limitado contido nesta mesma soma (e por conseguinte na soma de todos os domínios dados) e a que pertençam os elementos **a** e **a**$'$. A soma dos domínios dados é, pois, elementar.

Para que uma soma de domínios abertos elementares com interiores distintos seja elementar é necessário e suficiente que dois quaisquer deles se unam por uma sucessão dum número finito dos mesmos domínios de tal modo que a estrema da soma de dois domínios quaisquer consecutivos não seja a soma das suas estremas [*prop. prec. e p.* 517, *l.* 33].

Em particular, para que uma soma dum número finito ou duma infinidade numerável de domínios abertos elementares seja também elementar é necessário e suficiente que os mesmos domínios se possam dispor por uma certa ordem de tal maneira que, repetindo alguns se fôr necessário, a estrema da soma de dois domínios consecutivos quaisquer não seja a soma das suas estremas.

No caso contrário a soma é um conjunto aberto de segunda ou de terceira espécie; êste conjunto é um domínio ou não conforme as parcelas são ligadas ou não.

É impossível obter duas decomposições distintas dum conjunto aberto de segunda ou de terceira espécie em domínios abertos elementares não-penetrantes dois a dois.

Consideremos duas decomposições dum conjunto aberto de segunda ou de terceira espécie em domínios elementares abertos não-penetrantes dois a dois. Designemos por **E** um domínio qualquer duma das decomposições e por **E**$'$ um qualquer da outra. Um domínio **E** só contém elementos dum dos domínios **E**$'$; efectivamente, se assim não fôsse, os domínios **E**$'$ que contivessem elementos de **E** seriam penetrantes [*p.* 517, *l.* 1], e o mesmo sucederia a dois deles. Da mesma maneira se reconhece que um qualquer dos domínios **E**$'$ só contém elementos dum dos domínios **E**. Logo as duas decomposições consideradas não são distintas.

Como corolário afirmamos o seguinte:

Para que uma soma de h domínios abertos elementares se decomponha em menos do que h domínios abertos elementares é necessário e suficiente que dois dêsses domínios sejam penetrantes.

Um conjunto aberto de segunda ou de terceira espécie decompõe-se sempre e duma única maneira em domínios elementares abertos não-penetrantes dois a dois. A estrema do coniunto dado contém as estremas dêstes domínios elementares.

Dado um conjunto aberto **A** de segunda ou de terceira espécie, decomponhamo-lo de qualquer forma em domínios elementares abertos **E**. Pode suceder que dois quaisquer dêstes domínios não sejam penetrantes. No caso contrário os domínios **E** distribuem-se em grupos tais que os domínios de cada grupo são penetrantes e dois quaisquer de grupos distintos não são penetrantes (1). As somas dos domínios de cada grupo dão origem a uma decomposição do conjunto **A** em novos domínios elementares abertos **E'** [*p.* 518, *l.* 25], mas agora dois quaisquer dos novos domínios não são penetrantes [*p.* 515, *l.* 1].

Esta última decomposição é única como já se demonstrou, e adiante veremos [*n.º imediato*] que os domínios elementares **E'** que a constituem formam uma infinidade numerável quando não são em número finito.

É sabido que a estrema de **A** contém a soma das estremas dos domínios **E'** [*p.* 518, *l.* 3]; para que se verifique a coincidência é manifestamente suficiente que dentro dum esferóide qualquer figurem elementos apenas dum número finito de domínios **E'** ou de nenhum, o que sucede por exemplo quando os conjuntos **E'** são separados [*p.* 307, *l.* 23]. Em particular, *quando* **A** *é de segunda espécie, a sua estrema coincide com a soma das estremas dos domínios elementares abertos não-penetrantes dois a dois em que se decompõe.*

Suponhamos que um dado conjunto dominial **D** *se decompõe em domínios elementares* **E** *com interiores distintos de maneira que a estrema de* **D** *contenha a soma das estremas dos domínios* **E**. *O conjunto dominial* **D** *é então de segunda ou de terceira espécie conforme os domínios* **E** *são em número finito ou infinito. Uma tal decomposição, mas em domínios* **E** *totalmente fechados, é única.*

---

(1) Seja E_1 um dos domínios **E**. O grupo a que pertence E_1 é constituído por todos os domínios **E** cada um dos quais se pode unir a E_1 por uma sucessão dum número finito de domínios **E** de tal modo que os pares de domínios consecutivos na sucessão sejam penetrantes. Tal grupo pode reduzir-se a dois domínios, ou apenas ao domínio E_1.

Notemos primeiro que, se a estrema do conjunto proposto **D** contém a soma das estremas dos domínios **E**, o interior **I** de **D** é a soma dos interiores **I**′ dos mesmos domínios. Por conseguinte **D** não pertence à quarta espécie. Mas dois quaisquer dos domínios **E** não são penetrantes [*p.* 517, *l.* 29], e o mesmo sucede aos respectivos interiores **I**′ [*p.* 514, *l.* 7]. Logo os conjuntos **I**′ constituem a única decomposição possível de **I** em domínios elementares abertos não-penetrantes dois a dois, e por isso os domínios **E**, quando totalmente fechados, também constituem a única decomposição de **D** em domínios elementares totalmente fechados nas condições do enunciado.

O conjunto dominial **D** pertence à segunda ou à terceira espécie conforme os domínios **E** são em número finito ou infinito.

Um conjunto dominial **D** *de segunda espécie decompõe-se sempre num número finito de domínios elementares, os quais podem determinar-se de maneira que a soma das suas estremas coincida com a do conjunto* **D**. *Quando* **D** *é totalmente fechado, a decomposição nestas condições, mas em domínios elementares totalmente fechados, é única.*

O interior do conjunto proposto **D** decompõe-se num número finito de domínios elementares abertos **E**′ não-penetrantes dois a dois. Substituamos cada **E**′ pelo domínio **E**″ dos elementos de **E**′ contidos em **D**. Seja **E** o domínio elementar que resulta de adicionarmos a **E**″ aqueles seus elementos extremos que estão contidos em **D**. Como os domínios **E** são em número finito, é evidente que um elemento extremo qualquer de **D** contido nêste conjunto também pertence a um dos **E**. Os domínios **E** constituem pois uma decomposição do conjunto **D** em domínios elementares.

Notemos que a estrema de **D** coincide com a soma das estremas dos domínios **E**, de contrário um elemento extremo dum dêstes domínios seria interior a um outro e os dois seriam penetrantes. Os interiores dos domínios **E** são os correspondentes **E**, sendo portanto distintos dois a dois. Logo uma soma de quaisquer domínios **E** nunca é elementar [*p.* 502, *l.* 5], e por isso dizemos que a decomposição nos domínios **E** elementares é irredutível.

