qui dépendent du mouvement de la Terre dans son orbite, on les déterminera de la manière suivante.

En désignant par A la longitude de la Terre vue du Soleil, par R son rayon vecteur, et par X et Y les deux coordonnées rectangulaires rapportées au centre du Soleil, nous avons trouvé

$$X = R\cos A, \quad Y = R\sin A,$$

d'où, en différentiant, on tire

$$\left.\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -\sin A\,\frac{R\,dA}{dt} + \cos A\,\frac{dR}{dt}, \\ \frac{dY}{dt} &= \cos A\,\frac{R\,dA}{dt} + \sin A\,\frac{dR}{dt}. \end{aligned}\right\} (i)$$

L'équation de l'ellipse, en nommant e l'excentricité de l'orbe terrestre, ω la longitude de son périhélie, et en prenant pour unité la moyenne distance de la Terre au Soleil, donne, n° **2**, livre II,

$$\frac{dR}{dt} = \frac{e\sin(A-\omega)}{1-e^2}\,\frac{R^2\,dA}{dt}.$$

On a d'ailleurs par la nature du mouvement dans l'ellipse

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{R^2};$$

par conséquent

$$\frac{dR}{dt} = \frac{e\sin(A-\omega)}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \frac{R\,dA}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{R}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (i) et qu'on néglige le cube de l'excentricité de l'orbe terrestre, qui est une très-petite quantité, on aura

$$\begin{aligned} X' &= -\left(\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}\right)\sin A + e\sin(A-\omega)\cos A, \\ Y' &= \left(\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}\right)\cos A + e\sin(A-\omega)\sin A. \end{aligned}$$

En réunissant donc les trois équations (6), (10), (9) après avoir développé cette dernière, et substitué pour X′ et Y′ leur valeurs données par les formules précédentes, on aura, pour déterminer les inconnues r, ρ, $\frac{d\rho}{dt}$, les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
r^2 &= R^2 + 2R\cos(A-a).\rho + \frac{\rho^2}{\cos^2 b},\\
\frac{d\rho}{dt} &= k\rho + k'\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right),\\
\frac{2}{r} &= \frac{2}{R} - 1 + \frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2\cdot\frac{da^2}{dt^2} + \left(\frac{d\rho}{dt}\cdot\operatorname{tang} b + \rho\cdot\frac{\frac{db}{dt}}{\cos^2 b}\right)^2\\
&\quad + 2\frac{d\rho}{dt}\cdot\left[e\sin(A-\omega).\cos(A-a) - \frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}\cdot\sin(A-a)\right]\\
&\quad - 2\rho\frac{da}{dt}\cdot\left[e\sin(A-\omega).\sin(A-a) + \frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}\cdot\cos(A-a)\right];
\end{aligned}\right\}\ (A)$$

dans lesquelles on fait, pour abréger,

$$k = -\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{da}{dt}\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{db}{dt}\frac{d^2b}{dt^2} + 2\operatorname{tang} b\frac{db^3}{dt^3} + \sin b\cos b\frac{db}{dt}\frac{da^2}{dt^2}}{\frac{da^2}{dt^2} + \frac{db^2}{dt^2}}\right),$$

$$k' = -\frac{1}{2}\left(\frac{R\sin(A-a)\frac{da}{dt} - R\cos(A-a)\sin b\cos b\frac{db}{dt}}{\frac{da^2}{dt^2} + \frac{db^2}{dt^2}}\right).$$

On satisfera à ces équations par des essais; pour cela, on donnera d'abord à r une valeur arbitraire : on supposera, par exemple, $r = 1$; on déduira des deux premières équations (A) les valeurs correspondantes de ρ et $\frac{d\rho}{dt}$, et en les substituant dans la troisième, elle fera connaître l'erreur de la supposition. Après quelques épreuves, on déterminera de cette manière, avec toute la précision nécessaire, les trois quantités r, ρ et $\frac{d\rho}{dt}$.

Les trois équations (A) conviennent à tous les cas qui peuvent se présenter, et sont celles dont l'usage est le plus sûr dans les applications; cependant, comme leur résolution par approximation oblige à une répétition de calcul assez fastidieuse, nous remarquerons qu'on pourrait simplifier ce travail dans un cas assez étendu, celui où les données du problème permettent de faire usage à la fois des deux équations (7), comme de formules rigoureuses. En effet, en éliminant entre elles l'inconnue σ, on aurait une équation au moyen de laquelle on déterminerait immédiatement $\frac{d\rho}{dt}$ en fonction de ρ, et en substituant cette valeur dans la troisième des équations (A), le problème se trouverait réduit à la résolution de deux équations entre les deux inconnues r et ρ.

Au reste, nous ne faisons qu'indiquer ici cette combinaison, l'emploi des formules (A) devant toujours être préféré comme les plus exactes, parce que de toutes les équations, qu'on peut former par la combinaison des deux équations (7), la formule (10) est, d'après les principes du calcul des probabilités, celle qui participe le moins aux erreurs des observations.

Lorsque les quantités r, ρ, $\frac{d\rho}{dt}$, seront connues, on déterminera, au moyen des équations (1) et (8), les valeurs des six quantités x, y, z, x', y', z', et, par suite, tous les éléments de l'orbite parabolique. Si l'on veut se borner à déterminer la distance périhélie, qui suffit pour procéder immédiatement à la recherche de l'orbite corrigée, en nommant D cette distance, on aura, nº 33, livre II,

$$D = r - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2.$$

La première des équations (A) différentiée, en observant qu'on a, en négligeant le cube de l'excentricité de l'orbe terrestre,

$$\frac{dR}{dt} = e \sin(A - \omega), \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1 - \frac{1}{2}e^2}{R^2},$$

donnera

$$\left.\begin{aligned}\frac{rdr}{dt} &= \frac{\rho}{\cos^2 b}\cdot\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho.\operatorname{tang} b\,\frac{db}{dt}\right) + \frac{d\rho}{dt}\cdot \mathrm{R}\cos(\mathrm{A}-a)\\ &+\rho.\left[e\sin(\mathrm{A}-\omega)\cos(\mathrm{A}-a) - \frac{1-\frac{1}{2}e^2}{\mathrm{R}}\cdot\sin(\mathrm{A}-a)\right]\\ &+\rho.\mathrm{R}\sin(\mathrm{A}-a).\frac{da}{dt} + \mathrm{R}e\sin(\mathrm{A}-\omega).\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{C})$$

En nommant s cette quantité, elle fera connaître, selon qu'elle sera négative ou positive, si la comète s'approche du périhélie, ou si elle l'a déjà dépassé; on aura ensuite

$$\mathrm{D} = r - \frac{1}{2}s^2;$$

la distance angulaire v, de la comète à son périhélie, sera donnée par l'équation de la parabole,

$$\cos^2\frac{1}{2}v = \frac{\mathrm{D}}{r}.$$

On déterminera enfin par la Table des comètes le temps que la comète emploie à décrire l'angle v, et ce temps, ajouté ou retranché de l'époque de l'observation, fera connaître l'instant du passage par le périhélie.

2. Il ne reste donc, pour l'application de la méthode précédente, qu'à montrer comment on formera, d'après les données de l'observation, les valeurs des coefficients différentiels $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$. Voici la manière la plus simple de procéder à cette opération.

Soit a la longitude de la comète à l'instant où l'on fixe l'origine du temps t, on prendra pour cette époque celle de l'observation qui tient à peu près le milieu entre toutes les autres; on pourra au bout d'un temps quelconque t, peu éloigné de cette époque, supposer la longitude a' de la comète représentée par la formule,

$$a' = a + t.\frac{da}{dt} + \frac{t^2}{2}\cdot\frac{d^2a}{dt^2} + \frac{t^3}{2.3}\cdot\frac{d^3a}{dt^3} +,\ldots \quad (11)$$

On formera autant d'équations semblables à la précédente qu'on aura d'observations, et l'on pourra déterminer par leur moyen autant de coefficients $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, etc.

Prenons donc, pour fixer les idées, trois observations quelconques de la comète; désignons par a^o, a, a', les trois longitudes qui leur correspondent, et soient θ et θ' les espaces de temps, exprimés en jours moyens solaires, qui séparent respectivement les deux observations extrêmes de l'observation moyenne; on aura, d'après la formule générale, les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} a - a^o &= \theta.\frac{da}{dt} - \frac{\theta^2}{1.2}.\frac{d^2a}{dt^2}, \\ a' - a &= \theta'.\frac{da}{dt} + \frac{\theta'^2}{1.2}.\frac{d^2a}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Si l'on nomme b^o, b, b', les latitudes de la comète, correspondantes aux trois observations, on aura de même

$$\left.\begin{aligned} b - b^o &= \theta.\frac{db}{dt} - \frac{\theta^2}{1.2}.\frac{d^2b}{dt^2}, \\ b' - b &= \theta'.\frac{db}{dt} + \frac{\theta'^2}{1.2}.\frac{d^2b}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

La résolution de ces équations donnera les valeurs des quatre quantités $\frac{da}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$, qu'il s'agissait de déterminer.

Dans les équations précédentes, les intervalles de temps θ et θ' étant exprimés en jours moyens solaires, pour l'uniformité du calcul, on les multipliera, n° 15, livre III, par le nombre dont le logarithme est 8,2355821, et l'on convertira en même temps les arcs $a - a^o$, $b - b^o$, etc., en parties du rayon pris pour unité.

