42

10
5
9

# JORNAL
DE
# SCIENCIAS MATHEMATICAS
E
# ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

**Dr. Francisco Gomes Teixeira**

Lente de Mathematica na Universidade de Coimbra
e
Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa

VOL. I—N.º 8

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1877

Neste livro estão os vol. 1.º 2.º e 3.º

## CONDIÇÕES DA ASSIGNATURA

Cada mez se publicará um numero do *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, que formarão no fim de cada anno um volume de 192 paginas.

Preço de cada volume (12 numeros)....... 2$400 réis.

As assignaturas são pagas adiantadamente.

A correspondencia relativa á Redacção do *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* deve ser dirigida para os Palacios Confusos, n.º 24 — Coimbra.

# JORNAL

DE

# SCIENCIAS MATHEMATICAS

E

# ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

**Dr. Francisco Gomes Teixeira**

Lente de Mathematica na Universidade de Coimbra
e
Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa

## VOL. I



COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1877

Começamos hoje a publicação de um Jornal dedicado ás Sciencias Mathematicas e Astronomicas. Quasi todos os paizes da Europa, ainda os mais pequenos, sustentam, além das publicações periodicas publicadas pelas corporações scientificas, onde vem artigos relativos a todas as sciencias, jornaes de iniciativa particular dedicados exclusivamente ás Sciencias Mathematicas ou ás Sciencias Astronomicas. Em Portugal não existe nenhum d'este segundo genero. É na realidade uma empresa difficil, que todavia ousamos emprehender, apezar das nossas poucas forças, confiados no auxilio que esperamos dos Mathematicos e Astronomos Portuguezes.

É nosso objecto a publicação de memorias relativas ás Mathematicas puras, á Mecanica racional e applicada, á Physica mathematica, á Astronomia, á Geodesia, á Stereotomia, etc.

Em cada numero haverá duas secções, uma relativa a questões de Mathematicas superiores, outra destinada ás pessoas que conhecem só as mathematicas, que se ensinam nos nossos cursos de instrucção secundaria, na qual publicaremos artigos sobre Mathematicas elementares, Noticias astronomicas, etc., para cujo bom exito esperamos que concorrerão os professores dos nossos Lyceus com seus artigos.

F. Gomes Teixeira.

# SECÇÃO I

## SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. Gomes Teixeira

**1.** Toute fraction rationelle de $x$ peut être décomposée en un polynôme entier et en une fraction dant le numérateur est d'un degré moindre que le dénominateur.

Cette fraction peut être encore décomposée, comme on sait, en d'autres, dont les dénominateurs sont des puissances d'un binome du premier degré en $x$. Beaucoup de géomètres se sont occupés de la détermination des numérateurs de ces fractions, et ont même donné des formules générales pour les trouver, mais ces formules font dépendre les numérateurs les uns des autres.

Le savant géomètre M. Hermite donne, dans son *Cours d'Analyse*, des formules directes pour trouver les numérateurs des fractions simples, dans lesquelles ou peut décomposer la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(x-a)^{\alpha+1}(x-b)^{\beta+1}}.$$

Le but de ce Mémoire est de généraliser cette doctrine, pour donner une forme, que je crois nouvelle, aux formules qui donnent les numérateurs des fractions simples, dans lesquelles on décompose une fraction rationelle, forme qui a l'avantage de donner ces numérateurs independamment les uns des autres. Les formules, auxquelles je parviens, contiennent les formules de M. Hermite comme cas particulier.

**2.** Toute fraction rationnelle propre, après avoir été réduite à son expression la plus simple, peut être décomposée de la manière suivante:

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^\alpha}$$

$$+ \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-a_2)^\beta}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{L_1}{(x-a_n)} + \frac{L_2}{(x-a_n)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-a_n)^\lambda},$$

$A_1, A_2, A_3, \ldots B_1, B_2, \ldots L_1, L_2 \ldots$ étant des constantes, et

$$F(x) = (x-a_1)^\alpha (x-a_2)^\beta \ldots (x-a_n)^\lambda.$$

Le problème à résoudre est la détermination des quantités $A_1$, $A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots L_1, L_2 \ldots$

Nous supposerons premièrement $F_1(x) = 1$.

Évidemment

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{1}{a_1-a_2} \times \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{a_2-a_1} \times \frac{1}{x-a_2},$$

donc, en multipliant les deux membres de cette égalité par $\frac{1}{x-a_3}$, et en appliquant ensuite la formule précédente aux produits

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_3)} \text{ et } \frac{1}{(x-a_2)(x-a_3)}, \text{ il vient}$$

$$\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}=\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}\cdot\frac{1}{x-a_1}$$

$$+\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}\cdot\frac{1}{x-a_2}+\frac{1}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}\cdot\frac{1}{x-a_3}.$$

En continuant de la même manière, on obtient en général la formule suivante:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}=&\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}\cdot\frac{1}{x-a_1}\\ &+\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}\cdot\frac{1}{x-a_2}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{1}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}\cdot\frac{1}{x-a_n}\end{aligned}\right\}(1).$$

Mais, d'un antre côté,

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{x-a_1-h_1}=\dfrac{1}{x-a_1}+\dfrac{h_1}{(x-a_1)^2}+\dfrac{h_1{}^2}{(x-a_1)^3}+\ldots \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad +\dfrac{h_1{}^{\alpha-1}}{(x-a_1)^{\alpha}}+\ldots \\[2ex]
\dfrac{1}{x-a_2-h_2}=\dfrac{1}{x-a_2}+\dfrac{h_2}{(x-a_2)^3}+\dfrac{h_2{}^2}{(x-a_2)^3}+\ldots \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad +\dfrac{h_2{}^{\beta-2}}{(x-a_2)^{\beta}}+\ldots \\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2ex]
\dfrac{1}{x-a_n-h_n}=\dfrac{1}{x-a_n}+\dfrac{h_n}{(x-a_n)^2}+\dfrac{h_n{}^2}{(x-a_n)^3}+\ldots \\[2ex]
\qquad\qquad\qquad +\dfrac{h_n{}^{\lambda-1}}{(x-a_n)^{\lambda}}+\ldots
\end{array}\right\}\ (2)$$

et

$$\frac{1}{a_1+h_1-(a_2+h_2)}=\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{h_2-h_1}{(a_1-a_2)^2}+\frac{(h_2-h_1)^2}{(a_1-a_2)^3}+\ldots$$

$$\frac{1}{a_1+h_1-(a_3+h_3)}=\frac{1}{a_1-a_3}+\frac{h_3-h_1}{(a_1-a_3)^2}+\frac{(h_3-h_1)^2}{(a_1-a_3)^3}+\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{a_1+h_1-(a_n+h_n)}=\frac{1}{a_1-h_n}+\frac{h_n-h_1}{(a_1-a_n)^2}+\frac{(h_n-h_1)^2}{(a_1-a_n)^3}+\ldots$$

En rémarquant que le coefficient de $h^m k^n$ dans le développement de $(k-h)^{m+n}$ est $(-1)^n [(m+n)\,Cn]$, les formules précédentes se transforment dans les suivantes:

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{a_1+h_1-(a_2+h_2)}=\frac{1}{a_1-a_2}+\frac{h_2-h_1}{(a_1-a_2)^2}+\dots\\
&+\Sigma(-1)^{\delta'}.\frac{[(\delta'+\beta-1)\,\mathrm{C}\,\delta']}{(a_1-a_2)^{\delta'+\beta}}h_1{}^{\delta'}h_2{}^{\beta-1}+\dots\\
&\frac{1}{a_1+h_1-(a_3+h_3)}=\frac{1}{a_1-a_3}+\frac{h_3-h_1}{(a_1-a_3)^2}+\dots\\
&+\Sigma(-1)^{\delta''}.\frac{[(\delta''+\gamma-1)\,\mathrm{C}\delta'']}{(a_1-a_3)^{\delta''+\gamma}}h_1{}^{\delta''}h_3{}^{\gamma-1}+\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{1}{a_1+h_1-(a_n+h_n)}=\frac{1}{a_1-a_n}+\frac{h_n-h_1}{(a_1-a_n)^2}+\dots\\
&+\Sigma(-1)^{\delta^{(n-1)}}.\frac{[(\delta^{(n-1)}+\lambda-1)\,\mathrm{C}\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\delta^{(n-1)}+\lambda}}h_1{}^{\delta^{(n-1)}}h_3{}^{\lambda-1}+\dots
\end{aligned}\right\}(3)
$$

dans lesquelles $\delta'$, $\delta''$, ... $\delta^{(n-1)}$ peuvent avoir toutes les valeurs entières et positives.

En substituant les développements (2) et (3) dans la formule (1), après avoir changé en celle-ci: $a_1$ en $a_1+h_1$, $a_2$ en $a_2+h_2$, $a_3$ en $a_3+h_3$, etc., et en égalant les coefficients de $h_1{}^{\alpha-1}\times h_2{}^{\beta-1}\times h_3{}^{\gamma-1}\dots h_n{}^{\lambda-1}$ dans les deux membres, on obtient une équation, dont le premier membre est $\frac{1}{\mathrm{F}(x)}$ et dont le deuxième membre est une somme de fractions simples, dans lesquelles $\frac{1}{F(x)}$ se peut décomposer.

On trouve ainsi que le numérateur de la première fraction, c'est à dire de la fraction $\frac{A_1}{x-a_1}$, est

$$\left.\begin{aligned} A_1 = (-1)^{\alpha-1} \sum \frac{[(\beta+\delta'-1)\,C\,\delta']}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}} \times \frac{[(\gamma+\delta''-1)\,C\,\delta'']}{(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}} \\ \times \ldots \times \frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,C\,\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}} \end{aligned}\right\} (4),$$

en étandant le $\Sigma$ à toutes les valeurs entières et positives, qui satisfont à l'équation indéterminée:

$$\delta'+\delta''+\delta'''+\ldots+\delta^{(n-1)} = \alpha-1 \qquad (5).$$

Le numérateur de la fraction $\frac{A_2}{(x-a_1)^2}$ peut être obtennu de la même manière. Nous avons dans ce cas:

$$\left.\begin{aligned} A_2 = (-1)^{\alpha-2} \sum \frac{[(\beta+\delta'-1)\,C\,\delta']}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}} \times \frac{[(\gamma+\delta''-1)\,C\,\delta'']}{(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}} \\ \times \ldots \times \frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,C\,\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}} \end{aligned}\right\},$$

où

$$\delta'+\delta''+\delta'''+\ldots+\delta^{(n-1)} = \alpha-2.$$

En général, le numérateur de $\frac{A_i}{(x-a_1)^i}$ est donné par la formule

$$A_i = (-1)^{\alpha - i} \Sigma \frac{[(\beta + \delta' - 1)\,C\,\delta']}{(a_1 - a_2)^{\beta + \delta'}} \times \frac{[\gamma + \delta'' - 1)\,C\,\delta'']}{(a_1 - a_3)^{\gamma + \delta''}} \times \ldots \times \frac{[(\lambda + \delta^{(n-1)} - 1)\,C\,\delta^{(n-1)}]}{(a_1 - a_n)^{\lambda + \delta^{(n-1)}}} \qquad (6)$$

en posant

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = \alpha - i.$$

Pour trouver les numérateurs des fractions $\frac{B_1}{(x-a_2)}, \frac{B_2}{(x-a_2)^2} \ldots$ $\frac{B_\beta}{(x-a_2)^\beta}$ il suffit de changer dans les formules précedentes $\alpha$ en $\beta$ et $a_1$ en $a_2$.

De la même manière, on trouve les numérateurs des fractions $\frac{C_1}{x-a_3}, \frac{C_2}{(x-a_3)^2}, \ldots \frac{C_\gamma}{(x-a_2)^\gamma}$ en changeant dans les formules antérieures: $\alpha$ en $\gamma$, et $a_1$ en $a_3$.

En continuant de la même manière on obtient tous les numérateurs des fractions simples, dans lesquelles on peut décomposer la fraction $\frac{1}{F(x)}$.

En faisant dans le formule (6) $a_1 = a$, $a_2 = b$, $\gamma = 0 \ldots \lambda = 0$, on obtient pour $A_1$, $A_2 \ldots$ les expressions

$$(-1)^{\alpha-1} \frac{[(\beta+\alpha-2)\,C\,(\alpha-1)]}{(a-b)^{\alpha+\beta-1}}, (-1)^{\alpha-2} \frac{[(\beta+\alpha-3)\,C\,(\alpha-2)]}{(a-b)^{\alpha+\beta-2}}, \ldots$$

qui s'accordent avec les formules qui se lisent dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, en changeant $\alpha$ en $\alpha+1$ et $\beta$ en $\beta+1$.

On aurait pu aussi déduire ces formules des formules connues:

$$1 = A_{(\alpha)} \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 2.1}$$

$$0 = A_{(\alpha)} \cdot \frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\alpha\ldots 2} + A_{(\alpha-1)} \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a)_1}{\alpha(\alpha+1)\ldots 2}$$

$$0 = A_{(\alpha)} \cdot \frac{F^{(\alpha+2)}(a_1)}{(\alpha+2)(\alpha+1)\ldots 3} + A_{(\alpha-1)} \cdot \frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\ldots 3}$$

$$+ A_{(\alpha-2)} \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha\ldots 3}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$0 = A_{(\alpha)} \cdot \frac{F^{(2\alpha-1)}(a_1)}{(2\alpha-1)\ldots\alpha} + A_{(\alpha-1)} \cdot \frac{F^{(2\alpha-2)}(a_1)}{(2\alpha-2)\ldots\alpha}$$

$$+ \ldots + A_1 \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha}$$

mais le calcul aurait été beaucoup plus compliqué.

*(à suivre).*

# SECÇÃO II

## NOTICIA SOBRE SATURNO

POR

F. GOMES TEIXEIRA

Saturno, o sexto dos planetas visiveis a olho nú na ordem das suas distancias ao sol, descreve uma ellipse em roda d'este astro a uma distancia media de 1:411 milhões de kilometros, com uma velocidade media de $9^k,5$ por segundo, e fazendo uma revolução em vinte e nove annos e meio proximamente.

Em virtude da combinação do seu movimento de translação com o movimento de translação da terra, parece umas vezes retrogradar na esphera celeste de oriente para occidente, outras vezes avançar de occidente para oriente, outras vezes estacionar. O primeiro caso dá-se logo depois de estar em opposição com o sol, e dura cento e trinta e nove dias pouco mais ou menos, o segundo dura duzentos e trinta e nove dias, passados os quaes o planeta está outra vez em opposição com o sol. Na occasião da conjuncção passa pelo merediano ao meio dia, na da opposição á meia noute, e está n'este ultimo caso á menor distancia da terra.

Quem observa Saturno por um bom telescopio é vivamente impressionado pelo aspecto admiravel d'este curioso planeta.

«Não ha talvez, diz o grande astronomo inglez W. Herschel, um objecto no céo que se nos mostre com tal variedade de phenomenos extraordinarios, como o planeta Saturno: um globo explendido rodeado por um annel duplo estupendo; acompanhado por sete satellites, ornamentado com cinturões equatoriaes; achatado nos pólos; girando em roda de um eixo; mutuamente eclipsando seus anneis e satellites, e eclipsado por elles; com o annel exterior girando tambem em roda de um eixo, bem como o mais affastado dos seus satellites; umas partes do systema reflectindo luz para as outras — os anneis e as luas illuminando as noutes dos Saturninos, o globo e as luas illuminando as partes obscuras dos anneis, e o planeta e os anneis reflectindo para as luas os raios do sol, quando privadas d'elles na occasião da sua conjuncção.»

Vê-se por esta eloquente descripção que nenhum planeta conhecido é mais curioso do que Saturno: vamos pois dar noticia das observações mais interessantes que se têm feito sobre este astro, e das explicações que se têm dado dos phenomenos por elle apresentados.

Poucos annos depois da descoberta do telescopio, Galileu, esse homem eminente, que tão grandes descobertas fez em Mecanica e Astronomia, mandou construir um para com elle explorar o céo. Foi com este instrumento que em **1610** pela primeira vez observou Saturno, quando este planeta estava proximo da opposição e por tanto mais favoravelmente disposto para ser observado. Viu, com grande espanto, que Saturno tinha a fórma de um disco, tendo dous outros menores symetricamente collocados um de cada lado. Notou mais que estes discos conservaram durante muitos mezes a mesma posição e grandeza. Esta descoberta foi por elle annunciada aos astronomos debaixo da fórma de anagramma, explicado depois n'uma carta a Giuliano de Medicis onde diz: que observou com grande espanto que Saturno não é uma estrella unica, mas tres, que parecem tocar-se, sendo a do meio maior que as lateraes, que estão situadas uma a oriente e outra a occidente, e n'uma linha que não está na direcção do zodiaco.

Anno e meio depois observou este grande homem outra vez Saturno, mas com grande surpreza viu um disco unico, sem estrellas lateraes, do que deu parte a Marco Velseri n'uma carta onde escreve: que não póde dizer cousa segura em caso tão estranho, inopinado e novo, que a brevidade do tempo, o accidente sem exemplo, a falta de engenho, e o receio de errar, o tornam grandemente confuso; onde expõe, porém, com toda a reserva, a esperança de que Saturno, em tempos determinados, se hade apresentar outra vez com a fórma com que o tinha visto primeiramente.

Fr/

É o que aconteceu. Algum tempo depois os appendices de Saturno appareceram de novo, foram alargando, tomando varias fórmas até tomar aquella que tinham, quando pela primeira vez os observou.

Galileu não pôde explicar estes phenomenos, que lhe apresentava Saturno, e Hevelius, astronomo infatigavel, que estudou muito este planeta e sobre o qual escreveu um livro —*De nativa Saturni facie*—, não o conseguiu tambem.

Em 1654, Huygens, que reuniu em tão elevado gráo o conhecimento das sciencias especulativas ao das sciencias applicadás, observando Saturno por um telescopio, instrumento que elle muito aperfeiçoou, viu que dentro dos appendices descobertos por Galileu havia espaços escuros de cada lado do disco do planeta, de modo que parecia um globo com duas azas, que mais tarde desappareceram.

