Differenciaes binomias

208. Proponhamo'-nos agora integrar as expressões differenciaes binomias da fórma

$$Xdx = Kx^m dx (a + bx^n)^p;$$

sendo m, n, p, numeros inteiros ou fraccionarios, positivos ou negativos.

O caso de ser p fraccionario é o mais importante; porque o de ser inteiro é o da integração d'uma serie de monomios ou d'uma fracção racional.

Pondo $$z = a + bx^n,$$

resolvendo esta equação em ordem a x, elevando á potencia $m+1$, differenciando, e substituindo, teremos

$$x = \frac{(z-a)^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}},\ x^m dx = \frac{(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}}{nb^{\frac{m+1}{n}}} dz,$$

$$Kx^m dx (a+bx^n)^p = K\frac{(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1} z^p dz}{nb^{\frac{m+1}{n}}}.$$

Se $\frac{m+1}{n}$ é inteiro, a integração reduz-se, pela desenvolução de $(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}$, á d'uma serie de monomios, quando $\frac{m+1}{n}-1$ é positivo; á de $z^p dz$, quando $\frac{m+1}{n}-1$ é egual a zero; e á d'uma fracção racional, quando $\frac{m+1}{n}-1$ é negativo.

E applicando isto á mesma expressão posta debaixo da fórma

$$Kx^{m+np}dx\,(ax^{-n}+b)^p,$$

vê-se que tambem a sabemos integrar no caso de ser inteiro $\dfrac{m+np+1}{-n}$: reduzindo-se, do mesmo modo, a integração á d'um polynomio, d'um monomio, ou d'uma fracção racional; segundo for $-\left(\dfrac{m+1}{n}+p+1\right)$ positivo, nullo, ou negativo.

Portanto, sabemos integrar a expressão proposta: 1.º *Quando o expoente de* x *fóra do binomio, sendo augmentado d'uma unidade e depois dividido pelo expoente de* x *dentro do binomio, der um quociente inteiro:* 2.º *Quando este quociente for fraccionario, mas for inteira a somma algebrica d'elle com o expoente do binomio.*

209. No caso de ser p um numero fraccionario $\dfrac{h}{k}$, facilita-se o calculo, pondo $a+bx^n=z^k$.

Seja, por exemplo,

$$Xdx = x^{-2}dx\,(a+x^3)^{-\frac{5}{3}} = x^{-7}(ax^{-3}+1)^{-\frac{5}{3}}dx,$$

que é integravel, por satisfazer á condição $\dfrac{-2+1}{3}-\dfrac{5}{3}=$ inteiro, ou $\dfrac{-7+1}{-3}=$ inteiro. Pondo $ax^{-3}+1=z^3$, o que dá

$$x=\left(\frac{z^3-1}{a}\right)^{-\frac{1}{3}},\ x^{-6}=\left(\frac{z^3-1}{a}\right)^2,\ -6x^{-7}dx=\frac{6z^2(z^3-1)}{a^2}dz,$$

virá

$$\int Xdx=\int -\frac{(1-z^{-3})dz}{a^2}=C-\frac{z+\frac{1}{2}z^{-2}}{a^2}=C-\frac{3x^3+2a}{2a^2x\sqrt[3]{(x^3+a)^2}}.$$

Similhantemente se achará

$$\int \frac{adx}{(b^2\pm x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{ax}{b^2\sqrt{b^2\pm x^2}}+C.$$

Reducção d'um integral a outro

210. Quando a differencial binomia proposta não satisfaz ás condições de integralidade (n.º 208), faz-se depender o seu integral d'outro que mais facilmente se possa obter; usando para isso do methodo de integrar por partes.

Assim, considerando primeiro $a+bx^n$ como constante, a integração por partes dá

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}}{m+1}(a+bx^n)^p - \frac{nbp}{m+1}\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1} \ldots (1):$$

e, por ser $\quad x^m(a+bx^n)^p = ax^m(a+bx^n)^{p-1} + bx^{m+n}(a+bx^n)^{p-1},$

tambem temos

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = a\int x^m dx(a+bx^n)^{p-1} + b\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1} \ldots (2).$$

Depois, eliminando $\int x^m dx(a+bx^n)^p$ entre (1) e (2), vem

$$\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^{p-1} = \frac{x^{m+1}(a+bx)^p}{b(m+1+np)} - \frac{a(m+1)}{b(m+1+np)}\int x^m dx(a+bx^n)^{p-1};$$

ou, mudando m em $m-n$ e p em $p+1$,

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+1+np)} - \frac{a(m+1-n)}{b(m+1+np)}\int x^{m-n}dx(a+b^n)^p \ldots (A.$$

Se entre (1) e (2) eliminarmos $\int x^{m+n}dx\,(a+bx^n)^{p-1}$, virá

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+np} + \frac{nap}{m+1+np}\int x^m\,dx(a+bx^n)^{p-1} \ldots (B).$$

Finalmente, se resolvermos a equação (A) em ordem a $\int x^{m-n}dx(a+bx^n)^p$, e mudarmos m em $m+n$; e se resolvermos a equação (B) em ordem a $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{p-1}$, e mudarmos p em $p+1$: teremos

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{(m+1)\,a} - \frac{b(m+np+n+1)}{(m+1)\,a}\int x^{m+n}dx(a+bx^n)^p \ldots (C),$$

$$\int x^m\,dx(a+bx^n)^p = -\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{na\,(p+1)} + \frac{m+np+n+1}{na\,(p+1)}\int x^m\,dx(a+bx^n)^{p+1} \ldots (D).$$

211. Vejamos o uso d'estas formulas:

1.º A formula (A) faz depender o integral $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$ d'outro $\int x^{m-n}dx\,(a+bx^n)^p$, no qual o expoente de x fóra do binomio tem de menos n unidades; podendo assim abater-se successivamente n, $2n$, ...in unidades ao expoente de x fóra do binomio, até que o integral proposto dependa de $\int x^{m-in}dx\,(a+bx^n)^p$.

2.º A formula (B) faz depender o integral $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^p$ de outro $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{p-1}$, no qual o expoente do binomio tem de menos uma unidade; podendo assim abater-se 1, 2, ...i unidades a este expoente, até que o integral proposto dependa de $\int x^m\,dx\,(a+bx^n)^{p-i}$.

3.º As formulas (C) e (D) servem, inversamente, para reduzir um integral binomio a outro no qual se augmentam in unidades ao expoente de x fóra do binomio, ou i unidades ao expoente do binomio.

212. Pouca attenção basta para ver que, se mudarmos m em $m-n$, $m-2n$, ...$m-(i-1)n$, e fizermos $m-in=s$, isto é, $i=\dfrac{m-s}{n}$, a formula (A) dará, por substituições successivas,

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \left\{\begin{matrix} (a+bx^n)^{p+1}x^{s+1}\sum_0^{i-1} A_\alpha x^{n\alpha} \\ + R\int x^s dx\,(a+bx^n)^p \end{matrix}\right\} \ldots\ldots (A)'.$$

E similhantemente a applicação successiva da formula (B) dará

$$\int x^m dx\,(a+bx^n)^p = \left\{\begin{matrix} x^{m+1}(a+bx^n)^{q+1}\sum_0^{p-(q+1)} A_\alpha (a+bx^n)^\alpha \\ + R\int x^m dx\,(a+bx^n)^q \end{matrix}\right\} \ldots (B)'.$$

213. Para reduzir $\int x^m dx\,(a+bx^n)^p$ a $\int x^s dx\,(a+bx^n)^q$, sendo $p-q$ inteiro, podem empregar-se successivamente as formulas (A)$'$ e (B)$'$.

Mas é mais expedito: desenvolver em serie $(a+bx^n)^{p-q}$, o que dá

$$\int x^m dx\,(a+bx^n)^p = \int dx\,(a+bx^n)^q (Ax^m + Bx^{m+n} + \ldots Qx^{m+(p-q)n});$$

applicar a formula (A)$'$ a cada um dos termos, pondo respectivamente por m os numeros $m, m+n, \ldots m+(p-q)n$; e sommar.

Teremos assim:

$$\int Ax^m dx(a+bx^n)^q = (a+bx^n)^{q+1}x^{s+1}\sum_0^{i-1} A_\alpha x^{n\alpha} + R_0\int x^s dx(a+bx^n)^q,$$

$$\int Bx^{m+n}dx(a+bx^n)^q = (a+bx^n)^{q+1}x^{s+1}\sum_0^{i} B_\alpha x^{\alpha n} + R_1\int x^s dx\,(a+bx^n)^q,$$

....

$$\int Qx^{m+(p-q)n}dx\,(a+bx^n)^q = \left\{\begin{matrix} (a+bx^n)^{q+1}x^{s+1}\sum_0^{i-1+p-q} Q_\alpha x^{n\alpha} \\ + R_{p-q}\int x^s dx\,(a+bx^n)^q; \end{matrix}\right.$$

cuja somma é:

$$\int x^m dx(a+bx^n)^p = \left\{\begin{array}{l}(a+bx^n)^{q+1}x^{s+1}\sum_0^{i-1+p-q} A_\alpha x^{n\alpha} \\ \quad + R\int x^s dx\,(a+bx^n)^q\end{array}\right\} \ldots (E),$$

sendo $$i = \frac{m-s}{n}.$$

(Veja-se o *Calculo* de Bezout, n.os 128 até 132).

214. Para fazer uso da formula (E), e por conseguinte das $(A)'$ e $(B)'$, que se comprehendem nella quando se suppõe respectivamente $p=q$ ou $m=s$, podemos determinar os $i+p-q+1$ coefficientes $A_0, A_1, \ldots A_{i-1+p-q}$, R, differenciando, simplificando pela divisão por $x^s dx\,(a+bx^n)^q$, e applicando o methodo dos coefficientes indeterminados.

Com effeito, differenciando e simplificando por aquella divisão, acha-se

$$x^{ni}(a+bx^n)^{p-q} = \left\{\begin{array}{l} nb\,(q+1)\sum_0^{i+p-q} A_\alpha x^{n\alpha} \\ + (a+bx^n)(s+1)\sum_0^{i-1+p-q} A_\alpha x^{n\alpha} \\ + n(a+bx^n)\sum_0^{i-1+p-q} \alpha A_\alpha x^{n\alpha} + R. \end{array}\right.$$

Ora, o exame d'esta equação mostra que todos os expoentes de x são multiplos de n; e que no primeiro membro entram todas as potencias de x^n desde o gráu i até $i+p-q$, e no segundo membro todas as potencias de x^n desde o gráu 0 até $i+p-q$: portanto o methodo dos coefficientes indeterminados dá as $i+p-q+1$ equações necessarias para determinar $A_0, A_1, \ldots A_{i+p-q-1}$, R.

215. Exemplos:

I. Reduzir $$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ a } \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Por ser $\frac{5-1}{2}=2=i$, a reducção é possivel; e a formula (A)' dá

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (Ax^2 + Bx^4) + R \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Differenciando pois, dividindo por $x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$, e applicando o methodo dos coefficientes indeterminados, teremos:

$$x^4 = (1-x^2)(2A + 4Bx^2) - (Ax^2 + Bx^4) + R;$$

depois $\quad 1 = -4B - B, \ -2A - A + 4B = 0, \ 2A + R = 0,$

que dão $\quad B = -\frac{1}{5}, \ A = -\frac{4}{15}, \ R = \frac{8}{15};$

e finalmente, pela substituição d'estes,

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{15}x^2 + \frac{1}{5}x^4\right) + \frac{8}{15} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left(\frac{8}{5} + \frac{4}{15}x^2 + \frac{1}{5}x^4\right) \sqrt{1-x^2} + C.$$

A reducção de

$$\int \frac{x^k dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = \int \frac{x^{k-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{\beta - x}} \text{ a } \int \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = \int \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{\beta - x}}$$

é possivel, por ser $\quad \dfrac{k - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1} = k = i,$

..

Faremos portanto

$$\int \frac{x^{k-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\beta - x}} = (\beta - x)^{\frac{1}{2}} \sum_0^{k-1} A_\alpha x^{\frac{1}{2}+\alpha} + R \int \frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\beta - x}};$$

depois, differenciando e dividindo por $\dfrac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{\beta - x}}$, teremos

$$x^k = \beta \sum_0^{k-1} \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) A_\alpha x^\alpha - \sum_0^{k-1} (1 + \alpha) A_\alpha x^{\alpha+1} + R,$$

a qual, pelo methodo dos coefficientes indeterminados, dará

$$\frac{1}{2} A_0 \beta + R = 0, \ldots \left(\frac{3}{2} + \alpha\right) \beta A_{\alpha+1} - (1 + \alpha) A_\alpha = 0, \ldots 1 + k A_{k-1} = 0;$$

e d'esta emfim deduziremos successivamente, a partir da ultima, A_{k-1}, $A_{k-2}, \ldots R$; ficando assim conhecido o integral

$$\int \frac{x^k dx}{\sqrt{\beta x - x^2}} = \sqrt{\beta x - x^2} \sum_0^{k-1} A_\alpha x^\alpha + R \int \frac{dx}{\sqrt{\beta x - x^2}}.$$

II. Para reduzir $\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}}$ a $\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^n}$,

reducção possivel, por ser $p - q = -n + 1 + n = 1$, a formula $(B)'$ dá

$$\int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^{n-1}} = (z^2 + \beta^2)^{-n+1} Az + R \int \frac{dz}{(z^2 + \beta^2)^n};$$

depois, differenciando, dividindo por $\frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}$, e applicando o methodo dos coefficientes indeterminados, teremos

$$1 = -2A(n-1) + A, \quad \beta^2 = A\beta^2 + R,$$

que dão $$A = -\frac{1}{2n-3}, \quad R = 2\beta^2 \frac{n-1}{2n-3};$$

e por tanto

$$\int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^{n-1}} = -\frac{z}{(2n-3)(z^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2(n-1)\beta^2}{2n-3} \int \frac{dz}{(z^2+\beta^2)^n}.$$

Esta equação, resolvida em ordem ao integral do segundo membro, dá dá a equação (a) da pag. 206.

III. Para reduzir $\int x^2 dx (\beta^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ a $\int dx (x^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$,

como é possivel, por serem $\frac{m-s}{n} = 1$, $p - q = 1$, a formula (E) dá

$$\int x^2 dx (\beta^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = (\beta^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} (Ax + Bx^3) + R \int dx (\beta^2 - x^2)^{\frac{1}{2}};$$

depois differenciando, dividindo por $dx(\beta^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, e applicando o methodo dos coefficientes indeterminados, acharemos as condições

$$-1 = -3B - 3B, \quad \beta^2 = -3A - A + 3\beta^2 B, \quad A\beta^2 + R = 0,$$

que dão $$B = \frac{1}{6}, \quad A = -\frac{1}{8}\beta^2, \quad R = \frac{1}{8}\beta^4;$$

e finalmente

$$\int x^2 dx (\beta^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = (\beta^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \left(-\frac{\beta^2 x}{8} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\beta^4}{8} \int dx (\beta^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

216. Quorendo reduzir $\int x^s dx\,(a+bx^n)^q$ a $x^m dx\,(a+bx^n)^p$, podemos usar do mesmo modo da formula (E), resolvendo-a em ordem ao integral que entra no segundo membro.

217. Quando R sahe nullo, como acontece na reducção de

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2-x^2}} \text{ a } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

isto é, de $\quad \int x^{-5}dx\,(a^2x^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}}$ a $\int x^{-1}dx\,(a^2x^{-2}-1)^{-\frac{1}{2}},$

a proposta integra-se immediatamente pelo processo exposto.

Quando $\int x^m dx\,(a+bx^n)^p$ se pode reduzir a $\int x^{n-1}dx\,(a+bx^n)^p$, a funcção é integravel; e, para acabar de integral-a, basta accrescentar $R\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb\,(p+1)}$ á parte integrada. Esta reducção tem logar no caso de ser inteiro $\frac{m-(n-1)}{n}$; o que é com effeito a condição de integrabilidade considerada no n.º **208**.

218. Vimos no n.º **206** que a integração das funcções algebricas, affectas, no denominador, do radical $\sqrt{A+Bx+Cx^2}$, se pode reduzir, expellindo o segundo termo, á de expressões da fórma $\frac{z^n dz}{\sqrt{\pm(a^2\pm z^2)}}$.

Segundo o que fica dicto, a integração d'estas novas expressões pode reduzir-se á de $\frac{zdz}{\sqrt{\pm(a^2\pm z^2)}}$, no caso de ser n impar; e á de $\frac{dz}{\sqrt{\pm(a^2\pm z^2)}}$, no caso de ser n par.

E como as ultimas expressões se integram, a primeira algebricamente, e a segunda por arcos de circulo, vê-se que as funcções propostas se podem integrar.

219. As integrações fazem-se muitas vezes mais promptamente com o auxilio das seguintes formulas, que não são mais do que a applicação das (A), (C), (B).

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{x^2 \pm 1}}{n} \mp \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}};$$

$$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{1-x^2}};$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m} + \frac{2m-1}{m}a\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2} + (n-1)\int x^{n-2}dx.\sqrt{a^2-x^2}.$$

Das funcções exponenciaes

220. Por ser (n.º 198, IV) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{la}$,

podemos já integrar as funcções exponenciaes em dois casos:

1.º Se for $z = f(a^x) = fu$,

e soubermos integrar $fudu$, será

$$\int za^x dx = \int \frac{fudu}{la}.$$

Por exemplo $\int \frac{a^x dx}{\sqrt{1 + a^{nx}}} = \frac{1}{la} \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^n}}.$

2.º De $d\,(ze^x) = e^x dx\,(z + z')$

tira-se $\int e^x dx\,(z + z') = ze^x + C;$

o que ensina a integrar qualquer funcção que seja producto de $e^x dx$ pela somma de duas partes uma derivada da outra.

Exemplos:

$$\int e^x dx (3x^2 + x^3 - 1) = \int e^x dx \left(x^3 - 1 + \frac{d\,(x^3 - 1)}{dx}\right) = e^x (x^3 - 1) + C,$$

$$\int \frac{e^x x dx}{(1 + x)^2} = \int e^x dx \left(\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{(1 + x)^2}\right) = \frac{ex}{1 + x} + C.$$

221. Nos outros casos recorre-se á integração por partes.

Por exemplo, $x^n a^x dx$, considerando em primeiro logar x^n como constante, dá

$$\int x^n a^x dx = \frac{x^n a^x}{la} - \frac{n}{la}\int x^{n-1} a^x dx;$$

depois, mudando n em $n-1$, $n-2$,..., e substituindo successivamente, acha-se por fim

$$\int x^n a^x dx = a^x\left(\frac{x^n}{la} - \frac{nx^{n-1}}{l^2a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{l^3a} \ldots \pm \frac{1.2.n}{l^{n+1}a}\right) + C,$$

ou $$\int x^n a^x dx = a^x\left[\frac{x^n}{la} + \sum_1^n\left((-1)^i \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)\,x^{n-i}}{l^{i+1}a}\right)\right] + C.$$

O mesmo calculo se applica a $za^x dx$, onde z é uma funcção algebrica e inteira de x; o que dá

$$\int za^x dx = \frac{za^x}{la} - \int\frac{a^x z' dx}{la},$$

mudando depois z em z', z'',..., e substituindo, successivamente.

222. No caso de ser negativo o expoente n, vê-se, reflectindo no espirito do methodo precedente, que convém augmentar o expoente de x.

Para isso, integraremos, suppondo primeiro a^x constante; ou resolveremos a primeira equação do numero precedente em ordem ao integral que entra no segundo membro, escrevendo $-n+1$ em logar de n: o que dará

$$\int\frac{a^x dx}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{la}{n-1}\int\frac{a^x dx}{x^{n-1}}.$$

Depois, mudando n em $n-1$, $n-2$,..., 2, e substituindo successivamente, obtem-se

$$\int\frac{a^x dx}{x^n}=-a^x\sum_1^{n-1}\left(\frac{l^{i-1}a}{(n-1)..(n-i)x^{n-i}}\right)+\frac{l^{n-1}a}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\int\frac{a^x dx}{x}$$

Ficamos pois reduzidos a procurar o integral $\int\frac{a^x dx}{x}$, que tem sido objecto de repetidos trabalhos dos analystas, e que é forçoso considerar como funcção transcendente d'uma especie particular, a qual não depende d'arcos de circulo nem de logarithmos.

Na falta de methodo rigoroso para obter este integral, empregam-se as series.

Assim, por ser $\quad \frac{a^x}{x}=\frac{1}{x}+la+\frac{l^2a}{1.2}x+\frac{l^3a}{1.2.3}x^2+\ldots,$

é $\quad \int\frac{a^x dx}{x}=lx+xla+\frac{x^2l^2a}{1.2.2}+\frac{x^3l^3a}{1.2.3.3}+\ldots.+C.$

223. No caso de ser n fraccionario, um dos processos precedentes reduziria o integral a outro, no qual o expoente de x ficasse comprehendido entre 1 e -1; e depois o desenvolvimento em serie serviria para achar por approximação este ultimo integral.

Tudo isto se pode egualmente applicar a $za^x dx$, quando z é uma funcção algebrica de x.