L'exactitude de la méthode précédente dépend surtout de la précision des valeurs des quantités $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$. Les erreurs des observations doivent influer d'autant plus sur les deux dernières qu'elles seront plus petites; il sera donc bon de n'employer, comme cette méthode permet de le faire, que la plus grande de ces deux quantités s'il existe entre elles une grande disproportion.

On conçoit qu'en multipliant les observations de la comète, on pourrait former autant d'équations semblables aux équations (12) et (13); en combinant ensuite ces équations par la méthode des moindres carrés, on formerait quatre nouvelles équations qui serviraient à déterminer les inconnues $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, $\frac{d^2 a}{dt^2}$, $\frac{d^2 b}{dt^2}$. Mais, indépendamment de la longueur des calculs, on a reconnu qu'on n'était pas toujours, par ce procédé, conduit à des résultats plus certains, parce que les erreurs des observations prenaient alors d'autant plus d'influence sur les résultats qu'elles étaient plus nombreuses. Il faudra donc, dans cette méthode comme dans les autres, se borner à employer trois observations, nombre strictement nécessaire pour résoudre la question, et alors elle en offrira peut-être la solution la plus simple, parce qu'on peut se servir immédiatement des données de l'observation sans leur faire subir aucune préparation. Il suffit à la sûreté des résultats que les observations ne soient pas trop éloignées entre elles pour que la formule générale (11) cesse d'être convergente.

3. Pour faciliter l'usage des formules précédentes, nous allons en faire l'application à la comète de 1824, dont nous avons déjà déterminé l'orbite d'une autre manière dans le n° **23** du livre III.

Je choisis les trois observations suivantes, qui sont séparées par des intervalles de temps assez inégaux; cas où il sera surtout avantageux d'employer la méthode que nous venons d'exposer, parce que celle qui est développée dans le livre cité, suppose toujours les différences de ces intervalles très-petites, et que, sans cette condition, elle ne donnerait plus des résultats suffisamment exacts.

		Longitudes observées.	Latitudes observées.
Août.	$4^j,92748$	$a^0 \ldots\ 252^\circ 32' 29''$	$b^0 \ldots\ 48'\ 7' 29''$ B
	$16,93308$	$a \ldots\ 237.27.12$	$b \ldots\ 55.19.43$
Sept.	$3,91004$	$a' \ldots\ 218.\ 4.34$	$b' \ldots\ 61.\ 4.20.$

Si l'on prend pour époque l'observation du 16 août, on aura

$$a = 237^\circ 27' 12'', \quad b = 55^\circ 19' 43'',$$

et pour les intervalles de temps θ et θ', qui séparent les deux observations extrêmes de l'observation moyenne,

$$\theta' = 12^j{,}00560, \quad \theta' = 17^j{,}97696.$$

Si l'on ajoute aux logarithmes de chacun de ces nombres le logarithme constant 8.2355821, et si l'on réduit les arcs $a^0 - a$, $a - a'$ en parties du rayon, on formera les deux équations suivantes :

$$0.263336 = -0.206522.\frac{da}{dt} + 0.021326.\frac{d^2a}{dt^2},$$

$$-0.338196 = \quad 0.309242.\frac{da}{dt} + 0.047815.\frac{d^2a}{dt^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{da}{dt} = -1.202436, \quad \frac{d^2a}{dt^2} = 0.703698.$$

On aurait de même, relativement à la latitude,

$$-0.125731 = -0.206522.\frac{db}{dt} + 0.021326.\frac{d^2b}{dt^2},$$

$$0.100245 = \quad 0.309242.\frac{db}{dt} + 0.047815.\frac{d^2b}{dt^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{db}{dt} = 0.494828, \quad \frac{d^2b}{dt^2} = -1.103768.$$

On a d'ailleurs, par les Tables du Soleil, pour l'époque de l'observation moyenne,

$$A = 323^\circ 53' 29'' \qquad \log.R \ldots\ldots\ 0.0051558,$$

$$\log.\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R} = 9.9947826 \quad \log.e\sin(A-\omega)\ldots\ 8.0684537.$$

Avec ces valeurs, on a formé, au moyen des formules (A), les trois équations suivantes :

$$r^2 = 1.02402 + 0.12574\,\rho + 3.09012\,\rho^2,$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -0.35074 + 0.20916.\rho + \frac{0.36346}{r^3},$$

$$\frac{1}{r} = 0.48827 + 1.891958\,\rho^2 + 1.545061\,\frac{d\rho^2}{dt^2}$$

$$+ 2.210620\,\rho\,\frac{d\rho}{dt} - 0.987025\,\frac{d\rho}{dt} - 0.05968\,\rho,$$

et leur résolution a donné

$$\rho = 0.406133, \quad \frac{d\rho}{dt} = -0.0836115, \quad r = 1.258881,$$

d'où l'on a conclu, par la formule (C),

$$s = -0{,}652035.$$

On a trouvé ensuite, pour la distance périhélie, et pour l'instant du passage au périhélie,

$$D = 1.046306, \text{ inst. du pass. sept. } 28^j{,}27915.$$

On peut, avec ces éléments approchés, procéder immédiatement à la détermination exacte de l'orbite par les méthodes exposées dans le chapitre II du livre III.

On aurait obtenu, sans doute, pour la distance périhélie et pour l'instant du passage, des résultats plus approchés de leurs véritables valeurs dans l'orbite corrigée, en employant trois observations séparées par des intervalles moins considérables et surtout moins inégaux que celles qui ont servi de base aux calculs précédents, mais nous avons choisi à dessein des circonstances peu favorables, pour qu'on pût mieux juger de la précision de la méthode.

NOTE II (page 95).

Sur les formules qui déterminent les variations des éléments du mouvement elliptique.

On peut obtenir immédiatement les formules (2), par la seule combinaison des formules du mouvement troublé, de la manière suivante :

Reprenons les trois équations (A) du mouvement troublé, n° 29, livre III. En combinant entre elles ces équations, on forme aisément les trois suivantes :

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = x\frac{dR}{dy} - y\frac{dR}{dx},$$

$$\frac{zd^2x - xd^2z}{dt^2} = z\frac{dR}{dx} - x\frac{dR}{dz},$$

$$\frac{yd^2z - zd^2y}{dt^2} = y\frac{dR}{dz} - z\frac{dR}{dy}.$$

Si l'on intègre ces équations, en supposant

$$\left.\begin{aligned} dc &= \left(x\frac{d\mathrm{R}}{dy} - y\frac{d\mathrm{R}}{dx} \right) dt, \\ dc' &= \left(z\frac{d\mathrm{R}}{dx} - x\frac{d\mathrm{R}}{dz} \right) dt, \\ dc'' &= \left(y\frac{d\mathrm{R}}{dz} - z\frac{d\mathrm{R}}{dy} \right) dt, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

on trouvera

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = c, \quad \frac{zdx - xdz}{dt} = c', \quad \frac{ydz - zdy}{dt} = c'', \quad (m)$$

équations identiques avec les trois premières formules (C), n° 30.

En différentiant les trois quantités $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ on aura

$$d.\frac{x}{r} = \frac{y\,(ydx - xdy)}{r^3} + \frac{z\,(zdx - xdz)}{r^3},$$

$$d.\frac{y}{r} = \frac{x\,(xdy - ydx)}{r^3} + \frac{z\,(zdy - ydz)}{r^3},$$

$$d.\frac{z}{r} = \frac{y\,(ydz - zdy)}{r^3} + \frac{x\,(xdz - zdx)}{r^3}.$$

Si l'on substitue pour $\frac{x}{r^3}$, $\frac{y}{r^3}$, $\frac{z}{r^3}$ leurs valeurs, tirées des équations (A), et pour $xdy - ydx$, $zdx - xdz$, et $ydz - zdy$, leurs valeurs données par les équations (m), on trouve

$$d.\frac{x}{r} = \frac{cd^2y - c'd^2z}{dt^2} + c'\,dt\frac{d\mathrm{R}}{dz} - c\,dt\frac{d\mathrm{R}}{dy},$$

$$d.\frac{y}{r} = \frac{c''d^2z - cd^2x}{dt^2} + c\,dt\frac{d\mathrm{R}}{dx} - c''dt\frac{d\mathrm{R}}{dz},$$

$$d.\frac{z}{r} = \frac{c'd^2x - c''d^2y}{dt^2} + c''\,dt\frac{d\mathrm{R}}{dy} - c'\,dt\frac{d\mathrm{R}}{dx}.$$

Si l'on intègre ces équations, en observant que c, c', c'' sont des quantités variables, qu'on désigne par f, f', f'', trois quantités déterminées par les formules suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
df &= \frac{dc\,dy - dc'\,dz}{dt} + c\,dt\,\frac{dR}{dy} - c'\,dt\,\frac{dR}{dz}\\
df' &= \frac{dc''\,dz - dc\,dx}{dt} + c''\,dt\,\frac{dR}{dz} - c\,dt\,\frac{dR}{dx}\\
df'' &= \frac{dc'\,dx - dc''\,dy}{dt} + c'\,dt\,\frac{dR}{dx} - c''\,dt\,\frac{dR}{dy}
\end{aligned}\right\}, \quad (2)$$

on aura

$$\frac{x}{r} = \frac{c\,dy - c'\,dz}{dt} - f, \quad \frac{y}{r} = \frac{c''\,dz - c\,dx}{dt} - f',$$

$$\frac{z}{r} = \frac{c'\,dx - c''\,dy}{dt} - f'';$$

équations identiques avec la quatrième, la cinquième et la sixième des formules (C), numéro cité.