Estava reservado a este sabio dar a explicação, que Galileu tinha procurado debalde, dos phenomenos manifestados pelos appendices de Saturno. Depois de os analysar nas suas diversas phases e de os combinar com as posições do astro relativamente ao sol e á terra, Huygens em 1659 reconheceu que o globo do planeta está cercado por um annel tenue, chato, que o não toca, inclinado sobre o plano da ecliptica e de expessura igual á do espaço comprehendido entre elle e o planeta, o que explicava completamente os phenomenos observados por Galileu, Hevelius e por elle mesmo. Os espaços escuros eram, com effeito, devidos ao espaço comprehendido entre o planeta e o annel, e as diversas apparencias que apresentavam os appendices eram devidas á posição dos anneis relativamente ao observador, em virtude do movimento de Saturno e da terra em roda do sol, porque sendo o plano dos anneis inclinado sobre o plano da orbita da terra, os anneis appareciam debaixo da fórma de uma ellipse, cujo eixo menor ia diminuindo á medida que a inclinação sobre o plano do annel dos raios luminosos, que vão d'elle para o olho do observador, ia diminuindo, até que, quando estes raios estavam no plano do annel, este desapparecia pela pequenez da sua expessura, que não era visivel nos telescopios. Desapparecia ainda o annel, quando, estando a terra de um lado do seu plano e o sol do outro, estava obscurecida a parte d'elle visivel da terra.

Seis annos depois da descoberta de Huygens observou W. Ball na superficie norte do annel uma facha escura, de expessura consideravel, com os seus contornos concentricos aos d'elle. Dez annos mais tarde descobriu D. Cassini uma facha correspondente no lado sul, e notou que a parte do annel exterior a esta facha não é tão brilhante como a interior.

Para explicar esta observação admittiu este astronomo que o annel é dividido em dous outros, sendo o interior mais brilhante do que o exterior.

Depois d'estas observações até ás de W. Herschel, fizeram-se algumas de menos importancia.

Este grande e infatigavel astronomo, munido com um telescopio superior a todos os do seu tempo, observou Saturno durante quinze annos, ora descobrindo n'este planeta phenomenos novos, ora confirmando os anteriormente observados.

Descobriu, medindo o tempo, que pequenas manchas de luz, que appareciam no annel, quando a sua borda estava directamente voltada para a terra, levavam a chegar de uma extremidade á outra da mesma borda, que o annel tem o movimento de rotação no seu proprio plano, fazendo uma revolução em $10^h$, $32^m$, $15^s$ de tempo medio.

Achando pouco provavel a divisão do annel em dous, como parecia resultar das observações de W. Ball e D. Cassini, observou durante dez annos as fachas escuras que estes astronomos haviam descoberto, um na face norte e o outro na face sul do annel, antes de admittir esta divisão. Tendo porém notado durante este intervallo de tempo que a facha do lado norte conservava sempre a mesma côr e expessura, apezar do annel ter movimento de rotação, e tendo achado os seus contornos concentricos aos do annel, admittiu finalmente a existencia da divisão, que d'este modo ficou completamente demonstrada.

Verificou mais, por um processo, de que adiante fallaremos, que os anneis estão no plano do equador de Saturno, como já tinha annunciado Hadley.

*(Continúa).*

# SECÇÃO I

## SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

(Suite)

**3.** On voit que, pour calculer les numérateurs $A_1, A_2, A_3, \ldots$, $B_1, B_2, B_3, \ldots$, nous avons premièrement à résoudre l'équation indéterminée:

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m,$$

où $\delta', \delta'', \delta''', \ldots \delta^{(n-1)}$ doivent être des nombres entiers et positifs, problème qui se présente en beaucoup de questions importantes d'analyse.

On peut, pour cela, suivre une règle due à Hindenbourg, que nous allons extraire des *Instituições Mathematicas* de *Simões Margiochi*, en renvoyant pour sa démonstration à cet excellent ouvrage.

En supposant

$$m_i = i, i+1, i+2, \ldots m$$

$$m^{(2)}{}_i = m_i, m_{i+1}, m_{i+2}, \ldots m_m$$

$$m^{(3)}{}_i = m^{(2)}{}_i, m^{(2)}{}_{i+1}, m^{(3)}{}_{i+2}, \ldots m^{(2)}{}_m$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les racines de l'équation indéterminée seront donnés par les égalités symboliques:

$$\delta' = m - m_0^{(n-2)},\ \delta'' = m_0^{(n-2)} - m_0^{(n-3)},\ \delta''' = m_0^{(n-3)} - m_0^{(n-4)},$$

.......................................................

$$\delta^{(n-3)} = m_0^{(3)} - m_0^{(2)},\quad \delta^{(n-2)} = m_0^{(2)} - m_0,\quad \delta^{(n-1)} = m_0$$

que l'on doit développer en ayant égard à la signification des symboles.

Si, par exemple, l'équation indéterminée est

$$x + y + z = 4,$$

il viendra

$$x = 4 - m^{(2)}_0,\ y = m^{(2)}_0 - m_0,\ z = m_0$$

ou, ayant égard à la signification des symboles,

$$x = 4 - m_0,\ y = m_0\quad ,\ z = 0$$

$$x = 4 - m_1,\ y = m_1 - 1,\ z = 1$$

$$x = 4 - m_2,\ y = m_2 - 2,\ z = 2$$

$$x = 4 - m_3,\ y = m_3 - 3,\ z = 3$$

$$x = 4 - m_4,\ y = m_4 - 4,\ z = 4$$

La première ligne donne cinq systèmes de racines, la deuxième en donne quatre, la troisième en donne trois etc. Ces solutions sont:

| | | |
|---|---|---|
| 4, 0, 0 | 3, 1, 0 | 2, 2, 0 |
| 1, 3, 0 | 0, 4, 0 | 3, 0, 1 |
| 2, 1, 1 | 1, 2, 1 | 0, 3, 1 |
| 2, 0, 2 | 1, 1, 2 | 0, 2, 2 |
| 1, 0, 3 | 0, 1, 3 | 0, 0, 4 |

Je vais exposer maintenant une autre règle, que je crois nouvelle, pour résoudre la même question, et qui est plus avantageuse pour notre but, parceque non seulement nous avons à résoudre l'équation

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m,$$

mais encore les équations

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m - 1$$

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m - 2$$

$$\delta' + \delta'' + \delta''' + \ldots + \delta^{(n-1)} = m - 3$$

..............................

Pour plus de clarté, nous allons raisonner sur un exemple, mais il est facile de voir que ce que nous allons dire est général. Soit proposée l'équation

$$x + y + z + t = 4.$$

Écrivons premièrement

**4, 3, 2, 1, 0.**

Écrivons ensuite devant chacun de ces chiffres ceux qui lui étant additionnés donnent 4 ou moins de 4. On obtient

4,0; 3,1; 3,0; 2,2; 2,1; 2,0; 1,3;
1,2; 1,1; 1,0; 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0,0.

Devant chacun de ces groupes mettons les chiffres qui étant additionnés aux chiffres du groupe donnent 4 ou moins de 4. Il vient

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4,0,0 | 3,1,0 | 3,0,1 | 3,0,0 | 2,2,0 |
| 2,1,1 | 2,1,0 | 2,0,2 | 2,0,1 | 2,0,0 |
| 1,3,0 | 1,2,1 | 1,2,0 | 1,1,2 | 1,1,1 |
| 1,1,0 | 1,0,3 | 1,0,2 | 1,0,1 | 1,0,0 |
| 0,4,0 | 0,3,1 | 0,3,0 | 0,2,2 | 0,2,1 |
| 0,2,0 | 0,1,3 | 0,1,2 | 0,1,1 | 0,1,0 |
| 0,0,4 | 0,0,3 | 0,0,2 | 0,0,1 | 0,0,0 |

Devant chacun de ces groupes mettons maintenant les chiffres qui additionnés à ceux de ce groupe donnent 4, et nous obtiendrons:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4,0,0,0 | 3,1,0,0 | 3,0,1,0 | 3,0,0,1 |
| 2,2,0,0 | 2,1,1,0 | 2,1,0,1 | 2,0,0,2 |
| 2,0,1,1 | 2,0,0,2 | 1,3,0,0 | 1,2,1,0 |
| 1,2,0,1 | 1,1,2,0 | 1,1,1,1 | 1,1,0,2 |
| 1,0,3,0 | 1,0,2,1 | 1,0,1,2 | 1,0,0,3 |
| 0,4,0,0 | 0,3,1,0 | 0,3,0,1 | 0,2,2,0 |
| 0,2,1,1 | 0,2,0,2 | 0,1,3,0 | 0,1,2,1 |
| 0,1,1,2 | 0,1,0,3 | 0,0,4,0 | 0,0,3,1 |
| 0,0,2,2 | 0,0,1,3 | 0,0,0,4 | |

que sont tous les systèmes de racines entières et positives de l'équation proposée.

Il est convenable, pour voir si l'on a oublié quelque système de racines, de chercher une formule qui en donne le nombre. C'est ce que nous allons faire. Nous designerons, dans ce qui va suivre, par $N_i$ le nombre de combinations $i$ à $i$ des chiffres, obtenues comme nous l'avons dit précédemment.

On sait par l'Algèbre que

$$[(m+n)\,C\,n] = [(m+n-1)\,C^{(n-1)}] + [(m+n-2)\,C^{(n-1)}]$$

$$+\dots+[(m+n-q)\,C^{(n-1)}]$$

$$+[(m+n-q)\,Cn],$$

d'où l'on déduit

$$[(m+2)\,C\,2] = [(m+1)\,C\,1] + [m\,C\,1] + \ldots\ldots + [2\,C\,1] + 1$$

$$[(m+3)\,C\,3] = [(m+2)\,C\,2] + [m+1)\,C\,2] + \ldots + [3\,C\,2] + 1$$

$$[(m+4)\,C\,4] = [(m+3)\,C\,3] + [m+2)\,C\,3] + \ldots + [4\,C\,3] + 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et

$$[(m+1)\,C\,2] = [(m+2)\,C\,2] - [(m+1)\,C\,1]$$

$$[m\,C\,2] = [(m+2)\,C\,2] - [(m+1)\,C\,1] - [m\,C\,1]$$

$$[(m-1)C2] = [(m+2)C2] - [(m+1)C\,1] - [m\,C\,1] - [(m-1)C\,1]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et de la même manière

$$[(m+2)\,C\,3] = [(m+3)\,C\,3] - [(m+2)\,C\,2]$$

$$[(m+1)\,C\,3] = [(m+3)\,C\,3] - [(m+2)\,C\,2] - [(m+1)\,C\,2]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'un autre côté, en réfléchissant sur la méthode indiquée pour résoudre l'équation indéterminée, on voit que

$$N_1 = m + 1 = [(m+1)\,C\,1]$$

et

$$N_2 = (m+1) + m + (m-1) + (m-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$$

$$= [(m+1)\,C\,1] + [m\,C\,1] + [(m-1)\,C\,1] + \ldots [2\,C\,1] + 1$$

donc, en ayant égard aux formules précédentes,

$$N_2 = [(m+2)\,C\,2].$$

De la même manière on obtient

$$N_3 = N_2 + [N_2 - (m+1)] + [N_2 - (m+1) - m]$$
$$+ [N_2 - (m+1) - m - (m-1)] + \ldots + 1,$$

ou, ayant aussi égard aux formules précédentes,

$$N_3 = [(m+3)\,C\,3].$$

On obtient $N_4$ en ôtant de $N_3$ successivement un, deux, trois, etc., parcelles de $N_3$, et additionnant ensuite les résultats obtenus. Il vient ainsi:

$$N_4 = N_3 + [N_3 - N_2] + [N_3 - N_2 - (N_2 - (m-1))] + \ldots.$$

qu'on peut écrire

$$N_4 = [(m+4)\,C\,4].$$

En continuant de la même manière on trouve enfin la formule

$$N_{n-2} = [(m+n-2)\,C\,(n-2)]$$

qui donne le nombre de systèmes de racines de l'équation indéterminée.

Dans l'exemple proposé nous avons $m=4$ et $n=5$, donc $N_3 = 35$.

Après avoir résolu l'équation $x+y+z+t=4$, pour résoudre l'équation $x+y+z+t=3$, il n'est pas nécessaire de répéter tout le calcul précédent, parceque il suffit dans les groupes de trois chiffres de joindre à chacun un chiffre tel que la somme des quatre chiffres du groupe soit égale à 3. Il vient ainsi

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3, 0, 0, 0 | 2, 1, 0, 0 | 2, 0, 1, 0 | 2, 0, 0, 1 |
| 1, 2, 0, 0 | 1, 1, 1, 0 | 1, 1, 0, 1 | 1, 0, 2, 0 |
| 1, 0, 1, 1 | 1, 0, 0, 2 | 0, 3, 0, 0 | 0, 2, 1, 0 |
| 0, 2, 0, 1 | 0, 1, 2, 0 | 0, 1, 1, 1 | 0, 1, 0, 2 |
| 0, 0, 3, 0 | 0, 0, 2, 1 | 0, 0, 1, 2 | 0, 0, 0, 3 |

Pour résoudre l'équation

$$x+y+z+t=2$$

il suffit de poser devant chaque groupe de trois chiffres un chiffre qui additionné à ceux du groupe donne **2**, et il vient:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2, 0, 0, 0 | 1, 1, 0, 0 | 1, 0, 1, 0 | 1, 0, 0, 1 | 0, 2, 0, 0 |
| 0, 1, 1, 0 | 0, 1, 0, 1 | 0, 0, 2, 0 | 0, 0, 1, 1 | 0, 0, 0, 2 |

De la même manière on obtient les systèmes de racines de l'équation

$$x+y+z+t=1$$

qui sont

1, 0, 0, 0  0, 1, 0, 0  0, 0, 1, 0  0, 0, 0, 1.

Comme application de cette doctrine, décomposons en fractions simples la fraction rationnelle suivante:

$$\frac{1}{x^6-6x^5+14x^4-16x^3+9x^2-2x}=\frac{1}{(x-1)^4(x-2)x}$$

$$=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{A_4}{(x-1)^4}$$

$$+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x}$$

En posant dans la formule (6) $i=1$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=0$, il vient

$$A_1=\Sigma(-1)^3\frac{[\delta' C \delta'][\delta'' C \delta'']}{(-1)^{1+\delta'}1^{1+\delta''}}=\Sigma\frac{1}{(-1)^{\delta'}},$$

étant $\delta'+\delta''=3$, et par conséquent $\delta'=3, 2, 1, 0$, ce qui donne $A_1=0$.

De la même manière on obtient, en posant $i=2$

$$A_2=-\Sigma\frac{1}{(-1)^{\delta''}},\ \delta'+\delta''=2,$$

ce qui donne $\delta'=2, 1, 0$ et par conséquent $A_2=-1$.

En continuant de la même manière, c'est à dire en faisant $i=3$ et $\delta'+\delta''=1$, et après $i=4$, $\delta'+\delta''=0$, il vient $A_3=0$, $A_4=-1$.

La même formule (6) donne

$$B=\Sigma\frac{1}{1^{\delta'+1}2^{\delta''+1}},\ \delta'+\delta''=0,$$

d'où l'on déduit $B=\frac{1}{2}$.

On obtient aussi

$$C=\Sigma\frac{1}{(-1)^{\delta'+4}(-2)^{\delta''+1}},\ \delta'+\delta''=0$$

ce qui donne $C=-\frac{1}{2}$.

Le résultat de la décomposition de la fraction proposée en des fractions simples est donc le suivant:

$$\frac{1}{x^6-6x^5+14x^4-16x^3+9x^2-2x}=\frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$+\frac{-1}{(x-1)^4}+\frac{\frac{1}{2}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{2}}{x}.$$

*(à suivre).*

# SECÇÃO II

## NOTICIA SOBRE SATURNO

POR

F. Gomes Teixeira

(Continuação)

Mediu tambem W. Herschel a largura do systema de anneis de Saturno, e achou que está para a largura do espaço comprehendido entre elles e o planeta, como 5 para 4.

Demonstrou que a expessura dos anneis é muito pequena por meio de observações tão completas, que não deixam a menor duvida a este respeito. O processo, que seguiu, foi, quando a borda dos anneis estava voltada directamente para a terra, ver passar diante d'ella os satellites de Saturno, que faziam assim o papel de micrometros para avaliar a sua expessura. A borda dos anneis formava uma linha luminosa, sobre a qual se moviam os satellites «como contas por um fio.»

De ver ainda os anneis quando o sol estava de um lado e a terra do outro lado do seu plano, tirou a conclusão, que provavelmente a borda de cada annel não é cylindrica, mas sim espheroidica.

As observações de W. Herschel sobre Saturno foram expostas em duas bellas Memorias, que este grande astronomo apresentou á Sociedade Real de Londres, e foram publicadas nos volumes das *Phyl. Trans.* correspondentes aos annos de 1790 e 1792. Estas Memorias fornecem um exemplo notavel das precauções e cuidado, com que este infatigavel astronomo fazia as suas observações, antes de emittir a sua opinião sobre o phenomeno observado.

No nosso seculo tem-se feito muitas descobertas importantes sobre a estructura dos anneis de Saturno.

Em 1850 os astronomos americanos G. Bond e W. Bond, membros do observatorio de Harvard, descobriram um terceiro annel interior aos outros dous, obscuro e diaphano. Este annel foi depois visto por muitos outros observadores, e apresentou-se tão distinctamente, que admira não ter sido descoberto por W. Herschel, que usava já de um bom telescopio. Suppõe-se que este grande astronomo o confundiu com um cinturão equatorial, que nos seus desenhos de Saturno apparece perfeitamente concentrico com as bordas do annel interior.

Aquelle mesmo astronomo descobriu juncto da borda interior do annel brilhante espaços obscuros, cujos contornos formavam uma ellipse de grande excentricidade, concentrica com a formada pelas bordas do mesmo annel, e cortando as bordas do annel obscuro obliquamente em quatro pontos.

Depois das descobertas precedentes, a mais importante é a de Wray. Este astronomo observou, quando a borda do annel estava voltada directamente para a terra, uma linha de luz muito estreita, que, passando além de outra linha de luz menos estreita, parecia pertencer ao annel exterior. Concluiu d'aqui que o annel exterior é menos expesso, do que o do meio.

Estas observações foram depois confirmadas pelas do eminente astronomo, Director do Observatorio de Pulkowa, Otto Struve.