Quando **D** é totalmente fechado, o mesmo sucede por construção a cada um dos domínios **E**. A decomposição de **D** em domínios elementares totalmente fechados nas condições do enunciado é então única [*prop. prec.*].

Um conjunto dominial **D** *de terceira espécie decompõe-se sempre numa infinidade numerável de domínios elementares* **E** *e possìvelmente num conjunto constituído por um ou mais elementos extremos de* **D** *mas exteriores a êsses domínios. Podemos determinar a decomposição de maneira que a estrema do conjunto* **D** *contenha as estremas dos domínios* **E**. *A decomposição nestas condições é única qundo supomos que o conjunto* **D** *e os domínios* **E** *são totalmente fechados.*

Procedendo tal qual como na demonstração anterior obtemos uma infinidade numerável de domínios elementares **E** não-penetrantes dois a dois e contidos em **D**. Qualquer elemento do conjunto **D** que não figure em nenhum dos domínios **E**, caso exista, é necessàriamente extremo de **D** e exterior a cada um dos **E**.

Como dois quaisquer dos domínios **E** não são penetrantes, a estrema de **D** contém a soma das estremas dos mesmos domínios [*p.* 518, *l.* 3]. Os interiores dêstes são distintos dois a dois. Por conseguinte uma soma de quaisquer domínios entre os **E** nunca é elementar.

Quando **D** é totalmente fechado o mesmo acontece a cada um dos **E**. Neste caso uma segunda decomposição do conjunto **D** nas condições do enunciado mas que dê origem a domínios elementares totalmente fechados não é distinta da primeira, pois no caso contrário corresponder-lhe-ia uma nova decomposição do interior em domínios elementares abertos não-penetrantes dois a dois [*p.* 518, *l.* 3], o que é impossível [*p.* 519, *l.* 19].

V

SÔBRE OS TEOREMAS DE LINDELÖF, BOREL-LEBESGUE E RIESZ-SIERPINSKI

83. Teoremas de Lindelöf, Borel-Lebesgue e Riesz-Sierpinski. — Demonstremos primeiro as seguintes proposições:

Podemos dividir qualquer conjunto numa infinidade numerável de subconjuntos cujos diâmetros sejam menores do que um número positivo prèviamente dado.

Demonstremos ao mesmo tempo que *é possível determinar* *tais subconjuntos de maneira que os diâmetros correspondentes tendam para o limite zero.*

Sejam **A** e ε o conjunto e o número positivo dados. Se **A** é limitado, dividimo-lo num número finito de partes de diâmetros inferiores a ε, depois cada uma destas num número finito de partes de diâmetros inferiores a $\frac{\varepsilon}{2}$, etc., e assim dividimos **A** numa infinidade numerável de partes cujos diâmetros são inferiores a ε e tendem para o limite zero.

Se o conjunto **A** é ilimitado, comecemos por dividi-lo numa infinidade numerável de conjuntos limitados $\mathbf{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$; para isso podemos considerar uma sucessão de esferóides concêntricos cujos raios cresçam para infinito, e formar os produtos do conjunto **A** por cada um dêsses esferóides. Basta agora dividir $\mathbf{A}_i$ num número finito de subconjuntos de diâmetros inferiores a $\frac{\varepsilon}{i}$ e considerar todos os que resultam de pormos $i = 1, 2, \ldots$ para obtermos uma divisão de **A** numa infinidade numerável de subconjuntos nas condições do enunciado [1].

Consideremos com centro em cada elemento dum dado conjunto um esferóide de raio superior a certo número positivo ε. O mesmo conjunto é coberto apenas com um número finito ou com uma

---

(1) Como aplicação completemos a proposição do *v.* v, *p.* 160, enunciando-a da seguinte forma:

Uma sucessão de conjuntos quaisquer que admita um limite comum (uma sucessão convergente, em particular) pode considerar-se soma duma infinidade numerável de sucessões convergentes, cada uma de conjuntos de soma limitada e de diâmetros tão pequenos quanto quisermos. Podemos determinar tais sucessões e os respectivos limites de forma que a soma dêstes seja um dado subconjunto do limite comum da sucessão proposta (êste limite comum, ou um dos seus elementos, em particular).

De facto, podemos determinar todos os conjuntos $\mathsf{A}_{h,i}$ e $\mathsf{B}_{h,i}$ que figuram na demonstração da referida proposição do *v.* v de maneira que os respectivos diâmetros sejam inferiores a um dado número positivo ε. Para isso dividimos o conjunto A' considerado nessa proposição em subconjuntos B_h de diâmetros inferiores a $\frac{\varepsilon}{2}$, e, como para cada uma das sucessões (15) há então uma ordem a partir da qual os diâmetros dos termos são inferiores a ε [*v.* v, *p.* 134, *l.* 17], podemos determinar as mesmas sucessões de maneira que os diâmetros dos termos de cada uma sejam inferiores a ε.

infinidade numerável dêsses esferóides conforme é limitado ou ilimitado.

Porque, se dividirmos o conjunto dado num número finito ou numa infinidade numerável de partes de diâmetros inferiores ao número ε e se considerarmos um dos esferóides dados com centro num elemento de cada uma das partes, o conjunto será coberto com estes últimos esferóides.

Se cada elemento dum dado conjunto $\mathbf{A}$ *é centro dum esferóide tal que o produto por* $\mathbf{A}$ *pertença à soma duma infinidade numerável de conjuntos duma dada família* (1), *o mesmo conjunto* $\mathbf{A}$ *é coberto apenas com uma infinidade numerável de conjuntos da família.*

Dividamos $\mathbf{A}$ numa infinidade numerável de subconjuntos $\mathbf{A}'$ de diâmetros inferiores ao número $\frac{1}{i}$. A cada um dos subconjuntos $\mathbf{A}'$ que também seja subconjunto da soma duma infinidade numerável de conjuntos da família façamos corresponder estes mesmos conjuntos. É numerável o grupo de todos os conjuntos da família correspondentes dos diversos subconjuntos $\mathbf{A}'$. É numerável ainda a totalidade dos conjuntos dos grupos que resultam de considerarmos $i = 1, 2, \ldots$

Esta última infinidade numerável de conjuntos da família cobre o conjunto $\mathbf{A}$; efectivamente, um dado elemento $\mathbf{a}$ de $\mathbf{A}$ é centro dum esferóide cujo produto por $\mathbf{A}$ pertence à soma duma infinidade numerável de conjuntos da família, e por isso, quando dividimos $\mathbf{A}$ em partes de diâmetros inferiores ao raio dêsse esferóide, a parte (ou uma das partes) à que pertence o elemento $\mathbf{a}$ é um subconjunto da soma da mesma infinidade numerável de conjuntos (2).

