitrárias, quatro funções arbitrárias conterá a solução geral de (11) (para condições iniciais dadas). Entre as dez equações do campo (11) para as dez incógnitas g_{ik} devem portanto existir quatro identidades. Ora o tensor T_{ik} satisfaz às quatro equações (9); isto faz ocorrer a suposição de que a lei da impulsão-energia da matéria resulta idênticamente das equações do campo da gravitação ou, o que é o mesmo, que a divergência do primeiro membro de (11) se anula idênticamente. Admitindo esta

---

[1] $R_{ik} = \dfrac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}}{\partial x^{k}} - \dfrac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{i\alpha} \Gamma^{\alpha}_{k\beta} - \Gamma^{\alpha}_{ik} \Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}$.

suposição têm-se em (9) as quatro identidades referidas, e encontra-se a relação

$$c_2 = -\frac{1}{2} c_1 .$$

Finalmente, desprezando o têrmo $c_3 g_{ik}$ que, como mostrou Einstein, só é sensível no problema cosmológico, tem-se a lei da gravitação einsteiniana

$$(12) \qquad R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\varkappa T_{ik},$$

a qual pode também escrever-se

$$(13) \qquad R_{ik} = -\varkappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right),$$

sendo T o escalar da impulsão-energia da matéria.

Notemos que Einstein demonstrou que (9), em virtude de (12), pode escrever-se sob a forma

$$\frac{\partial (\mathfrak{T}_i^k + \mathfrak{t}_i^k)}{\partial x^k} = 0,$$

da qual se deduzem, por integração, leis de conservação da impulsão e da energia. As grandezas $\mathfrak{t}_i^k$ são as componentes da impulsão-energia do campo de gravitação; contudo $\mathfrak{t}_i^k$ não é uma densidade tensorial.

56. Viu-se no n.º 54 que a lei einsteiniana do movimento do ponto material se reduz à lei newtoniana num campo de gravitação fraco e quási estático. É fácil de ver que num tal campo também a lei da gravitação (13) se reduz à lei de Newton. Para valor de T^{ik} podemos tomar a sua parte principal $\rho_0 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{ds}$; sendo a velocidade da matéria muito pequena em relação à da luz, tôdas as componentes dêste tensor podem ser desprezadas salvo $T^{44} = \rho_0$. Na aproximação adoptada tem-se também $T_{44} = T = \rho_0$ e portanto o segundo membro da última das dez equações (13) reduz-se a $-\frac{1}{2}\varkappa\rho_0$. O seu primeiro membro, R_{44}, como se vê sem dificuldade, reduz-se a $-\frac{1}{2}\Delta g_{44}$, onde Δ é o operador de Laplace. Tem-se pois, atendendo a (8),

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2}\varkappa c^2 \rho_0,$$

que é idêntica à equação de Poisson (10) com

$$\varkappa = \frac{8\pi f}{c^2}.$$

A teoria de Einstein contém pois a de Newton como primeira aproximação.

Resta saber se ela pode explicar correctamente fenómenos que escapam à teoria newtoniana, por exemplo o movimento do periélio de Mercúrio. É sabido que neste caso a maior parte do movimento observado se explica pela teoria das perturbações, e a esta explicação parcial nada tem a objectar a teoria de Einstein, porque os campos de gravitação produzidos pelos planetas são suficientemente fracos para que a teoria newtoniana lhes seja aplicável. A questão deve ser decidida pela resolução do problema dos dois corpos dentro da teoria einsteiniana; noutros termos, é preciso calcular a partir de (13) o campo de gravitação do Sol e depois, a partir de (7), o movimento de Mercúrio neste campo.

Ora o campo de gravitação do Sol é estático e de simetria esférica, e neste caso as equações (13) podem integrar-se rigorosamente, como pela primeira vez mostrou Schwarzschild. Um campo é estacionário quando os g_{ik} são independentes do tempo. Para que, além disso, êle seja estático, é preciso que não existam correntes de matéria. Estas são descritas pelas componentes T_{4k} ($k=1$, 2, 3) do tensor material; e vê-se imediatamente que, se elas são nulas, as componentes mixtas ou contravariantes correspondentes só podem anular-se se forem $g_{41}=g_{42}=$ $=g_{43}=0$. Num campo estático, portanto, a expressão (6) não contém termos lineares em dx^4. No caso particular da simetria esférica deve ser, em coordenadas polares,

$$(14)\quad ds^2=-h^2\,dr^2-r^2(d\vartheta^2+\sin^2\vartheta\,d\varphi^2+f^2(dx^4)^2,$$

onde h e f são funções de r, como se reconhece por considerações de simetria sôbre a métrica das superfícies coordenadas. O cálculo das componentes R_{ik} para os valores (14) dos g_{ik} mostra que são idênticamente nulas aquelas em que é $i \neq k$; igualando a zero as outras (pretende-se o campo de gravitação do Sol fora do astro), obtêm-se quatro equações diferenciais que são simultâneamente satisfeitas por

$$h^2=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}},\quad f^2=\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\beta^2,$$

onde α e β são constantes arbitrárias. Substituindo em (14),

β funde-se com x^4 e tem-se finalmente

$$(15)\quad ds^2 = -\frac{dr^2}{1-\frac{\alpha}{r}} - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) + \left(1-\frac{\alpha}{r}\right)(dx^4)^2;$$

para $r \to \infty$ tem-se o ds^2 da teoria da relatividade especial em coordenadas polares, como devia ser.