224. Mais geralmente, sendo z uma funcção transcendente de x, e pondo

$$\int z^m dx=Z,\ \int Z dx=Z_1,\ \int Z_1 dx=Z_2,\ldots.,$$

é $$\int Pz^m dx=PZ-P'Z_1+P''Z_2-\ldots.$$

225. Se Pdx se sabe integrar, pode tambem considerar-se em primeiro logar z^m como constante. E assim, pondo

$$z'\int P dx = P_1,\ z'\int P_1 dx = P_2 \ldots,$$

será

$$\int P z^m dx = z^m \int P dx + \sum_1^m (-1)^i \,.\, m(m-1)\ldots(m-i+1) z^{m-i} \int P_i dx.$$

No caso de ser negativo o expoente de z: pondo

$$P = z'\int Q_1 dx,\ Q_1 = z'\int Q_2 dx, \ldots$$

será $\displaystyle \int \frac{P dx}{z^m} = \int \frac{P}{z'} \cdot \frac{dz}{z^m} = -\frac{P}{(m-1) z^{m-1} z'} + \frac{1}{m-1} \int \frac{Q_1 dx}{z^{m-1}};$

e portanto

$$\int \frac{P dx}{z^m} = -\sum_0^{m-2} \frac{Q_i}{(m-1)(m-2)\ldots(m-i-1) z^{m-i-1} z'} + \frac{1}{(m-1)(m-2)\ldots 1} \int \frac{Q_{m-1} dx}{z},$$

sendo $Q_0 = P$.

Das funcções logarithmicas

226. Se m é inteiro e positivo: a primeira formula do n.º 225, pondo $z=lx$, dará

$$\int Pl^m x dx = l^m x \int P dx - m l^{m-1} x \int P_1 dx + m(m-1) l^{m-2} \int P_2 dx \ldots$$

Por exemplo, sendo $P = x^n$, o que dá

$$z' \int P dx = \frac{x^n}{n+1} = P_1,\ z' \int P_1 dx = \frac{x^n}{(n+1)^2} = P_2, \ldots,$$

teremos

$$\int x^n l^m x dx = x^{n+1}\left(\frac{l^m x}{n+1} - \frac{m l^{m-1} x}{(n+1)^2} + \frac{m(m-1) l^{m-2} x}{(n+1)^3} - \ldots\right) + C.$$

227. Se m é inteiro negativo: a segunda formula do n.º 225, pondo $z=lx$, dará

$$\int \frac{P dx}{l^m x} = -\frac{Px}{(m-1) l^{m-1} x} - \frac{Q_1 x}{(m-1)(m-2) l^{m-2} x} - \ldots + \frac{1}{(m-1)(m-2)\ldots 1}\int \frac{Q_{m-1} dx}{lx}.$$

Por exemplo, sendo $P = x^n$, o que dá

$$Q_1 = \frac{d\left(\frac{P}{z'}\right)}{dx} = (n+1)x^n,\ Q_2 = \frac{d\left(\frac{Q_1}{z'}\right)}{dx} = (n+1)^2 x^n, \ldots$$

teremos

$$\int\frac{x^n dx}{l^m x}=\begin{cases}-\dfrac{x^{n+1}}{m-1}\left[\dfrac{1}{l^{m-1}x}+\dfrac{n+1}{(m-2)l^{m-2}x}+\ldots\dfrac{(n+1)^{m-2}}{(m-2)(m-3)..1\,lx}\right]\\[2ex] +\dfrac{(n+1)^{m-1}}{(m-1)(m-2)..1}\displaystyle\int\frac{x^n dx}{lx}.\end{cases}$$

Se fizermos $x^{n+1}=z$, $lz=u$, teremos $\int\frac{x^n dx}{lx}=\int\frac{e^u du}{u}$, que se pode integrar pelas series, como no n.º 222.

228. Se m é fraccionario, quer positivo, quer negativo: uma das formulas precedentes faz depender $\int Pl^m x dx$ d'outro integral da mesma fórma, no qual m fica entre 1 e -1. E para obter este ultimo, recorrer-se-ha ao desenvolvivento em serie.

Das funcções circulares

229. Quando numa expressão differencial entram arcos de circulo, vê-se, por ser a differencial d'estes arcos funcção algebrica das linhas trigonometricas, que, se integrarmos por partes, considerando em primeiro logar os arcos como constantes, a funcção, que fica por integrar, deve apparecer desembaraçada d'elles. Por exemplo:

$$\int zdx \operatorname{arc}(\text{sen}=x) = \operatorname{arc}(\text{sen}=x)\int zdx - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\int zdx,$$

$$\int zdx \operatorname{arc}(\text{tang}=x) = \operatorname{arc}(\text{tg}=x)\int zdx - \int \frac{dx}{1+x^2}\int zdx.$$

230. Mas, quando as funcções contêem linhas trigonometricas, ha muitos modos de as integrar, cada um dos quaes poderá ser mais ou menos vantajoso segundo a fórma da differencial proposta. Exponhamos os principaes:

231. Primeiro methodo. A hypothese $\text{sen}\,x = z$ ou $\cos x = z$ reduz as funcções a differenciaes binomias, porque $\text{sen}\,x = z$ dá $\cos x = \sqrt{1-z^2}$ e $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$.

Assim $$\text{sen}^m x \cos^n x dx = z^m dz\,(1-z^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

E então: o expoente de $1-z^2$ é inteiro, quando n é impar; a expressão satisfaz á primeira condição de integrabilidade, $\frac{m+1}{2}$ = inteiro, quando m é impar; e á segunda, $\frac{m+1}{2}+\frac{n-1}{2}=\frac{m+n}{2}$ = inteiro, quando m e n são pares,

Exemplos:

$$\int \operatorname{sen}^4 x \cos^3 x dx = \int z^4 dz(1-z^2) = \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x - \frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C,$$

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx = \int \frac{z^3 dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{3}(3-\cos^2 x)\cos x + C,$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x dx = \int \frac{z^4 dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\frac{\left(\operatorname{sen}^3 x + \frac{3}{2}\operatorname{sen} x\right)\cos x}{4} + \frac{1.3x}{2.4} + C.$$

232. SEGUNDO METHODO. Como são $\int dx \begin{matrix}\cos\\ \operatorname{sen}\end{matrix} kx = \pm \frac{1}{k} \begin{matrix}\operatorname{sen}\\ \cos\end{matrix} kx + C$, e já sabemos desenvolver as potencias de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ em series de senos e cosenos de arcos multiplos de x, só teremos que applicar estas formulas a cada um dos termos do desenvolvimento respectivo.

Por exemplo (*Alg. Sup.*, n.° 162)

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{80}\operatorname{sen} 5x + \frac{5}{48}\operatorname{sen} 3x + \frac{5}{8}\operatorname{sen} x + C.$$

Este methodo emprega-se mais vezes do que o precedente, por ser mais facil obter as soluções numericas quando se preferem ás potencias dos senos e dos cosenos os senos e cosenos de arcos multiplos.

233. TERCEIRO METHODO. Transformam-se os senos e os cosenos, e suas potencias, em exponenciaes, pelas formulas ((K), n.° 159 da *Alg. Sup.*); o que reduz a integração á d'estas ultimas funcções.

234. QUARTO METHODO. Integra-se por partes, começando por considerar $\operatorname{sen} x$ ou $\cos x$ como constante.

Assim:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \int \operatorname{sen}^{m-1} x \cos^n x \operatorname{sen} x dx = \int \operatorname{sen}^{m-1} x d\left(-\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right)$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{n+2} x \operatorname{sen}^{m-2} x dx.$$

Depois, substituindo nesta expressão $\cos^n x(1-\operatorname{sen}^2 x)$ em vez de $\cos^{n+2} x$, e resolvendo em ordem a $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$, ou fazendo um calculo similhante a respeito de sen x, acharemos

$$\left.\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx &= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} x \cos^n x dx,\\ \int \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx &= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m x \cos^{n-2} x dx\end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{I});$$

por meio das quaes se abaterão successivamente os expoentes de sen x ou cos x.

A segunda d'estas equações deduz-se immediatamente da primeira, mudando reciprocamente m em n, e x em $90^\circ - x$. E o mesmo terá logar nas equações (K) e (L).

Por exemplo:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx = -\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos^3 x}{5} + \frac{2}{5}\int \operatorname{sen} x \cos^2 x dx$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^2 x \cos^3 x}{5} + \frac{2 \operatorname{sen}^2 x \cos x}{15} - \frac{2 \cos x}{15} + C.$$

235. Quando o expoente de cos x ou de sen x é negativo, a primeira e a segunda das formulas (I), mudando n em $-n$ ou m em $-m$, dão, respectivamente,

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\operatorname{sen}^m x dx}{\cos^n x} &= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} x}{(m-n)\cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\operatorname{sen}^{m-2} x}{\cos^n x} dx,\\ \int \frac{\cos^n x dx}{\operatorname{sen}^m x} &= -\frac{\cos^{n-1} x}{(m-n)\operatorname{sen}^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-n}\int \frac{\cos^{n-2} x}{\operatorname{sen}^m x} dx\end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{K}).$$

Finalmente, mudando n em $-n$ na segunda das formulas (I) ou m em $-m$ na primeira, resolvendo em ordem ao integral do segundo membro, e depois, mudando respectivamente n em $n-2$ ou m em $m-2$: vem

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{\operatorname{sen}^m x dx}{\cos^n x}&=\frac{\operatorname{sen}^{m+1}x}{(n-1)\cos^{n-1}x}-\frac{m+2-n}{n-1}\int\frac{\operatorname{sen}^m x}{\cos^{n-2}x}dx,\\ \int\frac{\cos^n x dx}{\operatorname{sen}^m x}&=-\frac{\cos^{n+1}x}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1}x}-\frac{n+2-m}{m-1}\int\frac{\cos^n x}{\operatorname{sen}^{m-2}x}dx\end{aligned}\right\}\ldots.(\mathrm{L}).$$

236. Se nas equações (I) e (L) fizermos n ou m nullo, teremos

$$\int\operatorname{sen}^m x dx=-\frac{\operatorname{sen}^{m-1}x\cos x}{m}+\frac{m-1}{m}\int\operatorname{sen}^{m-2}x dx,$$

$$\int\cos^n x dx=\frac{\cos^{n-1}x\operatorname{sen}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x dx,$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^m x}=-\frac{\cos x}{(m-1)\operatorname{sen}^{m-1}x}+\frac{m-2}{m-1}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2}x},$$

$$\int\frac{dx}{\cos^n x}=\frac{\operatorname{sen}x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x}.$$

237. Quando os expoentes de $\operatorname{sen}x$ e $\cos x$ são ambos negativos: multiplicando o numerador por $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x$, resulta

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^m x\cos^n x}=\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2}x\cos^n x}+\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^m x\cos^{n-2}x};$$

formula por meio da qual, sendo m e n inteiros, se chega a fracções sem $\operatorname{sen}x$ ou sem $\cos x$ no denominador.

EE

E no caso de $m=n$, é

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^n x\cos^n x}=2^{n-1}\int\frac{d(2x)}{\operatorname{sen}^n 2x};$$

que, para $n=1$, se reduz a $\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}=\int\frac{d(2x)}{\operatorname{sen} 2x}$.

238. Por meio das formulas dos n.os 234 a 237 o integral de $\operatorname{sen}^m x\cos^n x dx$, sendo m e n numeros inteiros, positivos ou negativos ou nullos, ficará dependente de alguns dos seguintes:

$$\int dx, \int dx\cos x \text{ ou } \int dx \operatorname{sen} x, \int dx\operatorname{sen} x\cos x,$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x} \text{ ou } \int\frac{dx}{\cos x}, \int\frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}, \int\frac{dx\cos x}{\operatorname{sen} x} \text{ ou } \int\frac{dx\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Ora estes integraes são:

1.° $\int dx=x+C$;

2.° $\int dx\cos x=\operatorname{sen} x+C$, ou $\int dx\operatorname{sen} x=-\cos x+C$;

3.° $\int dx\operatorname{sen} x\cos x=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x+C$;

4.° $\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x}=\int-\frac{d(\cos x)}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{2}l\left(c\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)=l\left(c\operatorname{tang}\frac{1}{2}x\right)$;

e $\int\frac{dx}{\cos x}=l\left[c\cot\left(45^\circ-\frac{1}{2}x\right)\right]=l\left[c\operatorname{tang}\left(45^\circ+\frac{1}{2}x\right)\right]$;

5.° $\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x\cos x}=\int\frac{d(2x)}{\operatorname{sen} 2x}=l(c\operatorname{tang} x)$;

6.° $\int \frac{dx \cos x}{\operatorname{sen} x} = l(c \operatorname{sen} x)$, ou $\int \frac{dx \operatorname{sen} x}{\cos x} = l\left(\frac{c}{\cos x}\right)$:

sabemos pois integrar a funcção proposta.

239. A integração por partes dá ainda os integraes seguintes, que se encontram muitas vezes:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \operatorname{sen} bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{x^n}{a}\left[\operatorname{sen} ax\left(1 - \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \ldots\right) + \cos ax\left(\frac{n}{ax} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} \ldots\right)\right] + C,$$

$$\int x^n \operatorname{sen} ax dx = -\frac{x^n}{a}\left[\cos ax\left(1 - \frac{n(n-1)}{a^2x^2} + \ldots\right) - \operatorname{sen} ax\left(\frac{n}{ax} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3x^3} + \ldots\right)\right] + C.$$

••

Radicaes quadrados de polynomios racionaes do terceiro e quarto gráu

240. Sejam $f(x, \mathrm{X})dx$ funcções nas quaes entra o radical

$$\mathrm{X}=\sqrt{a+bx+cx^2+ex^3+gx^4},$$

representando f uma funcção racional de x e X.

Para simplificar esta expressão, desembaraçando-a das potencias impares da variavel, façamos

$$x=\frac{r+st}{1+t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(a);$$

onde r e s são duas indeterminadas, das quaes disporemos para aquelle fim, e t a nova variavel.

Decompondo X nos seus factores lineares, poderemos escrever

$$\mathrm{X}^2=g\,(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta).$$

E a hypothese (a) dará:

$$dx=\frac{(s-r)}{(1+t)^2}\,dt,$$

$$\mathrm{X}=\frac{\sqrt{g[r-\alpha+(s-\alpha)t][r-\beta+(s-\beta)t][r-\gamma+(s-\gamma)t][r-\delta+(s-\delta)t]}}{(1+t)^2}.$$

As potencias impares de t debaixo do radical desapparecerão, pondo

$$(r-\alpha)(s-\beta)+(r-\beta)(s-\alpha)=0,\ (r-\gamma)(s-\delta)+(r-\delta)(s-\gamma)=0'$$

isto é,

$$2rs-(\alpha+\beta)(r+s)+2\alpha\beta=0,\ 2rs-(\gamma+\delta)(r+s)+2\gamma\delta=0,$$

que dão

$$r+s=\frac{2(\alpha\beta-\gamma\delta)}{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)},\ rs=\frac{\alpha\beta(\gamma+\delta)-\gamma\delta(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)}.$$

E como r e s são raizes da equação do segundo gráu, da qual o segundo termo tem $-(r+s)$ por coefficiente, e o ultimo termo é rs, serão essas raizes reaes, se for

$$(r+s)^2>4rs,\text{ isto é, }\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}{[\alpha+\beta-(\gamma+\delta)]^2}>0.$$

Se α, β, γ, δ, são reaes, e se suppõem escriptas na ordem descendente, esta condição verifica-se, como é manifesto.

Se duas são imaginarias, $\alpha=\mu+\nu\sqrt{-1}$, $\beta=\mu-\nu\sqrt{-1}$,

a substituição tambem satisfaz; porque dá

$$\frac{[(\mu-\gamma)^2+\nu^2)][(\mu-\delta)^2+\nu^2]}{[2\mu-(\gamma+\delta)]^2}>0.$$

E se todas são imaginarias,

$$\alpha=\mu+\nu\sqrt{-1},\ \beta=\mu-\nu\sqrt{-1},\ \gamma=\mu'+\nu'\sqrt{-1},\ \delta=\mu'-\nu'\sqrt{-1},$$

a substituição ainda satisfaz; porque dá

$$\frac{[(\mu-\mu')^2+(\nu-\nu')^2][(\mu-\mu')^2+(\nu+\nu')^2]}{4(\mu-\mu')^2}>0.$$

No caso particular de ser $\alpha+\beta=\gamma+\delta$, as expressões de $r+s$ e rs

tornar-se-iam infinitas; mas então é

$$X^2 = g[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta][x^2 - (\alpha + \beta)x + \gamma\delta)],$$

de cujos factores, por ser nelles o mesmo o termo em x, se expelle este termo, pondo

$$x = t + \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

E no caso de ser $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$, é racional a funcção

$$X = [x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]\sqrt{g},$$

da qual se expelle do mesmo modo o termo em x.

Portanto sempre é possivel reduzir a expressão proposta $f(x, X)\,dx$ a outra $\varphi(t, T)\,dt$ racional em t e T, na qual T^2 seja um polynomio racional do quarto gráu em t, sem potencias impares d'esta variavel.

241. Se o polynomio X^2 é do terceiro gráu, a hypothese (a) dará

$$dx = \frac{s - r}{(1+t)^2}dt,\ X = \frac{\sqrt{e[r-\alpha+(s-\alpha)t][r-\beta+(s-\beta)t][r-\gamma+(s-\gamma)t][1+t]}}{(1+t)^2}.$$

Sem fazer novo calculo, vê-se que basta substituir a unidade em logar de $r - \delta$ e $s - \delta$ na segunda das equações de-condição

$$(r-\alpha)(s-\beta) + (r-\beta)(s-\alpha) = 0,\ (r-\gamma)(s-\delta) + (r-\delta)(s-\gamma) = 0,$$

as quaes ficarão sendo

$$r + s = 2\gamma,\ rs - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta = 0;$$

e a condição $(r + s)^2 - 4rs > 0$ tornar-se-ha em

$$\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta > 0, \text{ ou } (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta) > 0,$$

que se verifica, chamando γ a menor ou a maior das tres quantidades α, β, γ.

Por conseguinte a expressão proposta ainda se reduz, pela hypothese (a), á fórma $\varphi(t, \mathrm{T})\,dt$, na qual T^2 representa um polynomio racional par do quarto gráu em t, quando X^2 é um polynomio racional do terceiro gráu em x.

242. A funcção racional $\varphi(t, \mathrm{T})$ pode ter em geral a fórma $\frac{\mathrm{M}+\mathrm{NT}}{\mathrm{P}+\mathrm{QT}}$, onde M, N, P, Q, representam funcções racionaes de t. E porque, multiplicando ambos os termos por $\mathrm{P}-\mathrm{QT}$, se pode dar a esta expressão a fórma

$$\frac{\mathrm{MP}-\mathrm{T}^2\mathrm{NQ}}{\mathrm{P}^2-\mathrm{T}^2\mathrm{Q}^2}+\frac{(\mathrm{MQ}-\mathrm{NP})\mathrm{T}^2}{\mathrm{P}^2-\mathrm{T}^2\mathrm{Q}^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{T}},$$

cujo primeiro termo, assim como o coefficiente de $\frac{1}{\mathrm{T}}$ no segundo, são racionaes em t, vê-se que o integral $\int\varphi(t, \mathrm{T})\,dt$ depende de outro da fórma $\int\frac{\psi t}{\mathrm{T}}\,dt$.

243. A funcção racional ψt pode ter em geral a fórma $\frac{\mathrm{G}+\mathrm{H}t}{\mathrm{I}+\mathrm{L}t}$, sendo G, H, I, L, funcções de t^2.

Ora, procedendo como acabamos de proceder, é

$$\frac{\mathrm{G}+\mathrm{H}t}{\mathrm{I}+\mathrm{L}t}=\frac{\mathrm{HI}-\mathrm{HL}t^2}{\mathrm{I}^2-\mathrm{L}^2t^2}-\frac{(\mathrm{GL}-\mathrm{HI})\,t}{\mathrm{I}^2-\mathrm{L}^2t^2};$$

e por conseguinte

$$\int\frac{\psi t}{\mathrm{T}}\,dt=\int\frac{\mathrm{GI}-\mathrm{HL}t^2}{\mathrm{T}(\mathrm{I}^2-\mathrm{L}^2t^2)}\,dt-\int\frac{\mathrm{GL}-\mathrm{HI}}{2\mathrm{T}(\mathrm{I}^2-\mathrm{L}^2t^2)}\,d(t^2),$$

da qual o segundo termo, por ser da fórma *funcção* $(t^2, \mathrm{T})\,d(t^2)$ e ser T^2 do segundo gráu em relação a t^2, pertence ao caso de que se tractou no n.° 205, e no coefficiente de $\frac{dt}{T}$ do primeiro só entram potencias pares de t: portanto o integral $\int \frac{\psi(t)}{T} dt$ depende de $\int \frac{\pi(t^2)}{T} dt$.

211. Decompondo T^2 nos seus factores do segundo grau, pode dar-se-lhe a fórma

$$T^2 = (m \pm nt^2)(\pm m' \pm n't^2), \text{ ou } T^2 = nn'(p^2 \pm t^2)(\pm q^2 \pm t^2),$$

suppondo
$$\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}, \text{ ou } \frac{p^2}{q^2} < 1.$$

Os signaes dos factores de T dão as seguintes combinações:

1.° $\sqrt{(p^2 - t^2)(q^2 - t^2)}$; 2.° $\sqrt{(p^2 - t^2)(-q^2 + t^2)}$;

3.° $\sqrt{(p^2 - t^2)(q^2 + t^2)}$; 4.° $\sqrt{(p^2 - t^2)(-q^2 - t^2)}$;

5.° $\sqrt{(p^2 + t^2)(q^2 + t^2)}$; 6.° $\sqrt{(p^2 + t^2)(\ \ q^2 - t^2)}$;

7.° $\sqrt{(p^2 + t^2)(-q^2 + t^2)}$; 8.° $\sqrt{(p^2 + t^2)(-q^2 - t^2)}$;

A ultima reduz-se á quinta, multiplicando pela $\sqrt{-1}$ os termos da fracção $\frac{\pi(t^2)}{T}$.