---

(1) É claro que, se êsse produto pertence a um conjunto ou à soma dum número finito de conjuntos da família (a qual se entende constituída por uma infinidade de conjuntos), também pertence à soma duma infinidade numerável dos mesmos conjuntos.

(2) Outro modo de expor a demonstração consiste no seguinte:

Consideremos com centro em cada elemento de $\mathbf{A}$ um esferóide de raio inferior à unidade tal que o produto por $\mathbf{A}$ pertença à soma duma infinidade numerável de conjuntos da família. A parte $\mathbf{A}_i$ de $\mathbf{A}$ constituída pelos elementos que são os centros dos esferóides de raios superiores a $\frac{1}{i+1}$ mas não superiores a $\frac{1}{i}$

Como caso particular deduz-se a seguinte proposição:

Se uma dada família de conjuntos cobre interiormente um conjunto **A** (¹), *êste conjunto também é coberto interiormente com uma infinidade numerável de conjuntos da família* (LINDELÖF).

Uma infinidade de conjuntos que possuam elementos interiores mas sem elementos interiores comuns dois quaisquer deles, é necessàriamente numerável.

Na verdade, como a família dos interiores dos conjuntos dados cobre interiormente a soma dêsses interiores, tal soma é coberta com uma infinidade numerável dos mesmos interiores, que são todos êles porquanto dois quaisquer não contêm elementos comuns. Os conjuntos dados constituem pois uma infinidade numerável.

É numerável em particular uma infinidade de conjuntos com elementos interiores, mas não penetrantes dois quaisquer deles.

É pois numerável uma infinidade de conjuntos abertos não penetrantes dois quaisquer deles.

O interior dum conjunto é necessàriamente soma duma infinidade numerável de esferóides (²).

Cada elemento do interior **I** dum dado conjunto pode, com efeito, considerar-se centro dum esferóide constituído apenas por elementos de **I**. O conjunto **I** é coberto interiormente com tais esferóides, e portanto também é coberto com uma infinidade numerável dos mesmos. Logo **I** é a soma desta infinidade numerável de esferóides.

Na presente demonstração nada se opõe a que os esferóides

---

cobre-se com um número finito ou com uma infinidade numerável dos mesmos esferóides [*p.* 523, *l.* 18]. Pondo $i = 1, 2, \ldots$, a totalidade dos esferóides assim considerados constituem uma infinidade numerável e cobrem o conjunto **A**. Cada um dos esferóides pertence à soma duma infinidade numerável de conjuntos da família; logo **A** é coberto com uma infinidade numerável dêsses conjuntos.

(¹) Uma família de conjuntos cobre interiormente um conjunto **A** quando êste é coberto pelos interiores dos conjuntos da família.

(²) É claro que falar no interior dum conjunto é o mesmo que falar num conjunto aberto no qual figurem todos os elementos juxtapostos aos seus próprios elementos.

nela considerados sejam abertos [1]. Por conseguinte também podemos afirmar que *o interior dum conjunto é qualquer soma duma infinidade numerável de esferóides abertos.*

Se cada elemento dum conjunto limitado e fechado **A** *é centro dum esferóide cujo produto por* **A** *pertença a um conjunto [à soma dum número finito de conjuntos] duma dada família, é possível determinar um número positivo* ε *tal que um subconjunto qualquer de* **A** *de diâmetro inferior a* ε *pertença a um conjunto [à soma dum número finito de conjuntos] da mesma família.*

Admitamos, com efeito, que não é possível determinar um número positivo ε nas condições do presente enunciado. Sendo assim existe, por maior que seja o inteiro i, um subconjunto $\mathbf{A}_i$ de **A** de diâmetro inferior a $\frac{1}{i}$ que não é subconjunto de nenhum conjunto [de nenhuma soma dum número finito de conjuntos] da família considerada. Seja

$$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_i \ldots, \tag{7}$$

a sucessão de conjuntos que resulta de pormos $i = 1, 2, \ldots$

Por se tratar duma sucessão de conjuntos de soma limitada, podemos dela extrair uma outra, mas que seja convergente [*v.* IV, *p.* 140, *l.* 10]:

$$\mathbf{A}_r, \mathbf{A}_s, \ldots \mathbf{A}_u, \ldots \tag{8}$$

Esta sucessão tende para um elemento **a** do conjunto **A** porque a sucessão dos diâmetros correspondentes tende para o limite zero [*v.* V, *p.* 134, *l* 17].

Mas existe por hipótese um esferóide **F** de centro **a** tal que o produto por **A** pertence a um conjunto **B** [à soma **S** dum número finito de conjuntos] da família, e por isso os termos de (8), a partir da ordem em que são subconjuntos de **F** [*p.* 482, *l.* 15], também são subconjuntos do conjunto **B** [da soma **S**].

A contradição a que chegámos mostra que é possível determinar um número ε que satisfaça às condições do enunciado.

---

[1] Chamamos esferóide aberto de centro num elemento **c** e de raio ρ ao conjunto dos elementos **f** tais que $\overline{\mathbf{fc}} < \rho$.

Da proposição agora demonstrada resulta por evidência que, *dadas as condições do enunciado, é possível dividir* $\mathbf{A}$ *num número finito de partes cada uma das quais pertença a um conjunto da família considerada.*

Observação. — *A cada subconjunto* $\mathbf{A}'$ *de* $\mathbf{A}$ *de diâmetro inferior ao número* ε *dado pela proposição precedente corresponde um conjunto* $\mathbf{B}$ [*uma soma* $\mathbf{S}$ *dum número finito de conjuntos*] *da família e um número positivo* ρ *tais que: seja qual fôr o esferóide de raio* ρ *e de centro num elemento de* $\mathbf{A}'$, *o seu produto por* $\mathbf{A}$ *pertence ao conjunto* $\mathbf{B}$ [*à soma* $\mathbf{S}$].