Enfin, si l'on ajoute entre elles les trois équations (A), après avoir multiplié la première par $2\,dx$, la seconde par $2\,dy$, la troisième par $2\,dz$, et qu'on intègre l'équation résultante, en supposant

$$d.\frac{1}{a} = 2\left(dx\frac{dR}{dx} + dy\frac{dR}{dy} + dz\frac{dR}{dz}\right); \quad (3)$$

on aura l'équation ordinaire

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{a} = 0,$$

équation qui coïncide avec la septième des formules (C).

Ces formules satisferont donc encore aux équations du mouvement troublé, pourvu qu'on détermine les arbitraires qu'elles renferment au moyen des équations (1), (2) et (3), qui coïncident d'ailleurs avec les formules (2) du n° **30**, liv. III, lorsqu'on néglige les quantités de l'ordre du carré des forces perturbatrices.

On pourrait enfin, par des transformations convenables, faire prendre à ces expressions la forme que nous leur avons donnée n° **41**, liv. II, et qui est si utile pour le calcul des perturbations planétaires. C'est ce qu'a fait Laplace dans sa *Mécanique céleste*, avant que Lagrange eût produit sa nouvelle théorie générale de la variation *des constantes arbitraires*.

NOTE III (page 119).

Sur la formule qui détermine la variation de l'anomalie moyenne dans le calcul des perturbations des comètes.

Le calcul de réduction qu'exige la formule donnée n° 37, livre III, peut se faire de la manière suivante.

Soit, pour abréger,

$$V = \frac{\delta n}{n} + \frac{2\cos u + e}{1 - e^2}\,\delta f + \frac{2\sin u}{\sqrt{1-e^2}}\,\delta f'.$$

Si dans cette expression on substitue pour δn, δf, $\delta f'$, leurs valeurs données par les formules du n° 36, on verra que, si l'on n'a d'abord égard qu'aux termes indépendants de x', y', dx', dy', ces termes se détruiront mutuellement, et la fonction V se réduira d'elle-même à zéro. En ordonnant ensuite par rapport aux quantités x', y', dx', dy' l'expression résultante, on trouve

$$V = m' \left\{ \begin{array}{l}
\left[-\frac{3ax}{r^3} - \left(\frac{2\cos u + e}{1-e^2}\, y - \frac{2\sin u}{\sqrt{1-e^2}}\, x \right) \frac{y}{r^3} + \left(\frac{2\cos u + e}{1-e^2} \frac{dy}{dt} - \frac{2\sin u}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dx}{dt} \right) \frac{dy}{dt} \right] x' \\
+ \left[-\frac{3ay}{r^3} + \left(\frac{2\cos u + e}{1-e^2}\, y - \frac{2\sin u}{\sqrt{1-e^2}}\, x \right) \frac{x}{r^3} - \left(\frac{2\cos u + e}{1-e^2} \frac{dy}{dt} - \frac{2\sin u}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} \right] y' \\
+ \left[-\frac{3a\,dx}{dt} - \left(\frac{2\cos u + e}{1-e^2} \frac{dy}{dt} - \frac{2\sin u}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dx}{dt} \right) y - \frac{2\sin u}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} \right) \right] \frac{dx'}{dt} \\
+ \left[-\frac{3a\,dy}{dt} + \left(\frac{2\cos u + e}{1-e^2} \frac{dy}{dt} - \frac{2\sin u}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dx}{dt} \right) x + \frac{2\cos u + e}{1-e^2} \left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} \right) \right] \frac{dy'}{dt}
\end{array} \right\},$$

fonction qui, en substituant pour x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ leurs valeurs en fonction de $\sin u$, et $\cos u$, et en observant qu'on a

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = a^2 n \sqrt{1 - e^2},$$

$$\frac{2\cos u + e}{1 - e^2} y - \frac{2 \sin u}{\sqrt{1 - e^2}} x = \frac{3 ae \sin u}{\sqrt{1 - e^2}},$$

$$\frac{2\cos u + e}{1 - e^2} \frac{dy}{dt} - \frac{2 \sin u}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{dx}{dt} = \frac{a^2 n (2 + e \cos u}{r \sqrt{1 - e^2}},$$

se réduit à la suivante :

$$\mathrm{V} = m' \left\{ \begin{array}{l} - \frac{x' \cos u}{r} - \frac{y' \sin u}{r \sqrt{1 - e^2}} \\ - a^2 n \sin u \frac{dx'}{dt} + \frac{a^2 n (\cos u - e)}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{dy'}{dt} \end{array} \right\},$$

ou bien, en remettant pour V sa valeur,

$$\frac{\delta n}{n} + \frac{2 \cos u + e}{1 - e^2} \delta f + \frac{2 \sin u}{\sqrt{1 - e^2}} \delta f$$
$$= \frac{m'}{a^2 n \sqrt{1 - e^2}} \left\{ \frac{y' dx - x' dy + x dy' - y dx'}{dt} \right\}.$$

On peut du reste obtenir très-simplement l'expression de $\delta \zeta$, nº **37**, de la manière suivante :

L'équation

$$\zeta = u - e \sin u \quad (1)$$

donne, en la différentiant par rapport à la caractéristique δ,

$$\delta \zeta = (1 - e \cos u) \delta u - \sin u \delta e.$$

Si l'on nomme x' et y' les coordonnées rectangulaires de la comète, rapportées au plan et au grand axe de son orbite, on a d'ailleurs

$$x' = a \cos u - ae, \quad y' = a \sqrt{1 - e^2} \sin u;$$

d'où il est aisé de conclure

$$\frac{x'\,\delta y' - y'\,\delta x'}{a^2\sqrt{1-e^2}} = (1 - e\cos u)\left(\delta u + \frac{\sin u\,\delta e}{1-e^2}\right),$$

et par suite

$$\delta\zeta = \frac{x'\,\delta y' - y'\,\delta x'}{a^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{(2 - e\cos u - e^2)\sin u\,\delta e}{1-e^2}.$$

Cette expression suppose la ligne des apsides immobile; pour avoir égard à sa variation, désignons par ω la longitude du périhélie comptée d'une droite fixe, que nous prendrons pour l'axe des abscisses des nouvelles coordonnées rectangulaires x et y, on aura

$$x = x'\cos\omega - y'\sin\omega, \quad y = x'\sin\omega + y'\cos\omega;$$

d'où l'on conclut, en différentiant ces valeurs et faisant $\omega = 0$ après la différentiation,

$$x\,\delta y - y\,\delta x = x'\,\delta y' - y'\,\delta x' + r^2\,\delta\omega;$$

on aura ainsi :

$$\delta\zeta = \frac{x\,\delta y - y\,\delta x}{a^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{r^2\,\delta\omega}{a^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{(2 - e\cos u - e^2)\sin u\,\delta e}{1-e^2}.$$

En désignant donc par $n(1 + m'q)$ la valeur du mouvement moyen n au point de l'orbite où l'on commence à compter le temps t, on aura, pour la variation de l'anomalie moyenne due à l'action des forces perturbatrices, à partir de ce point,

$$\delta\zeta = -m'nqt + \frac{x\,\delta y - y\,\delta x}{a^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{\delta\omega(1 - e\cos u)^2}{\sqrt{1-e^2}}$$
$$- \frac{\sin u\,\delta e\,(2 - e^2 - e\cos u)}{1-e^2}$$

expression qui coïncide avec celle du n° 37, livre III, lorsqu'on y substitue pour δx, δy, $\delta\omega$, δe leurs valeurs.

NOTE IV (page 130).

Sur la détermination du dernier retour au périhélie de la comète de Halley, en l'année 1835.

Le retour de la comète de Halley à son périhélie, en 1835, est sans contredit l'un des phénomènes astronomiques les plus curieux que la génération actuelle ait été appelée à constater, et comme la durée de la vie humaine fait que ce phénomène se reproduit difficilement deux fois aux yeux du même observateur, il devient d'autant plus remarquable qu'il est plus rare. La prochaine apparition de la comète aura lieu vers la fin de l'année 1910, ou dans le courant de l'année suivante; ceux qui voudront déterminer d'avance cette époque avec précision, pourront employer la méthode indiquée dans le texte et les éléments qui y sont rapportés. Pour faciliter cette recherche, et perfectionner la théorie d'un astre aussi important, j'ai cru devoir reprendre avec un soin nouveau, depuis la réapparition de la comète, tous les calculs qui m'avaient servi à fixer d'avance l'instant de son retour. Quelques légères corrections dans mes premiers calculs et dans les valeurs des masses planétaires que j'avais employées, m'ont permis d'approcher encore plus de l'exactitude que je ne l'avais fait d'abord, et d'établir, comme on l'a vu dans le texte, un accord presque parfait entre les prévisions de la théorie et les résultats de l'observation.

Toute la partie de mon travail relative aux altérations causées dans le mouvement de la comète par les actions des trois planètes principales, Jupiter, Saturne et Uranus, n'a donné lieu qu'à des rectifications sans importance. On trouvera tous les détails de ces calculs dans un Mémoire qui a remporté le grand prix de mathématiques de l'Académie des Sciences en 1829 et qui est imprimé dans les Mémoires de cette Académie (Mémoires de l'Académie des Sciences, *Savants étrangers*, tome VI, 1835).