Em quanto ás outras: attendendo ás condições necessarias para que o radical seja real, vê-se que satisfazem a estas condições, dando $x<1$, $k<1$ e $\frac{dt}{T} = \frac{Adx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, as hypotheses seguintes:

1.° $x = \frac{t}{p}$, ou $x = \frac{q}{t}$, e $\frac{p^2}{q^2} = k^2$;

2.º $x^2 = \frac{q^2 - t^2}{q^2 - p^2}$, e $\frac{q^2 - p^2}{q^2} = k^2$;

3.º $x^2 = \frac{p^2 - t^2}{p^2}$, e $\frac{p^2}{p^2 + q^2} = k^2$;

4.º $x^2 = \frac{t^2 - p^2}{t^2}$, e $\frac{q^2}{p^2 + q^2} = k^2$;

5.º $x^2 = \frac{t^2}{t^2 + p^2}$, e $\frac{q^2 - p^2}{q^2} = k^2$;

6.º $x^2 = \frac{q^2 - t^2}{q^2}$, e $\frac{q^2}{p^2 + q^2} = k^2$;

7.º $x^2 = \frac{t^2 - q^2}{t^2}$, e $\frac{p^2}{p^2 + q^2} = k^2$.

E por tanto o integral $\int \frac{\pi(t^2)}{T} dt$ toma a fórma

$$\int \frac{F(x^2)\,dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}.$$

245. A funcção $F(x^2)$ pode compor-se de termos inteiros da fórma $A_i x^{2i}$, ou de fracções racionaes (n.º 202) $\frac{B_i}{(x^2 + a)^i}$.

1.º Pondo $R = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)} = \sqrt{1 - (1 + k^2)x^2 + k^2x^4}$, é $$\frac{d\,(\mathrm{R}x^{2i-3})}{dx} = (2i-3)\,\mathrm{R}x^{2i-4} - \frac{1+k^2-2k^2x^2}{\mathrm{R}}x^{2i-2}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{R}}\left[(2i-3)x^{2i-4} - 2(i-1)(1+k^2)x^{2i-2} + (2i-1)k^2x^{2i}\right];$$

e conseguintemente

$$\int\frac{x^{2i}\,dx}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{R}x^{2i-3}}{(2i-1)k^2} + \frac{2(i-1)(1+k^2)}{(2i-1)\,k^2}\int\frac{x^{2i-2}dx}{\mathrm{R}} - \frac{2i-3}{(2i-1)k^2}\int\frac{x^{2i-4}dx}{\mathrm{R}}.$$

Por esta formula dependerá $\int\frac{x^{2i}\,dx}{\mathrm{R}}$ de $\int\frac{x^2dx}{\mathrm{R}}$ e $\int\frac{dx}{\mathrm{R}}$.

2.º É

$$\frac{d\left(\frac{\mathrm{R}x}{(x^2+a)^{i-1}}\right)}{dx} = \frac{[1-2(1+k^2)x^2+3k^2x^4](x^2+a)-2(i-1)[1-(1+k^2)x^2+k^2x^4]x^2}{(x^2+a)^i\,\mathrm{R}};$$

e como o coefficiente de $\frac{1}{\mathrm{R}}$ se pode reduzir a

$$\frac{b}{(x^2+a)^i} + \frac{c}{(x^2+a)^{i-1}} + \frac{e}{(x^2+a)^{i-2}} + \frac{g}{(x^2+a)^{i-3}},$$

será

$$\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)^i} = \begin{cases} \frac{\mathrm{R}x}{b\,(x^2+a)^{i-1}} - \frac{c}{b}\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)^{i-1}} \\ - \frac{e}{b}\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)^{i-2}} - \frac{g}{b}\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)^{i-3}}; \end{cases}$$

formula, pela qual dependerá $\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)^i}$ de $\int\frac{dx}{\mathrm{R}(x^2+a)}$, $\int\frac{dx}{\mathrm{R}}$, $\int\frac{(x^2+a)dx}{\mathrm{R}}$;

isto é de $$\int \frac{dx}{R(x^2+a)}, \int \frac{dx}{R}, \int \frac{x^2dx}{R},$$

ou, mudando a em $\frac{1}{n}$, de $$\int \frac{dx}{R(1+nx^2)}, \int \frac{dx}{R}, \int \frac{x^2\,dx}{R}.$$

246. Fica pois demonstrado que o integral proposto (n.º **240**) se faz depender, pelas transformações indicadas, dos tres:

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}};$$

$$v = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2((1-k^2x^2)}};$$

$$w = \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

247. Para exemplo de integraes binomios, que se podem reduzir a estes, tomemos

$$\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Pondo $$\sqrt[3]{1-x^3} = (1-x)\,t,$$

isto é, $$(1-x)^2 t^3 = 1 + x + x^2 = \frac{3(1+x)^2 + (1-x)^2}{4},$$

o que dá $$\frac{1-x}{1+x} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3-1}} \text{ e } \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1-x}{1+x}dt,$$

ficará $$\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{dt\sqrt{3}}{\sqrt{4t^3-1}},$$

o qual, segundo o que fica dito, se reduz a alguns dos integraes u, v, w.

Funcções ellipticas

248. No caso de ser $k=0$, os integraes u, v, w, são:

$$u+\mathrm{C} = \mathrm{arc}\,(\mathrm{sen}=x);$$

(n.° 219) $$v+\mathrm{C}' = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}u;$$

$$w+\mathrm{C}'' = \frac{1}{\sqrt{1+n}}\,\mathrm{arc}\,(\mathrm{tang}=t\sqrt{1+n})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+n}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tang}=x\frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{1-x^2}}\right),$$

pondo $t=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, que dá $x=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx=\dfrac{dt}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Para $n=-1$ o ultimo integral toma a fórma $\frac{0}{0}$; mas (n.° 88), derivando os dois termos em ordem a n, ou, mais facilmente, em ordem a $\sqrt{1+n}$, acha-se logo $w+\mathrm{C}''=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

249. No caso de $k^2=1$, os integraes são

(n.° 202) $$u+\mathrm{C} = \int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1+x}{1-x} = l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$v + C' = \int \frac{x^2 - 1}{1 - x^2} dx + \int \frac{dx}{1 - x^2} = -x + u;$$

$$w + C'' = \frac{1}{1+n}\left[\int \frac{ndx}{1+nx^2} + \int \frac{dx}{1-x^2}\right] = \frac{1}{1+n}[\sqrt{n} \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = x\sqrt{n}) + u].$$

Mas, se o coefficiente de x^2 é negativo, $-n$, o terceiro integral é

$$w + C'' = \frac{1}{1-n}\left[\int \frac{-ndx}{1-nx^2} + \int \frac{dx}{1-x^2}\right] = \frac{1}{1-n}\left[l\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{n}\, l\sqrt{\frac{1+x\sqrt{n}}{1-x\sqrt{n}}}\right].$$

Para $n = 1$ esta expressão reduz-se a $\frac{0}{0}$; derivando porém em ordem a n, acha-se

$$w + C'' = l\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{x}{2(1-x^2)}.$$

250. Nos outros casos não se podem obter os integraes, a não ser pelas series.

Fazendo $x = \operatorname{sen} \varphi$, as expressões integraes tomam a fórma

$$u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

$$v = \int \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

$$w = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \operatorname{sen}^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}.$$

E, por ser $\frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{1}{k^2 \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} - \frac{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}{k^2},$

vem elles emfim a depender dos tres seguintes:

$$F(k, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)},$$

$$E(k, \varphi) = \int \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}\, d\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)},$$

$$\pi(k, n, \varphi) = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \operatorname{sen}^2 \varphi)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \ldots\ldots \text{(III)};$$

segundo a notação de Legendre.

Os integraes (I), (II), (III), que não se podem exprimir em funcções algebricas, exponenciaes, logarithmicas, ou circulares de φ, formam uma nova classe de transcendentes, ás quaes se deu o nome de *funcções ellipticas* de 1.ª, 2.ª e 3.ª especie, pela razão que veremos quando tractarmos da rectificação das secções conicas.

O angulo φ chama-se a *amplitude*, a constante k o *modulo*, e a constante n o *parametro*.

Dois modulos k, k', ligados entre si pela relação $k^2 + k'^2 = 1$, dizem-se *complementares*.

251. Os trabalhos de geometras abalisados, especialmente os de Legendre e depois os de Jacobi e Abel, têm dado grande importancia a estas funcções, e feito conhecer muitas propriedades notaveis d'ellas.

Aqui limitar-nos-hemos a algumas fundamentaes e mais elementares.

252. De
$$F\left(k, \frac{1}{2}\pi + \varphi\right) = f(\varphi) + C$$

tira-se, pela mudança de φ em $-\varphi$ que só muda o signal da differencial,

$$F\left(k, \frac{1}{2}\pi - \varphi\right) = -f(\varphi) + C';$$

por conseguinte

$$F\left(k, \frac{1}{2}\pi + \varphi\right) + F\left(k, \frac{1}{2}\pi - \varphi\right) = C + C' = \text{const.}$$

E como, pondo $\varphi = 0$, resulta $\quad 2F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = \text{const.}$

teremos $\quad F\left(k, \frac{1}{2}\pi + \varphi\right) = 2F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) - F\left(k, \frac{1}{2}\pi - \varphi\right).$

Se nesta equação mudarmos φ em $\pi + \varphi$, virá

$$F\left(k, \frac{3}{2}\pi + \varphi\right) = 2F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) + F\left(k, \frac{1}{2}\pi + \varphi\right)$$

$$= 4F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) - F\left(k, \frac{1}{2}\pi - \varphi\right);$$

e teremos successivamente, assim como mudando depois φ em $\varphi + \frac{1}{2}\pi$,

$$\left.\begin{aligned} &F\left(k, \frac{2i+1}{2}\pi + \varphi\right) = (2i+2)\,F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) - F\left(k, \frac{1}{2}\pi - \varphi\right), \\ &F(k, (i+1)\pi + \varphi) = (2i+2)\,F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) + F(k, \varphi). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(1).$$

Obter-se-ha por estas equações o integral respectivo a qualquer amplitude maior que $\frac{1}{2}\pi$, quando forem dados os correspondentes a amplitudes não maiores que $\frac{1}{2}\pi$.

253. Se tomarmos uma nova amplitude φ_1 e um novo modulo k_1, taes quaes sejam

$$\operatorname{sen}(2\varphi_1 - \varphi) = k \operatorname{sen}\varphi,\ k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{k+1}, \ldots\ldots\ldots (a),$$

será
$$\cos(2\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi},$$

e por conseguinte

$$\cos 2\varphi_1 = \cos((2\varphi_1 - \varphi) + \varphi) = \cos\varphi\ \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi} - k\operatorname{sen}^2\varphi,$$

$$\operatorname{sen}^2\varphi_1 = \frac{1 - \cos\varphi\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi} + k\operatorname{sen}^2\varphi}{2},$$

$$d\varphi_1 = \frac{k\cos\varphi + \cos(2\varphi_1 - \varphi)}{2\cos(2\varphi_1 - \varphi)}\,d\varphi = \frac{k\cos\varphi + \sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}{2\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}\,d\varphi;$$

valores que, substituidos em $\dfrac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1^2\operatorname{sen}^2\varphi_1}}$,

dão
$$\frac{d\varphi_1}{\sqrt{1 - k_1^2\operatorname{sen}^2\varphi_1}} = \frac{1+k}{2}\ \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}.$$

Portanto as equações

$$\operatorname{sen}(2\varphi_1 - \varphi) = k\operatorname{sen}\varphi,\ k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{k+1},\ \mathrm{F}(k_1, \varphi_1) = \frac{1+k}{2}\mathrm{F}(k, \varphi),$$

farão depender $\mathrm{F}(k, \varphi)$ de $\mathrm{F}(k_1, \varphi_1)$.

E como, por serem

$$k_1 - k = \frac{2\sqrt{k} - k - k^2}{1+k},\ 1 - k_1 = \frac{(1 - \sqrt{k})^2}{k+1},$$

é k_1 maior que k, e vai approximando-se successivamente da unidade, a equação

$$F(k_i, \varphi_i) = \frac{1+k_{i-1}}{2} \cdot \frac{1+k_{i-2}}{2} \cdots \frac{1+k}{2} F(k, \varphi) \ldots\ldots (2),$$

sendo $$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},\ k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1} \ldots k_i = \frac{2\sqrt{k_{i-1}}}{1+k_{i-1}},$$

e $$\operatorname{sen}(2\varphi_1 - \varphi) = k \operatorname{sen}\varphi, \ldots \operatorname{sen}(2\varphi_i - \varphi_{i-1}) = k_{i-1} \operatorname{sen}\varphi_{i-1},$$

fará depender $F(k, \varphi)$ d'outra $F(k_i, \varphi_i)$, na qual se possa considerar o modulo k_i como proximamente egual á unidade, isto é, de (n.º 238)

$$\int \frac{d\varphi_i}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi_i}} = \int \frac{d\varphi_i}{\cos \varphi_i} = l \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi_i\right).$$

254. Se quizermos prolongar a serie para a esquerda de k e φ, teremos

$$k = \frac{2\sqrt{k_{-1}}}{1+k_{-1}},\ \operatorname{sen}(2\varphi - \varphi_{-1}) = k_{-1} \operatorname{sen}\varphi_{-1};$$

sendo $k_{-1} = \dfrac{1 - \sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$ menor que k, e approximando-se successivamente de zero.

E continuando assim, chegaremos a um modulo k_{-i} muito proximo de zero, para o qual se poderá suppor

$$\int \frac{d\varphi_i}{\sqrt{1 - k_{-i}^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_{-i}}} = \varphi_{-i}.$$

Portanto:

$$F(k, \varphi) = \frac{1+k_{-1}}{2} \cdot \frac{1+k_{-2}}{2} \cdots \frac{1+k_{-i}}{2} F(k_{-i}, \varphi_{-i}) \ldots (3).$$

Esta formula, applicada a $F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right)$, dá a expressão notavel

$$F\left(k, \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1+k_{-1}}{2} \cdot \frac{1+k_{-2}}{2} \cdots \frac{1+k_{-i}}{2} \cdots \frac{1}{2}\pi,$$

sendo o coefficiente de $\frac{1}{2}\pi$ o limite para o qual tende o producto respectivo quando i tende para o infinito; expressão exacta, se é $k_{-\infty} = 0$.

255. Das duas formulas (2) e (3) deve escolher-se a que mais depressa conduzir no integral procurado.

E, calculada assim $F(k, \varphi)$ para o valor de φ desde 0 até $\frac{1}{2}\pi$, as formulas (1) darão depois o mesmo integral para as amplitudes maiores que $\frac{1}{2}\pi$.

256. Emquanto ás funcções $E(k, \varphi)$, a substituição das expressões de $d\varphi_1$, k_1 e $\operatorname{sen}^2 \varphi_1$ do n.º 253 dá

$$d\varphi_1 \sqrt{1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1} = \frac{(k \cos \varphi + \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi})^2}{2(1+k)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} d\varphi;$$

ou, desenvolvendo o numerador, attendendo á transformação

$$\frac{k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} - \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi},$$

e simplificando:

$$d\varphi_1\sqrt{1-k_1{}^2\operatorname{sen}^2\varphi_1}=\frac{(k^2-1)\,d\varphi}{2(1+k)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}+\frac{d\varphi\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}{1+k}+\frac{k\cos\varphi\,d\varphi}{1+k}.$$

Por conseguinte

$$(1+k)\,E(k_1,\varphi_1)=-\frac{1-k^2}{2}F(k,\varphi)+E(k,\varphi)+k\operatorname{sen}\varphi\ldots(4).$$

E como são $\qquad E(1,\varphi_i)=\operatorname{sen}\varphi_i,\ E(0,\varphi_i)=\varphi_i,$

vê-se que pela equação (4), applicada successivamente, se fará depender, com approximação indefinida, a funcção elliptica de segunda especie $E(k,\varphi)$ de funcções F da primeira especie, e de $E(1,\varphi_i)$ ou $E(0,\varphi_i)$, que se sabem integrar.

Theorema de Landen. Façamos $x=\operatorname{sen}\varphi$ na equação da ellipse da qual são 1 o eixo maior e k a excentricidade. Será $y=b\cos\varphi$, e o arco de ellipse, pondo $\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}=\Delta$,

$$S_e=\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\int\Delta d\varphi=E(k,\varphi).$$

Na hyperbole da qual são 1 a excentricidade, k o semieixo transverso, e $b=\sqrt{1-k^2}$ o semieixo conjugado, se fizermos $x=k\sqrt{1+b^2\operatorname{tg}^2\varphi}$, ou $y=b^2\operatorname{tg}\varphi$, o arco será

$$S_h=\int\frac{b^2d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi},$$

que, attendendo a $\quad k^2\cos^2\varphi=k^2-k^2\operatorname{sen}^2\varphi=k^2-1+\Delta^2=\Delta^2-b^2,$

e por ser

$$d\,(\Delta\operatorname{tg}\varphi)=\frac{\Delta\,d\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{k^2d\varphi\operatorname{sen}^2\varphi}{\Delta}=\frac{b^2\,d\varphi}{\Delta\cos^2\varphi}+\frac{k^2\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta},$$

se transforma em

$$S_h = \Delta \operatorname{tang} \varphi - k^2 \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\Delta} = \Delta \operatorname{tang} \varphi - E(k, \varphi) + b^2 F(k, \varphi).$$

Finalmente, eliminando $F(k, \varphi)$ entre esta expressão de S_h e (4), virá

$$S_h = \Delta \operatorname{tang} \varphi + 2k \operatorname{sen} \varphi + S_e - 2(1+k) S_{1e} \ldots\ldots\ldots (5),$$

que é o theorema de Landen.

Este theorema mostra que a expressão d'um arco de hyperbole se compõe d'uma parte algebrica, e de mais dois termos dependentes dos arcos S_e e S_{1e} de ellipses, cujas amplitudes e modulos são ligados entre si pelas equações (a) do n.º 253.

Integração por series

257. Se a funcção proposta não pode integrar-se exactamente, é necessario recorrer ás approximações.

Assim, para ter $\int y dx$, desenvolveremos y em serie ordenada segundo as potencias de x, e depois integraremos o producto de cada um dos termos por dx.

Exemplos:

1.° Seja $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc}(\text{tang} = x)$.

Desenvolvendo $\frac{1}{1+x^2}$, o que dá

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots = \sum_0^\infty (-1)^i x^{2i},$$

e integrando o segundo membro, vem

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C = \sum_0^\infty (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1} + C;$$

e portanto $\text{arc}(\text{tang} = x) = n\pi + \sum_0^\infty (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{2i+1}$.

2.° Seja $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}(\text{sen} = x)$.

Teremos, seguindo o mesmo processo,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_0^\infty \frac{1 \ldots (2i+1)}{2 \ldots (2i+2)} x^{2i+2},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \sum_0^\infty \frac{1\ldots(2i+1)}{2\ldots(2i+2)} \cdot \frac{x^{2i+3}}{2i+3} + C;$$

$$\text{arc}(\text{sen} = x) = n\pi + x + \sum_0^\infty \frac{1\ldots(2i+1)}{2\ldots(2i+2)} \cdot \frac{x^{2i+3}}{2i+3}.$$

Já nos servimos em outro logar da primeira d'estas formulas para achar a razão do diametro para a circumferencia.

A segunda pode servir para o mesmo fim, pondo $n=0$, e

$$\text{arc}(\text{sen} = x) = \text{arc}\left(\text{sen} = \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi;$$

o que dá

$$\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} + \sum_0^\infty \frac{1\ldots(2i+1)}{2\ldots(2i+2)} \cdot \frac{1}{(2i+3)\,2^{2i+3}}.$$

258. Tambem se pode algumas vezes integrar a funcção proposta, decompondo-a em dois factores, desenvolvendo um d'elles em serie, e integrando depois os productos dos termos d'este desenvolvimento pelo outro factor.

Por exemplo, desenvolvendo $\frac{1}{\sqrt{1-bx}}$ em serie, virá

$$\frac{1}{\sqrt{1-bx}} = 1 + \frac{1}{2}bx + \frac{1.3}{2.4}b^2x^2 + \ldots \frac{1\ldots(2i-1)}{2\ldots 2i} b^i x^i + \ldots,$$

e por conseguinte

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax-x^2)(1-bx)}} = \int \frac{1 + \sum_0^\infty \frac{1\ldots(2i+1)}{2\ldots(2i+2)} b^{i+1} x^{i+1}}{\sqrt{ax-x^2}}\, dx.$$

Temos assim de integrar uma serie de termos da fórma $\frac{x^p dx}{\sqrt{ax-x^2}}$, o que faremos (n.os 215, I e 206) reduzindo

$$\int \frac{x^p dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int \frac{x^{p-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a-x}} \text{ a } \int \frac{x^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a-x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{a-2x}{a}\right).$$

259. Mas, como é necessario que a serie seja convergente, convém escolher, entre os processos que se podérem seguir nestas integrações, o que melhor satisfizer áquella condição.