Designemos, com efeito, por δ o diâmetro de $\mathbf{A}'$ e consideremos um esferóide de centro em cada elemento de $\mathbf{A}'$, todos do mesmo raio ρ inferior a $\dfrac{\varepsilon-\delta}{2}$. Seja $\mathbf{A}''$ a soma dos produtos dêstes esferóides pelo conjunto $\mathbf{A}$. O diâmetro de $\mathbf{A}''$ ainda é inferior a ε, razão porque $\mathbf{A}''$ pertence a um conjunto $\mathbf{B}$ [a uma soma $\mathbf{S}$ dum número finito de conjuntos] da família. Logo cada esferóide de centro num elemento de $\mathbf{A}'$ e de raio ρ é tal que o produto por $\mathbf{A}$ pertence ao conjunto $\mathbf{B}$ [à soma $\mathbf{S}$].

Noutros termos:

Seja qual fôr o subconjunto $\mathbf{A}'$ *de* $\mathbf{A}$ *de diâmetro inferior ao mesmo número* ε, *é possível determinar um conjunto* $\mathbf{B}$ [*uma soma* $\mathbf{S}$ *dum número finito de conjuntos*] *da família e um número positivo* ρ *tais que um subconjunto qualquer de* $\mathbf{A}$ *cuja distância a* $\mathbf{A}'$ *seja inferior a* ρ *pertença ao conjunto* $\mathbf{B}$ [*à soma* $\mathbf{S}$].

Na verdade, ao subconjunto $\mathbf{A}'$ corresponde um conjunto $\mathbf{B}$ [uma soma $\mathbf{S}$ dum número finito de conjuntos] da família e um número ρ nas condições já mencionadas. Mas se $\mathbf{A}''$ é um subconjunto de $\mathbf{A}$ cuja distância a $\mathbf{A}'$ seja inferior ao número ρ, a cada elemento $\mathbf{a}''$ de $\mathbf{A}''$ corresponde um de $\mathbf{A}'$ a uma distância do primeiro inferior ao mesmo ρ. Logo $\mathbf{a}''$ pertence ao conjunto $\mathbf{B}$ [à soma $\mathbf{S}$] e $\mathbf{A}''$ é um subconjunto de $\mathbf{B}$ [de $\mathbf{S}$].

Eis outra forma que pode tomar a presente observação:

Seja qual fôr a sucessão de subconjuntos de $\mathbf{A}$ *que tenda para um conjunto de diâmetro inferior ao referido número* ε, *os termos a partir duma determinada ordem pertencem a um certo conjunto* [*à soma dum número finito de certos conjuntos*] *da família.*

Como $\mathbf{A}$ é fechado, a sucessão considerada tende para um subconjunto fechado $\mathbf{A}'$ de $\mathbf{A}$ [*v.* v, *p.* 302, *l.* 30], e, se o conjunto **B** [a soma **S**] e ρ são o conjunto [a soma do número finito de conjuntos] da família e o número positivo correspondentes de **A**′ conforme o enunciado precedente, podemos afirmar que os termos daquela sucessão pertencem ao conjunto **B** [à soma **S**] a partir da ordem em que as distâncias a **A**′ são inferiores a ρ.

Se cada elemento dum conjunto limitado e fechado **A** *é centro dum esferóide tal que o produto por* **A** *pertença a um conjunto [à soma dum número finito de conjuntos] duma dada família, o conjunto* **A** *é coberto na mesma condição apenas com um número finito de conjuntos da família.*

Dividamos **A** num número finito de partes de diâmetros inferiores ao já aludido número ε e façamos corresponder a cada uma delas um conjunto [uma soma dum número finito de conjuntos] da família conforme a observação atrás exposta. Os conjuntos da família assim determinados são em número finito e cobrem **A** na mesma condição que todos os da mesma família.

Das duas últimas proposições deduzem-se os seguintes casos particulares:

Se uma dada família de conjuntos cobre interiormente um conjunto limitado e fechado **A**, *é possível determinar um número positivo* ε *tal que um subconjunto qualquer de* **A** *de diâmetro inferior a* ε *seja interior a um dos conjuntos da família* (¹).

Podemos pois dividir **A** num número finito de partes cada uma das quais seja interior a um conjunto da família.

Se uma dada família de conjuntos cobre interiormente um conjunto limitado e fechado **A**, *êste conjunto também é coberto interiormente apenas com um número finito de conjuntos da família* (Borel-Lebesgue) (²).

(¹) A cada subconjunto **A**′ de **A** de diâmetro inferior a ε corresponde mesmo um conjunto **B** da família e um número positivo ρ de tal maneira que, dado um esferóide de raio ρ e de centro num elemento de **A**′, o seu produto por **A** seja sempre interior a **B**.

(²) Como aplicação do teorema de Borel-Lebesgue ou da proposição enunciada na *p.* 523, *l.* 18, demonstremos que:

Dois elementos quaisquer interiores a um dado domínio elementar E unem-se por uma sucessão dum número finito de esferóides, todos do mesmo raio e inte-

Por conseguinte *é possível determinar um número finito de conjuntos da família e um número positivo ε de maneira que um subconjunto qualquer de* **A** *de diâmetro inferior a ε seja interior a um dêsses conjuntos da família* [*prop. prec.*].

Se existe o produto de qualquer infinidade numerável de conjuntos escolhidos entre os conjuntos duma dada família, todos totalmente fechados ou todos excepto um, também existe o produto de todos estes conjuntos.

Provemos que, se não existe o produto dos conjuntos da família, também não existe o produto de certa infinidade numerável dos mesmos conjuntos. Por hipótese entre os conjuntos **A** da família poderá haver um que não seja totalmente fechado: designemo-lo por **A**$'$. Se forem todos totalmente fechados, **A**$'$ designará um deles.

Supor que não existe o produto dos conjuntos **A** equivale a supor que um elemento qualquer de **A**$'$ é exterior a um dos conjuntos da família. O conjunto **A**$'$ é pois coberto pela família dos exteriores dos conjuntos dados, e portanto também é coberto apenas com uma infinidade numerável dos mesmos exteriores [*teor. de* Lindelöf]. Logo não existe o produto de **A**$'$ pela infinidade numerável dos conjuntos da família que admitem estes exteriores.

Se não existe o produto dum conjunto limitado e fechado **A** *pelos lugares dos conjuntos duma dada família, é possível determinar um número positivo ε de maneira que um subconjunto qualquer de* **A** *de diâmetro inferior a ε seja exterior a um dos conjuntos da família.*

---

riores a* E*, de maneira que dois esferóides quaisquer consecutivos possuam um elemento interior comum.

