Se o lado b não é dado: chamando x cada um dos outros eguaes, $x=\sqrt{\frac{a^3}{b}}$, a condição de ser minima a área total $\frac{2a^3}{b}+4a\sqrt{ab}$ dá $b=a$.

Logo, de todos os parallelipipedos rectangulos de egual volume, é o cubo o de minima superficie.

100. Se a equação é de fórma implicita, $f(x, y)=0$: derivando duas vezes, virão

$$\frac{df}{dx}+y'\frac{df}{dy}=0,\ \frac{d^2f}{dx^2}+2y'\frac{d^2f}{dxdy}+y''\frac{df}{dy}+y'^2\frac{d^2f}{dy^2}=0,$$

que a condição do minimo ou maximo, $y'=0$, reduz a

$$\frac{df}{dx}:\frac{df}{dy}=0,\ \frac{d^2f}{dx^2}+y''\frac{df}{dy}=0.$$

A primeira d'estas e a proposta darão os valores de x e y; e depois a segunda mostrará, pelo signal de y'', se esses valores correspondem ao maximo de y, se ao minimo.

Assim, se a proposta é a equação d'uma curva (Fig. 5): para $x=\mathrm{A}p$, serão y'' negativa, e a ordenada $y=p0$ maxima; para $x=\mathrm{A}p''$, serão y'' positiva, e a ordenada $y=p''0''$ minima. Mas, se, em vez d'uma equação entre x e y, forem m as equações entre ellas e mais $m-1$ variaveis, a eliminação das derivadas d'estas variaveis entre as differenciaes das m equações em ordem a x dará $\frac{dy}{dx}$, e depois as differencias de segunda ordem darão $\frac{d^2y}{dx^2}$.

E se a condição do maximo ou minimo se referir, não a uma variavel y, mas a uma funcção, $u=\mathrm{F}(x, y, z, \ldots)$, de m variaveis ligadas entre si por

$m-1$ equações, accrescentaremos a estas a equação $u-\mathrm{F}(x, y, z, \ldots)=0$; e acharemos, como fica dito, o maximo ou o minimo da variavel u.

Exemplos:

I. De $y^2-2mxy+x^2=a^2$ tiram-se $y'=\dfrac{my-x}{y-mx}$, $y''=\dfrac{2my'-y'^2-1}{y-mx}$; e eliminando entre $y'=0$, ou $my-x=0$, e a proposta, acha-se

$$x=\frac{\pm ma}{\sqrt{1-m^2}},\ y=\frac{\pm a}{\sqrt{1-m^2}},\ y''=-\frac{\mp 1}{a\sqrt{1-m^2}}.$$

Ha pois um maximo e um minimo.

II. A equação do *folium* de Descartes, $x^3-3axy+y^3=0$, dá $\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}=0$, $(y^2-ax)\,y''+2x=0$; e combinando $ay-x^2=0$ com a proposta, resultam os pontos $(x=a\sqrt[3]{2},\ y=a\sqrt[3]{4})$, $(x=0, y=0)$.

Para o primeiro d'estes pontos, é $y''=-\dfrac{2}{a}$; por conseguinte a ordenada será maxima ou minima, segundo for a positiva ou negativa.

Para o segundo, apparece y' debaixo da fórma $\dfrac{0}{0}$; mas as derivadas segunda e terceira da proposta darão $y'=0$, $y''=\dfrac{2}{3a}$; sendo por conseguinte a ordenada minima ou maxima, segundo for a positiva ou negativa.

101. Qando o desenvolvimento de $f(a\pm h)$ pelo theorema de Taylor for defeituoso nos termos a que é necessario recorrer para achar os maximos e minimos, procuraremos o verdadeiro desenvolvimento (n.° 60), e examinaremos se com effeito $f(a+h)$ e $f(a-h)$ são ambos maiores ou ambos menores que fa.

Exemplos:

I. $y = b + (x - a)^{\frac{5}{3}}$ dá $y' = \frac{5}{3}(x - a)^{\frac{2}{3}}$, $y'' = \frac{10}{9}(x - a)^{-\frac{1}{3}}$; e

como de $y' = 0$ resulta $x = a$, que torna y'' infinita, a fórmula de Taylor é deficiente. Mas, pondo $x = a \pm h$, vem $f(a \pm h) = b \pm h^{\frac{5}{3}}$; por onde se vê que não ha maximo nem minimo.

II. De $y = b + (x - a)^{\frac{4}{3}}$ tira-se $f(a \pm h) = b + h^{\frac{4}{3}}$; por conseguinte $x = a$ corresponde a um minimo.

III. Para $y = b - (x - a)^{\frac{4}{3}}$ achar-se-hia um maximo.

102 Funcções de duas variaveis. Seja $z = f(x, y)$.

Mudando x e y em $x \pm h$ e $y \pm k$, e desenvolvendo, resulta

$$Z = z \pm h\left(\frac{dz}{dx} + \frac{k}{h}\,\frac{dz}{dy}\right) + \frac{1}{2}h^2\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{k}{h}\,\frac{d^2z}{dxdy} + \frac{k^2}{h^2}\,\frac{d^2z}{dy^2}\right) + \ldots$$

Para que, entre limites muito pequenos de h e k, seja sempre $Z > z$, ou sempre $Z < z$, é necessario que o segundo termo seja nullo; e porque $\frac{k}{h}$ é arbitraria, esta condição exige as duas

$$\frac{dz}{dx} = 0,\ \frac{dz}{dy} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Quando as condições (1) se verificarem, a funcção correspondente z será maxima se for negativo o terceiro termo, e minima se for positivo. Mas, quando não se verificarem, não haverá maximo nem minimo.

Eliminando pois x e y entre as equações (1), cujas raizes são as que podem convir ao maximo ou ao minimo, é necessario que, substituindo estas raizes no polynomio $h^2\frac{d^2z}{dx^2} + 2hk\frac{d^2z}{dxdy} + k^2\frac{d^2z}{dy^2}$, o resultado da substituição tenha sempre o mesmo signal, quaesquer que sejam os valores e signaes que se attribuam a $\frac{k}{h}$. Ora a quantidade

$$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \frac{k^2}{A}\left[(A\frac{h}{k} + B)^2 + AC - B^2\right]$$

não conservará, para $\frac{k}{h}$ qualquer, o mesmo signal, que será o de A, senão quando forem A e C ambos positivos ou ambos negativos, e $AC - B^2 > 0$.

Portanto, se as tres derivadas da segunda ordem satisfizerem á condição

$$\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 > 0 \dots\dots\dots\dots\dots (2),$$

haverá maximo ou minimo, segundo forem $\frac{d^2z}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{dy^2}$ ambos negativos ou ambos positivos.

No caso de ser $B^2 = AC$, ainda o trinomio $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ será em geral positivo ou negativo, segundo o for A. Nesse caso o trinomio anniquilar-se-ha para $\frac{h}{k} = -\frac{B}{A}$; mas, se então este valor de $\frac{h}{k}$ anniquilar tambem os termos da terceira ordem, e der aos da quarta o signal de A, subsistirá a mesma regra, qualquer que seja o valor de $\frac{h}{k}$.

Quando as raizes das equações (1) tornarem tambem nullos os tres coefficientes differenciaes da segunda ordem, será necessario, para haver maximo ou minimo, que os da terceira ordem sejam egualmente nullos, e que os da quarta ordem dêem sempre o mesmo signal. E assim por diante.

103. Exemplo: Achar a recta de mais curta distancia entre duas rectas dadas.

Tomando uma das rectas dadas para eixo dos x, as equações da outra serão

$$z = ax + \alpha,\quad y = bx + \beta.$$

E chamando R a distancia de qualquer ponto da segunda a qualquer ponto da primeira correspondente á abscissa x', será

$$R^2 = (x - x')^2 + y^2 + z^2 = (x - x')^2 + (bx + \beta)^2 + (ax + \alpha)^2 = t;$$

da qual se tiram

$$\frac{dt}{dx} = 2\left[x - x' + b(bx + \beta) + a(ax + \alpha)\right],\quad \frac{dt}{dx'} = -2(x - x'),$$

que, egualando $\frac{dt}{dx}$ e $\frac{dt}{dx'}$ a zero, dão $x = x' = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2}$.

Por ser $x = x'$, a recta procurada é perpendicular ao eixo dos x; e como se podia tomar a outra recta dada para eixo dos x, a procurada tambem é perpendicular a ella, como já sabiamos (*).

(*) Pode tambem mostrar-se, sem recorrer á mudança d'eixos, que a minima distancia é perpendicular á segunda recta. Com effeito, ás equações d'esta recta pode dar-se a fórma $x = mz + p$, $y = nz + q$, sendo $m = \frac{1}{a}$, $n = \frac{b}{a}$; e as equações da minima distancia, que passa pelos pontos $\left(x' = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2},\ y' = 0,\ z' = 0\right)$

e $\left(x'' = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2},\ y'' = bx + \beta = \frac{a(a\beta - b\alpha)}{a^2 + b^2},\ z'' = -\frac{b(a\beta - b\alpha)}{a^2 + b^2}\right)$,

têm a fórma $x = m'z + p'$, $y = n'z + q'$, sendo $m' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'} = 0$, $n' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'} = -\frac{a}{b}$; por tanto é $nn' + 1 = 0$, condição de perpendicularidade das projecções sobre o plano dos yz; e por ser tambem $m' = 0$, a fórmula (*Geom. An.* n.º 178, eq. 12)

$$\cos A = \frac{1 + mm' + nn'}{\sqrt{(1 + m^2 + n^2)(1 + m'^2 + n'^2)}}$$

dá $\cos A = 0$.

Como a substituição d'estes valores de x e x' dá

$$\frac{d^2t}{dx^2}=2\,(1+a^2+b^2),\ \frac{d^2t}{dx'^2}=2,\ \frac{d^2t}{dxdx'}=-2,$$

dos quaes os primeiros são positivos, e que satisfazem á equação (2) por ser $4\,(a^2+b^2)>0$, é minima a distancia correspondente, $R=\dfrac{a\beta-b\alpha}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

104. Funcções de muitas variaveis. Discorrendo d'um modo similhante no caso de haver tres variaveis independentes, acha-se que devem ser nullos os tres coefficientes differenciaes da primeira ordem, e conservar sempre o mesmo signal a somma dos termos da segunda ordem, quaesquer que sejam as grandezas e os signaes das relações entre os augmentos das tres variaveis. E assim por diante (Vid. o *Calc.* de Navier, n.º 150).

A expressão, que deve conservar o mesmo signal, é

$$h^2\frac{d^2z}{dx^2}+2h\,\Sigma k_i\frac{d^2z}{dxdy_i}+2\,\Sigma k_i\,k_{i'}\,\frac{d^2z}{dy_i\,dy_{i'}}+\Sigma k_i^{\,2}\,\frac{d^2z}{dy_i^{\,2}},$$

na qual os sommatorios Σ se referem ás variaveis independentes $y_1, y_2, \ldots$ e aos augmentos respectivos $k_1,\ k_2, \ldots$

Dando a esta expressão a fórma $Ah^2+2hB+C$, vê-se, como no n.º 102, que deve verificar-se a condição

$$AC-B^2>0.$$

A funcção $AC-B^2$ é homogenea do segundo gráu, como era $Ah^2+2Bh+C$, relativamente aos augmentos; mas tem de menos a variavel h. Poderemos pois estabelecer a condição de ser ella positiva, como fizemos a respeito da primeira, dando-lhe a fórma $A_1\,k_1^{\,2}+2k_1\,B_1+C_1$; o que nos conduzirá a outra funcção homogenea com menos o augmento k_1. E assim por diante (*Calc.* de Serret, n.º 153).

Methodo das tangentes

105. Chamando: X, Y, as coordenadas correntes da tangente á curva plana BMM′ (Fig. 1) no ponto M; x, y, as coordenadas d'este ponto; e α o angulo que faz a mesma recta com o eixo das abscissas: a equação da tangente é

$$Y - y = \text{tang}\ \alpha.\ (X - x).$$

I. Sendo $y = fx$ a equação da curva, a sua derivada é $y' = f'x = \text{tang}\ \alpha$; principio em que se fundou a existencia das derivadas de todas as funcções d'uma variavel x, e todo o calculo differencial.

A equação da tangente é pois $\qquad Y - y = y'(X - x).$

II. E a equação da normal $\qquad (Y - y)\,y' + X - x = 0,$

por ser a normal perpendicular á tangente (*Geom. Anal.* n.º 31, 2.º).

III. Fazendo $Y = 0$ nas equações da tangente e da normal, resultam as abscissas AT e AN das intersecções d'aquellas rectas com o eixo dos x, isto é, as abscissas dos pés da tangente e da normal; por onde teremos os $x - X$ e $X - x$ correspondentes,

$$\text{Subt. TP} = \frac{y}{y'}, \quad \text{subnorm. PN} = yy'.$$

Quando estes valores sairem negativos, as linhas respectivas terão posições contrarias ás que suppõe a figura da qual agora se deduziram; mas bastará examinar se o signal — provém de y, ou se provém de y', para conhecer facilmente a situação d'ellas.

IV. Os triangulos PMT e PMN dão

$$\text{tang. MT} = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2}, \text{ norm. MN} = y\sqrt{1+y'^2}.$$

V. Applicando o raciocinio já empregado (*Geom. Anal.*, n.º 73) ao caso de ser qualquer o angulo θ das coordenadas, ver-se-ha que ficam as mesmas a equação da tangente e a expressão da subtangente.

Mas, por ser (*Geom. Anal.* n.º 31, not. eq. 7)

$$a' = -\frac{1+a\cos\theta}{a+\cos\theta} = -\frac{1+y'\cos\theta}{y'+\cos\theta},$$

a equação da normal é $\qquad Y - y = -\dfrac{1+y'\cos\theta}{y'+\cos\theta}(X-x),$

ou $\qquad y'[Y-y+(X-x)\cos\theta]+(Y-y)\cos\theta+X-x=0.$

VI. Se a equação da curva for implicita, $f(x, y)=0$, o que dá $y' = -\dfrac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$, a equação da tangente será

$$(Y-y)\frac{df}{dy}+(X-x)\frac{df}{dx}=0.$$

106. Exemplos:

I. Na parabola são $y^2=2px$, $yy'=p$, $\dfrac{y}{y'}=2x$, $\text{MN}=\sqrt{2px+p^2}$.

II. Na ellipse e na hyperbole, pondo norm. $=$ N e $c^2=a^2\mp b^2$, são

$$a^2y^2\pm b^2x^2=\pm a^2b^2,\ y'=\pm\frac{b^2x}{a^2y},\ \mathrm{N}=\frac{b\sqrt{\pm(a^4-c^2x^2)}}{a^2}\ (*).$$

III. A equação $y^m=a^{m-n}x^n$ dá $\dfrac{y}{y'}=\dfrac{mx}{n}$.

Por ser a parabola um caso particular d'estas curvas, a equação d'ellas se diz a geral das *parabolas*, quando m e n são positivos. A equação da *primeira parabola cubica* é $y^2=a^2x$; a da *segunda parabola cubica* é $y^3=ax^2$.

A equação $x^n\,y^m=a^{m+n}$, que se chama a geral das *hyperboles*, dá a mesma expressão da subtangente que a das parabolas, mas com signal contrario, $\dfrac{y}{y'}=-\dfrac{mx}{n}$.

IV. A equação do *folium*, $x^3-axy+y^3=0$,

dá $$\text{subt.}=\frac{y^3-axy}{ay-x^2},\ \text{etc.}$$

V. A equação da logarithmica, $y=a^x$, dá a subtangente $\dfrac{y}{y'}=\dfrac{1}{la}=$ *modulo* (*Alg. Sup.*, n.º 154).

(*) Chamando: δ, δ' os raios vectores d'um ponto M da ellipse; t o angulo que a tangente faz com um d'elles; e p a perpendicular abaixada do respectivo foco sobre ella: é (*Geom. Anal.*, n.^{os} 83, 51)

$$\cot t=\frac{cy}{b^2},\ \operatorname{sen} t=\frac{b^2}{\sqrt{b^4+c^2y^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2-c^2+c^2\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}}=\frac{b}{\sqrt{\delta\,\delta'}},$$

$$p=\delta\operatorname{sen} t=b\sqrt{\frac{\delta}{\delta'}},\ \mathrm{N}=\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-c^2x^2}=\frac{b}{a}\sqrt{\delta\delta'}.$$

VI. Sendo (Fig. 6) $AP = x$, $PM = y$, $MQ = z = \sqrt{2ry - y^2}$, e tomando o arc (sen $= z$) no circulo gerador MGD, cujo raio é r, a equação da cycloide AMF é

$$x = \text{arc}\,(\text{sen} = z) - z,$$

contando o arco desde D.

Derivando as expressões de x e z, o que dá

$$1 = \frac{rz'}{\sqrt{r^2 - z^2}} - z', \quad z' = \frac{(r-y)\,y'}{\sqrt{2ry - y^2}},$$

e eliminando z e z', resulta a derivada da cycloide

$$yy' = \sqrt{2ry - y^2}, \text{ ou } y' = \sqrt{\left(\frac{2r-y}{y}\right)}.$$

O valor da subnormal, $yy' = \sqrt{2ry - y^2} = z = MQ = TD$, mostra que a recta MD, tirada do ponto M para o ponto D de contacto do circulo gerador com o eixo AE, é a normal, e que a corda MD é a sua grandeza. E com effeito, da equação derivada tira-se o valor da normal $y\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{2ry} =$ corda MD.

A corda supplementar MG é a tangente. Portanto, se pelo ponto M tirarmos MN parallela ao eixo AE, depois a corda KF, e finalmente MG parallela a KF, será esta a direcção da tangente.

Se mudarmos a origem das coordenadas de A para o ponto mais alto F, fazendo $FS = u = \pi r - x$, $MS = t = 2r - y$, a equação da cycloide referida a estes novos eixos, e a sua derivada, serão

$$u = \text{arc}\,(\text{sen} = z) + z, \quad t' = \sqrt{\left(\frac{t}{2r - t}\right)},$$

contando o arco desde G.

107. As mesmas fórmulas podem servir para resolver muitos problemas relativos ás tangentes, taes como os de tiral-as por um ponto exterior, parallelamente a uma recta dada, etc. (Vej. *Geom. Anal.*, n.os 78 e 84).

Para determinar, por exemplo, o angulo β que faz a tangente MT (Fig. 7) com o raio vector AM tirado da origem para o ponto de contacto M (x, y): chamando θ e α os angulos do raio vector e da tangente com o eixo dos x, temos

$$\operatorname{tang}\theta=\frac{y}{x},\ \operatorname{tang}\alpha=y',\ \operatorname{tang}(\theta-\alpha)=\operatorname{tang}\beta=\frac{y-y'x}{x+y'y}.$$

Assim a equação do circulo $x^2+y^2=r^2$ dá $\operatorname{tang}\beta=\infty$; como devia dar.

108. Quando a curva BM (Fig. 7) está referida a coordenadas polares $AM=r$, $MAP=\theta$, as fórmulas precedentes não podem applicar-se immediatamente á sua equação, $r=f\theta$. É pois mister: ou transformar esta equação em x e y, por meio das relações $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, $x^2+y^2=r^2$; ou, inversamente, transformar em r e θ as expressões precedentes da tangente, da normal, etc., e applical-as depois á equação da curva.

Assim, tomando θ para variavel principal em logar de x, a transformação, que já se fez (n.° 49), dá

$$\operatorname{tang}\beta=-\frac{r}{r'}.$$

109. Nas coordenadas polares chama-se *subtangente* a parte AT que a tangente á curva intercepta na perpendicular ao raio vector AM. Nesta accepção, por dar $AT=r\operatorname{tang}\beta$ o triangulo TAM, é

$$\text{Subt. } AT=\pm\frac{r^2}{r'};$$

adoptando aquelle dos signaes $\pm$ que fizer a expressão positiva.

Exemplos. I. Na spiral d'Archimedes (Fig. 8) é (*Geom. Anal.* n.° 137)

$$r=\frac{a\theta}{2\pi},\ \frac{r^2}{r'}=\theta r,\ \frac{r}{r'}=\operatorname{tang}(\alpha-\theta)=\operatorname{tang}\beta=\theta.$$

Por onde se vê que nesta curva a subtangente é egual em grandeza ao arco de circulo, descripto com o raio vector $AM = r$, que subtende o angulo $MAx = \theta$. O angulo β cresce com o arco θ; e como $2n\pi + \theta$ sómente se torna infinito depois de infinitas revoluções, vê-se que o angulo recto é o limite de β.

II. Na spiral hyperbolica (Fig. 106 da *Geom. Anal.*) é

$$r = \frac{a}{\theta},\ \text{subt.} = a,\ -\frac{r}{r'} = \operatorname{tang}(\theta - \alpha) = \operatorname{tang}\beta = \theta.$$

Assim θ, β e $CD - MN$ (*Geom. Anal.*, n.º 137) tendem indefinidamente para zero quando r tende para o infinito; e por isso a direcção da tangente tende indefinidamente para coincidir com a de ED, e o ponto de contacto para estar em ED.

A subtangente é pois constante; a asymptota é o limite de todas as tangentes; e o angulo do raio vector com a tangente é agudo, e cresce á medida que θ augmenta, tendo por limite o angulo recto na origem em que é $2\pi n + \theta$ infinito.

III. Na spiral logarithmica (*Geom. Anal.*, n.º 137) temos

$$r = a^{\theta},\ \operatorname{tang}(\alpha - \theta) = \operatorname{tang}\beta = \frac{1}{la},\ \text{subt.} = \frac{r}{la}.$$

Portanto, a curva corta todos os seus raios vectores debaixo do mesmo angulo β, que é de 45° quando a é a base dos logarithmos neperianos. A subtangente cresce proporcionalmente ao raio vector.

Nas equações d'estas tres curvas, quando θ passar de 2π, deverá substituir-se por elle $2n\pi + \theta$, como fizemos.

Rectificações e quadraturas

110. RECTIFICAÇÕES. Seja $$y = fx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

a equação d'uma curva BMM' (Fig. 1); e BM $= s$ um arco d'ella comprehendido entre os dois pontos B e M (x, y).

Supposto fixo o ponto B, a grandeza de s variará com a posição do ponto M, e será uma funcção $s = \mathrm{F}x$ da sua abscissa.

Dando a x um augmento PP' $= h$, tal que o arco MM' volte sempre a concavidade para o mesmo lado, os augmentos M'Q $= k$ de y, e MM' $= l$ de s serão

$$k = f(x+h) - fx = y'h + \frac{1}{2} y''h^2 + \ldots, \; l = \mathrm{F}(x+h) - \mathrm{F}x = s'h + \frac{1}{2} s''h^2 + \ldots,$$

$$\text{corda MM}' = \sqrt{h^2 + k^2} = h\sqrt{1 + y'^2 + y'y''h + \ldots}$$

E como são $\mathrm{QH} = y'h$, $\mathrm{MH} = h\sqrt{1 + y'^2}$, $\mathrm{M'H} = \mathrm{QH} - k = -\frac{1}{2} y''h^2 - \ldots$,

teremos $$\frac{\text{corda MM}'}{\mathrm{MH} + \mathrm{M'H}} = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + y'y''h + \ldots\ldots}}{\sqrt{1 + y'^2 - \frac{1}{2} y''h - \ldots}}.$$

Porque o segundo membro d'esta equação se approxima indefinidamente da unidade ao passo que h decresce, o seu limite é 1. E porque o arco

MM′ fica sempre comprehendido entre a corda MM e a linha quebrada MH + M′H, tambem é 1 o limite da razão entre a corda e o arco,

$$1 = \lim. \frac{\text{corda MM}'}{\text{arco MM}'} = \lim. \frac{\sqrt{1 + y'^2 + y'y''h + \ldots}}{\sqrt{s' + \frac{1}{2}s''h + \ldots\ldots}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{s'}.$$

Assim é $$s' = \sqrt{1 + y'^2},\ \text{ou}\ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}\ldots\ldots\ldots(2);$$

ou, traduzindo em coordenadas polares,

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)'.$$

Estas fórmulas servem para rectificar os arcos de curvas planas. Substituindo em (2) em logar de y' o seu valor $f'x$ tirado de (1), forma-se a derivada do arco, $s' = Fx$; e d'esta se reverterá para a sua primitiva, $s = Fx$, pelas regras que hão de ensinar-se no *Calculo integral*.

Por exemplo, da equação do circulo, $x^2 + y^2 = r^2$, tiram-se

$$yy' + x = 0,\ s' = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \pm\frac{r}{y} = \pm\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

derivada s' do arco de circulo s expressa no seu seno ou no seu coseno.