Durante todo o seculo XIX, muitos astronomos eminentes têm descoberto nos anneis fachas obscuras concentricas com as bordas dos mesmos, mas estas fachas não são permanentes, nem pertencem os seus contornos aos mesmos circulos; não se póde, pois, concluir d'aqui, que ha mais de tres anneis. Algumas vezes estas fachas são semi-córadas ou côr de cinza, como observaram Bond e Dawes.

Terminaremos a exposição das observações feitas sobre os appendices de Saturno, apresentando a relação entre a largura do systema de anneis brilhantes e a largura do espaço comprehendido entre elles e o planeta nas diversas epochas, relação de que teremos depois de fazer uso, para a determinação da natureza dos mesmos anneis.

Segundo Huygens, cujas observações foram feitas no seculo XVI, a largura do systema de anneis e a largura do espaço comprehendido entre elles e o planeta são iguaes.

Segundo Pound, o systema de anneis é menos estreito do que o espaço comprehendido entre elle e o planeta.

As medidas de W. Herschel, feitas no seculo passado, dão a razão da largura do systema de anneis para a do espaço comprehendido entre elles e o planeta igual á de 5 para 4. As de Hind, feitas no seculo XIX, dão esta razão como sendo a mesma que de 10 para 7, e as de O. Struve, feitas no mesmo seculo, como sendo a mesma que de 10 para $6\frac{1}{2}$. Estas observações foram discutidas completamente por O. Struve, que chegou á conclusão que uma tal differença não podia provir da imperfeição das observações antigas, e que os anneis tem crescido em largura, approximando-se cada vez mais do planeta, visto que o diametro exterior não tem soffrido alteração notavel.

«Continuarão, diz Guilmin, estas modificações a produzir-se no mesmo sentido, ou serão seguidas de mudanças inversas? Graves questões que interessam a conservação do appendice annullar. Está talvez reservado ás gerações futuras assistir ao mais commovente de todos os phenomenos que póde apresentar ao homem o mundo solar, de que a sua morada faz parte. Talvez se veja nos céos o grandioso espectaculo do cataclysmo produzido pela deslocação dos anneis de Saturno.»

Mais tarde mostraremos que não ha a receiar tal cataclysmo, pois que as modificações agora observadas poderão depois ter logar em sentido inverso.

Em dimensões absolutas, o annel exterior tem de largura 3:152 leguas de 5 kilometros, e é separado do annel medio por um espaço vazio de 680 leguas. Este segundo annel tem uma largura de 6:320 leguas, e o annel obscuro tem de largura 2:784 leguas. A expessura do systema de anneis é de 80 leguas. É escusado dizer que estas dimensões são apenas approximadas, e que variam com o tempo.

Muitas outras observações interessantes têm sido feitas sobre os anneis de Saturno, mas as que vimos de expôr são as mais importantes para a discussão da sua natureza, de que agora passamos a occupar-nos.

Apresentando phenomenos unicos no mundo conhecido, o planeta Saturno não podia deixar de chamar, mais que qualquer outro planeta, a attenção dos que tomam o céo para campo das suas explorações ou objecto de seu pensar. É assim que quasi todos os observadores, desde Galileu, se tem occupado d'este planeta, e muitos sabios tem tambem tomado os phenomenos que elle apresenta para thema de suas meditações.

Maupertuis suppunha a causa do annel de Saturno na cauda de um cometa, que attrahido por aquelle, quando passava perto, se tinha inflectido e o tinha cercado.

Buffon, o celebre naturalista, explicava o annel de Saturno, suppondo que era uma porção da região equatorial do planeta, separada d'este em virtude da força centrifuga em tempo, no qual o planeta se extèndera até á região dos anneis.

Mairian dizia que o annel era uma parte da região do equador do planeta arrancada por alguma violenta convulsão.

Estas hypotheses estão já hoje fóra do campo da discussão, e por isso não nos demoraremos mais com ellas. Tractaremos só de ver o que são os anneis na actualidade, isto é, se são corpos continuos solidos, liquidos ou gazosos, ou uma agglomeração de satellites, que são evidentemente os unicos estados em que os podemos suppor.

O eminente mathematico francez, Laplace, na sua obra monumental a —*Mecanica Celeste,* tractou do equilibrio dos anneis de Saturno com aquella profundeza, com que este grande homem costumava tractar as questões mais difficeis do systema do mundo.

Depois, n'outra obra, a que elle deu o nome de —*Exposição do systhema do mundo,* e onde resumiu os resultados a que chegou na *Mecanica Celeste* em linguagem elegante e pura, expoz n'um pequeno capitulo os resultados das suas brilhantes indagações sobre os anneis de Saturno. É a doutrina d'este sabio que passamos primeiramente a expôr.

Sabe-se, desde Newton, que a força, que sollicita duas particulas materiaes uma para a outra, está na razão directa das suas massas e na inversa do quadrado das suas distancias.

Portanto o planeta sollicita para si os anneis, segundo a lei anterior, e como esta força é muito grande, pela grandeza de Saturno, permanente, e a resistencia dos anneis pequena, por causa da sua pequena expessura, segue-se que os anneis deveriam cahir em fragmentos sobre o planeta. M. Hirn calculou ultimamente o peso do annel do meio, e achou que, suppondo-o composto de materia tão pesada como o hydrogeneo, que é o mais leve dos corpos conhecidos, o peso total do annel em virtude da attracção que sobre elle exerce o planeta, seria de duzentos milhões de milhares de tonneladas. Portanto, para não ter logar a destruição dos anneis, é necessario que exista uma força em sentido contrario, capaz de equilibrar aquella. Esta força existe, como vamos ver.

Quando um corpo se move em roda de um centro fixo ou movel, sujeito a uma força dirigida para esse centro, desenvolve-se uma força de reacção em sentido contrario, que, por causa da direcção, se chama *força centrifuga*. Esta força cresce com a velocidade do movimento.

Para o equilibrio dos anneis de Saturno ter logar, basta pois que elles tenham movimento de rotação em roda do planeta com uma velocidade sufficiente para a força centrifuga resultante equilibrar a attracção d'aquelle.

Laplace calculou mesmo o tempo que levaria uma revolução dos anneis.

Este movimento de rotação foi observado, como já dissemos, por W. Herschel, bem como o tempo que levava uma revolução, e os resultados dos calculos do geometra francez concordaram completamente com as observações do astronomo inglez.

Este movimento de rotação não é porém sufficiente para o equilibrio dos anneis.

Sendo, com effeito, a parte interior de um annel attrahido pelo planeta com mais força do que a exterior, em virtude de a força da attracção ser inversamente proporcional ao quadrado das distancias, como já dissemos, e sendo, para a mesma velocidade de rotação, a força centrifuga proporcional á distancia ao centro, a differença d'estas duas leis faria que o equilibrio entre a força de attracção e a força centrifuga não podesse ter logar em toda a largura do annel, e o annel partir-se-ia, a não ter uma cohesão sufficiente,

M. Hirn demonstrou que, suppondo as condições mais favoraveis para a conservação d'um annel, isto suppondo-o formado da mais leve e mais resistente das substancias conhecidas, cada annel não deveria ter mais de 1:200 leguas, e portanto que o annel medio deveria compor-se de cinco anneis pelo menos. Já vimos o que a observação mostra a tal respeito.

Para ver qual seria a figura dos anneis de Saturno, seguiu Laplace o caminho que, desde Newton, se seguia para a determinação da figura dos planetas, questão de que elle já havia tractado n'um capitulo anterior da sua obra de uma maneira brilhante, dando um impulso vigoroso a esta doutrina, uma das mais difficeis da *Mecanica Celeste*.

Suppoz que os anneis tinham estado anteriormente no estado de fusão ignea, e que, arrefecendo gradualmente pela irradiação de seu calor para o espaço, tinham tomado o estado solido. Era uma extensão aos planetas e aos anneis do que parece ter tido logar na terra, como têm attestado os estudos geologicos.

Procurou depois qual seria a figura que tomaria uma annel fluido, girando em roda de Saturno, sujeito á attracção d'este astro.

Aqui, como na determinação da figura dos planetas, não pôde Laplace determinar directamente qual a superficie da massa fluido para estar em equilibrio. O que pôde foi verificar que a superficie do corpo gerado por uma ellipse, movendo-se em roda do eixo do planeta, satisfaz, e foi esta que elle admittiu para os anneis. Viu mais que esta ellipse póde variar de grandeza de secção para secção, e mesmo que para o equilibrio dos anneis torna-se necessaria esta variação.

Com effeito, se os anneis fossem regulares e homogeneos, de modo que o seu centro de gravidade coincidisse com o do planeta, demonstrou Laplace que o equilibrio seria instavel, isto é, que bastaria uma pequena força, tal como a acção de um satellite, de um cometa, etc., para deslocar estes dous centros, e desde então o centro do annel afastar-se-ia sempre do do planeta, até o annel ir bater contra elle.

Diz pois Laplace que os anneis são solidos, cujos centros de figura coincidem proximamente com o de Saturno, mas cujos centros de gravidade pódem e devem achar-se n'um ponto differente.

Cada centro gira em roda do planeta no mesmo tempo que o annel, e o annel gira em roda do seu centro de gravidade no mesmo tempo que em roda de Saturno. Este equilibrio dos anneis é comparado por J. Herschel ao que tem logar, quando um clown sustenta uma vara direita e n'um estado de immobilidade apparente, na extremidade de um dedo ou sobre a fronte, communicando á base movimentos imperceptiveis.

Esta doutrina de Laplace sobre o equilibrio dos anneis de Saturno foi completamente admittida durante muito tempo. Tendo-se porém proposto no meio do presente seculo algumas duvidas sobre ella, quando a descoberta do annel obscuro chamou outra vez a attenção sobre este planeta, foi ella proposta pela Universidade de Cambridge para o concurso ao premio Adams, premio que foi conferido ao distincto geometra e physico J. Clerk Maxwell. Na sua *Memoria* começou Maxwell por estudar o movimento de um corpo qualquer em roda de Saturno, e depois suppondo que esse corpo era um annel solido, chegou á conclusão que as apparencias deveriam ser differentes das que manifestam os telescopios. Além d'isso demonstrou que, na hypothese de Laplace, a mais pequena causa seria bastante para destruir a estabilidade do annel.

Mr. Maxwell considerou tambem a hypothese de ser o annel fluido, e concluiu que, em virtude da attracção do planeta, deveriam formar-se vagas, e o annel dividir-se em satellites fluidos, e poz portanto tambem de parte esta hypothese.

Restava pois só a hypothese de que os anneis são formados por uma multidão de satellites. Esta hypothese já fôra proposta muito tempo antes por J. Cassini, que diz: «Esta apparencia, de que não vemos exemplo nos outros corpos celestes, nos levou a conjecturar, que podia ser uma multidão de satellites, dispostos quasi no mesmo plano, girando em roda do planeta, tendo um volume tão pequeno que se não podessem aperceber separadamente, e tão proximos uns dos outros que se não podessem distinguir tambem os intervallos que os separam, de modo que parecessem formar um corpo continuo.»

Maxwell adoptou-a, suppõe porém que, em virtude dos choques entre estes satellites tão visinhos, a destruição dos anneis deve ter logar depois de muitos seculos.

No estado actual da sciencia, a analyse mathematica não póde ser applicada ao movimento dos anneis considerados como reunião de satellites. Se houve grandes difficuldades para applicar a analyse ao movimento da lua, que difficuldade não haverá para calcular o movimento de cada um dos satellites quę constituem os anneis de Saturno, que estão sujeitos á acção do planeta central, do sol, dos oito satellites que acompanham Saturno, dos outros corpos que fazem parte dos anneis e ás acções menores dos outros membros do systema solar?

M. Hirn, sem ter conhecimento dos trabalhos de Mr. Maxwell, estudou tambem as condições de equilibrio dos anneis de Saturno, e chegou ás mesmas conclusões que o geometra inglez.

Mostrou primeiro que a irregularidade, que Laplace tinha attribuido aos anneis, seria a causa da sua destruição, pois que, sendo as diversas partes do annel desigualmente attrahidas, e a força centrifuga constante, não poderia haver equilibrio entre as duas forças e o annel deveria alongar-se, formando uma ellipse. Demonstrou mais M. Hirn que, para não ter logar um alongamento real e successivo, seria necessario que, suppondo o caso mais desfavoravel para este alongamento de ter a substancia do annel a densidade do hydrogeneo, tivesse o annel uma rigidez e cohesão muito superior á do diamante, isto é, seria necessario suppor o annel formado de uma substancia imaginaria.

Apresenta ainda Hirn uma experiencia para mostrar que a constituição que Laplace atttribue aos anneis não póde ter logar. Com effeito, Gallet descobriu a excentricidade dos anneis relativamente ao planeta, Schawabe e Harding verificaram-n'a, W. Struve, South e J. Herschel mediram-n'a; mas estes astronomos acharam esta excentricidade sempre do mesmo lado, em quanto que, segundo a theoria de Laplace, ella deveria variar de posição durante uma revolução dos anneis, e o planeta deveria parecer occilar da direita para a esquerda durante meia revolução dos anneis, e depois da esquerda para a direita durante a outra meia.

Conclue de tudo isto Hirn que os anneis não podem ser solidos formados de uma só peça.

*(Continúa).*

# SECÇÃO I

## SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. Gomes Teixeira



(Suite)

**4.** Nous allons passer maintenant à la décomposition de la fraction rationnelle $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ en des fractions simples.

Nous avons

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{M_1}{x-a_1}+\frac{M_2}{x-a_2}+\ldots+\frac{M_\alpha}{(x-a_1)^\alpha}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

où est

$$\varphi(x)=(x-a_2)^\beta(x-a_3)^\gamma\ldots(x-a_\alpha)^\lambda,$$

et nous voulons déterminer les constantes $M_1, M_2, M_3, \ldots M_\alpha$.

En faisant $x=a_1+h$, il vient

$$\frac{F_1(a_1+h)}{F(a_1+h)}=\frac{M_1}{h}+\frac{M_2}{h^2}+\ldots+\frac{M_\alpha}{h^\alpha}+\frac{\varphi_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}.$$

Le quotient de la division de $\varphi_1(a_1+h)$ par $\varphi(a+h)$ ne peut contenir que des puissances entières de $h$, parceque, $\varphi(a_1)$ n'étant pas nulle, $\frac{\varphi_1(a_1)}{\varphi(a)}$ ne peut pas être égal à l'infinit, et par conséquent

$M_1, M_2, M_3, \ldots M_\alpha$ sont les coefficientes de $\frac{1}{h}, \frac{1}{h^2}, \frac{1}{h^3}, \ldots$

dans le développement de $\frac{F_1(a_1+h)}{F(a+h)}$ suivant les puissances de $h$.

Cela posé, nous avons (n.° 2)

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{A_1 F_1(x)}{x-a_1} + \frac{A_2 F_1(x)}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha F_1(x)}{(x-a_1)^\alpha}$$

$$+ \frac{B_1 F_1(x)}{x-a_2} + \frac{B_2 F_1(x)}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_\beta F_1(x)}{(x-a_2)^\beta}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{K_1 F_1(x)}{(x-a_n)} + \frac{K_2 F_1(x)}{(x-a_n)^2} + \ldots + \frac{K_\lambda F_1(x)}{(x-a_n)^\lambda}$$

$A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots K_1, K_2, \ldots$ étant des constantes que nous avons déjà déterminé précédemment.

En faisant $x = a_1 + h$ dans le premier terme de cette somme, il vient

$$A_1 \frac{F_1(a_1+h)}{h} = A_1 \frac{F_1(a_1) + h F_1'(a_1) + \frac{1}{2} h^2 F_1''(a_1) + \ldots}{h}$$

$$= A_1 h^{-1} F_1(a_1) + A_1 F_1'(a_1) + \frac{1}{2} A_1 h F_1''(a_1) + \ldots$$

De la même manière le second terme de la somme donne

$$\frac{A_2 F_1(a_1+h)}{h^2} = A_2 h^{-2} F_1(a_1) + A_2 h^{-1} F_1'(a_1)$$

$$+ \frac{1}{2} A_2 F_1''(a_1) + \ldots,$$

et le troisième donne

$$A_3 \frac{F_1(a_1+h)}{h^3} = A_3 h^{-3} F_1(a_1) + A_3 h^{-2} F_1'(a_1)$$

$$+ \frac{1}{2} A_3 h^{-1} F_1''(a_1) + \frac{1}{2.3} A_3 F_1'''(a_1) + \ldots,$$

et on peut continuer ainsi pour tous les termes de la première ligne.

En faisant $x = a_1 + h$ dans les autres lignes, ils ne viennent pas des puissances negatives de $h$, et pour cela il ne faut pas y avoir égard.

Les coefficients de $\frac{1}{h}$ seront donc

$$A_1 F_1(a_1), A_2 F_1'(a_1), \ldots \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} F_1^{(\alpha-1)}(a_1)$$

et par conséquent

$$M_1 = A_1 F_1(a_1) + A_2 F_1'(a_1) + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} F_1^{(\alpha-1)}(a_1).$$

Additionnant séparément les coefficients des secondes, troisièmes, etc. puissances de $\frac{1}{h}$, on obtient les valeurs de $M_2$, $M_3$, $M_4 \ldots$, et nous avons ainsi les formules suivantes:

$$
\left.
\begin{aligned}
M_1 &= A_1 F_1(a_1) + A_2 F_1'(a_1) + \frac{1}{2} A_3 F_1''(a_1) \\
&\quad + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} F_1^{(\alpha-1)}(a_1) \\
M_2 &= A_2 F_1(a_1) + A_3 F_1'(a_1) + \frac{1}{2} A_4 F_1''(a_1) \\
&\quad + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-2)} F_1^{(\alpha-2)}(a_1) \\
M_3 &= A_3 F_1(a_1) + A_4 F_1'(a_1) + \frac{1}{2} A_5 F_1''(a_1) \\
&\quad + \ldots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-3)} F_1^{(\alpha-3)}(a_1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
M_\alpha &= A_\alpha F_1(a_1),
\end{aligned}
\right\} \quad (7)
$$

que sont les formules que nous cherchions.

Pour trouver les numérateurs $P_1, P_2, P_3, \ldots$ des autres fractions simples dans lesquelles on peut décomposer $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, dont les dénominateurs sont $x - a_2$, $(x - a_2)^2$, etc., il suffit de changer dans les formules précédentes $a_1$ en $a_2$ et $A_1, A_2, A_3, \ldots A_\alpha$ en $B_1, B_2, B_3, \ldots B_\beta$.