Façamos $x = -h$ na serie de Taylor. Então será $f(x+h)$ uma constante $f(0) = c$;

e $$c = y - xy' + \frac{1}{2} x^2 y'' - \frac{1}{2.3} x^3 y''' + \ldots\ldots$$

Mudando pois nesta expressão y em $\int y dx$, e por conseguinte y', y'', em y, y', . . ., teremos

$$\int y dx = c + xy + \sum_1^n (-1)^i \frac{x^{i+1} y^{(i)}}{1.2\ldots(i+1)} + \text{R}_n.$$

Vimos no n.º 200 que esta serie é a de Bernoulli, e que o resto R_n é

$$\text{R}_n = \frac{(-1)^{n+1}}{1\ldots(n+1)} \int x^{n+1} d(y^{(n)}).$$

Por exemplo, em $$\int y dx = \int \frac{dx}{a+x} = l(a+x)$$

é $$c = a,\ y = \frac{1}{a+x},\ y' = \frac{1}{(a+x)^2}, \ldots y^{(i)} = (-1)^i \frac{1\ldots i}{(a+x)^{i+1}};$$

e conseguintemente

$$l(a+x)=la+\sum_0^n \frac{1}{i+1}\left(\frac{x}{a+x}\right)^{i+1}+\int\frac{x^{n+1}dx}{(a+x)^{n+2}}.$$

260. A formula de Maclaurin

$$fx=f+xf'+\frac{1}{2}x^2f''+\ldots\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(\theta x)$$

dá

$$\int fxdx=c+xf+\frac{1}{2}x^2f''+\ldots\frac{1}{1.2\ldots n}\int x^nf^n(\theta x)dx.$$

Sejam P e Q o maior e o menor dos valores de $f^{(n)}(\theta x)$, correspondentes aos de x desde 0 até x. Ficará $\int x^n f^n(\theta x)dx$ comprehendido entre $Px^n.\frac{x}{n+1}$ e $Qx^n\frac{x}{n+1}$; por onde se vê que, se a serie dada pela formula da Maclaurin for convergente, tambem a serie integral d'aquella o será.

Por exemplo, para $\int fxdx=\int e^xdx=e^x$, são $f=1$, $f'=1,\ldots$,

e

$$\int e^xdx=c+x+\frac{x^2}{2}+\ldots\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots;$$

conseguintemente

$$e^x=\sum_0^\infty\frac{x^i}{1.2..(i+1)}.$$

261. O theorema de ser convergente o integral d'uma serie, quando esta o é, mostra-se, qualquer que seja o processo empregado no desenvolvimento.

Sejam as fracções: $\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \frac{A'''}{B'''}, \ldots$; e $\frac{A^{(m)}}{B^{(m)}}, \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$ a minima e a maxima d'ellas.

As desegualdades $\frac{A^{(i)}}{B^{(i)}} > \frac{A^{(m)}}{B^{(m)}}, \frac{A^{(i)}}{B^{(i)}} < \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$,

ou $A^{(i)} = B^{(i)} \cdot \frac{A^{(m)}}{B^{(m)}} + B^{(i)} \cdot \alpha, \; A^{(i)} = B^{(i)} \cdot \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} - B^{(i)} \cdot \beta$,

dão $\Sigma A^{(i)} > \frac{A^{(m)}}{B^{(m)}} \Sigma B^{(i)}, \; \Sigma A^{(i)} < \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}} \Sigma B^{(i)}$,

ou $\frac{\Sigma A^{(i)}}{\Sigma B^{(i)}} > \frac{A^{(m)}}{B^{(m)}}, \; \frac{\Sigma A^{(i)}}{\Sigma B^{(i)}} < \frac{A^{(n)}}{B^{(n)}}$;

isto é, a fracção cujos termos são a somma dos numeradores e a somma dos denominadores das propostas, está comprehendida entre a maxima e a minima d'ellas.

Dividamos a differença $x_n - x_0$ nas partes $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots x_n - x_{n-1}$.

A somma $fx_0 \cdot (x_1 - x_0) + fx_1 \cdot (x_2 - {}_1) + \ldots fx_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1})$

terá por limite o integral $\int fxdx$ tomado entre $x = x_0$ e $x = x_n$ (n.º 196), com tanto que fx seja continua e não se torne infinita nesse intervallo.

Se tomarmos outra funcção $\varphi(x)$, que tenha o mesmo signal desde $x = x_0$ até $x = x_n$, a somma dos numeradores e dos denominadores das fracções

$$\frac{fx_0 \cdot (x_1 - x_0)}{\varphi x_0 \cdot (x_1 - x_0)}, \frac{fx_1 \cdot (x_2 - x_1)}{\varphi x_1 \cdot (x_2 - x_1)}, \ldots \frac{fx_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1})}{\varphi x_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1})},$$

dará, pelo que fica dicto,

$$\frac{\Sigma_0^{n-1} fx_i \cdot (x_{i+1} - x_i)}{\Sigma_0^{n-1} \varphi x_i \cdot (x_{i+1} - x_i)} = \frac{f\zeta}{\varphi\zeta},$$

suppondo $x_0, x_1, \ldots x_n$, tão proximas que entre as funcções $\frac{fx_i}{\varphi x_i}$ se acha uma egual ao primeiro membro.

Finalmente, tomando $\varphi x = 1$, e passando ao limite de Σ, será

$$\int_0^n fxdx = f\zeta \cdot (x_n - x_0).$$

Por isto, seja $\mathrm{F}x$ uma funcção que se pode desenvolver em serie convergente

$$\mathrm{F}x = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + fx,$$

tendo o resto fx zero por limite.

Será $$\int_0^n \mathrm{F}xdx = \int u_0 dx + \int u_1 dx + \ldots + \int_0^n fxdx,$$

ou $$\int_0^n \mathrm{F}xdx = \Sigma \int u_i\, dx + f\zeta \cdot (x_n - x_0).$$

E como $f\zeta . (x_n - x_0)$ tende para zero, quando i tende para o infinito, segue-se que a serie, que dá o integral $\int_0^n \mathrm{F}xdx$, será convergente, quando o for a serie na qual se desenvolveu $\mathrm{F}x$ (Vej. *Calc. int.* de Cournot, 2.ª ed., n.os 316 e 317).

262. Em quanto ás integrações de segunda, terceira... ordens das funcções d'uma variavel, nada diremos, porque, para as effectuar, basta o que temos exposto. Sómente advertimos que a expressão finita, resultante d'essas integrações, deve ter 2, 3, ... n constantes arbitrarias, quando a ordem do integral é 2, 3, ... n.

Querendo, por exemplo, integrar $\iint \frac{(a^2-x^2)dx^2}{(x^2+a^2)^2}$, decomporemos a fracção proposta nas duas $\frac{2a^2}{(x^2+a^2)^2}-\frac{1}{x^2+a^2}$: a primeira integração dará

$$\int \frac{2a^2dx}{(x^2+a^2)^2}-\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{x}{x^2+a^2}+\int \frac{dx}{x^2+a^2}-\int \frac{dx}{x^2+a^2}+c;$$

e fazendo a segunda integração d'este integral multiplicado por dx, acharemos emfim

$$\int\left(\frac{xdx}{x^2+a^2}+cdx\right)=l\sqrt{x^2+a^2}+cx+c'$$

para integral duplo da expressão proposta.

••

Constantes arbitrarias. Integraes definidos

263. Seja P o integral de uma expressão differencial $\int f'x dx$, e c a constante, que se ajuncta a este integral para ser tomado na maior generalidade (n.º 197); isto é, seja

$$\int f'x dx = P + c.$$

Quando se applica o integral a uma questão determinada, desapparece a arbitrariedade da constante c, que deve então satisfazer ás condições da mesma questão.

Pedindo-se, por exemplo, a área BCMP (Fig. 1) comprehendida entre as ordenadas BC e MP, correspondentes ás abscissas a e b, será nullo o integral correspondente á abscissa BC; de sorte que, chamando A o valor de P correspondente á abscissa $x = a$, e B o correspondente a $x = b$, teremos

$$0 = A + c, \quad t = B + c,$$

ou

$$t = B - A.$$

O integral chama-se *indefinido*, quando a sua origem não está fixada; e nesse caso sómente é completo quando involve uma constante arbitraria.

Quando porém os limites a e b são dados, e são A e B os valores de P que lhes correspondem, o valor numerico $t = B - A$ é o integral *definido*, comprehendido entre aquelles limites. Logo:

Para ter o integral definido entre os limites $x = a$ ***e*** $x = b$***, basta substituir successivamente estes valores no integral indefinido*** P***, e subtrahir um resultado do outro.***

Para designar commodamente os integraes definidos, applicam-se ao signal de integração $\int$ dois indices, um inferior relativo ao primeiro limite do integral, outro superior relativo ao segundo limite, como temos feito; notação imaginada por Fourier.

Assim, para designar o integral de $Fxdx$, comprehendido entre os limites correspondentes a $x=a$ e $x=b$, isto é, tomado desde $x=a$ até $x=b$, escreve-se $\int_a^b Fxdx$.

Por exemplo $\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \operatorname{sen} xdx = -\left(\cos\pi - \cos\frac{1}{2}\pi\right) = +1.$

Quando se escreve $\int_a^x Fxdx$, indica-se um só limite; isto é, indica-se que o integral começa em $x=a$ e se extende a um valor indefinido da variavel x.

264. Mudança de limites. Podem trocar-se os limites, mudando o signal do integral, porque são

$$\int_a^b f'xdx = fb - fa = \mathrm{B} - \mathrm{A},\ \int_b^a f'xdx = \mathrm{A} - \mathrm{B},$$

ou

$$\int_a^b xf'dx = -\int_b^a f'xdx.$$

E tambem se podem mudar os limites:

Se no integral definido $\int_{x_1}^{x_2} f'xdx$ fizermos $x=\varphi t$, e tomarmos t_1 e t_2 taes, que satisfaçam ás condições $x_1=\varphi t_1$, $x_2=\varphi t_2$, o integral proposto transformar-se-ha em $\int_{t_1}^{t_2} f'[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\,dt$.

Sendo, por exemplo, $x_2=x_1+h$, e $\varphi(t)=x_1+h-t$, o que dá

$$\varphi'(t)=-1,\ t_1=h,\ t_2=0,$$

teremos

$$\int_{x_1}^{x_1+h} f'xdx = -\int_h^0 f'(x_1+h-t)\,dt.$$

265. Seja $$\int_a^b f'xdx = fb - fa.$$

Como a formula de Taylor dá

$$fb - fa = f(a+b-a) - fa = f'a.(b-a) + \frac{1}{2}f''a.(b-a)^2.+\ldots,$$

será $$\int_a^b f'xdx = f'a.(b-a) + \frac{1}{2}f''a.(b-a)^2 + \ldots.$$

Mas cumpre advertir que esta formula só pode applicar-se quando a serie de Taylor não é insufficiente.

266. No caso de ser applicavel a serie de Taylor, para os valores de x comprehendidos entre a e b, podemos fazel-a convergir tanto quanto quizermos.

Para isso bastará repartir o intervallo $b-a$ em um grande numero de partes n, cada uma egual a i; isto é, suppôr $b-a=ni$. Então, substituindo $a+i$ em logar de b na serie, depois $a+2i$ e $a+i$, $a+3i$ e $a+2i, \ldots a+ni$ e $a+(n-1)i$, em logar de b e a, e chamando A_α, A'_α, $A''_\alpha, \ldots$ os coefficientes differenciaes da formula de Taylor correspondentes a $f(a+\alpha i)$, teremos

$$f(a+i) - fa = A_0 i + \frac{1}{2}A_0' i^2 + \frac{1}{2.3}A_0'' i^3 + \ldots,$$

$$f(a+2i) - f(a+i) = A_1 i + \frac{1}{2}A_1' i^2 + \frac{1}{2.3}A_1'' i^3 + \ldots$$

....

$$f(a+ni) - f[a+(n-1)i] = A_{n-1} i + \frac{1}{2}A'_{n-1} i^2 + \frac{1}{2.3}A''_{n-1} i^3 + \ldots;$$

e a somma é

$$f(a+ni)-fa=i\Sigma_0^{n-1}A_\alpha+\frac{1}{2}i^2\Sigma_0^{n-1}A'_\alpha+\frac{1}{2.3}i^3\Sigma_0^{n-1}A''_\alpha+\ldots,$$

que, se tomarmos i tão pequeno, que possam desprezar-se os termos em i^2, i^3..., ficará reduzida a

$$\int_a^b f'xdx=i\Sigma_0^{n-1}A_\alpha.$$

O segundo membro é a somma dos valores que toma a funcção $f'xdx$, quando nella se fazem $x=a$, $x=a+i$,...$x=a+(n-1)i$, e $dx=i$.

E d'ahi vem que no methodo infinitesimal se considera o integral como *somma* d'um numero infinito de elementos, os quaes são os valores consecutivos que toma a funcção differencial proposta, quando nella se faz passar a variavel por todos os valores intermedios entre os seus limites; o que é conforme com o que dissemos no n.º 197 (*).

Sobre as approximações dos integraes definidos podem consultar-se uma memoria de Poisson (*Ac. das Sc.* de 1826), a sua theoria do calor, os escriptos de Cauchy sobre o mesmo objecto, e a theoria do calor de Fourier.

267. Se acontecer que, entre os limites a e b, haja alguns valores x_1, x_2, x_i de x, para os quaes $f'x$ se torne infinita, poderá ainda a somma dos elementos representar-se por

$$\int_a^{x_1-\varepsilon}f'xdx+\int_{x_1+\gamma_1}^{x_2-\varepsilon_2}f'xdx+\ldots\int_{x_i+\gamma_i}^{b}f'xdx,$$

somma dos limites, para os quaes tendem os integraes que a compõem, quando ε_1, ε_2,... e γ_1, γ_2,... tendem para o limite zero.

(*) Esta demonstração só prova que o integral é a somma dos valores da differencial infinitamente proximos, quando, entre os limites de que se tracta, a funcção $f'x$ não se torna infinita. No entretanto, quando apparecem valores de $f'x$ infinitos entre os correspondentes aos valores reaes de x desde a até b, ainda é possivel fazer passar x, desde a até b, por valores imaginarios, para os quaes não seja $f'x$ infinita; e então ainda tem logar o theorema de que se tracta (*Journ. de l'École. Polyt.*, cahier 18, pag. 320).

Assim a somma, desde $x=-\alpha$ até $x=a$, dos elementos $\frac{dx}{x^n}$, dos quaes é infinito o correspondente a $x=0$, pode representar-se por

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^n} + \int_{\eta}^{a} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{1-n}\left[(-\varepsilon)^{1-n} - \eta^{1-n} - (-\alpha)^{1-n} + a^{1-n}\right]:$$

a qual, para n comprehendido entre 0 e 1 e $1-n$ de numerador par, é $\frac{a^{1-n}-\alpha^{1-n}}{1-n}$; e, para $n>1$ e $n-1$ impar ou fraccionario de termos impares, é infinita (*Calc. int.* de Serret, n.os 476 e 477.)

268. Para calcular a formula do numero precedente,

$$Fa_n - Fa = i\,\Sigma_a^{a_{n-1}} F'x + \frac{1}{2} i^2 \Sigma_a^{a_{n-1}} F''x + \frac{1}{6} i^3 \Sigma_a^{a_{n-1}} F'''x + \ldots (1),$$

é melhor exprimir $\Sigma_a^{a_{n-1}} f'x$, $\Sigma_a^{a_{n-1}} f''x, \ldots$ em $fa_n - fa$, $f'a_n - f'a, \ldots$ por meio d'esta formula applicada a $fa_n - fa$, $f'a_n - f'a, \ldots$, que dá, para $\alpha = 1, 2, \ldots \alpha$,

$$f^{(\alpha)}a_n - f^{(\alpha)}a = i\Sigma_a^{a_{n-1}} f^{(\alpha+1)}x + \frac{1}{2} i^2 \Sigma_a^{a_{n-1}} f^{(\alpha+2)}x + \frac{1}{6} i^3 \Sigma_a^{a_{n-1}} f^{(\alpha+3)}x + \ldots$$

Assim, querendo desprezar em $fa_n - fa$ as potencias de i superiores ao quadrado, teremos

$$i^3\Sigma_a^{a_{n-1}} f'''x = i^2(f''a_n - f''a),\quad i^2\Sigma_a^{a_{n-1}} f''x = i(f'a_n - f'a) - \frac{1}{2} i^2 (f''a_n - f''a);$$

o que, substituido em $fa_n - fa = fb - fa$, dá

$$fb - fa = i\,\Sigma_a^{a_{n-1}} f'x + \frac{1}{2} i\,(f'b - f'a) - \frac{1}{12} i^2 (f''b - f''a) \ldots (2).$$

269. Quando a fórma da funcção $f'x$ for dada, poderemos calcular immediatamente pelas formulas do numero precedente o integral definido $\int_a^b f'xdx$; e tambem o poderemos fazer, se na formula (2) desprezarmos os termos inferiores á primeira ordem de i, quando não conhecermos essa fórma, mas se derem os $n-1$ valores numericos de $f'x$ desde $f'a$ até $f'b$.

Este segundo caso equivale á somma de fa com a dos trapezios cuja base é i e cujos lados perpendiculares á base, em $fa_n - fa = fb - fa$, são $f'a, f'a_1, f'a_2, \ldots f'a_{n-1}, f'b$.

Estas formulas serão tanto mais exactas, quanto menor for a differença $i = \dfrac{b-a}{n}$, e quanto menos rapidamente variarem os valores de $f'x$ entre a e b (*Mec.* de Poisson, n.º 15.)

270. Os integraes definidos servem para determinar o resto da serie de Taylor.

Com effeito é $\quad \mathrm{F}(x_1+h) - \mathrm{F}x_1 = \int_{x_1}^{x_1+h} \mathrm{F}'xdx,$

ou (n.º 264) $\mathrm{F}(x_1+h) - \mathrm{F}x_1 = -\int_h^0 \mathrm{F}'(x_1+h-t)dt = \int_0^h \mathrm{F}'(x_1+h-t)dt.$

Mas é (n.º 200)

$$\int \mathrm{F}'(x_1+h-t)dt = t\mathrm{F}'(x_1+h-t) + \frac{1}{2}t^2\mathrm{F}''(x_1+h-t) + \ldots + \int \frac{t^n\mathrm{F}^{(n+1)}(x_1+h-t)}{1.2.3\ldots n}dt,$$

que, entre os limites 0 e h dá

$$\int_0^h \mathrm{F}'(x_1+h-t)dt = h\mathrm{F}'x_1 + \frac{1}{2}h^2\mathrm{F}''x_1 + \ldots + \int_0^h \frac{t^n\mathrm{F}^{(n+1)}(x_1+h-t)dt}{1.2.3\ldots n}.$$

Temos pois

$$F(x_1+h)=Fx_1+hF'x_1+\frac{1}{2}h^2F''x_1+\ldots\int_0^h \frac{t^nF^{(n+1)}(x_1+h-t)\,dt}{1.2.3\ldots n}.$$

Fazendo $x_1=0$, e depois mudando h em x_1, teremos similhantemente o theorema de Maclaurin

$$Fx_1=F(0)+x_1F'(0)+\frac{1}{2}x_1^2F''(0)+\ldots\int_0^{x_1} \frac{t^nF^{(n+1)}(x_1-t)\,dt}{1.2\ldots n}.$$

As expressões $\int_0^h \frac{t^nF^{(n+1)}(x_1+h-t)\,dt}{1.2\ldots n}$ e $\int_0^{x_1} \frac{t^nF^{(n+1)}(x_1-t)\,dt}{1.2\ldots n}$

dos restos das series de Taylor e Maclaurin equivalem ás dos n.os 65 a 67, mas assignam os valores definidos d'elles, em quanto que as outras só assignavam limites que os comprehendiam.

Variações dos integraes definidos

271. Tanto para demonstrar alguns theoremas de analyse, como para determinar alguns integraes definidos, convém achar a variação d'um integral definido, resultante da mudança de elementos variaveis que entrem na funcção ou nos limites.

Seja $$u = \int_a^b f(x, \alpha)\, dx$$

um integral definido, no qual $f(x, \alpha)$ não se torna infinita entre os limites a e b de x.

Supponhamos que α varía e que a e b são funcções de α.

Pondo $\int f(x, \alpha)\, dx = \mathrm{F}(x, \alpha)$ e por conseguinte

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = \mathrm{F}(b, \alpha) - \mathrm{F}(a, \alpha),$$

a variação do integral definido será

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{d[\mathrm{F}(b, \alpha) - \mathrm{F}(a, \alpha)]}{d\alpha} + \frac{db}{d\alpha} \cdot \frac{d\mathrm{F}(a, \alpha)}{db} - \frac{da}{d\alpha} \cdot \frac{d\mathrm{F}(a, \alpha)}{da};$$

Mas a expressão de $\int f(x, \alpha)\, dx$ dá $f(x, \alpha) = \dfrac{d\mathrm{F}(x, \alpha)}{dx}$;

e, por serem x e α independentes, é

$$\frac{d\int_a^b f(x, \alpha)\, dx}{d\alpha} = \int_a^b \frac{df(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx.$$

..

