Depois, integrando esta, e ajunctando outra funcção arbitraria ψy, vem o integral, com duas funcções arbitrarias,

$$z = \int e^{\int Pdx} dx \left(\int e^{-\int Pdx} Qdx + \varphi y\right) + \psi y;$$

que, no caso de $P = 0$, se reduz a

$$z = \int dx \, (Qdx + \varphi y) + \psi y.$$

Por exemplo, o integral da equação

$$xyr = (n-1)\,py + a,$$

na qual P e Q representam respectivamente $\dfrac{n-1}{x}$ e $\dfrac{a}{xy}$,

é $$z = -\frac{ax}{(n-1)\,y} + \frac{x^n}{n}\varphi y + \psi y.$$

Similhantemente $$t = Qq + P,$$

não entrando z em P e Q, dá

$$z = \int e^{\int Qdy} dy \left(\int e^{-\int Qdy} Pdy + \varphi x\right) + \psi x;$$

que, no caso de $Q = 0$, se reduz a

$$z = \int dy \left(\int Pdy + \varphi x\right) + \psi x.$$

Por exemplo o integral da equação $$at = xy,$$

na qual Q e P representam respectivamente 0 e $\dfrac{xy}{a}$, é

$$6az = y^3x + y\varphi x + \psi x.$$

2.° O integral de $$s = \frac{d^2z}{dxdy} = \text{M},$$

que se encontra na theoria das curvaturas, é

$$z = \int dx \int \text{M}dy + \varphi x + \psi y.$$

Por exemplo $$s = ax + by$$

dá $$z = \frac{1}{2} xy(ax + by) + \varphi x + \psi y.$$

3.° A equação $$s = \frac{dp}{dy} = \text{M}p + \text{N},$$

integrada como linear entre p e y, no caso de M e N não conterem z, dá

$$p = \frac{dz}{dx} = e^{\int \text{M}dy} \left(\int e^{-\int \text{M}dy} \text{N}dy + \varphi' x \right),$$

e depois

$$z = \int e^{\int \text{M}dy} dx \int e^{-\int \text{M}dy} \text{N}dy + \int e^{\int \text{M}dy} \varphi' x dx + \psi y.$$

Por exemplo $$sxy = bpx + ay$$

dá $$p = -\frac{ay}{(b-1)x} + y^b \varphi' x,$$

e depois $$z = \frac{aybx}{1-b} + y^b \varphi x + \psi y.$$

411. Equação linear de segunda ordem. Passemos á equação linear

$$Rr + 2Ss + Tt + V = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

na qual R, S, T, V, representam funcções dadas de x, y, z, p, q.

Eliminando t por meio da terceira das equações de definição (A), resulta

$$Rr + \left(2S - T\frac{dx}{dy}\right)s + V + T\frac{dq}{dy} = 0,$$

ou
$$R\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(2S - T\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dp}{dy}\right) + V + T\frac{dq}{dx} = 0 \ldots\ldots (2).$$

Esta equação (2), com a primeira de definição (A), está no caso das lineares da primeira ordem, nas quaes são p a variavel dependente, e x e y as principaes. Applicando-lhe pois o que se disse na integração das equações d'aquella ordem, teremos

$$Rdy - \left(2S - T\frac{dx}{dy}\right)dx = 0,\ Rdp + \left(V + T\frac{dq}{dy}\right)dy = 0,$$

ou $$Rdy^2 + Tdx^2 - 2Sdydx = 0,\ Rdpdy + Tdqdx + Vdydx = 0 \ldots (3);$$

cujos integraes $c = A$, $c' = B$, dão o da primeira ordem da proposta

$$A = \varphi(B).$$

A applicação da regra, que serve para integrar as equações da primeira ordem, á transformada (2) suppõem que R, S, T, V, p, e q são funcções de x e y, ou que z é funcção das mesmas variaveis. Esta condição é expressa pela primeira equação de definição (A), a qual por isso se deve ajunctar ás equações (3), quando se tracta de obter os seus integraes.

Procedendo como no n.º 392, podiamos verificar que $A = \varphi(B)$ satisfaz com effeito á proposta (1) (*Calc. El.* de Lacroix, n.º 349).

412. A solução, a que acabamos de chegar, é applicavel á proposta mais geral

$$Rr + 2Ss + Tt + V + N(rt - s^2) = 0 \ldots\ldots\ldots (4),$$

objecto especial do estudo de Monge e dos outros Geometras que depois d'elle se tem occupado da integração das equações differenciaes parciaes da segunda ordem.

Com effeito a expressão $\quad rt - s^2 = \dfrac{dpdq - sdpdx - sdqdy}{dxdy}$,

que se tira da segunda e terceira das equações (A), sendo substituida em (4), transforma-a em

$$Rr + \left[2S - N\left(\frac{dp}{dy} + \frac{dq}{dx}\right)\right]s + Tt + V + N\frac{dpdq}{dxdy} = 0;$$

para reduzir á qual a fórma (1), basta mudar nesta 2S em $2S - N\left(\dfrac{dp}{dy} + \dfrac{dq}{dx}\right)$ e V em $V + N\dfrac{dpdq}{dxdy}$. Por conseguinte, fazendo aquellas mudanças nas equações (3), resultarão as correspondentes ao problema actual:

$$\left.\begin{aligned} &Rdy^2 - 2Sdxdy + N(dpdx + dqdy) + Tdx^2 = 0,\\ &Rdpdy + Tdqdx + Vdydx + Ndpdq = 0, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (5),$$

as quaes se tornam em (3), como deve ser, quando é $N = 0$.

Substituindo na primeira (5), por $dpdx + dqdy$, a expressão que dá a ultima das equações de definição (A), e resolvendo em ordem a $\dfrac{dy}{dx}$, acha-se, depois de posta por $(rt - s)^2$ a sua expressão tirada de (4),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S - Ns \pm \sqrt{S^2 - RT + VN}}{R + Nt} = \frac{S - Ns \pm \sqrt{G}}{R + Nt},$$

isto é, $$Rdy + N(tdy + sdx) - (S \pm \sqrt{G})\,dx = 0,$$

ou, em virtude da 3.ª equação (A),

$$Rdy + Ndq - (S \pm \sqrt{G})\,dx = 0.$$

Depois, eliminando T entre as duas equações (5), e substituindo na resultante a expressão de Ndq tirada da equação precedente, vem

$$Rdp + Vdx + (S \mp \sqrt{G})\,dq = 0.$$

As equações pois, que dão as funcções A e B de $A = \varphi(B)$, são:

$$\left.\begin{array}{l} S^2 - RT + VN = G, \\ \text{e} \quad Rdy + Ndq - (S \pm \sqrt{G})dx = 0,\ Rdp + Vdx + (S \mp \sqrt{G})dq = 0, \\ dz = pdx + qdy. \end{array}\right\} \ldots (6).$$

Dos dois signaes, superior ou inferior, de $\sqrt{G}$ escolher-se-ha aquelle que mais convier para fazer as integrações.

Em vez da segunda ou da terceira, pode usar-se de

$$Ndp - (S \mp \sqrt{G})\,dy + Tdx = 0,$$

que resulta da eliminação de dq entre ellas.

413. Como as equações (5) e a de definição $dz = pdx + pdy$ contêm as cinco variaveis x, y, z, p e q, a eliminação de duas d'estas variariaveis, para effectuar a qual se indicaram os processos no capitulo relativo á integração das equações simultaneas, dará uma resultante que conterá tres das mesmas variaveis. Por conseguinte, segundo satisfizer ou não satisfizer esta resultante á condição (2) de integrabilidade do n.º 373, assim haverá ou não haverá uma equação que seja o integral d'ella, isto é, assim a proposta terá ou não terá um integral intermedio da primeira ordem: sem que d'ahi no entretanto se possa concluir que á falta do integral intermedio corresponde a do primitivo.

Não acontece porém o mesmo na integração das equações differenciaes parciaes da primeira ordem (n.º 391); porque nessas as duas equações differenciaes totaes, que devem dar $\pi=\alpha$, $\rho=\beta$, contêm as tres variaveis x, y, z, e portanto, eliminando uma d'estas, fica a equação resultante entre duas variaveis, a qual por isso tem sempre um integral.

Assim, para $ar=q$, que se encontra na theoria mathematica do calor (*Calc.* de Navier, n.º 489), as equações (6) reduzem-se a

$$dy=0,\ dp-qdx=0,$$

das quaes a segunda entre as tres variaveis p, q e x não tem um integral (n.º 373). Não ha pois uma equação unica integral da proposta. E com tudo, pondo

$$z=Ce^{\alpha x+\beta y},$$

e substituindo na proposta, vem $a\alpha^2-\beta=0.$

Por onde se vê que, tomando por α quaesquer numeros α_i, satisfarão á proposta as primitivas

$$z=C_i e^{\alpha_i x+a\alpha_i^2 y},$$

e conseguintemente a sua somma

$$z=\Sigma C_i e^{\alpha_i x+a\alpha_i^2 y}.$$

414. O processo, que acabamos de empregar, applica-se á equação differencial parcial linear de qualquer ordem n, de coefficientes constantes; porque da substituição de $z=e^{\alpha x+\beta y}$, e da suppressão do factor $e^{\alpha x+\beta y}$, resulta $f(\alpha, \beta)=0$: e por isso o integral é

$$z=\Sigma C_i e^{\alpha_i x+\beta_i y},$$

dando valores arbitrarios a uma das quantidades α_i, β_i, e tomando por valores correspondentes da outra os tirados da equação $f(\alpha_i, \beta_i)=0$.

415. Se, applicando á segunda ordem, isto é, a $m=2$, o que se disse no n.° 406, tomarmos $i=0$, será $h=5$.

Assim o integral geral d'uma equação da segunda ordem deverá compor-se de tal modo que o numero de arbitrarias da sua derivada de segunda ordem não seja inferior a cinco. O que pode conseguir-se, fazendo entrar nelle duas funcções arbitrarias φ e ψ das variaveis; porque as duas derivações successivas introduzirão as quatro funcções φ', ψ', φ'', ψ''; sendo assim seis o numero total das arbitrarias extranhas á equação proposta.

No modo de integração exposto no n.° **411** entram com effeito no integral primitivo aquellas duas funcções.

Exemplos

I. Seja a equação $\quad q^2r - 2pqs + p^2t = 0.$

Comparando com (1), temos

$$R = q^2,\ S = -pq,\ T = p^2,\ V = 0.$$

Portanto as equações (6) são

$$G = 0,$$

$$q^2 + pqdx = 0,\ q^2dp - pqdq = 0,$$

das quaes a primeira, equivalente a $dz = 0$, dá $z = B$, e a segunda dá $\frac{p}{q} = A$; sendo assim o integral intermedio $\quad \frac{p}{q} = \varphi(z).$

Para integrar de novo, o processo do n.° **391** dará

$$dz = 0,\ dy = -\varphi(z)\,dx;$$

depois
$$z = \alpha,\ y + x\varphi(\alpha) = \beta;$$

e finalmente
$$y + x\varphi(z) = \psi(z).$$

II. Do mesmo modo $rx^2+2xys+y^2t=0$,

na qual são $R=x^2,\ S=xy,\ T=y^2,\ V=0$,

dará $G=0$, e portanto (eq. 6) successivamente:

primeiro ψ, φ, $x^2dy-xydx=0,\ x^2dp+xydq=0$,

$$y=Bx,\ p+Bq=A,\ px+qy=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

depois $\qquad xdy-ydx=0,\ dz-\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx=0,$

$$y=\alpha x,\ z=x\varphi(\alpha)+\beta=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\beta,$$

$$z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

III. Seja $\quad r(1+q^2+pq)+s(q^2-p^2)-t(1+p^2+pq)=0,$

ou, pondo $\qquad p=\frac{1}{2}(m+n),\ q=\frac{1}{2}(m-n),$

$$r(1+mq)+sm(q-p)-t(1+mp)=0,$$

na qual $R=1+mq,\ S=\frac{1}{2}m(q-p),\ T=-(1+mp),\ V=0.$

Por ser $\quad G=\frac{1}{4}(q-p)^2m^2+(1+mq)(1+mp),$

$$=\frac{(q-p)^2m^2+4(1+mq)[1+mq+m(q-p)]}{4},$$

ou

$$G=\frac{[(q-p)m-2(1+mq)]^2}{4},\ S-\sqrt{G}=1+mq,\ S+\sqrt{G}=-(1+mp),$$

as equações (6) dão

$$dy - dx = 0,\ (1 + mq)\,dp - (1 + mp)\,dq = 0,$$

ou $$dy - dx = 0,\ mndm - (2 + m^2)\,dn = 0\,;$$

e depois $$y - x = \alpha,\ \beta\sqrt{2 + m^2} = n,$$

$$n = \sqrt{2 + m^2}\,\varphi'(y - x).$$

Para integrar esta equação da primeira ordem, substituamos em $dz = pdx + qdy$ os valores

$$p = \frac{1}{2}[m + \sqrt{2 + m^2}\,.\,\varphi'(y - x)],\ q = \frac{1}{2}[m - \sqrt{2 + m^2}\,.\,\varphi'(y - x)],$$

o que dá $$2dz = m\,(dx + dy) + \sqrt{2 + m^2}\,.\,\varphi'(y - x)\,(dy - dx).$$

E, applicando o processo do n.º 375, supposta m constante, o integral será representado pelo systema das duas equações:

$$2z + \psi(m) = m\,(x + y) + \sqrt{2 + m^2}\,.\,\varphi(y - x),$$

$$\psi'(m) = x + y + \frac{m}{\sqrt{2 + m^2}}\,.\,\varphi(y - x).$$

IV. Seja $$y^2t + r + yq = 0.$$

Temos $$R = 1,\ T = y^2,\ S = 0,\ V = yq,$$

o que dá

$$G = -y^2,\ S - \sqrt{G} = -y\sqrt{-1},\ S + \sqrt{y} = +y\sqrt{-1},$$

e portanto as equações (6)

$$dy - y\sqrt{-1}\,dx = 0,\ dp - y\sqrt{-1}\,dq + yqdx = 0.$$

Integrando estas equações, virá

$$ye^{-x\sqrt{-1}} = B,\ p - Bq\sqrt{-1}\,e^{x\sqrt{-1}} = A,$$

$$p - yq\sqrt{-1} = \varphi'_1(ye^{-x\sqrt{-1}}).$$

Depois, integrando as equações do n.º 391,

$$dy + y\sqrt{-1}\,dx = 0,\ dz - \varphi'_1(ye^{-x\sqrt{-1}})\,dx = 0,$$

teremos $\quad ye^{x\sqrt{-1}} = \alpha,\ z - \varphi(\alpha e^{-2x\sqrt{-1}}) = z - \varphi(ye^{-x\sqrt{-1}}) = \beta$

e finalmente $\quad z = \varphi(ye^{-x\sqrt{-1}}) + \psi(ye^{x\sqrt{-1}}),$

ou (*Alg. Sup.*, n.º 159)

$$z = \varphi[y(\cos x - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)] + \psi[y(\cos x + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,x)].$$

É a equação da attracção dos cylindros (*Mec. Cel.*, liv. 2.º, n.º 13).

V. Seja $\quad r = b^2 t,$

isto é, $\quad R = 1,\ S = 0,\ T = -b^2,\ V = 0;$

e portanto $\quad G = b^2.$

As equações (6) dão

$$dy - adx = 0,\ dp - adq = 0,$$

$$p - aq = \varphi_1(y - ax);$$

e depois teremos

$$dy + adx = 0,\ dz - \varphi_1(y - ax)\,dx = 0,$$

$$z = \varphi(y - ax) + \psi(y + ax).$$

A equação proposta é a das cordas vibrantes (*Cal.* de Navier, n.º 493).

VI. Seja $$rt = s^2,$$

isto é, $$R = 0,\ S = 0,\ T = 0,\ V = 0,\ G = 0,\ N = 1.$$

As equações do n.º 412,

$$Rdy + Ndq - (S \pm \sqrt{G})\,dx = 0,\ Ndp - (S \mp \sqrt{G})\,dy + T\,dx = 0,$$

dão $$dq = 0,\ dp = 0,$$

$$q = \varphi(p).$$

Substituindo depois em $dz = pdx + qdy$, integrando na hypothese de p constante, e continuando a proceder como se disse no n.º 391, acharemos o systema

$$z = px + y\varphi(p) + \psi(p),\ 0 = x + y\varphi'(p) + \psi'(p).$$

A proposta é a equação das superficies planificaveis (n.os 150, V, e 183).

416. A complicação d'estes calculos torna-os muitas vezes de execução difficilima. Por isso exporemos desenvolvidamente o modo como deve proceder-se quando os coefficientes R, S, T, são constantes, N nullo e V uma funcção de x e y; caso que tem muitas applicações.

Então, pondo $$\frac{S+\sqrt{G}}{R}=m \text{ e } \frac{S-\sqrt{G}}{R}=n,$$

as equações (6) dão

$$y-mx=B,\ Rp+nRq+\int Vdx=A,$$

$$Rp+nRq+\int Vdx=\varphi_1(y-mx).$$

Para integrar esta equação, eliminaremos p entre ella e $dz=pdx+qdy$, o que dará

$$Rdz+dx\int Vdx-dx\,\varphi'(y-mx)=Rq(dy-ndx);$$

e teremos (n.º 391)

$$y-nx=\beta,\ Rz+\int dx\int Vdx-\int dx\varphi_1(y-mx)=\alpha,$$

$$Rz+\int dx\int Vdx=\varphi(y-mx)+\psi(y-nx).$$

Para effectuar este calculo, convém fazer as seguintes observações:

1.º Em V deve substituir-se $mx+B$ por y, e, achando então $\int Vdx$, restituir depois $y-mx$ em logar de B.

2.º Em $dx\int Vdx$ e $dx\varphi_1(y-mx)$ devem substituir-se $nx+\beta$ por y, e, achados então $\int dx\int Vdx$ e $\int dx\varphi_1(y-mx)$, restituir depois $y-nx$ em logar de β.

Exemplo. Seja $$r-s-2t-\frac{k}{y}=0,$$

isto é, $$R=1,\ S=-\frac{1}{2},\ T=-2,\ V=-ky^{-1};$$

e portanto $$G = 2\frac{1}{4},\ n = -2,\ m = 1.$$

Teremos: $$\int V dx = -k\int \frac{dx}{x+B} = -kl(x+B) = -kly,$$

e (n.º 199)

$$\int dx \int V dx = -\int k dx\, l(-2x+\beta) = \frac{1}{2}k[(\beta-2x)l(\beta-2x)-(\beta-2x)]$$

$$= \frac{1}{2}k(yly-y);$$

$$\int dx\varphi_1(y-mx) = \int dx\varphi_1[(n-m)x+\beta] = \varphi(y-mx);$$

e portanto $$z + \frac{1}{2}k(yly-y) = \varphi(y-x) + \psi(y+2x).$$

417. Integra-se algumas vezes segundo o processo do n.º 402, que consiste em partir em duas a proposta, introduzindo uma indeterminada θ.

Por exemplo a equação $$rt - s^2 = 0,$$

de que tractámos no exemplo VI do numero precedente, dá

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t} = \theta,$$

das quaes se tiram $r = s\theta$, $s = t\theta$, e por conseguinte

$$rdx + sdy = \theta(sdx + tdy),\ \text{ou}\ dp = \theta dq.$$

Esta equação só é integravel no caso de ser θ funcção de q; e o seu integral é $p = \varphi(q)$. Depois continuando como naquelle numero, acharemos o integral procurado.

Integração das equações differenciaes parciaes por meio das series

418. Muitas vezes convém, ou torna-se necessario pela deficiencia dos methodos geraes, procurar por approximação os integraes das equações differenciaes parciaes.

Supponhamos dada uma equação da primeira ordem entre p, q, x, y, z. Para desenvolver o seu integral n'uma serie ordenada relativamente a uma das variaveis x, temos a formula de Maclaurin

$$z = f + xf' + \frac{1}{2}x^2f'' + \frac{1}{6}x^3f''' + \ldots.,$$

sendo as funcções $f, f' \ldots.$ de y aquillo em que se torna o integral $z = f(x, y)$, e suas derivadas em ordem a x, quando nellas se faz $x = 0$.

E no caso de $x = 0$ tornar infinitas algumas das funcções $f, f' \ldots$ recorrer-se-ha ao que fica dicto no n.º 333.

419. Para determinar as funcções, $f, f' \ldots$ supponhamos a proposta resolvida em ordem a p, $\quad p = \mathrm{F}(q, x, y, z)$.

Fazendo $x = 0$, teremos $\quad f' = \mathrm{F}\left(\dfrac{df}{dy}, (x = 0), y, f\right)$.

Portanto f', e as suas derivadas successivas $f'', f''', \ldots.$ dependerão da funcção f, que fica arbitraria.

Do mesmo modo, resolvendo em ordem a r a equação da segunda ordem,

$$r = \mathrm{F}(p, s, t, x, y, z),$$

e fazendo $x = 0$, teremos $\quad f'' = \mathrm{F}\left(f', \dfrac{df'}{dy}, \dfrac{d^2f}{dy^2}, (x = 0), y, f\right)$,

a qual faz depender $f'', f''', \ldots.$ de f e f', que ficam arbitrarias.

Para a terceira ordem mostrariamos por um raciocinio simільhante que a serie precedente é o integral, com as tres funcções arbitrarias f, f', f''.

Em geral: *qualquer equação differencial parcial da ordem* n *tem um integral com* n *funcções arbitrarias.*

420. Seja, por exemplo, a equação $\dfrac{dx}{d\alpha}=z\dfrac{dx}{dt}$,

de que tractámos no n.º 394, sendo z uma funcção de x.

Se partirmos da proposta, e mais geralmente de

$$\frac{d^n x}{d\alpha^n}=\frac{d^{n-1}\left(z^n\dfrac{dx}{dt}\right)}{dt^{n-1}},$$

acharemos, attendendo á mesma proposta e á independencia de α e t,

$$\frac{d^{n+1}x}{d\alpha^{n+1}}=\frac{d^{n-1}\left[z^n\dfrac{d^2x}{d\alpha dt}+nz^{n-1}\dfrac{dz}{d\alpha}\,\dfrac{dx}{dt}\right]}{dt^{n-1}}$$

$$=\frac{d^{n-1}\left[z^{n+1}\dfrac{d^2x}{dt^2}+(n+1)z^n\dfrac{dz}{dx}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2\right]}{dt^{n-1}}=\frac{d^n\left(z^{n+1}\dfrac{dx}{dt}\right)}{dt^n}.$$

Chamando pois φt aquillo a que se reduz x quando se faz $\alpha=0$, temos

$$f=\varphi t,\ f'=z\varphi' t,\ f''=\frac{d(z^2\varphi' t)}{dt},\ldots\, f^{(n)}=\frac{d^{n-1}(z^n\varphi' t)}{dt^{n-1}}.$$

E substituindo na formula de Maclaurin, vem

$$x=\varphi t+\alpha z\varphi' t+\frac{1}{2}\alpha^2\frac{d(z^2\varphi' t)}{dt}+\frac{1}{6}\alpha^3\frac{d^2(z^3\varphi' t)}{dt^2}+\ldots,$$

que é [p. 67, f. (C_1)] o desenvolvimento de $x=\varphi(t+\alpha z)$.