Il faut faire des changements analogues pour trouver les autres fractions simples.

On aurait pu aussi déduire les formules précédentes des formules connues:

$$F_1(a_1) = M_\alpha \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 2.1}$$

$$F_1'(a_1) = M_\alpha \frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\alpha\ldots 2} + M_{\alpha-1} \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha+1)\ldots 2}$$

$$F_1''(a_1) = M_\alpha \frac{F^{(\alpha+2)}(a_1)}{(\alpha+2)(\alpha+1)\ldots 3} + M_{(\alpha-1)} \cdot \frac{F^{(\alpha+1)}(a_1)}{(\alpha+1)\ldots 3}$$

$$+ M_{(\alpha-2)} \cdot \frac{F^{(\alpha)}(a_1)}{\alpha(\alpha-1)\ldots 3}$$

.....................................................

*(à suivre).*

## LETTRE DE M. D. A. DA SILVA À M. MOIGNO

### SUR UNE RÉCLAMATION DE PRIORITÉ

(article extrait du journal *Les Mondes* du 29 de mars de 1877)

Ce n'est que bien tard, par la lecture de votre intéressante revue (n° du 13 janvier 1877), que j'ai été informé que M. Darboux avait présenté à l'Académie des sciences de Paris un mémoire, par lequel sont ajoutées d'importantes propriétés, qu'il croit nouvelles, à la théorie de Möbius, relative aux transformations d'un système de forces de grandeurs et de directions constantes, agissant en des points d'un corps solide, quand ce corps change d'orientation dans l'espace, théorie que, quoique ayant la date 1837, vous fûtes le premier à faire connaître en France, en 1868 [1].

Vous aurez la complaisance de m'excuser, je l'espère bien, si je vous demande l'honneur de profiter de la grande publicité et de l'auctorité reconnue de votre recueil, noblement voué à la diffusion de la science et aux indications précises de son histoire, en vous adressant une réclamation de priorité qui, malheureusement pour moi, en présence de dates connues, ne peut être que partielle.

A la séance du 27 février 1850, a été présenté par moi, à l'Académie royale des sciences de Lisbonne [2], un mémoire écrit en portugais, *sur la rotation des forces autour de leurs points d'application* [3]. A cette époque, j'ignorais complètement que, treize

---

[1] *Leçons de mécanique analytique. Statique.*

[2] Actas das sessões da Academia real das sciencias de Lisboa, tom. II, pag. 41.

[3] *Memoria sobre a rotação das forças em torno dos pontos de applicação.* Hist. e mem. da Academia real das sciencias de Lisboa, 2.ª serie, tom. III, pag. 1, 1851.

ans auparavant, Möbius, dans sa statique, eût traité la même théorie, quoique d'une manière tout à fait différente. Je croyais donc, et je l'indiquais dans ma préface, que tous les théorèmes contenues dans mon mémoire, assez étendu (171 pages d'impression), et qui a été publié en 1851, étaient entièrement nouveaux.

Il est tout naturel d'admettre la sincérité de mon aveu, puisque, di -sept années après la publication de mon mémoire (qui a été envoyé a toutes les principales Académies de l'Europe et de l'Amérique), la curieuse et importante théorie de Möbius, comme vous le dites dans la préface de votre statique, était toute neuve pour la France. Ce ne serait point un étalage grandiose de modestie nationale que d'avouer que nous ne sommes, pas ici, en Portugal, mieux informés, que vous ne l'êtes en France, des progrès accomplis dans les sciences exactes au delà du Rhin.

En ce moment même, le livre si vanté du savant géomètre allemand n'existe pas, à ma connaissance, en Portugal.

Encore un mot, qui prouvera assez, à ce qu'il me semble, la sincérité de mon illusion de priorité. Tout en respectant la majesté du vrai mérite, c'est un sentiment fort naturel, souvent même irrésistible, à ceux qui cultivent la science, que le désir de relever les égarements où sont tombés les génies du prémier ordre, et Möbius était de ce nombre. Or, M. Darboux fait remarquer, dans l'analyse qu'il a publié de son mémoire, que l'illustre mathématicien saxon a commis une grave erreur, en croyant que tout corps qui est en équilibre en quatre orientations diverses, doit être aussi en équilibre dans toutes les autres positions.

Cependant, vingt-six ans avant la dernière publication de M. Darboux (qui ignore même l'existence de mon mémoire), j'avais trouvé, tout à fait comme lui (§ 180), qu'il y a, en général, quatre positions d'équilibre, et seulement quatre, qui se déduisent les unes des autres par des rotations de 180°, autour de trois axes rectangulaires. Je n'aurais donc pas été moins porté que M. Darboux, à faire remarquer cette rectification capitale, que ce savant géomètre, sans même connaître mon nom obscur, a publié un quart de siècle après moi.

J'ai traité aussi, d'une manière assez développée (§§ 160 et suiv.), une représentation géométrique, que je pense être identique à un théorème énoncé par M. Darboux, celle d'un ellipsoide dont les trois demi-diamètres conjugués donnent, en grandeur, les moments *maxima*, et, en direction, les bras des trois couples, qui sont l'équivalent d'un système de forces tournantes, destitué de résultante principale.

Après avoir déterminé l'existence d'un plan fixe (plan central de Möbius) où se trouvent tous les points d'application des résultantes principales, je fais remarquer assez clairement (§ 91) que les trois forces résultantes qui représentent, en général, tout système de forces tournantes, ont toujours leurs points d'application sur ce même plan fixe. Cette proposition, présentée comme nouvelle par M. Darboux, quoiqu'elle ne soit pas énoncée expressément à l'endroit cité, est toutefois la conclusion immédiate, évidente, de la construction géométrique indiquée dans ce même paragraphe. Je considère aussi comme lui, quoique probablement par une méthode différente, la représentation géométrique des positions de l'axe central des moments, fixant d'un manière précise et complète (§ 139) les positions de la résultante unique, cas qui seraient figurés d'un façon plus élégant, au moyen du beau théorème de Minding, que je crois antérieur aussi à mon mémoire.

Pour conclure, permettez-moi encore d'ajouter, monsieur le rédacteur, que, par rapport à la théorie, dont je croyois être l'initiateur, n'avant vu que depuis bien peu de jours votre excellente *Statique* et l'analyse du mémoire de M. Darboux, publiée aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences de Paris (27 décembre 1876), je pense, toutefois, qu'il reste encore dans mon mémoire un certain nombre de théorèmes, qui ne se trouvent ni dans le livre de Möbius, ni dans le mémoire de votre savant compatriote.

Je vous demande, en finissant, très-humblement pardon, mon respectable savant, si ma vanité personnelle prend, dans cette lettre, une place bien plus large que ne le permettrait l'intérêt de l'histoire de la science, et la modeste graduation intellectuelle de mes publications mathématiques.

*Daniel A. da Silva.*

# SECÇÃO II

## NOTICIA SOBRE SATURNO

POR

F. Gomes Teixeira

(Continuação)

Depois de mostrar que os anneis de Saturno não podem ser solidos, formados de uma só peça, passa M. Hirn a mostrar que não podem tambem ser fluidos.

Aqui, como no caso anterior, para haver equilibrio entre a força centrifuga e a attracção do planeta, deveria cada camada cylindrica, em que podemos decompôr os anneis, mover-se com uma velocidade que deveria augmentar com a sua proximidade do planeta. O resultado d'esta differença de velocidade seria ir diminuindo a das camadas mais proximas, em virtude do attricto das outras, até que todas tivessem a mesma velocidade. Em troca d'esta diminuição de velocidade, haveria, segundo os principios da Thermodynamica, uma producção de calor.

Depois as moleculas fluidas que, se fossem independentes completamente, o que não tem logar, descreveriam, como qualquer satellite, ellipses, cuja posição e grandeza seria alterada a cada instante pelas acções do sol, dos planetas, cometas, etc., deveriam descrever curvas pouco differentes da ellipse. Devendo as moleculas mover-se com velocidade differente, os attrictos fariam diminuir a velocidade de cada annel; haveria portanto um augmento de calor correspondente, e o annel approximar-se-ia do planeta. E como isto se deveria continuar, os anneis acabariam por se depositarem sobre elle.

Os anneis fluidos não poderiam pois subsistir, e rejeita portanto M. Hirn tambem a hypothese precedente; admitte pois que os anneis são formados por uma multidão de pequenos solidos, assaz afastados, para se não chocarem, apresentando o aspecto de um corpo continuo pelo seu numero e velocidade, e movendo-se, uns no equador de Saturno, outros n'um plano pouco inclinado sobre elle.

Como se vê, a differença entre as hypotheses de Mr. Maxwell e as de M. Hirn está simplesmente na proximidade dos satellites e sua grandeza.

As observações confirmam que os anneis de Saturno não podem ser solidos continuos, nem fluidos, mas sim uma multidão de satellites.

Com effeito, suppondo os anneis solidos continuos, como explicar os phenomenos apresentados pelo annel obscuro, isto é, a sua transparencia, que tem diminuido consideravelmente, a ponto de não ser notada por W. Herschel, e ser actualmente perfeitamente visivel mesmo em oculos de força media?

Como explicar, suppondo os anneis solidos continuos, as variações da sua largura desde Huygens até hoje? Otto Struve, depois de analysar as medidas da expessura dos anneis feitas até aos tempos modernos, diz: «A largura do systema de anneis brilhantes está crescendo gradual e continuamente, pela aproximação da sua borda interior do equador de Saturno; ambos os anneis têm tomado parte n'esta mudança, comtudo o annel interior têm crescido em largura mais rapidamente, do que o exterior. O annel escuro cresceu consideravelmente em largura durante o comparativamente breve espaço de tempo, que decorreu desde a sua descoberta.

Vejamos agora como os phenomenos observados se podem explicar pela hypothese de serem os anneis formados de satellites.

As fachas obscuras, semi-córadas ou côr de cinza, que, como dissemos, muitos astronomos têm visto nos anneis, concentricas com as bordas dos mesmos, explicam-se pela separação temporaria dos satellites em pequenos arcos, deixando entre si fachas, ou sem satellites, e portanto escuras, ou com elles mais afastados, e portanto semi-córadas.

O annel obscuro póde explicar-se, suppondo que a principio não existia e foi-se formando lentamente á custa de satellites provenientes do annel brilhante.

O augmento da largura dos anneis explica-se pela acção da região equatorial de Saturno, que pela sua attracção pucha os satellites continuamente para o plano do seu equador.

Os espaços sombrios, que dissemos que G. Bond havia descoberto juncto da borda interior dos anneis brilhantes, são explicados por Mr. Proctor, admittindo que a agglomeração de satellites augmenta da borda exterior para a borda interior dos anneis. Com effeito, um espaço vasio de satellites deve parecer menor na extremidade do eixo menor do que na extremidade do eixo maior, pois que o angulo, segundo o qual este espaço é visto, é formado por duas linhas, tiradas uma para a borda mais proxima de nós, outra para a mais afastada, na extremidade do eixo menor e em todos os outros pontos, excepto na extremidade do eixo maior. Os satellites devem pois parecer mais agglomerados, e o annel ser mais brilhante na extremidade do eixo menor. Junctando a isto a diminuição de brilho da borda exterior para a borda interior, devida á diminuição dos satellites, fica explicada a existencia da parte sombria juncto á borda interior dos anneis brilhantes na extremidade do eixo maior.

Como já dissemos, nenhum dos planetas conhecidos apresenta um systema mais complexo do que o de Saturno. Além de ser rodeado por anneis, é acompanhado por um cortejo de oito satellites, que se movem em roda d'elle, segundo as leis de Kepler.

Designaremos, segundo o uso, estes satellites pelos numeros que indicam a ordem das suas distancias ao planeta.

O *primeiro* satellite foi descoberto por W. Herschel em 1787. Faz a sua revolução em roda de Saturno em $22^h$, $36^m$, $17^s$ a uma distancia media d'este planeta igual a 3,36 vezes o raio equatorial de Saturno.

O *segundo* satellite foi descoberto por W. Herschel no mesmo anno, e pouco tempo antes da descoberta do anterior. A duração da sua revolução sideral é de $1^d$, $8^h$, $53^m$, $7^s$, e a sua distancia ao centro de Saturno é igual a 4,31 vezes o raio equatorial do planeta, Os *terceiro* e *quarto* satellites, chamados tambem Thetys e Dione, foram descobertos por D. Cassini em 1684. Fazem as suas revoluções em roda de Saturno em $1^d$, $21^h$, $18^m$, $26^s$ e $2^d$, $17^h$, $44^m$, $51^s$ a distancias do centro d'este planeta iguaes a 5,33 e 6,84 vezes o seu raio equatorial.

O *quinto* satellite, chamado tambem Rhea, foi descoberto pelo mesmo astronomo em 1672. Dura a sua revolução sideral $4^d$, $12^h$, $25^m$, $11^s$, e a sua distancia a Saturno é igual a 9,55 vezes o raio equatorial d'este planeta.

Em 1655 descobriu Huygens o *sexto* satellite, que foi chamado tambem Titan, e que, attendendo ao seu brilho e á sua distancia á terra, suppoz pouco differente em grandeza do planeta Marte. Move-se em roda de Saturno, descrevendo a sua ellipse em $15^d$, $22^h$, $41^m$, $25^s$ a uma distancia media do centro d'este planeta igual a 22,14 vezes o seu raio equatorial.

O *setimo* satellite, chamado tambem Hyperion, foi descoberto ao mesmo tempo por Bond na America, e por Lassell na Inglaterra. Percorre a sua orbita em roda de Saturno em $21^d$, $4^h$, $20^m$, $0^s$ a uma distancia media d'este planeta igual a 28 vezes o seu raio equatorial.

Finalmente o *oitavo* satellite foi descoberto por D. Cassini em 1671, e foi chamado Japetus. Notou este grande astronomo que o satellite desapparecia regularmente durante metade da revolução em roda de Saturno, emquanto que era visto claramente durante a outra metade, phenomeno que elle explicou, suppondo a superficie de um hemispherio d'este satellite menos reflectora do que a do outro, e suppondo que gira em roda de um eixo, fazendo uma rotação em roda d'elle no mesmo tempo em que faz uma revolução em roda de Saturno. Estas conclusões foram mais tarde completamente confirmadas. A duração de uma revolução de Japetus é de $79^d$, $7^h$, $54^m$, $41^s$ e a sua distancia ao centro de Saturno igual a 64 vezes o raio equatorial d'este planeta.

Como nota Mr. Proctor uma lei, similhante á de Bode, liga entre si as distancias dos oito satellites de Saturno. Se a cada um dos numeros 0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 junctarmos 4, vem proximamente as distancias dos satellites de Saturno ao planeta, tomando para unidade a quarta parte da distancia do primeiro satellite.

Para fazer ideia da grandeza d'estes satellites, extrahiremos da Astronomia de Dubois a tabella seguinte, que dá o raio de cada um, sendo o raio da terra tomado para unidade:

| | |
|---|---|
| 1.º............... | 0,125 |
| 2.º............... | » |
| 3.º............... | 0,07 |
| 4.º............... | 0,07 |
| 5.º............... | 0,175 |
| 6.º............... | 0,42 |
| 7.º............... | » |
| 8.º............... | 0,26 |

As observações dos satellites de Saturno são muito difficeis, e porisso a sua theoria é ainda hoje muito imperfeita.

Os seis primeiros movem-se no plano dos anneis, o setimo e o oitavo n'um plano inclinade sobre aquelle. Laplace explica isto pela acção de Saturno, que, em virtude do seu achatamento, retêm os seis primeiros satellites e os anneis no plano do seu equador, d'onde tende a afastal-os a acção do sol, que só se torna sensivel para os ultimos satellites.

Mostrou ainda o eminente auctor da *Mecanica Celeste* que os satellites de Saturno movem-se sobre planos, que passam constantemente entre o equador e a orbita do planeta, pela sua intersecção mutua, e que são tanto mais inclinados sobre este equador, quanto mais afastados estão os satellites do centro de Saturno.

Descripto o systema dos anneis e o systema dos satellites de Saturno, resta, para terminar esta noticia, considerar mesmo o planeta, para ver qual a sua figura, grandeza, massa e constituição.

A figura do disco de Saturno foi considerada como espheroidica desde o tempo de Newton até ao de W. Herschel. Observando porém este grande astronomo este planeta em abril de 1805, viu que o contorno de Saturno era uma curva irregular, tendo a fórma de um parallelogrammo de cantos arredondados, e tendo a sua maior diagonal inclinada de 43°.20′ sobre a diametro equatorial, emquanto que a menor diagonal coincidia com o eixo do planeta, Como as observações subsequentes não confirmaram isto, attribuiu-se este aspecto do planeta a illusão optica, e continuou-se a considerar o planeta como sendo um espheroide.

Ultimamente, porém, Mr. Proctor, astronomo inglez, que se occupou muito de Saturno, mostrou que este planeta está sujeito a mudanças de figura, o que elle prova com algumas observações.

Diz primeiro que as particularidades da figura de Saturno observadas por W. Herschel não podem ser attribuidas a defeito do instrumento, pois que Herschel fez a observação com muitos instrumentos; que não podem ser devidas a perturbações atmosphericas, porque estas particularidades conservaram-se durante muito tempo; não podem ser attribuidas a illusão proveniente da disposição dos anneis, porque, para isso, deveriam ser periodicas.

Além das observações de W. Herschel apresenta Mr. Proctor muitas outras.

Em 5 de agosto de 1803, Schröter viu que Saturno apresentava uma figura que não era perfeitamente espheroidica. Kitchener viu durante o outomno de 1818 que Saturno apresentava a figura descripta por W. Herschel. Observou com duas lentes diversas, e quando o annel se apresentava muito estreito, o que provava que o aspecto do planeta não podia ser devido a illusão proveniente da lente ou do annel.

O grande astronomo inglez, Mr. Airy, observando Saturno n'uma occasião, viu-o apresentar o aspecto descripto por W. Herschel; observando-o n'outra occasião, viu-o pelo contrario achatado em logar de elevado na latitude de 45°.

Coolidge, astronomo americano, viu, quando o annel estava na sua maxima abertura, o diametro maior do globo de Saturno, umas vezes coincidindo com o equador do planeta, outras vezes inclinado de 20° sobre elle.