La comète s'étant beaucoup approchée de la Terre dans l'année 1759, j'ai cherché à déterminer avec la plus grande précision l'influence de son action sur le retour de cet astre à son périhélie. La plus grande proximité entre la comète et la Terre n'a eu lieu qu'après le passage au périhélie, et jusqu'à cette époque le calcul montre qu'on peut considérer l'action de la planète comme insensible. La comète s'est ensuite approchée de plus en plus de la Terre, depuis le 13 mars, instant du passage, jusqu'au 5 avril, époque où la distance des deux astres était moindre que la *huitième* partie de la distance moyenne de la Terre au Soleil. La comète s'est ensuite rapidement éloignée, et bientôt la Terre a cessé d'exercer sur elle aucune influence appréciable.

D'après cela, j'ai calculé par la méthode du nº 35, livre III, et en faisant varier de demi-degré en demi-degré l'anomalie moyenne, dans l'intervalle de la plus grande proximité, les altérations des divers éléments de l'orbite, résultant de l'action de la Terre, à partir du passage au périhélie de 1759, et depuis zéro degré jusqu'à 35° d'anomalie excentrique. Dans cette évaluation, je n'ai pas tenu compte de l'action de la Terre sur le Soleil, parce que j'ai supposé que cette action se compensait à très-peu près dans les différentes révolutions de la Terre autour de cet astre, pendant l'intervalle qui s'est écoulé entre le passage de 1759 et le passage suivant de la comète au périhélie.

J'ai trouvé ainsi pour la variation du moyen mouvement, résultant de l'action de la Terre,

$$\int dn = 0'',0207668.$$

Les variations des autres éléments sont à peu près insensibles, et les valeurs des trois intégrales $\int t dn$, $\int d\varpi$, $\int d\varepsilon$ ne s'élevant qu'à quelques secondes, au plus, dans l'intervalle que nous considérons, on peut, sans erreur sensible, n'y point avoir égard (*).

Si l'on nomme donc N le moyen mouvement diurne au périhélie

(*) La valeur précédente de $\int dn$ résulte de nouvelles recherches faites postérieurement à l'impression du Mémoire inséré dans la collection de l'Institut; j'ai resserré, comme je l'ai dit, les intervalles d'anomalie excentrique que j'avais fait d'abord varier de degré en degré; il s'était d'ailleurs glissé dans ce Mémoire, relativement à l'action de la Terre, une erreur importante qu'il est nécessaire de signaler, page 942, ligne 18: au lieu des nombres 10,2251, 7,7866, 0,0293192, 1,68, 3,50, 0,829, on doit lire les suivants: 3,2335, 2,4623, 0,0092716, 0,53, 1,11, 0,257; la valeur de $\int dn$ qui résulte de ces corrections, s'accorde alors, suffisamment bien, avec la précédente.

de 1759, T le temps de la révolution anomalistique qui lui correspond, qu'on désigne par δN la variation de N due à l'action de la Terre, et par δT l'altération correspondante du temps périodique, on aura

$$360^\circ = (N + \delta N)(T + \delta T),$$

d'où, en observant que, par hypothèse, on a $360^\circ = NT$, on conclut

$$\frac{\delta T}{T} = -\frac{\delta N}{N}. \quad (1)$$

Si l'on prend pour T l'intervalle 28007 jours, trouvé n° 46, livre III, qu'on suppose, comme dans ce numéro, $N = 46'',13135$, et qu'on fasse $\delta N = 0'',0207668$, on aura

$$\delta T = -12^j,60781;$$

c'est-à-dire que l'action de la Terre aura eu pour effet de diminuer de $12^j,6$, à peu près, l'intervalle entre le passage de la comète à son périhélie en 1759 et le passage suivant, et qu'elle a dû, par conséquent, revenir en ce point de son orbite douze jours et demi plus tôt qu'elle ne l'eût fait sans cette action.

Burckhardt avait trouvé 16 jours pour cette accélération (*Connaissance des Temps* pour 1819), mais cette évaluation était évidemment exagérée; M. Damoiseau, qui l'a calculée depuis moi, par une méthode différente de celle que j'avais suivie, l'a fixée à $12^j,33$ ce qui se rapproche beaucoup du résultat de mon calcul, et en confirme l'exactitude. Au reste, cette détermination est très-délicate, et l'on doit s'attendre à plusieurs jours d'incertitude si l'on n'a pas soin de resserrer autant que possible les intervalles d'anomalie excentrique pendant l'espace où la comète s'approche beaucoup de la Terre.

On évite cet inconvénient de la méthode générale exposée n° 55, livre III, en prenant pour abscisse de la courbe parabolique, qui donne par sa quadrature les variations finies de chacun des éléments de l'orbite, le temps au lieu de l'anomalie excentrique : on peut diviser alors l'espace total du temps pendant lequel l'attraction de la planète peut avoir sur le mouvement de la comète une influence sensible, en intervalles à peu près égaux, et l'on effectue la sommation des éléments différentiels ainsi obtenus par les règles ordinaires du calcul aux différences. Ce procédé, dont Euler avait le premier donné l'exemple, peut être avantageux lorsqu'il s'agit des comètes à courtes périodes, parce que dans la partie supérieure de l'orbite les degrés d'anomalie excentrique répondant à des intervalles de temps beaucoup plus considérables que dans la partie inférieure, il en résulte des variations fort inégales dans les éléments de l'orbite. Le défaut d'espace ne nous permettant pas d'entrer dans de plus longs détails, nous renverrons à un Mémoire de M. Damoiseau (*Connaissance des Temps* pour 1832), où l'on trouvera cette méthode exposée avec des développements suffisants pour la bien faire comprendre, et une application numérique qui en facilitera l'usage.

Pour ne rien laisser à désirer dans les recherches qui avaient pour but de fixer, avec autant de précision que pouvaient le permettre les progrès de la science, l'époque du dernier retour au périhélie de la comète de Halley, nous avons cru devoir déterminer encore les altérations du temps périodique, qui pourraient résulter de l'action des petites planètes Mars, Vénus et Mercure, et nous avons été conduit à reconnaître que ces altérations étaient tout à fait insensibles et qu'on pouvait se dispenser d'y avoir égard.

Voici, en effet, les principaux resultats de ces recherches, dont on peut voir les détails dans un Mémoire inséré à la *Connaissance des Temps* pour 1838.

Altérations du moyen mouvement diurne pendant l'année 1759.

$$\begin{array}{ll} & \int dn \\ ♀ \ldots & +0'',00012694 \\ ♂ \ldots & \underline{+0,00040533} \\ & +0,00053227 \end{array}$$

Si l'on désigne, comme précédemment, par N le moyen mouvement diurne au périhélie de 1759, par T la durée de la révolution qui aurait lieu sans l'action des petites planètes, et par δ T la variation du temps périodique, correspondante à la variation δN du mouvement moyen, en faisant dans l'équation (1)

$$T = 28007^{j}, \quad N = 46'',13135 \quad \text{et} \quad \delta N = 0'',00053227,$$

on trouve

$$\delta T = -0^j,32315,$$

quantité trop peu importante pour qu'on y ait égard et qu'on peut supposer comprise parmi celles qu'on néglige dans les approximations.

L'action des petites planètes Mercure, Vénus et Mars, n'a donc pu exercer qu'une influence insensible sur l'époque du passage de la comète au périhélie en 1835, et n'altère en rien par conséquent l'accord que nous avons établi, à cet égard, entre les résultats de la théorie et de l'observation. On sait que Clairaut, qui tenta le premier d'étendre au mouvement des comètes la solution qu'il avait donnée du problème des trois corps, en fit l'application à la comète de Halley, dont on attendait la réapparition vers l'année 1759, et avant que la comète se fût assez rapprochée du Soleil pour devenir visible aux yeux des observateurs, il annonça son retour au périhélie pour le 18 avril de cette même année. Le passage eut lieu le 12 mars, et la comète devança ainsi de 37 jours à peu près la prédiction du géomètre. Clairaut ayant revu ses calculs avec une attention nouvelle depuis le retour de la comète, corrigea son résultat et fixa définitivement le passage au 4 avril 1759. C'était encore une différence de 23 jours entre les prévisions de la théorie et les résultats de l'observation. Cette différence a été réduite à quelques heures seulement lors du dernier passage de la comète à son périhélie en 1835, comme on l'a vu dans le texte, et ce résultat remarquable peut être regardé certainement comme l'un de ceux qui témoignent le mieux des progrès qu'a faits la théorie dans l'intervalle des 76 années qui se sont écoulées entre les deux dernières apparitions de cet astre, dont les retours nous offrent l'une des vérifications les plus curieuses de la loi de la gravitation universelle.

NOTE V (page 160).

Comète à courte période de $7^{ans},4$.

Le nombre des comètes périodiques s'est augmenté d'un nouvel astre dans ces derniers temps. M. Faye, attaché à l'Observatoire de Paris, aperçut, le 22 novembre 1843, une comète dont il s'empressa de calculer les éléments paraboliques; mais en publiant sa découverte, il annonça que ces éléments lui avaient paru tout à fait insuffisants pour représenter les diverses positions de la comète. Sur cette indication, M. Goldschmidt, de l'Observatoire de Cambridge, essaya de satisfaire aux observations connues, par une orbite elliptique, et il arriva à une ellipse beaucoup moins excentrique que celles des comètes périodiques déjà connues, et dont le grand axe répondait à une révolution dont la durée est de sept années à peu près. L'événement a complétement justifié la prévision du jeune astronome, et la comète a été aperçue de nouveau dans le mois de novembre 1850, et dans les positions à peu près que la théorie lui avait d'avance assignées.