421. Lagrange propoz tambem a approximação dos integraes por meio dos coefficientes indeterminados.

Faz-se $z = \varphi(y) + x\psi(y) + x^2\chi(y) + x^3\pi(y) + \ldots;$

depois, tomando as differenciaes necessarias, substituem-se na proposta, e comparam-se os termos em que x tem o mesmo expoente. D'onde resultam diversas equações, por meio das quaes se determinam as funcções de y que não devem ficar arbitrarias.

Seja por exemplo a equação $ar = q$, de que se tractou no n.° **413**.

Para ella a serie precedente dá

$$\frac{d^2z}{dx^2} = r = 2\chi + 6x\pi + \ldots, \quad \frac{dz}{dy} = q = \varphi' + x\psi' + \ldots;$$

depois, substituindo na proposta e comparando, acham-se

$$\chi = \frac{1}{2a}\varphi', \quad \pi = \frac{1}{6a}\psi', \ldots;$$

por conseguinte $z = \varphi + x\psi + \frac{1}{2a}x^2\varphi' + \frac{1}{6a}x^3\psi' + \ldots$

Do mesmo modo, integrando a equação

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

acharemos

$$z = \varphi + x\psi - \frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) - \frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dr^2}\right) + \ldots.$$

422. No raciocinio, que empregámos no n.º 418 para mostrar que a equação da ordem *n* tem *n* funcções arbitrarias, suppozemos em geral a equação completa. Mas é possivel que a serie obtida em casos particulares não dê o numero completo de funcções arbitrarias: como acontecerá se a ordem mais elevada dos coefficientes differenciaes não for a mesma para todas as variaveis independentes; por isso que a derivação de ordem mais elevada, relativamente á variavel segundo as potencias da qual se faz o desenvolvimento, deixa arbitrario um numero de funcções egual a essa ordem.

Assim, no primeiro exemplo do numero precedente, se em vez de ordenar o desenvolvimento relativamente ás potencias de x, o ordenarmos relativamente ás potencias de y, acharemos outra serie

$$z = \omega(x) + ay\omega''(x) + \frac{1}{2}a^2y^2\omega^{\text{IV}}(x) + \ldots,$$

com uma só funcção arbitraria $\omega(x)$.

E fazendo, como Poisson, na primeira

$$\varphi(y) = \mathrm{A} + \mathrm{B}y + \frac{1}{2}\mathrm{C}y^2 + \ldots,$$

$$\psi(y) = \mathrm{A}' + \mathrm{B}'y + \frac{1}{2}\mathrm{C}'y^2 + \ldots,$$

depois substituindo nella estas expressões, e finalmente pondo

$$\mathrm{A} + \mathrm{A}'x + \frac{\mathrm{B}x^2}{2} + \frac{\mathrm{B}'x^3}{6} + \ldots = \omega(x),$$

aquelle integral coincidirá com o ultimo.

Cumpre porém não esquecer que no uso d'estas series, como no de todas as outras, é necessario verificar a sua convergencia, sem a qual o emprego d'ellas daria resultados illusorios.

Integração das equações differenciaes parciaes por integraes definidos

423. Para exemplo d'esta integração tomemos a equação do n.º 413

$$ar = q,$$

cujo integral é $$z = \Sigma C_i e^{\alpha_i x + a\alpha_i^2 y}.$$

Pondo $\omega - \alpha\sqrt{ay}$ em vez de ω na equação (2) do n.º 276,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \sqrt{\pi},$$

fica $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 + 2\alpha\omega\sqrt{ay} - a\alpha^2 y} d\omega = \sqrt{\pi},$$

que dá $$e^{a\alpha^2 y} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2 + 2\alpha\omega\sqrt{ay}} d\omega.$$

Substituindo pois na expressão de z, vem

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Sigma C_i e^{\alpha_i (x + 2\omega\sqrt{ay})} e^{-\omega^2} d\omega;$$

ou, pondo $\varphi(x + 2\omega\sqrt{ay})$ em logar de $\Sigma C_i e^{\alpha_i (x + 2\omega\sqrt{ay})}$,

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\omega\sqrt{ay}) e^{-\omega^2} d\omega.$$

Mas, para que esta formula seja applicavel, é necessario dar a φ uma fórma tal que o integral definido conserve um valor finito, quaesquer que sejam x e y.

Soluções singulares das equações differenciaes parciaes da primeira ordem

424. Sejam $$F=0,\ V=0,$$

uma equação differencial parcial entre as derivadas independentes $x_1, x_2, \ldots x_n$, e o seu integral *completo*, com n arbitrarias $a_1, a_2, \ldots a_n$.

O integral $V=0$ ainda satisfará a $F=0$, suppondo variaveis as arbitrarias, com tanto que seja nulla a sua differencial em relação a ellas, isto é, com tanto que seja

$$\frac{dV}{da_1}da_1+\frac{dV}{da_2}da_2\ldots+\frac{dV}{da_n}da_n=0\ldots\ldots(A).$$

Agora:

1.° Se em (A) tomarmos $da_1=0$, $da_2=0, \ldots da_n=0$, o integral $V=0$ será *completo*.

2.° Se entre duas, a_i e a_k, das arbitrarias estabelecermos uma relação arbitraria $a_i=\varphi(a_k)$, o que dará $da_i=\varphi'(a_k)\,da_k$, substituirmos em (A), egualarmos depois a zero os $n-1$ coefficientes das restantes, e eliminarmos entre estas e $V=0$ aquelles coefficientes, resultará o integral *geral*.

3.° Se entre $V=0$ e os n coefficientes de (A) egualados a zero se eliminarem as n arbitrarias, resultará um integral *particular* ou uma *solução singular*.

Applicando isto á equação $$z=px+qy+f(p,q),$$

á qual satisfaz o integral $$z=ax+by+f(a,b),$$

teremos:

1.° O integral *completo* $$z=ax+by+f(a,b).$$

2.° O systema integral *geral*

$$z=ax+y\varphi(a)+f(a,\varphi a),\ 0=x+y\varphi'(a)+\frac{df}{da}+\frac{d\varphi}{d\varphi(a)}\varphi' a.$$

3.° O systema integral *particular*, ou a *solução singular*

$$z=ax+by+f(a,b),\ x+\frac{df}{da}=0,\ y+\frac{df}{db}=0.$$

(*Calc.* de Serret, n.os 805 e 806).

Das funcções arbitrarias

425. O que dissemos (n.º 263) a respeito das constantes introduzidas nas integrações ordinarias, tem applicação ás funcções arbitrarias φ, ψ,... das equações differenciaes parciaes. Em quanto só pretendemos integrar, isto é, achar uma expressão que por meio das regras do calculo differencial reproduza a proposta, são φ, ψ,..... realmente arbitrarias: mas, logo que tivermos de applicar os resultados a questões de Geometria, Mechanica, etc., estas funcções poderão tomar fórmas determinadas, e deixar de ser arbitrarias. Melhor se entenderá isto por meio de alguns exemplos.

I. A equação das superficies cylindricas é (n.º 44, e *Geom. Anal.* n.º 167)

$$y - bz = \varphi(x - az), \text{ ou } ap + bq = 1.$$

A primeira d'estas equações é integral da segunda; e φ é uma funcção arbitraria, cuja fórma depende da curva directriz. Se a base do cylindro está situada no plano dos xy, e é dada por sua equação $y = fx$, deverá φ ser tal que essa base seja comprehendida entre os pontos do espaço designados pela equação $y - bz = \varphi(x - az)$, isto é, que satisfaça a esta equação. Fazendo pois $z = 0$, as equações $y = \varphi x$ e $y = fx$ deverão ser identicas, tendo por conseguinte φ e f a mesma fórma; e a equação do cylindro particular, de que se tracta, será

$$y - bz = f(x - az).$$

Em geral, sejam $M = 0$, $N = 0$, as equações da directiz. Fazendo $x - az = u$, podemos, pela eliminação, achar x, y, z, e portanto $y - bz$ em funcção de u; o que dá a fórma da funcção φ, e por conseguinte a equação $y - bz = \varphi(x - az)$ da superficie cylindrica particular, de que se tracta.

II. Similhantemente as superficies de revolução em torno do eixo dos z têm por equação $py = qx$, cujo integral é $x^2 + y^2 = \varphi z$ (n.º 44, e *Geom. Anal.* n.º 169). Em quanto a generatriz fica indeterminada, a funcção φ é arbitraria: mas se esta curva é dada por suas equações $M = 0$, $N = 0$, então, pondo $z = u$, eliminando x, y e z por meio d'estas tres equações, e substituindo em $x^2 + y^2 = \varphi u$, ficará determinada a fórma da funcção φ; de sorte que a equação $x^2 + y^2 = \varphi z$ será exclusivamente a da superficie proposta, cuja generatriz é $M = 0$, $N = 0$.

Supponhamos que o corpo é gerado pela revolução d'uma superficie movel, invariavelmente ligada com o eixo dos z, e dada pela equação $M = 0$. Considerando esta superficie n'uma das suas posições, poderemos tirar da equação $M = 0$ as expressões de p e q em x, y e z; e substituindo-as em $py - qx = 0$, teremos a outra equação $N = 0$ da curva de contacto da superficie generatriz com o corpo gerado, por isso que os planos tangentes são communs a ambos. Assim, as equações $M = 0$, $N = 0$ são as d'uma curva, que se pode considerar como generatriz; o que faz recair no caso precedente.

III. O conoide tem por equação $px + qy = 0$, cujo integral é $y = x\varphi z$ (n.os 150, III, e 394, III). Fazendo $z = u$, e exprimindo x, y e z em u por meio das equações $M = 0$, $N = 0$, da curva directriz, determinaremos a fórma de $\varphi u = \dfrac{y}{x}$; e por conseguinte a equação particular $y = x\varphi z$ do conoide proposto.

Quando a directriz é um circulo descripto num plano parallelo aos yz,

cujas equações são $\qquad x = a,\ y^2 + z^2 = b^2,$

acha-se $\qquad a^2y^2 + z^2x^2 = b^2x^2.$

IV. O integral da equação dos cónes (n.º 44, e *Geom. Anal.*, n.º 168)

$$z - c = p(x - a) + q(y - b),$$

é
$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right).$$

Para que a base do cóne seja um circulo descripto no plano dos xy, e com o centro na origem, devemos ter

$$z = 0,\ x^2 + y^2 = r^2, \text{ e } x - a = u(z - c),$$

o que dá $\qquad z = 0,\ x = a - cu,\ y = \sqrt{r^2 - (a - cu)^2}.$

Substituindo estes valores em $y-b=(z-c)\varphi u$, resultará a fórma de φ; e substituindo na proposta, $\frac{y-b}{z-c}=\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}\right)$, teremos a equação do cóne, de que se tracta,

$$(cy-bz)^2+(az-cx)^2=r^2(z-c)^2.$$

426. Estes exemplos bastam para mostrar como devem determinar-se as funcções arbitrarias, quando se tracta de applicar os calculos geraes aos casos particulares. Seja em geral $K=\varphi(L)$ um integral, com a funcção arbitraria φ, representando K e L funcções dadas de x, y e z; e supponhamos que a equação deve reduzir-se a $F(x, y, z)=0$, quando se suppõe $f(x, y, z)=0$. Esta condição corresponde em Geometria a pedir que a superficie procurada, cuja equação é $K=\varphi L$, passe pela curva dada, que tem por equações $F=0$, $f=0$. Para lhe satisfazer, faremos $L=u$, e eliminando x, y, z entre esta equação e as duas precedentes, substituiremos em $K=\varphi(u)$ as suas expressões em u, assim achadas; o que determinará a fórma da funcção φ e o integral procurado.

Se tivessemos de determinar duas funcções arbitrarias, seria necessario que se dessem duas condições; e um calculo similhante ao precedente faria conhecer a fórma d'essas funcções.

427. Mas se a natureza da questão não permitte determinar as funcções arbitrarias (o que acontece em muitos problemas de Physica e Geometria transcendente), ellas ficam indeterminadas, e as propriedades, que se acham sem particularisar estas funcções, têm logar em geral.

Para explicar este caso geometricamente, supponhamos que nas expressões, de que se tracta, entra um termo da fórma φx. Se descrevessemos no plano xy a linha que tem por equação $y=\varphi x$, as suas ordenadas y seriam os valores da funcção φ: e, sendo φ arbitraria, esta curva poderia, não só ter uma fórma qualquer, mas até ser traçada á mão por um movimento livre e irregular; e ainda ser *discontinua*, isto é, formada de ramos differentes unidos pelas extremidades; ou *discontigua*, isto é, formada de partes isoladas e separadas umas das outras. Foi Euler quem pôz estes principios fóra de toda a dúvida, até contra a opinião de Alembert, que se pode considerar como o inventor do calculo ás differenças parciaes; calculo cujos recursos são immensos, cujas applicações são d'uma utilidade illimitada, e que serve, como acabamos de ver, para submetter as funcções irregulares á analyse mathematica.

CALCULO DAS VARIAÇÕES

428. Antes da descoberta do Calculo das variações muitos geometras já se tinham occupado dos problemas dos isoperimetros; mas, como para resolver cada um d'elles empregavam um methodo particular e artificios de analyse ás vezes muito complicados, os processos, de que se serviam, não formavam um corpo de doutrina.

Estava reservado para Lagrange reduzir todas as questões a um methodo uniforme que vamos expor.

Posta uma funcção $Z = F(x, y, y', y'', \ldots)$, na qual $y', y'', \ldots$ designam as derivadas de y considerada como funcção $y = \varphi x$ de x, pode exigir-se que Z tenha certas propriedades, por exemplo, de ser maxima ou minima, quer assignando ás variaveis x, y, valores que satisfaçam a essa condição, quer estabelecendo relações entre as variaveis, e ligando-as por equações.

429. Quando a equação $y = \varphi x$ é dada, tiram-se d'ella $y', y'', \ldots$ em funcção de x, e substituem-se na proposta, que se torna em $Z = fx$. Nesse caso as regras conhecidas do Calculo differencial ensinam a achar os valores de x que tornam fx maxima ou minima; o que corresponde a determinar, d'entre os pontos de uma curva dada, aquelles para os quaes a funcção proposta é maior ou menor do que para os outros pontos da mesma curva visinhos dos primeiros.

Mas quando a equação $y = \varphi x$ não é dada, então, attribuindo successivamente a φ differentes fórmas, tambem $Z = fx$ tomará differentes expressões em x. E, se quizermos assignar a φx uma fórma tal que o Z correspondente a cada valor de x seja maior ou menor do que para qualquer outra fórma de φx infinitamente visinha, o problema pertencerá ao *Calculo das variações*.

430. Este calculo não se limita unicamente á theoria dos maximos e minimos; mas contentar-nos-hemos com a exposição d'ella, por ter applicação em questões muito importantes, e por bastar para a intelligencia das regras do mesmo calculo.

Cumpre advertir que, em tudo o que vamos dizer, as variaveis x e y não são independentes; mas a equação $y = \varphi x$, que as liga, é desconhecida, e a fórma de φx pode variar independentemente de x.

431. Substituindo $y+k$ em logar de y, $y'+k'$ em logar de y',.... onde k, k',.... representam uma funcção arbitraria de x e as suas derivadas, tornar-se-ha $Z=F(x, y, y', y'', \ldots)$ em

$$Z_1=F(x, y+k, y'+k', y''+k'', \ldots);$$

e como o theorema de Taylor tem logar, quer sejam dependentes, quer independentes, as quantidades y, y',... e os seus augmentos k, k',... será

$$Z_1=Z+k\frac{dZ}{dy}+k'\frac{dZ}{dy'}+k''\frac{dZ}{dy''}+\ldots,$$

com tanto que, para achar este desenvolvimento, operemos como se x, y, y',.... fossem variaveis independentes.

Posto isto, tracta-se de determinar a fórma de φx de modo que, para o mesmo valor de x, se tenha sempre $Z_1<Z$ ou sempre $Z_1>Z$, suppondo k, k',.... muito pequenos; e, discorrendo como na theoria dos maximos e minimos ordinarios, vê-se que esta propriedade não pode verificar-se sem que os termos da primeira ordem sejam nullos, isto é, sem que seja

$$k\frac{dZ}{dy}+k'\frac{dZ}{dy'}+k''\frac{dZ}{dy''}+\ldots=0.$$

Como k é arbitraria, para cada valor de x, e pode variar o seu valor ou a sua fórma independentemente de x, tambem k', k'',.... são arbitrarias.

Portanto a equação precedente parte-se, em virtude da independencia, nas

$$\frac{dZ}{dy}=0,\ \frac{dZ}{dy'}=0,\ \frac{dZ}{dy''}=0,\ldots$$

respectivas ao maximo ou minimo em ordem a cada uma das quantidades y, y', y'',....

Para que haja maximo ou minimo, é necessario que estas equações subsistam simultaneamente, qualquer que seja o valor de x; e, havendo-o, a equação $y=\varphi x$, que resultar d'ellas, será a procurada, isto é, a que tem a propriedade de tornar Z maior ou menor, para cada valor de x, do que o correspondente a outra fórma muito visinha.

Para distinguir o maximo do minimo, attenderemos aos termos da segunda ordem de Z, conforme a theoria ordinaria.

Mas, se estas equações não derem todas a mesma relação entre x e y, o problema será impossivel, ao menos no estado de generalidade em que foi proposto. Então, se algumas d'ellas concordarem, a funcção Z terá maximos ou minimos relativos a algumas das quantidades $y, y', y'', \ldots,$ sem que os tenha absolutos e communs a todas estas quantidades; e as equações, que concordam, darão os maximos e minimos relativos. Se quizermos porém fazer Z maximo ou minimo sómente em ordem a uma das quantidades $y, y', y'', \ldots$, o problema será sempre possivel, por não ser necessario nesse caso satisfazer a mais d'uma condição.

432. Se na mudança de fórma da curva $y = \varphi x$ quizessemos considerar as variações de x e y, accrescentariamos $i \frac{dZ}{dx}$ á expressão de Z_1, e $\frac{dZ}{dx} = 0$ ás equações respectivas ao maximo e ao minimo (*Cal. Int.* de Garnier, pag. 563).

433. Appliquemos estas noções geraes a alguns exemplos.

I. Sobre o eixo dos x tomemos duas abscissas m e n d'uma curva plana, e nas suas extremidades levantemos parallelas indefinidas ao eixo dos y, existindo estes eixos no plano da curva. Suppondo que por qualquer ponto da curva se tira a tangente, e chamando h, l, as ordenadas dos pontos onde ella corta as duas parallelas, temos

$$h = y + y'(m - x), \; l = y + y'(n - x).$$

Se é dada a equação $y = \varphi x$ da curva, conhecem-se a fórma de φ e por conseguinte as expressões de h e l. Mas, se não é dada, e se pergunta qual é a curva que goza da propriedade ser o producto lh das ordenadas menor, em cada um dos pontos de tangencia, do que para qualquer outra curva, isto é, de ser $Z = lh = minimo$, tracta-se de dar a φ uma fórma tal que se verifique esta propriedade.

Ora, segundo o enunciado do problema, as curvas que passam pelo mesmo ponto (x, y) têm tangentes de direcções diversas; e, d'entre ellas, a que se procura deve ter uma tangente de tal modo dirigida que se verifique a condição do *minimo*. Devem portanto considerar-se x e y como constantes, e y' como variavel, em

$$dZ = 0 = d\,[y + (m - x)\,y'][y + (n - x)\,y'];$$

o que dá

$$\frac{dZ}{dy'} = 0 = [y + (m - x)\,y']\,[n - x) + [y + (n - x)\,y']\,(m - x),$$

ou $$\frac{2y'}{y} = \frac{2x - m - n}{(x - m)(x - n)} = \frac{1}{x - m} + \frac{1}{x - n},$$

e, integrando, $$y^2 = C\,(x - m)\,(x - n).$$

A curva será uma ellipse ou uma hyperbole, conforme for C negativo ou positivo; e os vertices serão determinados por $x = m$, $x = n$. No primeiro caso o producto $Z = lh$ é um *maximo*, por ter y'' o signal —; no segundo é um *minimo*, ou antes um *maximo negativo*. De mais o producto lh é constante e $= -\frac{1}{4}C\,(m - n)^2 =$ quadrado do segundo semieixo; como se pode verificar substituindo em Z os valores de y e y'.

II. Achar a curva plana para a qual o quadrado da somma da subnormal com a abscissa é um *minimo*.

A condição proposta, $Z = (yy' + x)^2 = minimo$, dá

$$\frac{dZ}{dy} = 2\,(yy' + x)\,y' = 0,\ \frac{dZ}{dy'} = 2\,(yy' + x)\,y = 0;$$

e a estas satisfaz $yy' + x = 0$, cujo integral é $x^2 + y^2 = r^2$. Logo todos os circulos descriptos da origem como centro, e só elles, resolvem o problema.

434. Ainda que a theoria exposta não tenha applicações muito extensas, serve com tudo de esclarecimento para facilitar a intelligencia de outro problema mais vasto, o qual consiste em applicar os raciocinios precedentes a uma funcção da fórma $\int Z$. Neste caso a funcção Z é differencial;

e tracta-se de fazer maximo ou minimo o seu integral, tomado entre limites, mas sem effectuar a integração indicada, que em geral não pode executar-se.

435. Supponhamos um fio flexivel, ao qual se podem dar differentes fórmas e posições.

A mudança de coordenadas dos seus pontos pode provir: da passagem de um ponto para outro, quando se conserva invariavel a fórma e a posição do fio; ou da mudança d'estas.

Assim, quando sobre a mesma curva MN (Fig. 55) consideramos o ponto M e o consecutivo M′, se chamamos x, y, as coordenadas do primeiro, são $x+dx$, $y+dy$, as do segundo. Mas, quando o fio se defórma e se move de sorte que o ponto M passa para a posição consecutiva M'_1, adopta-se a notação δ, anteposto ás coordenadas, para designar esta *variação*, isto é, são $x+\delta x$, $y+\delta y$, as coordenadas de M'_1.

Por onde se vê: que, tanto os dx e dy, como os δx e δy, são funcções das coordenadas; mas que os primeiros se referem a passagens d'uns pontos para outros consecutivos na mesma curva, e os segundos a mudanças de posição dos mesmos pontos em virtude de deformação ou transporte da curva.

Similhantemente se torna dx em $d(x+\delta x)$, de sorte que o seu augmento é $d\delta x$; o de d^2x é $d^2\delta x$; e assim por diante.

436. Cumpre observar que as variações indicadas pelo signal δ são independentes das que designa a caracteristica d; e por isso, sendo egualmente independentes as operações a que se referem estes signaes, não deve influir no resultado a ordem em que ellas se executam; de sorte que são teremos

$$\delta . dy = d . \delta y;\quad d^2\delta y = \delta d^2 y, \ldots . \int \delta U = \delta \int U.$$

Com effeito, suppondo (Fig. 55) $PP' = dx$, $MM_1 = \delta y$, é claro que

$$M'_1P' = M'P' + M'_1M' = y + dy + \delta(y+dy),$$

$$M'_1P' = M_1P + M'_1P' - M_1P = y + \delta y + d(y+\delta y):$$

o que dá $\delta dy = d\delta y$; e por conseguinte tambem $d^2\delta y = dd\delta y = d\delta dy = \delta d^2 y$, e assim por diante.