Ficará pois

$$\frac{du}{d\alpha}=\int_a^b\frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx+\frac{db}{d\alpha}.f(b,\alpha)-\frac{da}{d\alpha}f(a,\alpha)\ldots\ldots(A);$$

equação que, no caso de serem a e b constantes, se reduz, como deve ser, a

$$\frac{d\int_a^b f(x,\alpha)dx}{d\alpha}=\int_a^b\frac{df(x,\alpha)}{d\alpha}dx.$$

272. A equação (A) tambem se pode deduzir de considerações geometricas.

Com effeito, pondo $y=f(x,\alpha)$, o integral $\int_a^b ydx$ é a área comprehendida entre a curva, o eixo das abscissas, e as duas ordenadas correspondentes a $x=a$ e $x=b$.

Se α variar em y, não variando porém os limites, o integral proposto $\int_a^b\left(y+\frac{dy}{d\alpha}d\alpha\right)dx$ será a área comprehendida entre a nova curva, o eixo das abscissas e as duas ordenadas correspondentes ás mesmas abscissas.

Mas, se os limites receberem os augmentos $\frac{da}{d\alpha}d\alpha$ e $\frac{db}{d\alpha}d\alpha$, a área receberá: em virtude do primeiro, a diminuição $f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}d\alpha$; e, em virtude do segundo, o augmento $f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}d\alpha$.

A área, variada por estas tres causas, será pois

$$\int_a^b\left(y+\frac{dy}{d\alpha}d\alpha\right)dx+f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}d\alpha-f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}d\alpha;$$

subtrahindo da qual a primitiva $\int_a^b ydx$, acharemos

$$\frac{du}{d\alpha}=\int_a^b\frac{dy}{d\alpha}dx+f(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha}-f(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}.$$

273. THEOREMA SOBRE A INTEGRAÇÃO DOS INTEGRAES DEFINIDOS.

Seja o integral duplo $u = \int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \int_{x_0}^{x} f(x, \alpha)\, dx,$

onde se suppõem independentes as variaveis x, α, e os limites x_0, α_0;

ou, pondo $\int_{x_0}^{x} f(x, \alpha)\, dx = \mathrm{F}(x, \alpha),$

$$u = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \mathrm{F}(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Differenciando em ordem a x, teremos

$$\frac{du}{dx} = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\,\mathrm{F}(x, \alpha)}{dx}\, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha;$$

e, revertendo para o integral em ordem á mesma variavel,

$$u = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\alpha_0}^{\alpha} f(x, \alpha)\, d\alpha.$$

Por onde se vê que, para obter o integral proposto, se pode integrar em qualquer ordem, isto é, primeiro em ordem a x e depois em ordem a α, ou inversamente.

274. Por esta occasião advertiremos que nas integrações se devem tomar os integraes na maxima generalidade, para evitar contradicções apparentes que algumas vezes se offerecem.

Seja, por exemplo (*Calc. int.* de Cournot, 2.ª ediç. n.º 356),

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}\, dxdy.$$

Segundo se integrar primeiramente em ordem a x ou em ordem a y, assim ficará para integrar $2\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{1+y^2}$ ou $2\int_{-1}^{+1}-\frac{dx}{1+x^2}$, que parecem dar respectivamente π e $-\pi$, concluindo-se que neste caso não é indifferente a ordem das integrações.

Notemos porém que os valores mais geraes de $\int\frac{dy}{1+y^2}$ para $y=+1$ e para $y=-1$ são $n\pi+\frac{1}{4}\pi$ e $n'\pi-\frac{1}{4}\pi$; o que dá:

$$2\int_{-1}^{+1}\frac{dy}{1+y^2}=2\left[(n-n')\pi+\frac{1}{2}\pi\right],$$

$$2\int_{-1}^{+1}-\frac{dx}{1+x^2}=2\left[(n'''-n'')\pi-\frac{1}{2}\pi\right]=2\left[(n'''-n''-1)\pi+\frac{1}{2}\pi\right].$$

Portanto as duas expressões do integral concordam, e são ambas $2\left(\pi i+\frac{1}{2}\pi\right)$; dando $i=0$ o valor particular π, e $i=-1$ o valor particular $-\pi$.

Determinação de alguns integraes definidos

275. Alguns integraes definidos podem obter-se sem que se conheçam os integraes geraes; e outros gozam de propriedades, que só a elles pertencem e não aos geraes.

Sem tractar de todos os integraes definidos interessantes cujos valores os geometras têm assignado, limitar-nos-hemos a alguns, que por suas applicações se tornaram mais importantes, e dos quaes se derivam muitos outros, ou pela transformação das coordenadas e dos limites, ou pela differenciação e pela integração debaixo do signal $\int$, feitas segundo as regras até aqui expostas, ou finalmente pela passagem das expressões reaes para as imaginarias.

276. Seja o integral definido $\int_0^\infty e^{-x^2} dx.$

Se integrarmos successivamente o integral duplo $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$ teremos

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \times \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2.$$

Mas, pondo $y = tx$, formando dy sem variar x, por serem y e x independentes, e integrando successivamente em ordem a x e em ordem a t, o primeiro membro transforma-se em

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2(1+t^2)} x dx dt = \int_0^\infty \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{4}\pi;$$

logo
$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

E como, pondo $-y=x$, o que muda o signal dos limites, é

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx = \int_{\infty}^{0} (-e^{-y^2} dy) = \int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

resulta $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Substituindo em (1) e (2) $x\sqrt{m}$ em logar de x, vem

$$\int_{0}^{\infty} e^{-mx^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{m}},\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{m}} \ldots\ldots (3).$$

E substituindo nestas $\sqrt{x}$ em logar de x, vem

$$\int_{0}^{\infty} e^{-mx} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{m}},\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-mx} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{m}} \ldots\ldots (4).$$

277. Mudando em (3) m em $\mp m\sqrt{-1}$, e sommando ou diminuindo, teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{+mx^2\sqrt{-1}} \pm e^{-mx^2\sqrt{-1}}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{m}}\left(\frac{1}{\sqrt{-\sqrt{-1}}} \pm \frac{1}{\sqrt{+\sqrt{-1}}}\right).$$

Mas pondo $\sqrt{+\sqrt{-1}} \pm \sqrt{-\sqrt{-1}} = z$, vem $\pm 2 = z^2$, que dá

$$z = \sqrt{2},\ z = \sqrt{2}.\sqrt{-1}.$$

Substituindo pois na expressão precedente, será

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{+mx^2\sqrt{-1}} + e^{-mx^2\sqrt{-1}}\right) dx = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\pi}{m}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{+mx^2\sqrt{-1}} - e^{-mx^2\sqrt{-1}}\right) dx = \sqrt{2}\sqrt{-1}\sqrt{\frac{\pi}{m}}:$$

isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(mx^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(mx^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \dots\dots\dots (5).$$

E, se fizermos $m = \frac{1}{2}\pi$, será

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2}\pi x^2\right)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\pi x^2\right)dx = 1 \dots\dots (6).$$

278. Se na formula (3) mudarmos x em $x\sqrt{m} \pm \frac{n}{m\sqrt{m}}$, o que não mudará os limites da integração, a semisomma dos resultados correspondentes aos dois signaes será

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2x^2} \frac{e^{2nx} + e^{-2nx}}{2} dx = e^{\frac{n^2}{m^2}} \frac{\sqrt{\pi}}{m} \dots\dots\dots (7).$$

E se nesta mudarmos n em $n\sqrt{-1}$, virá

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2x^2} \cos 2nx = e^{-\frac{n^2}{m^2}} \frac{\sqrt{\pi}}{m} \dots\dots\dots (8).$$

279. Mudando na formula (3) $\sqrt{m}$ em $m(1 + n\sqrt{-1})$, virá

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2(1-n^2+2n\sqrt{-1})x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+n\sqrt{-1})} = \frac{\sqrt{\pi}.(1-n\sqrt{-1})}{m(1+n^2)},$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2(1-n^2)} dx[\cos(2m^2nx^2) - \sqrt{-1}\operatorname{sen}(2m^2nx^2)] = \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+n^2)} - \frac{n\sqrt{\pi}\sqrt{-1}}{m(1+n^2)}.$$

E, por conseguinte, separando os termos reaes dos imaginarios,

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2(1-n^2)}\cos(2m^2nx^2)dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{m(1+n^2)},\\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m^2(1-n^2)}\operatorname{sen}(2m^2nx^2)dx &= \frac{n\sqrt{\pi}}{m(1+n^2)}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(9).$$

280. Mas cumpre advertir que a substituição de quantidades reaes por imaginarias só se justifica claramente quando os dois membros podem desenvolver-se em series convergentes ordenadas segundo as potencias inteiras das mesmas quantidades; porque, sendo então identicos os coefficientes nessas series, ellas subsistem, quaesquer que sejam os valores ou symbolos que se substituam em logar das quantidades.

No numero antecedente verifica-se esta condição quando é $n < 1$. (*Calc. Int.* de Serret, n.º 499).

281. Integrando successivamente por partes, acha-se

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-mx}dx = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{m^k}\int_0^{\infty} x^{n-k}e^{-mx}dx\ldots(a).$$

Se n é inteiro, e fizermos $k=n$, será

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-mx}dx = \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{m^{n+1}}.$$

Se n é da fórma $n=\frac{2i-1}{2}$, fazendo $k=i$, será

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{2i-1}{2}}e^{-mx}dx = \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots 1}{2^i m^i}\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-mx}dx,$$

ou, (4),

$$\int_0^{\infty} x^{\frac{2i-1}{2}} e^{-mx} dx = \frac{(2i-1)(2i-3)\ldots 1}{2^i m^{\frac{2i+1}{2}}} \sqrt{\pi} \ldots\ldots\ldots (10).$$

282. Empregando as formulas de reducção (n.º 236), teremos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x dx = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{m-2} x dx;$$

e por conseguinte

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2i} x dx = \frac{1.3..(2i-1)}{2.4\ldots 2i} \frac{\pi}{2}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2i+1} x dx = \frac{2.4\ldots 2i}{3.5..(2i+1)} ..(11).$$

Os integraes $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i} x dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2i+1} x\, dx$, têm evidentemente os mesmos valores que estes.

Como, crescendo m, decresce $\operatorname{sen}^m x$, e $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x dx$ é a somma de elementos differenciaes, tambem este integral decresce.

Serão pois

$$\frac{1.3\ldots(2i-1)}{2.4\ldots 2i} \cdot \frac{\pi}{2} > \frac{2.4\ldots 2i}{1.3\ldots(2i+1)} > \frac{1.3\ldots(2i+1)}{2.4\ldots(2i+2)} \cdot \frac{\pi}{2},$$

isto é, $\frac{\pi}{2}$ comprehendido entre

$$\left(\frac{2.4\ldots 2i}{1.3\ldots(2i-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2i+1} \text{ e } \left(\frac{2.4\ldots 2i}{1.3\ldots(2i-1)}\right)^2 \cdot \frac{1}{2i+1} \cdot \frac{2i+2}{2i+1}.$$

E como a razão $\frac{2i+2}{2i+1}$ d'estes dois limites tende para a unidade quando i tende para o infinito, será

$$\frac{\pi}{2}=\left(\frac{2.4\ldots2i}{1.3\ldots2i-1}\right)^2\cdot\frac{1}{2i+1} \text{ ou } \left(\frac{2.4\ldots2i}{1.3\ldots2i+1}\right)^2\cdot(2i+2),$$

tanto mais exactamente, quanto maior for i.

Tal é a formula de Wallis.

Sobre esta formula veja-se o *Instituto de Coimbra*, vol. v, n.º 18, pag. 215.

283. Se differenciarmos a formula (3) i vezes em ordem ao parametro m, teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mx^2} x^{2i}dx=\frac{1.3\ldots(2i-1)}{2^i} m^{-\frac{2i+1}{2}} \sqrt{\pi}\ldots(12);$$

que, para $m=1$, será

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2i}dx=\frac{1.3\ldots(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi}.$$

284. Mudando x em $-x$, os dois primeiros integraes do n.º 239, que que se tornam em

$$\int e^{-ax}\cos bx dx=-\frac{a\cos bx-b\operatorname{sen} bx}{a^2+b^2}e^{-ax}+C,$$

$$\int e^{-ax}\operatorname{sen} bx dx=-\frac{a\operatorname{sen} bx+b\cos bx}{a^2+b^2}+C,$$

tomados entre os limites 0 e ∞, são

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}\, bx dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Se multiplicarmos estes integraes por da, e integrarmos em ordem a a, teremos

$$\int_0^\infty \left(-\frac{e^{-ax}\cos bx}{x}dx + \mathrm{C}\right) = \log\sqrt{a^2+b^2} + \mathrm{C}'$$

$$\int_0^\infty \left(-\frac{e^{-ax}\,\mathrm{sen}\, bx}{x}dx + \mathrm{C}\right) = \mathrm{arc}\left(\mathrm{tang} = \frac{a}{b}\right) + \mathrm{C}'.$$

Tomando, na segunda d'estas formulas, o integral em ordem a a entre os limites 0 e ∞, será

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\, bx}{x}dx = \frac{\pi}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

E, se na formula (13) mudarmos b em $a+b$, depois em $a-b$, supponda $a-b>0$, o que dará

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\,(a+b)\,x}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(a-b)\,x}{x}dx = \frac{\pi}{2},$$

e formarmos a somma e a differença d'estas, virá

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\, ax\cos bx}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\, bx\cos ax}{x}dx = 0.$$

Por onde se vê que o integral $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}\, ax\cos bx}{x}dx$ será $\frac{\pi}{2}$ ou 0, segundo for $a>b$ ou $b>a$.

No caso de $a=b$, subsistiria só a primeira equação

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(a+b)\,xdx}{x} = \frac{\pi}{2},$$

que daria
$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 2\,ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

em conformidade com (13).

285. Multipliquemos por $\frac{\cos bdb}{b}$ o integral $\int_0^{\infty} e^{-ax} \operatorname{sen} bxdx = \frac{b}{a^2+b^2}$, e integremos em ordem a b entre os limites 0 e ∞, isto é

$$\int_0^{\infty}\left(e^{-ax}dx \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} bx \cos b\, db}{b}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\cos b\, db}{a^2+b^2}.$$

Se decompozermos o primeiro membro na somma dos dois integraes, um entre os limites $x=0$ e $x=1$, outro entre os limites $x=1$ e $x=\infty$, será no primeiro $b > bx$ e no segundo $b < bx$; e por conseguinte (n.º 284) naquelle $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} bx \cos b}{b}\, db$ será 0, e neste $\frac{\pi}{2}$. Teremos pois

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}dx \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} bx \cos b}{b}\, db = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-ax}dx = \frac{\pi e^{-a}}{2a}.$$

Assim
$$\int_0^{\infty} \frac{a \cos b\, db}{a^2+b^2} = \frac{\pi\, e^{-a}}{2};$$

ou, fazendo $b=ax$, o que não muda os limites,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi\, e^{-a}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

286. Seja o integral definido $\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}$,

onde são n e m inteiros, e $2n > 2m+1$.

Como as raizes da equação $1+x^{2n}=0$, que são

$$x = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \pm \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

dão os n factores do segundo grâu

$$\left(x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)^2 + \text{sen}^2\frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

a fracção racional $\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}$ transformada e integrada dá

$$-\frac{1}{2n}\sum_1^n \cos\frac{(2m+1)\pi(2k-1)}{2n}\, l\left[1-2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}+x^2\right]$$

$$+\frac{1}{n}\sum_1^n \text{sen}\,\frac{(2m+1)\pi(2k-1)}{2n}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{x-\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\text{sen}\,\frac{(2k-1)\pi}{2n}}\right).$$

Para ter o valor d'este integral entre os limites $-\infty$ e ∞, podemos tomal-o entre os limites $-h$ e h, e depois fazer $h=\infty$.

Operando assim, acha-se

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{n}\left[\text{sen}\,\frac{(2m+1)\pi}{2n} + \text{sen}\,\frac{3(2m+1)\pi}{2n} + ..\text{sen}\,\frac{(2n-1)(2m+1)\pi}{2n}\right];$$

que por ser

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} 3a + \ldots \operatorname{sen}(2n-1)a$$

$$=\frac{e^{(2n-1)a\sqrt{-1}}.e^{2a\sqrt{-1}}-e^{a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\,(e^{2a\sqrt{-1}}-1)}-\frac{e^{-(2n-1)a\sqrt{-1}}.e^{-2a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}\,(e^{-2a\sqrt{-1}}-1)}$$

$$=\frac{e^{2na\sqrt{-1}}-1+e^{-2na\sqrt{-1}}-1}{2\sqrt{-1}\,(e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}})}=\frac{1-\cos 2na}{2\operatorname{sen} a},$$

se transforma em

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{2n}\,\frac{1-\cos(2m+1)\pi}{\operatorname{sen}\dfrac{2m+1}{2n}\pi}=\frac{\pi}{n\operatorname{sen}\dfrac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Por conseguinte é $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{2n\operatorname{sen}\dfrac{(2m+1)\pi}{2n}}$.

(*Calc. Int.* de Bertrand, n.º 140).

Assim, para qualquer valor de p comprehendido entre 0 e 1, tomando dois numeros m e n que satisfaçam a $\dfrac{2m+1}{2n}=p$, será

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{2n\operatorname{sen} p\pi},$$

ou, pondo $x^{\frac{1}{2n}}$ em logar de x,

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}dx}{1+x}=\frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15).$$

287. Integraes eulerianos. Os dous integraes definidos

$$\int_0^1 x^{p-1}.(1-x)^{q-1}dx \text{ e } \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx,$$

sendo p, q, n, numeros positivos quaesquer, chamam-se respectivamente *integraes eulerianos* de primeira e segunda especie, por ser Euler o primeiro que d'elles se occupou. O primeiro destes integraes costuma designar-se pelo signal $(p|q)$, e o segundo pelo signal Γn.

288. Comecemos pelo integral euleriano de *segunda especie*,

$$\Gamma(n)=\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx;$$

ao qual, pondo $x=y^2$, tambem se pode dar a fórma

$$\Gamma(n)=2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2n-1}dy.$$

Fazendo $m=1$ em (a), e mudando n em $n-1$, resulta

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\ldots(n-k)\,\Gamma(n-k)\ldots\ldots(16);$$

e, se for n inteiro,

$$\Gamma(n)=(n-1)(n-2)\ldots 2.1.$$

289. Fazendo $m=1$ em (10), resulta

$$\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3\ldots(2i-3)(2i-1)}{2^i}\sqrt{\pi}\ldots\ldots(17).$$

Este mesmo resultado se obteria differenciando i vezes consecutivas em ordem a m os dous membros da primeira das equações (3) e fazendo depois $m=1$, o que daria

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2i}dx=\frac{1.3.5\ldots(2i-3)(2i-1)}{2^{i+1}}\sqrt{\pi};$$

porque, fazendo $x^2=y$, é

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2i}dx=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^{i-\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{2}\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right).$$

E para $i=0$, é, em virtude da equação (1)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18).$$

290. Pondo $2i$ em vez de n na formula (16) e tomando $k=i$, vem

$$\Gamma(2i)=(2i-1)(2i-2)\ldots i\,\Gamma(i)=\frac{(2i-1)(2i-2)\ldots i\times(i-1)(i-2)\ldots 2.1}{(i-1)(i-2)\ldots .2.1}\Gamma(i)$$

$$=\frac{(2i-1)(2i-3)..3.1\times 2(i-1).2(i-2)..2}{(i-1)(i-2)\ldots .2}\Gamma(i)=(2i-1)(2i-2)..1\times 2^{i-1}\Gamma(i),$$

dividindo a qual por (17), vem

$$\Gamma(2i)=\Gamma\left(i+\frac{1}{2}\right)\Gamma(i)\cdot\frac{2^{2i-1}}{\sqrt{\pi}}\ldots\ldots\ldots\ldots(19).$$

Logo veremos que esta formula é geral para todos os valores de i inteiros ou fraccionarios.

291. Pela formula (16) podem calcular-se successivamente as funcções

Γ com o intervallo 1, partindo de $\Gamma(1)=1$; e pela formula (17), partindo de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

292. Passemos ao integral euleriano de primeira especie

$$(p|q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

Integrando successivamente em ordem a y e a x a expressão

$$P=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}y^{2p-1}x^{2q-1}dydx,$$

acha-se

$$P=\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2p-1}dy\times\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2q-1}dx=\frac{1}{4}\Gamma(p)\times\Gamma(q).$$

Para obter debaixo d'outra fórma este integral, façamos $y=xt$: os limites serão os mesmos, e teremos

$$P=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}x^{2(p+q)-1}t^{2p-1}dtdx.$$

Depois façamos $(1+t^2)x^2=r^2$: os limites são ainda os mesmos, e fica

$$P=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\frac{t^{2p-1}}{(1+t^2)^{p+q}}drdt,$$

que, integrada em ordem a r, dá

$$P=\frac{1}{2}\Gamma(p+q)\times\int_0^\infty\frac{t^{2p-1}}{(1+t^2)^{p+q}}dt.$$

Finalmente, fazendo $\frac{1}{1+t^2}=1-z$, os limites 0 e ∞ mudar-se-hão em 0 e 1, e ficará

$$P=\frac{1}{4}\Gamma(p+q)\times\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1}dz=\frac{1}{4}\Gamma(p+q)\times(p|q).$$

Logo $$(p|q)=\frac{\Gamma(p)\times\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(20);$$

formula que faz depender os integraes eulerianos de primeira especie dos de segunda especie.