Os astronomos G. Bond e W. Bond, que muitas vezes observaram Saturno, dizem que em muitas occasiões o contorno d'este planeta lhes pareceu irregularmente achatado e torto.

Bessel, em 1832, e Main, em 1848, observaram o disco de Saturno com todo o cuidado, e viram que elle apresentava perfeitamente a figura espheroidica.

De todas estas observações conclue Mr. Proctor, com toda a razão, que o disco do planeta Saturno varía de figura, o que explica, suppondo-o sujeito á influencia de forças que, ou levantam porções da sua superficie a uma grande altura de tempos a tempos, ou fazem levantar a uma grande altura massas de nuvens.

A massa de Saturno, deduzida da sua attracção sobre o sexto satellite é 94,68 vezes a da terra. O seu volume é proximamente igual a 691 vezes o da terra, e a sua densidade media é igual a 0,13, a da terra sendo tomada para unidade, ou 0,75 da densidade da agua.

Saturno faz uma rotação em roda do seu eixo em $10^h. 29^m. 16^s, 8$, resultado a que chegou W. Herschel, vendo o tempo que certas manchas, que apparecem na superficie do planeta, levam a fazer uma revolução.

Huygens descobriu no globo de Saturno *bandas* parallelas ao equador do planeta, analogas ás que tambem já haviam sido descobertas em Jupiter. Esta observação foi confirmada depois por Hadley, que achou que estas bandas variam na fórma e no numero.

W. Herschel observou tambem as bandas de Saturno, e viu que os seus contornos são similhantes aos contornos dos anneis, d'onde concluiu que são parallelas ao plano d'elles.

Comparando estas bandas com a direcção do movimento das manchas que serviram, como já vimos, para determinar a rotação do planeta, concluiu este grande astronomo que ellas são parallelas ao seu equador.

As bandas de Saturno dividem-se em dous grupos: umas escuras, variando desde a côr parda ou avermelhada, perto do equador, até á côr azulada ou esverdeada, perto do polo; outras brilhantes, quasi brancas no equador e amarelladas nas outras latitudes.

Estas bandas são devidas ás nuvens que fluctuam na atmosphera de Saturno, atmosphera, cuja existencia é demonstrada pela adherencia que parece existir entre os satellites de Saturno e o planeta nas suas occultações por elle, pois que dura tempo de mais para se attribuir ás dimensões dos satellites.

As bandas brilhantes correspondem ás nuvens que fluctuam na atmosphera do planeta, que reflectem para nós a luz do sol; as bandas escuras correspondem ás zonas visiveis da superficie menos reflectora do planeta, ou a nuvens que fluctuam mais perto d'esta superficie do que as primeiras.

Mr. Proctor estudou muito as bandas de Jupiter e Saturno, e chegou a conclusões da mais alta importancia relativamente á constituição do planeta, como vamos ver.

Sobre as bandas escuras apparecem manchas pretas, como têm observado muitos astronomos. Estas manchas são, como diz Mr. Proctor, porções visiveis da superficie do planeta através das nuvens que formam as bandas escuras, ou são ainda devidas a nuvens, fluctuando mais baixo do que as primeiras. As manchas brancas, que apparecem sobre estas mesmas bandas, são attribuidas ou a nuvens mais altas, ou a enormes correntes de vapor levantadas por acções volcanicas.

O systema de bandas está sujeito a grandes variações de fórma e extensão. As bandas escuras são umas vezes muito estreitas, outras vezes muito largas; ora muito numerosas, ora pouco numerosas; ora dispostas com regularidade, ora formando figuras irregulares. Estão, além d'isso, sujeitas a grandes mudanças de côr, bem como as bandas brilhantes.

*(Continúa).*

## QUESTÃO PROPOSTA (*)

Dadas as condições binomiaes

$$\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a} = \text{inteiro},$$

deduzir d'ellas as praxes das extracções dos 9 e dos **11**.

PEREIRA CALDAS

(Professor no Lyceu de Braga).

(*) Em cada numero d'este Jornal será proposta uma questão, e n'um dos numeros proximos será publicada a solução que primeiro nos fôr enviada.

# SECÇÃO I

## SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. Gomes Teixeira

(Suite)



Soit, par exemple, à décomposer la fraction

$$\frac{x^2-3x+5}{x^6-6x^5+14x^4-16x^3+9x^2-2x}$$

$$=\frac{M_4}{(x-1)^4}+\frac{M_3}{(x-1)^3}+\frac{M_2}{(x-1)^2}+\frac{M_1}{x-1}+\frac{N}{x-2}+\frac{P}{x}.$$

Les formules (7) donnent

$$M_1=3A_1-A_2+A_3,$$

$$M_2=3A_2-A_3+A_4,$$

$$M_3=3A_3-A_4,$$

$$M_4=3A_4,$$

mais nous avons déjà vu que

$$A_1=0,\ A_2=-1,\ A_3=0,\ A_4=-1,$$

il s'en suit donc que

$$M_1=1,\ M_2=-4,\ M_3=-4,\ M_4=-3.$$

De la même manière on trouve

$$N=3B_1,\ P=5C_1,$$

mais nous avons déjà vu que $B_1=\frac{1}{2}$ et $C_1=-\frac{1}{2}$, donc

$$N=\frac{3}{2},\ P=\frac{5}{2},$$

et par conséquent

$$\frac{x^2-3x+5}{x^6-6x^5+14x^4-16x^3+9x^2-2x}$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{4}{(x-1)^2}-\frac{4}{(x-1)^3}-\frac{3}{(x-1)^4}$$

$$+\frac{\frac{3}{2}}{x-2}-\frac{\frac{5}{2}}{x}.$$

**5.** Comme application de la décomposition des fractions rationnelles nous allons déduire quelques formules, dont nous aurons à user plus tard.

On sait que toute fraction rationnelle propre peut être développée en une serie ordonnée suivant les puissances entières croissantes de $\frac{1}{x}$. Nous avons donc

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\omega_1}{x} + \frac{\omega_2}{x^2} + \frac{\omega_3}{x^3} + \frac{\omega_4}{x^4} + \dots,$$

et nous allons déterminer $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, etc.

En développant en serie les fractions simples, dans lesquelles on peut décomposer $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, il vient

$$\frac{M_1}{x - a_1} = M_1\left[\frac{1}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_1^2}{x^3} + \dots\right]$$

$$\frac{N_1}{x - a_2} = N_1\left[\frac{1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_2^2}{x^3} + \dots\right]$$

$$\frac{P_1}{x - a_3} = P_1\left[\frac{1}{x} + \frac{a_3}{x^2} + \frac{a_3^2}{x^3} + \dots\right]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

donc

$$\Sigma \frac{M_1}{x - a_1} = \frac{\Sigma M_1}{x} + \frac{\Sigma M_1 a_1}{x^2} + \frac{\Sigma M_1 a_1^2}{x^3} + \dots$$

en étendant le $\Sigma$ à toutes les racines de $F(x) = 0$.

De la même manière on obtient

$$\frac{M_2}{(x-a_1)^2} = M_2\left[\frac{1}{x^2} + 2\frac{a_1}{x^3} + 3\frac{a_1^2}{x^4} + \ldots\right]$$

$$\frac{M_3}{(x-a_1)^3} = M_3\left[\frac{1}{x^3} + 3\frac{a_1}{x^4} + 6\frac{a_1^2}{x^5} + \ldots\right]$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

et par conséquent

$$\Sigma\frac{M_2}{(x-a_1)^2} = \frac{\Sigma M_2}{x^2} + 2\frac{\Sigma M_2 a_1}{x^3} + 3\frac{\Sigma M_2 a_1^2}{x^4} + \ldots$$

$$\Sigma\frac{M_3}{(x-a_1)^3} = \frac{\Sigma M_3}{x^3} + 3\frac{\Sigma M_3 a_1}{x^4} + 6\frac{\Sigma M_3 a_1^2}{x^5} + \ldots$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

En égalant maintenant le développement de $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ à la somme des développements des fractions simples dans lesquelles $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ peut être décomposée, il vient:

$$\frac{\omega_1}{x} + \frac{\omega_2}{x^2} + \frac{\omega_3}{x^3} + \ldots$$

$$= \frac{\Sigma M_1}{x} + \frac{\Sigma M_1 a_1 + \Sigma M_2}{x^2} + \frac{\Sigma M_1 a_1^2 + 2\Sigma M_2 a_1 + \Sigma M_3}{x^3}$$

$$\frac{\Sigma M_1 a_1^3 + 3\Sigma M_2 a_1^2 + 3\Sigma M_3 a_1 + \Sigma M_4}{x^4} + \ldots$$

En égalant donc les coefficients des mêmes puissances de $x$, on obtient les formules:

$$\omega_1 = \Sigma M_1$$

$$\omega_2 = \Sigma M_1 a_1 + \Sigma M_2$$

$$\omega_3 = \Sigma M_1 a_1^2 + 2 \Sigma M_2 a_1 + \Sigma M_3$$

$$\omega_4 = \Sigma M_1 a_1^3 + 3 \Sigma M_2 a_1^2 + 3 \Sigma M_3 a_1 + \Sigma M_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En général, on obtient la formule suivante, qui est, je crois, nouvelle:

$$\omega_{n+1} = \Sigma M_1 a_1^n + [n\,C\,1] \Sigma M_2 a_1^{n-1} + [n\,C\,2] \Sigma M_3 a_1^{n-2}$$

$$+ \ldots + [n\,C\,p] \Sigma M_{p+1} a_1^{n-p} + \ldots + \Sigma M_{n+1}$$

comme il est facile de voir en ayant égard aux termes généraux des développements des fractions simples, qui sont

$$\Sigma M_1 a_1^n,\ \Sigma M_2 \frac{2(2+1)\ldots n}{1.2\ldots(n-1)} a_1^{n-1},$$

$$\Sigma M_3 \frac{3(3+1)\ldots n}{1.2\ldots(n-2)} a_1^{n-2},\ \Sigma M_4 \frac{4(4+1)\ldots n}{1.2\ldots(n-3)} a_1^{n-3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ou

$$\Sigma M_1 a_1^n,\ n \Sigma M_2 a_1^{n-1},\ \frac{n(n-1)}{1.2} \Sigma M_3 a_1^{n-2},\ \text{etc.}$$

**6.** Comme on sait, un des principaux usages de la décomposition des fractions rationnelles se rencontre dans le Calcul Intégral, lorsqu'il s'agit d'intégrer ces fractions.

Ainsi pour intégrer $\frac{F_1(x)}{F(x)}dx$ on décompose la fraction $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ en des fractions de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$, et après cela on intégre ces fractions au moyen des règles connues.

En faisant donc usage des formules que nous avons données précédemment pour la décomposition des fractions rationnelles, nous avions à employer les formules (6) et (7). Il est cependant plus simple de décomposer seulement la fraction $\frac{1}{F(x)}$ au moyen des formules (6).

En effet (pag. 34)

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}dx = \Sigma \int \frac{G_k F_1(x)}{(x-a_i)^k}dx.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\int \frac{F_1(x)}{F(x)}dx = \Sigma G_k \left[ -\frac{F_1(x)}{(k-1)(x-a_i)^{k-1}} + \frac{1}{k-1}\int \frac{F_1'(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-1}}\right.$$

De la même manière nous avons

$$\int \frac{F_1'(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-1}} = -\frac{F_1'(x)}{(k-2)(x-a_i)^{k-2}} + \frac{1}{k-2}\int \frac{F_1''(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-2}}$$

$$\int \frac{F_1''(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-2}} = -\frac{F_1''(x)}{(k-3)(x-a_i)^{k-3}} + \frac{1}{k-3}\int \frac{F_1'''(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-3}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

et par conséquent

$$\int \frac{F_1(x)\,dx}{F(x)} = \Sigma G_k \left[ -\frac{F_1(x)}{(k-1)(x-a_i)^{k-1}} \right.$$

$$-\frac{1}{(k-1)(k-2)} \cdot \frac{F_1'(x)}{(x-a_i)^{k-2}}$$

$$-\frac{1}{(k-1)(k-2)(k-3)} \cdot \frac{F_1''(x)}{(x-a_i)^{k-3}}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$-\frac{1}{(k-1)(k-2)\ldots(k-n)} \cdot \frac{F_1^{(n-1)}(x)\,dx}{(x-a)^{k-n}}$$

$$+\frac{1}{(k-1)(k-2)\ldots(k-n)} \cdot \int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-n}}.$$

Considérons cette dernière intégrale.

Comme $F_1(x)$ est une fonction rationnelle et entière, une de ses dérivées doit être une quantité constante.

1.° Si $F_1^{(n)}(x)$ est cette dérivée constante, et $k-n>1$, il vient

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{(x-a_i)^{k-n}} = -\frac{F_1^{(n)}(x)}{(k-n-1)(x-a_i)^{k-n-1}},$$

et l'intégrale de la fraction $\dfrac{F_1(x)}{F(x)}\,dx$ est algebrique.

2.° Si $F_1^{(n)}(x)$ est constante, et $k-n=1$, il vient

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{(x-a_i)} = F_1^{(n)}(x)\,.\,l\,(x-a_i)$$

et l'intégrale de $\frac{F_1(x)}{F(x)}dx$ est transcendante.

3.° Si $k-n$ est égal à l'unité, avant de $F_1^{(n)}(x)$ être constante, on obtiendra

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{x-a_i} = \int \frac{A\,x^m + B\,x^{m-1} + \ldots + K}{x-a_i}$$

ou

$$\int \frac{F_1^{(n)}(x)\,dx}{x-a_i} = \int a\,x^{m-1}\,dx + \int b\,x^{m-2}\,dx + \int c x^{m-3}\,dx + \ldots$$

$$+ \int k\,dx + \int \frac{R}{x-a_i}$$

$$= \frac{a\,x^m}{m} + \frac{b\,x^{m-1}}{m-1} + \ldots + k\,x + R\,l(x-a_i)$$

où $a$, $b$, $c$, etc., sont les coefficients des puissances de $x$ dans le quotient de la division de $F_1^{(n)}(x)$ par $x-a_i$, et R est le reste de cette division

L'intégrale de $\frac{F_1(x)}{F(x)}dx$ est donc algebrique si R est nul, c'est à dire si $a_i$ est une racine de $F_1^{(n)}(x)=0$.

# SECÇÃO II

## SOBRE DIVISIBILIDADE DOS NUMEROS

POR

FRANCISCO DA PONTE HORTA

Dadas as condições binomiaes

$$\frac{x^m \pm a^m}{x \pm a} = \text{inteiro},$$

deduzir d'ellas as praxes das extracções dos 9 e dos 11.

*(Questão proposta no numero anterior).*

---

Separemos d'esta equação as duas seguintes

$$\frac{x^m \pm a^m}{x + a} = \text{inteiro}, \quad \frac{x^m \pm a^m}{x - a} = \text{inteiro}.$$

Effectuando as divisões indicadas, obtem-se

$$\frac{x^m \pm a^m}{x+a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \ldots \pm a^{m-1} . x^{m-m} = \text{inteiro}$$

$$\frac{x^m \pm a^m}{x-a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1} = \text{inteiro.}$$

A primeira forma da primeira equação exige que $m$ seja impar.

Só é verdadeira a segunda no caso de $m$ par.

A primeira forma da segunda equação é absurda. É verdadeira a segunda, quer $m$ seja par quer seja impar.

Consideremos actualmente o numero $abcdefg$, em que as letras $g, f, e, \ldots$ representam unidades, dezenas, centenas, etc., teremos

$$\begin{aligned}
abcdefg = a \times 10^6 &= a(10^6 - 1) + a = a(10^6 - 1) + a \\
+ b \times 10^5 &= b(10^5 + 1) - b = b(10^5 - 1) + b \\
+ c \times 10^4 &= c(10^4 - 1) + c = c(10^4 - 1) + c \\
+ d \times 10^3 &= d(10^3 + 1) - d = d(10^3 - 1) + d \\
+ e \times 10^2 &= e(10^2 - 1) + e = e(10^2 - 1) + e \\
+ f \times 10 &= f(10 + 1) - f = f(10 - 1) + f \\
+ g &= \qquad\qquad + g = \qquad\qquad + g
\end{aligned}$$

Reconhece-se pelas duas ultimas columnas verticaes da egualdade, visto havermos provado que os binomios $10^6 - 1$, $10^5 + 1$, $10^4 - 1$, $10^3 + 1$, etc., são divisiveis por $10 + 1 = 11$, e bem assim que $10^6 - 1$, $10^5 - 1$, $10^4 - 1$, etc., são divisiveis por $10 - 1 = 9$:

1.° Todo o numero é composto d'um certo numero de onzes e mais a somma dos algarismos das casas impares, menos a somma dos algarismos das casas pares;

2.° Todo o numero é composto d'um certo numero de noves e mais a somma de seus algarismos.

Podem tambem deduzir-se por modo similhante os casos da divisibilidade por 7 e por 13; notando que os residuos da divisão das potencias de 3 por 7 e 13 são:

| Potencias | Residuos para 7 | Residuos para 13 |
|---|---|---|
| $3$ | $+3$ | $+3$ |
| $3^2$ | $+2$ | $-4$ |
| $3^3$ | $-1$ | $+1$ |
| $3^4$ | $-3$ | $+3$ |
| $3^5$ | $-2$ | $-4$ |
| $3^6$ | $+1$ | $+1$ |
| $3^7$ | $+3$ | $+3$ |
| $3^8$ | $+2$ | $-4$ |
| $3^9$ | $-1$ | $+1$ |
| ....... | ....... | ....... |

lembrando que $(10^{2n}-3^{2n})$ e $(10^{2n+1}+3^{2n+1})$ são divisiveis por $10+3=13$; bem como que $(10^n-3^n)$ é sempre divisivel por $10-3=7$.

