JORNAL

DE

SCIENCIAS MATHEMATICAS E ASTRONOMICAS

PUBLICADO

PELO

Dr. Francisco Gomes Teixeira

Lente de Mathematica na Universidade de Coimbra

e

Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa

VOLUME II

COIMBRA

IMPRENSA DA UNIVERSIDADE

1878

SOLUZIONE TROVATA COL METODO DELLE EQUIPOLLENZE

DAL

PROF. G. BELLAVITIS

A pag. 142 del *Jornal de Sciencias Mathematicas*, Coimbra, 1877, I, la questione 8.ª (che io pure ho risolta brevemente) é esposta dal Sig. Monteiro sotto questo aspetto:

«Trovare un circolo tangente ad un circolo dato (B), che passi per un punto dato A, e il cui centro sia situato sopra una retta egualmente data CD.»

Il mio metodo suggerisce la seguente soluzione: Sia $BA \bumpeq a\varepsilon^{\alpha}$ (fig. 1) (cioè $BA = a$, $CBA = \alpha$), la $BC \bumpeq c$ sia perpendicolare alla data CD, detta ξ l'inclinazione (sopra la BC) della cercata BX, ed X dovendo trovarsi sulla CD sarà $BX \bumpeq \frac{c}{\cos\xi}\varepsilon^{\xi}$, ed il raggio $BT \bumpeq r\varepsilon^{\xi}$; le due rette $XA \bumpeq a\varepsilon^{\alpha} - \frac{c}{\cos\xi}\varepsilon^{\xi}$, $XT \bumpeq \left(r - \frac{c}{\cos\xi}\right)\varepsilon^{\xi}$ dovranno esser uguali, perciò $XA.cjXA \bumpeq XT.cjXT$ ossia

$$\left(a\varepsilon^{\alpha} - \frac{c}{\cos\xi}\varepsilon^{\xi}\right)\left(a\varepsilon^{-\alpha} - \frac{c}{\cos\xi}\varepsilon^{-\xi}\right) \bumpeq \left(r - \frac{c}{\cos\xi}\right)^{2}$$

da cui

$$a^{2} - \frac{ac}{\cos\xi}\left(\varepsilon^{\xi-\alpha} + \varepsilon^{-\xi+\alpha}\right) \bumpeq r^{2} - \frac{2cr}{\cos\xi},$$

$$\left(r^{2} - a^{2} + 2ac\varepsilon^{-\alpha}\right)\varepsilon^{\xi} - 4cr + \left(r^{2} - a^{2} + 2ac\varepsilon^{\alpha}\right)\varepsilon^{-\xi} \bumpeq 0,$$

che divisa per $4c$ e paragonata termine colla identica

$$BV-BU+VU \doteq 0$$

si costruirà nel seguente modo:

$$BQ \doteq \frac{(r+a)(r-a)}{4c}, \quad QR \doteq \frac{a}{2}\varepsilon^{-\alpha}$$

(cioè $QR = \frac{1}{2}BA$, $UQA = ABC$), sopra il raggio $BU \doteq r$ si descriva il triangolo BUV coi lati $BV = UV \doteq BR$, e si faccia

$$UBT = RBV;$$

nel raggio BT cadrà il cercato punto X centro del circolo che passa per A e tocca in T il circolo (B).

Nel N. 10 del *Jornal de Sciencias Mathematicas*, pag. 160 è proposta la questione:

Tracciare un arco di circolo che faccia angoli dati con due circoli concentrici conosciuti.

Per rendere determinato il problema io fisso il punto (fig. 2) A del circolo minore, e mi propongo di trovare sulla data retta AB il centro Y di un circolo AX, che passi per A e tagli sotto dato angolo il circolo di raggio OH. Scelgo la AB per *origine delle inclinazioni*, e tiro ad essa parallelo il diametro KOH; posto

$$AY \doteq y.OH, \quad OX \doteq \varepsilon^{\xi}.OH$$

la XY devrà formare colla prolungazione della OX un angolo δ, ed avere la lunghezza $= y.OH$, perciò la condizione del problema è espressa dall'equipollenza