293. Para $q=1-p$, sendo $p<1$, a formula (20) dá

$$p\,|\,(1-p)=\Gamma p\,.\,\Gamma(1-p),$$

ou, porque $x=\frac{y}{1+y}$ transforma $p\,|\,q$ em $\int_0^\infty\frac{x^{p-1}dx}{(1+x)^{p+q}}$,

$$\Gamma p\,.\,\Gamma(1-p)=\int_0^\infty\frac{x^{p-1}dx}{1+x},$$

isto é (form. 15)

$$\Gamma p\,.\,\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}p\pi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21).$$

295. Fazendo $p=q=\frac{1}{2}$, e $x=y^2$, a formula (20) dá

$$\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2}\right)=2\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pi=\frac{\left(\Gamma\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)},$$

isto é $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

E como, fazendo $x=y^2$, é

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int_0^\infty e^{-y^2}dy,$$

recahimos na formula (1).

295. Tomando $q=p$ na equação de definição de $p\,|\,q$, será

$$p\,|\,p=\int_0^1 (x-x^2)^{p-1}dx,$$

ou, pondo $x=y+\frac{1}{2}$,

$$p\,|\,p=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-y^2\right)^{p-1}dy=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}-y^2\right)^{p-1}dy,$$

ou em fim, pondo $y=\frac{1}{2}\sqrt{z}$,

$$p\,|\,p=\frac{1}{2^{2p-1}}\int_0^1 (1-z)^{p-1}z^{-\frac{1}{2}}dz=\frac{1}{2^{2p-1}}\left(\frac{1}{2}\middle|\,p\right);$$

que, substituindo em logar de $p\,|\,p$ e $\frac{1}{2}\,\Big|\,p$ as respectivas expressões (20), e attendendo a (18), se transforma na equação (19) para qualquer valor de p, inteiro ou fraccionario.

Quadraturas e rectificações

296. A expressão da área comprehendida entre o eixo das abscissas d'uma curva plana, a curva, e duas ordenadas correspondentes ás abscissas x_1, x_2, é (n.° 112)

$$t=\int_{x_1}^{x_2} y\,dx,$$

D'onde vem o nome de *methodo das quadraturas*, que se dá aos processos pelos quaes se obtem os integraes das funcções d'uma só variavel; mas este nome mais especialmente se consagra á integração d'aquellas funcções feita pelos methodos d'approximação.

Exemplos: I. A equação da parabola conica (Fig. 42) é $y^2=2px$;

logo $$\int y\,dx=\int \sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{3}xy+c,$$

$$t=\frac{2}{3}(x_2y_2-x_1y_1).$$

Se a área se contar do vertice A, teremos $x_1=0$, e $t=\frac{2}{3}x_2y_2$. Logo:

A área do segmento da parabola é egual a duas terças partes do rectangulo circumscripto M'N'NM.

Para as parabolas de todos os gráus, cuja equação é $y^m=ax^n$,

temos $$t=\frac{m}{m+n}(x_2y_2-x_1y_1).$$

Assim estas curvas são quadraveis.

II. Para a hyperbole equilatera MN (Fig. 43), entre as asymptotas Ax, Ay, temos $xy=m^2$ (*Geom. Anal.* n.º 89); logo

$$t=\int ydx=m^2\int\frac{dx}{x}=m^2lx+c.$$

A área não se pode contar desde o eixo Ay, porque $x=0$ daria $t=0$, $c=-m^2l0=\infty$. Mas, contando-a a partir da ordenada BC, que passa pelo vertice C, temos, por ser AB $=m$,

$$c=-m^2lm,\ t=m^2l\frac{x}{m}.$$

Por onde se vê, que, para $m=1$, é $t=lx$, isto é, *que então as áreas contadas desde* BC *são os logarithmos naturaes das abscissas.*

Se o angulo das asymptotas é α, temos a área

$$t=\int ydx\,.\,\mathrm{sen}\,\alpha=m^2\int\frac{dx\,.\,\mathrm{sen}\,\alpha}{x};$$

por conseguinte, quando $m=1$, vem $t=\log x$, sendo este logarithmo tomado no systema cujo modulo é M $=\mathrm{sen}\,\alpha$. Mas, se o angulo α é recto, M $=1$, recahiremos no primeiro caso, e teremos os logarithmos de Neper. Fazendo pois variar o angulo das asymptotas, podemos obter todos os systemas para os quaes é M <1. Por exemplo, sendo M $=0{,}4342944819$ para a base 10, teremos $\alpha=25^\circ.44'.25'',47$: de sorte que em uma hyperbole, cuja potencia é 1 e cujas asymptotas fazem entre si este angulo, as áreas são logarithmos tabulares das abscissas respectivas.

Por onde se vê com quanta impropriedade se dá o nome de *logarithmos hyperbolicos* aos de Neper, sendo que a todos os systemas de logarithmos, para os quaes é M <1, correspondem hyperboles cujas áreas os representam.

III. Para o circulo, cuja equação referida ao centro é $y^2=a^2-x^2$, temos [n.º 210, form. (B)]

$$t=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}a\int\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

mas a formula $ds^2 = dx^2 + dy^2$ applicada ao circulo dá

$$ds = \frac{adx}{y} = \frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

logo, tomando o arco s entre os mesmos limites que o integral proposto, é finalmente

$$t = \frac{1}{2} xy + \frac{1}{2} as + c.$$

Ponhamos $CA = b$, $AB = k$ (Fig. 36). Se tomarmos o integral entre os limites $x = b$, $x = a$, e dobrarmos, teremos a área $\frac{a}{2}$ arc BOB′ $- bk$ do segmento B′OB; e se a esta área ajuntarmos o triangulo CBB′, acharemos o sector BCOB′ $= \frac{1}{2}$ CO . arc BOB′.

Para ter a área do circulo desenvolveremos o radical, e integraremos; o que dá

$$t = \int_0^x dx \sqrt{a^2 - x^2} = a \int_0^x dx \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^4}{2.4.a^4} - \frac{1.3.x^6}{2.4.6a^6} - ..\right);$$

$$= ax - \frac{x^3}{2.3a} - \frac{x^5}{2.4.5a^3} - \frac{1.3x^7}{2.4.6.7a^5} - ...;$$

depois faremos $x = a$, e multiplicaremos por 4. Virá assim

$$\text{sup. circ.} = \pi a^2 = 4a^2 \left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.4.5} - \frac{1.3}{2.4.6.7} - ...\right).$$

D'onde resulta a razão do diametro para a circumferencia,

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.4.5} - \frac{1.3}{2.4.6.7} - \dots \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4.6.8.2n\times(2n+1)}\dots\right).$$

IV. Para a ellipse (Fig. 44) temos $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$,

e $$t = \frac{b}{a}\int dx\,\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a}.z;$$

chamando z a área da parte do circulo circumscripto comprehendida entre as ordenadas limites.

Como as áreas t e z têm entre si a razão constante $\frac{b}{a}$: *a área do circulo é para a da ellipse, ou a área d'um segmento do circulo para a do segmento da ellipse inscripta terminado pelas mesmas ordenadas, como o eixo maior para o menor.* Assim a área da ellipse $= \pi a^2 . \frac{b}{a} = \pi ab$.

V. Na cycloide FMA (Fig. 6), pondo a origem em F, e chamando $FS = x$, $SM = y$, são

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{2r - y}\right)},\ t = \int y dx = \int \sqrt{2ry - y^2}.dy.$$

Por ser este integral a área da porção FKN do circulo gerador, temos

$$FyAM = FKEN = \frac{1}{2}\pi r^2;$$

e, por ser $AE = \pi r$, é o rectangulo $yE = 2\pi r^2$:

LL

logo $$\text{AFE} = y\text{E} - \text{F}y\text{AM} = \frac{3}{2}\pi r^2, \quad \text{AFA}'\text{E} = 3\pi r^2.$$

Assim: *a área da cycloide* AFA′ *é tripla da do seu circulo gerador.*

297. Quando a equaçaõ da curva proposta não for dada, ou quando for tal que não se possa deduzir convenientemente a expressão de $\int y dx$, podemos recorrer á *regra de Simpson.*

A pequena área BCMPB (Fig. 45) compõe-se do trapezio CBPMC e do segmento CEMC,

$$\text{área CBPMC} = \text{seg. CEMC} + \text{trap. CBPMC}.$$

Procuremos separadamente cada uma destas partes.

O arco CM pode considerar-se approximadamente como pertencente á parabola osculatriz cujo vertice L corresponde ao meio I da corda; e então toma-se como expressão do segmento a seguinte

$$\text{seg. CEMC} = \frac{2}{3}\text{CM.LI},$$

que, por os triangulos LEI e MCH darem $\text{LI} = \text{EI}\cos\alpha$, $\text{CM} = \frac{\text{CH}}{\cos\alpha}$,

se transforma em $$\text{seg. CEMC} = \frac{2}{3}\text{EI . CH}.$$

Mas, chamando y', y'', y''' as tres ordenadas equidistantes CB, EK, MP, e h a sua distancia BK, são

$$\text{EI} = \text{EK} - \text{IK} = y'' - \frac{1}{2}(y' + y''') = \frac{1}{2}(2y'' - y' - y''');$$

conseguintemente $$\text{seg. CEMC} = \frac{2}{3}h(2y'' - y' - y''').$$

Em quanto ao trapezio, é trap. $CBPMC = h(y' + y''') = \frac{h}{3}(3y' + 3y''')$;

e portanto área $CBPMC = \frac{1}{3} h (y' + 4y'' + y''')$.

Supponhamos agora: que a área plana BACD (Fig. 46), que se pretende medir, é determinada pela curva AC, pela recta BD, e pelas ordenadas extremas $AB = y'$, $CD = y^{(2n+1)}$; que se divide a base BD em um numero par $2n$ de partes eguaes, cada uma das quaes tem o comprimento h; e que pelos pontos de divisão se levantam as perpendiculares y', y'', $y''' \ldots y^{(2n+1)}$; ficando assim a área partida em $2n$ partes. As superficies compostas de duas d'estas partes consecutivas serão proximamente, como acabamos de mostrar,

$$\frac{1}{3} h(y' + 4y'' + y'''),\ \frac{1}{3} h(y''' + 4y^{\text{IV}} + y^{\text{V}}), \ldots,\ \frac{1}{3} h(y^{(2n-1)} + 4y^{(2n)} + y^{(2n+1)});$$

e por conseguinte a superficie total é

$$\frac{1}{3} h (y' + 4y'' + 2y''' + 4y^{\text{IV}} + 2y^{\text{V}} \ldots + 2y^{(2n-1)} + 4y^{(2n)} + y^{(2n+1)}),$$

ou

$$\frac{2}{3} h[(y' + y'' \ldots + y^{(2n+1)}) + (y'' + y^{\text{IV}} + \ldots y^{(2n)}) - \frac{1}{2}(y' + y^{(2n+1)})].$$

O segundo modo de escrever corresponde ao enunciado seguinte:

Havendo traçado um numero impar de ordenadas equidistantes, sommal-as-hemos todas; ajuntaremos á somma a das ordenadas de ordem par, e subtrahiremos a semisomma das ordenadas extremas; e finalmente multiplicaremos o resultado por $\frac{2}{3}$ da distancia h *entre as ordenadas consecutivas.*

A mesma regra se applica evidentemente ao caso em que a área é terminada, como ACFE, por duas curvas planas, chamando então y', y'',... as grandezas totaes de cada parallela.

Quanto menor é h, mais o resultado se approxima da área pedida. Este theorema pode applicar-se a qualquer figura irregular; por quanto sempre a podemos decompor em outras, que avaliaremos pela mesma regra, e que ajuntaremos ou subtrahiremos, conforme for necessario, para compor a área pedida.

Quando a curva corta a base, ainda tem logar a mesma regra suppondo nulla a ordenada do ponto de secção.

298. No methodo infinitesimal podemos considerar a área t como a somma de pequenos rectangulos $m = dxdy$ (Fig. 47); e então será t o integral duplo, tomado entre os limites convenientes,

$$t = \int\int dxdy.$$

Quando a área, de que se tracta, ficar entre duas curvas BM e DE cujas equações $Y = Fx$ e $y = fx$ são dadas, integraremos relativamente a y, desde PE até PM, e depois relativamente a x, isto é, integraremos relativamente a x a expressão $(Y - y)dx$, que representa o elemento ME comprehendido entre duas ordenadas infinitamente visinhas; e este integral será tomado desde o menor valor de x até o maior.

Se a área fica comprehendida entre quatro ramos de curvas BM, BI, IK, KM, é facil dividil-a por parallelas aos eixos em porções que se avaliam separadamente, conforme os principios precedentes.

Por exemplo, procuremos a porção da área FAF'CF (Fig. 48) comprehendida entre as parabolas eguaes e oppostas AF, AF', e a parallela FF' aos x. Sendo $y^2 = 2px$, $y^2 = -2px$ as equações das duas curvas, integraremos $dxdy$ relativamente a x desde M até M' isto é, desde $x = -\frac{y^2}{2p}$ até $x = +\frac{y^2}{2p}$, o que dará a área da secção MM', $\frac{y^2dy}{2p} - \left(-\frac{y^2dy}{2p}\right) = \frac{y^2dy}{p}$; e depois integraremos $\frac{y^2dy}{p}$ desde $y = 0$ até y, o que dará $\frac{y^3}{3p} = \frac{2}{3}xy$. Achar-se-ia o mesmo subtrahindo a somma das áreas comprehendidas pelo eixo dos x, pelas duas parabolas, e pelas ordenadas de F e F', do rectangulo comprehendido por FF′ e pelas ordenadas, o que daria

$$2xy - \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}xy.$$

A ordenada y da curva não se deve tornar infinita entre os limites da área.

Se a curva corta o eixo dos x entre os limites da área, é necessario calcular cada uma das partes que ficam d'um e outro lado d'este eixo, e ajuntal-as; porque uma sae positiva e outra negativa, e a somma deve achar-se reunindo os valores absolutos, sem attender ao signal.

Seja, por exemplo a curva KACD (Fig. 49), cuja equação é $y = x - x^3$; sendo $KA = AI = 1$, e a origem em A.

A área é $$t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + c.$$

Se a fizermos começar no ponto B, onde $AB = \sqrt{\frac{1}{3}}$, teremos $c = -\frac{5}{36}$, e por conseguinte $t = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{36}$; e se ED, correspondente a $AE = \sqrt{\frac{5}{3}}$, for o segundo limite, acharemos $t = 0$: o que indica sómente que as áreas BCI e IED são eguaes e de signaes contrarios. Com effeito entre $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ e $x = 1$ acha-se $BCI = \frac{1}{9}$, e entre $x = 1$ e $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$ acha-se $(-DIE) = -\frac{1}{9}$; por conseguinte a área $ABCED = \frac{2}{9}$.

Do mesmo modo desde K até I acha-se $(-KAO) = -\frac{1}{4}$ e $ACI = \frac{1}{4}$, isto é, $KOIC = \frac{1}{2}$.

299. Para achar a área comprehendida entre dous raios vectores, servindo-nos das coordenadas polares, podemos considerar como elemento o trapezio infinitesimal comprehendido pelos lados parallelos $rd\theta$ e $(r+dr)d\theta$, e pelos obliquos dr; o que, por se dever desprezar $dr^2d\theta$, dá o elemento

$$rd\theta dr.$$

Por exemplo no circulo (Fig. 50), sendo C o centro, e querendo a área de um annel circular comprehendido entre os raios r' e r, teremos, integrando relativamente a θ desde $\theta=0$ até $\theta=2\pi$, $\quad 2\pi r dr$,

e depois relativamente a r desde r' até r, $\quad \pi r^2 - \pi r'^2$,

que, fazendo $r'=0$, dará a área do circulo.

Para a ellipse (Fig. 44), cuja equação é $r=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$, integraremos primeiramente em ordem a r, desde $r=0$ até $r=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$,

o que dá

$$t=\frac{1}{2}\int\frac{a^2(1-e^2)^2\,d\theta}{(1+e\cos\theta)^2};$$

e depois integraremos esta expressão desde $\theta=0$ até $\theta=2\pi$, para ter a área da ellipse.

Se quizermos a área d'um segmento de circulo AOB (Fig. 51), podemos referir as coordenadas á perpendicular AE ao diametro AD$=2a$, que passa por uma das extremidades A, e ao pólo A. Então, integrando relativamente a r, desde $r=0$ até $r=2a\,\mathrm{sen}\,\theta$, teremos $2a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta$, que se deve integrar relativamente a θ desde $\theta=0$ até $\theta=\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\dfrac{r}{2a}\right)$. Mas é mais simples converter esta integração relativa a θ em outra relativa a r, substituindo em logar de $\mathrm{sen}^2\,\theta$ e $d\theta$ as suas expressões em r,

$$\mathrm{sen}^2\theta=\frac{r^2}{4a^2},\ d\theta=\frac{dr}{2a\,\mathrm{sen}\,\theta}=\frac{dr}{2a\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta}}=\frac{dr}{\sqrt{4a^2-r^2}},$$

o que dá

$$t=\int 2a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta)=\int\frac{1}{2}\,\frac{r^2dr}{\sqrt{4a^2-r^2}}$$

$$=\int \frac{r^2dr}{4a}\left(1+\frac{1.r^2}{2.2^2.a^2}+\frac{1.3r^4}{2.4.2^4a^4}+\frac{1.3.5.r^6}{2.4.6.2^6.a^6}+\ldots\right)$$

$$=\mathrm{C}+\frac{1}{4a}\left(\frac{r^3}{3}+\frac{r^5}{2.2^2.5a^2}+\frac{1.3r^7}{2.4.2^4.7a^4}+\frac{1.3.5.r^9}{2.4.6.2^6.9.a^6}+\ldots\right);$$

e tomar este integral desde o limite inferior $r=0$, o que dá a constante $\mathrm{C}=0$.

Fazendo $r=2a$, resulta a área do semicirculo $\frac{1}{2}\pi a^2$, e por conseguinte

$$\pi=4\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1.3}{2.4.7}+\frac{1.3.5}{2.4.6.9}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.11}+\\ \quad+\ldots\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n\times(2n+3)}\end{array}\right\}.$$

300. Podemos tambem achar a área comprehendida entre dous raios vectores, quando a curva está referida a coordenadas rectilineas, usando da formula (n.° **113**),

$$t=\frac{1}{2}\int(xy'-y)dx.$$

Seja por exemplo (Fig. 44) a equação da ellipse

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2.$$

Teremos
$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y};$$

e a área, comprehendida entre o eixo dos x e o raio correspondente á abscissa x, será

$$t=-\frac{1}{2}\int_a^x\left(\frac{b^2x^2}{a^2y}+y\right)dx=-\frac{1}{2}\int_a^x\frac{b^2}{y}dx=-\frac{1}{2}\int_a^x\frac{abdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2}ab\,\mathrm{arc}\left(\cos=\frac{x}{a}\right).$$

Se chamarmos τ a área do sector do circulo descripto sobre o eixo maior como diametro, comprehendido entre o eixo dos x e o raio cuja extremidade tem a abscissa x, teremos

$$\tau = -\frac{1}{2}\int_a^x \frac{a^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{x}{a}\right);$$

por conseguinte $\qquad t = \frac{b}{a}\tau:$

e como, chamando s o arco de circulo, é $\tau = \frac{1}{2}as$, será $t = \frac{1}{2}bs$.

Assim $\quad$ sect. MCOM $= \frac{1}{2}$ CD. arc. OB, sect. BCOB $= \frac{1}{2}$ CO. arc. OB,

$$\text{sect. MCOM} = \frac{b}{a}\,\text{sect. BCOB}.$$

Para a hyperbole MN (Fig. 43), referida ás asymptotas, temos

$$xy = m^2;$$

logo $\qquad y' = -\frac{y}{x},\ t = -\int y dx,$

o que mostra que é

$$\text{sect. hyperb. CAMC} = \text{área CBPMC}.$$

301. Demos alguns exemplos da formula (n.º 110) das rectificações,

$$s = \int\sqrt{dx^2+dy^2}.$$

I. Para a parabola, $y^2 = 2px$,

temos $ydy = pdx,\ s = \int \frac{dy}{p}\sqrt{y^2+p^2},$

cujo integral é (n.º 205)

$$s = c + \frac{y}{2p}\sqrt{p^2+y^2} + \frac{1}{2}pl(y+\sqrt{p^2+y^2}).$$

Se o arco s começa em A (Fig. 22), $y=0$ dá $s=0$: d'onde se tira $c = -\frac{1}{2}plp$, e por conseguinte

$$\text{ACM} = \frac{y\sqrt{p^2+y^2}}{2p} + \frac{1}{2}pl\left(\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}\right).$$

II. Para a segunda parabola cubica, $y^3 = ax^2$,

temos $s = \int dy\sqrt{1+\frac{9y}{4a}} = \frac{8}{27}a\sqrt{\left(1+\frac{9y}{4a}\right)^3} + c.$

Em geral, para $y = ax^n$,

que representa todas as parabolas ou todas as hyperboles, conforme n é uma fracção positiva ou negativa,

temos $s = \int dx\sqrt{1+n^2a^2x^{2n-2}}.$

Por onde se vê que, todas as vezes que $\frac{1}{2(n-1)}$, ou $\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2}$, for numero inteiro, o arco s se achará debaixo de fórma finita (n.º 208).