O confronto com (8) dá

$$\alpha = -\frac{2r\Phi}{c^2} = \frac{2fM}{c^2},$$

onde M é a massa do Sol, f a constante newtoniana da gravitação. A solução (15) é singular para $r=\alpha$, mas α é extraordinàriamente pequeno em relação ao raio do Sol; isto é, a solução torna-se singular dentro da massa M, onde já não é válida.

Segundo (15), a influência do campo sôbre a marcha dum relógio é idêntica à que já conhecemos. A influência do campo sôbre o comprimento duma régua depende da orientação desta: colocada numa direcção radial, é tanto mais curta quanto menos dista do Sol; colocada numa direcção transversal não sofre alteração de comprimento. No campo considerado, uma região do espaço é tanto menos euclidiana quanto mais próxima fica do corpo que gera o campo.

O movimento do planeta no campo (15) podia calcular-se por (7). Mas é mais simples partir da equação equivalente

$$\delta \int ds = 0.$$

Variando primeiro φ, obtém-se

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{ds}\right)=0,$$

donde

$$r^2 \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{ds}=\text{const.}$$

Se o valor inicial de $d\varphi/ds$ é zero, o que sempre se consegue orientando convenientemente o sistema de coordenadas, φ fica portanto constante durante o movimento. A órbita é «plana».

Variando depois ϑ e atendendo a $\varphi=\text{const.}$, obtém-se o teorema das áreas

$$\frac{d}{ds}\left(r^2 \frac{d\vartheta}{ds}\right)=0, \quad \text{ou} \quad r^2 \frac{d\vartheta}{ds}=\frac{C}{c},$$

sendo C constante; em vez do tempo t entra porém o tempo próprio nesta equação.

Variando finalmente x^4 encontra-se

$$\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\frac{dx^4}{ds}=\text{const.};$$

eliminando dx^4/ds entre esta equação e (15) resulta

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)\left\{r^2\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)^2+1\right\}=\text{const.};$$

eliminando nesta ds por meio do teorema das áreas vem emfim a equação da órbita

$$(16) \qquad \left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha c^2}{C^2 r} - \frac{\alpha}{r^3} = \text{const.}$$

Esta equação difere da correspondente equação newtoniana pelo último têrmo do 1.º membro, que é muito pequeno, mas não nulo; êste têrmo deve produzir movimento do periélio. Efectivamente a substituïção

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\gamma\vartheta},$$

onde γ é uma constante muito próxima de 1, dá aproximadamente

$$\gamma = 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha}{a(1-e^2)},$$

donde resulta que o periélio, a cada revolução, se desloca de

$$2\pi\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) = \frac{3\pi\alpha}{a(1-e^2)} = \frac{24\pi^3 a^2}{T^2(1-e^2)c^2},$$

atendendo ao valor de α e à terceira lei de Kepler. Este deslocamento é exactamente o sêxtuplo do que foi obtido em VI, 43 (pág. 140); o movimento do periélio de Mercúrio é assim completamente explicado pela teoria de Einstein.

A aplicação da fórmula precedente aos outros planetas interiores (para os planetas exteriores o efeito é insensível) também está de acôrdo com as observações, como mostrou

De Sitter. De resto, o movimento perielíaco a explicar é nestes casos muito mais pequeno.

57. A equação dum raio luminoso que atravessa o campo de gravitação do Sol podia obter-se directamente dum modo semelhante ao anterior. Mas tem-se essa equação imediatamente se se efectua uma passagem ao limite no precedente resultado. No caso dum raio luminoso, com efeito, é $ds=0$; o teorema das áreas dá então $C=\infty$, e (16) converte-se em

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\vartheta}\right)^2+\frac{1}{r^2}-\frac{\alpha}{r^3}=\text{const.}=\frac{1}{\Delta^2}.$$

É a equação procurada. Se não existisse o último têrmo do 1.º membro, a equação daria

$$r=\frac{\Delta}{\cos\vartheta},$$

isto é, o raio luminoso seria uma recta à distância Δ do centro do Sol; é a solução em primeira aproximação. Em segunda aproximação obtém-se

$$\frac{1}{r}=\frac{\cos\vartheta}{\Delta}+\frac{\alpha}{2\Delta^2}(1+\sin^2\vartheta).$$

O que nos interessa é a direcção desta curva a grande distância. Pondo

$$\vartheta=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon$$

no 2.º membro, igualando êste a zero e desprezando a 2.ª ordem, resulta

$$\varepsilon = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{4fM}{c^2\Delta}$$

para valor do desvio total sofrido pelo raio luminoso que, como se vê, é côncavo do lado do Sol. Êste desvio é duplo do que encontrámos no fim do n.º 51 utilizando a lei de Newton. Para um raio que passe junto da superfície do Sol tem-se $\varepsilon = 1'',75$. Ora as observações dos eclipses totais do Sol confirmam êste número, pelo menos muito melhor que a sua metade.