E, escrevendo $U = d\int U$, vem

$$\delta U = \delta d \int U = d\delta \int U,\ \int \delta U = \delta \int U.$$

437. Tem isto logar ainda que se considere δy como $M'_1P' - MP$ resultante da variação de x e da mudança da curva; porque então (Fig. 55)

$$\delta y = M'_1P' - MP,\ dy = M'P' - MP,$$

dão $$d\delta y = M_1''P'' - M'_1P' - (M'P' - MP),$$

$$\delta dy = M_1''P'' - M'P' - (M'_1P' - MP),$$

e por consegunte $$d\delta y = \delta dy.$$

438. Tracta-se agora de estabelecer entre x, y, z relações taes que $\int Z$ seja um *maximo* ou um *minimo, entre limites designados.* Para fazer os calculos symmetricos, não supporemos constante nenhuma das differenciaes; e só consideraremos o caso de tres variaveis, porque, além de ser isso bastante para a intelligencia da theoria, facilmente se poderão generalisar os resultados para maior numero d'ellas.

Posto isto, seja

$$Z = F(x,\ dx,\ d^2x, \ldots y,\ dy,\ d^2y, \ldots z,\ dz,\ d^2z, \ldots),$$

a funcção cujo integral deve ser um maximo ou um minimo. Teremos

$$\delta \int Z = 0, \text{ ou } \int \delta Z = 0.$$

Seja

$$(A) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \delta Z = m\delta x + n\delta dx + p\delta d^2x + \ldots\ldots\ldots \\ \quad + M\delta y + N\delta dy + P\delta d^2y \ldots\ldots \\ \quad + \mu\delta z + \nu\delta dz + \pi\delta d^2z + \ldots\ldots, \end{array} \right.$$

onde $m, n, p, \ldots, M, N, P, \ldots, \mu, \nu, \pi, \ldots$ representam os coefficientes differenciaes $$\frac{dZ}{dx}, \frac{dZ}{d^2x}, \frac{dZ}{d^3x}; \frac{dZ}{dy}, \frac{dZ}{d^2y}, \frac{dZ}{d^3y}, \ldots, \frac{dZ}{dz}, \frac{dZ}{d^2z}, \frac{dZ}{d^3z}, \ldots$$

Em virtude dos theoremas precedentes, a primeira linha de (A) transforma-se em

$$m\delta x + nd\delta x + pd^2\delta x + \ldots,$$

e do mesmo modo as outras.

Tracta-se de integrar δZ; e o processo do calculo fará ver que se devem desembaraçar, quanto é possivel, os termos que contêm differenciaes das variações das coordenadas.

Para isso, empregando o processo da integração por partes, teremos

$$\int nd\delta x = n\delta x - \int dn\delta x,$$

$$\int pd^2\delta x = pd\delta x - dp\delta x + \int d^2p\delta x,$$

$$\int qd^3\delta x = qd^2\delta x - dqd\delta x + d^2q\delta x - \int d^3q\delta x,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

e similhantemente para as outras variaveis y, z.

439. Reunindo estes resultados, e egualando separadamente a zero a parte integrada e a não integrada, o integral de (A) dá

$$(B)\ldots\ldots\int\left\{\begin{array}{l}(m - dn + d^2p - d^3q\ldots)\,\delta x\\ +\,(M - dN + d^2P - d^3Q\ldots)\,\delta y\\ +\,(\mu - d\nu + d^2\pi - d^3\chi\ldots)\,\delta z\end{array}\right\} = 0,$$

$$(C)\ldots\left\{\begin{array}{l}(n - dp + \ldots)\,\delta x + (N - dP + \ldots)\,\delta y + (\nu - d\pi + \ldots)\,\delta z\\ +\,(p - dq + \ldots)\,d\delta x + (P - dQ + \ldots)\,d\delta y + (\pi - d\chi + \ldots)\,d\delta z\\ +\,(q - dr + \ldots)\,d^2\delta x + (Q - dR + \ldots)\,d^2\delta y + (\chi - d\rho + \ldots)\,d^2\delta z\end{array}\right\} = 0$$

sendo K a constante.

Partimos a equação em duas por que, não se podendo integrar os termos que ficam debaixo do signal $\int$ (a não se darem a δx, δy, δz, valores particulares, o que é contra a hypothese), as duas partes são irreductiveis, e por isso não pode $\int \delta Z$ tornar-se nulla se não aniquilando-se separadamente cada uma d'ellas.

Logo, para achar as relações entre x, y, z que fazem $\int Z$ maximo ou minimo, devemos differenciar a funcção dada Z em ordem á caracteristica δ, considerando $x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z...$ como variaveis independentes. Comparando depois o resultado d'esta variação com a equação (A), teremos as expressões de m, M, $\mu, \ldots n$, N, $\nu, \ldots p$, P, $\pi, \ldots$, em x, y, z e suas differenciaes. Finalmente, substituindo estas expressões nas equações (B) e (C), das quaes a segunda é relativa aos limites que devem comprehender o maximo, obteremos as relações procuradas.

440. Se forem independentes as variações δx, δy, δz, a equação (B) partir-se-ha nas tres

$$m - dn + d^2p - ... = 0,\ \mathrm{M} - d\mathrm{N} + d^2\mathrm{P} - ... = 0,\ \mu - d\nu + d^2\pi - ... = 0 ... (\mathrm{D}).$$

Se não o forem, as equações, que as ligarem entre si, servirão para eliminar de (B) outras tantas d'ellas; e egualar-se-hão a zero os coefficientes de cada uma das restantes: de sorte que, em todo o caso, será tres o numero das equações que se formam.

Estas tres equações, que são differenciaes em x, y, z, não podem exprimir tres condições distinctas, porque, se as exprimissem, dariam valores numericos para as variaveis. No caso de pertencer a proposta a um problema de geometria, devem ellas reduzir-se a uma da superficie ou a duas da curva que tem a propriedade exigida.

441. Como o integral effectuado (C) se deve tomar entre os limites assignados, x_1, y_1, z_1 e x_2, y_2, z_2, a equação

$$\mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 = 0,$$

na qual L_2 e L_1 representam os termos de (C) que precedem K, applicando-lhes os respectivos indices 2 e 1, será relativa a estes limites.

Geometricamente, podem as extremidades do fio, que acima figuramos, conservar-se fixas, e dependerem as variações só da deformação d'elle; pode conservar-se uma das extremidades fixa, e dependerem as variações do movimento da outra e da deformação do fio; e podem finalmente ter logar tanto o movimento das duas extremidades como a deformação do fio, dependendo então as variações de ambas estas causas.

442. Consideremos os differentes casos.

1.º Se é fixo tudo o que pertence aos limites, isto é, se os valores de x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, e das derivadas das variaveis dependentes são constantes nos limites, as variações respectivas são nullas; por conseguinte todos os termos de L_1 e L_2 aniquilam-se, e a equação $L_2 - L_1 = 0$ reduz-se a uma identidade.

Neste caso, para determinar as constantes que a integração introduz nas equações (D), devem substituir-se nos seus integraes, e nas differenciaes até a ordem d'ellas, os valores de x, y, z, e dos coefficientes differenciaes das variaveis dependentes, relativos a cada um dos dois limites.

2.º Se os limites são arbitrarios e independentes, cada um dos coefficientes de δx_1, δx_2,... na equação (C) é nullo separadamente.

3.º Se ha condições relativas aos limites, isto é, se a natureza da questão estabelece equações entre algumas das quantidades x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, como acontece, por exemplo, se a questão proposta se refere a uma porção de curva, a qual deve terminar em pontos, que não são fixos, mas estão sobre duas curvas ou duas superficies dadas: differenciaremos essas equações, para tirar d'ellas tantas variações δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, δy_2, δz_2, quantas podermos, em funcção das outras, o que substituido em $L_2 - L_1 = 0$ reduzirá as variações ao menor numero possivel; e como as variações, que ficam, são independentes, a equação partir-se-ha em tantas quantas ellas são, egualando separadamente a zero os seus coefficientes.

Podemos tambem neste caso usar do processo seguinte, que é mais elegante.

Sejam $u = 0$, $v = 0$,... as equações de condição dadas. Multiplicando as suas variações por indeterminadas λ, λ',..., e ajunctando os productos ao primeiro membro de $L_2 - L_1 = 0$, teremos

$$L_2 - L_1 + \lambda\delta u + \lambda'\delta v + \ldots = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (E).$$

Então, tractando como independentes todas as variações δx_1, δx_2,..., δy_1, δy_2,...., egualaremos a zero os seus coefficientes, e eliminaremos depois entre as equações assim obtidas os coefficientes λ, λ'...

Convém observar que de satisfazerem os valores das variaveis nos limites a qualquer das equações $u = 0$, $v = 0$,.... não se segue que tambem as differenciaes d'estas coordenadas, dadas pelas derivadas dos integraes das equações (D), satisfaçam á respectiva das equações differenciaes $du=0$, $dv=0, \ldots$. Por exemplo, em Geometria, para que tenha isso logar, é necessario que haja um contacto de certa ordem entre a curva procurada e a superficie cuja equação é $u=0$, ou $v=0, \ldots$. E, no caso de coexistirem estas condições, entrarão respectivamente na equação (E), além dos termos $\lambda\delta u$, $\lambda'\delta v, \ldots$ os termos $\lambda''\delta du$, $\lambda'''\delta dv, \ldots$.

4.º Nada diremos do caso em que deve um dos limites ser fixo, e o outro estar sujeito a certas condições ou ser inteiramente arbitrario: como acontece em Geometria, quando uma das extremidades da curva procurada deve passar por um ponto fixo, e a outra ser qualquer e existir sobre uma curva ou superficie dada, porque este caso está comprehendido nos tres precedentes.

É necessario advertir que, se a funcção Z contém algumas coordenadas dos limites, ou coefficientes differenciaes d'ellas, deve na variação attender-se aos termos que provém d'essas quantidades, e incluil-os na equação (C). Por exemplo, se Z contém x_1, deve ao primeiro membro de (C) accrescentar-se o termo $\int \frac{dZ}{dx_1}\delta x_1 = \delta x_1 \int \frac{dZ}{dx_1}$.

443. As mais das vezes é Z dada debaixo da fórma Vdx, sendo V uma funcção de x e y e seus coefficientes differenciaes $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$

Designemos pela caracteristica δ_1 as variações relativas a y e não a x; em quanto que a caracteristica δ se applica ás variações completas, nas quaes se fazem variar x e y.

Representando V ordenadas da curva (Fig. 55), são evidentemente

$$M'_1N'_1Q'P' = M_1N_1QP + N_1N'_1Q'Q - M_1M'_1P'P,$$

$$\delta_1 \int Vdx = M_1N_1QP - MNQP,$$

$$\delta \int Vdx = M'_1N'_1Q'P' - MNQP;$$

e por conseguinte

$$\delta \int Vdx = \delta_1 \int Vdx + M'_1N'_1Q'P' - M_1N_1QP$$

$$= \delta_1 \int Vdx + N_1N'_1Q'Q - M_1M'_1P'P,$$

ou, desprezando as quantidades de segunda ordem,

$$\left.\begin{aligned}\delta\int \mathrm{V}dx &= \delta_1\int \mathrm{V}dx + \mathrm{V}_2\delta x_2 - \mathrm{V}_1\delta x_1\\ &= \int dx\delta_1\mathrm{V} + \mathrm{V}_2\delta x_2 - \mathrm{V}_1\delta x_1\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(a).$$

Mas a variação de $y = \varphi(x)$, proveniente da mudança de fórma de φ e da variação de x, é

$$\delta y = \delta_1 y + y'\delta x,$$

que dá (*) $\quad \delta_1 y = \delta y - y'\delta x:$

similhantemente $\quad \delta_1\dfrac{dy}{dx} = \delta\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{d^2y}{dx^2}\delta x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(b);$

e assim por diante.

Portanto as equações (b) darão as variações δ_1 das coordenadas e dos coefficientes differenciaes de y, relativas a y, por meio das variações δ, relativas a x e y; e as equações (a) darão as variações δ do integral proposto por meio das variações δ_1 do mesmo integral.

(*) Com effeito é (Fig. 55)

$$\mathrm{M'_1P'} = \mathrm{MP} + \delta\mathrm{MP} = \mathrm{M_1P} + (\mathrm{M'_1P'} - \mathrm{M_1P}),$$

isto é $\quad y + \delta y = y + \delta_1 y + \dfrac{d(y + \delta_1 y)\delta x}{dx},$

ou, por ser $\dfrac{d\delta_1 y}{dx}\delta x$ da segunda ordem, $\quad y + \delta y = y + \delta_1 y + y'\delta x.$

Pode considerar-se tambem a variação de fórma como devida á variação d'um parametro (Costa e Almeida, *Calc. das variações*, pag. 6, **); o que dá do mesmo modo

$$\delta y = \delta f(x, \alpha) = \frac{dy}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{dy}{dx}\delta x = \delta_1 y + y'\delta x.$$

444. Posto isto, seja

$$\delta V = N\delta y + P\delta \frac{dy}{dx} + Q\delta \frac{d^2y}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots (A)'.$$

Attendendo a (a), a condição do maximo ou do minimo será

$$0 = \int \left(N\delta_1 y + P\delta_1 \frac{dy}{dx} + \ldots \right) dx + V_2 \delta x_2 - V_1 \delta x_1 ;$$

e, procedendo como no n.º 438, chegaremos a

$$\left(P_2 - \frac{dQ_2}{dx} + \ldots \right) \delta_1 y_2 - \left(P_1 - \frac{dQ_1}{dx} \right) \delta_1 y_1$$

$$+ \left(Q_2 - \frac{dR_2}{dx} \right) \delta_1 \frac{dy_2}{dx} - \left(Q_1 - \frac{dR_1}{dx} \right) \delta_1 \frac{dy_1}{dx}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} dx \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots \right) \delta_1 y :$$

onde, por $\delta_1 y_1$ e $\delta_1 \frac{d^i y_1}{dx^i}$, devemos substituir respectivamente $\delta y_1 - \frac{dy_1}{dx} \delta x$, $\delta \frac{d^i y_1}{dx^i} - \frac{dy_1{}^{i+1}}{dx^{i+1}} \delta x_1$; e o mesmo a respeito do segundo limite.

O termo debaixo do signal $\int$ egualado a zero dá a equação correspondente (B)

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (B)'.$$

Os termos fóra do integral dão os correspondentes de (C), com a addição dos termos $V_2\delta x_2 - V_1\delta x_1$:

$$L_2 - L_1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)';$$

sendo $$L_1 = V_1\delta x_1 + \left(P_1 - \frac{dQ_1}{dx} + \ldots\right)\delta_1 y_1 + \ldots$$

$$L_2 = V_2\delta x_2 + \left(P_2 - \frac{dQ_2}{dx} + \ldots\right)\delta_1 y_2 + \ldots$$

445. Se V é uma funcção de x e de duas variaveis y e z dependentes de x, como acontece nas questões relativas a curvas de dupla curvatura, deve accrescentar-se ao segundo membro de (A)' outra linha similhante

$$n\delta z + p\,\delta\,\frac{dz}{dx} + q\delta\,\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots;$$

e as equações da curva procurada e dos limites serão

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \ldots\right)\delta_1 y + \left(n - \frac{dp}{dx} + \ldots\right)\delta_1 z = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(P_2 - \dfrac{dQ_2}{dx} + \ldots\right)\delta_1 y_2 + \ldots + \left(p_2 - \dfrac{dq_2}{dx} + \ldots\right)\delta_1 z_2 + \ldots \\ -\left(P_1 - \dfrac{dQ_1}{dx} + \ldots\right)\delta_1 y_1 - \ldots - \left(p_1 - \dfrac{dq_1}{dx} + \ldots\right)\delta_1 z_1 - \ldots \\ \quad + V_2\,\delta x_2 - V_1\delta x_1 \end{array}\right\} = 0;$$

devendo substituir-se, em logar das variações δ_1 de y e z e dos coefficientes differenciaes $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots$ as suas expressões (b) nas correspondentes variações δ.

446. Nos casos particulares é muitas vezes preferivel executar sobre a funcção dada debaixo do signal $\int$ todos os calculos que conduziram ás equações (B) e (C), em vez de comparar cada caso particular com as fórmulas geraes.

447. Se a natureza da questão sujeitasse as variações δx, δy, δz, a certas condições $\varepsilon = 0$, $\theta = 0$, e isto independentemente dos limites; como, por exemplo, se a curva procurada devesse estar sobre uma superficie dada: procederiamos como no n.º 442; servindo aquellas equações de condição para eliminar algumas variações da primeira das equações do n.º 439, que se formou egualando a zero a expressão que ficava debaixo do signal $\int$.

448. Entre essas condições cumpre notar a de ser a curva procurada tal que um certo integral definido $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx$ conserve um valor determinado. Devem então verificar-se as equações

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{V}\,dx = 0, \quad \delta\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{U}dx = 0.$$

E como estas equações se podem combinar multiplicando uma d'ellas por uma constante arbitraria λ e sommando, fica reduzida a questão a tornar minima a expressão

$$\int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{V} + \lambda\,\mathrm{U})\,dx,$$

e portanto, a satisfazer á condição do maximo ou minimo

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{V} + \lambda\,\mathrm{U})\,dx = 0.$$

A funcção assim obtida é a que se chama um maximo ou minimo *relativo*.

A esta classe de condições pertencem as dos *isoperimetros*.

449. O que fica exposto mostra que, tanto no caso do maximo como no do minimo, deve ser $\delta \int Z$ ou $\delta \int V dx = 0$. Agora, para distinguir o maximo do minimo, no caso de duas variaveis, citaremos a regra de Legendre.

Esta regra consiste em differenciar duas vezes a funcção V, considerando como variavel independente o coefficiente differencial d'ordem mais elevada que entra n'esta funcção, e ver qual é o signal do resultado. Se este signal for positivo, haverá minimo; e se for negativo, haverá maximo. Assim, se a funcção proposta é $V = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots \frac{d^my}{dx^m}\right)$, differenciaremos esta expressão duas vezes consecutivas em ordem a $\frac{d^my}{dx^m} = M$; e substituindo em $\frac{d^2V}{dM^2}$ os valores de $y, \frac{dy}{dx}, \ldots$ que resultam das equações (B) ou (D), o signal $\pm$ d'este coefficiente mostrará se ha minimo, ou se ha maximo. (*Mem. da Ac. das Scienc. de Paris*, 1786). Veja-se tambem uma these de Mr. Delaunay no *Jornal de Mathematica* de Mr. Liouville, de junho de 1841.

Taes são os principios do *Calculo das Variações.* Appliquemol-os a alguns exemplos.

EXEMPLOS

450. I. *Achar a curva plana* CMK (Fig. 7) *cujo comprimento* MK, *comprehendido entre os dois raios vectores* AM *e* AK, *é um minimo.*

Temos (n.° 110) $$s = \int \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2} = \int Z;$$

e queremos achar a relação $r = \varphi(\theta)$ que torna $\int Z$ um minimo.

A variação de Z é $$\delta Z = \frac{r d\theta^2 \delta r + r^2 d\theta \delta d\theta + dr \delta dr}{ds},$$

a qual comparada com (A), suppondo $x = \theta$ e $y = r$, dá

$$m = 0,\ n = \frac{r^2 d\theta}{ds},\ M = \frac{r d\theta^2}{ds},\ N = \frac{dr}{ds},\ 0 = p = P \ldots;$$

e portanto as equações (D) são :

$$\frac{r^2 d\theta}{ds} = c, \quad \frac{r d\theta^2}{ds} = d\left(\frac{dr}{ds}\right).$$

Como estas equações concordam entre si (*), basta integrar a primeira d'ellas, ou $d\theta = \frac{-d\left(\frac{c}{r}\right)}{\sqrt{1-\frac{c^2}{r^2}}}$; o que dá a equação polar da linha recta

$$c = r\cos(\theta + a).$$

451. Se quizessemos usar da equação (A′), achariamos

$$V = \sqrt{r^2 + r'^2}, \ \delta V = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\delta r + \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\delta r',$$

que dá $N = \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$, $P = \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$. Portanto a equação (A′), $N - \frac{dP}{dx} = 0$, seria $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$, a qual, pondo $r = \frac{1}{z}$, daria $z + z'' = 0$, e os integraes successivos

$$z^2 + z'^2 = \frac{1}{c^2}, \ cz = \operatorname{sen}(\theta + c'), \text{ ou } c = r\cos(\theta + a).$$

(*) Eliminando $d\theta^2$ entre a segunda e $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$, resulta $ds = d\left(\frac{r dr}{ds}\right)$, ou $r dr = \frac{r dr}{ds} d\left(\frac{r dr}{ds}\right)$, cujo integral $r^2 = \frac{r^2 dr^2}{ds^2} + c^2$ é identico com o resultado da eliminação de $d\theta$ entre a outra $\frac{r^2 d\theta}{ds} = c$ e $ds^2 = r^2 d\theta^2 + dr^2$.

452. Ainda que do enunciado do problema facilmente se conclua que a funcção proposta não é susceptivel se não de *minimo*, mostremos isto mesmo pela analyse, empregando o processo ensinado no n.º 449.

Pondo $\frac{dr}{d\theta}=p$, temos $s=\int d\theta\sqrt{r^2+p^2}$;

e differenciando $V=\sqrt{r^2+p^2}$ duas vezes em ordem a p, virá

$$\frac{dV}{dp}=\frac{p}{\sqrt{r^2+p^2}},\ \frac{d^2V}{dp^2}=\frac{r^2}{(r^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Por ser esta expressão positiva, a funcção proposta $s=\int V d\theta$ é com effeito um minimo.

453. II. *Achar a linha mais curta entre dois pontos dados, ou entre duas curvas dadas.*

Tracta-se de fazer minima a expressão do comprimento d'uma linha,

$$s=\int Z=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}.$$

A variação $\delta Z=\frac{dx}{ds}\,\delta dx+\frac{dy}{ds}\,\delta dy+\frac{dz}{ds}\,\delta dz$

comparada com a fórmula (A) dá

$$m=0,\ M=0,\ \mu=0,\ n=\frac{dx}{ds},\ N=\frac{dy}{ds},\ \nu=\frac{dz}{ds},$$

e nullos os outros coefficientes p, P, π,....

As equações (D) são pois neste caso

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)=0,\ d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0,\ d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Estas equações dão

$$dx = ads,\ dy = bds,\ dz = cds,$$

das quaes, quadrando e sommando, resulta a condição $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, a que devem satisfazer as constantes a, b, c, para que as tres equações possam existir.

Eliminando ds, resulta $\qquad dy = \frac{b}{a}\,dx,\ dz = \frac{c}{a}\,dx;$

e, integrando, vem $\qquad ay = bx + a',\ az = cx + b',$

Por onde se vê, que as projecções da linha procurada sobre dous planos coordenados são linhas rectas; e conseguintemente esta linha tambem é uma recta. Para fixar a sua posição é necessario determinar as cinco constantes a, b, c, a', b'.

1.° Se a linha pedida deve ser a mais curta entre dous pontos fixos, A, C (Fig. 56), cujas coordenadas são x_1, y_1 e x_2, y_2, a equação (C) tornar-se-ha identica, por serem nullos δx_1, δx_2,... Substituindo nas duas equações das rectas os dous systemas (x_1, y_1, z_1), e (x_2, y_2, z_2), resultam quatro equações de condição, as quaes com $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, perfazem o numero de cinco, necessario para determinar as cinco constantes.