III. Para o circulo temos

$$y^2 = r^2 - x^2, \text{ ou } y^2 = 2rx - x^2,$$

segundo for origem o centro ou a extremidade do diametro.

Em ambos os casos acharemos

$$s = \int \frac{rdx}{y};$$

onde, substituindo em logar de y o seu valor, se vê que a integração só se pode fazer por series (n.º 257), ou por arcos de circulo, o que traz a questão á mesma difficuldade que se pretendia vencer.

IV. Para a ellipse, $\quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$

fazendo $ae = \sqrt{a^2 - b^2}$, onde e designa a razão da excentricidade para o semieixo maior, temos

$$s = \int \frac{dx}{a} \sqrt{\left(\frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{a^2 - x^2}\right)} = \int dx \cdot \frac{\sqrt{(a^2 - e^2x^2)}}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

Não se pode integrar esta expressão se não por series; mas é necessario dispôr o calculo de maneira que a serie seja convergente.

Para isso poderemos desenvolver $\sqrt{a^2 - e^2x^2}$.

Ou tambem, chamando θ o arco OB (Fig. 44) do circulo circumscripto, o que dá

$$\text{CA} = x = a\cos\theta, \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -d\theta,$$

será $\quad s = -a \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} d\theta \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}.$

Teremos assim de integrar uma serie de termos da fórma $A\cos^{2m}\theta\, d\theta$; pelo que o arco OM dependerá, por uma serie, do arco correspondente OB do circumscripto.

Assim, desenvolvendo $\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}$ em serie, e applicando o processo indicado no n.º 236, teremos

$$s=\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\theta} a\left(-1+\frac{1}{2}e^2\cos^2\theta+\frac{1}{2.4}e^4\cos^4\theta+\frac{1.3}{2.4.6}e^6\cos^6\theta+..\right)d\theta+C,$$

sendo

$$\int -d\theta=-\theta,\ \int\cos^2\theta d\theta=\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\theta,$$

$$\int\cos^4\theta d\theta=\frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta+\frac{1.3}{2.4}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{1.3}{2.4}\theta.$$

....

Tomando este integral entre os limites $\theta=\frac{1}{2}\pi$ e $\theta=0$, acharemos o comprimento do quarto da ellipse

$$\frac{1}{2}\pi a\left\{\begin{array}{l}1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2\ldots\\ -\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1.3\ldots2n-1}{2.4\ldots2n}e^n\right)^2\ldots\end{array}\right\},$$

sendo n o numero dos termos precedentes.

Similhantemente, fazendo $x=a\sec\theta$, e attendendo a que é $a^2+b^2=a^2e^2$, acharemos para a hyperbole

$$s=a\int_0^{\theta}\frac{e\,d\theta}{\cos^2\theta}\left(1-\frac{1}{2e^2}\cos^2\theta-\frac{1}{2.4e^4}\cos^4\theta-\frac{1.3}{2.4.6e^6}\cos^6\theta-\ldots\right),$$

que integraremos como para a ellipse.

Tomando a differença $r - s$ entre s e o comprimento r da parte da asymptota cuja extremidade tem a mesma abscissa x, a qual é $r = \frac{x}{a} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = ae \sec \theta$; e depois fazendo $x = \infty$, ou $\theta = \frac{\pi}{2}$: acharemos

$$\lim (r-s) = \frac{\pi a}{4e}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4e^2}\right)^2 + \ldots \frac{1}{n+1}\left(\frac{1.3..(2n-1)}{2.4..(2n.e^n)}\right)^2\right].$$

V. Na cycloide (Fig. 6), sendo a origem em F, teremos (n.° 106, VI)

$$y' = \sqrt{\frac{y}{2r-y}},\ s = \int\sqrt{\frac{2r}{y}} \cdot dy = 2\sqrt{2ry},$$

não se ajunctando constante, por começar em F o arco s.

Por ser $\sqrt{2ry} = \text{KF}$, é $\text{FM} = 2 \times$ corda KF.

302. Na pagina 251 vimos que a expressão $E(k, \varphi)$ do n.° 250 representa um arco de ellipse; d'onde veio o nome de *funcções ellipticas* a esta funcção, e ás outras duas que d'ella dependem. E na pagina 252 mostramos que a fórmula (5) d'ella dá um arco da hyperbole, cujo semieixo transverso, tomando a excentricidade por unidade, é k, pela somma de duas funcções algebricas com dois arcos de ellipses, cujo semieixo maior é 1, e cujas excentricidades k, k_1 e amplitudes φ, φ_1, estão ligados entre si pelas relações (a) da pagina 248: sendo nessa formula $\operatorname{sen}\varphi = x$ e $\Delta = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$.

303. Se as coordenadas são polares, temos

$$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}.$$

Por exemplo, a spiral de Archimedes, cuja equação é $2\pi r = a\theta$, dá

$$s = \int \frac{2\pi\, dr}{a}\sqrt{\frac{a^2}{4\pi^2} + r^2}.$$

Comparando esta expressão com a do arco de parabola, vê-se que as grandezas dos arcos d'estas curvas são eguaes, quando é r a ordenada da parabola e $\frac{a}{\pi}$ o seu parametro.

Na spiral logarithmica, cuja equação é $\theta = lr$,

acha-se
$$s = \int dr\sqrt{2} = r\sqrt{2} + c.$$

Se o arco começa no pólo, temos $c = 0$ e $s = r\sqrt{2}$. Assim, ainda que sómente depois d'um numero infinito de revoluções a curva chegaria ao pólo, no entretanto o arco s, contado d'este ponto, é finito, e egual á diagonal do quadrado construido sobre o raio vector que o termina.

A respeito das curvas de dupla curvatura, veja-se o que se disse n.º 162.

Seja, por exemplo, o helice traçado sobre um cylindro recto, cujas ordenadas são proporcionaes aos arcos da base. As equações d'esta curva,

$$x = \mathrm{R}\cos\theta,\ y = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = k\mathrm{R}\theta,$$

dão

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{\theta_0}^{\theta} \mathrm{R}\sqrt{1 + k^2}\, d\theta = \mathrm{R}\sqrt{1 + k^2}\,(\theta - \theta_0).$$

Áreas e volumes dos corpos

304. Corpos de revolução. O volume v e a área u d'um solido de revolução em volta do eixo dos x acham-se pelos integraes (n.º 163)

$$v = \int \pi y^2 dx,\ u = \int 2\pi y ds = \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Façamos algumas applicações d'estas formulas.

I. Para a ellipse, recorrendo ao valor de ds (n.º 301, IV), temos

$$v = \frac{\pi b^2}{a^2} \int (a^2 - x^2)\, dx,\ u = \frac{2\pi be}{a} \int \sqrt{\left(\frac{a^2}{e^2} - x^2\right)} dx.$$

O integral da primeira dá $v = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2} + c\right)$; onde $c = -\frac{2}{3}a$, no caso de ser o vertice um dos limites. Chamando pois z a altura do segmento de ellipsoide, ou $x = a - z$, o seu volume é $= \frac{\pi b^2 z^2}{3a^2}(3a - z)$, que para o ellipsoide inteiro, isto é, para $z = 2a$, se tornará em $\frac{4}{3}\pi b^2 a$. D'onde resulta que: 1.º o volume da esphera é $\frac{4}{3}\pi a^3$; 2.º o ellipsoide de revolução é para a esphera circumscripta :: $b^2 : a^2$; 3.º cada um d'estes corpos é $\frac{2}{3}$ do cylindro circumscripto; 4.º em fim o segmento espherico é $\pi z^2 \left(a - \frac{1}{3}z\right)$.

O integral, que entra no valor de u, é evidentemente a área de uma porção de circulo concentrico á ellipse, comprehendida entre os mesmos limites que o arco gerador, e de raio $\frac{a}{e}$. Chamando z esta área, que facilmente se obtem, teremos $u = \frac{2\pi bez}{a}$.

Se se tracta da esphera, temos (n.º 301, III)

$$ds = \frac{rdx}{y}; \text{ logo } u = 2\pi \int rdx.$$

D'onde resultará facilmente $2\pi rz$ para a expressão da superficie da callote espherica, ou da zona, cuja altura é z; e $4\pi r^2$ para a área de toda a esphera.

II. Para a parabola, $y^2 = 2ax$, acham-se

$$v = \int 2\pi axdx = \pi ax^2 + c,$$

$$u = \int \frac{2\pi}{a} ydy\sqrt{y^2 + a^2} = \frac{2\pi}{3a}\left[\sqrt{(y^2 + a^2)^3} + C\right].$$

Se a origem é no vertice, temos $c = 0$ e $C = -a^3$. Taes são o volume e a área d'um segmento de paraboloide de revolução.

III. Seja a equação $y^m = ax^n$,

que pertence a todas as parabolas, ou a todas as hyperboles, conforme n é positivo ou negativo. Teremos

$$v = \int \pi \sqrt[m]{a^2} \cdot \sqrt[m]{x^{2n}} \cdot dx = \frac{m\pi x}{m + 2n} \sqrt[m]{(ax^n)^2} = \frac{m\pi xy^2}{m + 2n}.$$

Se quizermos o volume ou a área descripta pela figura plana comprehendida entre duas ordenadas e os arcos de duas curvas, ou de duas partes da mesma curva, que ellas interceptam, usaremos das formulas

$$v = \int \pi (y'^2 - y^2)\, dx,\ u = \int 2\pi dx\left(y'\sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx^2}} - y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right),$$

sendo y, y', as ordenadas dos dois arcos, e tomando os integraes entre as abscissas correspondentes ás duas ordenadas que terminam a figura.

305. Corpos quaesquer. O volume V e a área U d'um corpo qualquer são dados pela integração das formulas (n.º 166)

$$V=\iint z dx dy,\ U=\iint dx dy \sqrt{1+p^2+q^2};$$

integraes, que se devem entender do modo seguinte. Tirados das equações da superficie proposta os valores de z, p e q, em funcção de x e y, integraremos as expressões precedentes, primeiro em ordem a uma das variaveis, x ou y, conforme a facilidade dos calculos, e depois em ordem á outra variavel; e nestes integraes attenderemos aos limites que a questão assigna.

Supponhamos, por exemplo, que a área U deve ficar comprehendida entre dois planos parallelos aos xz ($y=a$ e $y=b$), e que a integração se faz primeiro em ordem a y: então é necessario tomar o integral entre os limites a e b, considerando x como constante. D'onde resultará a área MB (Fig. 37) d'uma secção de solido, de espessura dx infinitamente pequena, terminada nos dous planos MF e SB de que se tracta. Integrando depois este primeiro integral, que é da fórma $\varphi x . dx$, e tomando o novo integral desde o menor valor de x até o maior, teremos a área pedida, considerada como somma d'uma serie infinita de secções similhantes.

Se o corpo é terminado lateralmente por superficies curvas, devemos introduzir no primeiro integral funcções de x por limites de y, procedendo d'um modo analogo ao do n.º 298. O que tudo melhor se perceberá á vista dos seguintes exemplos:

Na esphera (Fig. 52), $\quad x^2+y^2+z^2=r^2,$

temos $\quad p=-\dfrac{x}{z},\ q=-\dfrac{y}{z},\ \sqrt{1+p^2+q^2}=\dfrac{r}{z},$

que, substituidos em U e V, os transformam em

$$U=\iint \frac{r dx dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}},\ V=\iint dx dy \sqrt{r^2-x^2-y^2}.$$

Integremos primeiro em ordem a x, suppondo y constante.

A integração dá, em U, rdy arc $\left(\text{sen} = \frac{x}{A}\right)$, sendo $A = \sqrt{r^2 - y^2}$. Ora a intersecção do plano xy com a esphera é um circulo Cy, que tem por equação $x^2 + y^2 = r^2$, e no qual a abscissa $AF = \pm A$ é o raio do do circulo formado pelo plano secante DmC: se tomarmos pois este integral desde $x = -A$ até $x = +A$ isto é, desde $\frac{x}{A} = -1$ até $\frac{x}{A} = 1$, teremos a área $DmC = \pi r dy$, de espessura infinitesima, d'uma secção parallela aos xz traçada no hemispherio superior.

Integrando agora $\pi r dy$, teremos o segundo integral $\pi r y$, que tomado entre os limites $-r$ e $+r$, isto é, entre o minimo e o maximo valor de y, dá $2\pi r^2$ para área do hemispherio superior, ou $4\pi r^2$ para área da esphera.

Façamos o mesmo a respeito do volume V: teremos (n.º **210**, (B))

$$\int \sqrt{A^2 - x^2} \,.\, dx = \frac{1}{2} x \sqrt{A^2 - x^2} + \frac{1}{2} A^2 \text{ arc} \left(\text{sen} = \frac{x}{A}\right).$$

Tomando este integral entre os mesmos limites $-A$ e $+A$ que tomámos para a superficie, o primeiro termo desapparece, e o segundo reduz-se a $\frac{1}{2}\pi A^2$. Assim temos de integrar de novo $\frac{1}{2}\pi(r^2 - y^2)dy$, que representa o volume da secção $DmCD$; o que dá $\frac{1}{2}\pi\left(r^2 y - \frac{1}{3}y^3\right)$; e tomando este resultado entre os limites $-r$, $+r$, vem finalmente o volume do hemispherio

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3, \text{ ou o da esphera} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

306. Se o volume V é comprehendido entre duas superficies no sentido dos z, integra-se o seu elemento $dxdydz$, primeiro em ordem a z, desde o z correspondente á superficie inferior, que limita o corpo, até o z da superficie superior; sendo estes valores de z funcções de x e y tiradas das equações das duas superficies. Integra-se depois em ordem a x, para formar a somma de todos os prismas que compõe uma secção de espessura dy, comprehendida entre dous planos parallelos aos xz, sendo os limites d'este integral dados pelas expressões de x tiradas da equação da projecção da superficie sobre o plano xy. Supponhamos que o volume V está inscripto em um cylindro MNg (Fig. 37), levantado sobre uma base dada mng. Os limites do integral resultam d'uma secção qualquer Pmn feita no corpo por um plano perpendicular aos y: assim, deveremos tomar o integral desde $x = \text{P}m$ até $x = \text{P}n$, sendo Pm e Pn valores dados em funcções de y pela equação da curva $mfng$, base do cylindro. Sejam $x = fy$, $x = \text{F}y$, estes valores: substituindo-os successivamente em logar de x no integral, e subtrahindo um resultado do outro, teremos por fim de integrar uma funcção de y, desde o menor valor AB de y até o maior AC; valores estes que tambem se tiram da equação da base fng.

Procuremos, por exemplo, o volume d'um cone recto. Se tomarmos para eixo dos y o eixo d'este cone, e para origem das coordenadas o seu vertice, teremos (*Geom. Anal.*, n.º 168) a equação $l^2y^2 = z^2 + x^2$, onde l é a tangente do angulo formado pelas generatrizes com o eixo. Tomando pois $zdxdy$ desde $z = -\sqrt{l^2y^2 - x^2}$ até $z = +\sqrt{l^2y^2 - x^2}$, teremos $2\sqrt{l^2y^2 - x^2} \,.\, dxdy$. O integral d'esta expressão em ordem a x é

$$x\sqrt{l^2y^2 - x^2} + l^2y^2 \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{x}{ly}\right) + c.$$

Para achar os limites, entre os quaes se deve tomar este integral, tiraremos $x = \pm ly$ da equação da projecção do cone sobre o plano dos xy; e tomando-o entre $x = -ly$ e $x = +ly$ o que dá πl^2y^2, será πl^2y^2dy o volume d'um tronco de cone, de altura infinitesima dy, comprehendido entre dous planos parallelos aos xz. Finalmente, integrando esta expressão desde o vertice ($y = 0$) até a base ($y = h$), acharemos o volume do cone recto $\frac{1}{3}\pi l^2h^3$; o que é o theorema conhecido, por ser $l \times h$ o raio da base.

Do mesmo modo, para achar o volume V do ellipsoide cujos semieixos são a, b, c, temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

e $$V = 2\int_{-b}^{b} dy \int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dx\,.\,c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

$$= 2\frac{c}{a}\int_{-b}^{b} dy \int_{-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)}}^{\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)}} dx\sqrt{\frac{a^2}{b^2}(b^2-y^2)-x^2},$$

ou, fazendo $$\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} = \text{A},$$

$$V = 2\frac{c}{a}\int_{-b}^{b} dy\,.\,\frac{\pi \text{A}^2}{2} = \pi ac\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy,$$

isto é $$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Similhantemente, se os limites da área são determinados por uma curva FMNG, traçada sobre a superficie de que se tracta, procuraremos a sua projecção fg sobre o plano xy (*Geom. Anal.*, n.º 162), que determinará um cylindro recto, e para este raciocinaremos do mesmo modo. Teremos assim de integrar $dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$ entre os limites acima designados: como se vê no exemplo seguinte.

Tracemos no plano xy as duas parabolas eguaes e oppostas FAE, F′AE′ (Fig. 35), cujas equações são $y^2 = +nx$, $y^2 = -nx$; e depois a parallela FF′ ao eixo dos x, correspondente á ordenada $\text{AC} = b$. De mais concebamos um cone recto de base circular, que tivesse por vertice a origem A, e por eixo o dos z, de meneira que a sua equação fosse $z = k\sqrt{x^2+y^2}$.

Pede-se a área do cone comprehendida no cylindro recto elevado sobre

..

AMFF'M'. A equação do cone dá

$$p = \frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}},\ q = \frac{ky}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1+p^2+q^2 = 1+k^2:$$

portanto o elemento da área do cone é $\sqrt{1+k^2}\,.\,dxdy$; e a sua projecção é em m. O integral em ordem a x é $\sqrt{1+k^2}\,.\,xdy$, que tomado desde M' até M, isto é, desde $x = -\frac{y^2}{n}$ até $x = +\frac{y^2}{n}$, dá a área da secção, de espessura infinitesima, projectada em MM', $\frac{2y^2}{n}\sqrt{1+k^2}\,.\,dy$.

Depois integrando esta expressão em ordem a y, vem $\frac{2y^3}{3n}\sqrt{1+k^2}$, que se deve tomar desde A até C, isto é, desde $y=0$ até $y=b$.

A área pedida será pois $\frac{2b^3}{3n}\sqrt{1+k^2}$.

Estes principios são especialmente applicaveis na Mechanica á investigação dos centros de gravidade e dos momentos de inercia.

307. Supponhamos que a equação da superficie é dada em coordenadas polares,

$$r = f(\theta,\ \psi).$$

Se o plano projectante MAP (Fig. 53) gyra em volta de AZ, o arco descripto por M, perpendicularmente áquelle plano, é o mesmo que o descripto por P, isto é,

$$r \operatorname{sen} \theta\, d\psi.$$

No mesmo plano projectante, o raio AM, gyrando em volta de A, descreve o arco $rd\theta$ perpendicular a AM.

Portanto os tres elementos perpendiculares em M são $r \operatorname{sen} \theta d\psi$, $rd\theta$, dr, lados do parallelipipido elementar, cujo volume é assim $r^2 dr d\psi d\theta \operatorname{sen} \theta$; e temos

$$V = \iiint r^2 dr d\psi d\theta \operatorname{sen} \theta = \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \int_{\theta_0}^{\theta_1} d\theta \operatorname{sen} \theta \int_{r_0}^{r_1} r^2 dr;$$

sendo r_1 e r_0 os dois limites, entre os quaes está comprehendido r, para cada systema de ψ, θ; e θ_1, θ_0, ψ_1, ψ_0, os limites de θ e ψ.

Assim, para o volume da esphera, cuja equação polar é $r = a$, temos

$$\int_0^a r^2 dr = \frac{1}{3} a^3, \ \frac{1}{3} a^3 \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen} \theta = \frac{2}{3} a^3;$$

por conseguinte

$$V = \frac{2}{3} a^3 \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

II

INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA PRIMEIRA ORDEM ENTRE DUAS VARIAVEIS

Separação das variaveis. Equações homogeneas

308. Uma equação differencial $$Mdy + Ndx = 0 \ldots\ldots\ (1)$$

nem sempre resulta immediatamente d'outra primitiva $f(x, y) = 0$; por que muitas vezes provirá de combinações da primitiva com a sua derivada, ou, mais geralmente, de multiplicações por factores. Pode pois a proposta não ser uma differencial exacta, e comtudo ser susceptivel de tornar-se tal por operações convenientes.