111. Por meio da expressão de s', as expressões de $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha$, e as fórmulas do n.º 105 podem tomar as fórmas mais simples,

$$\operatorname{tang}\alpha = y' = \frac{dy}{dx},\ \cos\alpha = \frac{1}{s'} = \frac{dx}{ds},\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{y'}{s'} = \frac{dy}{ds},$$

$$\text{tangente} = \frac{ys'}{y'} = y\frac{ds}{dy},\ \text{normal} = ys' = y\frac{ds}{dx}.$$

112. Quadraturas. Seja $t = \varphi x$ a área BCPM comprehendida entre as ordenadas dos pontos B e M, o eixo das abscissas e a curva. Mudando x em $x+h$, os augmentos correspondentes, k de y e i de t, serão

$$k = y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \ldots,\quad i = t'h + \frac{1}{2}t''h^2 + \ldots$$

E como a razão $\frac{y}{y+k}$ dos rectangulos $\mathrm{MPP'Q} = yh$, $\mathrm{DPP'M'} = (y+k)h$, tem por limite 1, é 1 o limite da razão $\frac{\mathrm{MPP'Q}}{\mathrm{MPP'M'}} = \frac{y}{t' + \frac{1}{2}t''h + \ldots}$;

isto é, $$t' = y, \text{ ou } dt = ydx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Portanto, para ter a área t, substituir-se-ha em logar de y o seu valor tirado de (1), e reverter-se-ha da equação derivada $t' = fx$ ou $dy = fxdx$, para a sua primitiva.

Se o angulo das coordenadas for α, será $t' = y \operatorname{sen} \alpha$.

113. A área $\mathrm{MAK} = \sigma$ (Fig. 7), comprehendida entre o raio vector fixo AK e o variavel AM, é

$$\sigma = \mathrm{ABMK} - (\mathrm{ABMP} - \mathrm{AMP}) = \mathrm{ABMK} - t + \frac{1}{2}xy.$$

Se, para tomar a derivada de σ, fizermos variar o ponto M, ficará ABMK constante, por não mudarem os pontos B e K; e teremos

$$\sigma' = -t' + \frac{xy'+y}{2} = \frac{xy'-y}{2},\text{ ou } d\sigma = \frac{xdy - ydx}{2},$$

ou, em coordenadas polares,

$$d\sigma = \frac{1}{2}r^2 d\theta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)'.$$

114. As fórmula $(2)'$ e $(4)'$, tambem se podem achar directamente.

Chamando $\Delta\theta$ o augmento de θ, e Δs e Δr os correspondentes de s e r, é

$$\frac{\text{corda MM}'}{\text{arco MM}'} = \frac{\sqrt{r^2 + (r+\Delta r)^2 - 2r\,(r+\Delta r)\cos\Delta\theta}}{s'\Delta\theta + \frac{1}{2}s''\Delta\theta^2 + \ldots\ldots} = \frac{\sqrt{\Delta r^2 + r\,(r+\Delta r)\,\Delta\theta^2 - \ldots}}{s'\Delta\theta + \frac{1}{2}s''\Delta\theta^2 + \ldots\ldots},$$

ou, passando ao limite, $$1 = \frac{\sqrt{r'^2 + r^2}}{s'}.$$

A superficie está comprehendida entre os sectores de circulo $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ e $\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta$, cuja razão $\left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)^2$ tem 1 por limite. Portanto, é tambem 1 o limite de

$$\frac{\text{superf.}}{\text{sect. circ.}} = \frac{\sigma'\Delta\theta + \frac{1}{2}\sigma''\Delta\theta^2 + \ldots}{\frac{1}{2}r^2\Delta\theta}, \text{ isto é, } 1 = \frac{\sigma'}{\frac{1}{2}r^2}.$$

(R. G. Osorio, *Instituto* de Coimbra, t. 3.º, pag. 323.)

Das osculações

115. Sejam $$y = fx,\ Y = Fx,$$

as equações de duas curvas planas.

Para seguir o curso d'estas curvas, mudemos x em $x+h$ nas expressões de y e Y: as ordenadas correspondentes serão

$$y + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \ldots,\ Y + Y'h + \frac{1}{2}Y''h^2 + \ldots.$$

Se as curvas se cortam no ponto correspondente á abscissa X, é $y = Y$ para $x = X$; e a distancia dos pontos d'ellas correspondentes á abscissa $X+h$ é

$$\delta = (y' - Y')h + \frac{1}{2}(y'' - Y'')h^2 + \ldots$$

Por conseguinte o gráu de approximação das duas curvas depende da pequenez de δ em uma curta e determinada extensão de h.

Se para $x = X$ não é sómente $y = Y$, mas ainda $y' = Y'$, a distancia dos pontos das duas curvas correspondentes á abscissa $X+h$ é

$$\delta = \frac{1}{2}(y'' - Y'')h^2 + \frac{1}{6}(y''' - Y''')h^3 + \ldots.$$

Então as curvas, nas visinhanças do ponto commum, approximam-se mais uma da outra do que se approximaria uma terceira curva, que passasse pelo mesmo ponto, mas que não satisfizesse á condição de serem eguaes as derivadas da primeira ordem. Com effeito a distancia entre os pontos d'esta terceira curva, cuja equação seja $\gamma = \varphi x$, e da primeira, correspondentes á mesma abscissa $X + h$, será

$$\Delta = (\gamma' - y')\, h + \frac{1}{2} (\gamma'' - y'')\, h^2 + \ldots;$$

na qual poderá tomar-se h tão pequeno, que seja $\Delta > \delta$ (n.° 62), tendo esta deseguldade logar não só para esse valor senão tambem para os outros menores que elle: por conseguinte, em toda a extensão de h, d'uma e d'outra parte do ponto commum, a curva, cuja equação é $Y = Fx$, approxima-se mais de $y = fx$ do que a terceira $\gamma = \varphi x$.

Se, além de $y = Y$ e $y' = Y'$, for tambem $y'' = Y''$, ver-se-ha que as duas curvas se approximam uma da outra, nos pontos visinhos da sua intersecção, mais do que qualquer outra que não satisfaça ás mesmas condições. E assim por diante.

116. Quando duas linhas satisfazem sómente ás condições $y = Y$, $y' = Y'$, para a mesma abscissa $x = X$, diz-se que entre ellas ha um *contacto de primeira ordem*, ou que são tangentes uma á outra. Quando satisfazem ás condições $y = Y$, $y' = Y'$, $y'' = Y''$, ha um *contacto de segunda ordem;* e assim por diante. E fica demonstrado que, se duas curvas têm um contacto de certa ordem, approximam-se uma da outra, nas visinhanças do ponto commum, mais do que se approximaria qualquer outra que só tivesse com ellas um contacto de ordem inferior.

D'onde resulta que, se as equações de duas curvas, $y = fx$, $Y = Fx$, tiverem $n + 1$ constantes arbitrarias, poderemos dispôr d'estas constantes para tornar eguaes as ordenadas correspondentes a um dado ponto e as suas n primeiras derivadas; ficando assim determinadas a situação e as dimensões das curvas de modo que ellas tenham, no ponto de que se tracta, um contacto da ordem n.

117. TANGENTE. Appliquemos estes principios á linha recta.

Seja a equação d'uma curva $\qquad y = fx.$

Para determinar uma recta, $Y = aX + b$, que tenha com ella um contacto da primeira ordem no ponto cuja abscissa é x_1, formaremos as equações $y_1 = ax_1 + b$, $y' = a$, por meio das quaes, eliminando os parametros, resulta a equação do n.° 105 da recta procurada,

$$y_1 - Y = y'(x_1 - X).$$

Como os parametros se determinaram todos pelas condições propostas, este contacto é o mais intimo que se pode estabelecer entre a curva e uma recta. Por onde se vê que a tangente tem a propriedade de não passar, pelo ponto de contacto, entre ella e a curva nenhuma outra recta.

118. Circulo osculador. Raciocinemos d'um modo similhante a respeito do circulo osculador.

Das equações da curva proposta e d'este circulo,

$$y = fx, \quad (X - b)^2 + (X - a)^2 = R^2,$$

na segunda das quaes a e b designam as coordenadas do centro e R o raio, tiram-se as derivadas

$$y' = f'x, \; y'' = f''x, \; (Y - b)Y' + (X - a) = 0, \; (Y - b)Y'' + Y'^2 + 1 = 0.$$

Imprimindo pois nestas as tres condições $y = Y$, $y' = Y'$, $y'' = Y''$, resultam

$$(y - b)^2 + (x - a)^2 = R^2, \; (y - b)y' + x - a = 0, \; (y - b)y'' + y'^2 + 1 = 0 \ldots (1).$$

As duas primeiras das equações (1) pertencem ao contacto de primeira ordem, sendo a segunda a equação da normal, entre as coordenadas correntes a e b: por conseguinte ha uma infinidade de circulos, que tocam a curva, e cujos centros estão todos na normal. Mas um d'esses circulos tem com a curva o contacto mais intimo: é o que satisfaz tambem á terceira equação (1).

Vê-se com effeito que, d'entre os circulos descriptos com differentes raios, tomados sobre a normal a partir do ponto M d'uma curva, uns são exteriores, outros interiores, á curva, e que na passagem de interiores para exteriores deve haver um mais proximo d'ella que os outros.

As equações (1) dão as coordenadas do centro do circulo osculador e o raio:

$$\left.\begin{aligned} a&=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}=x-\frac{y's'^2}{y''},\quad b=y+\frac{1+y'^2}{y''}=y+\frac{s'^2}{y''},\\ R&=\pm\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\pm\frac{s'^3}{y''}.\end{aligned}\right\}\ldots(2).$$

Para que R seja sempre positivo, como deve ser, toma-se o signal $\pm$ segundo é y'' positivo ou negativo, isto é, segundo volta a curva a convexidade ou a concavidade para o eixo dos x. Em quanto a a e b, é facil ver, pela combinação dos signaes de y' e y'', e pelos signaes das differenças correspondentes $x-a$ e $y-b$, que o centro está sempre collocado da parte da concavidade.

119. Para mudar de variavel independente nas expressões de a, b e R, generalisaremos esta variavel conforme o que se disse nos n.os 46 e 47, o que dará

$$\left.\begin{aligned} a&=x-\frac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}=x-\frac{s'^2y'}{x'y''-y'x''},\\ b&=y+\frac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}=y+\frac{s'^2x'}{x'y''-y'x''},\\ R&=\pm\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'-y'x''}=\pm\frac{s'^3}{x'y''-y'x''}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(2)';$$

e depois tomaremos como independente a variavel que quizermos.

Querendo, por exemplo, tomar o arco s por variavel principal, ou fazer $x'^2+y'^2=s'^2=1$, acharemos

$$\left.\begin{aligned} a&=x+\frac{x'y'}{y''}=x-\frac{y'^2}{x''},\quad b=y+\frac{x'^2}{y''}=y-\frac{x'y'}{x''},\\ R&=\pm\frac{x'}{y''}=\mp\frac{y'}{x''}.\end{aligned}\right\}\ldots(2)''.$$

120. Se as coordenadas são polares, $AM = r$, $MAP = \theta$, (Fig. 7), exprimiremos x e y em funcção d'ellas; e depois substituiremos estas expressões, e as suas derivadas, nas de a, b, R.

Assim, tomando θ por variavel principal, teremos (n.º 49)

$$\left.\begin{aligned} a &= r\cos\theta - \frac{(r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta)(r'^2+r^2)}{r^2+2r'^2-rr''}, \\ b &= r\operatorname{sen}\theta + \frac{(r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)(r'^2+r^2)}{r^2+2r'^2-rr''}, \\ R &= \frac{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''} = \frac{s'^3}{r^2+2r'^2-rr''} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)'''.$$

121. CURVATURA; ANGULO DE CONTINGENCIA. Sejam α, α', os angulos que fazem com o eixo das abscissas as tangentes nos pontos (x, y), $(x+\Delta x, y+\Delta y)$, e $\alpha' - \alpha = \Delta\alpha$.

Quanto mais for variando a direcção da tangente a partir do ponto $M(x, y)$, tanto maior será a curvatura neste ponto. O limite para o qual tende a relação $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ quando Δx tende para zero, e que vamos procurar, é proprio para avaliar esta curvatura.

De $\qquad \operatorname{tang}\alpha = y', \ \operatorname{tang}\alpha' = y' + y''\Delta x + \frac{1}{2}y'''\Delta x^2 + \ldots.$

tira-se $\qquad \operatorname{tang}\Delta\alpha = \dfrac{y''\Delta x + \frac{1}{2}y'''\Delta x^2 + \ldots\ldots}{1 + y'^2 + y'y''\Delta x + \ldots\ldots},$

e portanto $\qquad \dfrac{\operatorname{tang}\Delta\alpha}{\text{corda}} = \dfrac{y'' + \frac{1}{2}y'''\Delta x + \ldots\ldots}{(1+y'^2+y'y''\Delta x+\ldots)\sqrt{1+y'^2+y'y''\Delta x+\ldots}}.$

Mas é $\lim. \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim. \frac{\Delta\alpha}{\text{tang}\,\Delta\alpha} \times \lim. \frac{\text{corda}}{\Delta s} \times \lim. \frac{\text{tang}\,\Delta\alpha}{\text{corda}}$;

cujos dois primeiros factores têm por limite a unidade: logo a medida da curvatura é

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{R},$$

inversamente proporcional ao raio de curvatura.

Por isso tambem se chama *raio de curvatura* o raio R do circulo osculador; e *centro de curvatura* o centro d'este circulo.

Chama-se *angulo de contingencia* o angulo $d\alpha = \frac{ds}{R}$ . . . . . (3).

122. Evoluta. Para cada ponto (x, y) ha um centro de curvatura (a, b); e a reunião de todos estes centros fórma a curva que se chama *evoluta*.

A equação, $b = \varphi a$, da evoluta, a respeito da qual a proposta é a *evolvente*, obter-se-ia eliminando x e y entre as duas primeiras equações (1) e a equação da evolvente, $y = fx$; isto é, substituindo naquellas as expressões de y, y', y'', tiradas d'esta em funcção de x, e eliminando depois x.

Differenciando totalmente a segunda das equações (1), vem

$$(y-b)\,y'' + y'^2 - a' + 1 = 0,$$

que a terceira reduz a $b'y' + a' = 0$;

e como a tangente trigonometrica do angulo que a tangente á evoluta faz com o eixo dos x, seria $\varphi' a' = \frac{b'}{a'} = \frac{db}{da}$, vê-se que é $y'\varphi' a + 1 = 0$, isto é, que *a tangente á evoluta é normal á evolvente,* ou o raio de curvatura tangente á evoluta.

123. Derivando totalmente a primeira das equações (1), e attendendo á segunda, vem

$$-(y-b)b'-(x-a)x'=RR'.$$

Depois, substituindo nesta equação, em logar de $x-a$ e $y-b$, os seus valores tirados das duas primeiras equações (1), e $-\frac{a'}{b'}$ em logar de y', vem

$$\frac{a'^2R+b'^2R}{\sqrt{a'^2+b'^2}}=-RR', \text{ ou } R'=\sqrt{a'^2+b'^2}.$$

Se tomarmos a por variavel principal, será $R'=\sqrt{1+b'^2}$ a derivada do raio de curvatura em ordem a a; e como a derivada do arco s da evoluta em ordem a a é $s'=\sqrt{1+b'^2}$, será $R'=s'$; equação, á qual satisfaz evidentemente a primitiva $R=s+A$, sendo A uma constante arbitraria. Para outro arco s_1 da evoluta, cuja origem seja a mesma que a do primeiro, será tambem $R_1=s_1+A$; e por conseguinte teremos

$$s-s_1=R-R_1, \quad \text{ou} \quad R=R_1+s-s_1.$$

D'onde resulta que, se O e D (Fig. 9) são os centros de curvatura dos pontos B e M, o arco OD da evoluta é egual á differença dos raios de curvatura BO e MD da evolvente. Portanto se, depois de curvar um fio sobre a evoluta IOD, o formos desenvolvendo de sobre ella, a sua extremidade B descreverá a evolvente BM: propriedade esta, que deu origem á denominação d'aquellas curvas. E como o valor inicial $AI=A$ de R é arbitrario, vê-se que a cada evoluta IOD correspondem infinitas evolventes, que seriam descriptas pelos pontos do fio AI.

124. Exemplos: I. A equação da parabola $y^2=2px$,

chamando N a grandeza da normal (n.° 105, IV), dá

$$y'=\frac{p}{y},\ y''=-\frac{p^2}{y^3},\ s'=\sqrt{\left(\frac{2x+p}{2x}\right)},\ R=\frac{(2px+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}=\frac{N^3}{p^2}.$$

Logo: *o raio de curvatura da parabola é egual ao cubo da normal, dividido pelo quadrado do semiparametro.*

No vertice A (Fig. 9), onde $x=0$, é $R=p$; isto é, a distancia AI do vertice ao centro de curvatura correspondente é dupla da distancia focal. Depois, quanto mais x cresce, mais diminue a curvatura, e indefinidamente.

Eliminando x e y entre a equação da curva e as expressões de a e b, $y^2=2px$, $a=3x+p$, $b=-\frac{2xy}{p}$, e fazendo $a-p=a'$, vem a equação da evoluta

$$b^2=\frac{8}{27p}(a-p)^3=\frac{8}{27p}a'^3,$$

que é a equação da segunda parabola cubica referida á origem I $(p, 0)$.

II. A equação da ellipse $\qquad m^2y^2+n^2x^2=m^2n^2,$

chamando c a distancia $\sqrt{m^2-n^2}$ do foco ao centro, dá

$$y'=-\frac{n^2x}{m^2y},\ y''=-\frac{n^4}{m^2y^3},\ 1+y'^2=\frac{n^2}{m^4}\cdot\frac{m^4-c^2x^2}{y^2};$$

e portanto $\qquad a=\frac{c^2x^3}{m^4},\ b=-\frac{c^2y^3}{n^4},\ R=-\frac{(m^4-c^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{m^4n}.$

Comparando o valor de R com os da normal N e do parametro $2p$, acha-se

$$R=\frac{m^2N^3}{n^4}=\frac{N^3}{p^2};$$

theorema identico com o que tem logar na parabola (*).

(*) Sejam δ, δ', os raios vectores d'um ponto. Por ser (n.° 106 *) $N=\frac{n}{m}\sqrt{\delta\delta'}$, o valor de R pode tomar a fórma

$$R=\frac{(\delta\delta')^{\frac{3}{2}}}{mn}.$$

A expressão de R mostra que nas extremidades dos eixos (Fig. 36) é R maximo ou minimo, e por isso a curvatura minima ou maxima. Assim:

nos vertices O, O' são curv. max., $a = \pm \frac{c^2}{m}$, $b = 0$, $R = \frac{n^2}{m}$;

nos vertices D, D' são curv. min., $a = 0$, $b = \pm \frac{c^2}{n}$, $R = \frac{m^2}{n}$.

Os pontos h, h', i, i' assim determinados são os centros de curvatura das extremidades dos eixos.

Substituindo na equação da ellipse os valores de x e y tirados das expressões de a e b, e chamando q e p os valores de a e b, $Ch = \frac{c^2}{m}$ e $Ci = \frac{c^2}{n}$, correspondentes ás extremidades dos eixos, teremos a equação da evoluta:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{b^2n^2}{c^4}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{a^2m^2}{c^4}\right)} = 1, \text{ ou } \sqrt[3]{\left(\frac{b}{p}\right)^2} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{q}\right)^2} = 1.$$

Adiante veremos que a curva tem quatro pontos de reversão h, h', i, i'; e que se compõem de quatro arcos que voltam as convexidades para os eixos, a respeito dos quaes ella é symetrica. Estes quatro arcos são marcados com pontos na figura 36.

Já vimos que um arco de evoluta é egual á differença dos raios de curvatura da evolvente que partem das extremidades do mesmo arco; e como na parabola e na ellipse estes raios são funcções algebricas das abscissas, o arco é rectificavel. O mesmo acontece a respeito de todas as curvas algebricas.

III. Para a hyperbole basta mudar n em $n\sqrt{-1}$ nos resultados que se acharam para a ellipse.

IV. A cycloide (Fig. 6) dá (pag. 108)

$$y' = \sqrt{\left(\frac{2r-y}{y}\right)}, \; y'' = -\frac{r}{y^2}, \; s'^2 = \frac{2r}{y}, \; R = 2\sqrt{ry} = 2N.$$

Sendo pois o raio de curvatura o dobro da normal, se produzirmos MD e tomarmos $DM' = MD$, acharemos um centro de curvatura M' da cycloide proposta, ou um ponto M' da sua evoluta.

Para ter a equação da evoluta, tiraremos das expressões de a e b, que são $a = x + 2\sqrt{2ry - y^2}$ e $b = -y$, os valores de x e y, e substituil-os-hemos na equação da cycloide, ou antes na sua derivada, por ser transcendente aquella equação; isto é, eliminaremos y e y' entre as tres equações

$$y' = \sqrt{\left(\frac{2r - y}{y}\right)},\ a' = \frac{2r - y}{y},\ b' = -y',$$

o que dá $$\frac{b'}{a'} = -\sqrt{\left(\frac{y}{2r - y}\right)} = -\sqrt{\left(\frac{-b}{2r + b}\right)}.$$

E, se mudarmos a em $\pi r - a_1$ e b em $b_1 - 2r$, para transportar a origem a $L(\pi r - 2r)$, teremos

$$\frac{b'_1}{a'_1} = \sqrt{\left(\frac{2r - b_1}{b_1}\right)};$$

equação d'uma cycloide egual. Por onde se vê que a evoluta LA da cycloide é outra cycloide egual a ella; sendo o arco LA identico a FA', e A o vertice.

V. Na spiral logarithmica (Fig. 8) é $r = a^{\theta}$;

o que dá $$R = \sqrt{1 + l^2 a} = r \sec \eta = \frac{r}{\cos \eta};$$

sendo η o angulo do raio vector com a normal (pag. 110)

$$AMN = ATM = \text{ang. } (\text{tang} = la).$$

Como a projecção do raio de curvatura MN sobre o raio vector é

$R \cos \eta = r$, a perpendicular AN, levantada no pólo A sobre o raio vector, encontra a normal no centro de curvatura.

Portanto AM é a subtangente da evoluta, AN é o seu raio vector, e AM faz com a tangente da curva MI o mesmo angulo β que AN faz com a da evoluta; sendo assim a evoluta a mesma evolvente collocada em sentido inverso.

Do que fica exposto facilmente se vê como se applicaria a theoria das osculações a curvas de ordem mais elevada (Vej. *Fonct. anal.*, pag. **117**).

125. A differença entre as ordenadas de duas curvas, correspondentes á mesma abscissa $x+h$, tem a fórma $\delta = Mh^m + Nh^{m+1} + \ldots$. E como se pode tomar h tão pequeno que o signal d'esta expressão seja o do primeiro termo Mh^m, a curva fica acima ou abaixo da sua osculatriz, junto do ponto de contacto, segundo é Mh^m positivo ou negativo.

Quando m é impar, o signal de Mh^m muda com o de h; e então a osculatriz corta a curva no ponto commum a ambas. Por onde se vê que: ***uma curva é sempre cortada pelo seu circulo osculador, e só tocada pela tangente.***

Das asymptotas

126. Quando $f(x+h)$ não pode desenvolver-se pela fórmula de Taylor, a curva $y=fx$ sómente é osculatriz de $y=Fx$ quando o desenvolvimento de $F(x+h)$ procede segundo a mesma lei que o de $f(x+h)$, pelo menos nos primeiros termos que se devem egualar entre si para estabelecer a osculação (Vej. *Fonct. anal.*, n.º 120).

Supponhamos que, desenvolvendo as funcções propostas

$$y=fx, \quad y=Fx,$$

segundo as potencias descendentes de x (n.º 83), se obtem expressões da fórma

$$Ax^a+Bx^{a-b}+\ldots Mx^{-m}+Nx^{-m-n}+\ldots.$$

Se, antes de um termo Mx^{-m} de expoente negativo, forem todos os expoentes d'estes desenvolvimentos em uma das series os mesmos que na outra, e podérmos dispor d'um numero sufficiente de constantes para as sujeitar ás condições de egualdade dos coefficientes respectivos, a differença $Mx^{-m}+Nx^{-m-n}+\ldots$, que ficará subsistindo entre duas quaesquer ordenadas correspondentes d'estas curvas, approximar-se-ha indefinidamente de zero ao passo que x for crescendo, sem nunca se anniquilar. Logo as curvas tambem se approximarão indefinidamente uma da outra, sem chegarem a tocar-se; e haverá um termo, passado o qual outra curva, que não satisfaça ás mesmas condições, não poderá approximar-se de nenhuma d'ellas tanto quanto ellas se approximam entre si. As duas curvas serão pois *asymptotas* uma da outra.

Por onde se vê que, se uma curva se extende indefinidamente, pode ter uma infinidade de asymptotas; as quaes se acharão desenvolvendo $y=fx$ em serie descendente das potencias de x, e tomando para ordenada da linha pedida a somma dos primeiros termos do desenvolvimento que precedam um em que x tenha expoente negativo; ou, mais geralmente, compondo uma funcção de modo que o seu desenvolvimento comece por esses primeiros termos.

127. Sejam $$y = fx,\ y = F(x, y', x'),$$

as equações da curva proposta e d'uma osculatriz d'ella de certa ordem no ponto (x', y'). Se, substituindo na equação da osculatriz a expressão de y' em x' ou de x' em y' tirada da proposta, e depois fazendo $x' = \infty$ ou $y' = \infty$, resultar uma equação $y = \varphi x$, será esta equação a das asymptotas d'aquella ordem.