2.° Se os limites estão sobre duas curvas, dadas pelas equações

$$F(x_1, y_1, z_1) = 0,\ f(x_1, y_1, z_1) = 0;\ \varphi(x_2, y_2, z_2) = 0,\ \psi(x_2, y_2, z_2) = 0:$$

substituindo em logar de δy_1, δz_1, e δy_2, δz_2, as suas expressões

$$\delta y_1 = A_1 dx_1,\ \delta z_1 = B_1 \delta x_1,\ \text{e}\ \delta y_2 = A_2 \delta x_2,\ \delta z_2 = B_2 \delta x_2,$$

tiradas d'estas equações, vê-se que a equação (C)

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dx}{ds}\right)_2 \delta x_2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_2 \delta y_2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_2 \delta z_2 \\ -\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 - \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 \end{array}\right\} = 0$$

se decompõe nas duas

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)_2 \delta x_2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)_2 \delta y_2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)_2 \delta z_2 = 0;$$

ou
$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \cdot \frac{\delta y_1}{\delta x_1} + \left(\frac{dz}{dx}\right)_1 \cdot \frac{\delta z_1}{\delta x_1} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 \cdot \frac{\delta y_2}{\delta x_2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)_2 \cdot \frac{\delta z_2}{\delta x_2} = 0.$$

Por conseguinte em cada um dos pontos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), se ambos estiverem sujeitos a existir em curvas dadas, ou só naquelle que o estiver, a linha mais curta é perpendicular á respectiva curva limite. Se os limites fossem superficies curvas, tirar-se-hia uma conclusão similhante a respeito da perpendicularidade da linha mais curta ás superficies limites.

454. Supponhamos agora, que a linha mais curta pedida deve ser traçada sobre uma superficie curva cuja equação é

$$u = 0.$$

É necessario combinar a equação (B) com $\delta u = 0$; para o que accrescentaremos a (B) o termo $\lambda \delta u$, e depois, egualando a zero os coefficientes de δx, δy, δz, acharemos as relações

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right) + \lambda \frac{\delta u}{dx} = 0,\ d\left(\frac{dy}{ds}\right) + \lambda \frac{\delta u}{dy} = 0,\ d\left(\frac{dz}{ds}\right) + \lambda \frac{\delta u}{dz} = 0,$$

entre as quaes eliminando λ, resultam as duas equações da curva procurada

$$\frac{du}{dz}\,d\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{du}{dx}\,d\left(\frac{dz}{ds}\right),\quad \frac{du}{dy}\,d\left(\frac{dz}{ds}\right)=\frac{du}{dz}\,d\left(\frac{dy}{ds}\right).$$

A condição de perpendicularidade do plano osculador da curva (n.º 151)

$$\frac{d^2y}{dx^2}\,z=\left(\frac{dz}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2z}{dx^2}\right)x+\frac{d^2z}{dx^2}\,y+\mathrm{A}$$

ou

ao plano tangente á superficie (n.º 145)

$$z\frac{du}{dz}+y\frac{du}{dy}+x\frac{du}{dx}+\mathrm{B}=0$$

é (*Geom. Anal.*, n.º 179)

$$1-\frac{\dfrac{dz}{dx}\,\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}\,\dfrac{d^2z}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{\dfrac{du}{dx}}{\dfrac{du}{dz}}=\frac{\dfrac{d^2z}{dx^2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{\dfrac{du}{dy}}{\dfrac{du}{dz}}=0.$$

Substituindo nesta equação, em logar de $\dfrac{\dfrac{du}{dx}}{\dfrac{du}{dz}}$ e $\dfrac{\dfrac{du}{dy}}{\dfrac{du}{dz}}$, as suas expressões tiradas das equações da curva,

$$\frac{\dfrac{du}{dx}}{\dfrac{du}{dz}}=\frac{d\left(\dfrac{dx}{ds}\right)}{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)},\quad \frac{\dfrac{du}{dy}}{\dfrac{du}{dz}}=\frac{d\left(\dfrac{dy}{ds}\right)}{d\left(\dfrac{dz}{ds}\right)},$$

resulta uma identidade; por conseguinte *o plano osculador da curva mais curta traçada sobre a superficie é sempre perpendicular a esta superficie.*

Tomemos para exemplo a mais curta distancia A′C′ entre dous pontos d'uma esphera cujo centro é a origem: teremos

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,\ \frac{du}{dx} = 2x,\ \frac{du}{dy} = 2y,\ \frac{du}{dz} = 2z.$$

Substituindo nas duas equações precedentes, tomado ds constante, vem

$$zd^2x = xd^2z,\ zd^2y = yd^2z,$$

das quaes resulta $$yd^2x = xd^2y;$$
e integrando,

$$zdx - xdz = ads,\ zdy - ydz = bds,\ ydx - xdy = cds.$$

Multiplicando a primeira d'estas equações por $-y$, a segunda por x, a terceira por z, e sommando, resulta $ay = bx + cz$: ora esta equação é a d'um plano, que passa pela origem das coordenadas; logo a curva procurada é o circulo maximo A′C′ (Fig. 56), cujas equações são

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,\ bx + cz - ay = 0,$$

e que, passando pelos dous pontos A′ e C′, é normal ás duas curvas A′B e C′D que servem de limite e são dadas sobre a superficie espherica.

455. III. Quando um corpo se move num fluido, experimenta da parte d'este uma resistencia que, pondo de parte as outras circumstancias, depende da sua fórma: e se o corpo é de revolução, e se move no sentido do eixo, prova-se em Mechanica que a resistencia é minima quando a equação da curva generatriz satisfaz á condição

$$\int \frac{ydy^3}{dx^2 + dy^2} = minimo.$$

Determinemos esta curva generatriz do *solido da menor resistencia.*

Temos $$Z = \frac{yy'^3dx}{1+y'^2};$$

e tomando a variação, para comparar com a equação (A), achamos

$$m=0,\ n=\frac{-2ydy^3dx}{(dy^2+dx^2)^2}=\frac{-2yy'^3}{(1+y'^2)^2},\ p=0,\ldots,$$

$$M=\frac{dy^3}{dx^2+dy^2}=\frac{y'^3dx}{1+y'^2},\ N=\frac{yy'^2(3+y'^2)}{(1+y'^2)^2},\ldots.$$

A primeira equação (D), $m-dn=0$, dá immediatamente

$$-dn=0=d\left(\frac{2yy'^3}{(1+y'^2)^2}\right).$$

A segunda daria

$$\frac{y'^3dx}{1+y'^2}=d\left(\frac{yy'^2(3+y'^2)}{(1+y'^2)^2}\right)=d\left(\frac{2yy'^2}{(1+y'^2)^2}\right)+d\left(\frac{yy'^2}{1+y'^2}\right),$$

ou $$0=d\left(\frac{2yy'^2}{(1+y'^2)^2}\right)+\frac{2yy'}{(1+y'^2)^2}dy',$$

ou $$0=y'd\left(\frac{2yy'^2}{(1+y'^2)^2}\right)+\frac{2yy'^2}{(1+y'^2)^2}dy'=d\left(\frac{2yy'^3}{(1+y'^2)^2}\right):$$

por onde se vê que as duas equações concordam entre si.

Temos pois

$$\frac{2yy'^3}{(1+y'^2)^2}=a,\ x=\int\frac{dy}{y'}=\frac{y}{y'}+\int\frac{ydy'}{y'^2},$$

ou $$\frac{2yy'^3}{(1+y'^2)^2}=a,\ x=a\frac{(1+y'^2)^2}{2y'^4}+\frac{a}{2}\int\frac{(1+y'^2)^2dy'}{y'^5}.$$

Feita a integração, e eliminando depois y' entre as duas equações, resultará a equação da curva procurada, com duas constantes arbitrarias que se determinarão pelas condições dadas.

456. IV. *Qual é a curva* ABM (Fig. 9) *na qual a área* BODM, *comprehendida entre o arco* BM, *os raios de curvatura* BO *e* MD *das suas extremidades, e o arco* OD *da evoluta, é minima?*

Esta área é o integral do producto do elemento do arco AM pelo raio de curvatura MD. Ora o elemento de AM é $ds=dx\sqrt{1+y'^2}$, e o raio de curvatura MD (n.º 118) é $\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$: deve pois tornar-se *minimo* o integral

$$\int Z=\int\frac{(1+y'^2)^2}{y''}dx.$$

Empregando o processo exposto no n.º **444**, e a notação alli adoptada, temos

$$N=0,\ P=\frac{4y'(1+y'^2)}{y''},\ Q=-\frac{(1+y'^2)^2}{y''^2};$$

e R,... nullos: por conseguinte a equação d'aquelle numero, correspondente a (B), é

$$d\left(P-\frac{dQ}{dx}\right)=0,\ \text{ou}\ P-\frac{dQ}{dx}=4a.$$

Ora, attendendo a esta equação, é

$$d\left(\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\right)=\mathrm{P}dy'+\mathrm{Q}dy''=4ady'+\frac{d\mathrm{Q}}{dx}dy'+\mathrm{Q}dy'',$$

$$=4ady'+d\,(\mathrm{Q}y'')=4ady'-d\left(\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\right),$$

ou

$$2d\left(\frac{(1+y'^2)^2}{y''}\right)=4ady';$$

logo

$$2\frac{(1+y'^2)^2}{y''}=4ay'+4b,$$

ou

$$y''=\frac{(1+y'^2)^2}{2(ay'+b)}=\frac{dy'}{dx},\ dx=\frac{2(ay'+b)\,dy'}{(1+y'^2)^2}.$$

Finalmente, integrando, vem

$$x=c+\frac{by'-a}{1+y'^2}+b\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=y').$$

Para achar y, temos

$$y=\int y'dx=y'x-\int xdy'=y'x-cy'-\int\frac{by'-a}{1+y'^2}dy'-\int bdy'\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=y');$$

e como este ultimo termo se integra por partes, resulta em fim

$$y=y'x-cy'-(by'-a)\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=y')+f.$$

Eliminando arc (tang $= y'$) entre estas duas expressões de x e y, vem

$$by = a(x - c) + \frac{(by' - a)^2}{1 + y'^2} + bf,$$

$$\sqrt{by - ax + g} = \frac{(by' - a)\,dx}{ds},\quad ds = \frac{bdy - adx}{\sqrt{by - ax + g}};$$

e finalmente, integrando, $\quad s = 2\sqrt{by - ax + g} + h.$

Esta equação comparada com a do n.º 301, V, mostra que a curva procurada é uma cycloide. As quatro constantes determinar-se-hão por um numero egual de condições dadas.

457. V. *Achar a curva, para a qual a funcção*

$$\int Z = \int \frac{ds}{\sqrt{z - z_1}} = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{z - z_1}}$$

é minima. Este problema corresponde em Mechanica a achar a curva AC′ (Fig. 57), que deve descrever um corpo sollicitado pela gravidade para chegar de C′ a A no menor tempo possivel (*Elem. de Mech.*, n.º 78). Formando $\int Z$, e comparando com A, acham-se

$$\mu = -\frac{ds}{2\sqrt{(z - z_1)^3}},\quad n = \frac{dx}{ds\sqrt{z - z_1}},\quad N = \frac{dy}{ds\sqrt{z - z_1}},\quad \nu = \frac{dz}{ds\sqrt{z - z_1}};$$

e $\quad m = P \ldots = 0.$

Logo as equações (D) dão

$$d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_1}}\right) = 0,\ d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{z - z_1}}\right) = 0 \ldots\ldots\ldots (1).$$

Omittimos a terceira equação, porque se pode demonstrar que ella está comprehendida nas outras; condição sem a qual o problema sería absurdo (*).

458. Integrando (1), e dividindo os resultados um pelo outro, vem $dy=adx$; o que prova que a projecção da curva sobre o plano dos yx é uma recta, e por conseguinte que a curva está toda em um plano perpendicular aos xy.

Suppondo este plano um dos coordenados, por exemplo o dos xz, a primeira das equações (1) será sufficiente; e integrando-a, virá

$$kdx=ds\sqrt{z-z_1}=\sqrt{dx^2+dz^2}\,.\sqrt{z-z_1},$$

ou

$$dx=\frac{dz\sqrt{z-z_1}}{\sqrt{k^2-z+z_1}}.$$

Fazendo $k^2-z+z_1=u$, reconhece-se que esta equação é a d'uma cycloide vertical, sendo k^2 o diametro do circulo gerador (n.º 106, VI).

1.º Se os limites são dous pontos fixos A e C', não ha outras condições a satisfazer senão as de passar a cycloide por estes dous pontos, o que determina as constantes k e z_1.

2.º Se o primeiro limite é um ponto fixo (z_1, x_1), e o segundo uma curva AB, situados ambos no plano vertical dos xz, temos $\delta x_1=0$, $\delta z_1=0$, e $\delta x_2=A\delta z_2$, sendo esta expressão de δx_2 tirada da equação

---

(*) Com effeito, substituindo na terceira equação,

$$\frac{-ds}{2\sqrt{(z-z_1)}}=d\left(\frac{dz}{ds\sqrt{z-z_1}}\right),$$

o valor de ds dado pelas duas primeiras,

$$ds=\frac{dz}{\sqrt{1-(c^2+c'^2)(z-z_1)}},$$

resulta uma identidade.

$x = fz$ de AB. São pois

$$L_1 = 0,\ L_2 = \frac{dx_2}{ds_2\sqrt{z_2 - z_1}}\,\delta x_2 + \frac{dz_2}{ds^2\sqrt{z_2 - x_1}}\,\delta z_2;$$

e a equação dos limites $L_2 - L_1 = 0$ é $\quad dx_2\delta x_2 + dz_2\delta z_2 = 0,$
ou, eliminando δx_2,

$$dz_2 + A dx_2 = 0.$$

Por onde se vê, que a cycloide deve cortar perpendicularmente a curva dada AB no segundo limite $(z_2,\ x_2)$. A constante k determinar-se-ha comparando a equação da cycloide com a precedente neste ponto commum ás duas curvas.

3.° Se o primeiro limite tambem é uma curva, estamos no caso indicado no fim do n.° 442; e por isso é necessario accrescentar ao primeiro membro de (C) o termo $\delta z_1 \int \frac{dZ}{dz_1}$. Assim as equações (D) da curva ficam as mesmas

$$\frac{dx}{ds\sqrt{z - z_1}} = c,\ \frac{dy}{ds\sqrt{z - z_1}} = c',\ \frac{dz}{ds\sqrt{z - z_1}} + \int \frac{ds}{2\sqrt{(z - z_1)^3}} = c'' \ldots (2);$$

porém deve accrescentar-se á equação dos limites o termo

$$\delta z_1 \int \frac{dZ}{dz_1} = \delta z_1 \int \frac{ds}{2\sqrt{(z - z_1)^3}};$$

o que dá

$$\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{ds\sqrt{z - z_1}} + \delta z_1 \int \frac{ds}{2\sqrt{(z - z_1)^3}} + K = 0 \ldots (3).$$

Entre os dois limites, de que se tracta, a ultima equação (2) e a equação

(3), eliminando entre ellas $\int_{z_1}^{z_2} \frac{ds}{2\sqrt{(z-z_1)^3}}$, e fazendo

$$\frac{dz}{ds\sqrt{z-z_1}}=t=c\frac{dz}{dx}=c'\frac{dz}{dy},$$

dão $c\delta x_2+c'\delta y_2+t_2\delta z_2-c\delta x_1-c'\delta y_1-t_1\delta z_1+\delta z_1(t_1-t_2)=0,$

ou $$c\delta x_2+c'\delta y_2+t_2\delta z_2-c\delta x_1-c'\delta y_1-t_2\delta z_1=0\ldots\ldots(4).$$

4.° Se os dous limites estiverem sobre duas curvas situadas no plano da cycloide, que supporemos o dos xz, e forem nelles

$$\delta x_1=\mathrm{A}\delta z_1,\ \delta x_2=\mathrm{B}\delta z_2,$$

as equações differenciaes d'estas curvas: a equação (4), que se tornará, em virtude d'ellas, em $(\mathrm{B}c+t_2)\,\delta z_2-(\mathrm{A}c+t_2)\,\delta z_1=0,$
dará as duas

$$\mathrm{B}\frac{dx_2}{dz_2}+1=0,\ \mathrm{A}\frac{dx_2}{dz_2}+1=0.$$

Estas equações mostram (*Geom. Anal.*, n.° 31) que a tangente da cycloide é perpendicular á da curva no segundo limite; e que uma parallela a esta tangente (para as quaes $\frac{dx_1}{dz_1}=\frac{dx_2}{dz_2}$) é perpendicular á da curva no primeiro limite. Portanto as duas curvas limites são parallelas nestes pontos.

5.° Se os limites estiverem sobre duas curvas não situadas no mesmo plano, e forem nelles

$$\delta x_1=\mathrm{A}\delta z_1,\ \delta y_1=a\delta z_1,\ \delta x_2=\mathrm{B}\delta z_2,\ \delta y_2=b\delta z_2,$$

as equações differenciaes d'estas curvas: a equação (4), que se tornará, em virtude d'ellas, em

$$(Bc + bc' + t_2)\,\delta z_2 - (Ac + ac' + t_2)\,\delta z_1 = 0,$$

dará $$B\frac{dx_2}{dz_2} + b\frac{dy_2}{dz_2} + 1 = 0,\ A\frac{dx_2}{dz_2} + a\frac{dy_2}{dz_2} + 1 = 0.$$

Estas equações mostram (*Geom. Anal.*, n.º 178, 6.º), como no caso precedente, que a tangente á cycloide no segundo limite e uma parallela a ella no primeiro limite são perpendiculares ás duas curvas sobre as quaes devem estar estes limites.

6.º Finalmente, se os limites estiverem sobre duas superficies curvas, e forem nelles

$$\delta z_1 = A\delta x_1 + a\delta y_1,\ \delta z_2 = B\delta x_2 + b\delta y_2,$$

as equações differenciaes d'estas superficies: a equação (4), que se tornará, em virtude d'ellas, em

$$(c + Bt_2)\,\delta x_2 + (c' + bt_2)\,\delta y_2 - (c + At_2)\,\delta x_1 - (c + at_2)\,\delta y_1 = 0,$$

dará $$\frac{dx_2}{dz_2} + B = 0,\ \frac{dy_2}{dz_2} + b = 0,\ \frac{dx_2}{dz_2} + A = 0,\ \frac{dy_2}{dz_2} + a = 0.$$

Ora estas equações, comparadas com as differenciaes das superficies, satisfazem (*Geom. Anal.*, n.º 174) á condição de perpendicularidade entre os planos tangentes e a tangente da cycloide no segundo limite, e entre os mesmos planos e uma parallela a esta tangente no primeiro limite; por isso que os traços dos planos, $dz = A\delta x$, $\delta z = a\delta y$, $\delta z = B\delta x$, $\delta z = b\delta y$, são perpendiculares, em virtude das equações precedentes, ás projecções da tangente e da sua parallela: logo as duas superficies são parallelas entre si nos dous limites, e perpendiculares á tangente da cycloide no segundo limite e á sua parallela tirada pelo primeiro limite. Pode tambem consultar-se sobre esta materia a *Mec.* de Poisson, 1.ª edição, desde n.º 289 até 203.

459. Quando a curva deve ser traçada sobre uma superficie dada por sua equação $u=0$, a equação (B) não se parte em tres, senão depois de lhe haver ajunctado o termo $\lambda\delta u$. Assim, em logar das tres equações (1), teremos outras, entre as quaes eliminando λ resultarão as da curva procurada.

Se os limites forem dous pontos fixos, as constantes se determinarão pela condição de passar a curva por esses dous pontos.

Quando os limites deverem estar sobre duas curvas, a pedida cortal-as-ha debaixo d'um angulo recto, como no primeiro caso.

Portanto, o resto do problema é o mesmo em ambos os casos (*).

460. VI. *Qual é a curva* BM (Fig. 58), *de comprimento dado, que passa pelos pontos* B *e* M, *e que intercepta entre as ordenadas* BC, PM, *e o eixo* Ax, *a área maxima?*

Como deve ser *maxima* a área $\int y dx$, e constante o arco s, é necessario combinar a variação de $\int Z=\int y dx$ com a de $\int\sqrt{dx^2+dy^2}=\text{const.}$, como se viu no n.º 448, a fim de poder partir em duas a equação (B).

A variação completa é

$$\int\left(y\delta dx+dx\delta y+\frac{\lambda dx\delta dx+\lambda dy\delta dy}{ds}\right)=0;$$

d'onde resulta $\quad m=0,\ n=y+\lambda\dfrac{dx}{ds},\ \mathrm{M}=dx,\ \mathrm{N}=\lambda\dfrac{dy}{ds};$

e as duas equações, em que se parte a equação (B), são

$$y+\lambda\frac{dx}{ds}=c,\ x-\lambda\frac{dy}{ds}=c'.$$

(*) Para verificar que a funcção é susceptivel de *minimo* e não de *maximo*, appliquemos o processo do n.º 449. Temos $\mathrm{V}=\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{z-z_1}}$, d'onde se tira

$$\frac{d\mathrm{V}}{dp}=\frac{1}{\sqrt{z-z_1}}\cdot\frac{p}{\sqrt{1+p^2}},\ \frac{d^2\mathrm{V}}{dp^2}=\frac{1}{\sqrt{z-z_1}}\cdot\frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

quantidade positiva: logo a funcção proposta é um *minimo*, como se suppoz no texto.

Estas equações são identicas, porque a integração d'uma conduz ao mesmo resultado que a da outra: não se deve pois eliminar λ entre ellas.

Substituindo na primeira $\sqrt{dx^2+dy^2}$ em logar de ds, vem

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{\lambda^2-(y-c)^2}}{y-c},$$

o que dá $$(x-c')^2+(y-c)^2=\lambda^2.$$

O mesmo resultaria da combinação das duas equações; porque tirando d'ellas

$$\lambda^2\frac{dx^2}{ds^2}=(c-y)^2,\ \lambda^2\frac{dy^2}{ds^2}=(x-c')^2,$$

a somma daria $$(x-c')^2+(y-c)^2=\lambda^2.$$

Logo a curva procurada é um circulo. Para determinar as constantes c, c' e λ, recorreremos ás condições de passar o circulo pelos pontos B e M, e de ter o arco BM o comprimento exigido. Tal é o mais simples dos problemas dos *isoperimetros*.

461. Esta e outras questões do minimo relativo, reduzem-se ás do minimo absoluto, ajunctando debaixo do integral a funcção constante. Assim, quando $y=\varphi x$ fizer $\int(ydx+\lambda ds)$ um minimo absoluto, tambem fará $\int ydx$ um minimo relativamente ás curvas para as quaes $\int ds$ for o mesmo.

Para applicar agora a regra da distincção entre o maximo e o minimo, é necessario combinar a segunda condição de ser $\int ds$ constante com a do maximo ou minimo. Ora, a equação

$$y+\lambda\frac{dx}{ds}=c$$

dá $$\lambda=\frac{(c-y)\,ds}{dx}=(c-y)\sqrt{1+p^2};$$

logo, substituindo em $\int(ydx + \lambda ds)$, temos

$$\int dx[y + (c - y)(1 + p^2)];$$

e a regra de Legendre dá $\frac{d^2V}{dp^2} = 2(c - y)$.

Como c é a ordenada do centro, a qual para a parte convexa é $> y$, e para a concava $< y$, segue-se que $\frac{d^2V}{dp^2}$ será positivo ou negativo, e a funcção proposta um minimo ou um maximo, conforme o arco de circulo voltar a *convexidade* ou a *concavidade* para o eixo Ax. O mesmo faremos nos problemas seguintes.