Voici les éléments de son orbite elliptique déduits des observations faites pendant la durée de ses deux dernières apparitions, et calculés en supposant que le grand axe de l'orbite de 1843, répondait à une révolution dont la durée est de 2640,5913 jours environ.

		1843		1851
Passage au périhélie...	oct.	$17^{j},5867$	avril.	$3^{j},5031$
Excentricité............		0,547734		0,554925
Lieu du périhélie.........		50° 19′ 4″		49° 42′ 40″
Long. du nœud ascendant..		209.13.31		209.30.35
Inclinaison..............		11.16.50		11.21.39
Demi-grand axe.........		3,738826.		

Sens du mouvement direct.

NOTE VI (page 170).

Sur les équations différentielles du mouvement de rotation.

On peut opérer la transformation indiquée n° 2 d'une manière peut-être un peu plus simple, par l'analyse suivante.

Ne considérons, pour simplifier, que l'action d'un seul astre L;

si l'on nomme x', y', z' les coordonnées de cet astre, rapportées ainsi que les coordonnées x, y, z de l'élément dm, aux trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité du sphéroïde, et qu'on fasse

$$V' = \frac{L}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}}$$

on aura évidemment

$$\left.\begin{aligned}
S.dm\left(y\frac{dV'}{dz}-z\frac{dV'}{dy}\right) &= S.dm\left(z'\frac{dV'}{dy'}-y'\frac{dV'}{dz'}\right),\\
S.dm\left(z\frac{dV'}{dx}-x\frac{dV'}{dz}\right) &= S.dm\left(x'\frac{dV'}{dz'}-z'\frac{dV'}{dx'}\right),\\
S.dm\left(x\frac{dV'}{dy}-y\frac{dV'}{dx}\right) &= S.dm\left(y'\frac{dV'}{dx'}-x'\frac{dV'}{dy'}\right).
\end{aligned}\right\} (m)$$

Si l'on suppose maintenant (comme dans le n° 2) $V = S.V'dm$, ou, en substituant pour V' sa valeur,

$$V = S.\frac{L\,dm}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}},$$

les trois coordonnées x', y', z' ne dépendant que de la position de l'astre L et le signe intégral S ne s'appliquant qu'à l'élément dm et aux quantités qui varient avec lui, on aura :

$$\left.\begin{aligned}
S.dm\left(z'\frac{dV'}{dy'}-y'\frac{dV'}{dz'}\right) &= z'\frac{dV}{dy'}-y'\frac{dV}{dz'},\\
S.dm\left(x'\frac{dV'}{dz'}-z'\frac{dV'}{dx'}\right) &= x'\frac{dV}{dz'}-z'\frac{dV}{dx'},\\
S.dm\left(y'\frac{dV'}{dx'}-x'\frac{dV'}{dy'}\right) &= y'\frac{dV}{dx'}-x'\frac{dV}{dy'}.
\end{aligned}\right\} (n)$$

Cela posé, pour introduire dans la fonction V les trois angles φ, ψ, θ, transformons les coordonnées x', y', z', qui se rapportent aux axes mobiles des x, y, z, en d'autres coordonnées X, Y, Z relatives à des axes fixes. Pour fixer les idées, prenons pour plan des X, Y le plan de l'écliptique à une époque donnée, et pour axe des Z une ligne perpendiculaire à ce plan, on aura, d'après les formules du nº 31, liv. Ier,

$$\begin{aligned}
x' &= \mathrm{X}(\cos\theta\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi)\\
&\quad+\mathrm{Y}(\cos\theta\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\varphi)-\mathrm{Z}\sin\theta\sin\varphi,\\
y' &= \mathrm{X}(\cos\theta\sin\psi\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi)\\
&\quad+\mathrm{Y}(\cos\theta\cos\psi\cos\varphi+\sin\psi\sin\varphi)-\mathrm{Z}\sin\theta\cos\varphi,\\
z' &= \mathrm{X}\sin\theta\sin\psi+\mathrm{Y}\sin\theta\cos\psi+\mathrm{Z}\cos\theta.
\end{aligned}$$

Si l'on substitue dans l'expression de V à la place des coordonnées x', y', z' leurs valeurs, elle deviendra fonction des angles φ, ψ, θ et des variables X, Y, Z, x, y, z, et comme ces dernières sont indépendantes de ces angles, en prenant la différentielle de V par rapport à φ, ψ, θ, on aura

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}d\varphi+\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}d\psi+\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}d\theta=\frac{d\mathrm{V}}{dx'}d'x'+\frac{d\mathrm{V}}{dy'}d'y'+\frac{d\mathrm{V}}{dz'}d'z',$$

en désignant par $d'x'$, $d'y'$ et $d'z'$ les différentielles des coordonnées x', y', z' prises en ne faisant varier que les trois angles φ, ψ et θ. Si dans cette équation on remplace $d'x'$, $d'y'$, $d'z'$ par leurs valeurs ainsi déterminées, et qu'ensuite on compare de part et d'autre les coefficients de $d\varphi$, de $d\psi$ et de $d\theta$, on trouvera

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}=y'\frac{d\mathrm{V}}{dx'}-x'\frac{d\mathrm{V}}{dy'},$$

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}=\sin\varphi\left(x'\frac{d\mathrm{V}}{dz'}-z'\frac{d\mathrm{V}}{dx'}\right)+\cos\varphi\left(y'\frac{d\mathrm{V}}{dz'}-z'\frac{d\mathrm{V}}{dy'}\right),$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}&=\cos\theta\left(x'\frac{d\mathrm{V}}{dy'}-y'\frac{d\mathrm{V}}{dx'}\right)+\sin\theta\cos\varphi\left(x'\frac{d\mathrm{V}}{dz'}-z'\frac{d\mathrm{V}}{dx'}\right)\\
&\quad+\sin\theta\sin\varphi\left(z'\frac{d\mathrm{V}}{dy'}-y'\frac{d\mathrm{V}}{dz'}\right),
\end{aligned}$$

d'où il est aisé de conclure :

$$\begin{aligned}
y'\frac{d\mathrm{V}}{dx'}-x'\frac{d\mathrm{V}}{dy'}&=\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi},\\
x'\frac{d\mathrm{V}}{dz'}-z'\frac{d\mathrm{V}}{dx'}&=\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}+\cos\theta\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right)+\sin\varphi\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right),\\
z'\frac{d\mathrm{V}}{dy'}-y'\frac{d\mathrm{V}}{dz'}&=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}+\cos\theta\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right)+\cos\varphi\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right).
\end{aligned}$$

Au moyen de ces valeurs, et en vertu des équations (m) et (n), les trois équations (B), n° 1, livre IV, deviennent :

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi} + \cos\theta\,\frac{dV}{d\varphi}\right) - \cos\varphi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)\,pr = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi} + \cos\theta\,\frac{dV}{d\varphi}\right) + \sin\varphi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = \left(\frac{dV}{d\varphi}\right).$$

NOTE VII (page 189).

Sur les formules qui déterminent les variations des constantes arbitraires du mouvement de rotation.

Il ne sera pas inutile, pour la comparaison des méthodes, de montrer comment on peut obtenir par la simple combinaison des équations différentielles du mouvement de rotation, les formules (P) auxquelles nous sommes parvenu par l'application de la théorie de la variation des *constantes arbitraires* (n° 7, livre IV).

En effet, reprenons les équations générales du mouvement de rotation, n° 2, livre IV, en faisant, pour abréger,

$$N = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi} + \cos\theta\,\frac{dV}{d\varphi}\right) - \cos\varphi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),$$

$$N' = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi} + \cos\theta\,\frac{dV}{d\varphi}\right) + \sin\varphi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),$$

$$N'' = \left(\frac{dV}{d\varphi}\right);$$

N, N′, N″ représentant les trois moments des forces qui agissent sur chacune des molécules du sphéroïde, respectivement relatifs aux trois axes principaux qui se croisent à son centre de gravité.

On aura

$$\left.\begin{aligned} A\,dp + (C-B)\,qr\,dt &= N\,dt,\\ B\,dq + (A-C)\,pr\,dt &= N'\,dt,\\ C\,dr + (B-A)\,pq\,dt &= N''\,dt. \end{aligned}\right\}\ (a)$$

Si l'on multiplie la première de ces équations par p, la seconde par q, la troisième par r, qu'on les ajoute et qu'on intègre leur somme, en faisant, pour abréger,

$$dh = 2(p\mathrm{N} + q\mathrm{N}' + r\mathrm{N}'')\,dt, \quad (1)$$

on trouve

$$\mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = h;$$

équation semblable à la formule (1), n° 35, livre I, obtenue en faisant abstraction des forces perturbatrices, mais où la constante h, devenue variable, doit être déterminée par la formule (1), ou en substituant pour N, N′, N″ leurs valeurs précédentes, et pour p, q, r leurs valeurs n° 4, livre IV, par la formule

$$dh = 2\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\,d\varphi + \frac{d\mathrm{V}}{d\psi}\,d\psi + \frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\,d\theta\right), \quad (2)$$

expression identique avec la première des formules (P), n° 7, livre IV.