Querendo, por exemplo, as asymptotas rectilineas, substituiremos na equação da tangente, $y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x')$, os valores de y' e $\frac{dy'}{dx'}$ em x', tirados de $y' = fx'$, e faremos $x' = \infty$, o que dará as asymptotas não parallelas ao eixo dos y; e substituiremos os valores de x' e $\frac{dx'}{dy'}$ tirados da mesma proposta, e faremos $y' = \infty$, o que dará as asymptotas não parallelas ao eixo dos x.

128. Mas, se houver difficuldade em resolver a equação da curva em ordem a uma das coordenadas, poderemos achar as asymptotas rectilineas empregando o methodo indicado na nota ao n.º 87 da *Geom. Anal.*

Demos á proposta a fórma $x^m F\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0.$

Fazendo $\frac{y}{x} = c_1$ e $x = \infty$, virá $F(c_1) = 0$. Depois, substituindo $c_1 x + l_1$ em logar de y, e attendendo a $F(c_1) = 0$, teremos

$$x^{m-1}[l_1 F'(c_1) + f(c_1)] + x^{m-2}\left[\frac{1}{2} l_1^2 F''(c_1) + l_1 f'(c_1) + \varphi(c_1)\right] + \ldots = 0;$$

que, para $x = \infty$, dá $l_1 F'(c_1) + f(c_1) = 0$; ou, no caso de sairem $F'(c_1)$ e $f(c_1)$ nullos, $\frac{1}{2} l_1^2 F''(c_1) + l_1 f'(c_1) + \varphi(c_1) = 0$; e assim por diante.

Portanto determinam os parametros c_1 e l_1 das asymptotas não parallelas aos y as equações:

$$F(c_1) = 0, \quad l_1 F'(c_1) + f(c_1) = 0;$$

ou, no caso de sairem $F'(c_1)$ e $f(c_1)$ nullos, as equações:

$$F(c_1)=0, \quad \frac{1}{2}l_1^2 F''(c_1)+l_1 f'(c_1)+\varphi(c_1)=0;$$

e assim por diante.

Similhantemente se discorrerá a respeito das asymptotas não parallelas aos x, dando á proposta a fórma

$$y^m F\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-1}f\left(\frac{x}{y}\right)+y^{m-2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right)+\ldots=0.$$

Exemplos: I. A equação $\qquad y=\dfrac{k}{\sqrt{a^2-x^2}}$

pertence a uma curva que se compõe de quatro ramos symetricos em relação ao eixo dos x, e cuja figura é facil conhecer.

1.° Processo. Desenvolvendo em ordem ás potencias de x, ou em ordem ás de y, vem

$$y=kx^{-1}+\ldots, \quad x=a+\frac{k^2}{2a}y^{-2}\ldots;$$

logo as rectas, que têm por equações $y=0$, $x=a$, são asymptotas. A hyperbole que tem por asymptotas os eixos dos x e dos y, e cuja potencia é k, tambem é asymptota da curva proposta, e mais proxima d'ella do que as rectilineas.

2.° Processo. Substituindo em $y-y'=\dfrac{dy'}{dx'}(x-x')$ as expressões, tiradas da proposta,

$$y'=\frac{k}{(x'^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad dy'=-\frac{kx'}{(x'^2-a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e fazendo $x'=\infty$, achariamos $y=0$.

Substituindo em $x - x' = \frac{dx'}{dy'}(y - y')$ as expressões, tiradas da proposta,

$$x' = \sqrt{a^2 + \frac{k^2}{y'^2}},\ \frac{dx'}{dy'} = -\frac{k^2}{y'^3\sqrt{a^2 + \frac{k^2}{y'^2}}},$$

e fazendo $y' = \infty$, achariamos $x = a$.

Tudo como achamos pelo primeiro processo.

II Seja (Fig. 10) a equação do *folium* de Descartes $y^3 - 3axy + x^3 = 0$.

1.° Processo. Pondo $y = zx$, $x = \frac{1}{t}$, e desenvolvendo n.° 84, vem

$$y = -x - a + \frac{1}{3}a^3x^{-2} - \frac{1}{3}a^4x^{-3}\ldots.$$

Portanto a recta, $y = -x - a$, é uma asymptota, que se construe tomando $AB = AC = a$, e tirando BC.

3.° Processo. Dando á proposta a fórma

$$x^3\left(\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 1\right) - 3ax^2\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

temos $\quad F(c_1) = c_1^3 + 1,\ F'(c_1) = 3c_1^2,\ f(c_1) = -3ac_1;$

por conseguinte são $\quad c_1 = -1,\ l_1 = -\frac{f(c_1)}{F'(c_1)} = -a,$

e a equação da asymptota é $\quad y = -x - a.$

III. Finalmente seja $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0.$

Q

Pondo $p=\sqrt{1\pm\sqrt{2}}$, vem

$$y=\pm px\pm\frac{a(\pm 3\sqrt{2}-4)}{8p}+\mathrm{A}x^{-1}+\ldots.$$

Usando pois dos valores reaes de p, e construindo as rectas GF e GH (Fig. 11), que têm por equações

$$y=\pm px\pm\frac{a(3\sqrt{2}-4)}{8p},$$

acharemos as asymptotas rectilineas da curva proposta.

O 3.º processo daria, mais facilmente,

$$c_1^4-2c_1^2-1=0,\ l_1=\frac{5a-2ac_1^2}{4c_1^3-4c_1},$$

isto é, $c_1=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{2}}=\pm p,\ l_1=\pm\dfrac{a(\pm 3\sqrt{2}-4)}{8p}$;

ou, para o valor real de p,

$$c_1=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}=\pm p,\ l_1=\pm\frac{a(3\sqrt{2}-4)}{8p}.$$

Bastam estes exemplos para mostrar como devem applicar-se os processos 1.º, 2.º, 3.º, indicados respectivamente nos n.^{os} 126, 127 e no presente 128.

Concavidade, convexidade e pontos singulares

129. CONCAVIDADE E CONVEXIDADE. Mudemos (Fig. 1) x em $x+h$ na equação d'uma curva $y=fx$; e comparemos as ordenadas $P'M'=f(x+h)$ e $P'H'$, d'ella e da tangente em $M(x, y)$, correspondentes á mesma abscissa $x+h$. Serão

$$P'M'=y+hy'+\frac{1}{2}h^2y''+\ldots,\quad P'H'=y+y'h.$$

Tomando h tão pequeno que o signal de $\frac{1}{2}h^2y''$ seja o de $\frac{1}{2}h^2y''+\ldots$, será $P'M'>$ ou $<P'H'$, e por conseguinte voltará a curva a convexidade ou a concavidade para o eixo dos x, segundo for y'' positiva ou negativa. Assim: *a curva volta para o eixo dos* x *a convexidade ou a concavidade, segundo são* y *e* y'' *do mesmo signal ou de signaes contrarios.*

Nos pontos de inflexão M (Fig. 18 e 19), onde a curva passa de concava a convexa, ou inversamente, deve pois y'' mudar de signal, e conseguintemente ser nulla ou infinita neste ponto: exceptuando o caso de mudar y de signal com y''; porque então o ponto, de que se tracta, está no eixo dos x.

130. PONTOS SINGULARES. Além das particularidades que offerecem os pontos limites e da maxima e minima ordenada, de que antes tractamos, e os de inflexão, de que acabamos de tractar, ha outras, provenientes da concorrencia de muitos ramos da curva em um ponto; particularidades que dão a estes pontos o nome de *pontos singulares.*

Se no ponto singular se cortam muitos ramos, extendendo-se para um e outro lado, este ponto chama-se *multiplo* (A, Fig. 10).

Se na visinhança, d'um e d'outro lado, não ha curva, o ponto chama-se *solitario* ou *conjugado* (Fig. 13).

Se dois ramos se tocam, extendendo-se só para um dos lados, o ponto é de *reversão.* E chama-se: *ceratoide,* ou de reversão da primeira especie (Fig. 24 e 25), quando os dois ramos ficam para differentes lados da tangente; *ramphoide*, ou de reversão da segunda especie, quando ambos os ramos ficam para o mesmo lado (Fig. 23).

Nas curvas, cuja equação é transcendente, ha ainda os pontos de *suspensão* (*d'arrêt*), onde um ramo da curva pára (Fig. 28); e os pontos *salientes* ou *angulosos*, onde concorrem dois ramos, sem tangente commum, extendendo-se só para um lado (Fig. 29).

131. Todos os casos, que ficam indicados, podem caracterizar-se figurando um circulo descripto em volta do ponto, com um raio extremamente pequeno. Este circulo: cortará a curva de ambos os lados em muitos pontos, cujos raios farão entre si angulos finitos, se o ponto for *multiplo;* cortal-a-ha d'um só lado em dois pontos, cujos raios farão entre si um angulo infinitesimo, se o ponto for de *reversão,* ou farão um angulo finito, se o ponto for *anguloso;* cortal-a-ha d'um só lado, em um ponto, se o ponto for de *suspensão;* e não a cortará, se o ponto for *solitario.*

132. Tractemos de reconhecer a existencia d'estes diversos pontos em uma curva cuja equação é dada.

1.° EQUAÇÕES EXPLICITAS. Seja a equação explicita $y=fx$.

Se esta equação tem radicaes pares, e desapparece um d'elles para $x=a$, a ordenada $f(a+h)$, correspondente a um pequeno augmento h de x, terá mais valores do que tem fa. Por conseguinte $(a,\ fa)$ é um ponto *multiplo;* e a multiplicidade dependerá do gráu do radical eliminado.

Como $x=a$ pode expellir o radical, ou anniquilando-o, ou anniquilando um factor que o multiplique; e como no primeiro caso os coefficientes differenciaes successivos passarão de nullos a infinitos, e no segundo de infinitos a nullos: vê-se que o apparecimento de coefficientes differenciaes nullos até certa ordem, ou infinitos desde certa ordem, pode indicar a possibilidade da existencia de pontos multiplos; mas não é signal certo d'ella, por ser commum a outros pontos.

Se o radical desapparecer por se anniquilar o seu multiplicador, o expoente d'este mostrará se ha uma simples intersecção, se uma osculação.

133. Quando as ordenadas $f(a\pm h)$, d'um e d'outro lado do ponto que devia ser multiplo, são imaginarias, este ponto é *solitario.* Mas, se $f(a\pm h)$ tem valores reaes e valores imaginarios, consideram-se como coexistentes nelle um ponto simples ou multiplo, e um *conjugado invisivel.*

Concebe-se que a mudança d'alguns parametros pode tornar imaginarios valores que eram reaes, e transformar assim pontos multiplos em conjugados; como acontece na equação $y^2 = ax^2 + bx^3$, segundo é a positivo ou negativo (Fig. 12 e 13). O que explica a ligação d'estas duas especies de pontos.

134. Sejam a ordenada correspondente á abscissa $a+h$, e as duas derivadas,

$$f(a+h) = b + Ah^{\alpha} + Bh^{\beta} + \ldots,\ f'(a+h) = A\alpha h^{\alpha-1} + B\beta h^{\beta-1} + \ldots,$$

$$f''(a+h) = A\alpha(\alpha-1)h^{\alpha-2} + B\beta(\beta-1)h^{\beta-2} + \ldots.$$

I. Se α é uma fracção $\frac{m}{n} < 1$, são infinitas as derivadas $f'a$ e seguintes, e a tangente em $(a,\ b)$ é perpendicular ao eixo dos x.

1.° Supponhamos que nos expoentes da serie não ha fracções de denominador par. Se m e n são impares, e se toma h sufficientemente pequeno para que as differenças reaes $f(a+h) - b$, $f(a-h) - b$, tenham signaes contrarios, assim como $f''(a \pm h)$, ha uma inflexão em $(a,\ b)$ (Fig. 16 ou 17). Se m é par, têm os mesmos signaes, para h sufficientemente pequeno, $f(a+h) - b$ e $f(a-h) - b$, assim como $f''(a \pm h)$; e o ponto $(a,\ b)$ é um *ceratoide* (Fig. 24 ou 25).

2.° Supponhamos que nos expoentes da serie ha fracções de denominador par. Se é n este denominador, $f(a+h)$ e $f(a-h)$ são uma real, outra imaginaria; $(a,\ b)$ é um limite da curva no sentido dos x; e o signal duplo do radical mostra que as ordenadas reaes são uma maior, outra menor que b, e que as suas derivadas de segunda ordem têm signaes contrarios, ou que um dos ramos volta a convexidade e outro a concavidade para o eixo dos x (Fig. 21). Se o denominador par não é n, são ainda $f(a \pm h)$ uma real, outra imaginaria; mas as ordenadas reaes são ambas maiores ou menores que b, e as suas derivadas de segunda ordem do mesmo signal: pelo que é $(a,\ b)$ um *ramphoide* (Fig. 22), a curva termina, e os seus ramos voltam ambos a convexidade ou a concavidade para o eixo dos x.

II. Se é $\alpha = 1$ e β fraccionario, será $f''a$ nullo ou infinito, segundo for $\beta >$ ou < 2; porque teremos

$$f(a+h) = b + Ah + Bh^{\beta} + \ldots,\ f'(a+h) = A + B\beta h^{\beta-1} + \ldots,$$

$$f''(a+h) = B\beta(\beta-1)h^{\beta-2} + \ldots.$$

1.° Supponhamos que nos expoentes da serie não ha fracções de denominador par. Se β é par, ou uma fracção de numerador par, a curva não apresenta particularidade alguma no ponto (a, b); e o signal da differença $Bh^{\beta} + \ldots$ entre a sua ordenada $f(a+h)$ e a da tangente $b + Ah$, e de $f''(a+h)$, é o mesmo que o de B; mas, se é $A = 0$, ha maximo ou minimo. Se β é impar, ou uma fracção de numerador impar, $f''(a+h)$ e $f''(a-h)$ têm signaes contrarios; e ha em (a, b) uma inflexão, cuja disposição depende da tangente e do signal de B.

2.° Supponhamos que nos expoentes da serie ha fracções de denominador par. Se β é fracção de denominador par, $f(a+h)$ e $f(a-h)$ são uma real e outra imaginaria; e, para o valor real, cada par de signaes conjugados $\pm$ dá dois ramos, entre os quaes passa a tangente, havendo assim um ceratoide (Fig. 27). Se essa fracção não é β, ainda ha muitos ramos que se reunem em (a, b); mas a tangente passará acima ou abaixo de todos elles, segundo o signal de B, sendo então o ponto um ramphoide (Fig. 23).

135. Exemplos:

I. Na equação $y = (1-x)\sqrt{2-x}$ perde y, para $x = 1$, o radical, que não desapparece de $y' = \dfrac{3x-5}{2\sqrt{2-x}}$. Assim (Fig. 14): o ponto $C(1, 0)$, onde é $y' = \pm 1$, é duplo; nos pontos D e D' $\left(\dfrac{5}{3}, \pm\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\right)$, onde $y' = 0$, é a ordenada maxima; e o ponto $A(2, 0)$, onde $y' = \infty$, limita a curva.

II. Em $y = fx = (2-x)\sqrt{1-x}$ perde y o radical, para $x = 2$, e são imaginarios $y' = \dfrac{3x-4}{2\sqrt{1-x}}$ e $f\left(2 \pm \dfrac{1}{\infty}\right)$.

Portanto é $(2, 0)$ um ponto solitario.

III. Em $y = x\sqrt{x-b}$ a origem é um ponto solitario.

IV. Sendo $a > b$, a equação $\quad y = (x-a)^2\sqrt{x-b} + c$

pertence á curva EDGF formada (Fig. 15) de dois ramos que têm no ponto D a tangente commum ED. Se $x - a$ estivesse elevado ao cubo, os dois ramos teriam um circulo osculador, etc.

V. Descripto um circulo sobre $AI = 2r$ como diametro (Fig. 14), façamos gyrar em volta de A uma recta AF, em quanto PN, perpendicular a AI, se move parallelamente a si mesma, de modo que o ponto N fica sempre no meio do arco AF, isto é, de modo que são perpendiculares entre si as rectas AF e CN, e por conseguinte similhantes os triangulos AMP, CNP. Procuremos a curva AMC gerada pela intersecção contínua das rectas AF, NP.

Pondo a origem em C, as equações das duas rectas, e a similhança dos triangulos, dão

$$x = \alpha,\ y = \beta(x - r),\ \frac{r-\alpha}{\beta(\alpha - r)} = \frac{\sqrt{r^2 - \alpha^2}}{\alpha} = -\frac{1}{\beta},$$

das quaes, pela eliminação dos parametros α e β, resulta $y = x\sqrt{\frac{r-x}{r+x}}$;

e por conseguinte $$y' = \frac{r^2 - x^2 - rx}{(r+x)\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Estas equações mostram: que a origem C é um ponto duplo, no qual é $y' = \pm 1$, ou 45° a inclinação da tangente sobre AI; e que a folha AC tem um maximo em $D\left(\frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1),\ \frac{1}{2}r(\sqrt{5}-1)\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}\right)}\right)$, e por limite o vertice $A(r, 0)$. Para cada posição da recta AF, os meios N, N′ dos arcos ANF, AN′F dão dois pontos M, M′ da curva; ha dois ramos infinitos CO, CO′; e a tangente ao circulo no ponto $I(-r, 0)$ é asymptota.

VI. Em $y = b \pm (x-a)^{\frac{3}{5}}$ é a tangente perpendicular aos x em $M(a, b)$, e ha inflexão (Fig. 16 e 17).

Em $y = x \pm (x-a)^3$, ou $y = x \pm (x-a)^{\frac{4}{3}}$, ha uma inflexão (Fig. 18 e 19).

Em $y = -x + (x-a)^{\frac{7}{3}}$ ha uma inflexão (Fig. 20).

VII. Em $y = b \pm (x-a)^{\frac{3}{4}}$ e $y = b \pm (a-x)^{\frac{3}{4}}$ ha um limite (Fig. 21).

VIII. Em $y = b + k(x-a)^{\frac{1}{3}} + l(x-a)^{\frac{1}{4}}$ ha um ramphoide (Fig. 22).

Em $y = \beta + x \pm ax^2 + b\sqrt{x^5}$ ha um ramphoide (Fig. 23).

IX. Em $y = b \pm (x-a)^{\frac{2}{3}}$ é a tangente perpendicular aos x, e ha um ceratoide (Fig. 24 e 25); assim como em $2y = -1 - x + 2(x-1)^{\frac{5}{2}}$, e $y = b + x + (x-a)^{\frac{3}{2}}$ (Fig. 26 e 27).

X Na equação transcendente $y = e^{\frac{1}{x}}$ diminue y desde $\left(+\frac{1}{\infty}, \infty\right)$ até $(+\infty, 1)$; e cresce desde $\left(-\frac{1}{\infty}, 0\right)$ até $(-\infty, 1)$; sendo y'' nullo para $x = -\frac{1}{2}$. Portanto a curva (Fig. 28) compõem-se de dois ramos discontinuos, de um dos quaes MN são asymptotas os eixos, e do outro AN′ é asymptota a parallela, $y = 1$, ao eixo dos x; e neste ramo a origem A é um ponto de *suspensão*, e $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ um ponto de inflexão.

XI. Na equação transcendente
$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$
a curva passa pela origem A (Fig. 29), e extende-se indefinidamente para os x positivos e negativos. Mas a tangente em A faz com o eixo dos x angulos cujas tangentes trigonometricas, ou os limites de $\frac{y}{x}$ correspondentes ao limite 0 de x, são $\frac{1}{1 + e^{\pm\infty}}$, isto é, 0 para os x positivos e 1 para os negativos; por conseguinte o ponto A é *anguloso*.

136. Equações implicitas. Sejam $V = 0$, $My' + N = 0$,

a equação implicita, desembaraçada dos radicaes, e a sua derivada.

1.° Se os ramos da curva se cortam em um ponto, ha nelle muitas tangentes, e por isso muitos valores de y'. Já vimos (n.° 61) que esta condição anniquila M e N.

2.° Se dois ramos se tocam, e o contacto é da ordem $n-1$ (n.° 116), cada uma das derivadas $y', y'', \dots y^{(n-1)}$ tem um só valor, e $y^{(n)}$ deve ter muitos valores. Mas a equação derivada da ordem n tem a fórma $My^{(n)} + \dots = 0$, sendo o coefficiente M o mesmo que os de $y, y'', \dots y^{(n-1)}$ nas derivadas successivas, 1.ª, 2.ª, ... $(n-1)$ª; e é linear em ordem a $y^{(n)}$: logo a condição de ter $y^{(n)}$ muitos valores exige que seja $M = 0$, e por isso tambem $N = 0$; como no caso precedente.

Differem porém as condições analyticas d'estes dois pontos multiplos, por intersecção e por contacto, em ter y' no segundo um só valor, e no primeiro muitos valores.

Portanto: *Para achar os pontos multiplos de uma curva algebrica cuja equação* $V = 0$ *está desembaraçada de radicaes, egualaremos a zero a derivada* N *d'esta equação relativa a* x, *e a* M *relativa a* y; *e depois eliminaremos* x *e* y *entre duas das tres equações*

$$M = 0, \ N = 0, \ V = 0 \dots\dots (1).$$

Os valores de x *e* y, *que satisfizerem tambem á terceira, serão os unicos que podem pertencer a pontos multiplos.*

Como a resultante $\varphi x = 0$ da eliminação de y entre as duas ultimas equações (1) proviria de substituir na terceira a expressão de $y = fx$ tirada da segunda, será

$$\varphi' x = \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy} f'x = M + Nf'x;$$

por onde se vê que não poderá haver pontos singulares quando aquella resultante não tiver raizes eguaes.

137. Substituindo na derivada da segunda ordem,

$$My'' + Py'^2 + Qy' + R = 0, \dots\dots (2),$$

um dos systemas (x, y) que satisfazem ás tres equações (1), desapparecerá y''; e y' será dada por uma equação do segundo gráu.

Se as raizes d'esta equação são reaes, o ponto (x, y) é duplo.

138. Se as raizes da equação do segundo gráu forem imaginarias, o ponto será conjugado ou solitario (*).

Para ver que nestes pontos se devem com effeito *verificar* as equações (1), supponhamos que a resolução da proposta $V=0$ em ordem a y dá $y=f(x)$. Sendo a a abscissa do ponto conjugado, devem $f(a \pm h)$ ser imaginarias para h muito pequeno; por conseguinte alguns dos coefficientes differenciaes de $f(a)$ tambem devem ser imaginarios. Mas qualquer derivada, $My^{(n)}+\ldots=0$ de $V=0$ não pode dar $y^{(n)}$ debaixo de fórma imaginaria, por isso que nem contém radicaes, nem os pode nella introduzir a eliminação de y', $y''\ldots\ldots y^{(n-1)}$, feita por meio das derivadas precedentes: logo deve ser $M=0$, e por conseguinte $N=0$.

Portanto os pontos conjugados satisfazem ás equações (1); mas distinguem-se dos outros, para os quaes se verificam as mesmas condições, em serem nelles imaginarias algumas das derivadas de y.

139. Se as raizes das equações (1) anniquilassem tambem os termos da derivada da segunda ordem, seria necessario recorrer á terceira ordem, na qual desappareceriam y'' e y''', e ficaria y' no terceiro gráu. Haveria pois um ponto triplo, se as tres raizes fossem reaes; e um ponto simples, ou antes um ponto simples e um conjugado invisivel, se uma só das raizes fosse real.

Se as raizes de (1) anniquilassem tambem os termos da derivada da

---

(*) Mas cumpre notar que nem sempre y' é imaginario nestes pontos, com quanto o seja $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Pode com effeito acontecer que y' se conserve real tornando-se imaginarias as derivadas das outras ordens, quando, pela mudança do valor de um parametro, o ponto multiplo, onde se reuniam por contacto alguns ramos da curva, se transforme em conjugado. Para explicar geometricamente este facto, basta notar que no contacto são communs ás curvas, que se tocam, dois ou mais pontos consecutivos infinitamente visinhos, isto é, um ou mais elementos de curva consecutivos: por conseguinte, ainda que as ordenadas se tornem imaginarias fóra do elemento que produzido dá a tangente, esta pode continuar a existir.

Seja, por exemplo, a equação $$y^2-ax^4-bx^5=0.$$

Derivando, teremos $2yy'-4ax^3-5bx^4=0$; e as equações $M=0$, $N=0$, darão o ponto $(0, 0)$, cujas coordenadas satisfazem á proposta. Tornando a derivar, virá $2yy''+2y'^2-12ax^2-20bx^3=0$, que no ponto $(0, 0)$ dá $y'=\pm 0$, isto é, dois ramos que se reunem por contacto e cuja tangente commum é parallela aos x.

Duas novas derivações darão, no mesmo ponto, $y''=2\sqrt{a}$. D'onde resulta que, segundo for a positivo ou negativo, assim o ponto $(0, 0)$ será multiplo por contacto ou conjugado; ficando porém $y=0$ em ambos os casos.

terceira ordem, recorreriamos á da quarta; e teriamos um ponto quadruplo, ou um duplo com um conjugado invisivel, ou um solitario, segundo fossem as quatro raizes reaes, ou duas reaes e duas imaginarias, ou todas imaginarias. E assim por diante.