Unamos dois elementos do domínio **E** por um contínuo limitado **K** que lhe seja interior. Sabemos que é superior a certo número positivo ρ a distância reduzida entre **K** e o complementar de **E** [*p.* 481, *l.* 9]. Logo todos os esferóides de raio ρ e de centros nos diversos elementos de **K** são interiores a **E**. Ora, o contínuo **K** é coberto interiormente com um número finito dos mesmos esferóides, e estes, por serem penetrantes [*p.* 516, *l.* 23], podem dispor-se por uma ordem tal que dois esferóides consecutivos quaisquer possuam um elemento interior comum [*p.* 513, *l.* 7].

Efectivamente, nas condições do enunciado qualquer elemento de **A** é exterior a um dos conjuntos da família, sendo por isso coberto pela família dos exteriores dos mesmos conjuntos. É pois possível determinar um número positivo ε de tal modo que um subconjunto qualquer de **A** de diâmetro inferior a ε seja exterior a um dos conjuntos da família dada [*p.* 528, *l.* 19].

São corolários evidentes as duas proposições seguintes:

Se não existe o produto dum conjunto limitado e fechado **A** *pelos lugares dos conjuntos duma dada família, é possível dividir* **A** *num número finito de partes cada uma das quais seja exterior a um dos conjuntos da família.*

Dados um conjunto limitado e fechado **A** *e uma família de conjuntos quaisquer, se existe o produto de* **A** *por quaisquer conjuntos da família em número finito, também existe o produto de* **A** *pelos lugares de todos êsses conjuntos* (1).

Na verdade, se não existisse o produto de **A** pelos lugares dos conjuntos da família, seria possível dividi-lo num número finito de partes cada uma das quais fôsse exterior a um dos conjuntos da família [*prop. prec.*], e não existiria o produto de **A** por estes últimos conjuntos em número finito (2).

Observação. — Numa nota do *v.* IV, *p.* 4, afirmámos que a condição de se dividir qualquer conjunto limitado num número finito de partes de diâmetros inferiores a um número positivo prèviamente dado é equivalente ao enunciado de BOREL-LEBES-

---

(1) Esta proposição foi enunciada por RIESZ para conjuntos de elementos dum espaço ordinário, mas demonstrada pela primeira vez por SIERPINSKI (consulte-se FRECHET, *Les Espaces Abstraits, p.* 232). Encontra-se uma demonstração directa da mesma proposição no *v.* IV, *p.* 133.

(2) Notemos que o teorema de BOREL-LEBESGUE pode considerar-se corolário do de RIESZ. Com efeito, dizer que uma dada família de conjuntos cobre interiormente um conjunto limitado e fechado **A** é dizer que não existe elemento algum de **A** que seja comum aos lugares dos complementares dos diversos conjuntos da família. Logo, recorrendo ao teorema de RIESZ-SIERPINSKI, podemos afirmar que não existe elemento algum de **A** que seja comum aos lugares de certos dos referidos complementares em número finito. O conjunto **A** é pois coberto interiormente pelos conjuntos da família que admitem estes complementares em número finito.

GUE ou ao de RIESZ-SIERPINSKI. Efectivamente, tomemos para hipótese êsse primeiro enunciado e consideremos cada elemento do lugar [**A**] dum dado conjunto limitado **A** como centro dum esferóide de diâmetro menor do que o número positivo dado ε. A família de esferóides assim obtidos cobre interiormente o lugar [**A**], o qual também é coberto apenas com alguns esferóides da família em número finito. Os produtos de cada um dos últimos esferóides pelo conjunto **A** determinam uma divisão dêste num número finito de partes de diâmetros menores do que o número ε. Logo, se admitirmos verdadeiro o enunciado de BOREL-LEBESGUE, poderemos afirmar que é possível dividir qualquer conjunto limitado num número finito de subconjuntos de diâmetros inferiores a um número positivo prèviamente dado.

Do enunciado de RIESZ deduz-se, como já vimos, o de BOREL-LEBESGUE; aquêle enunciado também pode, por conseguinte, substituir a hipótese da divisão dum conjunto limitado num número finito de partes de diâmetros tão pequenos quanto quisermos.

(Continua).

LUÍS BEDA NETO.

Prof. Dr. Egas Pinto Basto

21-II-1881 = 4-VIII-1937

Confiou-me a Faculdade de Ciências o doloroso encargo de escrever a notícia necrológica do Dr. Egas Ferreira Pinto Basto.

Se para o coração do amigo e camarada de todos os dias é grata a oportunidade de poder publicamente afirmar quão grande era o aprêço em que tinha as suas altas qualidades intelectuais e morais; se para o colega é desvanecedor reconhecer quão notável, apesar dos tempos, era o timbre do seu espírito universitário; se para o cidadão é reconfortante notar as altas qualidades de carácter e os distintos sentimentos de sociabilidade da sua personalidade forte; com que infinita saùdade, contudo, me vejo forçado a escrever esta notícia que, a cada passagem, tristemente me recorda aquelas intimidades de vida, aquela comunhão de idéias, pensamentos e processos de acção, expressões duma amizade sincera, completa, sem meios termos, que durante mais de trinta anos cimentou uma camaradagem que jámais conheceu o mais ténue empalidecimento, amuo ou enfado!.

É com as lágrimas nos olhos, com o coração a sangrar, que escrevo estas linhas. Prouvera a Deus que lhe pudesse comunicar aquela eloqüência que seria mistér à devida consagração de tão alto espírito e carácter!. Entretanto seja-me desculpada a insignificância da forma pela grandeza da intenção.

O Dr. Egas Ferreira Pinto Basto, filho de Gustavo Ferreira Pinto Basto e D. Maria José de Azevedo Ferreira Pinto Basto, era natural de Aveiro, onde nasceu a 21 de Fevereiro de 1881 e morreu a 4 de Agosto de 1937.

Fez os seus estudos secundários no Colégio Militar, donde transitou para a Universidade de Coimbra, tendo-se matriculado em Outubro de 1897, no 1.º ano do *Curso preparatório para as armas de artilharia e engenharia.*

Foi um dos estudantes universitários mais distintos do seu tempo, e obteve nas várias cadeiras do curso as mais altas classificações.

Matriculou-se em Outubro de 1900 no 1.º ano da Escola do Exército, onde continuou a sua brilhante carreira académica, sendo escolhido para a *Arma de Engenharia.*

Não o seduzia, porém, a carreira das armas, e, assim, em Outubro de 1906, voltou para a Universidade de Coimbra prosseguir os seus estudos, que terminou em Julho de 1907 com a elevada classificação final de *Muito bom, com 19 valores.*

Nos *Actos grandes* continuou afirmando o seu grande valor académico; foi admitido ao *Acto de Licenciatura* em 9 de Maio de 1908 com a nota de *Muito bom,* com 19 valores, e aprovado no *Acto de Conclusões Magnas* que realizou a 11 de Julho do mesmo ano, com igual classificação.