A existência dêste efeito, que é produzido em partes iguais pela gravidade da energia e pela curvatura do espaço, constitui uma prova experimental de ambas. Também o movimento do periélio do Mercúrio, que em parte é devido à variação da massa com a velocidade (VI, 43) e noutra parte à curvatura do universo, prova experimentalmente esta curvatura.

As outras aplicações da teoria da relatividade geral à mecânica celeste dão resultados, ou inobserváveis por muito pequenos, ou inverificáveis no estado actual da ciência por incerteza sôbre os valores de certos elementos orbitais. Por isso nos limitamos a referi-las sumàriamente (1). Tratando o movimento dum astro num campo de simetria esférica como um movimento newtoniano perturbado, De Sitter mostrou que se obtém uma só desigualdade secular além da que precedentemente encontrámos para a longitude do periélio: é a da longitude média da época, da mesma ordem de grandeza que aquela.

---

(1) Cf. F. Kottler, *Gravitation und Relativitätstheorie*, *op. cit.*; também J. Chazy, *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, tome I, 1928, tome II, 1930, Paris.

Esta desigualdade, em certos casos, modificaria a duração da revolução sideral do astro duma quantidade superior ao êrro de observação; mas basta uma correcção quási insensível da distância média do astro ao corpo central (1 km. no caso de Mercúrio) para que o acôrdo com a observação fique restabelecido. Resta pois o movimento do periélio como desigualdade secular decisiva. Além dos planetas interiores, de que já falámos, êste efeito é sensível para diversos satélites, como os de Marte e os de Júpiter e de Saturno mais próximos do respectivo planeta. O seu valor pode atingir aqui alguns minutos, mas os elementos de todos êstes satélites estão ainda tão mal determinados que por ora é impossível utilizá-los para uma verificação.

Servindo-se duma solução aproximada das equações do campo para o caso de n corpos animados de velocidades muito pequenas relativamente à da luz, De Sitter encontrou, para o caso dos planetas, que as perturbações não têm a sofrer correcção relativista, devendo portanto ser sempre calculadas segundo a teoria newtoniana (como era de prever). Para o caso da Lua, o efeito da relatividade no movimento do satélite sob a acção da Terra resulta insignificante e o mesmo se dá com o efeito da interferência dos campos da Lua e do Sol (característico da teoria de Einstein, cuja lei de gravitação não é linear); resta a acção perturbadora do Sol, que dá desigualdades seculares de $1'',91$ para as longitudes do perigeu e do nodo ascendente, e do quádrupulo dêste valor para a longitude média da época. Êste efeito, contudo, está dentro dos êrros de observação e das incertezas teóricas. Reduzido de dois terços, o efeito aparece também nos satélites de Marte. É notável que na expressão do seu valor não figuram os elementos do satélite.

De Sitter, e depois Lense e Thirring, investigaram a influência da rotação do corpo central sôbre o campo respectivo. O resultado obtido foi uma desigualdade secular negativa na longitude média da época e na do periélio, e outra positiva, dupla daquela em valor absoluto, na longitude do nodo ascendente. Para os planetas o efeito é insensível. Não assim para os mais próximos satélites de Júpiter e de Saturno, onde atinge muitos segundos de arco; mas também aqui se deve atender à má determinação dos elementos dêstes satélites.

São pois três os efeitos relativistas nos movimentos do sistema solar. O terceiro, como se disse, tem por causa a rotação do corpo central e consiste no movimento do pericentro e dos nodos ([1]). O segundo é um efeito de precessão no espaço não euclidiano (o eixo do planeta, deslocando-se paralelamente a si mesmo em volta do Sol, adquire outra direcção no fim de cada revolução) e consiste também no movimento do pericentro e dos nodos. O primeiro tem por causa a rapidez do movimento (ou, o que é o mesmo, a proximidade do corpo central e a grande massa dêste) e consiste no movimento do pericentro.

Em conclusão, a teoria da gravitação de Einstein não só é a mais satisfatória do ponto de vista filosófico, mas é mesmo a única que a observação da natureza parece confirmar suficientemente.

([1]) Abstraindo da desigualdade da longitude média da época, pela razão indicada a propósito do primeiro efeito.

ÍNDICE

14

ERRATA

Pág.	*Linha*	*Onde se lê*	*Leia-se*
15	19	frustou	frustrou
26	28	reflctidas	reflectidas
39	1	movimento absoluto	movimento
52	6	tem	têm
53	20	redical	radical
66	18	da Lorentz	de Lorentz
74	9	riemaniano	riemanniano
94	14	*strictu*	*stricto*
109	5 e 6	generalizado	generalizada
119	28	êles gravitação	êles, plenamente, gravitação
119	29	a gravitação	neste sentido, a gravitação
142	27	ignais	iguais
144	14	*f*	f