140. Verificando-se as equações (1), as coordenadas do ponto da curva infinitamente visinho $(a+h,\ b+k)$ substituidas em $V=0$ darão

$$f(a+h,\ b+k)=\frac{1}{2}(Pk^2+2Qhk+Rh^2)+\Sigma_0^3 A_i h^i k^{3-i}+h^4R_3=0;$$

ou, chamando t_1 e t_2 as raizes $\frac{k}{h}$ da equação do 2.° gráu $P\frac{k^2}{h^2}+2Q\frac{k}{h}+R=0$,

$$f(a+h,b+k)=\left[\frac{1}{2}P\left(\frac{k}{h}-t_1\right)\left(\frac{k}{h}-t_2\right)+h\varphi\left(\frac{k}{h}\right)+h^2R_3\right]h^2=0\ldots(3).$$

Se as raizes t_1 e t_2 são reaes e deseguaes, podemos tomar $\frac{k}{h}$ tão visinho de t_1 ou de t_2 que o primeiro termo de (3) seja positivo ou negativo, e que a somma d'elle com os seguintes se reduza a zero; tanto para h positivo como para h negativo. Teremos pois um ponto $(a,\ b)$ duplo, como já haviamos dito, no qual t_1 e t_2 são as direcções das tangentes.

Se são imaginarias, teremos um ponto solitario.

Se são reaes e eguaes, t_0, o primeiro termo terá sempre o signal de P: por conseguinte só haverá curva para o lado dos h positivos, ou dos h negativos, segundo forem $\varphi(t_0)$ e P de differente signal ou do mesmo signal; e o ponto duplo será um ceratoide, por ser

$$\frac{k}{h}=t_0\pm\sqrt{-\frac{2h\varphi(t_0)}{P}},$$

dando t_0 a direcção da tangente commum.

141. Supponhamos que é $\varphi(t_0)=0$.

Pondo $\left(\frac{k}{h}\right)=t_0+\lambda h+\ldots$, teremos

$$\varphi\left(\frac{k}{h}\right)=\lambda h\varphi'(t_0)+\ldots,\ \psi\left(\frac{k}{h}\right)=\psi(t_0)+\ldots,$$

para substituir em

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}\left(\frac{k}{h}-t_0\right)^2+h\varphi\left(\frac{k}{h}\right)+h^2\psi\left(\frac{k}{h}\right)+h^3\mathrm{R}_4=0;$$

o que dá
$$h^2\left[\frac{1}{2}\mathrm{P}\lambda^2+\lambda\varphi'(t_0)+\psi(t_0)+h\mathrm{K}\right]=0.$$

E chamando λ_1, λ_2, as raizes de $\frac{1}{2}\mathrm{P}\lambda^2+\lambda\varphi'(t_0)+\psi(t_0)=0$, a equação precedente toma a fórma

$$\frac{1}{2}\mathrm{P}(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)+h\mathrm{K}=0\ldots\ldots\ldots\ldots(4).$$

Se λ_1 e λ_2 são reaes e deseguaes, discorrendo como no numero precedente, podemos achar dois valores de λ, um muito proximo de λ_1 e outro de λ_2, que satisfaçam a (4); tanto para h positivo como para h negativo: e teremos um ponto em que se tocam dois ramos.

Se são imaginarios, o ponto é solitario.

Se são reaes e eguaes, λ_0, só haverá λ real para os h positivos ou para os h negativos, $\lambda=\lambda_0\pm\sqrt{-\frac{2\mathrm{K}h}{\mathrm{P}}}$. Será pois $\frac{k}{h}=t_0+\lambda_0h\pm h^{\frac{3}{2}}\sqrt{-\frac{2\mathrm{K}}{\mathrm{P}}}+\ldots$; e o ponto duplo um ramphoide, por dar λ_0h o signal á série desde o segundo termo.

Mas no caso particular de $\lambda_0=0$ o ponto é um ceratoide.

142. Exemplos: I. Seja $y^2-x^3+(a-b)x^2+abx=0$.

Egualando a zero as derivadas em ordem a x e em ordem a y, vem $y=0$, $3x^2+2(b-a)x-ab=0$, as quaes só concordam com a proposta e accusam a possibilidade da existencia d'um ponto multiplo ou conjugado nos casos de ser nullo a ou b (Fig. 30) (*Geom. Anal.* n.° 136).

1.° Se $a = 0$, o ponto (0, 0) pode ser multiplo, e a equação de segunda ordem dá então $y' = \pm\sqrt{b}$. Ha pois dois ramos, cujas tangentes ficam symmetricamente collocadas acima e abaixo do eixo das abscissas; e a expressão $y = \pm x\sqrt{b+x}$ mostra que a curva se extende para a esquerda do ponto duplo, desde $x = 0$ até $x = -b$, e para a direita até o infinito.

2.° $b = 0$ dá $y' = \pm\sqrt{-a}$. O ponto A é solitario; e a expressão $y = \pm x\sqrt{x-a}$ mostra que não ha curva á esquerda d'elle, nem á direita até $x = a$.

II. A equação $\quad x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0$

pertence a uma curva (Fig. 31) symmetrica em relação ao eixo dos y, e para a qual $M = 0$, $N = 0$, são $(y + a)y = 0$, $x(x^2 - a^2) = 0$.

A estas e á proposta satisfazem D e D' $(\pm a, 0)$ e E $(0, -a)$; e a segunda derivada $-6a(2y + a)y'^2 + 12x^2 - 4a^2 = 0$ mostra que estes pontos são duplos: sendo em E, $y' = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; e em D e D', $y' = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$.

É $y' = 0$, ou a tangente parallela aos x, em F$\left(0, \frac{1}{2}a\right)$ e em H e O$\left(\pm a, -\frac{3}{2}a\right)$.

Em E $(0, -a)$, D e D' $(\pm a, 0)$, vem $y' = \frac{0}{0}$; e por isso se recorreu á derivada de segunda ordem, achando-se estes pontos duplos. Finalmente nos pontos I e G $(\pm a\sqrt{2}, -a)$ a tangente é parallela aos y, por ser $y' = \infty$.

III. Á equação $\quad y^4 - x^5 + x^4 + 3x^2y^2 = 0$, e a $M = 0$, $N = 0$,

satisfaz a origem (0, 0); e como estas coordenadas anniquilam as derivadas da segunda e da terceira ordem, e a da quarta se reduz a $y'^4 + 3y'^2 + 1 = 0$, cujas raizes são imaginarias, aquelle ponto é solitario.

IV A $\quad x^4 + 2ax^2y - ay^3$, e a $M = 0$, $N = 0$,

satisfaz (Fig. 32) a origem; a derivada da segunda ordem anniquila-se; e a da terceira ordem dá $y' = 0$, $y' = \pm\sqrt{2}$: portanto o ponto A é triplo. Em H e O $(\pm a, -a)$, e em F e G$\left(\pm \frac{4}{9}a\sqrt{6}, -\frac{8}{9}a\right)$ as tangentes são respectivamente parallelas aos x e aos y.

V. Na equação (Fig. 33) $y^4 - axy^2 + x^4 = 0$,

recorrendo á terceira derivada, acha-se que a origem é um ponto triplo, no qual são $y' = 0$, e $y' = \infty$, ou os eixos tangentes á curva.

VI. Na equação (Fig, 34) $y^4 + x^4 - 3ay^3 + 2bx^2y = 0$

a origem é um ponto triplo.

VII. Na equação (n.° 128) $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0$

é triplo o ponto (0, 0), no qual são $y' = \infty$, e $y' = \pm\sqrt{\frac{15}{2}}$.

O espaço comprehendido entre as ordenadas dos pontos

$$\left(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\sqrt{3}\right), (-a, \pm a\sqrt{2})$$

separa as duas partes da curva; e nestes pontos, assim como em $(-5a, 0)$, é $y' = \infty$.

VIII. Á equação $(2y + 1 + x)^2 - 4(x - 1)^5 = 0$ e a $M = 0$, $N = 0$, satisfaz o ponto $(1, -1)$; a segunda derivada dá as raizes eguaes $y' = t_0 = -\frac{1}{2}$; e esta raiz não anniquila a funcção

$$\frac{d^3V}{dy^3}y'^3 + 3\frac{d^3V}{dy^2dx}y'^2 + 3\frac{d^3V}{dydx^2}y' + \frac{d^3V}{dx^3} = \varphi(t):$$

portanto o ponto M (Fig. 26) é um ceratoide (n.° 140).

IX. Á equação $(y - \beta - x - ax^2)^2 - b^2x^5 = 0$ e a $M = 0$, $N = 0$, que pertence a MBN ou M'BN' (Fig. 23), satisfaz o ponto $(0, \beta)$; a segunda derivada dá as raizes eguaes $y' = t_0 = 1$; e esta raiz anniquila φt: o ponto é um ramphoide (n.° 141).

Superficies e curvas no espaço

143. Sejam $z=f(x, y),\ Z=F(X, Y)$ ....(1)

as equações de duas superficies. Para que estas superficies tenham um ponto commum, é necessario que a $x=X$, $y=Y$, corresponda $z=Z$.

Tomemos sobre cada uma das superficies outro ponto correspondente a $x+h$, $y+k$; e chamemos $p, q, \ldots$ e P $Q, \ldots$ as derivadas parciaes das differentes ordens de (1). Designando $\frac{k}{h}$ por m, serão (n.° 71)

$$f(x+h, y+k)=z+h(p+mq)+\frac{1}{2}h^2(r^2+2sm+tm^2)+\ldots,$$

$$F(x+h, y+k)=z+h(P+mQ)+\frac{1}{2}h^2(R^2+2Sm+Tm^2)+\ldots;$$

e a distancia entre os dois pontos será $\Delta=h[(P-p)+m(Q-q)+\ldots]$.

144. Se no ponto commum as differenças parciaes da primeira ordem são respectivamente eguaes, $P=p$ e $Q=q$, os raciocinios do n.° 115 mostrarão que uma terceira superficie não poderia approximar-se das duas propostas tanto como ellas se approximam uma da outra, se não satisfizesse a seu respeito ás mesmas condições; havendo assim entre as propostas um contacto de primeira ordem.

Para haver um contacto de segunda ordem de duas superficies, é necessario que sejam tambem eguaes entre si as differenças parciaes da segunda ordem, $R=r$, $S=s$, $T=t$.

Para ter as osculações d'uma curva com uma superficie, mudaremos x em $x+h$ nas equações da curva, o que dará os $y+k$ e $z+l$ correspondentes; depois mudaremos x em $x+h$ e y em $y+k$ na equação da superficie, o que dará o $z+l'$ correspondente; e finalmente egualaremos l a l' até a ordem da osculação.

Para ter as osculações de duas curvas, mudaremos x em $x+h$ nas suas equações, o que dará $y+k$ e $z+l$ para uma, $y+k'$ e $z+l'$ para a outra; depois egualaremos k a k' e l a l', até a ordem da osculação.

145. Contactos de primeira ordem.

Como as tres constantes da equação do plano,

$$Z=AX+BY+C,$$

fixam a sua posição, podemos determinal-as de modo que haja um contacto de primeira ordem.

Chamando x, y, z, as coordenadas do ponto commum, as condições d'este contacto serão

$$z=Ax+By+C,\ p=A,\ q=B;$$

onde p, q, representando os coefficientes differenciaes parciaes da primeira ordem tirados da equação da superficie $z=f(x, y)$.

E a eliminação de A, B, C, por meio d'aquellas condições dará a equação do plano tangente á superficie no ponto (x, y, z),

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y) \ldots\ldots\ldots\ldots (A).$$

Se a equação da superficie for implicita, $F(x, y, z)=0$, substituiremos em (A) as expressões de p e q tiradas das duas differenciaes parciaes d'ella,

$$\frac{dF}{dx}+p\frac{dF}{dz}=0,\ \frac{dF}{dy}+q\frac{dF}{dz}=0,$$

o que dará a (A) a fórma

$$(Z-z)\frac{dF}{dz}+(Y-y)\frac{dF}{dz}+(X-x)\frac{dF}{dx}=0 \ldots\ldots (A').$$

146. Achada a equação do plano tangente, será facil deduzir d'ella tudo o que respeita á sua posição.

Por exemplo, os cosenos dos angulos que elle faz com os dos xy, xz, e yz, são (*Geom. Anal.*, n.° 179, 1.°):

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\dfrac{dF}{dz}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dx}\right)^2}},\\[2ex]
\cos\beta &= \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\dfrac{dF}{dy}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dx}\right)^2}},\\[2ex]
\cos\gamma &= \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\dfrac{dF}{dx}}{\sqrt{\left(\dfrac{dF}{dz}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dy}\right)^2+\left(\dfrac{dF}{dx}\right)^2}}.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(B)$$

147. Como a normal em um ponto (x, y, z) deve ser perpendicular ao plano tangente, as equações d'esta recta (*Geom. Anal.*, n.° 174) são:

$$X-x+p(Z-z)=0,\ Y-y+q(Z-z)=0\ldots\ldots\ldots(C),$$

ou $$(X-x)\frac{dF}{dz}=(Z-z)\frac{dF}{dx},\ (Y-y)\frac{dF}{dz}=(Z-z)\frac{dF}{dy}\ldots\ldots(C').$$

E os cosenos dos angulos que ella faz com os eixos dos z, dos y e dos x, (*Geom. Anal.*, n.° 178, 1.°), são respectivamente os mesmos que os α, β, γ do numero precedente, mudando p e q em $-p$ e $-q$.

148. Podemos sempre considerar uma curva como intersecção de dois cylindros perpendiculares a dois dos planos coordenados.

Como o plano tangente a qualquer d'estes cylindros, em um ponto da curva, contém a tangente á curva, a aresta e a tangente ao traço do mesmo cylindro no plano coordenado respectivo, traço que é a projecção da curva nesse plano; vê-se que *a tangente á projecção da curva é a projecção da tangente á curva.*

Sejam pois $$z = fx, \quad z = \mathrm{F}y,$$

as equações dos dois cylindros projectantes sobre os planos dos zx, zy. Como estas equações são as da curva, isto é, as das suas projecções sobre os planos zx, zy; as da tangente serão

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Z} - z = (\mathrm{X} - x) f', \; \mathrm{Z} - z = (\mathrm{Y} - y)\mathrm{F}'; \\ \text{ou} \quad \mathrm{X} - x = (\mathrm{Z} - z)\dfrac{dx}{dz}, \; \mathrm{Y} - y = (\mathrm{Z} - z)\dfrac{dy}{dz} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (\mathrm{D}).$$

Se entre as quatro equações da curva e da tangente no ponto (x, y, z) eliminarmos x, y, z, a resultante em X, Y, Z, será a das tangentes a todos os pontos da curva, isto é, a da superficie gerada pelo movimento continuo d'uma recta que fica sempre tangente á curva. E, segundo for esta superficie um plano, ou não o for, assim a curva será plana ou de dupla curvatura.

Os cosenos dos angulos, que a tangente faz com os eixos coordenados, são:

$$\cos\alpha = \lim. \frac{\Delta x}{\text{corda}} = \lim. \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\text{corda}} = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

que dão $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Em cada ponto da curva ha uma infinidade de normaes, todas situadas no plano normal, cuja equação facilmente se vê (*Geom. An.*, n.º 174) que é

$$Z-z+\frac{X-x}{f'}+\frac{Y-y}{F'}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E).$$

Se as equações da curva forem $z=fx,\ y=\psi x$,

será $f'=F'\times\psi'$; e as equações da tangente e do plano normal serão (*):

$$Z-z=(X-x)f',\ Z-z=(Y-y)\frac{f'}{\psi'} \ldots\ldots\ldots (D'),$$

$$(Z-z)f'+(Y-y)\psi'+X-x=0 \ldots\ldots\ldots\ldots (E').$$

149. Se a curva se considerar como intersecção de duas superficies, cujas equações são

$$\varphi(x,\ y,\ z)=0,\ \chi(x,\ y,\ z)=0,$$

a derivação d'estas equações dará

$$\frac{d\varphi}{dz}+\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{1}{f'}+\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{1}{F'}=0,\ \frac{d\chi}{dz}+\frac{d\chi}{dx}\cdot\frac{1}{f'}+\frac{d\chi}{dy}\cdot\frac{1}{F'}=0;$$

e a substituição de f' e F' tiradas de (D), dará ás equações da tangente a fórma:

$$(Z-z)\frac{d\varphi}{dz}+(Y-y)\frac{d\varphi}{dy}+(X-x)\frac{d\varphi}{dx}=0,$$

$$(Z-z)\frac{d\chi}{dz}+(Y-y)\frac{d\chi}{dy}+(X-x)\frac{d\chi}{dx}=0 \ldots\ldots (D'');$$

sendo portanto esta recta a intersecção dos planos tangentes ás duas superficies.

(*) No caso de ser a curva plana, tomando por xy o plano d'ella, será $fx=0$; e a equação (E′) se reduzirá a $X-x+(Y-y)\psi'=0$. Por conseguinte o plano normal é perpendicular ao da curva, e o seu traço é a normal.

150. Nos exemplos seguintes veremos o uso que se pode fazer das equações (A) e (C).

I. Superficies cylindricas. A propriedade caracteristica dos cylindros é que a linha de contacto da sua superficie com qualquer plano tangente é uma recta generatriz, parallela a outra cujas equações, $x=az$, $y=bz$, são dadas. Traduzindo pois analyticamente esta propriedade (*Geom. Anal.*, n.° 173), teremos a equação geral dos cylindros

$$ap+bq=1.$$

O mesmo daria a equação finita (*Geom. Anal.*, n.° 167)

$$y-b=\mathrm{F}(x-az),$$

applicando o que se disse no n.° 44.

II. Superficies conicas. Se na equação (A) substituirmos, em logar de X, Y, Z, as coordenadas a, b, c, d'um ponto fixo, teremos a equação dos cones, de que este ponto é vertice,

$$z-c=p(x-a)+q(y-b).$$

O mesmo se obteria applicando o que se disse no n.° 44 á equação finita (*Geom. Anal.*, n.° 168)

$$\frac{y-b}{z-c}=\mathrm{F}\left(\frac{x-a}{z-c}\right).$$

III. Superficies conoides. Se uma recta se move, encontrando sempre uma curva e um eixo dados, e conservando-se parallela a um plano director dado, a superficie gerada por ella chama-se um *conoide*. Exprimamos analyticamente a propriedade, que caracteriza estas superficies, de ser uma sua intersecção com o plano tangente sempre parallela ao plano director.

Tomando para origem a intersecção do eixo com o plano director, teremos as equações:

do eixo $\mathrm{X}=az,\ \mathrm{Y}=bz;$

da intersecção com o plano tangente $\mathrm{Z}=z,\ (\mathrm{X}-x)p+(\mathrm{Y}-y)q=0.$

E exprimindo a condição de se cortarem estas rectas, virá a equação dos conoides

$$(x-az)\,p+(y-bz)\,q=0.$$

Se traduzissemos analyticamente a geração do conoide por uma parallela ao plano director, que se movesse encontrando sempre o eixo e uma directriz (*Compl. de Geom. Descr.*, n.° 8), teriamos as equações:

da generatriz $\qquad z=\beta,\ y=mx+n;$

das directrizes $\qquad x=az,\ y=bz;\ f=0,\ \varphi=0.$

Por dever a generatriz encontrar a primeira directriz no ponto $(a\beta, b\beta, \beta)$, as suas equações tornar-se-iam em $z=\beta$, $y-b\beta=m(x-a\beta)$; e depois a segunda condição, de encontrar a outra directiz, daria $\beta=F(m)$. Portanto a equação finita da superficie é $z=F\left(\dfrac{y-bz}{x-az}\right)$; e pelo n.° 44 achariamos a equação differencial precedente.

No caso do conoide recto, isto é, de $a=0$, $b=0$, estas equações reduzem-se a

$$z=F\left(\frac{y}{x}\right),\ \text{e}\ px+qy=0.$$

IV. Superficies de revolução. Como todas as normaes de qualquer superficie de revolução encontram o eixo, vê-se que, se eliminarmos X, Y, Z, entre as equações (C) da normal e as do eixo, a resultante será a equação d'estas superficies. Assim, se o eixo de revolução é o dos z, a eliminação entre as suas equações $X=0$, $Y=0$ e (C) dá

$$py-qx=0.$$

Obter-se-ia tambem esta equação applicando o que se disse no n.° 44 á finita (*Geom. Anal.*, n.° 169) $z=F(x^2+y^2)$.

V. Superficies planificaveis. Nestas superficies a recta generatriz deve mover-se de modo que o plano tangente seja o mesmo em todos os pontos d'ella.

Sejam as equações da generatriz $\quad x=az+\alpha,\ y=bz+\beta;$

Como p, q, $z-px-qy$, não devem variar ao longo d'esta recta: suppondo substituidas nellas as expressões de x e y, egualaremos a zero as suas derivadas; o que dará

$$ra+sb=0,\ sa+tb=0,\ 1-ap-bq=0.$$

Eliminando $\frac{b}{a}$ entre as duas primeiras, vem a equação das superficies planificaveis

$$rt-s^2=0.$$

A terceira mostra (*Geom. Anal.*, n.º 173) que a generatriz é parallela ao plano tangente; e que está no mesmo plano, por ser, além disso, o ponto de contacto commum a ella e ao plano. Com effeito a condição (*Geom. Anal.*, n.º 173) $\alpha p+\beta q+z-p(az+\alpha)-q(bz+\beta)=0$, de cortarem ambos o eixo dos z no mesmo ponto, reduz-se tambem a $1-ap-bq=0$.

Se considerassemos a superficie como gerada pelo movimento d'uma recta sempre tangente á *aresta de reversão*, $x=\varphi z$, $y=\psi z$, a sua equação finita resultaria de eliminar a arbitraria α entre as equações da generatriz assim definida, $x-\varphi(\alpha)=(z-\alpha)\varphi'\alpha$, $y-\psi(\alpha)=(z-\alpha)\psi'\alpha$; sendo $(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha)$ o ponto variavel de contacto (*Compl. de Geom. descr.*, n.º 12).

Mas a derivação d'estas equações da generatriz em ordem a x e a y daria quatro, entre as quaes, se se eliminassem α, $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\alpha}{dy}$, resultaria uma da fórma $p=\mathrm{F}(q)$; e portanto a eliminação de $\mathrm{F}'q$ entre as duas derivadas d'esta daria a equação que achamos.

VI. Superficies regradas. Nestas superficies, das quaes são um caso particular as planificaveis, o plano tangente contém a generatriz,

$$x=az+\alpha,\ y=bz+\beta;$$

condição que se exprime, como no caso precedente, por

$$ap+bq=1.$$

Suppondo pois substituidas nesta equação as expressões de x e y, e derivando duas vezes, resultam, para eliminar a e b, as equações

$$a^2r+2abs+b^2t=0,\ a^3u+3a^2bm+3ab^2n+b^3v=0;$$

onde u, m, n, v representam as derivadas da terceira ordem

$$\frac{d^3z}{dx^3},\ \frac{d^3z}{dx^2dy},\ \frac{d^3z}{dxdy^2},\ \frac{d^3z}{dy^3}.$$

E eliminando $\frac{b}{a}$, como se fez nos *Compl. de Geom. descr.*, pag. 100, resulta a equação das superficies regradas

$$A^2r-2ABs+B^2t=0;$$

sendo $\quad A=3rnt-2rsv-t^2u,\ B=3rmt-2stu-r^2v.$

Se considerassemos a superficie como gerada pelo movimento d'uma recta que encontra sempre tres directrizes, a eliminação de tres parametros pelas tres condições dos encontros deixaria um só parametro arbitrario nas duas equações da generatriz, o systema das quaes equivaleria á equação finita da superficie. Depois a eliminação entre as equações provenientes de derivar aquellas equações tres vezes consecutivas, considerando esse parametro e uma das variaveis como funcções das outras duas, daria a mesma equação differencial que acabamos de achar. Advertindo que da escolha das duas variaveis independentes pode depender em parte a facilidade do calculo (*Compl. de Geom. descr.*, n.° 14 e pag. 100; *Calc. diff.* de Cournot, n.° 244; *Calc. diff.* de Serret, n.° 358).

151. Contactos de segunda ordem. Appliquemos a theoria dos contactos d'esta ordem ás curvas de dupla curvatura (V. *Fonct. Anal.*, n.° **141**, e *An. appl.* de Monge).