Doutorou-se a 19 de Julho de 1908 e, concorrendo à vaga existente na *Secção de Ciências Físico-Químicas* da Faculdade de Filosofia, foi aprovado por unanimidade com a nota de *Muito bom,* com 19 valores (22 de Janeiro de 1909).

O seu primeiro despacho, para *Lente substituto* da Faculdade de Filosofia, tem a data de 17 de Fevereiro de 1909, cargo de que tomou posse em 11 de Março do referido ano.

Com a *Reforma universitária* de 1911 (Decreto-lei de 19 de Abril), foi nomeado *Professor extraordinário* da Faculdade de Ciências, colocado no 2.º grupo e, mais tarde, transferido para o 1.º grupo da segunda secção (Decreto de 5 de Dezembro de 1914).

Com a publicação do *Estatuto universitário* (Decreto de 6 de Junho de 1918) foi nomeado *Professor ordinário* da 2.ª secção da Faculdade de Ciências, e transferido, por conveniência urgente de serviço, do grupo de Física para o de Química (Decreto de 6 de Janeiro de 1919).

Esta transferência representou um sacrifício real da sua parte, pois a sua predilecção pelos estudos de Física era notória.

Com a sua nomeação para *Director do Laboratório Químico* (Decreto de 29 de Outubro de 1926) fixaram-se definitivamente as perspectivas docentes do Prof. Pinto Basto, criando-lhe o mínimo de condições indispensáveis à manifestação da sua actividade científica. Nesta qualidade se afirmou organizador notável, animador entusiasta, investigador e crítico de elegante aprumo profissional e rigor lógico impecável.

O Prof. Pinto Basto foi um universitário na verdadeira acepção da palavra.

Quando em 1911, com a publicação do Decreto-lei de 19 de Abril, as Universidades entraram no regime de *autonomia pedagógica e administrativa,* logo o Professor Pinto Basto, como *Secretário da Faculdade,* e por conseguinte, vogal do *Senado,* começou colaborando na administração universitária.

A sua actuação, nesta qualidade, exerceu-se ininterruptamente desde Outubro de 1911 até Novembro de 1917. Voltou a fazer parte do Senado, como Delegado da Faculdade, desde Março de 1919 até Julho de 1927, e, posteriormente, desde 29 de Novembro de 1934 a 18 de Novembro de 1935.

Como *Director da Faculdade,* foi ainda membro do Senado universitário desde 2 de Novembro de 1927 até 30 de Outubro de 1930.

O que a sua influência, neste sector da vida universitária, teve de alevantado e nobre está bem vivo no espírito de todos quantos tiveram o intenso prazer de com êle colaborar. Sem se desviar uma linha na defesa intransigente das regalias universitárias e dos altos interesses do ensino e da Nação, o Professor Pinto Basto soube sempre orientar as suas intervenções na discussão dos mais melindrosos assuntos com um aprumo e correcção inexcedíveis.

O interesse que sempre lhe mereceram as péssimas circunstâncias em que se desenvolve a vida académica, a sua convicção pessoal da necessidade imperiosa de promover os progressos da educação física dos estudantes, constitúi um dos aspectos mais interessantes a salientar em tôda a sua intervenção como vogal do Senado universitário.

Era o Professor Pinto Basto um desportista completo ; conhecia por experiência própria as enormes vantagens que, tanto no aspecto da cultura física, como no da educação moral, os exercícios físicos e as práticas desportivas facultam, e por isso sempre pugnou pela sua conveniente organização como parte integrante indispensável do programa escolar universitário.

Nesta orientação apresentou na sessão do Senado universitário, de 18 de Dezembro de 1915, a seguinte proposta que foi aprovada:

«Proponho que o Senado nomeie uma Comissão encarregada de estudar o local e mandar fazer um projecto e orçamento dum campo de jogos compatível com as posses da Universidade, e se comprometa a dar-lhe execução rápida logo que seja aprovado, destinando-lhe desde já uma verba».

De harmonia com esta proposta deliberou o Senado que «para fazer face às despêsas de instalação dêsse campo se estabelecesse um rateio pelas Faculdades e Escolas universitárias na razão de 1,5% dos respectivos rendimentos e propinas a partir do próximo mês de Julho».

Na sessão de 28 de Julho de 1916 o Senado universitário «Aprovou mais o projecto para a construção dum campo de jogos apresentado pelo vogal Dr. Egas Pinto Basto e por S. Ex.ª justificado com algumas considerações sôbre as muitas vantagens dos exercícios físicos e hábitos sportivos na educação da mocidade académica; resolvendo-se que o custeio dessa obra continuasse a ser contemplado no orçamento da Universidade de 1917-1918».

Não obstante tôda a sua iniciativa, e a boa vontade do Senado, os assuntos referentes à educação física dos estudantes da Universidade de Coimbra continuaram em precárias circunstâncias, o que motivou nova intervenção do Professor Pinto Basto que, em sessão do Senado universitário de 11 de Maio de 1935, apresentou a seguinte proposta, que foi aprovada:

«A educação física e artística dos estudantes da Universidade de Coimbra tem sido realizada, pode dizer-se, sòmente por iniciativa da academia. Pondo de parte a construção do campo de jogos de Santa Cruz, da iniciativa da Universidade, é certo que esta não tem podido fazer valer o seu interesse pela actividade extra-escolar dos estudantes. O campo de jogos, ainda incompleto, foi abandonado pela Universidade, por motivos que é inútil discutir, e, de facto entregue à Associação Académica».

«É necessário que êste estado de coisas termine, para bem dos estudantes e para bem da Universidade. É necessário que entre os professores da Universidade e os seus estudantes se estabeleçam relações mais íntimas, que passem além do âmbito das aulas e dos laboratórios, e exerçam na actividade extra-escolar dos estudantes uma acção que consideramos indispensável.

Não se trata duma tutela, que, não seria aceite, e com razão, por estudantes de cursos superiores, mas da acção orientadora e auxílio de que carecem os que ainda não tem o saber de experiência feito. O campo de jogos está agora, pode dizer-se, tão incompleto como quando a Universidade o abandonou».

«A maior parte da academia não o freqüenta. A actividade da academia está muito longe da que seria para desejar, apesar dos louváveis esforços de alguns estudantes apaixonados.»