Com effeito

$$
\begin{array}{rllll}
abcdefg = & a(10^6-3^6)+a.3^6 = N & .13+\phantom{4}\,a = & a(10^6-3^6)+a.3^6 = n & .7+\phantom{2}\,a \\
& +b(10^5+3^5)-b.3^5 = N^{\mathrm{I}} & .13+4\,b = & b(10^5-3^5)+b.3^5 = n^{\mathrm{I}} & .7-2\,b \\
& +c(10^4-3^4)+c.3^4 = N^{\mathrm{II}} & .13+3\,c = & c(10^4-3^4)+c.3^4 = n^{\mathrm{II}} & .7-3\,c \\
& +d(10^3+3^3)-d.3^3 = N^{\mathrm{III}} & .13-\phantom{4}\,d = & d(10^3-3^3)+d.3^3 = n^{\mathrm{III}} & .7-\phantom{2}\,d \\
& +e(10^2+3^2)+e.3^2 = N^{\mathrm{IV}} & .13-4\,e = & e(10^2-3^2)+e.3^2 = n^{\mathrm{IV}} & .7+2\,e \\
& +f(10+3)-f.3 = N^{\mathrm{V}} & .13-3\,f = & f(10-3)+f.3 = n^{\mathrm{V}} & .7+3\,f \\
& +g & +\;g = & +g = & +\;g
\end{array}
$$

D'onde se conclue:

1.° Se dividirmos o numero dado em classes de tres algarismos a partir das dezenas $(\ldots abc, def, g)$ e multiplicarmos ordenadamente da direita para a esquerda os tres algarismos de cada classe por 3, 4 e 1, e sommarmos o algarismo das unidades com os productos provenientes dos algarismos das classes pares, e lhe tirarmos os productos provenientes dos algarismos das classes impares, o numero obtido, depois de tirados os 13, será o residuo do numero dado para o divisor 13;

2.° Se dividirmos o numero dado em classes de tres algarismos da direita para a esquerda, e multiplicarmos ordenadamente no mesmo sentido os tres algarismos de cada classe por **1**, **3** e **2**, tirarmos a somma dos productos provenientes dos algarismos das classes pares da somma dos productos provenientes dos algarismos das classes impares, o numero resultante, depois de excluidos os 7, será o residuo do numero dado para o divisor 7.

Corol. Todo o numero formado por um numero par de grupos de tres algarismos, dois a dois eguaes, collocados em tal ordem, que se um d'estes grupos for par, o seu egual seja impar, é divisivel por 7 e por 13, e por conseguinte por 91.

Ex.:

$$\underset{1}{243}\,\underset{2}{243}\,\underset{3}{427}\,\underset{4}{213}\,\underset{5}{213}\,\underset{6}{427}\ldots(A).$$

Os numeros formados de seis algarismos eguaes **111111**, **222222**, etc., são divisiveis por 3, 7, 11, 13 e 91.

Os numeros da forma (A) são circulares para o divisor 91 [1].

Por quanto dispostos estes numeros em circulo, e escrevendo um outro circulo concentrico, pondo em correspondencia com os algarismos do primeiro os seus respectivos multiplicadores, quer relativos á divisibilidade por treze $+1, -3, -4, -1, +3, +4$, etc., ou por sete $+1, +3, +2, -1, -3, -2$, etc., vê-se que se este segundo circulo girar de uma, duas ou mais casas, não cessam os algarismos eguaes dos grupos eguaes de terem eguaes multiplicadores de signaes contrarios; nem tão pouco de estarem estes na ordem em que os demanda a divisibilidade por 7 ou 13, se, querendo formar o numero, abrirmos o circulo immediatamente á direita do algarismo que tiver em correspondencia um dos multiplicadores $+1$.

Esta proposição é, porém, consequencia d'outra mais geral que vamos enunciar.

[1] Numero circular para o divisor *a* é aquelle que disposto em circulo, afim de perder a indicação dos algarismos em que começa e acaba, é sempre divisivel pelo mesmo divisor, aonde quer que se abra depois o circulo para tornar a rectificar o numero.

Todo o numero composto d'um numero par de grupos de tres algarismos que fôr divisivel por 7 ou 13, é circular para esse divisor.

Com effeito, verifica-se ser 1 o residuo para 7 ou 13 das potencias de 3, cujo espoente fôr um dos termos da progressão 6, 12, 18, 24, . . .

Se, pois, $a$ M designar o numero dado, em que M (numero composto de 5, 11, 17, 23, etc., algarismos) representa o numero que se segue á direita do primeiro algarismo $a$ do numero dado, teremos por hypothese (empregando a notação de Gauss)

$$aM = a.10^m + M \equiv 0 \,(M\, {}^{13}_{7}) \ldots (1).$$

Passando o algarismo $a$ da esquerda para a direita do numero dado, obteremos outro numero que representarmos por $10\,M + a$: e visto não sabermos se elle é ou não divisivel por 7 ou 13, escreveremos

$$10\,M + a \equiv X:$$

multiplicando a primeira congruencia por 10, e subtrahindo-lhe a segunda, teremos

$$a(10^{m+1} - 1) \equiv -X;$$

ou

$$a(10^{m+1} - 3^{m+1}) + a(3^{m+1} - 1) \equiv -X: \ldots (2)$$

mas $m+1$ é um dos numeros da serie 6, 12, 18, etc., logo

$$3^{m+1} - 1 \equiv 0;$$

e visto que é tambem

$$10^{m+1} - 3^{m+1} \equiv 0,$$

temos

$$X \equiv 0.$$

Todo o numero circular para os divisores 7 ou 13 consta d'um numero par de grupos de tres algarismos.

Com effeito, em relação ao divisor 7, sendo $X \equiv 0$ (por hypothese) e bem assim $10^{m+1} - 3^{m+1} \equiv 0$; teremos

$$3^{m+1} - 1 \equiv 0,$$

logo $m + 1 = 6, 12, 18,$ etc.

Com respeito ao divisor 13, a proposição é evidente, se $m+1$ fôr par; porque sendo $X \equiv 0$ e $10^{m+1} - 3^{m+1} \equiv 0 \, (M\,13)$, ter-se-ha

$$3^{m+1} - 1 \equiv 0,$$

e logo $m + 1 = 6, 12, 18 \ldots$

Se $m + 1$ fôr impar, teremos

$$-X \equiv a(10^{m+1} - 1) = a(10^{m+1} + 3^{m+1}) \pm na,$$

e visto que

$$10^{m+1} + 3^{m+1} \equiv 0 \, (M\,13)$$

será $\pm na \equiv 0$, o que é absurdo por ser 13 numero primo, e ser 4 o maior valor de $n$.

Prova-se de um modo inteiramente similhante que os numeros circulares para o divisor 11 devem conter um numero par de algarismos. E, reciprocamente, todo o multiplo de 11 que contiver um numero par de algarismos é circular para este divisor.

## NOTICIA SOBRE SATURNO

POR

F. GOMES TEIXEIRA

(Continuação)

Todas as mudanças de que fallámos anteriormente, affectando uma grande porção da superficie do Saturno, effectuando-se em pequenos intervallos de tempo, e sendo visiveis a uma distancia tão consideravel, como a que separa Saturno da terra, não podem ser attribuidas, senão a forças de grande intensidade.

Os phenomenos manifestados pela atmosphera de Saturno não se podem pois explicar pela acção do sol sobre elle, como acontece para a terra, porque a distancia do sol a este planeta é muito grande para produzir os effeitos descriptos. Demais se taes effeitos fossem devidos só á acção do sol, a região equatorial d'aquelle planeta deveria ser, como a zona equatorial da terra, a região das calmas, o que não acontece, pois está sujeita a grandes e continuadas mudanças. Além d'isso, emquanto que na terra a zona de nuvens que existe entre os tropicos varía de posição com as estações, permanecendo ao norte do equador durante o estio, e ao sul durante o inverno, em Saturno ha uma banda brilhante que fica permanentemente equatorial.

Conclue Mr. Proctor que as forças que produzem taes effeitos não são exteriores ao planeta, e guiando-se pelo que parece ter-se passado na terra em tempos remotos, e pelo que se passa actualmente no sol, diz que muito provavelmente Saturno é uma massa incandescente, ainda fluida, ainda fervente, onde se levantam continuamente enormes massas de nuvens, que são dispostas em bandas pela influencia da rapida rotação do planeta.

Esta hypothese sobre o estado actual de Saturno explica completamente as suas mudanças de figuras, mudanças que, como vimos, não podem ser postas em duvida, pelo credito que merecem os astronomos que as observaram.

Explica tambem esta hypothese a pequena densidade que dissemos já que tinha Saturno. Com effeito, têm-se reconhecido que os planetas, cuja natureza póde ser estudada, são constituidos dos mesmos elementos que o sol, porém, no sol e n'estes planetas estes elementos acham-se em condições diversas; póde pois haver planetas em que elles se achem nas mesmas condições que no sol, e que tenham portanto uma pequena densidade, visto que a do sol é tambem muito pequena.

A similhança da constituição de Saturno com a do sol, de que acabamos de fallar, não é porém completa. Em quanto que as nuvens do sol são luminosas, as de Saturno, que estão n'uma temperatura mais baixa, não o são, e vellam assim a maior parte da luz propria do planeta.

Mais argumentos ha ainda a favor da hypothese precedente, como passamos a ver.

*(Continúa).*

## QUESTÃO PROPOSTA

Resolver com os unicos recursos da Geometria elementar o problema seguinte:

*Por um ponto dado a igual distancia de duas rectas tambem dadas, conduzir uma transversal tal, que a parte intercepta por estas rectas seja igual a uma recta dada* m.

Lisboa — 1877.

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO.

# SECÇÃO I

## SUR LES FORMULES DE MR. FRENET

PAR

CH. HERMITE



Une courbe dans l'espace étant représentée par les équations:

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\theta(t),$$

je pôse pour abréger:

$$A=y'z''-z'y''$$

$$B=z'x''-x'z''$$

$$C=x'y''-y'x''$$

et:

$$D^2=A^2+B^2+C^2.$$

Mr. Hermite, um dos primeiros mathematicos francezes, dignou-se illustrar o nosso Jornal, enviando-nos o presente artigo para n'elle ser publicado.

Cela étant, les angles, $(\alpha, \beta, \gamma)$, $(\lambda, \mu, \nu)$, $(\xi, \eta, \zeta)$, de la tangente, de l'axe du plan osculateur et de la normale principale avec les axes coordonées sont déterminées par les relations suivantes:

$$\cos\alpha = \frac{x'}{s'},\quad \cos\lambda = \frac{A}{D},\quad \cos\xi = \frac{Bz' - Cy'}{Ds'}$$

$$\cos\beta = \frac{y'}{s'},\quad \cos\mu = \frac{B}{D},\quad \cos\eta = \frac{Cx' - Az'}{Ds'}$$

$$\cos\gamma = \frac{z'}{s'},\quad \cos\nu = \frac{C}{D},\quad \cos\zeta = \frac{Ay' - Bx'}{Ds'}.$$

On sait aussi que le rayon de courbure R, et le rayon de torsion $r$, ont pour valeur:

$$R = \frac{s'^3}{D},\quad r = \frac{D^2}{\Delta},$$

où:

$$\Delta = Ax''' + By''' + Cz'''.$$

Cela étant, l'identité:

$$Bz' - Cy' = (x''s' - x's'')s'$$

donnant

$$\cos\xi = \frac{x''s' - x's''}{D} = \frac{s'^2}{D} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{x'}{s'}\right],$$

on voit déjà, qu'on a:

$$\frac{d\cos\alpha}{dt} = \frac{D}{s'^2}\cos\xi = \frac{s'}{R}\cos\xi,$$

et semblablement:

$$\frac{d\cos\beta}{dt} = \frac{s'}{R}\cos\eta, \quad \frac{d\cos\gamma}{dt} = \frac{s'}{R}\cos\zeta.$$

Ces résultats conduisent à chercher les valeurs des dérivées par rapport a $t$ de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, qui s'obtiennent facilement comme on va voir.

On a d'abord:

$$\frac{d\cos\lambda}{dt} = \frac{A'D - AD'}{D^2} = \frac{A'D^2 - ADD'}{D^3};$$

remarquant ensuite que:

$$A'D^2 - ADD' = A'(A^2 + B^2 + C^2) - A(AA' + BB' + CC')$$

$$= B(A'B - AB') + C(A'C - AC'),$$

il suffit de se rappeler les relations bien connues:

$$A'B - AB' = \Delta z'$$

$$B'C - BC' = \Delta x'$$

$$C'A - CA' = \Delta y'$$

pour en conclure:

$$A'D^2 - ADD' = \Delta(Cy' - Bz').$$

Nous avons donc:

$$\frac{d\cos\lambda}{dt}=\frac{\Delta(Cy'-Bz')}{D^3}=-\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\xi,$$

et de même:

$$\frac{d\cos\mu}{dt}=-\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\eta,\quad \frac{d\cos\nu}{dt}=-\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\zeta.$$

Enfin la relation $\cos^2\alpha+\cos^2\lambda+\cos^2\xi=1$ donne immédiatement

$$\cos\xi\frac{d\cos\xi}{dt}=-\cos\alpha\frac{d\cos\alpha}{dt}-\cos\lambda\frac{d\cos\lambda}{dt}$$

et par suite:

$$\frac{d\cos\xi}{dt}=-\frac{D}{s'^2}\cos\alpha+\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\lambda.$$

On aura de même:

$$\frac{d\cos\eta}{dt}=-\frac{D}{s'^2}\cos\beta+\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\mu.$$

$$\frac{d\cos\zeta}{dt}=-\frac{D}{s'^2}\cos\gamma+\frac{s'\Delta}{D^2}\cos\nu.$$

Ce sont les formules importantes dont la première découverte est due a Mr. Frenet, mais que Mr. Serret a obtenues de son côté presqu'en même temps. En introduisant les quantités R, $r$, et remplaçant $s'$ par $\frac{ds}{dt}$, elles deviennent:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds}=\frac{\cos\xi}{R},\quad \frac{d\cos\beta}{ds}=\frac{\cos\eta}{R},\quad \frac{d\cos\gamma}{ds}=\frac{\cos\zeta}{R},$$

$$\frac{d\cos\lambda}{ds}=-\frac{\cos\xi}{r},\quad \frac{d\cos\mu}{ds}=-\frac{\cos\eta}{r},\quad \frac{d\cos\nu}{ds}=-\frac{\cos\zeta}{r}$$

$$\frac{d\cos\xi}{ds}=-\frac{\cos\alpha}{R}+\frac{\cos\lambda}{r}$$

$$\frac{d\cos\eta}{ds}=-\frac{\cos\beta}{R}+\frac{\cos\mu}{r}$$

$$\frac{d\cos\zeta}{ds}=-\frac{\cos\gamma}{R}+\frac{\cos\nu}{r}.$$

Je remarque enfin, qu'en désignant par $a$, $b$, $c$, trois constantes arbitraires, et faisant:

$$u=(a-x)\cos\alpha+(b-y)\cos\beta+(c-z)\cos\gamma$$

$$v=(a-x)\cos\xi+(b-y)\cos\eta+(c-z)\cos\zeta$$

$$w=(a-x)\cos\lambda+(b-y)\cos\mu+(c-z)\cos\nu,$$

ces diverses relations sont comprises dans celles-ci:

$$\frac{du}{ds} = -s + \frac{v}{R}$$

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{u}{R} - \frac{w}{r}$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{v}{r}$$

qui me semblent offrir sous la forme la plus simple les équations différentielles pour la détermination d'une courbe, dont on donne le rayon de courbure et le rayon de torsion.

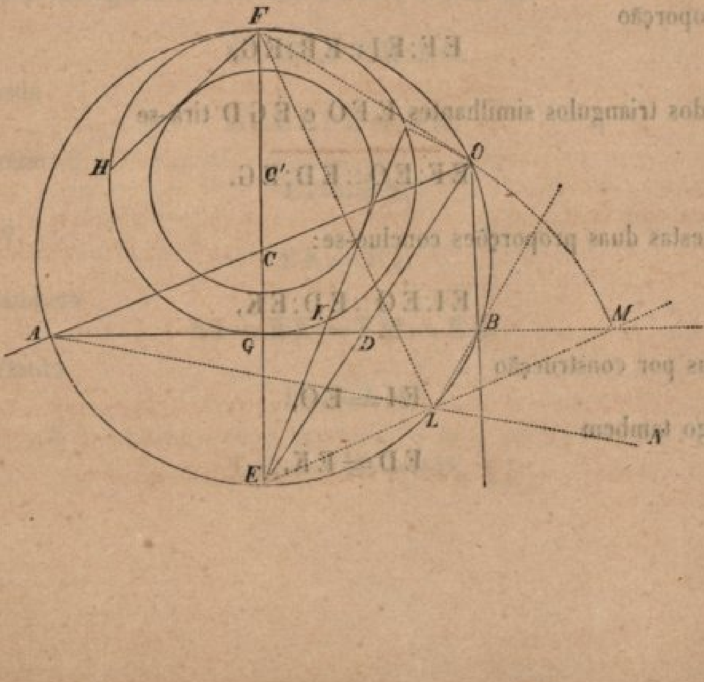
# SECÇÃO II

## SOBRE A QUESTÃO PROPOSTA NO NUMERO ANTERIOR

Resolver com os unicos recursos da geometria elementar o problema seguinte:

*Por um ponto dado a igual distancia de duas rectas tambem dadas, conduzir uma transversal tal, que a parte intercepta por estas rectas seja igual a uma recta dada* m.

### Primeira solução



Seja AB a recta representada por $m$. Façamos sobre ella o segmento AFB capaz de conter o augulo formado pelas duas rectas dadas: evidentemente o vertice do dicto angulo estará n'algum ponto O do arco AFB, e o angulo das duas rectas dadas será AOB. Tiremos o diametro FE perpendicular a AB; a bissetriz do angulo passará necessariamente por E, e o ponto dado a igual distancia das duas rectas será D.

Para definitivamente determinar o ponto O, faça-se a seguinte construcção:

Sobre GF como diametro trace-se um circulo, e n'elle tire-se uma corda FH igual á distancia conhecida do ponto dado ao vertice do angulo formado pelas duas rectas; descreva-se outra circumferencia concentrica com a antecedente e tangente a FH, então, por E, tire-se a recta EI tangente á mesma circumferencia, e fazendo centro em E, com o raio EI, descreva-se um arco de circulo, que pela sua intercessão com a circumferencia AFBE, irá determinar o ponto procurado O: pois que OD fica sendo a distancia conhecida a que o ponto dado estava effectivamente do vertice do angulo.