1.° Plano osculador. Sejam as equações d'uma curva, e a do plano osculador em um ponto (x, y, z) d'ella:

$$z=fx,\ y=\psi x;\ Z-z=A(X-x)+B(Y-y).$$

Para determinar A e B de modo que se dê o contacto de segunda ordem, devemos (n.° 144) mudar nas equações da curva x em $x+h$, o que dará $y+k$ e $z+l$; depois substituir na equação do plano X por $x+h$ e Y por $y+k$, o que dará $z+l'$; e finalmente egualar os termos em h e os termos em h^2 de l aos respectivos de l'. Teremos assim:

na curva $\quad k = h\psi' + \frac{1}{2} h^2\psi'' + \ldots, \; l = hf' + \frac{1}{2} h^2 f'' + \ldots;$

no plano $\quad l' = \mathrm{A}h + \mathrm{B}k = (\mathrm{A} + \mathrm{B}\psi')h + \frac{1}{2}\mathrm{B}h^2\psi'' + \ldots:$

e depois $\quad \mathrm{A} + \mathrm{B}\psi' = f', \; \mathrm{B}\psi'' = f'',$

por meio das quaes, eliminando A e B, a equação do plano osculador fica (*)

$$\psi''(\mathrm{Z} - z) = (f'\psi'' - f''\psi') \cdot (\mathrm{X} - x) + f'' \cdot (\mathrm{Y} - y) \ldots\ldots (\mathrm{F});$$

á que satisfazem as (D') da tangente, como devem satisfazer.

2.° **Circulo osculador.** Considerando este circulo como intersecção d'uma esphera do mesmo raio com um plano central, e chamando a, b, c, as coordenadas do centro e ρ o raio da esphera, as equações do circulo serão:

$$\mathrm{Z} - c = \mathrm{A}(\mathrm{X} - a) + \mathrm{B}(\mathrm{Y} - b), \; (\mathrm{X} - a)^2 + (\mathrm{Y} - b)^2 + (\mathrm{Z} - c)^2 = \rho^2 \ldots (1).$$

Devemos (n.° 144) mudar x em $x+h$ nas equações da curva, e X em $x+h$ nas do circulo, o que dará $y+k$ e $z+l$ nas primeiras, $y+k'$ e $z+l'$ nas segundas; e depois egualar k a k' e l a l', independentemente dos valores de h; isto é, pôr k e l por k' e l', eliminar k e l, e egualar a zero, em cada uma das resultantes, os termos em h e os termos em h^2.

Teremos assim, até h^2:

nas equações (1) $l = \mathrm{A}h + \mathrm{B}k, \; 2(x-a)h + h^2 + 2(y-b)k + k^2 + 2(z-c)l + l^2 = 0;$

nas equações da curva $\quad k = h\psi' + \frac{1}{2} h^2\psi'' + \ldots, \; l = hf' + \frac{1}{2} h^2 f'' + \ldots$

(*) Se a curva fosse plana, e tomassemos o seu plano por xy, seriam f' e f'' nullos; e esta equação, reduzindo-se a $\mathrm{Z} = z$, mostraria, como devia mostrar, que nas curvas planas o plano osculador é o plano d'ellas.

Depois substituindo nas duas primeiras as expressões de k e l dadas pelas duas ultimas; e finalmente egualando separadamente a zero os termos em h e os termos em h^2, virão:

$$\left.\begin{array}{c} A+B\psi'=f',\ B\psi''=f'', \\ x-a+(y-b)\psi'+(z-c)f'=0,\ 1+(y-b)\psi''+(z-c)f''+\psi'^2+f'^2=0 \end{array}\right\}\ldots(2).$$

As duas primeiras mostram (1.°) que o plano do circulo é o plano osculador.

Eliminando A, B, a, b, c, ρ entre (2) e (1), resultarão as coordenadas do centro e o raio do circulo osculador:

$$\left.\begin{array}{l} a=x-\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)(\psi'\psi''+f'f'')}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-f''\psi')^2},\ b=y+\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)[\psi''+f'(f'\psi''-f''\psi')]}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-f''\psi')^2}, \\ c=z+\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)[f''+\psi'(\psi'f''-\psi''f')]}{\psi''^2+f''^2+(f'\psi''-f''\psi')^2},\ \rho=-\dfrac{(1+\psi'^2+f'^2)^{\frac{3}{2}}}{[f''^2+\psi''^2+(f'\psi''-f''\psi')^2]^{\frac{1}{2}}} \end{array}\right\}\ldots(3)$$

Generalisando a variavel independente (n.° 46), isto é, substituindo

$$\psi'=\frac{dy}{dx},\ \psi''=\frac{dxd^2y-dyd^2x}{dx^3},\ f'=\frac{dz}{dx},\ f''=\frac{dxd^2z-dzd^2x}{dx^3},$$

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

e pondo $\mathrm{X}=dyd^2z-dzd^2y,\ \mathrm{Y}=dzd^2x-dxd^2z,\ \mathrm{Z}=dxd^2y-dyd^2x,$

as equações (3) tomam a fórma:

$$\left.\begin{array}{l} a=x+\dfrac{ds^2(\mathrm{Y}dz-\mathrm{Z}dy)}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2},\ b=y+\dfrac{ds^2(\mathrm{Z}dx-\mathrm{X}dz)}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2}, \\ c=z+\dfrac{ds^2(\mathrm{X}dy-\mathrm{Y}dx)}{\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2},\ \rho=\dfrac{ds^3}{(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)^{\frac{1}{2}}} \end{array}\right\}\ldots\ldots(4).$$

Emfim, porque, em virtude de $dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z$,

são

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = ds^2[(d^2z)^2 + (d^2y)^2 + (d^2x)^2 - (d^2s)^2],$$

$$Ydz - Zdy = ds^3 d\left(\frac{dx}{ds}\right),\ Zdx - Xdz = ds^3 d\left(\frac{dy}{ds}\right),\ Xdy - Ydx = ds^3 d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

$$(d^2z)^2 + (d^2y)^2 + (d^2x)^2 - (d^2s)^2 = ds^2\left[\left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2\right],$$

as formulas (4) transformam-se em:

$$\left.\begin{aligned}
a &= x + \frac{dsd\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2},\\
b &= y + \frac{ds\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2},\\
c &= z + \frac{dsd\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2},\\
\rho &= \frac{ds}{\left[\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2 + \left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2 + d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5)$$

ou:

$$\left.\begin{array}{l} a=x+\rho^2\dfrac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{ds},\ b=y+\rho^2\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{ds},\ c=z+\rho^2\dfrac{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)}{ds}, \\ \rho=\dfrac{ds}{\left[\left(d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \end{array}\right\}\ldots(6).$$

152. Angulos de flexão, e de torsão. Sejam c, c', c'', os cosenos dos angulos que a tangente a uma curva plana faz com os eixos coordenados; e $c+\delta c$, $c'+\delta c'$, $c''+\delta c''$, os dos angulos que faz com os mesmos eixos a tangente consecutiva. Designando α o angulo de contingencia, e attendendo a $c^2+c'^2+c''^2=1$, $(c+\delta c)^2+(c'+\delta c')^2+(c''+\delta c'')^2=1$, é

$$2\cos\alpha=2c(c+\delta c)+2c'(c'+\delta c')+2c''(c''+\delta c'')=2-(\delta c^2+\delta c'^2+\delta c''^2);$$

ou $$2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha=\alpha=\sqrt{\delta c^2+\delta c'^2+\delta c''^2};\text{ isto é, (n.}^{\circ}\text{ 121)}$$

$$\alpha=\sqrt{\left(d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right)^2+\left(d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}=\frac{ds}{\rho}\ldots\ldots(7).$$

Imaginemos agora que, em cada ponto da curva de dupla curvatura, se construe um elemento, no plano osculador do antecedente, e fazendo com este o mesmo angulo de contingencia, o qual mede a *flexão;* e que se faz gyrar o elemento, assim construido, em volta do mesmo ponto, até que coincida com o elemento da curva. É evidente que o angulo θ, chamado de *torsão*, que por este movimento ficam fazendo entre si os dois planos osculadores consecutivos, e o angulo de *flexão* determinam a posição de cada elemento da curva.

Chamando $c_{\prime}$, $c_{\prime}'$, $c_{\prime}''$, e $c_{\prime}'+dc_{\prime}$, $c_{\prime}'+dc_{\prime}'$, $c_{\prime}''+dc_{\prime}''$, os cosenos dos angulos que fazem com os eixos coordenados as perpendiculares aos dois planos osculadores consecutivos, teremos, como ha pouco,

$$\theta=\sqrt{\delta c_{\prime}'^2+\delta c_{\prime}'^2+\delta c_{\prime}''^2}.$$

••

Mas, generalisando a variavel independente, como no n.º **151**, e usando das notações do mesmo numero, a equação (F) do plano osculador transforma-se em

$$X(x-x_1)+Y(y-y_1)+Z(z-z_1)=0\,;$$

por conseguinte as equações da perpendicular a este plano são

$$x_1-x=\frac{X}{Z}(z_1-z),\ y_1-y=\frac{Y}{Z}(z_1-z);$$

e os cosenos $c_{\prime}$, $c_{\prime}'$, $c_{\prime}''$, (*Geom. Anal.*, n.º 179, 1.º) são

$$c_{\prime}=\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ c_{\prime}'=\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},\ c_{\prime}''=\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}},$$

que dão $\delta c_{\prime}=-\dfrac{Y(XdY-YdX)+Z(XdZ-ZdX)}{(X^2+Y^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}$; e similhantemente $\delta c_{\prime}'$, $\delta c_{\prime}''$.

Substituindo pois na expressão de θ, e pondo

$$A=XdY-YdX,\ B=XdZ-ZdX,\ C=YdZ-ZdY,$$

vem

$$\theta^2=\frac{A^2(Y^2+X^2)+B^2(Z^2+X^2)+C^2(Z^2+Y^2)-2ACXZ+2BCXY+2ABZY}{(X^2+Y^2+Z^2)^3},$$

que, attendendo a serem

$$A^2Z^2=AZ(BY-CX),\ B^2Y^2=BY(CX+AZ),\ C^2X^2=CX(BY-AZ),$$

se transforma em $\qquad \theta=\dfrac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{X^2+Y^2+Z^2}$;

e finalmente, por serem

$$Ady + Bdz = 0,\ Adx - Cdz = 0,\ Bdx + Cdy = 0,$$

isto é

$$C = \frac{Adx}{dz},\ B = -\frac{Ady}{dz},$$

a expressão do angulo de torsão θ toma a fórma:

$$\theta = \frac{Ads}{dz\,(X^2 + Y^2 + Z^2)} = \frac{A}{ds} \cdot \frac{\rho^2}{ds^5} \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$ z

sendo

$$\frac{A}{dz} = dz(d^2x d^3y - d^2y d^3x) + dy(d^2z d^3x - d^2x d^3z) + dx(d^2y d^3z - d^2z d^3y).$$

153. Esphera osculatriz. Como a equação da esphera,

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 = \rho^2,$$

tem quatro parametros, pode sujeitar-se a um simples contacto com a superficie em um ponto (x, y, z); o que dará as condições:

$$\left.\begin{array}{c} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \rho^2, \\ x - a + p(z-c) = 0,\ y - b + q(z-c) = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (9),$$

sendo p e q os valores de $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ tirados da equação da superficie $z = f(x, y)$.

Para qualquer raio ρ, estas equações darão as coordenadas a, b, c, do do centro; e ter-se-hão assim tantas espheras que tocam a superficie no ponto dado, quantos forem os valores que se attribuirem a ρ.

Pondo, por abreviar, $(1 + p^2 + q^2)^{-\frac{1}{2}} = \varphi$, a eliminação dará:

$$c = z \pm \rho\varphi,\ b = y \mp \rho q\varphi,\ a = x \mp \rho p\varphi \ldots\ldots\ldots (10).$$

Por se terem supposto os P e Q tirados da equação da esphera eguaes respectivamente aos p e q tirados da equação da superficie proposta, é commum o plano tangente; e por serem então as duas ultimas equações (9) as da normal, o centro (a, b, c) está sobre esta recta.

154. Restando só a arbitraria ρ, nem sempre se pode satisfazer ás condições de osculação de segunda ordem, isto é, de serem tambem R, S, T, tiradas da equação da esphera eguaes respectivamente a r s, t, tiradas da equação da superficie proposta; e por isso, geralmente fallando, nem sempre ha esphera osculatriz para as superficies, como ha circulo osculador para as curvas; isto é, nem sempre ha uma esphera que tenha um contacto de segunda ordem com a superficie, em todas as direcções á roda do ponto (x, y, z).

155. Vejamos porém se, em uma direcção, se pode estabelecer a osculação de segunda ordem no ponto dado.

Seja
$$m = \frac{dy}{dx} = \lim.\frac{k}{h} = \text{tang}\, i$$

a tangente trigonometrica do angulo i que faz com o eixo dos x a projecção sobre o plano xy d'uma das tangentes á superficie no ponto (x, y, z).

Para que nessa direcção haja uma osculação de segunda ordem, basta que sejam eguaes as sommas dos termos de segunda ordem (n.° 151)

$$r + 2sm + tm^2 = \mathrm{R} + 2\mathrm{S}m + \mathrm{T}m^2.$$

Ora as derivadas da segunda ordem da equação da esphera relativas a x e y, attendendo ás condições do contacto de primeira ordem, são

$$(z - c)\,\mathrm{R} + 1 + p^2 = 0,\ (z - c)\,\mathrm{S} + pq = 0,\ (z - c)\,\mathrm{T} + 1 + q^2 = 0:$$

tirando pois d'estas tres equações os valores de R, S, T, e substituindo-os na precedente, resulta

$$(z - c)(r + 2ms + tm^2) + 1 + p^2 + 2pqm + (1 + q^2)m^2 = 0\ldots(11).$$

Esta equação dá $z - c$ em funcção de x, y, m; depois as equações (10) darão ρ, a, b, c, isto é, o raio de curvatura da secção feita na superficie por um plano tirado pela normal e pela tangente de que se tracta, e as coordenadas do centro:

$$\left.\begin{array}{l}\rho = \dfrac{\pm[1+p^2+2pqm+(1+q^2)m^2]\,.\,\sqrt{1+p^2+q^2}}{r+2sm+tm^2},\\[2ex] a=x\pm\rho\cos\alpha,\ b=y\pm\rho\cos\beta,\ c=z\pm\rho\cos\gamma,\end{array}\right\}\ldots(\mathrm{E}),$$

chamando α, β, γ, os angulos feitos pela normal com os eixos dos x, dos y, e dos z (n.° 147).

Como ρ deve ser positivo, e o multiplicador do radical no numerador de (E) sempre o é, deverão empregar-se em ρ, a, b, c os signaes $\pm$, segundo for positivo ou negativo o denominador de ρ: ou tambem empregar sempre o signal superior, tomando o radical $\sqrt{1+p^2+q^2}$ de ρ, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ com o signal do denominador de (E); ou sempre o signal inferior, tomando o radical com o signal contrario ao do denominador de (E).

D'este modo acharemos as curvaturas da superficie em todas as direcções das secções normaes d'ellas.

156. Differenciando $dz=pdx+qdy$, para a superficie e para o plano tangente, vem, para aquella e para este, respectivamente:

$$d^2z=pd^2x+qd^2y+dx^2(r+2ms+m^2t),\ (d^2z)=pd^2x+qd^2y.$$

Portanto será $d^2z <$ ou $> (d^2z)$, e o plano tangente, na direcção dada por m, ficará acima ou abaixo do consecutivo, conforme for negativa ou positiva a expressão $r+2ms+m^2t$, que é denominador de (E); isto é, será a curva *concava* ou *convexa* para o plano xy, segundo for negativo ou positivo o denominador de (E).

E como o signal de $\quad r+2sm+tm^2=\dfrac{1}{t}[(mt+s)^2-(s^2-rt)]$

muda na passagem de m por $\dfrac{1}{t}(-s\pm\sqrt{s^2-rt})$, quando $s^2-rt>0$; é invariavel quando $s^2-rt<0$; e tambem invariavel quando $s^2-rt=0$, mas tornando-se a expressão nulla para $m=-\dfrac{s}{t}$: distinguem-se assim os casos em que a curvatura muda de sentido na passagem da tangente por duas direcções: em que se conserva no mesmo sentido para todas as direcções, e em que é nulla numa direcção.

157. Para ter as secções nas quaes a curvatura é maxima, faremos $\frac{d\rho}{dm}=0$. Assim a derivada de (11) em ordem a m, attendendo a que, em virtude da primeira das equações (10), a condição $\frac{d\rho}{dm}=0$ equivale a $\frac{dc}{dm}=0$, dá

$$(z-c)(s+tm)+pq+(1+q^2)m=0\ldots\ldots\ldots(12),$$

entre a qual e (11) se deve eliminar m.

Podemos, para effectuar esta eliminação, abater (11) ao primeiro gráu, multiplicando (12) por m e subtrahindo de (11), o que conduz a

$$(z-c)sm+pqm+(z-c)r+1+p^2=0\ldots\ldots\ldots(13);$$

depois, pondo $\quad A=tr-s^2,\ B=r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs,$

a eliminação dá $\quad A(z-c)^2+B(z-c)+\rho^{-2}=0\ldots\ldots\ldots(14).$

Com os dois valores de $z-c$, que se tiram de (14), a primeira das equações (10) dará os raios ρ de maxima e minima curvatura da superficie no ponto (x, y, z), e depois uma das equações (12) ou (13) dará m, que determina a direcção das duas curvaturas.

Concebamos estas duas linhas de maxima e minima curvatura traçadas na superficie proposta. Por serem ellas independentes do systema de eixos a que se refere a superficie, podemos tomar o ponto dado para origem das coordenadas, e o plano tangente para plano dos xy; o que, tornando x, y, z, p, q, nullos, reduzirá as equações (12) e (13) a

$$c(s+tm)=m,\ c(sm+r)=1\ldots\ldots\ldots\ldots(15),$$

e por conseguinte $\quad sm^2+(r-t)m-s=0\ldots\ldots\ldots\ldots(16).$

Por ser -1 o producto das raizes d'esta equação, as duas secções cortam-se perpendicularmente. E portanto, exceptuando casos particulares nos quaes a equação (14) se reduzisse a uma identidade, podemos concluir que: *Em qualquer ponto d'uma superficie ha duas secções normaes, perpendiculares uma á outra, na direcção das quaes a curvatura é maxima ou minima.*

Estas secções chamam-se *principaes*.

158. No mesmo systema de coordenadas a expressão do raio de curvatura de qualquer secção normal é (n.° 155) $\rho = \frac{1+m^2}{r+2sm+tm^2}$.

Se tomarmos por eixos dos x e dos y as duas tangentes ás secções principaes, será em uma d'ellas $m=0$ e na outra $m=\infty$; e uma das equações (15) mostra que será $s=0$. Chamando pois ρ' um dos raios e ρ'' o outro, serão

$$\rho' = \frac{1}{r},\ \rho'' = \frac{1}{t};$$

e por conseguinte $$\frac{1}{\rho} = \frac{r}{1+m^2} + \frac{t}{1+\frac{1}{m^2}} = \frac{\cos^2 i}{\rho'} + \frac{\operatorname{sen}^2 i}{\rho''} \ldots (16),$$

que é o theorema de Euler.

Para outra secção perpendicular a esta, será

$$\frac{1}{\rho_{\prime}} = \frac{\operatorname{sen}^2 i}{\rho'} + \frac{\cos^2 i}{\rho''};$$

d'onde resulta $$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_{\prime}} = \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Os pontos onde é $\rho' = \rho''$, e por conseguinte (eq. 16) $\rho = \rho'$ para qualquer secção normal, chamam-se *umbilicaes* ou *de curvatura espherica.*

159. Se tivessemos tambem feito no n.° 153 o mesmo que fizemos no n.° 155, egualando entre si a totalidade dos termos de primeira ordem, satisfariamos ás condições do contacto de segunda ordem; e ficaria ainda uma indeterminada, da qual poderiamos dispôr para achar a curvatura em todas as direcções em que m fosse o mesmo. Por onde se vê que é possivel estabelecer o contacto de segunda ordem na direcção de quaesquer secções differentes da normal: o que vamos fazer.

Sejam: ρ, α, β, γ, o raio de curvatura da secção normal que passa por uma tangente á superficie, e os angulos que elle faz com os eixos dos x, y, z; ρ', α', β', γ', o raio de curvatura e os angulos analogos de outra secção, que passa pela mesma tangente, e cujo plano faz com o da primeira o angulo ω.

É (n.º 151, (6))

$$\cos\alpha' = \frac{a'-x}{\rho'} = \rho' \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}, \ \cos\beta' = \rho' \frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds}, \ \cos\gamma' = \rho' \frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds},$$

e (n.º 147)

$$\cos\alpha = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \ \cos\beta = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Portanto $\quad \cos\omega = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$

$$= \rho' \frac{\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} - q\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} - p\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}}{\sqrt{1+p^2+p^2}} \ (*);$$

a qual, attendendo a que a proposta $z = f(x, y)$ dá $\dfrac{dz}{ds} = p\dfrac{dx}{ds} + q\dfrac{dy}{ds}$,

e $$\frac{d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{ds} = p\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds} + q\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{ds} + r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right) + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2,$$

se transforma em

$$\cos\omega = \rho' \frac{r\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + 2s\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dy}{ds}\right) + t\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

ou $$\cos\omega = \rho' \frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 (r + 2sm + tm^2)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

(*) Como esta expressão dá $\rho' = A\cos\omega$, sendo A independente de ω: se fizermos $\omega = 0$, a que corresponde $\rho' = \rho$, teremos $\rho = A$, e por conseguinte será $\rho' = \rho\cos\omega$; ficando assim muito abreviada a demonstração do theorema de Meusnier (Vej. Cournot, *Calc. diff.*, n.º 275).

Mas as equações

$$\frac{dz}{ds}=(p+qm)\frac{dx}{ds},\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2=1,\ \frac{dy}{ds}=m\frac{dx}{ds},$$

dão $$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=\frac{1}{1+p^2+2pqm+(1+q^2)m^2};$$

logo

$$\rho'=\frac{[1+p^2+2pqm+(1+q^2)m^2]\sqrt{1+p^2+q^2}}{r+2sm+tm^2}\cos\omega=\rho\cos\omega\ldots(\mathrm{F}).$$

Esta equação comprehende o theorema de Meusnier, segundo o qual o raio de curvatura de qualquer das secções, que passam por uma tangente á superficie, é egual ao da secção normal, que passa pela mesma tangente, multiplicado pelo coseno do angulo que fazem entre si as duas secções; isto é, o raio de curvatura da secção proposta é egual ao da secção normal projectado sobre o plano da primeira.

Podem consultar-se sobre esta materia: a *Theoria dos contactos das superficies e curvas no espaço, Coimbra, 1869*, do sr. *Luiz da Costa e Almeida*; e o *Additamento ás notas do Calculo differencial e integral de Francoeur, Coimbra, 1845, pag. 11 até 21*.

Limites das superficies

160. Para achar o maximo e o minimo z d'uma superficie curva, cuja equação é $z=f(x, y)$, ou $F(x, y, z)=0$, devemos (n.º 102) pôr $p=0$ e $q=0$, ou (n.º 40) $\frac{dF}{dx}=0$ e $\frac{dF}{dy}=0$, que são as condições do parallelismo do plano tangente ao dos xy; e eliminar x, y, z entre as tres equações:

$$z=f(x, y), \; p=0, \; q=0; \text{ ou } F(x, y, z)=0, \; \frac{dF}{dx}=0, \; \frac{dF}{dy}=0.$$

E depois a condição (2) do n.º 102 mostrará se nos pontos assim determinados ha maximo ou ha minimo.

161. A condição de ser o plano tangente perpendicular ao dos zy exige (n.º 146) que seja $p=0$, ou $\frac{dF}{dx}=0$. Portanto, para que o plano tangente em um ponto seja perpendicular ao dos zy, é necessario que as coordenadas d'este ponto satisfaçam ás equações:

$$z=f(x, y), \; p=0; \text{ ou } F(x, y, z)=0, \; \frac{dF}{dx}=0.$$

Todos os pontos, que satisfizerem a estas duas equações, estarão sobre uma curva limite da superficie no sentido dos yz; e, eliminando x, acharse-ha a projecção d'esta curva, e da superficie, sobre o plano dos yz.

Do mesmo modo se obterá a projecção da superficie sobre o plano dos zx, eliminando y entre as equações $z=f(x, y)$, $q=0$; ou entre $F(x, y, z)=0$, $\frac{dF}{dy}=0$.

Assim na esphera, $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-r^2=0$, é $\frac{dF}{dz}=z-c$; e a eliminação entre $\frac{dF}{dz}=0$ e a proposta dá, como devia dar, a equação d'um circulo, projecção sobre o plano dos xy,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Rectificações, áreas e volumes

162. I. Projectado sobre o plano dos xy um arco de curva no espaço, *planifiquemos* o cylindro recto, cuja base é projecção do arco; e sejam s o arco, λ a sua projecção, t a área da porção do cylindro comprehendida entre a curva e a projecção. Como λ fica desenvolvido em linha recta, podemos referir o arco s ás coordenadas orthogonaes z e λ, e teremos então

$$dt = zd\lambda,\ ds^2 = d\lambda^2 + dz^2;$$

que, por ser, no plano da base, $d\lambda^2 = dx^2 + dy^2$,

se transformam em

$$dt = z\sqrt{dx^2 + dy^2},\ ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Se das equações da curva, $M = 0$, $N = 0$, que são as de duas superficies de cuja intersecção ella resulta, tirarmos z, y, dz e dy em funcção de x e dx, e os substituirmos nas expressões precedentes de dt e ds, a integração, isto é, a reversão das expressões differenciaes ás primitivas, dará a área t da porção do cylindro, e o comprimento do arco s.