462. VII. *Qual é a curva* BM, *que, para a área dada* BCPM (Fig. 58), *tem o menor arco possivel?* Temos de combinar as duas condições $\int\sqrt{dx^2 + dy^2} = minimo$, $\int ydx = \text{const.}$; o que dá, imitando os raciocinios precedentes,

$$\frac{dy}{ds} + \lambda y = c,\ \lambda x - \frac{dy}{ds} = c'.$$

Estas equações são visivelmente as mesmas achadas no problema precedente: logo o circulo é a curva procurada.

463. VIII. *Qual é a curva, de comprimento dado entre dous pontos fixos, para a qual* $\int$yds *é um minimo?*

Temos $$\delta\int(yds + \lambda ds) = 0.$$

A primeira das equações (D) dá

$$(y + \lambda)\frac{dx}{ds} = c;$$

logo a curva pedida é uma catenaria, que tem o eixo horizontal.

A segunda daria $$ds = d\left[(y+\lambda)\frac{dy}{ds}\right],$$

ou $$(y+\lambda)\,dy = (y+\lambda)\frac{dy}{ds}\,d\left[(y+\lambda)\frac{dy}{ds}\right],$$

cujo integral $$(y+\lambda)^2 = (y+\lambda)^2\frac{dy^2}{ds^2} + c^2,$$

ou $$\frac{(y+\lambda)^2\,dx^2}{ds^2} = c^2$$

é identico com a primeira.

464. Para examinar se ha maximo, se minimo, temos a funcção proposta
$$\int (yds + \lambda ds),$$

e a equação achada $$(y+\lambda)\frac{dx}{ds} = c,$$

que exprime a condição commum a ambas as propriedades.

Tirando d'esta equação o valor de λ, e substituindo-o na funcção, esta será
$$\int \frac{cds^2}{dx} \text{ ou } \int cdx\,(1+p^2).$$

A regra do n.º 449 dá $$\frac{d^2V}{dp^2} = 2c.$$

Ora, comparando a equação achada $$dx = \frac{\pm\, cdy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}}$$

com a da catenaria $$dx = \frac{bdy}{\sqrt{(a-y)^2 - b^2}}$$ (*Elem. de Mec.* n.º 75), onde $\lambda = -a$ e $b = \pm c$, vê-se que $y + \lambda$, e por conseguinte tambem c é negativo: logo a funcção proposta é um minimo.

Com effeito a equação da catenaria $dx = \dfrac{bdy}{\sqrt{(a-y)^2 - b^2}}$

suppõe que o eixo dos x é horizontal e corta a curva num ponto onde a *tensão* é a. Então a curva volta a concavidade para o eixo das abscissas, a constante a é $> y$, e tem logar o que acaba de dizer-se, para que a equação achada se possa comparar *immediatamente* com a da catenaria.

Mas, no caso de ser $\lambda = 0$ a equação achada, que então é $dx = \dfrac{\pm\, cdy}{\sqrt{y^2 - c^2}}$, não se pode comparar com a da catenaria sem mudar nesta $a - y$ em y, isto é, sem transportar o eixo dos x parallelamente a si mesmo, e collocal-o abaixo do ponto infimo da curva, a qual voltará a convexidade para este novo eixo. Ora a equação $y\dfrac{dx}{ds} = c$, em que se torna $(y + \lambda)\dfrac{dx}{ds} = c$, dá c positivo: logo temos neste caso um minimo, como deve ser, isto é, um maximo a respeito do primeiro eixo. Similhantemente raciocinariamos quando λ fosse positivo, ou negativo e $< y$.

DIFFERENÇAS E SERIES

Methodo directo das differenças. Interpolação

465. Sendo dada uma serie $a, b, c, d, \ldots$, subtrahamos cada um dos seus termos d'aquelle, que se lhe segue; teremos a serie das primeiras *differenças*

$$a' = b - a,\ b' = c - b,\ c' = d - c, \ldots$$

Do mesmo modo as differenças dos termos consecutivos d'esta serie darão a serie das segundas *differenças,*

$$a'' = b' - a',\ b'' = c' - b', \ldots;$$

e assim por diante.

Costumam designar-se as differenças pela caracteristica Δ affecta d'um expoente, que designa a ordem d'ellas: assim Δ^n é um termo da serie das differenças da ordem n. Toma-se cada differença com o signal respectivo: $+$, se é tirada d'uma serie crescente; $-$, se é tirada d'uma serie decrescente.

Por exemplo, se na funcção $y = x^3 - 9x + 6$ fizermos successivamente $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$, teremos uma serie de numeros, cujo termo geral é y, da qual se tiram as differenças successivas do modo seguinte:

Raizes	$x = 0$	1	2	3	4	5	...
Funcções	$y = 6$	-2	-4	6	34	86	...
1.as diff.	$\Delta y = -8$	-2	10	28	52	....	
2.as diff.	$\Delta^2 y =$	6	12	18	24	....	
3.as diff.	$\Delta^3 y =$	6	6	6	....		
4.as diff.	$\Delta^4 y =$	0	0	....			

466. Vê-se que neste exemplo as differenças 4.as são nullas, as 3.as constantes, e as 2.as equidifferentes. Em geral, tomando para x numeros equidifferentes, sempre chegaremos a differenças nullas, uma vez que y seja funcção racional e inteira de x; como vamos mostrar.

Seja $$y = kx^m + px^{m-1} + px^{m-2} + \ldots = f(x)$$

o polynomio proposto, e m o maior expoente de x.

Substituindo por x os numeros equidistantes α, $\alpha + h$, $\alpha + 2h, \ldots$ isto é, mudando successivamente α em $\alpha + h$, teremos

$$\Delta = f(\alpha + h) - f\alpha = h\frac{df}{d\alpha} + \frac{1}{2}h^2\frac{d^2f}{d\alpha^2} + \ldots,$$

$$\Delta' = f(\alpha + 2h) - f(\alpha + h) = \Delta + h\frac{d\Delta}{d\alpha} + \ldots,$$

isto é, $$\Delta^2 = h\frac{d\Delta}{d\alpha} + \ldots = h^2\frac{d^2f}{d\alpha^2} + \ldots$$

E do mesmo modo

$$\Delta^3 = h\frac{d\Delta^2}{d\alpha} + \ldots = h^3\frac{d^3f}{d\alpha^3} + \ldots,$$

. . . .

$$\Delta^m = h\frac{d\Delta^{m-1}}{d\alpha} + \ldots = h^m\frac{d^mf}{d\alpha^m},$$

isto é, $$\Delta^m = 1.2\ldots kh^m.$$

Logo: *em qualquer polynomio racional e inteiro do gráu* m, *a differença da ordem* m *é constante, e a da ordem* m + 1 *nulla, quando se substituem por* x *numeros equidifferentes.*

467. Por onde se vê que, se houvermos de substituir numeros equidifferentes, como acontece na resolução das equações numericas (*Alg. Sup.*, n.º 73), bastará procurar os primeiros $m+1$ resultados, e formar as suas differenças 1.as, 2.as,.... até a da ordem m, a qual será constante e $=1.2.3\ldots mkh^m$. Depois a serie d'estas ultimas differenças constantes, que se podem escrever indefinidamente, dará, pela addição ás da ordem precedente, a continuação da serie da ordem $m-1$; esta dará, pela addição, a continuação da serie da ordem $m-2$; e assim successivamente até chegar á serie dos resultados da substituição na equação, que se continuará pela addição das primeiras differenças.

Seja, por exemplo, a funcção $y=x^3-x^2-2x+1$:

Como	temos
$x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3$	$\Delta^3=\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6\ldots$
dá $y=1\ ,-1\ ,\ 1\ ,\ 13$	$\Delta^2=\ 4,\ 10,\ 16,\ 22,\ 28,\ 34\ldots$
$\Delta=-2,\ 2\ ,\ 12$	$\Delta=-2,\ 2,\ 12,\ 28,\ 50,\ 78\ldots$
$\Delta^2=\ 4,\ 10$	$y=\ 1,-1,\ 1,\ 13,\ 41,\ 91\ldots$
$\Delta^3=\ 6,$	para $x=\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ldots$

Estas series deduzem-se da serie das differenças constantes 6, 6, 6,..., e dos termos iniciaes já achados para cada uma; de maneira que: *qualquer termo d'uma das series se acha ajunctando o que na mesma serie lhe fica á esquerda com o que na precedente fica acima d'este ultimo.* Tambem se podem continuar as series em sentido contrario, para achar os resultados correspondentes a $x=-1,-2,-3,\ldots$: *subtrahindo do numero, que fica á direita do termo desconhecido, aquelle que fica acima do mesmo termo.*

Quando taes series se formam com o fim de resolver uma equação, não é necessario prolongar a serie dos resultados além do termo, passado o qual estes devem ter sempre o mesmo signal; o que acontece, logo que são todos positivos os termos d'uma columna qualquer, situada á esquerda

..

dos que falta calcular, ou de signal alternado os da columna situada á direita. Com effeito as addições e subtracções successivas, que servem para prolongar as series, conservam constantemente os mesmos signaes nos resultados. Por este modo se obtem os limites das raizes, tanto positivas, como negativas.

468. Designaremos por y_x a funcção de x, que é o termo geral da serie proposta; termo que gera todos os outros, fazendo $x=0, 1, 2, 3,\ldots$ Assim y_5 denotará o termo, que se obtem fazendo $x=5$ no geral; isto é, aquelle que tem 5 antes de si (como é o numero 91 no exemplo precedente).

Conforme esta notação, teremos

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0, \quad y_2 - y_1 = \Delta y_1, \quad y_3 - y_2 = \Delta y_2, \ldots$$

$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0, \quad \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1, \quad \Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2, \ldots$$

$$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0, \quad \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1, \quad \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2, \ldots$$

Em geral

$$y_x - y_{x-1} = \Delta y_{x-1},$$

$$\Delta y_x - \Delta y_{x-1} = \Delta^2 y_{x-1},$$

$$\Delta^2 y_x - \Delta^2 y_{x-1} = \Delta^3 y_{x-1}, \text{ etc.}$$

469. Formemos as differenças d'uma serie qualquer

$$\begin{array}{l|l}
y \ldots a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ \ldots & b = a + a',\ c = b + b',\ d = c + c',\ \ldots \\
\Delta \ldots a',\ b',\ c',\ d',\ e',\ \ldots & b' = a' + a'',\ c' = b' + b'',\ d' = c' + c'',\ \ldots \\
\Delta^2 \ldots a'',\ b'',\ c'',\ d'',\ e'',\ \ldots & b'' = a'' + a''',\ c'' = b'' + b''',\ d'' = c'' + c''',\ \ldots \\
\Delta^3 \ldots a''',\ b''',\ c''',\ d''',\ e''',\ \ldots & b''' = a''' + a^{\text{IV}},\ c''' = b''' + b^{\text{IV}},\ d''' = c''' + c^{\text{IV}},\ \ldots
\end{array}$$

Eliminando $b, b', c, c', \ldots$ das equações da primeira linha, reduziremos os segundos membros a não conter senão $a, a', a'', \ldots$ Tambem se podem obter valores de $a', a'', a''', \ldots$ que não contenham nenhuma letra accentuada.

Teremos assim:

$$b=a+\ a',\ c=a\ +2a'\ +a'',\ d=a+3a'+\ \ 3a''+a''',$$

$$e=a+4a'+6a''+4a'''+a^{\text{iv}},\ f=a+5a'+10a''\ \text{etc.}$$

$$a'=b-a,\ \ a''=c-2b+a,\ \ a'''=d-3c+3b-a\ldots$$

Ora, como os iniciaes $a', a'', a''', \ldots$ são Δy_0. $\Delta^2 y_0$. $\Delta^3 y_0, \ldots$; e a, b, c, $d, \ldots$ são $y_0, y_1, y_2, \ldots$: as equações precedentes dão

$y_1=y_0+\Delta y_0,$	$\Delta y_0=y_1-y_0,$
$y_2=y_0+2\Delta y_0+\Delta^2 y_0,$	$\Delta^2 y_0=y_2-2y_1+y_0,$
$y_3=y_0+3\Delta y_0+3\Delta^2 y_0+\Delta^3 y_0,$	$\Delta^3 y_0=y_3-3y_2+3y_1-y_0,$
$y_4=y_0+4\Delta y_0+6\Delta^2 y_0+4\Delta^3 y_0+\Delta^4 y_0,$	$\Delta_4 y_0=y_4-4y_3+6y_2-4y_1+y_0$
etc.	etc.

Em geral

$$y_x=y_0+x\Delta y_0+x\frac{x-1}{2}\Delta^2 y_0+x\frac{x-1}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\Delta^3 y_0+\ldots\ (\text{A}),$$

$$\Delta^n y_0=y_n-ny_{n-1}+n\frac{n-1}{2}y_{n-2}-n\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}y_{n-3}+\ldots(\text{B});$$

ou $$y_x=y_0+\Sigma\frac{x(x-1)\ldots(x-i+1)}{1\ .\ 2\ldots\ldots\ldots i}\Delta^i y_0\,,$$

$$\Delta^n y_0=y_n+\Sigma\,(-1)^i\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{1\ .\ 2\ldots\ldots.i}y_{n-i}.$$

470. A primeira d'estas equações dá o termo de qualquer ordem x, isto é, o termo geral, quando se conhecem os iniciaes de todas as ordens de differenças: a segunda dá o termo inicial da serie das differenças de qualquer ordem n, quando se conhecem os termos da serie y_0, y_1, y_2,...

Para applicar a primeira serie (A) ao exemplo do n.º 465, faremos

$$y_0 = 1,\ \Delta y_0 = -2,\ \Delta^2 y_0 = 4,\ \Delta^3 y_0 = 6,\ \Delta^4 y_0 = 0, \ldots$$

o que dá

$$y_x = 1 - 2x + 2x(x-1) + x(x-1)(x-2) = x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

471. As equações (A) e (B) facilmente se gravam na memoria, notando que os coefficientes das differenças Δ^1, Δ^2,.... em (A), e os dos termos y_n, y_{n-1},.... em (B), são os mesmos que os coefficientes dos desenvolvimentos de $(1 + \Delta y_0)^x$ e $(y-1)^n$ pela fórmula do binomio: de maneira que podemos escrever

$$y_x = (1 + \Delta y_0)^n,\ \Delta^n y_0 = (y-1)^n;$$

com tanto que nos desenvolvimentos d'estas expressões se substituam em logar das potencias de Δy_0 os expoentes de Δ que marcam a ordem das differenças, e em logar das potencias de y os indices; pondo além d'isso y_0 em logar do primeiro termo 1.

472. Qualquer que seja a serie proposta a, b, c, d...., podemos sempre concebel-a tirada d'outra, na qual se tivessem omittido periodicamente certos termos, isto é, da qual a, b, c, d.... fossem os termos tomados de 2 em 2, ou de 3 em 3, ou de 4 em 4,.... Supponhamos pois que, dada a primeira serie a, b, c, d.... ou antes o seu termo geral y_x (eq. A), nos propomos achar a serie primitiva, que designaremos por

$$a.a'.a''\ldots a^{(h-1)}.b.b'.b''\ldots b^{(h-1)}.c.c'.c''\ldots c^{(h-1)}\ldots\text{etc.}\ldots \quad (C).$$

Suppõ-se que d'esta serie resulta a primeira supprimindo $h-1$ termos entre a e b, $h-1$ entre b e c, $h-1$ entre c e d,...; termos sujeitos á mesma lei de geração que a serie a, b, c, d,...., a qual faz parte da primitiva.

A inserção d'um numero designado de termos entre os de uma serie proposta, sujeitando-os á mesma lei, chama-se *interpolação;* de maneira que *interpolar* consiste em achar estes termos intermedios, ou antes o termo geral da serie (C). Para isto basta evidentemente fazer $x=\frac{z}{h}$ na equação (A), que representa o termo geral da serie $a, b, c, \ldots$; z designando a ordem d'um termo da nova serie (C). Com effeito fazendo

$$z=0,\ 1,\ 2,\ 3\ldots h,\ h+1,\ h+2\ldots 2h\ldots \text{ etc.},$$

temos $$x=0,\ \frac{1}{h},\ \frac{2}{h},\ \frac{3}{h}\ldots 1,\ 1+\frac{1}{h},\ 1+\frac{2}{h}\ldots 2\ldots$$

na qual se acha para x a serie $0, 1, 2, \ldots$ com $h-1$ termos intercalados entre 0 e 1, outros tantos entre 1 e 2, etc.; e por conseguinte para a serie (A) os termos dados $a, b, c, d\ldots$ com os $h-1$ interpolados entre cada dous consecutivos. Substituindo pois $x=\frac{z}{h}$ na serie (A), teremos a fórmula de *interpolação*

$$y_z=y_0+\frac{z\,.\,\Delta^1}{h}+\frac{z(z-h)}{2}\,.\,\frac{\Delta^2}{h^2}+\frac{z\,(z-h)(z-2h)}{2.3}\,.\,\frac{\Delta^3}{h^3}+\ldots \text{(D)}.$$

Esta equação dará os termos interpolados; e reproduzirá tambem os primitivos $a, b, c, d, \ldots$, suppondo $z=hx=h.(0,\ 1,\ 2,\ldots)$. As differenças de todas as ordens, (cujos termos iniciaes representam $\Delta^1, \Delta^2, \ldots$) tiram-se da serie proposta $a, b, c, d, \ldots$

Mas é necessario chegar a differenças constantes, para que a serie se componha d'um numero finito de termos; ou ao menos a differenças Δ^1, Δ^2, $\Delta^3\ldots$ decrescentes, que tornem convergente a serie (D). Então a fórmula (D) dará a grandeza approximada d'um termo correspondente a qualquer valor de z: bem entendido que não se deve tomar z tal que os factores das differenças destruam a convergencia da serie, o que restringe z dentro de certos limites.

Por exemplo, acha-se na Geometria que, sendo **1000,0** a corda do arco de **60°**, correspondem

aos arcos x as cordas y;

$$\begin{array}{llll}
x=60^\circ \ldots\ldots\ldots & y=1000,0 & & \\
\quad 65^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots & \quad 1074,6 & \Delta^1=74,6 & \\
\quad 70^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots & \quad 1147,2 & \quad 72,6 & \Delta^2=-2,0 \\
\quad 75^\circ \ldots\ldots\ldots\ldots & \quad 1217,5 & \quad 70,3 & \quad -2,3.
\end{array}$$

Como as differenças 2.as são quasi constantes, ao menos no intervallo de 60° a 75°, podemos, entre estes limites, empregar a equação (D), fazendo $h=5$; o que dá

$$y_z=1000,0+\frac{1}{5}.74,6.z-\frac{2}{50}z(z-5)=1000,0+15,12.z-0,04z^2.$$

Assim, tomando $z=1, 2, 3, \ldots$, acharemos por esta fórmula as cordas de 61°, 62°, 63°,...; e tomando para z valores fraccionarios, acharemos as cordas de quaesquer outros arcos intermedios entre 60° e 75°. Mas não se deve estender o uso das differenças assim obtidas além dos limites d'onde ellas foram tiradas.

Mais um exemplo:

$$\begin{array}{llll}
\text{Temos} \quad \log 3100=y_m=4913617 & & & \\
\qquad\quad \log 3110 \quad =4927604 & \Delta^1=13987 & & \\
\qquad\quad \log 3120 \quad =4941546 & \quad 13942 & \Delta^2=-45 \\
\qquad\quad \log 3130 \quad =4955443 & \quad 13897 & \quad -45;
\end{array}$$

considerando a parte decimal do logarithmo como se fosse inteira.

Fazendo $h=10$, vem

$$y_z=\log 3100+1400,95.z-0,225.z^2;$$

onde basta fazer $z=1, 2, 3, \ldots$ para achar os logarithmos de 3101, 3102, 3103....: e se quizermos o logarithmo de 3107,58, faremos

$z = 7,58$, o que dará

$$\log 3107,58 = \log 3100 + 0,0010606 = 3,4924223.$$

Veja-se a *Astron. Prat.*, n.º 77, e a *Géod.*, n.º 378.

473. Estes processos empregam-se com vantagem para abreviar os calculos das taboas dos logarithmos dos senos, das cordas, etc. Para as formar, procuram-se sómente os resultados de espaço a espaço, e enchem-se os intervallos pela *interpolação*.

As mais das vezes a serie proposta $a, b, c, d, \ldots$, ou a taboa de numeros, que se quer interpolar, corresponde ás ordens $1, 2, 3, \ldots$. Temos então $h = 1$: e a fórmula (D), que se reduz a

$$y_z = y_0 + z\Delta^1 + z\frac{z-1}{2}\Delta^2 + z.\frac{z-1}{2}.\frac{z-2}{3}\Delta^3 + \ldots . \text{(E)},$$

serve para achar qualquer termo intermedio entre y_0 e y_1 correspondente á ordem z.

1.º Quando Δ^2 é nulla, ou muito pequena, a serie reduz-se a $y + z\Delta^1$; d'onde resulta que a differença $y_n - y_0$ cresce então proporcionalmente a z, isto é, *que, para ter* y_n, *basta accrescentar a* y_0 *a parte de* Δ_1 *proporcional a* z.

2.º Quando Δ^2 é constante, ou Δ^3 muito pequena, como as mais das vezes acontece, fica

$$y_z = y_0 + z\left(\Delta^1 + \frac{1}{2}(z-1)\Delta^2\right).$$

D'onde resulta a regra seguinte:

Forme-se $\frac{1}{2}(z-1)\Delta^2$, *e ajuncte-se com o seu signal á differença* Δ^1; *depois com esta differença assim correcta faça-se o resto do calculo como no caso precedente* (1.º).

Por exemplo

	y	Δ^1	Δ^2
log 310 =	2,4913617		
		13987	
log 311 =	27604		—45
		13942	
log 312 =	41546		—45
		13897	
log 313 =	55443		

Como os Δ^2 são constantes: se quizermos log 310,758, faremos $z=0,758$; calcularemos $\frac{1}{2}(z-1)\Delta^2=0,121.45=5,445$, que ajunctaremos a Δ_1; depois multiplicaremos a somma 13992,445 por z, o que dará 10606,27; e em fim ajunctando o resultado 0,0010606 a log 310, teremos log 310,758 = 2,4924223.

3.° Quando Δ^3 é constante, ou Δ^4 muito pequena, a serie (E) tem só quatro termos. Então é necessario *corrigir* Δ^2 *de* $\frac{1}{3}(z-2)\Delta^3$; *e operar com o* Δ^2 *assim correcto como no caso precedente* (2.°).

Acham-se applicações d'esta theoria a pag. 101 das taboas dos logarithmos de Callet, onde se calculam os logarithmos com 20 decimaes.

4.° Reciprocamente, se os termos y_z e y_0 são dados, e se pede a ordem z do 1.°, sendo constante a differença 2.ª; temos

$$z=\frac{y_z-y_0}{\Delta^1+\frac{1}{2}(z-1)\Delta^2}\dots\dots\dots\dots\dots\dots(\text{F}).$$

Para calcular esta expressão, despreza-se primeiramente o segundo termo do denominador, o que dá um valor approximado de z; depois substitue-se este valor de z no segundo membro da fórmula (F), sem nada omittir d'ella.

Assim, se no exemplo precedente se conhece o resultado y_z do calculo: subtrahe-se d'elle y_0 = log 310, e fica 10606,27, que dividido por $\Delta^1=13987$ dá uma primeira approximação $z=0,758$: depois substituindo este valor no segundo membro de (F), resulta $z=\frac{10606,27}{13992}=0,758$.

O problema inverso se resolverá do mesmo modo, quando Δ^3 for constante, etc.