Si l'on multiplie les mêmes équations (a), la première par $\mathrm{A}p$, la seconde par $\mathrm{B}q$, la troisième par $\mathrm{C}r$, qu'on les ajoute et qu'on intègre leur somme, en faisant ici

$$dk^2 = 2(\mathrm{A}p\mathrm{N} + \mathrm{B}q\mathrm{N}' + \mathrm{C}r\mathrm{N}'')\,dt, \quad (3)$$

on aura

$$\mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{B}^2q^2 + \mathrm{C}^2r^2 = k^2;$$

équation semblable à la formule (2), n° 35, livre I, mais où la constante k, considérée comme variable, est déterminée par l'équation (3), ou en substituant pour N, N′, N″, p, q, r leurs valeurs, par l'équation

$$dk^2 = 2\left\{\begin{array}{l} \left[\dfrac{(\mathrm{A}p\sin\varphi + \mathrm{B}q\cos\varphi)\cos\theta + \mathrm{C}r\sin\theta}{\sin\theta}\right]\dfrac{d\mathrm{V}}{d\varphi} \\ + \left(\dfrac{\mathrm{A}p\sin\varphi + \mathrm{B}q\cos\varphi}{\sin\theta}\right)\dfrac{d\mathrm{V}}{d\psi} \\ + (\mathrm{B}q\sin\varphi - \mathrm{A}p\cos\varphi)\dfrac{d\mathrm{V}}{d\theta} \end{array}\right\}dt.$$

Si l'on néglige les quantités de l'ordre du carré des forces perturbatrices, on pourra, dans les coefficients des trois différences partielles $\frac{dV}{d\varphi}$, $\frac{dV}{d\psi}$, $\frac{dV}{d\theta}$, supposer $r = n$, $p = 0$, $q = 0$; on pourra de plus faire $k = Cn$; la formule précédente devient ainsi

$$dk = dt\left(\frac{dV}{d\varphi}\right); \quad (4)$$

équation identique avec la troisième des formules (P), n° 7, livre IV, en observant qu'on a, aux quantités près que nous négligeons, $\frac{dV}{d\varphi} = \frac{dV}{dg}$ (n° 15, livre IV).

Multiplions maintenant les équations (a), la première par a, la seconde par b, la troisième par c, ajoutons-les entre elles et intégrons leur somme, répétons ensuite la même opération par rapport à a', b', c', et par rapport à a'', b'', c'', en conservant à ces lettres la même signification qu'elles ont dans le n° 28, livre I, on trouvera les trois équations suivantes :

$$\mathrm{A}ap + \mathrm{B}bq + \mathrm{C}cr = l, \quad \mathrm{A}a'p + \mathrm{B}b'q + \mathrm{C}c'r = l',$$
$$\mathrm{A}a''p + \mathrm{B}b''q + \mathrm{C}c''r = l'',$$

dans lesquelles on supposera les quantités l, l', l'' déterminées par les formules suivantes :

$$\frac{dl}{dt} = a\mathrm{N} + b\mathrm{N}' + c\mathrm{N}'',$$
$$\frac{dl'}{dt} = a'\mathrm{N} + b'\mathrm{N}' + c'\mathrm{N}'',$$
$$\frac{dl''}{dt} = a''\mathrm{N} + b''\mathrm{N}' + c''\mathrm{N}''.$$

Les seconds membres de ces équations, d'après la théorie des moments, représentent les moments des forces motrices qui agissent sur chacun des éléments du sphéroïde, décomposées parallèlement aux trois axes fixes qui se croisent à son centre de gravité, quantités que nous avons désignées par M, M′, M″, n° 2, livre IV, on aura donc, en substituant pour ces quantités leurs valeurs, même numéro,

$$\frac{dl}{dt}=\frac{\sin\psi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\varphi}+\cos\theta\,\frac{dV}{d\psi}\right)-\cos\psi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),$$

$$\frac{dl'}{dt}=\frac{\cos\psi}{\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\varphi}+\cos\theta\,\frac{dV}{d\psi}\right)+\sin\psi\left(\frac{dV}{d\theta}\right),$$

$$\frac{dl''}{dt}=-\left(\frac{dV}{d\psi}\right),$$

équations qu'on peut vérifier d'ailleurs en substituant dans les précédentes pour N, N′, N″ leurs valeurs, et pour a, b, c, etc., les quantités qu'elles représentent, n° 28, liv. I[er].

Les trois constantes l, l', l'', dans le mouvement de rotation d'un corps solide libre, représentent la somme des aires décrites dans l'unité de temps, par chacune des molécules du corps, multipliées respectivement par leurs masses, et projetées sur les trois plans des coordonnées rectangulaires relatives à des axes fixes. La constante k représente la somme des mêmes aires, multipliées par les masses respectives de chacun des éléments du corps et projetées sur le plan principal de projection, ou sur le plan pour lequel cette somme est un *maximum;* les constantes l, l', l'' et k sont donc liées entre elles, conformément à la théorie des projections, par l'équation de condition $k^2=l^2+l'^2+l''^2$; cette équation subsiste encore dans le mouvement troublé; en effet, en la différentiant on a

$$kdk=ldl+l'\,dl'+l''\,dl'',$$

équation qui se vérifie en substituant pour l, l', l'', dl, dl', dl'' leurs valeurs précédentes.

Les constantes l, l', l'' déterminent la position du plan principal de projection. En effet, en désignant par γ son inclinaison sur un plan fixe quelconque, et par α la longitude de son nœud comptée sur ce plan d'une origine arbitraire, on a

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{l}{l'},\quad \operatorname{tang}\gamma=\frac{\sqrt{l^2+l'^2}}{l''},$$

d'où, en différentiant, on tire

$$d\alpha=\frac{l'\,dl-ldl'}{l^2+l'^2},\quad d\gamma=\frac{l''\,dk-kdl''}{k\sqrt{l^2+l'^2}};$$

ou bien, en substituant pour dl, dl' et dk leurs valeurs, abstraction faite des quantités de l'ordre du carré des forces perturbatrices,

$$\left.\begin{aligned} d\alpha &= -\frac{dt}{k\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\theta}\right), \\ d\gamma &= \frac{\cos\theta\, dt}{k\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) + \frac{dt}{k\sin\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}\right), \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

équations qui coïncident avec les cinquième et sixième des formules (P), en observant qu'en négligeant le carré des forces perturbatrices, on a, nº 23, livre IV, $k = Cn$, $\theta = \gamma$, et

$$\frac{dV}{d\psi} = \frac{dV}{d\alpha}, \quad \frac{dV}{d\theta} = \frac{dV}{d\gamma}, \quad \frac{dV}{d\varphi} = \frac{dV}{dg}.$$

Il nous reste à déterminer les variations des deux constantes l et g, dont l'une est celle qui accompagne le temps t dans les formules intégrales du mouvement de rotation, et l'autre représente la longitude de l'intersection de l'équateur du corps avec le plan principal de projection, comptée sur ce dernier plan, à partir de son intersection avec le plan fixe de projection.

Pour les déterminer, observons que la constante l étant partout jointe au temps t introduit par les valeurs des trois angles φ, ψ, θ, on a

$$\frac{dV}{dl} = \frac{dV}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dV}{d\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{dV}{d\theta}\frac{d\theta}{dt};$$

en vertu de cette valeur et de celles des différences $\frac{dV}{d\varphi}$, $\frac{dV}{d\theta}$, $\frac{dV}{d\psi}$ données plus haut, les formules (2), (4) et (5) deviennent

$$dh = 2\,dt\left(\frac{dV}{dl}\right), \quad dk = dt\left(\frac{dV}{dg}\right),$$

$$d\alpha = -\frac{dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{d\gamma}\right), \quad d\gamma = \frac{\cos\gamma\, dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{dg}\right) + \frac{dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{d\alpha}\right).$$

Or, par les principes de la théorie de la variation des constantes arbitraires, on a (n° 11, livre IV) :

$$\left(\frac{dV}{dh}\right) dh + \left(\frac{dV}{dk}\right) dk + \left(\frac{dV}{dl}\right) dl + \left(\frac{dV}{dg}\right) dg$$
$$+ \left(\frac{dV}{d\alpha}\right) d\alpha + \left(\frac{dV}{d\gamma}\right) d\gamma = 0.$$

Cette équation doit être identiquement satisfaite lorsqu'on y substitue pour dh, dl, dk, etc., leurs valeurs. En effectuant cette substitution, on trouve

$$\left[dl + 2\,dt\left(\frac{dV}{dh}\right)\right]\frac{dV}{dl}$$
$$+ \left[dg + dt\left(\frac{dV}{dk}\right) + \frac{\cos\gamma\, dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{d\gamma}\right)\right]\frac{dV}{dg} = 0,$$

équation qui ne peut subsister indépendamment des valeurs de $\frac{dV}{dl}$ et $\frac{dV}{dg}$, à moins qu'on n'ait séparément

$$dl = -2\,dt\left(\frac{dV}{dh}\right), \quad dg = -dt\left(\frac{dV}{dk}\right) - \frac{\cos\gamma\, dt}{k\sin\gamma}\left(\frac{dV}{d\gamma}\right).$$

En joignant ces formules à celles qui déterminent les variations des quatre constantes h, k, α, γ, on retrouve identiquement les six formules (P) (n° 7, livre IV) que nous avons déduites des formules générales de la théorie *de la variation des constantes arbitraires*.