«O Orfeão está em decadência, muito embora alguns académicos façam o que podem para o conservar e melhorar. A actividade artística da academia não é a que a Universidade deve ambicionar.»

«A sede da Associação Académica, a casa dos estudantes, está num estado de pobreza que a impede de exercer a acção educativa que em tão alto grau pode exercer. Grande parte do edifício está desaproveitada por exigir reparações dispendiosas com as quais a Associação não pode, nem tem pessoal para conservar o asseio indispensável, e a parte aproveitada não oferece a elegância e o confôrto próprios do fim a que se destina e da época em que vivemos. A Associação ainda não conseguiu montar o dispensário médico a que aspira e outros serviços de tão grande utilidade sobretudo para os estudantes menos abastados. Grande parte dos estudantes não são sócios da Associação. O que a Associação tem feito merece todo o elogio, mas é pouco. Abandonados, pouco mais os estudantes poderão fazer».

«É urgente que a Universidade interfira na vida extra-escolar dos estudantes.»

«Professores e estudantes devem trabalhar conjuntamente, em bom entendimento, para elevar o nível da vida académica.»

«No plano da Cidade Universitária procura resolver-se o problema pôsto. Até êste plano se realizar passarão anos, e é urgente fazer alguma coisa desde já.»

«A proposta que vamos apresentar não pretende resolver o problema de forma definitiva. Dá uma solução provisória que satisfaz as necessidades urgentes, aproveitando o que já existe, sem prejuízo da solução definitiva que a Comissão da Cidade Universitária venha a adoptar.»

«Esta proposta foi apresentada ao Presidente da Comissão da Cidade Universitária e êste não viu na sua realização nada que contrarie projectos futuros, e foi apresentada também à

Direcção da Associação Académica, merecendo a sua aprovação.»

«Na proposta que vamos fazer consideramos a Associação Académica como representante da Academia. Com êste fim, entendemos que se deve trabalhar sempre, Universidade e estudantes.»

«Propomos:

«1) A educação física e artística e, dum modo geral, a actividade extra-escolar dos estudantes no seu aspecto educativo, é dirigida por uma comissão composta de três professores, indicados pelo Senado Universitário, e três estudantes, indicados pela Associação Académica.»

«2) A Universidade promoverá imediatamente o acabamento do campo de jogos de Santa Cruz, a reparação do edifício da Associação Académica e da antiga igreja de S. Pedro, cedida à Universidade para os ensaios do orfeão. Trata-se de propriedade do Estado na posse da Universidade de Coimbra. A Universidade solicitará do Ex.mo Ministro da Instrução a aprovação desta proposta e instará seguidamente junto das instâncias superiores competentes pela sua rápida realização.»

«No campo de jogos, além do seu acabamento, será, na extremidade do nascente, construído um *court* de ténis, cimentado, que sirva ao mesmo tempo de *ring* para o *hockey* em patins. A piscina existente deverá ser alargada, coberta e munida das modernas disposições que a Higiene aconselha. O pequeno pavilhão existente deve ser adaptado a casa de repouso e reünião. Será construído um balneário e retretes. A possibilidade do que se pede está assegurada. A antiga igreja de S. Pedro será aproveitada para a construção dum ginásio e respectivo balneário.»

«3) Pronto o campo de jogos e construído o ginásio, elementos materiais indispensáveis para se poder começar a resolver o problema da educação física, a Universidade pedirá autorização e verba para contratar um professor estrangeiro que ficará com a direcção técnica da educação física dos estudantes da Universidade de Coimbra.»

«4) A Universidade estabelecerá em seguida a obrigatoriedade da educação física.»

«5) Enquanto as instalações para-universitárias não se realizarem na Universidade de Coimbra como está planeado na futura Cidade Universitária, as necessidades da Associação Académica que estejam de harmonia com a sua presente instalação, depois de melhorada como propomos, e cuja satisfação não seja compatível com os seus recursos próprios, merecerão da Universidade a mesma atenção que as dos Serviços destinados à instrução dos estudantes. A instrução e a educação merecerão igual cuidado.»

Demonstrou igualmente o Prof. Pinto Basto um alto interesse por tudo quanto se referia às manifestações e avigoramento da vida universitária, como se reconheceu em várias oportunidades e muito particularmente na sua tentativa para a criação no Edifício central da Universidade duma «Sala para professores» que fornecesse local e desse ocasião à sua mais íntima convivência, condição basilar para a sustentação daquele *espírito de corpo* que é essencial ao prestígio de qualquer Instituição.

Os seus esforços e iniciativas não surtiram os efeitos desejados; nem por isso a Universidade lhe ficará menos devedora de sincero reconhecimento.

Como Director da Faculdade de Ciências, logar que desempenhou durante 3 anos, manifestou o Dr. Pinto Basto as mais notáveis qualidades de inteligência, bom senso e carácter.

Os relatórios que oportunamente publicou — *Revista da Faculdade de Ciências* — Vol. I — pág. 42 e seg. — encerram a confissão clara da manifesta inferioridade em que as Faculdades de Ciências se encontram quanto a um dos aspectos mais importantes da sua razão de ser — a investigação científica —, com a enumeração das respectivas causas determinantes e um apêlo ao Govêrno para que sejam criadas as condições materiais indispensáveis para sairem dessa estagnação.

São suas as seguintes palavras «Importa confessar bem alto, para que sejamos ouvidos por quem nos governa, a nossa insignificante produção científica, e, mostrando as razões que a justificam, insistentemente pedir que se dêem à Faculdade de Ciências os recursos indispensáveis de que necessita para que possa ser aproveitada a boa vontade do seu pessoal docente».

Com a sua atitude desassombrada prestou o Prof. Pinto Bastos um alto serviço à Faculdade de Ciências e à sua Universidade. Quandc um dia se fizer a história da evolução dos estudos superiores em Portugal, se apreciará devidamente o enorme alcance das suas propostas para o eficiente desenvolvimento da investigação científica como factor essencial no processo de rehabilitação nacional a que o Estado Novo meteu ombros.

Como dissemos foi a partir de 1926 que se notabilizou a actuação profissional do Dr. Pinto Basto.

Nomeado Director do Laboratório Químico, que recebeu em estado de manifesta decadência, conseguiu num espaço de tempo relativamente curto, mercê da sua persistência, bom senso e clara visão das possibilidades nacionais, transformá-lo nas suas instalações materiais, e modernizá-lo tanto no que respeita à orientação pedagógica do ensino, como no que se refere aos novos campos de actividade científica para onde orientou o trabalho de investigação dos seus assistentes e colaboradores.