474. Quando Δ^2 é constante, e se querem interpolar n numeros successivos entre y_0 e y_1, pode fazer-se o calculo muito commodamente, do modo seguinte. Mudando z em $z+1$ na fórmula (D), e subtrahindo um resultado do outro, virá o valor geral da differença primeira para a nova serie interpolada; depois, fazendo o mesmo nesta, virá a differença segunda. D'este modo acharemos

$$\text{diff. 1.}^{a},\ \delta^1 = \frac{\Delta^1}{h} + \frac{2z-h+1}{2h^2}.\Delta^2; \quad \text{diff. 2.}^{a},\ \delta^2 = \frac{\Delta^2}{h^2}.$$

Supponhamos que se querem inserir n termos entre y_0 e y_1. É necessario tomar nas fórmulas precedentes $h=n+1$; e depois fazer $z=0$, para ter o termo inicial das differenças

$$\delta^2 = \frac{\Delta^2}{(n+1)^2},\ \delta^1 = \frac{\Delta^1}{n+1} - \frac{1}{2}n\delta^2.$$

Por estas fórmulas calcular-se-ha δ^2, e depois δ^1; o termo inicial δ^1, com a differença constante δ^2, servirá para compor as differenças primeiras da serie interpolada; e estas differenças, com y_0, darão a serie pedida, por addições successivas.

Por exemplo, para calcular (pag. 504) os logarithmos de 3101, 3102, 3103,... basta interpolar 9 numeros entre os dados log 3100 e log 3110. Para isso temos $n=9$; o que dá $\delta^2=-0,45$, e $\delta^1=1400,725$. Com este δ^1 inicial, e com a differença constante δ^2, forma-se a serie das differenças primeiras

1400,725, 1400,275, 1399,825, 1399,375, 1398,925,. . . .

Em fim, esta serie, com o termo inicial log 3100, dará os logarithmos consecutivos que se procuram.

Supponhamos que de 12^h em 12^h se observou um phenomeno physico, e que os resultados medidos foram

horas	y	Δ^1	Δ^2
0^h.	78		
		222	
12.	300		144
		366	
24.	666		144
		510	
36.	1176		
. .			

Para achar os resultados correspondentes a 4^h e 8^h,.... é necessario interpolar 2 termos. Temos então $n=2$, $\delta^2=16$, $\delta^1=58$: com o primeiro termo 58, e com a razão 16, comporemos as equidifferenças que formam a serie das differenças primeiras; depois, com esta serie e com o termo 78, formaremos a serie pedida:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{Diff. 1.}^{\text{as}}\ \delta^1 \ldots & 58\,. & 74\,. & 90\,. & 106\,. & 122\,. & 138 \ldots\ldots, & \\
\text{Serie} \ldots\ldots\ldots & 78\,. & 136\,. & 210\,. & 300\,. & 406\,. & 528\,. & 666 \ldots \\
 & 0^h, & 4^h, & 8^h, & 12^h, & 16^h, & 20^h, & 24^h \ldots
\end{array}
$$

A supposição das differenças segundas constantes convém a quasi todos os casos, quando se podem escolher intervallos convenientes. Usa-se frequentes vezes d'este methodo em Astronomia; e até, quando a observação ou o calculo dá resultados cujas differenças segundas offerecem um andamento pouco regular, imputa-se este defeito a erros, que se corrigem restabelecendo um andamento uniforme.

475. As taboas astronomicas, geodesicas, etc., são formadas segundo estes principios. Calculam-se directamente alguns termos, tão proximos uns dos outros que as differenças primeiras ou segundas sejam constantes; depois interpola-se para obter os numeros intermedios. (Vej. *Astr. prat.*, n.º 78).

Assim, quando uma serie convergente dá o valor de y, por meio d'uma variavel x: em vez de calcular y para cada valor de x, (o que se tornaria muito laborioso, sendo frequente o uso da fórmula), determinam-se os resultados y para grandezas de x gradualmente crescentes, de maneira que estes resultados sejam pouco differentes; e fórma-se uma taboa, na qual se inscreve cada valor de y ao lado do correspondente de x, que se chama *Argumento* da taboa. Então, querendo achar os valores de y correspondentes aos x intermedios, obtem-se immediatamente os resultados procurados por meio de partes proporcionaes.

Quando y depende de duas variaveis ou argumentos, x e z, dispõe-se os valores de y em taboas *de duas entradas*, como a de Pythagoras; de maneira que, tomando x e z como coordenadas, o resultado acha-se na casa, que elles determinam. Assim, para $z=1$, escrevem-se na primeira linha os resultados correspondentes a $x=1, 2, 3,...$; para $z=2$, escrevem-se na segunda linha os resultados correspondentes aos mesmos valores de x; com $z=3$ fórma-se a terceira linha, etc. Então, querendo achar, por exemplo, o resultado correspondente a $x=3$ e $z=5$, basta procurar a terceira columna, e nella a quinta casa, que dará o resultado pedido. Os valores intermedios obter-se-hão d'uma maneira analoga ao que fica dicto.

476. Temos até aqui supposto que os x crescem por equidifferenças. Não acontecendo assim, e conhecendo os resultados $y=a, b, c, d\ldots$ correspondentes a hypotheses quaesquer $x=\alpha, \beta, \gamma,\ldots$, podemos recorrer á theoria, que se expoz (*Geom. Anal.*, pag. 171), quando se tractava de fazer passar uma curva parabolica por uma serie de pontos dados. Tambem se pode proceder do modo seguinte:

Com os valores correspondentes conhecidos $a, \alpha, b, \beta,\ldots$ formam-se as fracções consecutivas:

$$A=\frac{b-a}{\beta-\alpha},\ A_1=\frac{c-b}{\gamma-\beta},\ A_2=\frac{d-c}{\delta-\gamma},\ A_3=\frac{e-d}{\varepsilon-\delta}\ldots,$$

$$B=\frac{A_1-A}{\gamma-\alpha},\ B_1=\frac{A_2-A_1}{\delta-\beta},\ B_2=\frac{A_3-A_2}{\varepsilon-\gamma}\ldots,$$

$$C=\frac{B_1-B}{\delta-\alpha},\ C_1=\frac{B_2-B_1}{\varepsilon-\beta}\ldots,$$

$$D=\frac{C_1-C}{\varepsilon-\alpha}\ldots$$

Eliminando entre estas equações, acha-se successivamente

$$b=a+A(\beta-\alpha),$$

$$c=a+A(\gamma-\alpha)+B(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta),$$

$$d=a+A(\delta-\alpha)+B(\delta-\alpha)(\delta-\beta)+C(\delta-\beta)(\delta-\gamma),$$

e em geral

$$y_x = a + \mathrm{A}(x-\alpha) + \mathrm{B}(x-\alpha)(x-\beta) + \mathrm{C}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) + \ldots$$

Para calcular esta fórmula, tomam-se as differenças primeiras entre os resultados $a, b, c, d, \ldots\ldots$, e dividindo-as pelas differenças das hypotheses respectivas $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$, obtem-se $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$: tractando depois $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \ldots$ d'um modo analogo, deduzem-se $\mathrm{B}, \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots$; depois, por meio d'estes, acham-se $\mathrm{C}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots$; e assim por diante: em fim, substituindo na fórmula, acha-se o termo geral pedido y_x.

Executando as multiplicações, a expressão precedente toma a fórma $a + a'x + a''x^2 + \ldots$ d'um polynomio racional e inteiro; o que provém de se terem desprezado as differenças d'ordens superiores (n.° 466).

Por exemplo de resultam

Corda de 60°	$= 1000$				
62. 20′	$= 1035$	35	$\mathrm{A} = 15$		$\mathrm{B} = -0{,}035$
65. 10	$= 1077$	42	$\mathrm{A}_1 = 14{,}82$	$-0{,}18$	$\mathrm{B}_1 = -0{,}031$;
69. 0	$= 1133$	56	$\mathrm{A}_2 = 14{,}61$	$-0{,}21$	

e são $\alpha = 0,\ \beta = 2\frac{1}{3},\ \gamma = 5\frac{1}{6},\ \delta = 9$:

por conseguinte, desprezando as terceiras differenças, teremos

$$y_x = 1000 + 15{,}082 \,.\, x - 0{,}035 \,.\, x^2.$$

477. Considerando qualquer funcção y_x de x como termo geral da serie dos resultados correspondentes a $x = m,\ m+h,\ m+2h, \ldots\ldots$, o termo geral das differenças entre estes resultados será a differença primeira da funcção proposta y_x, que se representa por Δy_x. Para ter esta differença basta mudar x em $x+h$ na funcção proposta y_x, e subtrahir y_x do resultado: o resto gerará a serie das differenças primeiras, fazendo $x = m,\ m+h,\ m+2h, \ldots$

Por exemplo: $$y_x = \frac{x^2}{a+x}$$

dá $$\Delta y_x = \frac{(x+h)^2}{a+x+h} - \frac{x^2}{a+x};$$

expressão, que se terá de reduzir, ou de desenvolver em ordem ás potencias de h....

Em geral, o theorema de Taylor dá

$$\Delta y_x = y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \frac{1}{2.3}y'''h^3 + \ldots$$

Para ter a differença segunda, fariamos a respeito de Δy_x o mesmo que fizemos a respeito de y_x; e semelhantemente para as differenças terceiras, quartas, etc.

Integração das differenças. Somma das series

478. Integração das differenças. Esta integração consiste em reverter d'uma differença, dada em x, á funcção que a produziu; isto é, em achar o termo y_x d'uma serie $y_m, y_{m+h}, y_{m+2h}, \ldots$, quando se conhece o da serie das suas differenças de qualquer ordem. Esta operação indica-se pelo signal Σ.

Seja, por exemplo, $\Sigma(3x^2 + x - 2)$, suppondo $h = 1 = \Delta x$. Esta expressão indica que uma certa funcção desconhecida y_x dá, para $x = 0, 1, 2, \ldots$, uma serie de termos taes que o termo geral das suas differenças primeiras $-2, 2, 12, 28, \ldots$ é $3x^2 + x - 2$. Assim, tracta-se de achar uma funcção fx de x tal que seja

$$f(x+1) - fx = 3x^2 + 2x - 2.$$

Ora facilmente se vê que:

1.° os signaes Δ e Σ se compensam; do mesmo modo que $\int$ e d: assim $\Sigma\Delta fx = fx$.

2.° $\Delta(ay) = a\Delta y$; por conseguinte $\Sigma ay = a\Sigma y$.

3.° $\Delta(\mathrm{A}t - \mathrm{B}u) = \mathrm{A}\Delta t - \mathrm{B}\Delta u$; logo $\Sigma(\mathrm{A}t - \mathrm{B}u) = \mathrm{A}\Sigma t - \mathrm{B}\Sigma u$, sendo t e u funcções de x.

479. O problema, que consiste em achar y_x por meio da sua primeira differença, não contém os dados necessarios para se resolver completamente. Com effeito, supponhamos que $-2, 2, 12, 28, \ldots$ é a serie das primeiras differenças: para recompôr a serie primitiva bastará tomar o primeiro termo $y_0 = a$, e junctar successivamente as differenças, o que dará $a, a - 2, a + 2, a + 12, \ldots$; mas a ficará arbitrario.

Qualquer integral pode sempre julgar-se comprehendido na equação (A) do n.° 469: porque, tomando $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ na differença primeira dada em x, formar-se-ha a serie das differenças primeiras; as differenças successivas d'estas darão a serie das segundas; as d'estas as terceiras, etc. Os termos iniciaes d'estas series serão $\Delta^1 y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0, \ldots$; e estes valores substituidos em (A) darão y_x. Assim, no exemplo precedente (que é o do n.º 467, quando $a=1$) temos (n.º 470)

$$\Delta^1 y_0 = -2,\ \Delta^2 y_0 = 4,\ \Delta^3 y_0 = 6,\ \Delta^4 y_0 = 0, \ldots;$$

logo
$$y_x = y_0 - 2x - x^2 + x^3.$$

Em geral, o primeiro termo y_0 da equação (A) é uma constante arbitraria, que se deve ajunctar ao integral.

Se a funcção dada é uma differença segunda, será necessario por uma primeira integração reverter á differença primeira, e d'esta a y_x; o que introduzirá duas constantes arbitrarias. Com effeito a equação (A) faz ainda conhecer y_x, achando $\Delta^2, \Delta^3, \ldots$; mas ficam arbitrarios y_0 e $\Delta^1 y_0$. Semelhantemente discorreremos a respeito das ordens superiores.

480. Proponhamo-nos, por exemplo, achar Σx^m, sendo m um expoente inteiro e positivo. Representemos este desenvolvimento por

$$\Sigma x^m = px^a + qx^b + rx^c + \ldots,$$

sendo $p, q, r, \ldots$ coefficientes, e $a, b, c, \ldots$ expoentes decrescentes, que se tracta de determinar.

Para tomar a differença, temos de supprimir o signal Σ no primeiro membro, e mudar no segundo x em $x+h$, e de subtrahir; o que dá, parando nos segundos termos,

$$x^m = pahx^{a-1} + \frac{1}{2} pa(a-1)h^2x^{a-2} + qbhx^{b-1} + \ldots:$$

ora, para que os dous membros d'esta equação sejam identicos, é necessario que tenhamos, em quanto aos expoentes,

$$a-1=m,\ a-2=b-1, \text{ ou } a=m+1,\ b=m;$$

e, em quanto aos coefficientes,

$$1 = pah,\ -\frac{1}{2} pa(a-1)h = qb, \text{ ou } p = \frac{1}{(m+1)},\ q = -\frac{1}{2}.$$

Em quanto aos outros termos, é visivel que os expoentes são todos inteiros e positivos; e até se pode reconhecer que devem faltar de dous em dous; o que tambem resulta do calculo seguinte. Ponhamos

$$\Sigma x^m = px^{m+1} - \frac{1}{2}x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-3} + \gamma x^{m-5} + \ldots$$

Para determinar $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ tomemos a differença primeira, pondo $x+h$ em logar de x, e subtrahindo. Passando $px^{m+1} - \frac{1}{2}x^m$ para o primeiro membro, e observando que $ph(m+1) = 1$, este membro reduzir-se-ha a

$$\mathrm{A}\frac{h^2}{2.3}x^{m-2} + \mathrm{A}''\frac{m-3}{4}.\frac{3h^4}{2.5}x^{m-4} + \mathrm{A}^{\mathrm{IV}}\frac{m-5}{6}.\frac{5h^6}{2.7}x^{m-6} + \ldots;$$

onde omittimos, por abreviar, os termos do desenvolvimento de dous em dous, os quaes o calculo provaria que se destruem, e designamos por 1, m, A, A'',... os coefficientes do binomio.

Fazendo o mesmo calculo sobre o segundo membro $\alpha x^{m-1} + \beta x^{m-3} + \ldots$, teremos

$$(m-1)\alpha h x^{m-2} + \left.\begin{array}{l} \dfrac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\alpha h^3 \\ +(m-3)\beta h \end{array}\right| x^{m-4} + \ldots$$

Comparando termo a termo estes dous membros, acharemos

$$\alpha = \frac{mh}{3.4},\ \beta = \frac{-\mathrm{A}''h^3}{2.3.4.5},\ \gamma = \frac{\mathrm{A}^{\mathrm{IV}}h^5}{6.6.7},\ldots;$$

e será assim finalmente,

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma x^m = \dfrac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \dfrac{x^m}{2} + mahx^{m-1} + \mathrm{A}''bh^3x^{m-3} \\ \qquad\qquad + \mathrm{A}^{\mathrm{IV}}ch^5x^{m-5} + \mathrm{A}^{\mathrm{VI}}dh^7x^{m-7} + \ldots\end{array}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{D}).$$

Os coefficientes d'este desenvolvimento são os do binomio, de dous em dous termos, multiplicados por certos factores numericos $a, b, c, \ldots$, que se chamaram *Numeros Bernoullianos*, por ser Jacques Bernoulli o primeiro que os determinou.

Como estes factores têm muito uso na theoria das series, ensinaremos (n.° 482) um meio facil de os calcular: mas desde já damos os seus valores:

$$a = \frac{1}{12},\ b = -\frac{1}{120},\ c = \frac{1}{252},\ d = -\frac{1}{240},\ e = \frac{1}{132},$$

$$f = -\frac{691}{32760},\ g = \frac{1}{12},\ h = -\frac{3617}{8160},\ i = \frac{43867}{14364}\ldots.$$

481. Por onde se vê que para achar Σy^m, quando m é um numero inteiro e positivo, é necessario, além dos dous primeiros termos $\dfrac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \dfrac{x^m}{2}$, tomar o desenvolvimento de $(x+h)^m$, supprimindo os termos d'ordem impar 1.°, 3.°, 5.°,..., e multiplicar os termos, que se aproveitam, respectivamente por $a, b, c, \ldots$. Nestes termos x *e* h *não têm senão expoentes pares, quando* m *é impar, e reciprocamente*, e por isso deve rejeitar-se tambem o ultimo h^m, quando elle é da ordem dos que não servem. O numero dos termos é $\frac{1}{2}m + 2$, quando m é par; e $\frac{1}{2}(m+3)$, quando m é impar; de maneira que este numero de termos vem a ser o mesmo para um inteiro par e para o impar consecutivo.

Por exemplo, para $m = 10$, desenvolveremos $(x+h)^{10}$, e conservando os termos 2.°, 4.°, 6.°,.... d'este desenvolvimento, teremos de ajunctar e será assim finalmente,

$$10x^9ah+120x^7bh^3+\ldots a\,\frac{x^{11}}{11h}-\frac{1}{2}x^{10};\ \text{o que dá}$$

$$\Sigma x^{10}=\frac{x^{11}}{11h}-\frac{1}{2}x^{10}+\frac{5}{6}x^9h-x^7h^3+x^5h^5-\frac{1}{2}x^3h^7+\frac{5}{66}xh^9.$$

Por este modo se obtem os seguintes integraes:

$$\Sigma x^0=\frac{x}{h},\ \Sigma x^1=\frac{x^2}{2h}-\frac{x}{2},$$

$$\Sigma x^2=\frac{x^3}{3h}-\frac{x^2}{2}+\frac{hx}{6},$$

$$\Sigma x^3=\frac{x^4}{4h}-\frac{x^3}{2}+\frac{hx^2}{4},$$

$$\Sigma x^4=\frac{x^5}{5h}-\frac{x^4}{2}+\frac{hx^3}{3}-\frac{h^3x}{30},$$

$$\Sigma x^5=\frac{x^6}{6h}-\frac{x^5}{2}+\frac{5hx^4}{12}-\frac{h^3x^2}{12},$$

$$\Sigma x^6=\frac{x^7}{7h}-\frac{x^6}{2}+\frac{hx^5}{2}-\frac{h^3x^3}{6}+\frac{h^5x}{42},$$

$$\Sigma x^7=\frac{x^8}{8h}-\frac{x^7}{2}+\frac{hx^6}{12}-\frac{7h^3x^4}{24}+\frac{h^5x^2}{12},$$

$$\Sigma x^8=\frac{x^9}{9h}-\frac{x^8}{2}+\frac{2hx^7}{3}-\frac{7h^3x^5}{15}+\frac{2h^5x^3}{9}-\frac{h^7x}{30},$$

$$\Sigma x^9=\frac{x^{10}}{10h}-\frac{x^9}{2}+\frac{3hx^8}{4}-\frac{7h^3x^6}{10}+\frac{h^5x^4}{2}-\frac{3h^7x^2}{20},$$

$$\Sigma x^{10}=\frac{x^{11}}{11h}-\frac{1}{2}x^{10}+\frac{5}{6}x^9h-x^7h^3+x^5h^5-\frac{1}{2}x^3h^7+\frac{5}{66}xh^5,\ \text{etc.}$$

482. Podemos achar facilmente os numeros bernoullianos, a, b, c, d,... por meio da equação (D). Para isso façamos $x=h=1$ nesta equação: como Σx^m é o termo geral da serie, que tem x^m por differença primeira, este termo será $\Sigma 1$, e a serie será a dos numeros 0, 1, 2, 3,.... Tomando zero para primeiro membro, e transpondo os dous primeiros termos, teremos

$$-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2}=\frac{m-1}{2(m+1)}=am+b\mathrm{A}''+c\mathrm{A}^{\mathrm{IV}}+d\mathrm{A}^{\mathrm{VI}}\ldots+km.$$

Ora, se fizermos nesta equação $m=2$, o segundo membro reduzir-se-ha a am, e teremos $a=\frac{1}{12}$; se fizermos $m=4$, o segundo membro será $am+b\mathrm{A}''$, e teremos $\frac{3}{10}=4a+4b$, que dá $b=-\frac{1}{120}$; do mesmo modo $m=6$ dará o segundo membro $am+b\mathrm{A}''+6c$ e por conseguinte $c=\frac{1}{252}$...; e continuando assim a proceder segundo as potencias pares, $m=2, 4, 6\ldots$, obteremos equações que irão tendo successivamente um termo de mais, $2a$, $4b$, $6c$,....mk, e que servirão por isso para determinar os numeros a, b, c,....k.

483. Tomemos a differença do producto

$$y_x=(x-h)\,x\,(x+h)(x+2h)\ldots(x+ih).$$

Substituindo $x+h$ em logar de x, e subtrahindo, vem

$$\Delta y_x=x(x+h)(x+2h)\ldots(x+ih)\times(i+2)\,h.$$

Dividindo esta segunda equação pelo factor constante $(i+2)\,h$, integrando, e substituindo a expressão y_x dada pela primeira, teremos

$$\Sigma x(x+h)(x+2h)\ldots(x+ih)=\frac{x-h}{(i+2)\,h}.x(x+h)(x+2h)\ldots(x+ih);$$

equação, que dá o *integral do producto de factores que formam uma equidifferença.*

484. Tomando a differença do segundo membro, verifica-se a equação

$$\Sigma \frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+ih)} = \frac{-1}{ihx(x+h)\ldots[x+(i-1)h]}.$$

485. Para $y_x = a^x$, temos $\Delta y_x = a^x(a^h - 1)$,

que dá $$y_x = \Sigma a^x(a^h-1) = a^x,$$

e por conseguinte $$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + \text{const.}$$

486. É

$$\Delta \cos x = \cos(x+h) - \cos x = -2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}h\right) \operatorname{sen} \frac{1}{2} h;$$

d'onde, integrando e mudando $x + \frac{1}{2}h$ em z,

resulta $$\Sigma \operatorname{sen} z = -\frac{\cos\left(z - \frac{1}{2}h\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h} + \text{const.}$$

Semelhantemente se acharia

$$\Sigma \cos z = \frac{\operatorname{sen}\left(z - \frac{1}{2}h\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h} + \text{const.}$$

Para integrar as potencias de senos, basta transformal-as em senos e cosenos d'arcos multiplos (*Alg. Sup.*, n.º 162); e integrar os termos resultantes da fórma $A \operatorname{sen} qx$ ou $A \cos qx$ por meio das equações precedentes, pondo $qx = z$.

487. Para achar Σuz, sendo u e z funcções conhecidas de x, representemos este integral por

$$\Sigma uz = u\Sigma z + t,$$

onde t representa uma funcção de x, que se tracta de determinar. Se mudarmos x em $x+h$, mudar-se-hão u, z e t em

$$u + \Delta u,\ z + \Delta z,\ \text{e}\ t + \Delta t,$$

e $\quad u\Sigma z + t \quad$ em $u\Sigma z + uz + \Delta u\Sigma(z + \Delta z) + t + \Delta t.$

Subtrahindo d'este resultado o precedente $u\Sigma z + t$, teremos a differença de Σuz,

$$uz = uz + \Delta u\Sigma(z + \Delta z) + \Delta t;$$

d'onde se tira $\quad t = -\Sigma[\Delta u\Sigma(z + \Delta z)];$

e portanto $\quad \Sigma uz = u\Sigma z - \Sigma[\Delta u . \Sigma(z + \Delta z)],$

fórmula, que corresponde á integração por partes das funcções differenciaes.