NOTE VIII (page 214).

De la permanence des pôles à la surface de la Terre et de l'invariabilité de son mouvement de rotation.

Laplace, dans le VI^e livre de la *Mécanique céleste* et dans l'*Exposition du Système du Monde*, se contente de dire que toutes les recherches qu'il a faites sur les déplacements des pôles à la surface de la Terre et sur les variations de sa vitesse de rotation, lui ont prouvé qu'ils étaient insensibles; mais cette assertion ne suffisait pas dans une question d'un si grand intérêt, et une démonstration algébrique était nécessaire pour mettre hors de doute un point si important du système du monde. M. Poisson entreprit le premier de traiter cette question par une analyse rigoureuse, et celle qu'il a donnée dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1809, entièrement différente de celle que nous avons développée dans le n° 16 du livre IV, mérite d'être rappelée ici, parce qu'elle a l'avantage d'être indépendante de la théorie *de la variation des constantes arbitraires* et de montrer directement, par la forme même des valeurs finies des deux quantités p et q, d'où dépendent les oscillations de l'axe de rotation de la Terre autour de son troisième axe principal, que ces oscillations demeureront toujours insensibles.

Reprenons les trois équations du mouvement de rotation sous la forme que nous leur avons donnée n° 2, livre IV,

$$\mathrm{A}\frac{dp}{dt}+(\mathrm{C}-\mathrm{B})qr=\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}+\cos\theta\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right)-\cos\varphi\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right),$$

$$\mathrm{B}\frac{dq}{dt}+(\mathrm{A}-\mathrm{C})pr=\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}+\cos\theta\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right)+\sin\varphi\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right),$$

$$\mathrm{C}\frac{dr}{dt}+(\mathrm{B}-\mathrm{A})pq=\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right).$$

Faisons, pour abréger,

$$\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\psi}\right)+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{d\mathrm{V}}{d\varphi}\right)=\mathrm{P},\quad \left(\frac{d\mathrm{V}}{d\theta}\right)=\mathrm{P}',$$

et considérons les deux premières des formules précédentes, qui deviendront ainsi :

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{A}\,dp+(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,qr\,dt&=(\mathrm{P}\sin\varphi-\mathrm{P}'\cos\varphi)\,dt,\\ \mathrm{B}\,dq+(\mathrm{A}-\mathrm{C})\,pr\,dt&=(\mathrm{P}\cos\varphi+\mathrm{P}'\sin\varphi)\,dt.\end{aligned}\right\}\ (a)$$

Nous supposerons que l'axe autour duquel la Terre tournerait uniformément sans l'action de la Lune et du Soleil, soit le plus petit des trois axes principaux qui se croisent à son centre de gravité, c'est-à-dire l'axe auquel se rapporte le plus grand moment d'inertie C, comme cela a effectivement lieu dans la nature. Les oscillations de l'axe instantané de rotation autour de l'axe dont il s'agit, dépendront des valeurs de p et q, valeurs que l'on obtiendra en intégrant les deux équations (a).

Pour cela, on développera la fonction V en une série de *sinus* ou de *cosinus* de l'angle φ et de ses multiples. De ce développement il sera facile de conclure ceux des fonctions P et P'; en substituant ensuite les expressions résultantes dans les seconds membres des équations (a), ces seconds membres se trouveront développés dans des séries semblables. Si dans une première approximation on néglige les termes dépendants du carré des forces perturbatrices, il suffira de faire dans les équations (a), $r = n$, $\varphi = nt + c$ (n° 13, livre IV). Les seconds membres de ces équations deviendront ainsi des séries de *sinus* et de *cosinus* de l'angle $nt + c$, et chacun des termes de ces séries produira dans les valeurs de p et de q un terme correspondant que l'on obtiendra de la manière suivante.

Soit $H \sin(ft + g)$ un terme quelconque du développement de

$$P \sin(nt + c) - P' \cos(nt + c).$$

Représentons par $H' \cos(ft + g)$ le terme correspondant du développement de

$$P \cos(nt + c) + P' \sin(nt + c),$$

ft désignant la somme des différents multiples de l'angle nt et des moyens mouvements de la Lune et du Soleil, introduits dans la fonction V par la substitution de $nt + c$ à la place de l'angle φ, et par le déplacement des deux astres qui troublent le mouvement de rotation de la Terre. H, H', f et g sont des fonctions des éléments de leurs orbites, et des angles θ, ψ et c, que l'on peut, par conséquent, traiter comme des constantes dans cette première approximation.

En ne considérant donc que ces termes, et faisant $r = n$ dans les formules (a), nous aurons

$$A\,dp + (C - B)\,qn\,dt = H \sin(ft + g)\,dt,$$
$$B\,dq + (A - C)\,pn\,dt = H' \cos(ft + g)\,dt,$$

et l'on satisfera à ces équations en faisant

$$p = h \cos(ft + g), \quad q = h' \sin(ft + g),$$

ce qui donne, pour déterminer les deux constantes h et h',

$$-\mathrm{A}fh + (\mathrm{C}-\mathrm{B})\,nh' = \mathrm{H},$$

$$\mathrm{B}fh' + (\mathrm{A}-\mathrm{C})\,nh = \mathrm{H}',$$

d'où l'on tire

$$h = \frac{-\mathrm{BH}f + (\mathrm{C}-\mathrm{B})\,\mathrm{H}'\,n}{\mathrm{AB}f^2 - (\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,n^2},$$

$$h' = \frac{\mathrm{AH}'f - (\mathrm{C}-\mathrm{A})\,\mathrm{H}n}{\mathrm{AB}f^2 - (\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{B})\,n^2}.$$

Il suit de là que les valeurs de p et de q resteront toujours du même ordre que les quantités H et H', et par conséquent insensibles, à moins qu'on ne suppose très-petits les dénominateurs des valeurs de h et h', ce qui pourrait donner à ces quantités une valeur considérable. Mais pour que cette condition fût remplie, il faudrait supposer que la fonction perturbatrice V renferme des termes pour lesquels la valeur de f diffère peu de $n\sqrt{\frac{(\mathrm{C}-\mathrm{A})(\mathrm{C}-\mathrm{B})}{\mathrm{AB}}}$; or nous sommes certain que ce cas n'a pas lieu dans la nature; en effet, les inégalités de p et q, qui correspondent à cette valeur de f, n'auraient pas une très-longue période, et d'après les données que l'on a sur les valeurs des trois moments d'inertie A, B, C, on s'est assuré que cette période ne serait pas de deux années, mais les observations démontrent, comme nous l'avons dit (n° 13, livre IV), que pendant cet intervalle de temps les pôles terrestres n'éprouvent, à la surface du globe, aucun déplacement appréciable.

Une analyse très-simple suffit donc pour démontrer que les quantités p et q ne renferment aucune inégalité que la suite des siècles puisse rendre sensible, lorsqu'on n'a égard qu'à la première puissance des forces perturbatrices dans le calcul de ces valeurs. Il est facile d'étendre la même conclusion aux termes dépendants du carré de ces forces et en général à toutes les approximations successives. En effet, désignons par $p + \delta p$ et $q + \delta q$, ce que deviennent les valeurs de p et q lorsqu'on a égard, dans les expressions de ces valeurs, aux termes dépendants du carré des forces perturbatrices; en substituant $p + \delta p$ et $q + \delta q$ à la place de p et q dans les équations (a), on trouve

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{A}d.\delta p + (\mathrm{C} - \mathrm{B})\, r\delta q\, dt = - \mathrm{A}dp - (\mathrm{C} - \mathrm{B})\, rq\, dt \\ &\qquad + (\mathrm{P}\sin\varphi - \mathrm{P}'\cos\varphi)\, dt, \\ &\mathrm{B}d.\delta q + (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, r\delta p dt = - \mathrm{B}dq - (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, rp\, dt \\ &\qquad + (\mathrm{P}\cos\varphi + \mathrm{P}'\sin\varphi)\, dt. \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

Comme on doit négliger ici les termes du troisième ordre, on pourra faire $r = n$ dans les termes qui sont multipliés par δp et δq dans les premiers membres de ces équations; il suffira, dans les termes des seconds membres, qui sont déjà du premier ordre, de substituer pour p, q, r, φ, θ et ψ leurs valeurs données par les approximations précédentes, les termes du premier ordre disparaîtront alors d'eux-mêmes, et les termes restants ne contiendront plus que des quantités toutes connues. Les deux équations (b) prendront alors cette forme,

$$\mathrm{A}d.\delta p + (\mathrm{C} - \mathrm{B})\, n\delta q\, dt = \mathrm{M}\, dt,$$

$$\mathrm{B}d.\delta q + (\mathrm{A} - \mathrm{C})\, n\delta p\, dt = \mathrm{M}'\, dt,$$

M et M étant des fonctions connues qui peuvent se développer en séries de *sinus* et de *cosinus* des multiples de l'angle nt et des moyens mouvements du Soleil et de la Lune, il est évident que l'on déduira de ces équations pour δp et δq des expressions de même forme que celles que nous avons trouvées précédemment pour p et q, et que le même résultat aurait lieu pour toutes les approximations suivantes. Les valeurs des deux quantités p et q n'acquièrent donc, par l'intégration, aucun diviseur qui puisse les rendre sensibles, et elles resteront toujours du même ordre que les termes qui leur correspondent dans l'expression des forces perturbatrices, quelque loin que l'on pousse les approximations.