## Demonstração

As duas secantes EF e EI ao circulo FHGKI dão-nos a proporção

$$EF:EI::ER:EG,$$

e dos triangulos similhantes EFO e EGD tira-se

$$EF:EO::ED:EG.$$

D'estas duas proporções conclue-se:

$$EI:EO::ED:EK,$$

mas por construcção

$$EI=EO,$$

logo tambem

$$ED=EK,$$

portanto

$$EO-ED=EI-EK,$$

ou

$$OD=IK,$$

mas IK, pela construcção que fizemos, é igual a FH, logo

$$OD=FH$$

q. e. d.

Se continuarmos o arco IO até encontrar o prolongamento de AB em M, e tirarmos a recta EM, esta cortará a circumferencia n'um ponto L; tirando BL e ALN, o angulo BLN será igual ao angulo formado pelas rectas dadas, pois que é medido pelo mesmo arco; LM será a bissetriz d'esse angulo e M o ponto que nos era dado, a recta MA tirada por elle vai cortar um dos lados do augulo em B e o prolongamento do outro em A, ficando a parte AB por elles intercepta igual á grandeza dada *m*.

Com effeito, tinhamos achado a proporção

$$EF:EI::EK:EG,$$

mas os triangulos similhantes EFL e EGM dão

$$EF:EL::EM:EG,$$

d'onde

$$EI:EL::EM:EK,$$

porém

$$EI=EM$$

logo

$$EK=EL$$

e tambem

$$EI-EK=EM-EL$$

portanto

$$IK=LM$$

ou

$$LM=FH=OD,$$

*Advertencia:*—Achámos $EL = EK$, e tambem mostrámos que $EK = ED$, logo $EL = ED$, facto este que se traduz no seguinte theorema:

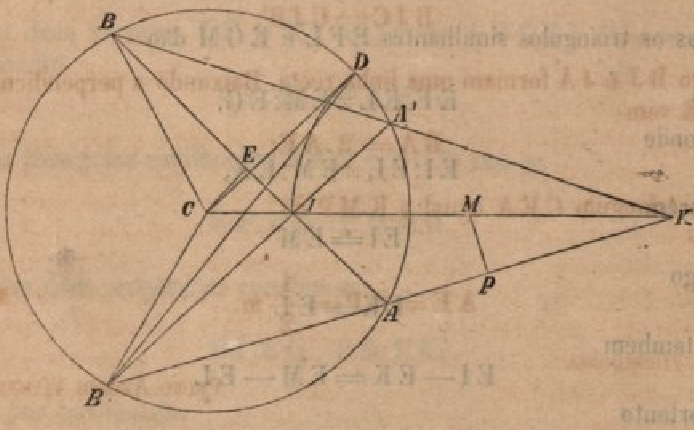
*Se do meio d'um arco tirarmos duas rectas iguaes a terminarem, uma na circumferencia e a outra no prolongamento da corda do mesmo arco, a circumferencia separará n'esta ultima um segmento igual áquelle que a corda separa na primeira.*

Esta proposição, que appareceu incidentemente, não nos era conhecida, nem sabemos se já por alguem foi enunciada: não deixa de ser curiosa, e póde demonstrar-se directamente por uma maneira simples e elegante.

CARLOS HENRIQUE D'AGUIAR CRAVEIRO LOPES.

## Segunda solução

Seja J o ponto dado e AK e BK as rectas dadas.




Tome-se $EP = \frac{1}{2} m$ e levante-se a perpendicular PM.

Com o diametro K J descreva-se a circumferencia D J e tire-se a tangente $DC = KM$, problema facil de resolver.

Com o raio C D descreva-se a circumferencia $AA'BB'$ a qual contará os lados do angulo em quatro pontos, que fornecerão as duas transversaes A B, $A'B'$ pedidas.

Com effeito

$$CA^2 = DC^2 = KC \times CJ$$

logo os triangulos K C A, J C A são similhantes, bem como $KCB'$, $JCB'$.

Portanto o angulo

$$CJB' = CB'A = CAB' = JAB' - JAC,$$

mas

$$JAC = \frac{1}{2} K,$$

logo

$$CJB' = KJA.$$

Mas

$$BJC = CJB',$$

logo B J e J A formam uma linha recta. Baixando a perpendicular C E vem

$$BA = 2.AE;$$

e o triangulo C E A egual a K M P dá

$$AE = KP = \frac{1}{2} m.$$

*(Continúa).*

Pedro Amorim Vianna.

# SOBRE A ORGANISAÇÃO DO REAL OBSERVATORIO ASTRONOMICO DE LISBOA

POR

A. F. DA ROCHA PEIXOTO

Observa F. Arago, na biographia do principe Albategnius, astronomo arabe do seculo I, que nos tempos remotos, e entre os mahometanos, não eram contradictorios os dous titulos de principe e astronomo. Na historia da astronomia, *parte essencial da historia do espirito humano,* é esta observação brilhantemente demonstrada com gloriosos nomes de principes illustrados e distinctos, pela dedicação com que protegeram a sciencia exploradora dos céos.

Pois, nos tempos modernos, é de justiça tambem a mesma observação. O nome saudoso de D. Pedro V, cujo tumulo é um altar de veneração para quantos amarem Portugal, ha de sempre dourar a historia da astronomia d'este seculo, tão feliz em progressos, que a divisão do trabalho é já uma necessidade, uma verdadeira lei, nas sciencias como nas artes, e na vida social. Á generosa e dedicada iniciativa d'este sempre querido rei é devida a fundação de um observatorio, na Ajuda, para a astronomia sideral, estabelecimento reclamado imperiosamente pelos progressos da astronomia moderna e pelos mais eminentes sabios que para elles têm contribuido com os seus talentos e trabalhos.

Foi em 1857 que teve começo esta grandiosa obra. Na legislação portugueza ha documentos que mostram evidentemente, sem permittirem a mais leve duvida, o pensamento unico que o inspirou a um principe tão illustrado como infeliz.

Para que a verdade seja de todos conhecida, bastam os decretos de 31 de janeiro e 14 de fevereiro de 1857, dos quaes o segundo vem, na parte mais significativa, transcripto nas excellentes considerações que, sobre tão importante assumpto, publicou em 1875 o distincto astronomo, e meu honrado amigo, Frederico Augusto Oom. Julgo necessario transcrever ambos estes documentos n'este modesto artigo, que me é imposto por um dever de homem publico. Assignados por D. Pedro v, dizem assim:

«Tendo attenção ás urgencias do estado, hei por bem ordenar que, da dotação que me fôra estabelecida, na conformidade da carta constitucional da monarchia, se deduza a quantia de 91:250$000 réis, como donativo espontaneo, que deverá verificar-se durante o anno de 1857-1858; e outrosim sou servido declarar que é minha vontade que d'esta somma sejam applicados 30:000$000 rs. á fundação de um observatorio astronomico em Lisboa, e 10:000$000 réis para enriquecer as collecções do instituto industrial d'esta capital, devendo a restante quantia de 51:250$000 réis entrar na receita geral do estado.

«O duque mordomo-mór assim o tenha entendido e fará constar na repartição competente. Paço, aos 31 de janeiro de 1857. — REI. — *Duque mordomo-mór.*»

«Attendendo a que as leis da creação das escolas polytechnica e naval determinam que haja um observatorio para o ensino pratico de astronomia, e a que em tempos mais remotos havia n'esta mesma cidade o observatorio denominado — do Castello —, que foi successivamente decahindo até desapparecer de facto, não existindo na actualidade senão o observatorio da marinha, que não póde desempenhar os fins que se têm em vista; e sendo certo que um observatorio astronomico erigido na capital do reino, e organisado *segundo as prescripções da epocha*, satisfazendo ao ensino, póde e deve cooperar igualmente *para o adiantamento da sciencia*, e servir ao mesmo tempo para recolher factos, ministrar dados, e desempenhar os variados trabalhos que são precisos ao bom serviço das diversas repartições publicas; *tomando na maior consideração as exigencias que têm apresentado os mais celebres e distinctos astronomos do seculo, os quaes preparam seguramente um brilhante futuro para a sciencia e para o credito d'este paiz, dotado pela natureza com condições climatericas quasi exclusivas* *d'elle, sendo a principal d'essas exigencias um curso contínuo de observações especiaes, feitas n'esta posição como ponto singular e unico para certos e determinados fins;* desejando, pois, que *todos* estes resultados, *de tanto momento para o serviço do estado, para a publica instrucção e para a sciencia, e de tanta gloria para a nação portugueza,* se obtivessem promptamente; fui servido ordenar, por decreto de 31 de janeiro do corrente anno, que, da dotação que me foi estabelecida, na conformidade da carta constitucional da monarchia, se deduzissem 30:000$000 réis para a fundação de um observatorio astronomico em Lisboa. Attendendo, porém, a que uma similhante creação, no actual estado da astronomia, é objecto de maior importancia scientifica, e depende de variados conhecimentos especiaes, sou servido nomear uma commissão, composta do marechal de campo, José Feliciano da Silva Costa, do meu conselho, meu ajudante de campo e commandante geral do corpo de engenheria; do coronel graduado de engenheria, o dr. Filippe Folque, do meu conselho, lente de astronomia e director geral dos trabalhos geodesicos do reino e do observatorio da marinha; do coronel graduado de engenheria, João Ferreira de Campos, lente jubilado da escola polytechnica; e do major graduado de artilheria, o dr. Guilherme José Antonio Dias Pegado, lente de physica e director do observatorio meteorologico do infante D. Luiz; de que será presidente o primeiro, e secretario o que por elle fôr nomeado. Cumpre á commissão: 1.° apresentar uma relação dos instrumentos fundamentaes astronomicos, que satisfaçam completamente, tanto ás observações relativas ao systema solar, *como ás que devem servir de base aos progressos da astronomia sideral,* indicando tambem os artistas mais acreditados que devem encarregar-se da sua construcção, e informando tudo o mais que julgar conveniente sobre o assumpto; 2.° escolher e indicar o local mais apropriado para a edificação do observatorio; 3.° apresentar o projecto e orçamento da construcção, de modo que o edificio tenha a capacidade necessaria e mais condições technicas para a perfeita estabilidade de todos os instrumentos e apparelhos que deve possuir no seu estado completo, e em tudo similhante ao dos mais modernos observatorios de primeira ordem; tendo tambem em vista que deve poder proporcionar alojamento conveniente aos empregados que tiverem de fazer as observações a qualquer hora do dia ou da noute. Espero da reconhecida illustração, zelo e actividade dos membros da commissão nomeada, que desempenharão cabalmente o importante serviço de que sou servido encarregal-os.

«O visconde de Sá da Bandeira, par do reino, ministro e secretario de estado dos negocios da marinha e ultramar, e interinamente encarregado dos negocios da guerra, assim o tenha entendido e faça executar na parte respectiva a cada uma das dictas repartições. Paço, aos 14 de fevereiro de 1857.—REI.—*Visconde de Sá da Bandeira.*»

O primeiro d'estes decretos vem publicado no *Diario do Governo*, n.º 30, de 4 de fevereiro de 1857, e o outro no n.º 43, de 19 d'este mez.

Não houve então quem usasse deturpar este grandioso pensamento; não appareceram talentos desvairados pela ambição, perdidos de cynismo, a sacrificar a interesses proprios e mesquinhos, e com criminoso egoismo, os progressos e as necessidades da astronomia. A obra iniciada pelo virtuoso soberano foi proseguindo pelo concurso de todos os que para ella podiam trabalhar efficazmente; e, n'um relatorio apresentado ás côrtes, ha cêrca de dezenove annos, disse o visconde de Sá da Bandeira, ministro da marinha:

«O governo tenciona levantar nas proximidades d'esta capital um observatorio *com todas as condições necessarias aos grandes estudos da astronomia sideral.* Sua Magestade El-Rei dignou-se concorrer para esta obra com o donativo de 30:000$000 réis, sendo este mais uma demonstração do vivo interesse que toma pelo progresso das sciencias. Para se poder realisar a construcção do observatorio, a escolha e acquisição dos instrumentos que n'elle hão de servir, foi nomeada uma commissão composta de pessoas eminentes pelo seu saber, a qual se acha em relação com diversos sabios extrangeiros, e entre elles M. Struve, o illustre astronomo director do observatorio de Palkova na Russia, que levado pelo amor da sciencia, que com tanto esmero cultiva, se presta a indicar tudo quanto fôr conducente a realisar a construcção do projectado observatorio, que deverá procurar-se que contenha todos os aperfeiçoamentos que a sciencia tem indicado, e tambem a dirigir a construcção e acquisição dos principaes instrumentos que têm de alli ser collocados: e, com effeito, acham-se já em construcção, em Munich, pelo celebre artista Merz, *um grande refractor parallatico;* em Londres *duas pendulas normaes* e um *apparelho galvanico*, para a contagem do tempo; e em Hamburgo, pelo outro notavel artista M. Repsold, um *circulo meridiano* e um *instrumento de passagens pelo primeiro vertical.* M. Struve enviou ao governo uma interessante memoria, por elle escripta, indicando as condições que a sciencia aconselha na edificação de um observatorio astronomico, fazendo ao mesmo tempo mui importantes reflexões sobre *a especialidade dos trabalhos de que se deve occupar o observatorio e educação do seu pessoal.* Aproveitando o offerecimento d'este celebre astronomo, mandou um joven official de marinha, que se dedica com zelo ao estudo da astronomia, a praticar no observatorio de Pulkova, e assim habilitar-se ao uso dos grandes instrumentos que alli existem e que são *indispensaveis* ás observações sideraes.»

*(Continúa).*

---

## QUESTÃO PROPOSTA

Resolver com os unicos recursos da geometria elementar a questão seguinte:

*Por um ponto dado no plano de um circulo, tirar uma transversal tal, que as distancias d'este ponto aos de intersecção com o circulo estejam numa razão dada* $\frac{m}{n}$.

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO.

# SECÇÃO I

## NOTE SUR L'ANGLE D'UNE COURBE AVEC UNE DROITE



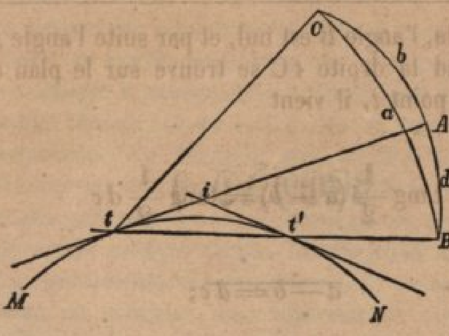
PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Selon l'opinion de Mr. Jules de la Gournerie, l'angle d'une courbe quelconque avec une droite est égal à l'angle formé par cette droite avec la sécante, qui passe par le point de rencontre de ces lignes, et par un autre point infiniment rapproché; d'où il conclut que, toutes les fois que l'on n'a à considérer que des quantités finies, on peut prendre la tangente au lieu de la sécante, l'erreur commise étant égale à la moitié de l'angle de contingence (*).

En admettant donc cette manière de considérer la grandeur de l'angle d'une droite avec une courbe quelconque, nous allons prouver que, lorsque nous prendrons la tangente au lieu de la sécante, l'erreur commise n'est égale à la moitié de l'angle de contingence, que lorsque la droite donnée sera située sur le plan osculateur de la courbe, correspondant au point de rencontre des lignes considérées.

(*) Voyez le n.° 485 du *Traité de géométrie descriptive* par Mr. Jules de la Gournerie.




En effet, soit $Mtt'N$ la courbe donnée ; $tA$ et $t'i$ deux tangentes infiniment rapprochées, et $tC$ la droite aussi donnée, passant par le point $t$.

Maintenant, considérons le triangle sphérique $ABC$ déterminé par les droites $tA$, $tB$ et $tC$ sur une sphère quelconque dont le centre est en $t$, et dont nous prendrons le rayon pour unité.

En faisant $BC = a$, $AC = b$ et $AB = dc$, nous aurons

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}dc . \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)}$$

Telle est la formule qui donne la différence entre les angles $AtC$ et $BtC$ de la droite $tC$ avec la tangente $tA$ et la sécante $tB$.

Ainsi, quand les angles $A$ et $B$ seront égaux, on a

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b) = 0$$

donc

$$a - b = 0.$$

Si, par exemple, l'angle B est nul, et par suite l'angle A=180°, c'est-à-dire quand la droite $t$C se trouve sur le plan osculateur de la courbe au point $t$, il vient

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}dc$$

d'où

$$a-b=dc;$$

mais, en représentant par $ds$ l'arc $tt'$ et par $\rho$ le rayon de courbure au point $t$, nous savons que l'expression

$$-\left(\frac{ds}{6\rho}\right)^2\left(\frac{d\rho}{d^2s}\right)$$

est la différence des angles formés par la corde $tt'$ avec les tangentes à ses extrémités, et, en négligeant cette différence en présence de la grandeur de l'angle de contingence A $it'$ ou $\frac{ds}{\rho}$, nous pouvons considérer le triangle infiniment petit $tit'$ comme isosceles, d'où il resulte

$$a-b=dc=\frac{1}{2}\frac{ds}{\rho}$$

D'après cela, nous voyons, comme il était facile de le reconnaître *à priori*, que la différence $(a-b)$ doit varier entre 0 et $\frac{1}{2}\frac{ds}{\rho}$: cette dernière valeur *maximum* étant celle qui correspond, comme nous l'avons dit, au cas où la droite se trouve sur le plan osculateur de la courbe au point de rencontre $t$ de ces lignes

q. e. d.

# DEMONSTRAÇÃO DO THEOREMA DE M. VILLARCEAU SOBRE O TÓRO

POR

PEDRO AMORIM VIANNA

*A secção feita em um tóro de revolução pelo plano tangente que passa pelo seu centro, é um circulo duplo* (*).

Supponhamos o eixo do tóro vertical, e consideremos um meridiano qualquer CMN, onde $CN = a$ é a distancia do eixo ao centro do circulo gerador, e $NM = r$ é o raio d'esse circulo.

Tomando sobre o traço horizontal do plano tangente $CD = r$ e unindo DM, os triangulos DMC e MCN serão iguaes, em quanto os angulos DCM e CMN, que chamaremos $\varphi$ e $\psi$, forem da mesma especie.