488. Ha só um pequeno numero de funcções, das quaes se conheça o integral finito; e por isso, quando se não sabe integrar exactamente, recorre-se ás series.

A serie de Taylor $\quad \Delta y_x = y'h + \frac{1}{2} y''h^2 + \ldots$

dá $\quad y_x = h\Sigma y' + \frac{1}{2} h^2\Sigma y'' + \frac{1}{6} h^3\Sigma y''' + \ldots,$

onde y', y'', y''', ... são as derivadas successivas de y_x.

Se considerarmos y' como uma funcção dada z de x, teremos

$$y'=z,\ y''=z',\ y'''=z'', \ldots, \text{ e } y_x=\int y'dx=\int zdx:$$

logo $$\int zdx=h\Sigma z+\frac{1}{2}h^2\Sigma z'+\frac{1}{5}h^3\Sigma z''\ldots.$$

e $$\Sigma z=h^{-1}\int zdx-\frac{1}{2}h\Sigma z'-\frac{1}{6}h^2\Sigma z''\ldots.,$$

equação, que dá Σz, quando se conhecem $\Sigma z'$, $\Sigma z''$,....

Tomemos a sua derivada: virá

$$\Sigma z'=h^{-1}z-\frac{1}{2}h.\Sigma z''\ldots,$$

isto é, $\Sigma z'$ expresso em $\Sigma z''$, $\Sigma z'''$,.... Tomando a derivada d'este resultado, achariamos $\Sigma z''$ expresso em $\Sigma z'''$, Σz^{IV} ...; e assim por diante. Mas, sem fazer estes calculos, facilmente se vê que o resultado das substituições successivas será da fórma

$$\Sigma z=h^{-1}\int zdx+\text{A}z+\text{B}hz'+\text{C}h^2z''+\ldots,$$

onde resta determinar os coefficientes A, B, C,....

Para isso seja $z=x^m$: tirando d'esta equação $\int zdx$, z', z'',.... e substituindo, acha-se uma serie, que, por isso que deve ser identica com (D), não pode conter as potencias $m-2$, $m-4$,.... de h.

Assim

$$\Sigma z=\frac{\int zdx}{h}-\frac{1}{2}z+\frac{a}{1}hz'+\frac{b}{1.2.3}h^3z'''+\frac{c}{2.3.4.5}h^5z^5+\ldots,$$

sendo a, b, c,... os numeros bernoullianos.

Por exemplo, para $z=lx$ e $h=1$, temos

$$\int z dx = \int lx . dx = xlx - x,\ z' = x^{-1},\ z''' = \ldots;$$

e portanto $\Sigma lx = C + xlx - x - \frac{1}{2} lx + ax^{-1} + bx^{-3} + cx^{-5} \ldots$

489. Somma das series. Sendo $a, b, c, d, \ldots$ uma serie, que tem $a', b', c', \ldots$ por differenças primeiras, são

$$b = a + a',\ c = b + b',\ d = c + c', \ldots l = k + k';$$

equações, cuja somma é $l = a + a' + b' + c' + \ldots . k'$.

Se $a', b', c', \ldots$ são numeros conhecidos, podemos sempre considera-los como differenças primeiras d'uma serie $a, b, c, d, \ldots$ que facilmente se comporia por meio do primeiro termo a e das differenças dadas: e como por definição (n.º 479) sabemos que um termo qualquer l' da serie $a', b', \ldots$ é Δl, por isso que $l' = m - l$, segue-se que, integrando $l' = \Delta l$, teremos $\Sigma l' = l$, ou

$$\Sigma l' = a' + b' + c' + \ldots . k',$$

incluindo o termo inicial a na constante da caracteristica Σ. Logo: *o integral de qualquer termo d'uma serie é egual á somma de todos os termos, que o precedem,*

$$\Sigma y_x = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots y_{x-1}.$$

Mas, se na somma quizermos comprehender o termo geral y_x, será necessario ajunctal-o ao integral, ou mudar neste x em $x+1$, ou finalmente mudar x em $x+1$ na expressão de y_x antes de integrar. Para determinar a constante, basta fazer a somma $= y_0$, quando $x = 1$.

490. Pelo que fica dicto, *sabemos achar o termo sommatorio de qualquer serie, cujo termo geral se conhece em funcção racional e inteira* *de* x. Assim, o termo sommatorio da serie que tem por termo geral $y_x = Ax^m - Bx^n + C$, sendo m e n positivos, até y_x exclusivamente, é $A\Sigma x^m - B\Sigma x^n + C\Sigma x^0$. Antes ou depois de haver determinado este integral por meio da equação (D), mudar-se-ha x em $x+1$, para comprehender y_x na somma, e determinar-se-ha convenientemente a constante.

I. Seja, por exemplo, $y_x = x(2x-1)$. Mudando x em $x+1$, e integrando o resultado, teremos

$$2\Sigma x^2 + 3\Sigma x + \Sigma x^0 = \frac{4x^3+3x^2-x}{2.3} = x.\frac{x+1}{2}.\frac{4x-1}{3};$$

sem ajunctar constante, porque $x=0$ deve reduzir a somma a zero.

II. A somma da serie das potencias $1^m, 2^m, 3^m, \ldots$ dos numeros naturaes acha-se integrando x^m (eq. D); mas é necessario accrescentar ao integral o termo da ordem x, que é x^m, isto é, mudar o segundo termo $-\frac{1}{2}x^m$ da eq. (D) em $\frac{1}{2}x^m$. E para determinar depois a constante, é necessario attender ao termo pelo qual a somma deve começar.

Por exemplo, para a somma dos quadrados, temos de tomar Σx^2 (pag. 516), mudando o signal do segundo termo, o que dá

$$\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = x.\frac{2x+1}{2}.\frac{x+1}{3};$$

não ajunctando constante, por ser a somma nulla quando $x=0$.

Mas, se quizermos que a somma comece por n^2, extendendo-se de n^2 a x^2, então deve ella ser nulla, quando $x=n-1$, o que dá

$$\text{a constante} = -n\frac{n-1}{2}.\frac{2n-1}{3},$$

III. Esta theoria applica-se á somma dos numeros figurados. Por exemplo, querendo sommar os x primeiros numeros pyramidaes 1, 4, 10, 20,.... (*Alg. Sup.*, n.os 17 e 19), devemos primeiramente integrar o termo geral

$\frac{1}{6}x(x+2)(x+1)$, o que dá (n.º 483) $\frac{1}{24}(x-1)x(x+1)(x+2)$;

e depois, mudando x em $x+1$, acharemos a somma pedida

$$\frac{1}{24}x(x+1)(x+2)(x+3).$$

A constante é nulla.

491. *Os numeros figurados inversos* são fracções, que têm por numerador a unidade e por denominador uma serie figurada. O termo x^{m0} da ordem p (*Alg. Sup.*, pag. **31**) é

$$\frac{1.2.3\ldots(p-1)}{x(x+1)\ldots(x+p-2)},$$

que tem por integral $C-\dfrac{1.2.3\ldots p-1}{(p-2)x(x+1)\ldots(x+p-3)}$ (n.° 484).

Mudando pois x em $x+1$, e determinando depois a constante de modo que a somma seja nulla quando $x=0$, teremos $C=\dfrac{p-1}{p-2}$, e a somma dos x primeiros termos será

$$\frac{p-1}{p-2}-\frac{1.2.3\ldots p-1}{(p-2)(x+1)(x+2)\ldots(x+p-2)}.$$

Se fizermos sucessivamente $p=3, 4, 5, \ldots$, acharemos

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}\cdots\frac{1.2}{x(x+1)}=\frac{2}{1}-\frac{2}{x+1},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\cdots\frac{1.2.3}{x(x+1)(x+2)}=\frac{3}{2}-\frac{3}{(x+1)(x+2)},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}\cdots\frac{1.2.3.4}{x\ldots\ldots(x+3)}=\frac{4}{3}-\frac{2.4}{(x+1)\ldots(x+3)},$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{56}\cdots\frac{1.2.3.4.5}{x\ldots\ldots(x+4)}=\frac{5}{4}-\frac{2.3.5}{(x+1)\ldots(x+4)};$$

..

e assim por diante. Para ter a somma total d'estas series, é necessario pôr $x = \infty$; o que dá o limite $\frac{p-1}{p-2}$, do qual ellas se approximam indefinidamente ao passo que x cresce.

Para a serie $\operatorname{sen} a$, $\operatorname{sen}(a+2h)$..... temos o integral (n.º 486)

$$\Sigma \operatorname{sen}(a+hx) = C - \frac{\cos\left(a+hx-\frac{1}{2}h\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h},$$

no qual, mudando x em $x+1$, e determinando a constante C pela condição de ser nulla a somma quando $x=-1$, acharemos o termo sommatorio

$$\frac{\cos\left(a-\frac{1}{2}h\right)-\cos\left(a+hx+\frac{1}{2}h\right)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h},$$

ou

$$\frac{\operatorname{sen}\left(a+\frac{1}{2}hx\right)\operatorname{sen}\left[\frac{1}{2}h\left(x+1\right)\right]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}.$$

Do mesmo modo se achará que o termo sommatorio da serie $\cos a$, $\cos(a+h)$, $\cos(a+2h)$,.... é

$$\frac{\cos\left(a+\frac{1}{2}hx\right)\operatorname{seu}\left[\frac{1}{2}h\left(x+1\right)\right]}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}.$$

492. Fazendo $a = 0$, temos

$$\sum_x^0 \cos hx = \frac{\cos\frac{1}{2}hx \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}hx + \frac{1}{2}h\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} hx \cos\frac{1}{2}h + (1 + \cos hx)\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}\right)h}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h} + \frac{1}{2};$$

e

$$\sum_x^1 \cos hx = \frac{\operatorname{sen}\left(x + \frac{1}{2}\right)h}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}h} - \frac{1}{2}.$$

FIM.

NOTAS

Pag. 5. Theorema de Taylor

Demonstração de Lagrange

Se em qualquer funcção fx de x mudarmos x em $x+h$, o desenvolvimento de $f(x+h)$, ordenado relativamente ás potencias ascendentes de h, terá a fórma

$$(1)\ldots\ldots\ldots f(x+h)=fx+\mathrm{A}h+\mathrm{B}h^2+\mathrm{C}h^3+\ldots,$$

começando por fx, e não contendo termos com expoente negativo, nem fraccionario, de h. Com effeito, se este desenvolvimento podesse conter um termo da fórma $\mathrm{M}h^{-m}$, a hypothese $h=0$ tornaria infinito o desenvolvimento da funcção $f(x+h)$, ao mesmo tempo que esta funcção não desenvolvida se reduziria, naquella hypothese, a fx; o que é contradictorio: e se podesse conter um termo da fórma $\mathrm{M}h^{\frac{n}{m}}$, os m valores d'este radical combinados com os de fx dariam a $f(x+h)$ mais valores do que a fx; o que é absurdo (*). Demais, o desenvolvimento de $f(x+h)$ deve ser

(*) Se no desenvolvimento entrassem radicaes, poderiam estes combinar-se uns com os outros de modo que o numero dos valores distinctos de $f(x+h)$ fosse egual ao dos valores de fx? E se entrassem potencias negativas, poderiam estas combinar-se de fórma que, para $h=0$, déssem resultados indeterminados, taes como $\infty-\infty$? Para evitar a primeira difficuldade, segue Poisson o mesmo processo de demonstração que Lagrange, com a modificação de suppor ao desenvolvimento de $f(x+h)$ a fórma

$$f(x+h)=fx+\mathrm{P}h^a+\mathrm{Q}h^b+\mathrm{S}h^c+\ldots,$$

onde a, b, c, ... designam numeros crescentes indeterminados. Depois, mudando tal que a hypothese $h=0$ o reduza a fx; por conseguinte fx deve ser o termo d'elle independente de h.

Assim, a equação (1) tem logar em geral. Resta só determinar os coefficientes A, B, C, ... que são funcções de x desconhecidas.

Mudemos x em $x+i$ na equação (1): virá

$$f(x+i+h)=f(x+i)+A_1h+B_1h^2+C_1h^3+\ldots.;$$

A_1, B_1, C_1, ... designando as funcções em que se tornam A, B, C, ..., quando nestas se muda x em $x+i$. Ora, se applicarmos a estas funcções a fórmula (1), teremos

$$f(x+i)=fx+Ai+Bi^2+\ldots.,$$

$$A_1=A+A'i+\ldots.,$$

$$A_1=B+B'i+\ldots.,$$

$$C_1=C+C'i+\ldots.,$$

A', B', C'.... sendo funcções, que se derivam respectivamente de A, B, C, .. pelo mesmo modo que A se deriva de fx. Substituindo pois estes valores no desenvolvimento de $f(x+i+h)$, e não attendendo ás potencias de i superiores á primeira, teremos

$$(2)\ldots\ldots\ldots f(x+i+h)=fx+Ai$$
$$+Ah+A'hi$$
$$+Bh^2+B'h^2i$$
$$+Ch^3+\ldots$$

separadamente h em $2h$ e x em $x+h$, e comparando entre si os dous desenvolvimentos que d'ahi resultam a $f(x+2h)$. determina o expoente a. Finalmente, mudando h em $h+i$, depois x em $x+i$, e comparando simultaneamente os coefficientes e expoentes dos dous desenvolvimentos de $f(x+h+i)$, determina b, c, ... e P, Q, R, ... (Vej. *Calc. diff.* de Garnier, nota 1.ª). No entretanto fôra talvez mais seguro dizer, como o sr. *J. Anastacio da Cunha*, em casos similhantes, que os calculos ulteriores, pelos quaes se determinam A, B, C, ... justificam a fórma do desenvolvimento (1).

Mas, se na equação (1) mudarmos h em $h+i$, e não attendermos ás potencias superiores de i, teremos

$$(3)\ldots\ldots\ldots f(x+h+i)=fx+Ah+Bh^2+Ch^3+\ldots$$
$$+Ai+2Bhi+3Ch^2i\ldots\ldots:$$

logo, comparando os segundos membros das equações (2) e (3), que devem ser identicos, acharemos

$$A'=2B,\ B'=3C,\ C'=4D,\ldots$$

ou $$B=\frac{1}{2}A',\ C=\frac{1}{3}B',\ D=\frac{1}{4}C'\ldots$$

Ora, como A é a derivada de fx (n.º 4), designando-a por $f'x$, e as derivadas successivas d'esta por $f''x$, $f'''x,\ldots.$, teremos, em virtude das equações precedentes,

$$B=\frac{1}{2}f''x,\ C=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}f'''x,\ D=\frac{1}{4}.\frac{1}{3}.\frac{1}{2}f^{\text{IV}}x,\ldots.,$$

e assim por diante. Substituindo pois estes valores em (1), resultará finalmente a fórmula de Taylor

$$f(x+h)=fx+hf'x+\frac{1}{2}h^2f''x+\frac{1}{2.3}h^3f'''x+\ldots.$$

Ao n.° 297. Regra de Simpson

Dividamos, por exemplo, o intervallo $b-a$ em um numero par $2n$ de partes eguaes, e supponhamos que os arcos de curva interceptados por tres ordenadas consecutivas tiradas pelos pontos de divisão, a contar da primeira fa, se podem considerar como arcos de parabola. Temos nesse caso, para qualquer d'estes arcos, $y=A+Bx+Cx^2$:

e como a fórmula de interpolação (eq. D do n.° 472) dá, para o primeiro arco comprehendido entre fa e $f(a+2i)$,

$$f(a+x)=fa+\frac{x}{i}[f(a+i)-fa]+\frac{x(x-1)}{2i^2}[f(a+2i)-2f(a+i)+fa],$$

comparando com a precedente, acharemos

$$C=\frac{f(a+2i)-2f(a+i)+fa}{2i^2}\ (*).$$

Do mesmo modo, para o segundo arco de curva comprehendido entre $f(a+2i)$ e $f(a+4i)$, acharemos

$$C_{,}=\frac{f(a+4i)-2f(a+3i)+f(a+2i)}{2i^2};$$

e assim por diante.

Ora a equação $y=A+Bx+Cx^2$,

dá $y'=B+2Cx$;

(*) Citamos a formula (D) sómente para poupar o trabalho de eliminar A, B, C, entre as tres equações correspondentes a $x=a$, $x=a+i$, $x=a+2i$.

d'onde resulta $\qquad f'(a+2i)-f'a=4Ci$:

semelhantemente $\qquad f'(a+4i)-f'(a+2i)=4C_{,}i$,

e assim por diante: logo

$$f'(a+2i)-f'a=\frac{2}{i}[f(a+2i)-2f(a+i)+fa],$$

$$f'(a+4i)-f'(a+2i)=\frac{2}{i}[f(a+4i)-2f(a+3i)+f(a+2i)],$$

$$f'(a+6i)-f'(a+4i)=\frac{2}{i}[f(a+6i)-2f(a+5i)+f(a+4i)],$$

....

$$f'b-f'[a+(2n-2)i]=\frac{2}{i}[fb-2f(a+(2n-1)i)+f[a+(2n-2)i)].$$

Sommando estas equações, e chamando I a somma das ordenadas impares, isto é, da 1.ª, 3.ª, ... até a ultima fb inclusivamente, e P a somma das pares, isto é, da 2.ª, 4.ª, ... até a penultima $f(a+(2n-1)i]$ inclusivamente, teremos

$$f'b-f'a=\frac{2}{i}(2I-fa-fb-2P).$$

Substituindo este valor no segundo membro da equação (2) do n.º 268, teremos

$$Fb-Fa=i\left[I+P-fb+\frac{1}{2}fb-\frac{1}{2}fa-\frac{1}{6}(2I-fa-fb-2P)\right]$$

$$=\frac{2}{3}i\left[I+P+P-\frac{1}{2}(fa+fb)\right],$$

que é a regra de Simpson.

Esta demonstração tem a vantagem de se ver nella a ordem das quantidades que se desprezam.

Ao n.º 347

Para maior clareza, damos aqui á doutrina d'este numero a fórma seguinte:

Quando falta o termo K, é propriedade de taes equações que, se lhes satisfizerem $y = X_1,\ y = X_2, \ldots y = X_i, \ldots,$

tambem lhes satisfará $y = \Sigma X_i$.

Com effeito a somma das equações

$$A X_1 + A_1 X'_1 + \ldots\ldots + A_n X^{(n)}{}_1 = o$$

$$A X_2 + A_1 X'_2 + \ldots\ldots + A_n X^{(n)}{}_2 = o$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

é

$$A \Sigma X_i + A_1 \Sigma X'_i \quad \ldots\ldots + A_n \Sigma X_i{}^{(n)} = o,$$

ou

$$A \Sigma X_i + A_1 \Sigma (X_i)' + \ldots\ldots + A_n \Sigma (X_i)^{(n)} = o.$$

O integral completo $y = \Sigma X_i$ deve conter n constantes arbitrarias. É o que tem logar, por exemplo, sendo X_i da fórma $C_i X_i$ e n o maior dos indices i.

Ao n.º 399

Aqui chama-se dM a differencial completa de M, em ordem a A, B, C,

$$dM = \left(\frac{dM}{dA}\right) dA + \left(\frac{dM}{dB}\right) dB + \left(\frac{dM}{dC}\right) dC = \left[\left(\frac{dM}{dA}\right) - G\mu\right] dA.$$

No n.º 375 chamou-se $\dfrac{du}{dz}$ a derivada de u em ordem a z.

Esta advertencia torna manifesta a identidade das equações correspondentes.

FIM.

ERRATAS

Ao nosso já mencionado collega o sr. Dr. R. V. Rodrigues devemos ainda o obsequio, que egualmente agradecemos, da indicação da maior parte das erratas seguintes, colligida durante a regencia da cadeira respectiva no anno lectivo de 1878 para 1879:

Pag.	*Linh.*	*Erros*	*Emendas*
14	2 sub	$mh^{m-1}z'$	$mz^{m-1}hz'$
31	6	n.° 20	n.° 21
34	1 sub	$A_\alpha\, dx^\alpha\, dy^{i-\alpha}\Big[$	$A_\alpha\, dx^\alpha\, dy^{i-\alpha}\dfrac{d^i z}{dx^\alpha\, dy^{i-\alpha}}\Big[$
61	1 sub	$\dfrac{d[\varphi\,(z,x)+\theta_1\,(z-x)]}{d\,[z,x+\theta_1\,(z-x)]}$	$\dfrac{d\varphi\,[z,\varphi+\theta_1\,(z-x)]}{d\,[x+\theta_1\,(z-x)]}$
64	3 sub	i''	i'
67	3	$u=\ ;\ \varphi y;\ \dfrac{du}{dt}$	$u_0=\ ;\ \varphi y_0;\ \left(\dfrac{du}{dt}\right)_0$
»	6	$1.2\ldots n\quad 1.2\ldots ndt^{n-1}$	$1.2\ldots n\quad dt^{n-1}$
»	10	$ft=\psi t$	$f(\psi t)=\psi t$
70	4 e 5	R_n	R_{n-1}
78	11	78	-78
79	2	$2A_{2n}$	$2nA_{2n}$
80	1 sub	$y''=$	$y''=-$
»	»	$\dfrac{\operatorname{sen}^3 m\,(1+2\cos^2(m+y))}{\operatorname{sen}^3(m+y)}$	$\dfrac{\operatorname{sen}^3 m\,(1+2\cos^2(m+y)}{\operatorname{sen}^5(m+y)}$

Pag.	*Linh.*	*Erros*	*Emendas*
83	9	$\frac{d\,\mathrm{sen}^3 t}{d t^3}$	$\frac{d^2\,\mathrm{sen}^3 t}{d t^2}$
»	10	$(\mathrm{sen}\,3t-\mathrm{sen}\,t)$	$(3\,\mathrm{sen}\,3t-\mathrm{sen}\,t)$
93	5	$x-\varepsilon$	$a-\varepsilon$
94	6 sub	$a+h=a_1$	$a-h=a_1$
96	17	$\alpha=\pm$	$\alpha=\mp$
107	12	$x^3-axy+y^3$	$x^3-3axy+y^3$
111	3 sub	$\sqrt{1+y'^2-\frac{1}{2}y''h-\ldots}$	$\sqrt{1+y'^2}-\frac{1}{2}y''h-\ldots$
113	6	DPP′M′	LPP′M′
115	16	δ	δ_1
117	12	$(X-b)^2$	$(Y-b)^2$
118	2 sub	$a=x+\frac{x'y'}{y''}=x-\frac{y'^2}{x''}$	$a=x-\frac{x'y'}{y''}=x+\frac{y'^2}{x''}$
120	14	as duas primeiras	as duas ultimas
»	19	$-a'+1$	$-b'y'-a'+1$
123	15	na fig. 36	na fig. 44
»	6 sub	o arco é rectificavel	os arcos das suas evolutas são rectificaveis
128	8	$\sqrt{a^2-x^2}$	$\sqrt{x^2-a^2}$
»	20	dy'	$\frac{dy'}{dx'}$
131	5, 7, 9	P′ H′	P′ H
132	26	infinitos a nullos	nullos a finitos
136	10	desde *os eixos, leia-se:*	o eixo dos y e a parallela $y=1$ ao eixo dos x, e do outro a mesma parallela; e neste a origem O é etc.
»	14	origem A	origem O
137	5	$y, y'', \ldots$	$y', y'', \ldots$
138	ult.	$y=0$	$y'=0$
155	1 sub	$dc'^2_1+dc'^2_1+dc''^2_1$	$dc_1^2+dc'^2_1+dc''^2_1$
157	6	$\frac{A}{ds}, \frac{\rho^2}{ds^5}$	$\frac{A}{dz}, \frac{\rho^2}{ds^5}$
»	2 sub	$\pm, \mp,$	$\mp, \pm$