163. II. Dada a equação d'uma curva plana, $y = fx$, procuremos o volume $v = Fx$ e a superficie $u = \varphi x$ do solido gerado pela revolução em volta de Ax do trapezio curvilineo CBMP (Fig. 1), comprehendido entre um arco d'ella, o eixo dos x, e as ordenadas extremas.

Mudando x em $x + PP' = x + h$, os augmentos k, i, l, de y, v, u, serão

$$k = y'h + \ldots,\ i = v'h + \ldots,\ l = u'h + \ldots;$$

representando i, l, o volume e a área do solido gerado pela revolução do trapezio curvilineo PMM'P'.

Mas o volume do solido gerado pela revolução d'este trapezio está comprehendido entre os volumes dos cylindros gerados pela revolução dos rectangulos PMQP', PLM'P'; e a área do mesmo solido está comprehendida entre as áreas dos troncos de cone descriptos pelos trapezios rectilineos PMM'P, PMHP'; portanto os limites para os quaes tendem a razão dos volumes dos dois solidos, e a das áreas dos dois troncos de cone, serão os mesmos para que tendem a razão entre o volume d'um d'aquelles cylindros e i, e a razão entre a área d'um d'aquelles cones troncados e l; e como aquelles limites são

$$\lim.\frac{\pi(y+k)^2h}{\pi y^2h}=1,\ \lim.\frac{\pi(2y+y'h).\mathrm{MH}}{\pi(2y+k).\mathrm{MM'}}=\lim.\frac{\pi(2y+y'h)}{\pi(2y+k)}\lim.\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{MM'}}=1,$$

serão tambem $$1=\lim.\frac{i}{\pi y^2h}=\lim.\frac{v'+\frac{1}{2}v''h+\ldots}{\pi y^2}=\frac{v'}{\pi y^2},$$

$$1=\lim.\frac{l}{\pi(2y+k).\mathrm{MM'}}=\lim.\frac{u'+\frac{1}{2}u''h+\ldots}{\pi(2y+k)\sqrt{1+y'^2+2y'y''h+\ldots}}=\frac{u'}{2\pi y\sqrt{1+y'^2}},$$

que dão

$$v'=\pi y^2,\ u'=2\pi y\sqrt{1+y'^2}=2\pi y.s';$$

ou $$dv=\pi y^2dx,\ du=2\pi y\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

Substituindo pois nestas equações fx em logar de y e $f'xdx$ em logar de dy, e integrando, ter-se-hão v e u.

164. III. Sobre o plano ABC (Fig. 35) tracemos um trapezio CDEF, cujos lados parallelos CD, EF, sejam perpendiculares á intersecção AB do plano com outro que faz com o primeiro um angulo α; e seja $cdef$ a projecção d'este trapezio sobre o segundo plano. Será a área

$$cdef=\frac{1}{2}(cd+ef).\mathrm{GH}=\frac{1}{2}(\mathrm{CD}\cos\alpha+\mathrm{EF}\cos\alpha).\mathrm{GH}=\mathrm{CDEF}\cos\alpha.$$

Esta razão entre os trapezios e as suas projecções tem egualmente logar para os triangulos; porque (Fig. 36), tirando CD e LF perpendiculares a AB, e CE parallela a DF, forma-se o parallelogrammo CDLF, cuja área é dupla da do triangulo DIF, e cuja projecção é dupla da projecção do triangulo.

Como as figuras rectilineas se podem decompor em triangulos, a mesma relação subsiste para qualquer polygono plano; e pode ainda extender-se, pelo methodo dos limites, a qualquer área plana. Portanto:

A projecção P *de qualquer área plana* A *sobre um plano é egual ao producto* $A \cos \alpha$ *d'esta área pelo coseno do angulo* α *dos dois planos.*

Assim, chamando α, α', α'' os angulos que faz uma área plana A com os tres planos coordenados; e P, P', P'', as suas projecções sobre os mesmos planos: teremos

$$P = A \cos \alpha, \quad P' = A \cos \alpha', \quad P'' = A \cos \alpha'',$$

que dão $$P^2 + P'^2 + P''^2 = A^2.$$

Logo: *O quadrado d'uma área plana é egual á somma dos quadrados das suas projecções sobre tres planos que se cortem rectangularmente.*

Estes theoremas servem para avaliar as áreas planas, situadas no espaço, por meio d'outras situadas nos planos rectangulares coordenados, isto é, por meio d'outras expressas cada uma em funcção de duas variaveis.

165. IV. Seja a equação d'uma superficie, $z = f(x, y)$;

e M (Fig. 37) um ponto (x, y, z) d'ella.

Tirando quatro planos: dois parallelos aos xz, e correspondentes a y, $y + k$; dois parallelos aos yz, e correspondentes a x, $x + h$: chamemos v o volume do tronco mixtilineo, que é terminado pelo plano dos xy, pela superficie e por aquelles quatro planos, e cuja base no plano dos xy é o rectangulo comprehendido por h e k; e u a área da porção da superficie, que termina este tronco. E chamemos $V = F(x, y)$ o tronco comprehendido entre os seguintes limites: plano dos xy; planos parallelos a xz, um á distancia y, outro a uma distancia dada b do mesmo plano; planos parallelos a yz, um á distancia x, outro a uma distancia dada a do mesmo plano.

Procurando o augmento de V no sentido dos y, ou o tronco cuja base é o rectangulo xk; e depois o augmento d'este tronco no sentido dos x, ou o tronco v cuja base é o rectangulo hk: teremos

$$v = F(x+h, y+k) - F(x+h, y) - [F(x, y+k) - F(x, y)].$$

E similhantemente a respeito da área u.

Emfim, desenvolvendo estas funcções pelo theorema de Taylor, e reduzindo, virá:

$$v = hk\frac{d^2V}{dxdy} + \ldots, \quad u = hk\frac{d^2U}{dxdy} + \ldots;$$

suppondo h e k sufficientemente pequenos para que a curvatura da porção de superficie u seja no mesmo sentido em todos os seus pontos. Posto isto:

1.º Os prismas cuja base commum é a base do tronco v, e cujas alturas são a minima $z+\alpha$ e a maxima $z+\beta$ das quatro ordenadas $f(x, y)$, $f(x+h, y)$, $f(x, y+k)$, $f(x+h, y+k)$, comprehendem aquelle tronco; e como a razão d'estes prismas $\frac{hk(z+\alpha)}{hk(z+\beta)}$, tem por limite a unidade, será tambem esta o limite da razão de qualquer d'elles para o tronco; isto é,

$$1 = \lim. \frac{v}{hk(z+\alpha)} = \lim. \frac{\frac{d^2V}{dxdy} + \ldots}{z+\alpha} = \frac{\frac{d^2V}{dxdy}}{z}.$$

2.º Como a unidade é o limite da razão entre cada um dos arcos de curva, traçados por M na superficie u, e a tangente respectiva; e como estas tangentes existem no plano tangente: concebe-se que é tambem 1 o limite da razão entre u e a porção do plano tangente intercepta pelo tronco v, produzido indefinidamente. Mas, chamando θ o angulo que faz esta superficie plana com o plano dos xy, e attendendo a que a projecção d'ella neste plano é hk, temos (n.º 164)

$$\text{superf. tang. plana} = \frac{hk}{\cos\theta} = hk\sqrt{1+p^2+q^2};$$

por conseguinte (*)

$$1 = \lim. \frac{u}{hk\sqrt{1+p^2+q^2}} = \lim. \frac{\frac{d^2U}{dxdy}+\ldots}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\frac{d^2U}{dxdy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

166. Portanto, para ter V e U substituir-se-hão nas differenciaes

$$d^2V = zdxdy, \quad d^2U = dxdy\sqrt{1+p^2+q^2},$$

por z, p, q, as suas expressões em x e y, tiradas da equação da superficie $z = f(x, y)$ e das suas derivadas em ordem a x e em ordem a y; e depois integrar-se-ha duas vezes, uma relativamente a y desde b até y, outra relativamente a x desde a até x.

(*) O mesmo se acha partindo (*Fonct. anal.*, n.º 79) do principio de estar u comprehendido entre a maxima e a minima das secções feitas no tronco pelos quatro planos tangentes á superficie tirados pelas extremidades das quatro ordenadas $f(x, y)$, $f(x+h, y)$, $f(x, y+k)$, $f(x+h, y+k)$. Por quanto, sendo 1 o limite da razão d'aquellas duas secções,

$$\frac{\frac{hk}{\cos\theta_{,}}}{\frac{hk}{\cos\theta_{,,}}} = \frac{\sqrt{1+(p+\alpha_{,,})^2+(q+\beta_{,,})^2}}{\sqrt{1+(p+\alpha_{1})^2+(q+\beta_{1})^2}},$$

tambem deve ser 1 o limite da razão d'uma d'ellas para u; isto é, deve ser

$$1 = \lim. \frac{u}{hk\sqrt{1+(p+\alpha_{,})^2+(q+\beta_{,})^2}} = \lim. \frac{\frac{d^2U}{dxdy}+\ldots}{\sqrt{1+(p+\alpha_{,})^2+(q+\beta_{,})^2}} = \frac{\frac{d^2U}{dxdy}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Do methodo infinitesimal

167. Quando se applica o methodo dos limites a uma equação entre constantes e variaveis indefinidamente pequenas, está demonstrado que a equação subsiste separadamente entre a totalidade dos termos constantes e entre a dos variaveis; e que, por isso, se pretendermos tão sómente obter uma relação entre as constantes, poderemos desprezar no decurso do calculo os termos compostos das variaveis, sem que esta omissão torne inexactos os resultados; seguros de não deverem influir as quantidades desprezadas. O mesmo dissemos por occasião de expôr o methodo das tangentes (*Geom. Anal.*, n.º 73).

Poderemos pois, em questões d'esta natureza, omittir os termos indefinidamente pequenos, que os geometras têm chamado, com Leibnitz, *infinitamente pequenos*, ou *infinitesimos*; omissão que abreviará os calculos, sem os tornar inexactos: apresentando-se a theoria com todo o rigor, quando se provar que as quantidades omittidas são da ordem d'aquellas, que por fim devem desapparecer dos resultados.

Importa muito que não nos privemos do auxilio d'este methodo; porque é elle precioso para gravar na memoria os resultados e para facilitar as investigações analyticas complicadas, sem lhe faltar na realidade o rigor de que parece carecer.

168. Appliquemos estas noções ao calculo differencial.

Sejam $y, z, t, \ldots$ funcções dadas de x. Suppondo a x um augmento Δx, os correspondentes de $y, z, t, \ldots$, tirados das equações que ligam estas variaveis com x, terão a fórma

$$\Delta y = \mathrm{A}\Delta x + \mathrm{B}(\Delta x)^2 + \ldots,\quad \Delta z = \mathrm{A}'\Delta x + \mathrm{B}'(\Delta x)^2 + \ldots$$

Para fazer calculos sobre estas expressões, temos de combinar entre si as quantidades Δy, $\Delta z, \ldots$, formando equações $\mathrm{M} = 0$ em que ellas entrem. Mas a substituição das expressões de Δy, $\Delta z, \ldots$ dará resultados que, ordenando relativamente ás potencias de Δx, se comporão de termos, d'entre os quaes ficarão elevados a menor expoente os que provierem de $\mathrm{A}\Delta x$, $\mathrm{A}'\Delta x, \ldots$ Portanto, se dividirmos a equação pela potencia de Δx que for factor commum, só ficarão desembaraçados d'esta quantidade os coefficientes A, A',...; e se ella é tal, que pode diminuir indefinidamente, sem que por isso variem x, y, z,..., deverá subsistir a equação $M=0$ entre os termos não multiplicados por B, B',... Por onde se vê que poderemos, no principio do calculo, supprimir os termos d'esta especie, e escrever $dy=Adx$, $dz=A'dx$,... dizendo, para evitar circumlocuções, que se desprezam os outros termos como *infinitamente pequenos d'ordem superior.*

Neste modo de tractar o calculo differencial concebem-se as grandezas como formadas de partes elementares, a que se dá o nome de *differenciaes,* e que se designam pela caracteristica d, como já dissemos (n.° 3). Estas differenciaes não são os elementos realizaveis, mas differem d'elles em quantidades que se podem desprezar, e que o calculo faria desapparecer se as tivessemos conservado. E assim, não influindo no resultado os erros provenientes de taes desprezos, somos conduzidos pela introducção d'essas quantidades auxiliares a calculos e considerações que abreviam muito os processos.

Tal é a ideia que devemos fazer das quantidades auxiliares dx, dy, dz,... introduzidas no calculo como elementos das quantidades x, y, z,..., em logar dos elementos realisaveis dos quaes ellas podem differir tão pouco quanto se quizer; sendo portanto inutil considerar essas differenças, as quaes pelo decurso do calculo deveriam desapparecer, sem ficar d'ellas vestigio nas relações procuradas entre x, y, z,....

169. Para fazer pois a substituição dos valores auxiliares, é necessaria, primeiro que tudo, a certeza de que as differenças entre elles e as verdadeiras variações viriam a destruir-se no resultado. E assim, para que o methodo se possa empregar com segurança, é necessario satisfazer á condição indispensavel *da egualdade dos limites ou das ultimas razões,* que consiste em comparar as grandezes verdadeiras com as que se lhes substituem, e fazel-as variar simultaneamente, para ver se, em sua diminuição progressiva, a razão entre ellas tende sempre e indefinidamente para a unidade, como seu limite.

Por exemplo, suppondo que o arco BM (Fig. 1) recebe o augmento infinitesimo MM', poderemos tomar pelo arco MM' a corda MM'; a qual será differencial do arco BM, porque, á medida que M se approximar de M', o arco e a corda diminuirão, e a sua razão tenderá constantemente para o limite 1 (n.° 110). Mas não podemos tomar MQ por differencial de BM, ainda que MM' e MQ se tornem conjunctamente nullos, por isso que não é 1 o limite da razão $\dfrac{MM'}{MQ} = \sec M'MP = \sqrt{1+\left[f'x+\dfrac{1}{2}hf''(x+h\theta)\right]^2}.$

O mesmo succede com ax^2 e bx; porque, a pezar de se anniquilarem simultaneamente quando $x=0$, comtudo o limite da sua razão é 0 e não 1.

Quando não se consideram só estes limites, o calculo apresenta-se como um meio de approximação; mas, logo que se applica á investigação das *ultimas razões*, que são as mesmas para as differenças auxiliares e para as verdadeiras, adquire todo o rigor algebrico, e a sua linguagem e notação são exactas; porque nas palavras *infinitamente pequenas* e *differenciaes* vae subentendida a condição de usar d'estas quantidades para obter resultados relativos, não a ellas taes como se introduziram no calculo, mas ás suas ultimas razões.

A *differencial é assim uma parte da differença, cuja razão com ella tem a unidade por limite.*

170. Ha tambem neste genero de considerações um principio que não se deve perder de vista: é o da *homogeneidade*, o qual consiste em deverem as differenciaes ser da mesma especie que as respectivas grandezas de que se consideram como elementos, e da mesma ordem entre si. Não se deve pois tomar senão um solido por differencial d'outro solido, uma superficie por differencial d'outra superficie,...; o que corresponde a dizer que não é permittido considerar uma linha como um aggregado de pontos, uma superficie como um aggregado de linhas,...: e, além d'isso, não deve uma fórmula differencial conter senão termos que sejam expressões differenciaes da mesma ordem de grandeza.

APPLICAÇÕES

171. FUNCÇÕES ELEMENTARES. Representando z e t funcções de x, seja

$$y=zt.$$

Se mudarmos x em $x+h$, e desprezarmos o producto $dzdt$ da segunda ordem, que só pode conter dx^2, dx^3,..., teremos:

$$dy=(z+dz)(t+dt)-zt=tdz+zdt.$$

Desprezando do mesmo modo dz^2, dt^2, $dzdt$,..., a expressão $y=z^m$ dá

$$dy=(z+dz)^m-z^m=mz^{m-1}dz.$$

Por ser $a^h = 1 + kh + \ldots$, a expressão $y = a^z$ dá

$$dy = a^z (a^{dz} - 1) = ka^z dz.$$

A expressão $y = \log z$ dá

$$dy = \log (z + dz) - \log z = \log \left(1 + \frac{dz}{z}\right),$$

e por conseguinte

$$a^{dy} = 1 + kdy + \ldots = 1 + \frac{dz}{z}, \text{ ou } dy = \frac{1}{k} \frac{dz}{z} = \mathrm{M} \frac{dz}{z}.$$

E a expressão $y = \operatorname{sen} z$ dá (*Alg. Sup.*, n.º 156)

$$dy = \operatorname{sen} (z + dz) - \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} z (\cos dz - 1) + \cos z \operatorname{sen} dz = \cos z dz.$$

172. Arcos. Seja BM $= s$ (Fig. 1) um arco de curva plana terminado no ponto M (x, y), e $y = fx$ a equação da curva. Considere-se a tangente MT como prolongamento do elemento infinitesimo MM′, ou da corda MM′, que, podendo approximar-se indefinidamente de MH, faz que $\frac{\mathrm{M'Q}}{\mathrm{MQ}} = \operatorname{tang} \mathrm{MM'Q}$ se approxime tambem indefinidamente de tang HMQ, não differindo d'ella senão em uma quantidade infinitesima. O triangulo MM′Q, cujos lados são dx, dy, ds, attendendo a ser lim. $\frac{\text{corda}}{ds} = 1$, dá

$$\operatorname{tang} \mathrm{T} = \frac{dy}{dx}, \cos \mathrm{T} = \frac{dx}{ds}, \operatorname{sen} \mathrm{T} = \frac{dy}{ds}, ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Do mesmo modo, sendo t a área CBMP, e tomando por dt o rectangulo infinitesimo MPP′Q, acha-se $dt = ydx$.

173. COORDENADAS POLARES. Appliquemos este processo ás coordenadas polares. Do pólo A como centro (Fig. 8), e a partir de $M(r, \theta)$, descreva-se o arco $MQ = rd\theta$; e depois prolongue-se o elemento $MM' = ds$ até encontrar em T a perpendicular AT a AM. Será M'T a tangente; e os triangulos similhantes MM'Q, MTA, darão

$$\frac{rd\theta}{dr} = \frac{AT}{r}, \text{ ou subt. } AT = \frac{r^2 d\theta}{dr}.$$

O triangulo MM'Q dará tambem

$$\overline{MM'}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{M'Q}^2, \text{ ou } ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2.$$

Finalmente a área $ABM = \tau$, comprehendida entre dois raios vectores, tem por differencial AMM', que se pode tomar por AMQ; e como é $AMQ = \frac{1}{2} AM . MQ$, resulta

$$d\tau = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

174. ÁREAS E VOLUMES DE SOLIDOS. I. Sejam v o volume e u a superficie do solido que a área CBMP (Fig. 1) gera na sua revolução em volta de Ax. A differencial de u é a superficie do tronco descripto pela revolução do arco MM', que tem por expressão $\frac{1}{2}\overline{MM'}$ (circumf. PM + circumf. $\overline{P'M'}$); ou $\overline{MM'}$. circumf. $\overline{PM}$, desprezada a differença $\overline{P'M'} - \overline{PM}$: e a differencial de v é o volume gerado pela revolução da área MPP'M', o qual se pode considerar como o cylindro descripto por MPP'Q, que tem por expressão $\overline{PP'}$. circumf. $\overline{PM}$.

Logo $$du = 2\pi y ds, \quad dv = \pi y^2 dx.$$

II. Seja BD (Fig. 37) uma superficie, cuja equação é $z = F(x, y)$. Quando se attribuir a x o augmento dx, o do volume $V = EFMN$ será

$MBFR = \frac{dV}{dx} dx$; e se depois neste resultado dermos a y o augmento dy, o do volume MBFR será $MCSP = \frac{d^2V}{dxdy} dxdy$. O augmento de $MN = U$ será similhantemente $MC = \frac{d^2U}{dxdy} dxdy$.

Mas: 1.° o plano $Mrsq$ (Fig. 33), parallelo ao xy, fórma o parallelipipedo $MPSs$, que se pode suppor egual a MPCS, e cujo volume é $zdxdy$; 2.° o plano $Mr's'q'$ pode suppor-se confundido com a superficie na extensão de MC; e como (n.° 164), designando θ a inclinação d'este plano sobre o dos xy, a base PS ou $dxdy$ é $MC \cos\theta$, teremos

$$MC = \frac{dxdy}{\cos\theta} = dxdy\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Logo $$d^2V = zdxdy, \quad d^2U = dxdy\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

175. Raios de curvatura das curvas planas. Sejam (Fig. 39) M_1M e MM' dois elementos consecutivos d'uma curva plana. As perpendiculares levantadas no meio das cordas d'estes elementos determinam o centro O, e o raio da curvatura $MO = \rho$.

O angulo de contingencia ω é o das tangentes consecutivas MT_1, $M'T$, isto é, o dos raios OM, OM', perpendiculares a ellas. E como, chamando c a corda MM', é $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega = \frac{\frac{1}{2}c}{\rho}$, se passarmos para os arcos, que differem das cordas em infinitesimos da terceira ordem, será $\omega = \frac{ds}{\rho}$.

Designando α o angulo da tangente com o eixo dos x, serão

$$\operatorname{tang}\alpha = y', \quad \omega = d\alpha = \frac{d(\operatorname{tang}\alpha)}{1 + \operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{y''dx}{1 + y'^2}.$$

Portanto $$\rho = \frac{ds}{\omega} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

O angulo $\frac{1}{2}\omega$ é o feito pela corda com a tangente; e a perpendicular $M'P'$ á tangente é

$$M'P' = c \operatorname{sen} \frac{1}{2}\omega = \frac{ds^2}{2\rho}.$$

176. Normaes ás superficies. Sejam θ o angulo que a normal O_1N (Fig. 40) a uma superficie, no ponto O_1 infinitamente proximo de O, faz com a sua projecção O_1P sobre o plano da tangente OO_1x' e da normal Oz no ponto O; e ω o angulo O_1PO que esta projecção faz com Oz. Os angulos θ e ω determinam a posição de O_1N, quando é conhecida a de Oz.

Tomando o plano tangente em O para plano dos xy, como no n.º 157, são p e q nullos; e portanto, na passagem para o ponto O_1, tornam-se p e q em $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$; ou, chamando α o angulo que OO_1 faz com Ox, e δ o elemento OO_1,

$$dp = \delta(r\cos\alpha + s\operatorname{sen}\alpha),\quad dq = \delta(s\cos\alpha + t\operatorname{sen}\alpha);$$

e as equações da normal serão (n.º 147)

$$X - x + (Z - z)\,dp = 0,\quad Y - y + (Z - z)\,dq = 0.$$

Se passarmos para o systema de eixos Ox' e Oy', situados no mesmo plano tangente, teremos

$$x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha,\quad y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha;$$

e as equações da normal transformar-se-hão em

$$(X' - x')\cos\alpha - (Y' - y')\operatorname{sen}\alpha + (Z - z)\,dp = 0,$$

$$(X' - x')\operatorname{sen}\alpha + (Y' - y')\cos\alpha + (Z - z)\,dq = 0,$$

que, eliminando alternadamente $Y' - y'$ e $X' - x'$, e pondo

$$dp\cos\alpha + dq\operatorname{sen}\alpha = dp',\quad dq\cos\alpha - dp\operatorname{sen}\alpha = dq',$$

tomam a fórma

$$X' - x' + (Z - z)\,dp' = 0,\ Y' - y' + (Z - z)\,dq' = 0.$$

Serão portanto (n.º 147):

$$\cos NO_1y_1' = -\operatorname{sen}\theta = \frac{-dq'}{\sqrt{1 + dp'^2 + dq'^2}};$$

e $$\cos O_1PZ \cos\theta = -\cos\omega\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + dp'^2 + dq'^2}},$$

que dá $$\operatorname{sen}\omega = \frac{dp'}{\sqrt{1 + dp'^2}};$$

ou, por serem dp' e dq' infinitesimos,

$$\operatorname{sen}\theta = dq' = \delta.[s(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha) + (t - r)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha],$$

$$\operatorname{sen}\omega = dp' = \delta.(r\cos^2\alpha + 2s\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + t\operatorname{sen}^2\alpha).$$

Tomando para eixos dos x' e y' as tangentes ás secções principaes, serão (n.º 158) $\quad s = 0,\ t - r = \frac{1}{\rho''} - \frac{1}{\rho'};$

e o theorema de Euler dará

$$\cos^2\alpha = \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho''}}{\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''}},\ \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''}};$$

o que, substituido na expressão de $\operatorname{sen}^2\theta$, a transformará em

$$\operatorname{sen}^2\theta = \delta^2.\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho''}\right)\left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}\right).$$

Portanto será $\theta = 0$, quando for $\rho = \rho''$, ou $\rho = \rho'$, isto é, quando OO_1 for uma secção principal.

O conhecimento dos angulos θ e ω é importante para o estudo das superficies á roda de cada normal. (Vej. *Calc. diff.* de Bertrand, n.os 650 e seguintes).