Ce résultat est conforme à celui que nous avions trouvé par une analyse différente, n° 16, livre IV, et l'on en conclut, de nouveau, que l'axe instantané de rotation coïncidera toujours, à très-peu près, avec le plus petit des axes principaux de la Terre, et que les pôles et l'équateur répondront dans tous les temps aux mêmes points de sa surface.

Quant à la vitesse de rotation, M. Poisson démontre par une analyse analogue à celle du n° 18, livre IV, que l'action des forces perturbatrices n'introduit dans son expression aucune inégalité qui puisse devenir sensible par la suite des siècles, même lorsqu'on a égard aux quantités de l'ordre du carré de ces forces.

NOTE IX (page 346).

Démonstration générale d'un théorème énoncé dans le n° 3, liv. V.

L'importante proposition qui fait l'objet de ce paragraphe, peut se vérifier analytiquement de la manière suivante.

Plaçons l'origine des coordonnées au point attiré, désignons par a, b, c les coordonnées de ce point, par x, y, z celles de l'élément dm rapportées au centre de gravité du sphéroïde, et par x', y', z' les coordonnées du même élément relatives à la nouvelle origine, on aura en coordonnées polaires

$$x' = r\cos\theta, \quad y' = r\sin\theta\cos\omega, \quad z' = r\sin\theta\sin\omega,$$

et, par suite,

$$x = a + r\cos\theta, \quad y = b + r\sin\theta\cos\omega, \quad z = c + r\sin\theta\sin\omega,$$

En nommant ρ la densité de l'élément dm, on aura d'ailleurs, n° 7, livre V,

$$\left.\begin{aligned} A &= \iiint \rho\, dr\, d\theta\, d\omega \sin\theta\cos\theta, \\ B &= \iiint \rho\, dr\, d\theta\, d\omega \cos\omega\sin^2\theta, \\ C &= \iiint \rho\, dr\, d\theta\, d\omega \sin\omega\sin^2\theta. \end{aligned}\right\} (a)$$

Ces intégrales, pour être étendues à la masse entière du sphéroïde, doivent être prises depuis $r = 0$ jusqu'à la valeur de r relative à la surface du corps, valeur que nous nommerons R, et par rapport aux angles θ et ϖ, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$ et depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 2\pi$.

Si maintenant on prend respectivement les différences partielles des trois quantités A, B, C par rapport aux trois coordonnées a, b, c du point attiré, en observant d'avoir égard à la variation de la limite R qui contient ces trois quantités (*), qu'on remarque que ρ étant supposé exprimé en fonction des trois variables x, y, z, par la substitution des valeurs de ces trois quantités, ρ deviendra fonction de $a + x'$, $b + y'$, $c + z'$, ce qui donne

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{d\rho}{dx'}, \quad \frac{d\rho}{db} = \frac{d\rho}{dy'}, \quad \frac{d\rho}{dc} = \frac{d\rho}{dz'}.$$

En faisant la somme des résultats, et en nommant ρ_2 la valeur de ρ à la surface, on trouvera

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dA}{da} - \frac{dB}{db} - \frac{dC}{dc} = & \iiint \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varpi\, dr}{r}\left(x'\frac{d\rho}{dx'} + y'\frac{d\rho}{dy'} + z'\frac{d\rho}{dz'}\right) \\ & + \iiint \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\varpi}{R}\rho_2\left(x'\frac{dR}{da} + y'\frac{dR}{db} + z'\frac{dR}{dc}\right). \end{aligned}\right\} \text{(A)}$$

Si le sphéroïde était homogène, la densité ρ serait constante et égale à ρ_2, le second membre de l'équation précédente se réduirait, dans ce cas, à son dernier terme, ce qu'il est aisé de vérifier en différentiant par rapport à a, b, c les formules (a) intégrées par rapport à la variable r, intégration qui s'effectue alors immédiatement comme on l'a vu n° **7**, livre V.

Cela posé, le sphéroïde étant supposé composé de couches concentriques dont la densité varie d'une couche à une autre, ρ est nécessairement une fonction de r, et l'on a évidemment

$$x'\frac{d\rho}{dx'} + y'\frac{d\rho}{dy'} + z'\frac{d\rho}{dz'} = r\frac{d\rho}{dr}.$$

Soit

$$F(x, y, z) = 0,$$

l'équation de la surface; en substituant pour x, y, z leurs valeurs,

(*) *Voir* la note III du tome I.

cette équation devient

$$F(a+R\cos\theta,\quad b+R\sin\theta\cos\omega,\quad c+R\sin\theta\sin\omega)=0.$$

En prenant, dans cette équation, les trois différences partielles de R, par rapport aux trois quantités a, b, c, on en conclut aisément

$$x'\frac{dR}{da}+y'\frac{dR}{db}+z'\frac{dR}{dc}=-R.$$

On a d'ailleurs, par hypothèse,

$$A=-\frac{dV}{da},\quad B=-\frac{dV}{db},\quad C=-\frac{dV}{dc},$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=-\frac{dA}{da}-\frac{dB}{db}-\frac{dC}{dc}.$$

En substituant ces valeurs dans la formule (A), elle devient

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=\int\!\!\int\!\!\int\sin\theta\,d\theta\,d\omega\left(dr\frac{d\rho}{dr}\right)-\int\!\!\int\!\!\int\sin\theta\,d\theta\,d\omega\,\rho_2.$$

Mais si l'on désigne par ρ_1 la densité de la couche dont fait partie le corps attiré, ρ_2 désignant toujours la densité de la surface, il il est évident qu'on aura

$$\int\!\!\int\!\!\int\sin\theta\,d\theta\,d\omega\left(dr\frac{d\rho}{dr}\right)=\int\!\!\int\!\!\int\sin\theta\,d\theta\,d\omega\,\rho_2-\int\!\!\int\!\!\int\sin\theta\,d\theta\,d\omega\,\rho_1.$$

On a d'ailleurs

$$\int\!\!\int\!\!\int\sin\theta\,d\theta\,d\omega=4\pi,$$

on aura donc, en définitive,

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=-4\pi\rho_1.$$

Ce qui vérifie d'une manière générale l'équation (2), n° 3, liv. V.

NOTE X (page 435).

Rectification d'un passage de la Mécanique analytique *relatif à la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène douée d'un mouvement de rotation.*

Lagrange, dans la *Mécanique analytique* (Ire Partie, section VII, n° 26) a donné à l'équation de l'équilibre d'une masse fluide homogène tournant autour d'un axe fixe, cette forme :

$$\Sigma - \frac{f(y^2 + z^2)}{2A} = \text{const.},$$

où $2A$ est l'axe de rotation que l'on prend pour celui des coordonnées x, f la force centrifuge à la distance A de l'axe, Σ l'intégrale de toutes les forces qui agissent sur le fluide multipliées par l'élément de leur direction, et provenant de l'attraction mutuelle de ses parties.

« Dans le cas, dit Lagrange, où le sphéroïde est homogène et sans noyau intérieur d'une densité différente, on a trouvé que les attractions sur un point quelconque de la surface, suivant les trois axes coordonnés x, y, z, sont représentées exactement par les formules

$$mLx, \quad mMy, \quad mLz,$$

où m est la masse du sphéroïde, L, M, N des fonctions des trois demi-axes A, B, C données par des intégrales définies; d'où l'on déduit pour Σ cette expression rigoureuse :

$$\Sigma = \frac{m}{2}(Lx^2 + My^2 + Nz^2).$$

Ainsi l'équation de l'équilibre $\Sigma - \dfrac{f(y^2+z^2)}{2A} = \text{const.}$ étant de la même forme que l'équation du sphéroïde, $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} + \dfrac{z^2}{C^2} = 1$, on peut, à cause de la constante arbitraire, les rendre identiques par ces deux conditions :

$$\frac{mM - f}{mL} = \frac{A^2}{B^2}, \quad \frac{mN - f}{mL} = \frac{A^2}{C^2}, \quad (q)$$

lesquelles donnent $B = C$ parce que les quantités M et N, étant des fonctions semblables de B et C et de C et B, les deux équations (q) se réduisent ainsi à une seule qui sert à déterminer le rapport de A à B. »

Cette conclusion n'est pas exacte; en effet, les deux équations (q) donnent la suivante :

$$MB^2 - NC^2 = \frac{f}{m}(B^2 - C^2),$$

équation qui peut être satisfaite de deux manières, comme nous l'avons fait voir dans le texte, soit en supposant $B = C$, ce qui est le cas de l'ellipsoïde de révolution, le seul que Lagrange ait considéré, soit en supposant aux intégrales définies représentées par M et N des valeurs particulières qui déterminent les trois axes du second ellipsoïde qui satisfait à l'équilibre.

L'équation de l'équilibre d'une masse fluide homogène, douée d'un mouvement de rotation, peut donc être satisfaite de deux manières, soit par un ellipsoïde de révolution comme l'avait démontré Maclaurin, qui a le premier résolu la question, soit par un ellipsoïde à trois axes inégaux, mais dont les rapports sont fixés d'avance par l'état de la question, ce que les géomètres, à ce qu'il paraît, n'avaient point remarqué avant que M. Jacobi en eût fait l'observation.

FIN DU DEUXIÈME VOLUME

PONTÉCOULANT

SYSTÈME DU MONDE

2