Pag.	*Linh.*	*Erros*	*Emendas*
159	5	$\pm$	$\mp$
167	4	CE	CL
199	7	$5\,x^2\,dx$	$5\,x^3\,dx$
206	11	$x^4 + z^3$	$x^4 + 2x^3$
210	5	$dy\sqrt{-1}$	ou $dy\sqrt{-1}$
215	ult.	$dx\,(a + b^n)^p$	$dx\,(a + bx^n)^p$
219	11	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{15}$
239	5 sub	$\mathrm{H}l - \mathrm{HL}t^2$	$\mathrm{GI} - \mathrm{HL}t^2$
276	ult.	$\overline{\qquad\qquad} + \mathrm{C}$	$\overline{\qquad\qquad}\, e^{-ax} + \mathrm{C}$
282	11	$(2i - 1)\,(2i - 2 \ldots 1 \times 2^{i-1}\,\Gamma(i)$	$(2i - 1)\,(2i - 3) \ldots 1 \times 2^{i-1}\,\Gamma(i)$
288	7	Fig. 36	Fig. 44
290	n.° 297	E	F
294	3 sub	$2a \operatorname{sen} \theta$	$2a \cos \theta$
336	20	n. 326	n.° 327
348	3	$-\frac{y'y''}{x}$	$-\frac{y''}{x}$
351	ult.	$+ i\,(n + 2)$	$+ (i - 1)\,(n + 2)$
381	ult.	dx	dx^{n-1}
407	8	zdz	zdZ
411	1 e 3 sub	$\mathrm{A}\,(z - c)^2$	$\mathrm{A}^2\,(z - c)^2$
419	12	493	393
431	2 sub	n.° 231	n.° 331
432	14	AB	AdB
»	6 e 16	M	$\mathrm{M} - \varphi\, a$
436	3 sub	$x^3 - \frac{y^3}{\mathrm{A}}$	$x^3 - \frac{y^3}{\mathrm{A}^2}$
»	2 »	A proposta	á proposta
438	19 e 23	geometrica	arithmetica
441	6	$\mathrm{Q}dx$	$\int \mathrm{Q}dx$
442	ult.	$ay\,bx$	$ay \log x$
443	8	$\mathrm{T}\frac{dq}{dx}$	$\mathrm{T}\frac{dq}{dy}$

Pag.	Linh.	Erros	Emendas
»	13	$\left(\mathrm{V}+\mathrm{T}\dfrac{dq}{dy}\right)dy$	$\left(\mathrm{V}+\mathrm{T}\dfrac{dq}{dy}\right)dx$
446	9	$dp - qdx$	$adp - qdx$
447	18	$q^2 + pqdx$	$q^2\,dy + pqdx$
451	2,3,6,5	a	b
467	25	que são	que
471	29	$n = 0$	$u = 0$
481	ultima	∂u	du

Fig. 1

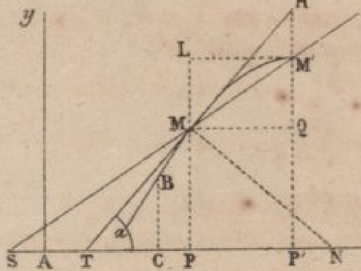


Fig. 2

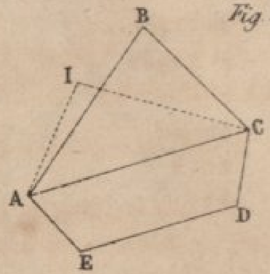


Fig. 3

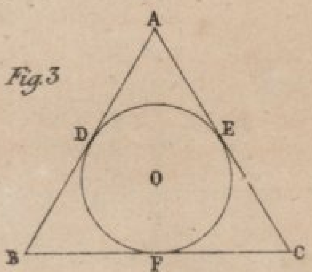


Fig. 4

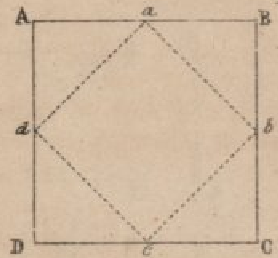


Fig. 5

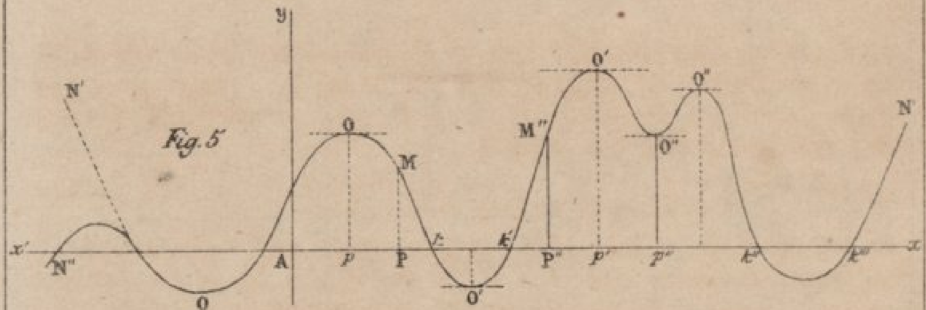


Fig. 6

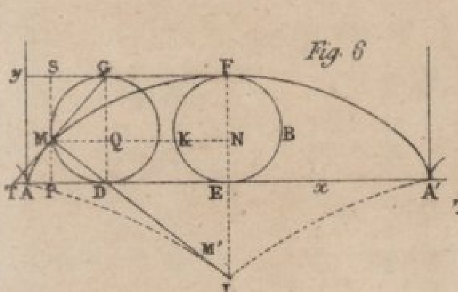


Fig. 7

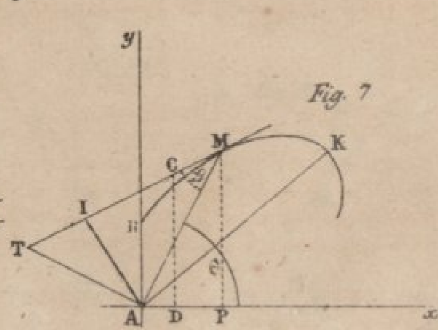


Fig. 8

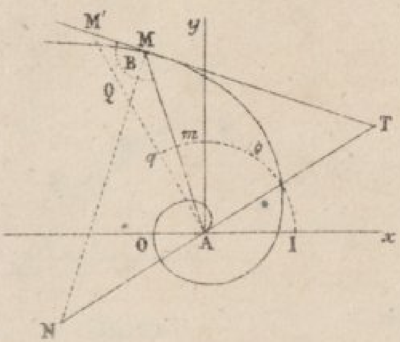


Fig. 9

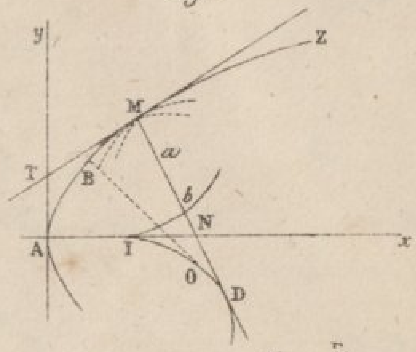


Fig. 10

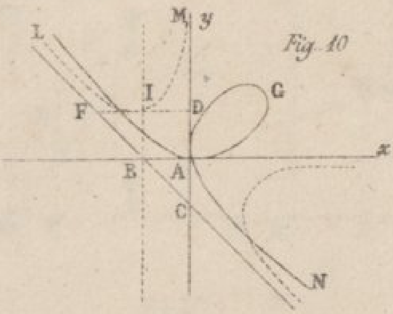


Fig. 11

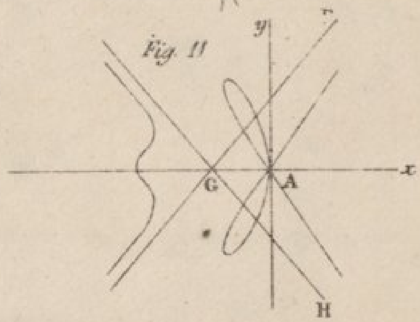


Fig. 12

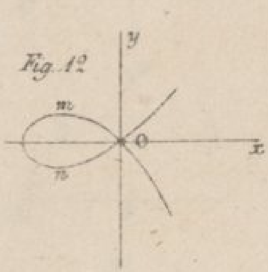


Fig. 13

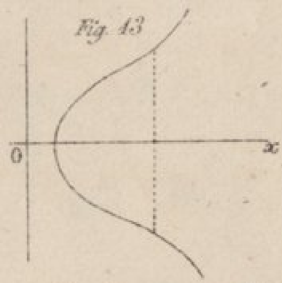


Fig. 14

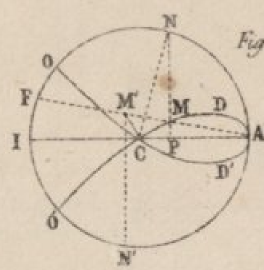


Fig. 15

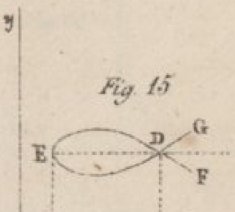


Fig. 16

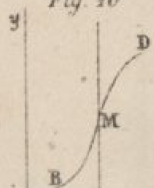


Fig 17

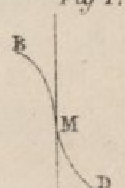


Fig. 18

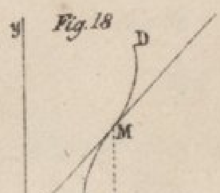


Fig. 19

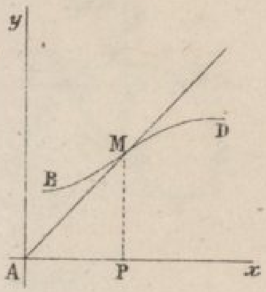


Fig. 20

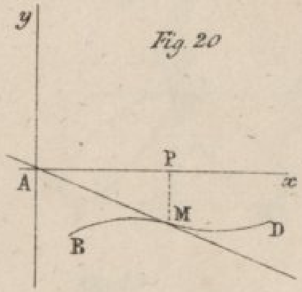


Fig. 21

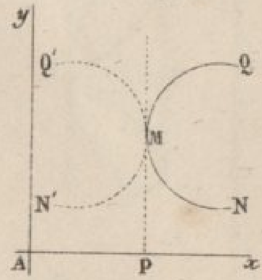


Fig. 22

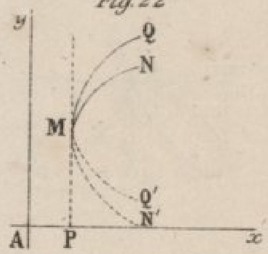


Fig. 23

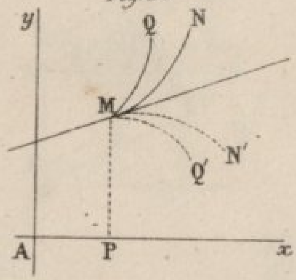


Fig. 24

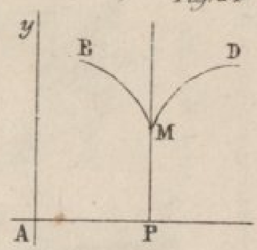


Fig. 25

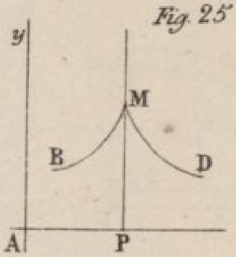


Fig. 26

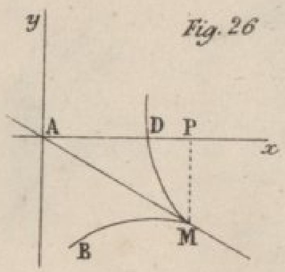


Fig. 27

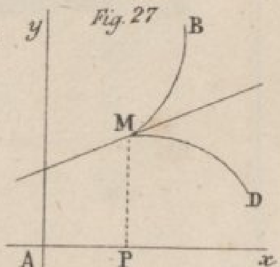


Fig. 28

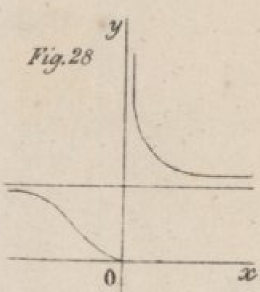


Fig. 29

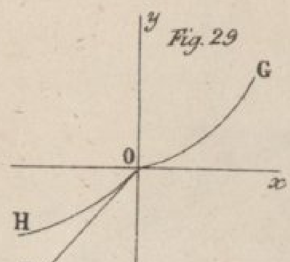


Fig. 30

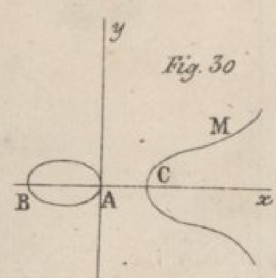


Fig. 31

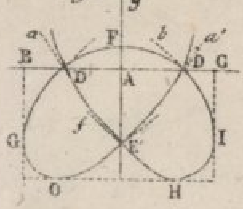


Fig. 32

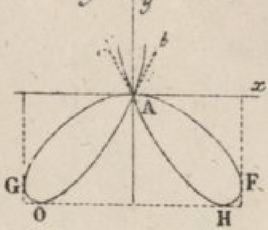


Fig. 33

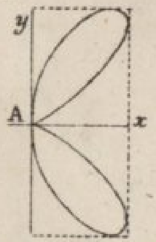


Fig. 34

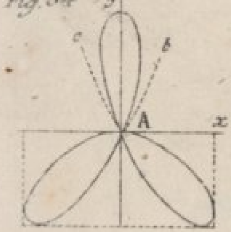


Fig. 35

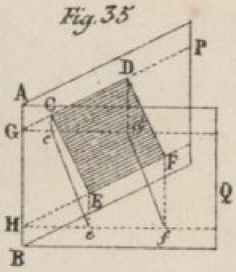


Fig. 36

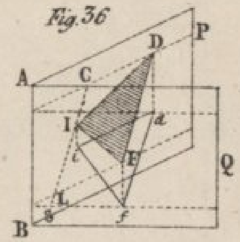


Fig. 37

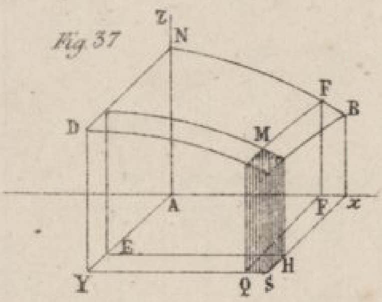


Fig. 38

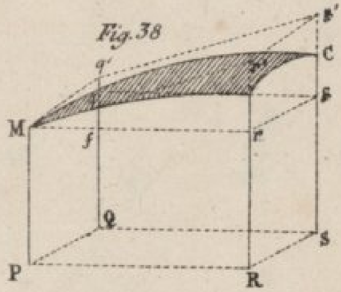


Fig. 39

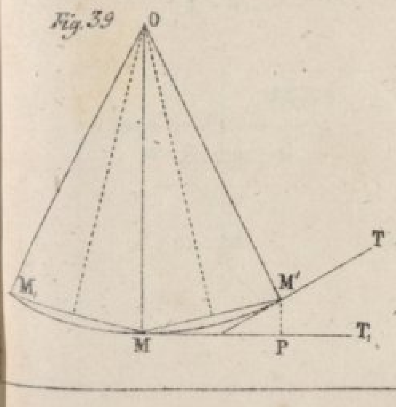
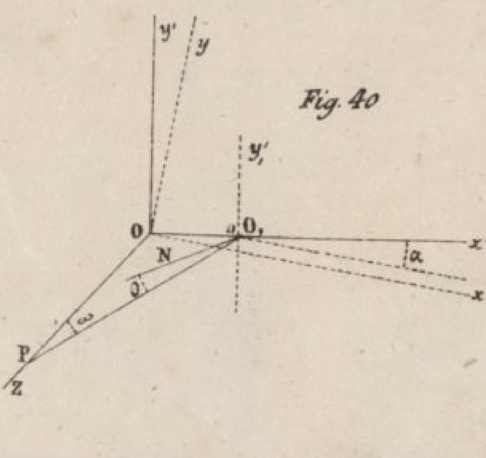


Fig. 40



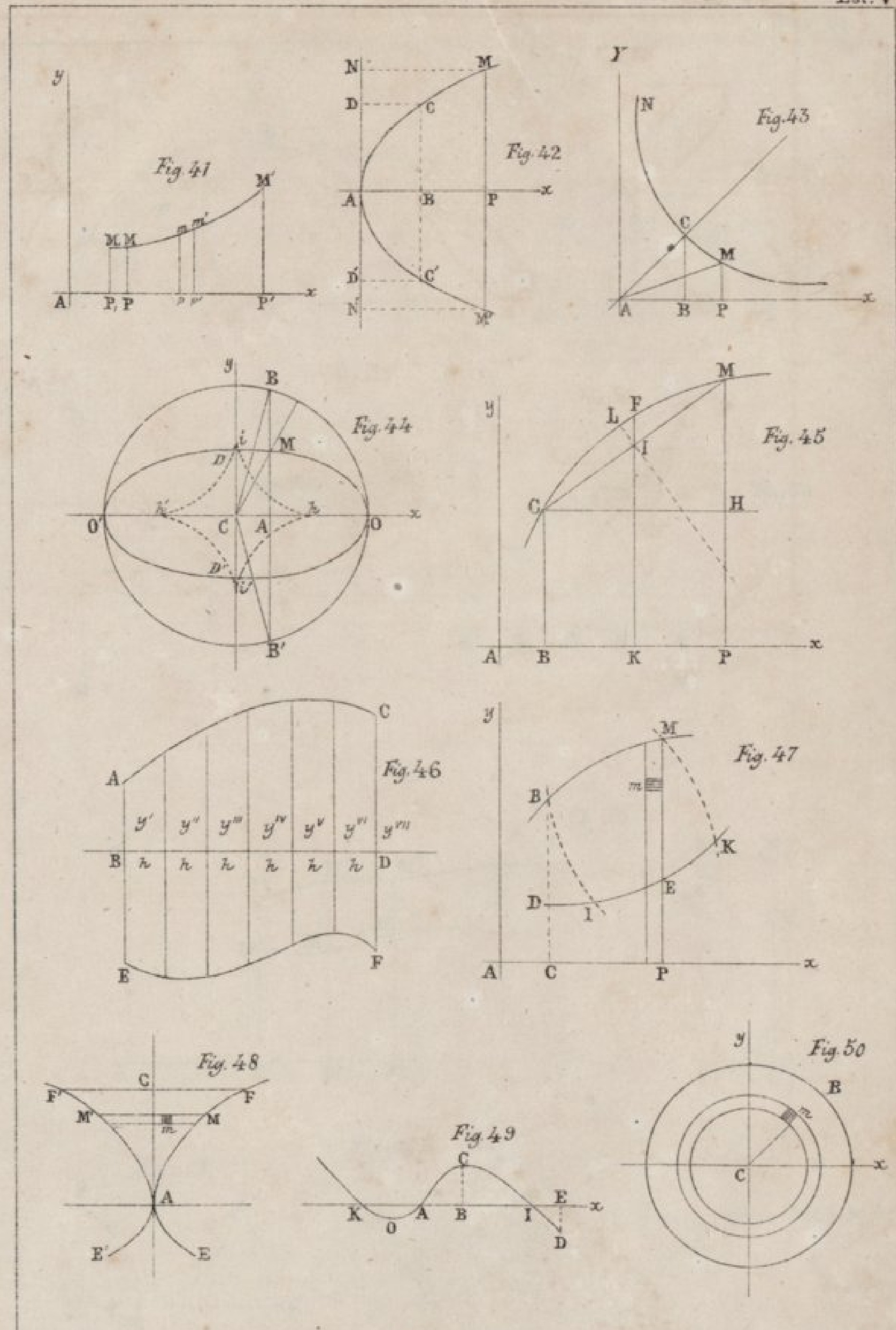


Fig. 41
Fig. 42
Fig. 43
Fig. 44
Fig. 45
Fig. 46
Fig. 47
Fig. 48
Fig. 49
Fig. 50

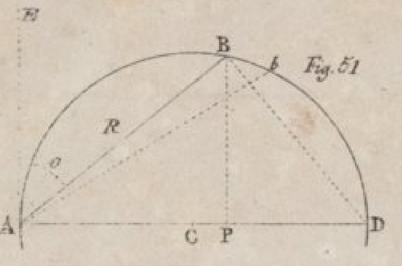


Fig. 51

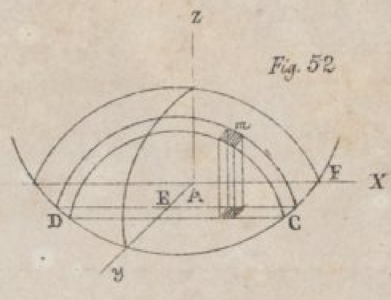


Fig. 52

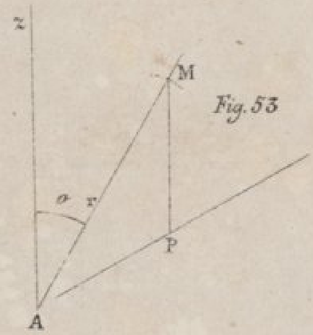


Fig. 53

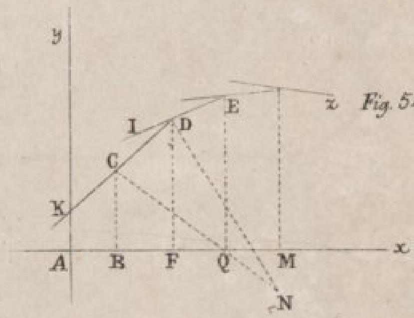


Fig. 54

Fig. 55

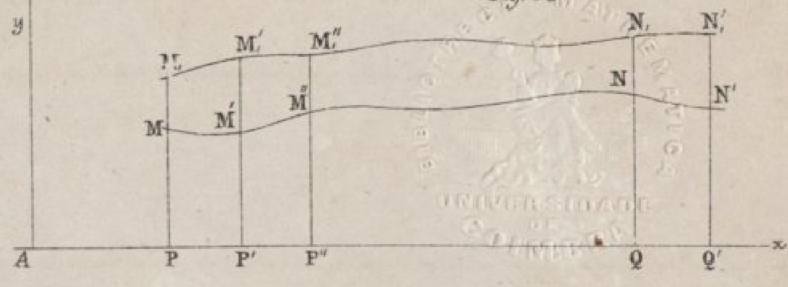


Fig. 57

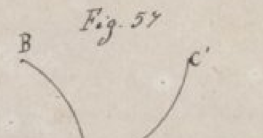


Fig. 56

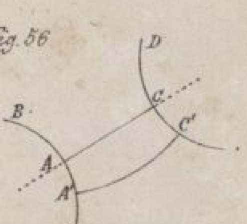


Fig 58

(É a fig. 47 da Estª V)

FRANCOEUR