177. Superficies envolventes. Seja $$M = 0$$

a equação d'uma superficie; designando M uma funcção de x, y, z, e d'uma constante arbitraria α. Esta equação será a d'uma familia de superficies, cuja fórma geral dependerá da fórma de M, mas que se distinguirão umas das outras em virtude dos valores que se derem á arbitraria α.

Considerando α em dois estados consecutivos infinitamente proximos, teremos as equações

$$M = 0,\ M + \frac{dM}{d\alpha}d\alpha = 0;\ \text{ou}\ M = 0,\ \frac{dM}{d\alpha} = 0 \ldots\ldots (1).$$

Estas equações caracterizam, para cada valor de α, a curva de contacto das duas superficies consecutivas, curva que tem o nome de *caracteristica.* E é claro que, se entre ellas eliminarmos α, a resultante em x, y, z, pertencerá a uma superficie, logar de todas as caracteristicas, a qual se chama *envolvente* das superficies *envolutas,* de que $M = 0$ é a equação.

178. Para verificar que a envolvente toca as envolutas em todos os pontos das caracteristicas, notaremos que, suppondo resolvida em ordem a α a segunda equação (1), e substituida essa expressão de α em M, resultará a equação da envolvente $\varphi(x, y, z) = 0$, que dá

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dM}{dx} + \frac{dM}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy} = \frac{dM}{dy} + \frac{dM}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dy},\ \frac{d\varphi}{dz} = \frac{dM}{dz} + \frac{dM}{d\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dz};$$

ou, em virtude da mesma equação (1),

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{dM}{dx},\ \frac{d\varphi}{dy} = \frac{dM}{dy},\ \frac{d\varphi}{dz} = \frac{dM}{dz}.$$

Por onde se vê que são communs ás duas superficies os planos tangentes

$$\frac{dM}{dx}(x-x')+\frac{dM}{dy}(y-y')+\frac{dM}{dz}(z-z')=0,$$

ou $$\frac{d\varphi}{dx}(x-x')+\frac{d\varphi}{dy}(y-y')+\frac{d\varphi}{dz}(z-z')=0;$$

tendo logar o contacto ao longo das caracteristicas, que são as linhas communs a ambas as superficies.

179. Fazendo variar α em (1), vem as tres equações

$$M=0,\ \frac{dM}{d\alpha}=0,\ \frac{d^2M}{d\alpha^2}=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

As equações $M=0$, $\frac{dM}{d\alpha}=0$, tornando-se em $\frac{dM}{d\alpha}=0$, $\frac{d^2M}{d\alpha^2}=0$, dão outra caracteristica infinitamente visinha da primeira; e os pontos communs a ambas satisfarão ás equações (2).

Portanto, fazendo passar α por valores infinitamente proximos successivos, achar-se-hão os pontos de contacto das caracteristicas consecutivas, que são pontos communs a tres superficies consecutivas. E se eliminarmos α entre estas equações, as duas resultantes em x, y, z, por serem independentes de α, representarão a curva, logar de todos os pontos communs ás caracteristicas consecutivas, á qual se dá o nome de *aresta de reversão:* sendo facil mostrar que a aresta de reversão toca todas as caracteristicas, como a envolvente toca todas as envolutas.

180. Finalmente, eliminando α entre

$$M=0,\ \frac{dM}{d\alpha}=0,\ \frac{d^2M}{d\alpha^2}=0,\ \frac{d^3M}{d\alpha^3}=0,$$

acha-se, em geral, um ponto singular da aresta de reversão.

181. Se for M funcção de x, y, z, e de duas variaveis, α, β, poderemos considerar α e β como sujeitas a satisfazer a uma relação arbitraria $\beta=\varphi\alpha$. Então, eliminando β de M, para uma fórma de φ, ficará só α arbitraria; e attribuindo a α valores consecutivos, ou eliminando entre (1) e (2), teremos as respectivas evolutas, envolvente, caracteristicas e aresta de reversão. Depois, fazendo variar a fórma de φ, teremos outros systemas consecutivos das mesmas linhas. Por onde se vê que a equação proposta $M=0$ representa uma serie infinita, ou genero de familias de envolutas, envolventes, caracteristicas e aresta de reversão de cada familia; $\varphi=0$ a familia; α o individuo.

182. Se a superficie movel, $M=0$, for um plano, as caracteristicas serão linhas rectas, por serem lineares as suas equações,

$$M=Ax+By+Cz+D=0,$$

$$\frac{dM}{d\alpha}=\frac{dA}{d\alpha}x+\frac{dB}{d\alpha}y+\frac{dC}{d\alpha}z+\frac{dD}{d\alpha}=0;$$

e a envolvente, compondo-se assim de elementos infinitesimos separados por linhas rectas, será *planificavel*, isto é, poderá desdobrar-se sobre um plano, sem duplicatura nem ruptura, fazendo gyrar cada elemento em torno da recta caracteristica que o separa do elemento consecutivo, até ficar no plano d'elle.

As *superficies planificaveis* podem assim considerar-se como compostas de elementos planos de comprimento indefinido. Taes são o cone e o cylindro.

183. Procuremos a equação geral d'estas superficies, qualquer que seja a natureza do movimento que toma o plano movel.

Como o plano tangente coincide com um elemento plano da superficie, é claro que x, y, z, podem variar, sem que por isso varie este plano tangente.

Differenciemos pois em ordem a x, y, z, a equação do plano tangente

$$Z=pX+qY+z-px-qy;$$

e exprimamos que p, q, $z-px-qy$ não variam.

O calculo mostra que uma d'estas condições está comprehendida nas outras, e ha só duas distinctas

$$dp=0,\ dq=0,$$

ou

$$r+sy'=0,\ s+ty'=0.$$

Finalmente, eliminando y', que depende da direcção segundo a qual varía o ponto de contacto, vem a equação geral de todas as superficies planificaveis (n.º 150, V), qualquer que seja o modo particular de geração de cada uma,

$$rt-s^2=0.$$

Para a expressão analytica das propriedades que caracterizam as diversas *familias* de superficies, e para outras applicações da doutrina infinitesimal, relativas a ellas, consultem-se: o *Calcul différentiel* de Cournot e o de Serret, os *Complementos da Geom. descr.* de Fourcy, e principalmente a *Analyse appliquée à la géométrie* de Monge.

Linhas de curvatura das superficies

184. Chamam-se *linhas de curvatura* d'uma superficie as curvas formadas pelos pés das normaes á superficie que estão duas a duas no mesmo plano, isto é, que pertencem a uma superficie planificavel.

Sejam (n.º 147) as equações da normal nos pontos consecutivos (x, y, z), $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$,

$$X-x+p(Z-z)=0,\quad Y-y+q(Z-z)=0\ldots\ldots(1),$$

$$\left.\begin{array}{l} X-x+p(Z-z)-dx-pdz+(Z-z)\,dp=0,\\ Y-y+q(Z-z)-dy-qdz+(Z-z)\,dq=0 \end{array}\right\}\ldots\ldots(2).$$

Eliminando $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ entre estas equações, teremos a condição de estarem as duas rectas no mesmo plano,

$$(dx+pdz)\,dq-(dy+qdz)\,dp=0\ldots\ldots\ldots\ldots(3),$$

a qual equação e a da superficie são as das linhas de curvatura.

185. Se quizermos a equação do plano das duas normaes, exprimiremos as condições de satisfazerem identicamente ambos os systemas (1) e (2) a

$$Z-z=A(X-x)+B(Z-z)\ldots\ldots\ldots\ldots(4),$$

substituindo nesta as expressões de $X-x$, $Y-y$, tiradas d'elles.

Teremos assim

$$1+Ap+Bq=0,\ A[dx+pdz-(Z-z)\,dp]+B[dy+qdz-(Z-z)\,dq]=0,$$

a segunda das quaes, para ser identica, se decompõe nas duas

$$A(dx+pdz)+B(dy+qdz)=0,\ Adp+Bdq=0.$$

A eliminação de $\frac{B}{A}$ entre estas reproduziria a (3); e a combinação de qualquer d'ellas com a primeira, $1+Ap+Bq=0$, dá os parametros que determinam a posição do plano,

$$A=\frac{dq}{qdp-pdq},\ B=-\frac{dp}{qdp-pdq}.$$

É por conseguinte

$$[X-x+p(Z-z)]\,dq-[Y-y+q(Z-z)]\,dp=0\ldots.(5)$$

a equação d'estes planos, tangentes á superficie planificavel formada pelas normaes consecutivas da superficie proposta que estão duas a duas em cada um d'elles.

186. Se na equação (3), ou $\frac{dx+pdz}{dp}=\frac{dy+qdz}{dq}=M$, substituirmos por dz, dp, dq, as expressões de definição, $dz=pdx+qdy$, $dp=rdx+sdy$, $dq=sdx+tdy$, acharemos a equação do 2.º gráu em $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pqdy}{rdx+sdy}=\frac{(1+q^2)\,dy+pqdx}{sdx+tdy},$$

que é a equação differencial das projecções das linhas de curvatura sobre o plano dos xy.

E se, como no n.º 157, tomarmos o plano tangente para plano dos xy, isto é, se fizermos $p=0$, $q=0$, esta equação será

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{r-t}{s}\,\frac{dy}{dx}-1=0;$$

por onde se vê que: *as duas linhas de curvatura se cortam perpendicularmente.*

Esta mesma equação, comparada com a ultima d'aquelle numero, mostra que é $m = \frac{dy}{dx}$, isto é, que: *as linhas de curvatura são tangentes ás secções principaes.*

187. As equações das caracteristicas da superficie planificavel são a (5) e a sua differencial, que, attendendo a (3), é

$$[X - x + p(Z - z)]\,d^2q - [Y - y + q(Z - z)]\,d^2p = 0 \ldots\ldots (6);$$

equações a que satisfazem as da normal nos pontos da linha de curvatura, como deve ser.

E, para ter a aresta de reversão, será necessaria tambem a differencial seguinte, a qual, attendendo ás (5) e (6) ou ás da normal, é

$$(Z - z - M)(dpd^2q - dqd^2p) = 0, \text{ ou } (Z - z) - M = 0 \ldots (7).$$

As equações (5) (6) e (7), ou a (7) e as da normal, dão as coordenadas

$$X = x - Mp,\ Y = y - Mq,\ Z = M,$$

dos pontos de contacto das caracteristicas da superficie planificavel com a aresta de reversão; e a serie d'estes pontos, correspondentes ás caracteristicas consecutivas, é a mesma aresta.

188. Como a distancia R d'estes pontos de contacto aos respectivos da superficie proposta é

$$\sqrt{(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2} = M\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

será, attendendo ás equações de definição,

$$R = \frac{1 + p^2 + pqm}{r + ms}\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{pq + (1 + q^2)m}{s + mt}\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

ou, tomando o plano tangente para plano dos xy,

$$\mathrm{R} = \frac{1}{r + ms} = \frac{m}{s + mt} = \frac{1}{\frac{s}{m} + t}.$$

E como, tomando para eixos coordenados os eixos principaes de curvatura, os valores de m são $m' = 0$, $m'' = \infty$, os correspondentes de R serão (n.º 158)

$$\mathrm{R}' = \frac{1}{r} = \rho', \ \mathrm{R}'' = \frac{1}{t} = \rho'';$$

isto é, os pontos de contacto são os centros de curvatura das secções principaes da superficie proposta.

Portanto: *a aresta de reversão da superficie planificavel, formada pelas normaes da superficie proposta nos pontos d'uma linha de curvatura, é a serie dos centros de curvatura das secções principaes tangentes á mesma linha de curvatura.*

Vej. o *Calculo diff.* de Serret, n.^{os} 322 e 323.

ou, tomando o plano tangente para plano dos xy,

$$R = \frac{1}{r + ms} = \frac{m}{s + mt} = \frac{1}{\frac{s}{m} + t},$$

E como, tomando para eixos coordenados os eixos principaes de curvatura, os valores de m são $m' = 0$, $m'' = \infty$, os correspondentes de R serão (n.° 158)

$$R' = \frac{1}{r} = \rho', \quad R'' = \frac{1}{t} = \rho\,;$$

isto é, os pontos de contacto são os centros de curvatura das secções principaes da superficie proposta.

Portanto: *a aresta de reversão da superficie planificavel, formada pelas normaes da superficie proposta nos pontos d'uma linha de curvatura, é a serie dos centros de curvatura das secções principaes tangentes á mesma linha de curvatura.*

Veja o *Calculo diff.* de Serret, n.^{os} 322 e 323.

NOTA

Sobre a minima distancia entre duas rectas (n.º 103); e applicações

I. **189.** Sem particularizar as posições dos eixos coordenados, sejam as equações das duas rectas:

$$x = mz + \alpha,\ y = nz + \beta;\ x = m'z + \alpha',\ y = n'z + \beta'.$$

A distancia d'um ponto (x, y, z) da primeira a um ponto (x', y', z') da segunda é

$$R = \sqrt{(m'z' - mz + \alpha' - \alpha)^2 + (n'z' - nz + \beta' - \beta)^2 + (z' - z)^2}.$$

E as condições do minimo dão as derivadas:

$$(m'z' - mz + \alpha' - \alpha)\, m' + (n'z' - nz + \beta' - \beta)\, n' + z' - z = 0,$$

$$(m'z' - mz + \alpha' - \alpha)\, m + (n'z' - nz + \beta' - \beta)\, n + z' - z = 0.$$

Tirando pois d'estas os valores de z' e z, substituindo na expressão de R, e pondo

$$m' = m + \Delta m,\ n' = n + \Delta n,\ \alpha' = \alpha + \Delta\alpha,\ \beta' = \beta + \Delta\beta,$$

..

será a minima distancia entre as duas rectas

$$R = \frac{\Delta m \Delta \beta - \Delta n \,.\, \Delta \alpha}{\sqrt{(\Delta m)^2 + (\Delta n)^2 + (m\Delta n - n\Delta m)^2}}.$$

E, se as rectas forem infinitamente visinhas,

$$R = \frac{dm d\beta - dn d\alpha}{\sqrt{(dm)^2 + (dn)^2 + (mdn - ndm)^2}}.$$

As duas condições do minimo, ou, dividindo por $z' - z$,

$$\frac{x'-x}{z'-z} m' + \frac{y'-y}{z'-z} n' + 1 = 0, \quad \frac{x'-x}{z'-z} m + \frac{y'-y}{z'-z} n + 1 = 0,$$

mostram que a minima distancia é perpendicular ás duas rectas.

190. No caso particular de serem as rectas parallelas, são nullos Δm e Δn, tomando a expressão de R a fórma indeterminada.

Neste caso as duas equações do minimo reduzem-se a uma só, que dá $z' - z = k$, sendo $k = \varphi(m, n, \alpha' - \alpha, \beta' - \beta)$, e ficando z' ou z indeterminada.

Depois, substituindo na expressão geral de R, vem

$$R = \sqrt{(mk + \alpha' - \alpha)^2 + (nk + \beta' - \beta)^2 + k^2}.$$

D'onde resulta que, para qualquer ponto (x, y, z) de uma das rectas parallelas, o valor de R é o mesmo; como deve ser.

191. Se as posições successivas da recta dependem d'uma quantidade ξ que varía por lei de continuidade, por exemplo, das posições consecutivas dos pontos d'uma curva, são:

$$m = F\xi, \ \alpha = f\xi, \ n = F_1\xi, \ \beta = f_1\xi;$$

e por conseguinte:

$$\Delta m = h F' \xi + \frac{1}{2} h^2 F'' \xi + \frac{1}{6} h^3 F''' \xi + \dots,$$

$$\Delta n = h F_1' \xi + \frac{1}{2} h^2 F_1'' \xi + \frac{1}{6} h^3 F_1''' \xi + \dots,$$

$$\Delta \alpha = h f' \xi + \frac{1}{2} h^2 f'' \xi + \frac{1}{6} h^3 f''' \xi + \dots,$$

$$\Delta \beta = h f_1' \xi + \frac{1}{2} h^2 f_1'' \xi + \frac{1}{6} h^3 f_1''' \xi + \dots.$$

Das quaes, pondo

$$A = F' \xi f_1' \xi - F_1' \xi f' \xi, \ B = \frac{dA}{d\xi}, \ C = 2 \frac{d^2 A}{d\xi^2} + F_1'' \xi f'' \xi - F'' \xi f_1'' \xi,$$

se deduz

$$\Delta m \,.\, \Delta \beta - \Delta n \,.\, \Delta \alpha = A h^2 + \frac{1}{2} B h^3 + \frac{1}{12} C h^4 + \dots.$$

No caso de ser identicamente $A = 0$, tambem é $B = 0$. E portanto: *se, na passagem da posição d'uma recta para outra infinitamente visinha, é identicamente* $\mathrm{d}m\mathrm{d}\beta - \mathrm{d}n\mathrm{d}\alpha = 0$, *a minima distancia das duas posições, ou é nulla, o que concorda com a condição do encontro,* $0 = (\mathrm{m}' - \mathrm{m})(\beta' - \beta) - (\mathrm{n}' - \mathrm{n})(\alpha' - \alpha) = \Delta \mathrm{m} \Delta \beta - \Delta \mathrm{n} \Delta \alpha$, *ou é infinitesima ao menos da terceira ordem relativamente ás variações dos parametros.*

II. **192.** Applicando esta doutrina ás equações (D) da tangente (n.º 148),

$$X - x = \frac{dx}{dz}(Z - z), \ Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z),$$

temos $m = \frac{dx}{dz}, n = \frac{dy}{dz}, \alpha = x - z\frac{dx}{dz}, \beta = y - z\frac{dy}{dz},$

o que dá

$$\frac{dm d\beta - dn d\alpha}{dz^2} = \frac{d^2x}{dz^2}\left(\frac{dy}{dz} - \frac{dy}{dz} - z\frac{d^2y}{dz^2}\right) - \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dx}{dz} - \frac{dx}{dz} - z\frac{d^2x}{dz^2}\right) = 0,$$

Assim a distancia entre duas tangentes infinitamente visinhas *a uma curva de dupla curvatura* é infinitesima ao menos da terceira ordem (*Calc. diff.*, de Duhamel, n.º 271).

III. **193.** Para applicar a mesma doutrina ás equações da perpendicular ao plano osculador levantada pelo centro de curvatura (n.os 152 e 153),

$$x-a=\frac{X}{Z}(z-c),\ z-b=\frac{Y}{Z}(z-c),$$

temos
$$m=\frac{X}{Z},\ n=\frac{Y}{Z},\ \alpha=a-mc,\ \beta=b-nc;$$

$$dmd\beta-dnd\alpha=dm(db-ndc)-dn(da-mdc).$$

Mas, attendendo ás expressões de B e C do n.º 152, é

$$dm=-\frac{B}{Z^2}=+\frac{Ady}{Z^2dz},\ dn=-\frac{Adx}{Z^2dz};$$

e, se chamarmos D o denominador das expressões (5) de a, b, c do n.º 151, teremos, tomando s para variavel independente, isto é, pondo $d^2s=0$,

$$da=\frac{D^2dx+Dd^3x-d^2xdD}{D^2},$$

$$db=\frac{D^2dy+Dd^3y-d^2ydD}{D^2},$$

$$dc=\frac{D^2dz+Dd^2z-d^2zdD}{D^2}:$$

que dão

$$dmd\beta-dnd\alpha=\frac{A}{Z^2dz}\left(dxda+dydb-\frac{Xdx+Ydy}{Z}dc\right);$$

ou, em virtude das expressões de X, Y, Z (n.º 151),

$$dmd\beta-dnd\alpha=\frac{A}{Z^2dz}(dxda+dydb+dzdc);$$

ou, finalmente, attendendo a que é $dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = 0$,

$$dmd\beta - dnd\alpha = \frac{A}{Z^2Ddz}(Dds^2 + dxd^3x + dyd^3y + dzd^3z)$$

$$= \frac{A}{Z^2Ddz}d(dsd^2s) = 0.$$

Portanto a minima distancia entre as perpendiculares infinitamente visinhas a dois planos osculadores consecutivos d'uma curva, levantadas pelos centros de curvatura, é infinitesima ao menos da terceira ordem.

IV. **194**. Querendo applicar a mesma doutrina ás equações (C) (n.° 147) das normaes a uma superficie infinitamente visinhas,

$$x - x' = -p(z - z'),\ y - y' = -q(z - z'),$$

temos $\quad m = -p,\ n = -q,\ \alpha = x' + pz',\ \beta = y' + qz'.$

E a condição $\quad dmd\beta - dnd\alpha = 0,$

é $$dq(dx' + pdz') - dp(dy' + qdz') = 0,$$

identica com a do n.° 186, que, em virtude das equações de definição

$$dz' = pdx' + qdy',\ dp = rdx' + sdy',\ dq = sdx' + tdy',$$

toma a fórma

$$[s(1+q^2) - pqt]dy'^2 + [r(1+q^2) - t(1+p^2)]dy'dx' + [pqr - s(1+p^2)]dx'^2 = 0 \quad ..(a).$$

Por onde se vê que, d'entre os systemas de normaes consecutivas a uma superficie $F(x', y', z') = 0$, sómente satisfazem á condição de ser a minima distancia nulla ou infinitesima ao menos da terceira ordem os das normaes tiradas pelos pontos consecutivos das linhas de curvatura, cujas equações são $F = 0$ e (a). (*Calc. diff.* de Duhamel, n.° 272).

FIM.

ou, finalmente, attendendo a que é $dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = 0$,

$$dm\,d\zeta - dn\,d\alpha = \frac{A}{Z^2Ds}(Dds^2 + dxd^3x + dyd^3y + dzd^3z)$$

$$= \frac{A}{Z^2Ds}\,d\,(dsd^2s) = 0.$$

Portanto a minima distancia entre as perpendiculares infinitamente visinhas a dois planos osculadores consecutivos d'uma curva, levantadas pelos centros de curvatura, é infinitesima ao menos da terceira ordem.

IV. **192.** Querendo applicar a mesma doutrina ás equações (C) (n.º 147) das normaes a uma superficie infinitamente visinhas,

$$x - x' = -p(z - z'),\quad y - y' = -q(z - z'),$$

temos $\qquad m = -p,\ n = -q,\ \alpha = x' + pz',\ \zeta = y' + qz'.$

E a condição $\qquad dm\,d\zeta - dn\,d\alpha = 0,$

é $\qquad dq(dx' + pdz') - dp(dy' + qdz') = 0,$

identica com a do n.º 135, que, em virtude das equações de definição

$$dz' = pdx' + qdy',\ dp = rdx' + sdy',\ dq = sdx' + tdy',$$

toma a fórma

$$[s(1+q^2) - pqt]dy'^2 + [r(1+q^2) - t(1+p^2)]dy'dx' + [pqr - s(1+p^2)]dx'^2 = 0 \ldots (a).$$

Por onde se vê que, d'entre os systemas de normaes consecutivas á uma superficie $F(x', y', z') = 0$, sómente satisfazem á condição de ser a minima distancia nulla ou infinitesima ao menos de terceira ordem os das normaes tiradas pelos pontos consecutivos das linhas de curvatura, cujas equações são $F = 0$ e (a) (*Calc. diff.* de Duhamel, n.º 272).

FIM.

CALCULO INTEGRAL

CALCULO INTEGRAL

I

INTEGRAÇÃO DAS FUNCÇÕES D'UMA SÓ VARIAVEL

Noções preliminares

195. O objecto do CALCULO INTEGRAL é reverter das funcções differenciaes ás suas primitivas.

Para designar o integral d'uma funcção differencial, escreve-se antes d'ella o signal $\int$. Por exemplo: o integral de $dy = 4x^3dx$ indica-se por $y = \int 4x^3dx$.

Assim, quando se dá a derivada $\frac{dy}{dx} = \mathrm{X}$ d'uma funcção y de x, ou a sua differencial $dy = \mathrm{X}dx$, o problema, que se resolve nesta primeira parte do *Calculo integral*, consiste em achar a funcção primitiva $y = \int \mathrm{X}dx$.

196. Este signal $\int$ corresponde a *somma*.

Com effeito, considerando (Fig. 41) o espaço PP' dividido em partes eguaes Δx, a somma dos rectangulos $fx \,.\, \Delta x$ tenderá para ser egual á somma dos espaços $mpp'm'$, que é MPP'M', ao passo que Δx tender para zero; e por isso, chamando x_1, x_2, os valores de x correspondentes ás ordenadas extremas, será

$$\int_{x_1}^{x_2} fxdx = \sum_{x_1}^{x_2} mpp'm' = \lim \sum_{x_1}^{x_2} fx\Delta x = \mathrm{MPP'M'}.$$

197. Examinemos a relação que deve existir entre as funcções primitivas fx, $\mathrm{F}x$, da mesma derivada $y' = \varphi(x)$.

O theorema de Taylor dá

$$f(x+h) = f(x) + h\varphi(x) + \frac{1}{2} h^2 \varphi'(x+\theta h),$$

$$\mathrm{F}(x+h) = \mathrm{F}(x) + h\varphi(x) + \frac{1}{2} h^2 \varphi'(x+\theta h);$$

das quaes se tira $\quad f(x+h) - \mathrm{F}(x+h) = f(x) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{C};$

sendo C uma quantidade que não varía, como se vê, pela mudança de x em $x+h$, isto é, uma constante.