Com effeito, o triangulo rectilineo MCN dá

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{r}{a} \operatorname{sen} \psi.$$

E as rectas CM, CN, DC determinam um triangulo espherico rectangulo onde

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} J,$$

chamando J a inclinação sobre o horizonte do plano tangente;

(*) Para construir a figura, trace-se a linha CN, no ponto N levante-se-lhe a perpendicular MN, e tire-se a linha CM. Pelo ponto C tire-se depois a linha DCD′, tomando os pontos D e D′ a igual distancia de C.

mas

$$\text{sen } J = \frac{r}{a},$$

logo

$$\text{sen } \theta = \frac{r}{a} \text{ sen } \varphi,$$

portanto

$$\text{sen } \varphi = \text{sen } \psi,$$

os triangulos CMN e CDM são iguaes e $DM = CN = a$.

Na circulação, em tôrno do eixo do tóro, do meridiano CMN n'um dos sentidos $\varphi$ e $\psi$ se conservarão da mesma especie e o ponto de tangencia M descreverá um circulo em tôrno de D. Porém, na circulação no sentido contrario, deveremos tomar $CD' = CD$ para ser $D'$ centro do outro circulo descripto pelo mesmo ponto.

# NOTICIA SOBRE LE VERRIER

POR

R. R. DE SOUSA PINTO

No dia 23 de setembro ultimo falleceu em París M. J. L. Le Verrier, nascido em S[t] Lô em 11 de março de 1811.

Depois de frequentar com distincção a Eschola Polytechnica de París, e de ser empregado por alguns annos nas Manufacturas do Estado e no Magisterio, entregou-se com ardor aos estudos astronomicos theoricos, para os quaes tinha decidida vocação.

Tornado desde 1839 o amigo e collaborador do sabio astronomo Arago, entrou por indicação d'este no Observatorio de París; succedendo-lhe em 1854 na direcção d'aquelle estabelecimento, da qual esteve depois privado por quatro annos; e foi reintegrado em 1873.

Encetando a brilhante carreira, percorrida em trinta e oito annos, pelas notaveis memorias sobre as variações seculares dos elementos das orbitas planetarias, sobre a theoria de Mercurio, e sobre o cometa de 1770, que lhe abriram as portas da Academia Real das Sciencias, sendo eleito membro da secção de astronomia em 19 de janeiro de 1846, e que n'elle revelaram um sucessor de Laplace, elevou-se depois ao zenith da gloria e da popularidade, pela famosa descoberta de Neptuno, a que o levára a explicação das anomalias do movimento de Urano, até então inexplicaveis.

Calculadas, com o maximo escrupulo, todas as desigualdades sensiveis provenientes das acções perturbadoras de Jupiter e Saturno, reduzidas com igual cuidado as observações que lhe inspiraram mais confiança, e comparados os logares assignados pela theoria com os deduzidos da observação, discutiu a possibilidade de expellir os erros, assim achados, por algum dos meios seguintes: correcção das observações; correcção dos elementos ellipticos; modificação da lei newtoniana; acção do ether; acção d'algum satellite desconhecido do planeta; acção d'algum cometa. E, depois de verificar que nenhuma d'estas correcções satisfazia ao fim proposto, emprehendeu resolver o problema inverso do ordinario das perturbações, isto é, achar os elementos da orbita d'um planeta exterior, cuja acção produzisse no movimento de Urano perturbações iguaes aos erros alludidos; partindo provisoriamente da distancia ao sol, que a lei de Bode indicava.

A longa serie de profundas e delicadas investigações analyticas e de calculos penosos, que a resolução d'este problema demandava, apresentada á Academia Real das Sciencias em 10 de novembro de 1845, 1 de julho e 31 de agosto de 1846, e a concordancia dos seus resultados com a observação do novo planeta, feita pelo dr. Galle, de Berlin, em 23 de setembro de 1846, são um padrão de gloria immorredoura, que o insigne astronomo erigiu a si e á sciencia, para attestar perennemente a sublimidade dos estudos astronomicos, a intelligentissima actividade com que elle os cultivava, e a justiça que lhe fez o illustre Villarceau, sem duvida insuspeito, quando, á beira da sepultura, exclamou: *Adeus, grande astronomo! Adeus!*

Se ao mesmo tempo, e sem communicação reciproca, o distinctissimo mathematico inglez Adams se occupava do mesmo problema, e chegava a conhecer a existencia do planeta, assignando-lhe uma posição conforme com a determinada por Le Verrier, o elevado conceito que os seus trabalhos lhe grangearam, não diminue a gloria d'este, mais cedo confiado na segurança e exactidão dos resultados que obtivera, e mais feliz na opportunidade de encontrar a confirmação da sua descoberta pelas observações, pedindo-a aos astronomos de Berlin.

Com aquella descoberta, logo depois confirmada pela observação, e com a mais recente de Vulcano, cuja existencia esta provavelmente virá tambem comprovar, coube a Le Verrier a gloria de remover os limites do systema planetario para fóra e para dentro dos até alli suppostos.

Formando o vasto plano de rever e aperfeiçoar a theoria dos movimentos dos corpos celestes, e de applical-a a todos os planetas, calculando as suas taboas, metteu hombros a uma empresa colossal, que, sem a sua penetrante sagacidade, sem o recurso dos seus profundos conhecimentos analyticos, e sem a inexcedivel perseverança com que trabalhava, só poderia ser levada ao cabo por uma corporação scientifica. E, além d'isso, por sua direcção e collaboração foram já reduzidas todas as observações feitas no observatorio de París desde 1800 até 1868.

Os onze volumes de memorias dos *Annaes do Observatorio de París*, e os vinte e quatro de observações, contêm as formulas, as taboas e os catalogos, resultado d'este grande commettimento, que são hoje o preciosissimo thesouro, onde os astronomos e os calculadores acham, em abundancia, e com inteira confiança, os elementos necessarios para os seus trabalhos.

A menção honrosa, em 14 de janeiro de 1848, pelas investigações relativas á descoberta de Neptuno, e as medalhas de ouro conferidas em fevereiro de 1868 e em fevereiro de 1876, pelas taboas planetarias, são eloquente testimunho do subido apreço que a Real Sociedade Astronomica de Londres deu a estas explendidas e summamente uteis producções.

Na instituição das communicações rapidas, em grande escala, para o prompto annuncio dos accidentes meteorologicos e das tempestades nos logares convenientes, organisada em 1865, fez á agricultura e á navegação um serviço importantissimo. E fez outros tambem muito valiosos á geodesia e á meteorologia.

Pelos brilhantes resultados astronomicos que obteve, e pelos relevantes serviços que prestou á sciencia e á humanidade, tornou-se o nome de Le Verrier conhecido e respeitado em todo o mundo.

Teve, é verdade, frequentemente contradictores, e sustentou algumas vezes rudes polemicas com os seus emulos; como aconteceu nas memoraveis questões relativas a alguns pontos das theorias dos corpos do systema solar, especialmente de Mercurio, e á transferencia do observatorio de París, ventiladas no seio da Academia Real das Sciencias. Mas as suas exequias apresentaram o espectaculo tocante da reunião de amigos e admiradores, entre os quaes avultavam alguns dos seus illustres adversarios, que todos se despediam saudosos do grande astronomo, e rendiam franca homenagem ao seu extraordinario merecimento.

Quando a sua alma estava prestes a deixar a prisão terrena, occorreu a circumstancia notavel de lhe ser annunciada a conclusão da obra herculea, na qual trabalhava, havia mais de trinta annos. E, ao receber a noticia, murmurou elle as ultimas palavras — *Nunc dimittis servum tuum, domine* — ; dando assim mais uma prova de que o respeito a Deus e os sentimentos religiosos são companheiros da verdadeira sciencia.

Foi por isso que M. Tresca, no discurso que pronunciou nas exequias, em nome do Conselho Scientifico do Observatorio, proferiu estas edificantes palavras:

«La fin de ce savant, qui fut illustre avant l'âge, et par laquelle on n'apprendra pas sans émotion, peut être, que l'étude du ciel et la foi scientifique n'avaient fait que consolider en lui la foi vive du chrétien, c'est là un exemple qui sera donné de bien haut à la conscience publique et à la moralité de notre époque.»

# SECÇÃO II

## NOTICIA SOBRE SATURNO

POR

F. GOMES TEIXEIRA

(Continuação)

As observações photometricas do illustre astronomo, dr. Zöllner, mostram que Saturno reflecte para a terra mais luz do que reflectiria, se fosse constituido como Marte, a lua ou a terra. Com effeito, em quanto que Marte reflecte uma quarta parte da luz que recebe do sol, e a lua menos de uma quinta parte, Saturno reflecte metade d'esta luz. A não admittir que Saturno tem luz propria, seria necessario attribuir-lhe, segundo Zöllner, um poder reflector quasi igual ao do papel branco, o que não concorda com a côr que se vê ao telescopio.

De tudo o que precede concluiremos, com Mr. Proctor, que, com toda a probabilidade, Saturno é quasi um sol que illumina e aquece os oito mundos que circulam á roda d'elle.

Submettido só a attracção do sol, Saturno descreveria em roda d'este astro uma ellipse de que elle occuparia o fóco, percorrendo a linha que une o seu centro ao do sol areas iguaes em tempos iguaes.

A attracção dos outros corpos celestes altera este movimento. Como porém esta attracção é muito pequena, comparada com a primeira, por causa da pequenez das massas dos planetas relativamente á massa do sol, póde-se ainda considerar Saturno, como descrevendo em roda do sol uma ellipse, cuja grandeza e posição varía contínua e lentamente.

Como a determinação d'estas variações não se póde fazer exactamente, recorre-se, para as obter, aos meios de approximação. A efficacia d'estes meios é fundada na pequenez das acções dos planetas, comparadas com a do sol.

Para obter uma determinada exactidão na determinação precedente, é, pois, necessario um calculo tanto mais complicado, quanto maiores são as acções a que o planeta considerado está sujeito da parte dos outros planetas.

Saturno está sujeito a uma attracção consideravel da parte de Jupiter, que tem uma grande massa, e é visinho d'elle. A massa de Jupiter é, com effeito, trezentas vezes, e a de Saturno mais de cem vezes a massa da terra. O movimento elliptico de Saturno soffre por esta causa muitas perturbações.

Tendo os primeiros calculos que se fizeram d'estas perturbações dado resultados não conformes com as observações, chegou-se a duvidar da lei da attracção universal.

O eminente auctor da *Mecanica Celeste* tractou d'esta questão com mais successo, explicando e calculando todas as desigualdades de Saturno, e obtendo resultados concordantes com as observações, comprovando assim brilhantemente a lei de Newton.

Como a approximação com que Laplace havia calculado as perturbações do movimento de Saturno, não fosse sufficiente na actualidade, pela progressiva perfeição que tem havido nos meios de observar, de modo que havia differença sensivel entre os logares do astro calculados pelas formulas e os observados, o insigne astronomo Le Verrier fez de novo este calculo laborioso e difficil, levando a approximação mais longe do que exigem as mais perfeitas observações. Quando se quer levar a approximação até onde Le Verrier a levou, os termos a que ha a attender são tantos que, diz M. Bertrand, os calculos seriam inexequiveis, sem a habilidade com que o auctor sabe distinguir, para os conservar só, os termos, cuja influencia é apreciavel.

Concluida a theoria de Saturno, tractou Le Verrier de a comparar com as observações.

Como a posição do planeta é determinada relativamente a certas estrellas fundamentaes, começou este grande astronomo por corrigir as posições, dadas por Bessel, d'estas estrellas. Comparando depois os logares de Saturno, observados em Greenwich desde 1751 até 1869, e os observados em París desde 1837 até 1867 com os logares dados pelas suas formulas, achou pequenas differenças, excepto em 1839 e 1844, em que essas differenças attingiam os valores 4″,4 e 5″.

Refez pois os calculos por um outro caminho, que o levou a resultados pouco differentes dos primeiros; e como, por outra parte, esta variação da differença entre o calculo e a observação era muito brusca para ser attribuida ao calculo, concluiu que a differença notada só se podia attribuir aos erros das observações, provenientes provavelmente da influencia do annel, que ora desapparece e deixa ver o planeta debaixo da fórma de um disco, ora é visivel, e cobre com a sua sombra uma parte variavel do disco do planeta, umas vezes deixando observar as duas bordas do astro, outras vezes não deixando ver senão uma.

Concluirei este artigo, transcrevendo do livro sobre Saturno, de Mr. Proctor, as condições a que deve satisfazer um telescopio, para se poderem observar os phenomenos precedentemente descriptos.

Só os melhores telescopios mostram (em circumstancias atmosphericas favoraveis) a serie completa dos phenomenos descriptos. O primeiro, segundo e setimo satellites são especialmente difficeis de ver. Mr. Wray recorda, todavia, que Mimas e Enceladus foram vistos em dezembro de 1861 (quando o lado escuro do annel estava voltado para a terra), com sua achromatica de sete pollegadas sómente de abertura livre. O terceiro, quarto e quinto satellites não são difficeis de ver. O quinto é um pouco mais brilhante que os outros dous; comtudo todos tres são visiveis com uma boa achromatica de quatro pollegadas de abertura, estando a atmosphera clara e calma. O sexto e oitavo satellites podem ser promptamente descobertos com telescopios de pequeno poder amplificador, Japetus requerendo um poder amplificador igual a 100, e Titan sendo facilmente visivel com um telescopio d'um poder amplificador igual a 80. Em geral, Japetus deve ser procurado a uma distancia consideravel do disco do seu primario. O mais pequeno poder amplificador do telescopio necessario para se poder ver os anneis, é pouco mais ou menos 50. Para os ver distinctamente, requer-se um poder amplificador igual a 150. A divisão entre os anneis póde ver-se com um telescopio, cujo poder amplificador é 200, quando os anneis estão descobertos em quasi toda a extensão, e são observados em condições favoraveis. Nas mesmas circumstancias o annel escuro póde ser visto com uma boa achromatica de quatro pollegadas de abertura. A divisão no annel exterior e as divisões variaveis são só visiveis com poucos dos mais finos reflectores e refractores que ha no mundo.

As bandas da superficie do planeta são visiveis, em circumstancias atmosphericas favoraveis, com uma boa achromatica de quatro pollegadas de abertura. Em geral, todavia, requerem telescopios de maior força para revelar seus contornos distinctamente.

Nenhum objecto no céo apresenta uma apparencia tão bella como Saturno, visto com um instrumento de força adequada. O disco dourado, com suas bandas côr de prata; os anneis que o cercam, com suas variações de brilho e côr; e a perfeita symetria do systema quando atravessa o fundo escuro do campo de vista, combinam-se para formar uma pintura tão encantadora, como sublime e tocante.

## SOBRE A QUESTÃO PROPOSTA NO NUMERO ANTERIOR

Resolver com os unicos recursos da geometria elementar a questão seguinte:

*Por um ponto dado no plano de um circulo, tirar uma transversal tal, que as distancias d'este ponto aos de intersecção com o circulo estejam n'uma razão dada* $\frac{m}{n}$.

---

### Solução

1.º CASO (*). Seja A o ponto dado fóra do circulo e DEM o circulo.

Tirem-se pelo ponto A, a tangente AD ao circulo, e outra recta A$x$ que faça com a tangente um angulo qualquer.

Tomem-se sobre A$x$, a partir de A, os comprimentos AF$=n$, e em seguida FG$=m$, e construa-se a quarta proporcional DH.

(*) Pedimos aos leitores o favor de construirem primeiro a figura com as indicações seguintes:

Marque-se um ponto A no plano de um circulo; tire-se depois uma tangente AD a esse circulo, marcando com a letra D o ponto de contacto. Tire-se pelo ponto A uma recta A$x$ qualquer, e marque-se sobre ella os cumprimentos AF$=m$ e depois FG$=n$. Una-se F com D por uma linha recta e por G tire-se-lhe uma parallela, e marque-se com a letra H o seu ponto de intersecção com AD. Sobre AH como diametro descreva-se uma semi-circumferencia, e no ponto D levante-se a perpendicular DJ a AH, marcando com a letra J o ponto em que esta linha encontra a semi-circumferencia. Do ponto A como centro com o raio DJ descreva-se um arco de circumferencia, e marque-se com as letras E e M os pontos em que córta a circumferencia dada. Finalmente unam-se estes dous pontos com A pelas rectas AMN e AEP.

Construa-se D J, meia proporcional entre A D e D H. Finalmente, do ponto A como centro e com um raio igual a D J descreva-se o arco E M. As transversaes A M e A E resolvem o problema.

Com effeito, segundo as construcções indicadas, temos

$$\frac{m}{n}=\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}},$$

$$\overline{\mathrm{DJ}}^2=\overline{\mathrm{AM}}^2=\mathrm{AD}\times\mathrm{DH},$$

$$\mathrm{AM}\times\mathrm{AN}=\overline{\mathrm{AD}}^2.$$

As duas ultimas relações dão

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}}=\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{AD}},$$

ou, pela primeira,

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AN}}=\frac{m}{n}.$$

2.º caso (*). Se o ponto dado está dentro do circulo em A, tire-se o diametro D A B, e pela extremidade D uma recta qualquer D $x$. Construa-se a quarta proporcional a $m$, $n$, e D A, e tome-se A D H igual a essa quarta proporcional. Construa-se A L meia proporcional a A H e A B, e do centro A com o raio A L descreva-se uma circumferencia. Os pontos N e O, onde esta circumferencia córta a proposta, pertencem ás transversaes M N e O P, que resolvem a questão.

(*) Pedimos aos leitores que vão construindo a figura com as indicações dadas, o que é facil.

Com effeito; as relações $\overline{AL}^2 = \overline{AN}^2 = AH \times AB$

$$AN \times AM = AD \times AB$$

$$\frac{AH}{AD} = \frac{n}{m},$$

dão

$$\frac{AN}{AM} = \frac{n}{m}.$$

Vê-se claramente que o problema é sempre possivel, em quanto fôr

$$\frac{m}{n} > \frac{\pm(AC - R)}{AC + R}$$

e

$$\frac{m}{n} < \frac{AC + R}{\pm(AC - R)}$$

chamando R o raio do circulo, e empregando o signal + ou — segundo o ponto A está fóra ou dentro do circulo.

ANTONIO ZEFERINO CANDIDO.

---

## QUESTÃO PROPOSTA

Tendo tres grupos de objectos, contendo: o primeiro $a$ objectos, o segundo $a+1$ e o terceiro $a+2$; a que potencias se deve levantar cada um d'estes numeros, para que se possa formar um numero exacto de grupos de tres objectos? Nos outros casos, quantos objectos restam depois de formados os grupos?

F. GOMES TEIXEIRA.