No ponto de vista das instalações materiais, organizou as salas de trabalhos de *Química-Física*, de *Química orgânica* e de *Espectrografia* que equipou com material e instrumental moderno para o que conseguiu verbas importantes.

Mercê da sua iniciativa, conseguiu do Instituto para a Alta Cultura os recursos necessários para a especialização, em Espetrografia, na Universidade de Liverpool do seu assistente Dr. Gouveia, que prossegue em Coimbra os seus estudos neste campo.

Contratou o Prof. alemão K. Coper, especializado em Química coloidal, iniciando a investigação científica neste capítulo tão importante da Química moderna, investigações que prosseguem com bons resultados.

Modernizou a biblioteca, em livros e revistas da especialidade, tornando possível o melhor rendimento do ensino e da investigação científica.

Como Director do Laboratório Químico animou sempre todas as iniciativas de trabalho, procurando conseguir os meios indispensáveis à sua realização e guiando os estudos com o valiosíssimo auxílio do seu grande senso prático e seguro critério científico.

Profissionalmente, como Professor, a sua exemplar rectidão e espírito de justiça, aliada às excelsas qualidades da mais refinada educação e elevada cultura, impunham-no ao respeito e consideração de todos os colegas e alunos. Era um *gentleman* na justa acepção da palavra, cujo convívio constituia fonte perene da maior satisfação espiritual.

Como investigador científico interessou-se muito pelos problemas de ordem prática e valor económico, como revelam os seus primeiros trabalhos:

Retrogradação do ácido fosfórico nos adubos compostos.
Extracção do óleo dos bagaços de azeitona.
Análise duma rocha niquelífera.

Mas foi sobretudo, após a sua nomeação para professor de *Química analítica* do **Instituto de Climatologia e Hidrologia de Coimbra** — Decreto-lei n.º 18.568 de 1 de Agosto de 1930) que o Dr. Pinto Basto se afirmou investigador e crítico de notável valor científico.

As suas contribuïções para o estudo da *composição química das águas minerais portuguesas* são disso a clara demonstração.

Ultimamente, tinha empreendido o estudo da rádio-actividade das nossas águas minerais; deixou estudada a zona compreendida entre o Douro, o Mondego e o Távora. Êste estudo, efectuado com novos critérios e técnicas rigorosas, conduziu a resultados muito interessantes, que vieram modificar substancialmente muitas das opiniões correntes sôbre várias das nossas estâncias de águas minerais.

Estava o Professor Pinto Basto naquela altura da vida profissional em que eram de esperar os mais belos frutos da sua vasta cultura científica, grande capacidade imaginativa e elevado espírito crítico.

O Destino cruel não lhe permitiu porém a conclusão dos seus projectos científicos.

A sua memória gentil estará sempre presente no coração de todos os seus colegas, cuja saüdade infinda é padrão imarcessível do alto preito que a Faculdade de Ciências de Coimbra devidamente presta à sua inconfundível personalidade.

Nestas linhas sem relêvo, mas com profunda emoção, aqui lhe deixa o último adeus talvez o seu mais insignificante amigo, mas seguramente o mais leal de todos.

Dr. Eusébio Tamagnini.

Prof. Egas Pinto Basto

(21 - II - 1881 = 4 - VIII - 1937)

Nota bibliográfica dos trabalhos científicos mais importantes do Prof. Pinto Basto

Na Revista de Química pura e aplicada:

Retrogradação do ácido fosfórico nos adubos compostos. III Série, 2.º ano. 1925.

Extracção do óleo dos bagaços de azeitona. III Série, 2.º ano. 1925.

Análise duma rocha niquelífera. III Série, 5.º ano. 1930.

Na Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra:

Expressão do resultado da análise de uma água mineral. Vol. III, N.º 3, Pág. 261.

Aproveitamento da energia cósmica. Vol. IV, N.º 1, Pág. 64.

Contribuição para o estudo das águas sulfúreas portuguesas. Método de estabelecer a composição iónica das águas universais. Verificação dos resultados das análises. Vol. V, N.º 1, Pág. 29.

Acção química das radiações hertezianas. Vol. V, N.º 1, Pág. 97.

Águas minerais portuguesas ácidas relativamente ao alaranjado de metilo ($PH < 4,4$). Vol. V, N.º 2, Pág. 201.

Acção química das radiações hertezianas. Vol. V, N.º 2, Pág. 223.

Determinação da radioactividade em águas minerais. (Em colaboração com o assistente Américo Viana de Lemos). Vol. VI, N.º 1, Pág. 20.

Determinação da radioactividade em águas minerais situadas entre os rios Douro Mondego e Távora. (Em colaboração com o assistente Américo Viana de Lemos e o Professor Dr. José Custódio de Morais). Vol. VI, N.º 3, Pág. 237.

Nota bibliográfica dos trabalhos científicos mais importantes do Prof. Pinto Basto

Na Revista de Química pura e aplicada:

[illegible] do ácido [illegible] nos [illegible] compostos. III Série, 2.º ano. 1926.
Extracção do óleo dos bagaços de azeitona. III Série, 2.º ano. 1925.
Análise duma rocha [illegible]. III Série, 5.º ano. 1930.

Na Revista da Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra:

Expressão do resultado da análise de uma água mineral. Vol. III, N.º 2. Pág. 261.
Aproveitamento da energia [illegible]. Vol. V, N.º 1, Pág. 61.
Contribuição para o estudo das águas sulfúreas portuguesas. Método de calcular a composição [illegible] das águas sulfúreas. Verificação dos resultados das análises. Vol. V, N.º 1, Pág. 29.
Acção química das radiações [illegible]. Vol. V, N.º 1, Pág. 97.
Águas minerais portuguesas ácidas relativamente ao [illegible] de [illegible] ($P_H < 4,4$). Vol. V, N.º 2, Pág. 201.
Acção química das radiações [illegible]. Vol. V, N.º 2, Pág. 223.
Determinação da radioactividade em águas minerais. (Em colaboração com o assistente Américo Vianna de Lemos). Vol. VI, N.º 1, Pág. 20.
Determinação da radioactividade em águas [illegible] colhidas entre os rios Douro, Mondego e Tâmega. (Em colaboração com o assistente Américo Vianna de Lemos e o Professor Dr. José Custódio de Morais). Vol. VI, N.º 3, Pág. 237.

ÍNDICE

AVISO

Tôda a correspondência relativa à redacção deve ser dirigida à Direcção da Faculdade de Ciências, com a indicação de que se refere à REVISTA.