O mesmo se representa na figura. Por quanto, sendo mm' elemento da curva $\mathrm{Y} = \varphi(x)$, os integraes $\mathrm{MPP'M'}$ e $\mathrm{M_{\prime}P_{\prime}P'M'}$ só differem entre si na constante $\mathrm{M_{\prime}P_{\prime}PM}$, a qual depende de se contarem as duas áreas, uma a partir de MP, outra a partir de $\mathrm{M_{\prime}P_{\prime}}$.

Differindo pois só no termo constante as funcções primitivas que têm a mesma derivada: *daremos a um integral a fórma mais geral, que pode ter, ajunctando-lhe uma constante.*

Regras fundamentaes da integração

198. Estas regras derivam-se das correspondentes do *Calculo differencial.* Assim:

I. *O integral d'um polynomio é a somma dos integraes de todos os seus termos, conservando a cada um o seu signal e o seu coefficiente* (n.º 10).

II. *Integra-se* $z^m dz$ *ajunctando uma unidade ao expoente de* z, *e dividindo por* dz *e pelo expoente assim augmentado* (n.º 14, 4.º).

Assim:

$$\int Az^n dz = \frac{Az^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int \frac{Adz}{z^n} = \int Az^{-n} dz = \frac{Az^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{A}{(n-1)\, z^{n-1}} + C.$$

Estas regras são applicaveis ás expressões que, por transformações convenientes, se podem reduzir á fórma $Az^n dz$.

Por exemplo, fazendo $b + cx^n = z$, o que dá $x^{n-1} dx = \frac{dz}{nc}$, teremos

$$\int ax^{n-1} dx\, (b + cx^n)^m = \int \frac{a}{nc} z^m dz = \frac{az^{m+1}}{(m+1)\, nc} + C,$$

ou $$\int ax^{n-1} dx\, (b + cx^n)^m = \frac{a\, (b + cx^n)^{m+1}}{(m+1)\, nc} + C.$$

Na practica, sem fazer explicitamente esta transformação, basta operar como se ella estivesse feita. Por exemplo:

$$\int 6\sqrt{4x^2+3}.xdx=\int\frac{6}{8}\sqrt{4x^2+3}.d\,(4x^2+3)=\frac{1}{2}\,(4x^2+3)^{\frac{3}{2}}+\text{C}.$$

III. Quando $m=-1$, a regra precedente torna-se defeituosa; e parece dar o integral infinito.

Neste caso o integral pertence a outra especie de funcções; e é (n.º 27) (*)

$$\int z^{-1}dz=\int\frac{dz}{z}=lz+\text{C}.$$

(*) Pela regra precedente é $\int z^{-1}dz=\infty+\text{C}$; e na origem é $0=\infty+\text{C}$, que dá $\text{C}=-\infty$.

Por conseguinte $\int z^{-1}dz=\infty-\infty$.

Para determinar esta quantidade, notemos que, devendo o integral

$$\int z^m dz=\frac{z^{m+1}}{m+1}+\text{C}$$

ser nullo na origem, a qual corresponderá a um certo valor a de z, temos

$$0=\frac{a^{m+1}}{m+1}+\text{C},\ \text{C}=-\frac{a^{m+1}}{m+1},\int z^m dz=\frac{z^{m+1}-a^{m+1}}{m+1},$$

que, no caso de $m=-1$, toma a fórma $\frac{0}{0}$. Applicando pois a doutrina do n.º 88, acharemos $\frac{z^{m+1}lz-a^{m+1}la}{1}$, que, para $m=-1$, dá $lz-la$, ou $lz+\text{C}$.

O mesmo se acharia (n.º 94) pela derivação dos termos de

$$\frac{\frac{m+1}{a^{m+1}}-\frac{m+1}{z^{m+1}}}{\frac{(m+1)^2}{(az)^{m+1}}}\quad\text{ou}\quad\frac{a^{-(m+1)}-z^{-(m+1)}}{(m+1)(az)^{-(m+1)}}.$$

Do mesmo modo $\int (a+x)^{-1}dx = \int \frac{dx}{a+x} = l\,(a+x) + C.$

Portanto: *O integral d'uma fracção, cujo numerador é differencial do denominador, é egual ao logarithmo hyperbolico do denominador.*

Nestes integraes convem dar á constante arbitraria a fórma lc, para commodidade dos calculos. Por exemplo:

$$\int \frac{5x^2dx}{3x^4+7} = \frac{5}{12}\int \frac{12x^3dx}{3x^4+7} = \frac{5}{12}\,l\,[c(3x^4+7)].$$

IV. *Integra-se* $a^z dz$ *dividindo a exponencial* a^z *pelo logarithmo hyperbolico da base* (n.° 25).

Assim $$\int Aa^z dz = \frac{Aa^z}{la} + C.$$

V. *O integral d'uma fracção, cujo denominador é um radical quadrado e cujo numerador é differencial da quantidade affecta do radical, é o dobro do mesmo radical* (n.° 15).

Por exemplo $$\int \frac{Adz}{\sqrt{z}} = 2A\sqrt{z} + C.$$

VI. *O integral da differencial do seno repartida pelo coseno; ou de menos a differencial do coseno repartida pelo seno; ou da differencial da tangente repartida pelo quadrado da secante; ou de menos a differencial da cotangente repartida pelo quadrado da cosecante: é egual ao arco* (n.° 31).

Assim:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc}\,(\text{sen} = z) + C, \quad \int -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \text{arc}\,(\cos = z) + C,$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc}\,(\text{tang} = z) + C, \quad \int -\frac{dz}{1+z^2} = \text{arc}\,(\cot = z) + C.$$

Se o raio se suppozesse egual a r, os segundos membros seriam os respectivos valores de

$$\int \frac{rdz}{\sqrt{r^2 - z^2}}, \int -\frac{rdz}{\sqrt{r^2 - z^2}}, \int \frac{r^2dz}{r^2 + z^2}, \int -\frac{r^2dz}{r^2 + z^2}.$$

Por exemplo, pondo $z\sqrt{\frac{b}{a}} = t$, teremos

$$\int \frac{mdz}{a + bz^2} = \frac{m}{a}\int \frac{dz}{1 + \frac{b}{a}z^2} = \frac{m}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{m}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = z\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

Do mesmo modo $\displaystyle\int \frac{mdz}{\sqrt{a - bz^2}} = \frac{m}{\sqrt{b}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = z\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$

199. Uma das regras mais importantes, por suas muitas applicações, é a da *integração por partes*.

De
$$d(ut) = tdu + udt$$

resulta
$$\int udt = ut - \int tdu.$$

Portanto: *decomponha-se a expressão differencial proposta em dois factores, um dos quaes se saiba integrar pelas regras dadas; integre-se o producto, considerando o outro factor como constante; differencie-se depois o resultado em ordem a este factor, que se tomára como constante; e emfim subtráia-se o seu integral do primeiro.*

Exemplos:

$$\int lx.dx = xlx - \int x.d(lx) = xlx - \int dx = xlx - x + C;$$

$$\int x.\cos xdx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} xdx = x \operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

Esta regra tem a vantagem de fazer depender um integral d'outro;

mas, para applical-a utilmente, deve decompor-se a funcção proposta em dois factores taes que o segundo integral, de que se faz depender o primeiro, seja conhecido ou mais simples que este.

Se, por exemplo, decompozessemos $x \cos x dx$ em $\cos x$ e $x dx$, teriamos

$\int \cos x . x dx = \frac{x^2}{2} \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \operatorname{sen} x dx$, reduzindo assim o integral proposto a outro ainda mais complicado.

200. Formula de Bernoulli.

Applicando successivamente a regra de integração por partes, acha-se

$$\int u dt = ut - \int t du$$

$$\int t du = \int t dt . u' = \frac{1}{2} t^2 u' - \frac{1}{2} \int t^2 du',$$

$$\int t^2 du' = \int t^2 dt . u'' = \frac{1}{3} t^3 u'' - \frac{1}{3} \int t^3 du'',$$

. . . .

$$\int t^{n-1} du^{(n-2)} = \int t^{n-1} dt . u^{(n-1)} = \frac{1}{n} t^n u^{(n-1)} - \frac{1}{n} \int t^n du^{(n-1)}.$$

D'onde resulta

$$\int u dt = ut - \frac{1}{2} t^2 u' + \frac{1}{1.2.3} t^3 u'' .. \pm \frac{t^n u^{(n-1)}}{1.2. \ldots n} \mp \frac{1}{1.2 \ldots n} \int t^n du^{(n-1)} \ldots (A);$$

sendo $\frac{du}{dt} = u', \frac{du'}{dt} = u'', \ldots . \frac{du^{(n-1)}}{dt} = u^{(n)}:$

ou $\int u dt = \sum_0^{n-1} (-1)^i \frac{u^{(i)} t^{i+1}}{1.2 \ldots (i+1)} + (-1)^n . \frac{1}{1.2 \ldots n} \int t^n du^{(n-1)};$

sendo $$u^{(0)}=u.$$

Se t é a variavel independente, a formula (A) torna-se mais simples,

$$\int u dt = ut - \frac{1}{1.2} t^2 \frac{du}{dt} + \frac{1}{1.2.3} t^3 \frac{d^2u}{dt^2} \ldots \pm \frac{1}{1.2..n} t^n \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} \mp \frac{1}{1.2..n} \int t^n \frac{d^n u}{dt^{n-1}},$$

ou $$\int u dt = \sum_0^{n-1} (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1.2\ldots(i+1)} \cdot \frac{d^i u}{dt^i} + (-1)^n \frac{1}{1.2\ldots n} \int t^n \frac{d^n u}{dt^{n-1}};$$

sendo $$\frac{d^0 u}{dt^0} = u.$$

A formula (A) de Bernoulli é para o calculo integral o mesmo que é para o differencial a de Taylor, da qual tambem se deduz, como veremos quando tractarmos da integração por series.

201. Com as regras da differenciação das funcções elementares e das funcções de funcções ficâmos habilitados para differenciar quaesquer funcções propostas.

Não succede porém o mesmo em quanto á integração, porque só a sabemos fazer exactamente em alguns casos; sendo necessario nos outros recorrer a processos de approximação.

Das fracções racionaes

202. Na *Algebra Superior* (n.º 138) ensinamos o processo geral para decompor uma fracção racional $\mathrm{N}dx$ em outras cuja forma seja alguma das seguintes:

$$\frac{\mathrm{A}dx}{x-a},\ \frac{\mathrm{A}dx}{(x-a)^n},\ \frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})dx}{x^2+px+q},\ \frac{(\mathrm{A}x+\mathrm{B})dx}{(x^2+px+q)^n};$$

sendo A, B, p, q, n constantes, e x^2+px+q os factores reaes do segundo gráu, compostos de factores imaginarios do primeiro.

Tracta-se pois de reverter d'estas fracções componentes ás primitivas de que ellas são differenciaes.

Para mais facilidade notaremos que, expellindo do denominador das duas ultimas o segundo termo, pela hypothese $x=z-\frac{1}{2}p$ (*Alg. Sup.* n.º 34), e pondo a quantidade positiva $q-\frac{1}{4}p^2=\beta^2$, estas fracções se reduzirão simplesmente a

$$\frac{(\mathrm{A}z+\mathrm{B}')\,dz}{z^2+\beta^2},\ \frac{(\mathrm{A}z+\mathrm{B}')\,dz}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

1.º Caso. É (n.º 198, III) $\int\frac{\mathrm{A}dx}{x-a}=\mathrm{A}lc(x-a)$.

Por exemplo:

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}[l(a+x)-l(a-x)]+lc=\frac{1}{2a}l\left(\frac{c(a+x)}{a-x}\right);$$

$$\int\frac{(2-4x)\,dx}{x^2-x-2}=-\int\frac{2dx}{x-2}-\int\frac{2dx}{x+1}=l\left(\frac{c}{(x^2-x-2)^2}\right).$$

2.° Caso. É (n.° 198, II) $\int \frac{A dx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C.$

Por exemplo:

$$\int \frac{(x^3+x^2+2)\,dx}{x^5-2x^3+x} = \int \left(\frac{2dx}{x} + \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}\,dx}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}\,dx}{(x+1)^2} - \frac{\frac{5}{4}\,dx}{x+1} \right)$$

$$= 2lx - \frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}\,l\,(x-1) + \frac{1}{2(x+1)} - \frac{5}{4}\,l\,(x+1) + C.$$

3.° Caso. É $\int \frac{(Az+B)\,dz}{z^2+\beta^2} = \int \frac{Azdz}{z^2+\beta^2} + \int \frac{Bdz}{z^2+\beta^2},$

ou (n.° 198, III e VI)

$$\int \frac{(Az+B)dz}{z^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\,l\,(z^2+\beta^2) + \frac{B}{\beta}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{z}{\beta}\right) + C.$$

Seja, por exemplo,

$$\int \frac{xdx}{x^3-1} = \int \frac{\frac{1}{3}\,dx}{x-1} - \int \frac{\frac{1}{3}\,(x-1)\,dx}{x^2+x+1}.$$

O primeiro integral do segundo membro é $\frac{1}{3}\,l\,(x-1)$. Para achar o segundo, fazendo $x = z - \frac{1}{2}$, teremos

$$-\int \frac{\frac{1}{3}\,zdz}{z^2+\frac{3}{4}} + \int \frac{\frac{1}{2}\,dz}{z^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{6}\,l\left(z^2+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{2z}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\,l\sqrt{(x^2+x+1)} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\text{arc}\left(\text{tang} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

E portanto:

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\left[l(x-1) - l\sqrt{(x^2+x+1)} + \sqrt{3}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right] + C.$$

Para outro exemplo, teremos:

$$\int \frac{(x^2-x+1)\,dx}{(x+1)(x^2+1)} = \int\left(\frac{3}{2}\,\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{(x+1)\,dx}{x^2+1}\right)$$

$$= l\frac{c\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt[4]{(x^2+1)}} - \frac{1}{2}\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = x) + C.$$

4.º Caso. É $\displaystyle\int \frac{(Az+B)\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} = -\frac{A}{2(n-1)(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \int \frac{B\,dz}{(z^2+\beta^2)^n};$

ou $\frac{1}{2}Al\,(z^2+\beta^2)$ em logar do primeiro termo, no caso de $n=1$.

Para facilitar a integração do segundo termo, fazendo-a depender d'outra na qual seja menor o expoente do denominador, temos (n.º 199)

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} = \frac{z}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{z^2\,dz}{(z^2+\beta^2)^n};$$

ou, por ser $\displaystyle\frac{z^2\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} - \frac{\beta^2\,dz}{(z^2+\beta^2)^n},$

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{z}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} + 2(n-1)\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} \\ \\ -2(n-1)\beta^2\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}. \end{array}\right.$$

da qual se tira

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n} = \frac{z}{2(n-1)\beta^2(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\beta^2}\int\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} \ldots (a).$$

Querendo pois integrar uma serie de fracções

$$\int\frac{A\,dz}{(z^2+\beta^2)^n} + \int\frac{B\,dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \int\frac{C\,dz}{(z^2+\beta^2)^{n-2}} + \ldots,$$

reduziremos a integração da primeira a $\int\frac{A'dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}$, que sommaremos com a segunda; depois $\int\frac{(A'+B)\,dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}}$ a $\int\frac{A''dz}{(z^2+\beta^2)^{n-2}}$, que sommaremos com a terceira; e assim por diante, até chegar a $\int\frac{K\,dz}{z^2+\beta^2}$, que já conhecemos (n.º 198, VI).

Seja, por exemplo:

$$\int\frac{(x^4+x^3+3x^2+3)\,dx}{(x^2+1)^3} = \int\frac{(1-2x)dx}{(x^2+1)^3} + \int\frac{(2x+1)dx}{(x^2+1)^2} + \int\frac{dx}{x^2+1}.$$

A parte, em que entra x nos numeradores, dá

$$\int\frac{-2x\,dx}{(x^2+1)^3} + \int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1}.$$

As outras partes dão, reduzindo (a) e sommando successivamente,

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3} + \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{7}{4}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2},$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^3} + \int\frac{dx}{(x^2+1)^2} + \int\frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{7}{8}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{15}{8}\int\frac{dx}{x^2+1}.$$

Integrando pois o ultimo termo e sommando todas as partes, será

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+3}{(x^2+1)^3} = \frac{x+2}{4(x^2+1)^2} + \frac{7x-8}{8(x^2+1)} + \frac{15}{8} \text{ arc } (\text{tg} = x) + \text{C}.$$

Pelo mesmo processo se integrará

$$\frac{dx}{(1+x)\,x^2\,(x^2+2)\,(x^2+1)^2}.$$

Decomposta esta fracção (*Alg. Sup.*, pag. 226), os unicos termos, cuja integração pode offerecer alguma difficuldade, são

$$\int \frac{1}{2} \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^2} + \int \frac{1}{4} \frac{(x-1)\,dx}{x^2+1};$$

e estes, sendo tractados pelo methodo precedente, dão

$$-\frac{x+1}{4(x^2+1)} + \frac{1}{8}\, l\,(x^2+1) - \frac{1}{2} \text{ arc } (\text{tang} = x) + \text{C}.$$

Sirvam ainda para exercicio os dois exemplos seguintes:

$$\int \frac{b^3 dx}{x^6-a^6} = \frac{b^3}{3a^5} \left\{ \begin{array}{l} l\,\dfrac{(x-a)\sqrt{x^2-ax+a^2}}{(x+a)\sqrt{x^2+ax+a^2}} - \sqrt{3} \text{ arc} \left(\text{tang} = \dfrac{2x-a}{a\sqrt{3}} \right) \\ -\sqrt{3} \text{ arc} \left(\text{tang} = \dfrac{2x+a}{a\sqrt{3}} \right) + \text{C} \end{array} \right\},$$

$$\int \frac{(x^3-6x^2+4x-1)\,dx}{x^4-3x^3-3x^2+7x+6} = l\,\frac{(x-2)(x+1)}{x-3} + \frac{1}{x+1} + \text{C}.$$

Funcções irracionaes

203. Do que fica dicto segue-se que sabemos integrar todas as funcções algebricas racionaes.

Das que são irracionaes nem sempre é possivel obter integraes de fórma finita; mas, quando é possivel, o processo ordinariamente empregado consiste em tornal-as racionaes, pela substituição da variavel em funcção de outra, ligada com ella por uma relação propria para esse fim.

204. Comecemos pelos radicaes monomios, aos quaes se reduzem tambem os polynomios lineares.

Seja a expressão $$\frac{(\sqrt[3]{x}+x\sqrt{x}+x^2)\,dx}{x+\sqrt{x}}.$$

Por ser 6 multiplo de 2 e 3, é claro que a hypothese $x=z^6$ fará desapparecer a irracionalidade; e a expressão transformar-se-ha em

$$\frac{6(z^{14}+z^{11}+z^4)dz}{z^3+1}=6z^{11}dz+6zdz-\frac{6zdz}{z^3+1},$$

cujo integral é

$$\frac{1}{2}z^{12}+3z^2-2\,lc\,\frac{\sqrt{z^2-z+1}}{z+1}-2\sqrt{3}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right).$$

A expressão $\frac{\sqrt{x}.dx}{x-1}$, fazendo $x=z^2$, dará

$$\int\frac{\sqrt{x}.dx}{x-1}=\int\frac{2z^2dz}{z^2-1}=2z+lc\frac{z-1}{z+1}=2\sqrt{x}+lc\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

205. Radicaes do segundo gráu. Consideremos agora as funcções em que entra o radical $\sqrt{a+bx\pm x^2}$.

Tractaremos separadamente dos dois casos de ser x^2 affecto do signal $+$ ou do signal $-$.

1.º Caso. Pondo $\sqrt{a+bx+x^2}=z\pm x$,

quadrando e resolvendo, teremos

$$x=\frac{z^2-a}{b\mp 2z},\ dx=\frac{2\left[bz\mp(z^2+a)\right]dz}{(b\mp 2z)^2},$$

e

$$\sqrt{a+bx+x^2}=\frac{bz\mp(z^2+a)}{b\mp 2z};$$

ficando assim racional tudo o que compõe a funcção proposta.

Exemplo. Usando dos signaes inferiores, é:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}=\int\frac{2dz}{2z+b}=l\,\frac{1}{2}\,c(2z+b)=lc\left(\frac{1}{2}\,b+x+\sqrt{a+bx+x^2}\right).$$

Do mesmo modo $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=lc\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right).$

Para $dy=dx\sqrt{a^2+x^2}$,

podemos tambem fazer $\sqrt{a^2+x^2}=z-x$,

e abreviar depois do modo seguinte:

$$dx=\frac{dz}{2}+\frac{a^2dz}{2z^2},\ dy=zdx-xdx,\ y=-\frac{1}{2}\,x^2+\int zdx;$$

e portanto

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}a^2lcz = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{1}{2}a^2lc(x+\sqrt{a^2+x^2});$$

dando á constante a fórma $\frac{1}{2}a^2lc$.

Para $dy = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$, ou $dy\sqrt{-1} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$,

é
$$y\sqrt{-1} = l(x+\sqrt{x^2-1}) + C.$$

Mas, suppondo $x=1$ quando $y=0$, a mesma equação tambem dá $\cos y = x$, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{-1}\operatorname{sen} y$, e é $C=0$: logo a formula precedente reduz-se á da *Algebra Superior* (n.° 159, 1),

$$\pm y\sqrt{-1} = l(\cos y \pm \sqrt{-1}\operatorname{sen} y).$$

2.° Caso. Quando o radical proposto, que suppomos real, é $\sqrt{a+bx-x^2}$, sería necessario, para seguir o processo antecedente, igualal-o a $z \pm x\sqrt{-1}$, introduzindo imaginarios. Podemos porém, no caso de ser a positivo, fazer $\sqrt{a+bx-x^2} = zx \pm \sqrt{a}$, sem o mesmo inconveniente.

Em todos os casos, chamando α e β as raizes de $x^2-bx-a=0$, que devem ser reaes para que o radical o possa ser, se fizermos

$$\sqrt{a+bx-x^2} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (x-\alpha)z,$$

e depois quadrarmos e supprimirmos o factor commum $x-\alpha$, acharemos

$$x = \frac{\beta+\alpha z^2}{1+z^2},\ dx = \frac{2(\alpha-\beta)zdz}{(1+z^2)^2},\ \sqrt{a+bx-x^2} = \frac{(\beta-\alpha)z}{1+z^2},$$

que são racionaes.

Exemplos:

Pondo $\sqrt{a+bx-x^2}=\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=(x-\alpha)z$,

é $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}}=C-2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}\right).$$

Pondo $$\sqrt{1-x^2}=(1-x)z,$$

é $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{2dz}{z^2+1}=C+2\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang}=z);$$

e portanto, se corresponder $x=0$ á origem do integral, será

$$\mathrm{arc}\,(\mathrm{sen}=x)=-\frac{1}{2}\pi+2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

Pondo $$\sqrt{a^2-x^2}=(a-x)z,$$

é $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{2a^2z}{(1+z^2)^2}+\frac{a^2z}{1+z^2}+a^2\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang}=z)+C,$$

ou $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)+C.$$

Pode tambem applicar-se este processo ao primeiro caso, quando as raizes de $a+bx+x^2=0$ são reaes.

206. O habito de calcular muitas vezes indica transformações mais convenientes.

Assim, reduzindo o radical ás fórmas $\sqrt{z^2\pm a^2}$ ou $\sqrt{a^2\pm z^2}$, pela expulsão do segundo termo, a integração de $\frac{Xdx}{\sqrt{a+bx\pm x^2}}$, sendo X um polynomio racional, reduzir-se-ha á de termos da fórma $\frac{z^m\,dz}{\sqrt{z^2\pm a^2}}$, ou $\frac{z^m\,dz}{\sqrt{a^2\pm z^2}}$: e estes tornar-se-hão racionaes, pondo $\sqrt{a^2\pm z^2}=a-uz$, o que dá

$$z=\frac{2au}{u^2\mp 1},\ \sqrt{a^2\pm z^2}=-\frac{a\,(u^2\pm 1)}{u^2\mp 1},\ dz=-2adu\frac{u^2\pm 1}{(u^2\mp 1)^2};$$

ou tambem $$\sqrt{z^2-a^2}=(z-a)\,x.$$

Assim, pondo $$x=b-z,$$

acha-se

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2bx-x^2}}=\int\frac{-dz}{\sqrt{b^2-z^2}}=\mathrm{C}+\mathrm{arc}\left(\cos=\frac{z}{b}\right)=\mathrm{C}+\mathrm{arc}\left(\cos=\frac{b-x}{b}\right).$$

Do mesmo modo, pondo $x=z-a$, acha-se

$$y=\int\frac{\pm\,adx}{\sqrt{2ax+x^2}}=\int\frac{\pm\,adz}{\sqrt{z^2-a^2}}=alc\,(x+a\pm\sqrt{2ax+x^2}),$$

que é a equação da catenaria (*Duh. Mec.* t. 1.º, n.º 159, eq. 5).

207. Adiante tractaremos dos radicaes do segundo gráu, nos quaes o polynomio debaixo do radical é do terceiro ou do quarto gráu.