309. Supponhamos que a equação proposta é de primeira ordem entre duas variaveis x, y.

Se as variaveis estão nella separadas, isto é, se M só contém y e N só contém x, o integral procurado é a somma dos integraes dos dois termos, os quaes se obtem pelas regras precedentes,

$$\int Mdy + \int Ndx = 0.$$

310. O mesmo dirémos de qualquer equação, na qual se possam separar as variaveis, multiplicando-as por factores convenientes; como nos casos seguintes:

1.° Se M é funcção de x e N de y, a proposta, sendo multiplicada por $\frac{1}{MN}$, fica separada,

$$\frac{dy}{N}+\frac{dx}{M}=0.$$

Por exemplo $\quad dx\sqrt{1+y^2}-xdy=0$

dá
$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}},$$
e por conseguinte

$$l(cx)=l(y+\sqrt{1+y^2}),\ cx=y+\sqrt{1+y^2}.$$

2.° Se M e N são productos de funcções de x por funcções de y, $M=XY$, $N=X_1Y_1$, a multiplicação por $\frac{1}{XY_1}$ dá a equação separada

$$\frac{Y}{Y_1}dy+\frac{X_1}{X}dx=0.$$

3.° Se a proposta é homogenea do gráu m, isto é, $M=\Sigma Ay^g x^h$, $N=\Sigma By^i x^k$, $g+h=i+k=m$: fazendo $y=zx$, será $\frac{N}{M}=\frac{\Sigma B z^i}{\Sigma A z^g}$ uma funcção Z de z; e a multiplicação pelo factor $\frac{1}{My+Nx}=\frac{1}{(Mz+N)x}$ transformal-a-ha na separada

$$\frac{Mxdz+(Mz+N)\,dx}{(Mz+N)x}=\frac{dz}{z+Z}+\frac{dx}{x}=0.$$

Exemplos

I. Seja $$(ax+by)\,dy+(fx+gy)\,dx=0.$$

Dividindo por $(ax+by)y+(fx+gy)x$, e pondo $y=zx$, vem

$$\frac{(a+bz)\,dz}{bz^2+(a+g)z+f}+\frac{dx}{x}=0,$$

equação separada, que facilmente se integra

Assim a equação $$ydy+(x+2y)\,dx=0,$$

que se deduz da precedente pondo $a=0,\ b=1,\ f=1,\ g=2,$

dá $$\frac{zdz}{(1+z)^2}+\frac{dx}{x}=0=\frac{dz}{1+z}-\frac{dz}{(1+z)^2}+\frac{dx}{x},$$

cujo integral é $$l(1+z)+\frac{1}{1+z}+l(cx)=0,$$

ou $$lc(x+xz)+\frac{1}{1+z}=lc(x+y)+\frac{x}{x+y}=0.$$

II. Seja $$ay^m\,dy+(x^m+by^m)\,dx=0.$$

Dividindo por $ay^{m+1}+(x^m+by^m)x$, e pondo $y=xz$, resulta a separada

$$\frac{dx}{x}+\frac{az^m\,dz}{az^{m+1}+bz^m+1}=0.$$

III. Seja $$xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dividindo por $xy - (y + \sqrt{x^2 + y^2})x$, e fazendo $y = xz$, resulta a separada,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}},$$

cujo integral é $x = c(z + \sqrt{1 + z^2})$, ou $x^2 - c(y + \sqrt{x^2 + y^2}) = 0$. Este integral, desembaraçado do radical pela transposição e elevação ao quadrado, dá

$$x^2 = 2cy + c^2.$$

IV. Qual é a curva cuja área BCMP (Fig. 42) é egual ao cubo da ordenada, que a termina, dividido pela abscissa; e isto para cada um dos pontos, a partir d'uma ordenada fixa BC?

Differenciando a equação correspondente a este enunciado

$$\int ydx = \frac{y^3}{x},$$

resulta a equação homogenea $$(x^2y + y^3)\,dx = 3xy^2dy,$$

que, pela regra exposta, se reduz a $$\frac{dx}{x} = \frac{3zdz}{1 - 2z^2},$$

e integrada dá $x^4(1 - 2z^2)^3 = c$, ou $(x^2 - 2y^2)^3 = cx^2$.

311. Do que fica dicto resulta, que será integravel qualquer equação que por transformações convenientes se poder tornar homogenea.

Seja por exemplo a equação

$$(ax + by + c)\,dy + (mx + ny + p)\,dx = 0.$$

Pondo $\qquad ax + by + c = z,\ mx + ny + p = t,$

que dão $\qquad dy = \dfrac{mdz - adt}{mb - na},\ dx = \dfrac{bdt - ndz}{mb - na},$

e substituindo na proposta, resulta a equação homogenea

$$(mz - nt)\,dz + (bt - az)\,dt = 0.$$

No caso de ser $mb - na = 0$ não tem logar este calculo; mas, como então é $m = \dfrac{na}{b}$, a proposta torna-se em

$$bcdy + bpdx + (ax + by)(bdy + ndx) = 0,$$

na qual é facil separar as variaveis, pondo $ax + by = v$, substituindo, e dividindo depois pelo coefficiente de dx, o que dá

$$\frac{c + v}{bp - ac + (n - a)v}\,dv + dx = 0.$$

312. Equação linear. Seja a equação linear, ou do primeiro gráu em y,

$$dy + Pydx = Qdx,$$

na qual P e Q representam funcções de x.

Fazendo $y = zt$, o que deixa arbitrario um dos factores z, t, podemos partir por isso a transformada $tdz + (dt + Ptdx)z = Qdx$ nas duas

$$dt + Ptdx = 0,\ tdz = Qdx,$$

a primeira das quaes dará $\qquad - lt = \int P dx = u$, ou $t = e^{-u}$,

e depois a outra $\qquad z = \int Q e^u dx + c$,

ou $\qquad y = e^{-u}(\int Q e^u dx + c)$.

313. Reduz se a esta a integração de

$$dy + Pydx = Qy^n dx,$$

fazendo $\dfrac{y^{1-n}}{1-n} = z$, que a transforma em

$$y^n dz + Pydx = Qy^n dx, \text{ ou } dz + (1-n) Pzdx = Qdx.$$

O integral é portanto

$$y^{1-n} = (1-n)\, e^{-(1-n)\int Pdx} \left(\int Q e^{(1-n)\int Pdx} dx + c\right).$$

Exemplos

I. Em $$dy + ydx = ax^3 dx,$$

temos $\qquad P = 1,\ Q = ax^3;\ u = \int Pdx = x;$

por conseguinte

$$ye^u = a\int x^3 e^u dx + c = ae^u(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c.$$

II. Em $$(1 + x^2)\, dy - xydx = adx$$

temos

$$P = -\frac{x}{1+x^2},\ Q = \frac{a}{1+x^2},\ u = -\int \frac{x dx}{1+x^2} = -l\sqrt{1+x^2};$$

logo $e^u = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $y = e^{-u}(\int Qe^u dx + c) = ax + c\sqrt{1+x^2}$.

III. Em
$$dy - \mu y dx - \frac{2g}{a}\cos x dx = 0$$

temos
$$P = -\mu,\ Q = \frac{2g}{a}\cos x,\ \int P dx = -\mu x = u;$$

e
$$\int Qe^u dx = \frac{2g}{a}\int e^{-\mu x}\cos x dx:$$

ou, porque de
$$\int e^{-\mu x}\cos x dx$$

$$= e^{-\mu x}\operatorname{sen} x + \mu\int e^{-\mu x}\operatorname{sen} x dx$$

$$= e^{-\mu x}\operatorname{sen} x - \mu e^{-\mu x}\cos x - \mu^2\int e^{-\mu x}\cos x dx$$

se tira
$$\int e^{-\mu x}\cos x dx = \frac{e^{-\mu x}\operatorname{sen} x - \mu e^{-\mu x}\cos x}{1+\mu^2},$$

$$\int Qe^u dx = \frac{2g}{a(1+\mu^2)}(e^{-\mu x}\operatorname{sen} x - \mu e^{-\mu x}\cos x).$$

Portanto
$$y = Ce^{\mu x} + \frac{2g}{a(1+\mu^2)}(\operatorname{sen} x - \mu\cos x).$$

(*Mec. de Poisson* n.º 188).

314. Equação de Riccatti. Tractemos finalmente da equação de Riccatti, primeiro geometra que se occupou d'ella:

$$dy + by^2 dx = ax^m dx.$$

1.° Se $m = 0$, temos (*Alg. Sup.* pag. 224)

$$dx = \frac{dy}{a - by^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{dy}{\sqrt{a} + y\sqrt{b}} + \frac{dy}{\sqrt{a} - y\sqrt{b}}\right),$$

que dá

$$2\sqrt{ab}\,(x + c) = l\,(y\sqrt{b} + \sqrt{a}) - l\,(y\sqrt{b} - \sqrt{a}),$$

ou
$$y = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{(e^{2(x+c)\sqrt{ab}} + 1)}{e^{2(x+c)\sqrt{ab}} - 1};$$

e, no caso de terem a e b signaes differentes, $\pm a$ e $\mp b$,

$$y = \sqrt{\left(\mp \frac{a}{b}\right)}\cot\left[(x + c)\sqrt{\mp ab}\right].$$

2.° Se m não é nullo, ponhamos $\quad y = b^{-1}x^{-1} + zx^{-2}$:

teremos
$$x^2 dz + bz^2 dx = ax^{m+4} dx,$$

transformada, que é homogenea no caso de $m = -2$, e que se integra por separação das variaveis no caso de $m = -4$.

3.° Nos outros casos façamos $\quad z = t^{-1},\ x^{m+3} = u,$

e depois
$$n = -\frac{m+4}{m+3},\ b' = \frac{a}{m+3},\ a' = \frac{b}{m+3}:$$

resultará a equação similhante á proposta

$$dt + b't^2du = a'u^n du,$$

que se poderá tractar como a precedente, e integrar nos casos de $n = -2$ e $n = -4$.

Mas se n não é -2 nem -4, poderemos ainda fazer uma transformação analoga á precedente; e se continuarmos assim successivamente pelo mesmo processo, seremos conduzidos á integração d'equações da mesma fórma que a proposta, tendo successivamente por expoente da variavel no segundo membro os numeros

$$n = -\frac{m+4}{m+3},\ n' = -\frac{n+4}{n+3},\ n'' = -\frac{n'+4}{n'+3}, \ldots$$

isto é, os numeros

$$-\frac{m+4}{m+3}, -\frac{3m+8}{2m+5}, -\frac{5m+12}{3m+7}, -\frac{7m+16}{4m+9} \ldots -\frac{(2k-1)m+4k}{km+2k+1}.$$

Quando uma d'estas fracções for nulla, ou -2 ou -4, isto é, quando for $m = -\frac{4i}{2i-1}$, i designando qualquer numero positivo, ou zero, o integral se achará facilmente.

Se tivessemos começado por fazer $y = t^{-1}$, $x^{m+1} = z$, na proposta, o mesmo calculo nos conduziria a achar que a integração é possivel quando $m = \frac{-4i}{2i+1}$.

Sabe-se pois integrar a equação de Riccati nos casos em que é

$$m = \frac{-4i}{2i \pm 1}$$

Do factor que torna integravel uma equação differencial da primeira ordem

315. I. Condição de integrabilidade. Se o primeiro membro da equação
$$Mdy + Ndx = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
é uma differencial exacta $du = Mdy + Ndx$,
serão M e N os coefficientes differenciaes parciaes $\frac{du}{dy}$ e $\frac{du}{dx}$; e conseguintemente a relação $\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}$, será $\frac{dM}{dx} = \frac{dN}{dy} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$.

Á primeira condição $\frac{du}{dy} = M$ satisfaz-se pondo $u = \int[Mdy] + X$, isto é, integrando na supposição de x constante e ajuntando uma funcção de x; e desta, que dá $\frac{du}{dx} = \int\left[\frac{dM}{dx}\,dy\right] + \frac{dX}{dx}$, resulta, por ser $\frac{du}{dx} = N$ em virtude da segunda condição, $X = \int dx\left(N - \int\left[\frac{dM}{dx}\,dy\right]\right) + c$.

Portanto
$$u = \int[Mdy] + \int dx\left(N - \int\left[\frac{dM}{dx}\,dy\right]\right) + c,$$
ou
$$u = \int[Mdy] + \int dx\left(N - \frac{d\left[\int Mdy\right]}{dx}\right) + c.$$

Este calculo será possivel, e obter-se-ha assim o integral procurado, quando a expressão $N - \int \left[\frac{dM}{dx} dy \right]$, que entra debaixo do integral em X, for uma funcção de x sómente, isto é, quando for nulla a sua derivada em ordem a y,

$$\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx} = 0.$$

Logo: *a equação* Mdy + Ndx *será differencial exacta quando se verificar a condição* (2); *e só então o será.*

Se tivessemos começado por integrar Ndx em ordem a x, chegariamos do mesmo modo ás expressões

$$u = \int [Ndx] + \int dy \left(M - \int \left[\frac{dN}{dy} dx \right] \right) + c,$$

ou

$$u = \int [Ndx] + \int dy \left(M - \left[\frac{d[\int Ndx]}{dy} \right) + c.\right.$$

Preferir-se-ha, dos dois processos, o que mais facilitar o calculo.

Exemplos

I. Em $$\frac{a(xdx + ydy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + 3by^2dy$$

temos $$M = \frac{ay}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{x^2 + y^2} + 3by^2,$$

$$N = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{x^2 + y^2};$$

e a condição (2) verifica-se.

Estas expressões dão

$$\int \mathrm{N}dx = a\sqrt{x^2+y^2} + \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{x}{y}\right),\quad \frac{d(\int \mathrm{N}dx)}{dy} = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2};$$

logo (form. (2′) $\quad u = a\sqrt{x^2+y^2} + \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{x}{y}\right) + by^3 + c.$

No caso de serem nullos a e b, este integral reduz-se ao conhecido

$$\int \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{x}{y}\right) + c.$$

II. Do mesmo modo se achará

$$\int \frac{dx(x+\sqrt{x^2+y^2}) + ydy}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}} = \text{l.}\, c\,(x+\sqrt{x^2+y^2}).$$

316. II. Reducção á condição de integrabilidade. No caso de não satisfazer a proposta á condição de integrabilidade, vejamos se é possivel, multiplicando-a por uma funcção conveniente de x e y, reduzil-a a satisfazer a essa condição.

A equação $\qquad \mathrm{M}dy + \mathrm{N}dx = 0$

deve coincidir com a que resulta de eliminar uma constante c entre a primitiva e a sua differencial immediata.

Supponhamos que a primitiva, resolvida em ordem a c, toma a fórma

$$c = \varphi(x, y).$$

Da differencial immediata d'esta,

$$d\varphi = \mathrm{P}dy + \mathrm{Q}dx = 0$$

tira-se $$\frac{d\varphi}{P} = dy + \frac{Q}{P}dx = 0,$$

a qual, por não entrar nella a constante c, deve ser identica com

$$dy + \frac{N}{M}dx = 0,$$

isto é, deve ser $$dy + \frac{N}{M}dx = \frac{d\varphi}{P},$$

ou $$d\varphi = \frac{P}{M}(Mdy + Ndx):$$

e porque o primeiro membro é uma differencial exacta, tambem o segundo o deve ser. Logo:

Se a proposta de primeira ordem $Mdy + Ndx = 0$ *tem uma primitiva, sempre ha um factor,* $\frac{P}{M} = \frac{Q}{N} = z$, *proprio para tornar integravel a funcção differencial* $z(Mdy + Ndx)$.

Para obter este factor, a condição de integrabilidade de $Mzdy + Nzdx$,

que é $$\frac{d(Mz)}{dx} = \frac{d(Nz)}{dy},$$

dá $$z\left(\frac{dM}{dx} - \frac{dN}{dy}\right) = N\frac{dz}{dy} - M\frac{dz}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

a qual deve determinar z.

317. Esta equação ás differenciaes parciaes poucas vezes pode servir para isso, por causa da difficuldade dos calculos; mas deduzem-se d'ella algumas propriedades notaveis.

1.° Se o integral u de $z(\mathrm{M}dy + \mathrm{N}dx)$ fosse conhecido, facilmente se acharia o factor z, porque seriam $\frac{du}{dy} = \mathrm{M}z$, $\frac{du}{dx} = \mathrm{N}z$,

e portanto
$$z = \frac{\frac{du}{dy}}{\mathrm{M}} = \frac{\frac{du}{dx}}{\mathrm{N}}.$$

2.° Multiplicando a equação identica $du = z(\mathrm{M}dy + \mathrm{N}dx)$ por qualquer funcção φu de u, vem

$$\varphi u du = z\varphi u(\mathrm{M}dy + \mathrm{N}dx).$$

E como o primeiro membro é uma differencial exacta, tambem o deve ser o segundo: por conseguinte ha uma infinidade de factores $z\varphi u$ proprios para tornar integravel a equação proposta, e o conhecimento de um d'elles z basta para achar os outros.

3.° Se z é funcção sómente d'uma das variaveis, x ou y, será facil determinal-o.

Com effeito, se z é funcção unicamente de x, a equação (3) reduz-se a

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{\mathrm{M}}\left(\frac{d\mathrm{N}}{dy} - \frac{d\mathrm{M}}{dx}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4);$$

e z obter-se-ha integrando esta equação (4), cujo segundo membro deve, segundo a hypothese, ser uma funcção de x.

Similhantemente dará z a integração de

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{\mathrm{N}}\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx} - \frac{d\mathrm{N}}{dy}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

quando o segundo membro, e por conseguinte z, for uma funcção de y.

Cumpre observar que em (4) e (5) a parte comprehendida entre parenthesis se torna nulla, como deve ser, quando $\mathrm{M}dy + \mathrm{N}dx$ é differencial exacta.

4.° Se M é funcção de x e N de y, a expressão $z=\frac{1}{MN}$ reduz (3) a uma identidade; e se M e N são productos XY e X_1Y_1 de funcções de x por funcções de y, a expressão $z=\frac{1}{XY_1}$ tambem reduz (3) a uma identidade: o que concorda com o que se disse no n.° 310.

5.° Seja $F(x, y, \ldots)$ uma funcção homogenea, do gráu m, de muitas variaveis. Se multiplicarmos estas variaveis por $1+h$, isto é, se mudarmos $x, y, \ldots$ em $x+hx$, $y+hy, \ldots$, a funcção F tornar-se-ha em

$$F'=(1+h)^m F=\left(1+mh+m\frac{m-1}{2}h^2+\ldots\right)F,$$

e tambem em

$$F'=F(x+hx, y+hy, \ldots)$$

$$=F+\frac{dF}{dx}hx+\frac{dF}{dy}hy+\frac{d^2F}{2dx^2}h^2x^2+\frac{d^2F}{2dy^2}h^2y^2+\frac{d^2F}{dxdy}h^2xy+\ldots;$$

d'onde resulta, pela comparação das duas expressões de F',

$$(a)\ldots\left\{\begin{array}{l} mF=\frac{dF}{dx}x+\frac{dF}{dy}y;\; m(m-1)F=\frac{d^2F}{dx^2}x^2+\frac{d^2F}{dy^2}y^2+2\frac{d^2F}{dxdy}xy, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

que é o *theorema das funcções homogeneas.*

Posto isto, quando forem M, N, funcções homogeneas do gráu p, vejamos se ha um factor homogeneo z do gráu n, que torne differencial exacta o primeiro membro de (1).

Porque Nz é uma funcção homogenea do gráu $p+n$, será (1.ª eq. (a))

$$(p+n)Nz=x\frac{d(Nz)}{dx}+y\frac{d(Nz)}{dy},$$

a qual, em virtude da condição de integrabilidade, $\frac{d(Mz)}{dx}=\frac{d(Nz)}{dy}$, de

$Mzdy + Nzdx$, se torna em

$$(p+n)\,Nz = x\frac{d(Nz)}{dx} + \frac{d(Myz)}{dx} = \frac{d(Nzx + Myz)}{dx} - Nz,$$

ou $$(p+n+1)\,Nz = \frac{d[z(My+Nx)]}{dx}.$$

E como a esta equação satisfaz a hypothese $z = \frac{1}{My + Nx}$, ou $z(My + Nx) = 1$, reduzindo-a a $0 = 0$, por ser então zero o grâu $n+p+1$ de $z(My + Nx)$, fica assim satisfeita por aquella hypothese a condição de integrabilidade.

Exemplos

I. Seja $$dx + (adx + 2bydy)\sqrt{1+x^2} = 0.$$

A condição (2) de integrabilidade não tem logar, por isso que é

$$\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx} = -\frac{2bxy}{\sqrt{1+x^2}};$$

mas, como o quociente d'esta quantidade dividida por $M = 2by\sqrt{1+x^2}$ é uma funcção $\frac{-x}{1+x^2}$ de x, segue-se que a equação se tornará integravel por meio d'um factor funcção de x, e que este, em virtude da equação (4), a qual dá

$$lz = \int\frac{-xdx}{1+x^2} = -\frac{1}{2}l(1+x^2) = -l\sqrt{1+x^2},$$

é $z = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Introduzindo pois o factor z, a proposta torna-se em

$$\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + adx + 2bydy = 0,$$

que dá
$$ax + l(x + \sqrt{1+x^2}) + by^2 = 0.$$

II. Na equação
$$dy + Pydx = Qdx,$$

do n.º 312, são
$$M = 1,\ N = Py - Q,$$

e por isso
$$\frac{dN}{dy} - \frac{dM}{dx} = P.$$

Como $\frac{P}{M}$ é uma funcção de x, a equação (4) dá

$$\frac{dz}{z} = Pdx,\ lz = \int Pdx,\ z = e^{\int Pdx} = e^u;$$

e pela introducção d'este factor, a proposta torna-se em

$$e^u dy + e^u(Py - Q)\,dx = 0,$$

para cuja integração seguiremos o processo indicado no n.º 315. Assim, integrando $e^u dy$ em ordem a y, acha-se $e^u y + X$, cuja differencial em ordem a x, comparada com $e^u(Py - Q)\,dx$, dá $dX = -e^u Qdx$; por conseguinte $X = -\int e^u Qdx$, e o integral procurado é

$$e^u y = \int Qe^u dx + c,$$

como já sabiamos.

III. Do mesmo modo
$$x^3 dy + \left(4x^2 y - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 0$$