$$OA + y.OH \doteq (1 + y\varepsilon^{\delta})\varepsilon^{\xi}.OH$$

(che risulta dall'identica $OY \simeq OA + AY \simeq OX + XY$, essendo $AY \simeq y.OH$, $OX \simeq \varepsilon^{\xi}.OH$, $XY \simeq y\varepsilon^{\delta}.OX$); insieme con essa sussiste la sua conjugata

$$cj\,OA + y.OH \simeq (1 + y\varepsilon^{-\delta})\varepsilon^{-\xi}.OH$$

(giacchè $cj\,OH \simeq OH$) eliminando l'incognita y se ottiene

$$y.OH \simeq \frac{\varepsilon^{\xi}.OH - OA}{1 - \varepsilon^{\delta+\xi}} \simeq \frac{\varepsilon^{-\xi}.OH - cj\,OA}{1 - \varepsilon^{\delta-\xi}}.$$

(Se per togliere le frazioni si moltiplicasse pei due denominatori s'introdurrebbe un fattore inutile $\varepsilon^{\xi} - \varepsilon^{-\delta}$, e l'equipollenza in ε^{ξ} si eleverebbe al 2.° grado). Moltiplicando par $1 - \varepsilon^{\delta+\xi}$ abbiamo

$$\varepsilon^{\xi}.OH - OA \simeq -\varepsilon^{\delta}.OH + \varepsilon^{\delta+\xi}.cj\,OA$$

de cui

$$\varepsilon^{\xi} \simeq \frac{OA - \varepsilon^{\delta}.OH}{OH - \varepsilon^{\delta}.cj\,OA}.$$

Per facilitare alcun poco la costruzione poniamo $OD \simeq \varepsilon^{\delta}.OH$, il prodetto numeratore diventarà $OA - OD \simeq DA$, la cui conjugata è $cj\,DA \simeq cj\,OA - \varepsilon^{-\delta}.OH$, perciò $\varepsilon^{\xi} \simeq \dfrac{DA}{-\varepsilon^{\delta}\,DA}$, sia $OE \simeq -\varepsilon^{-\delta}.OH \simeq \varepsilon^{-\xi}.OK$, sarà

$$\varepsilon^{\xi} \simeq \frac{DA}{cj\,DA}.\frac{OE}{OH},\quad OX \simeq \frac{AD}{cj\,AD}.OE,$$

che testo s'interpreta (rammentando che AB è l'origine delle inclinazioni) ponendo

$$\text{ang}\,EOX = 2\,\text{ang}\,BAD:$$

prolungato il raggio OX si farà

$$\text{ang}\, VXY = \text{ang}\, HOD \quad \text{oppure} \quad = \text{ang}\, KOD,$$

ed il circolo desiderato avrà il centro Y ed il raggio $YA = YX$.

Permutando tra loro i punti $D\ E$ si ottiene una seconda soluzione del problema, e ciò facendo

$$\text{ang}\, DOX_2 = 2 . \text{ang}\, BAE, \quad \text{ang}\, V_2X_2Y_2 = \text{ang}\, HOE.$$

Se si muta δ in $-\delta$, e perciò alle $OD\ OE$ si sostituiscono le loro conjugate $OD'\ OE'$ si ottengono nello stesso modo i punti $X'\ X'_2$, che sono le seconde intersezioni del circolo dato coi circoli trovati aventi i raggi $YA\ Y_2A$.

Padova 24 maggio 1878.

QUESTÃO PROPOSTA

Resolver com os unicos recursos da Geometria elementar o problema seguinte:

Sendo dados dois circulos (A) *e* (B), *tendo uma corda real commum* I J, *e um terceiro circulo qualquer* (C), *conduzir por um dos extremos* I *d'esta corda uma transversal* IXZY *de modo que corte os tres circulos* (A), (B) *e* (C) *respectivamente em pontos* X, Y, Z, *taes que os segmentos* XZ *e* XY *estejam n'uma razão dada* $\frac{m}{n}$ (*).

A. Schiappa Monteiro.

(*) Os illustres geometras Fergola, Steiner, Clausen, Bellavitis (empregando o seu methodo das equipollencias), e Laisant resolveram este problema, mas no caso particular de os tres circulos se cortarem n'um mesmo ponto I: parecendo-nos comtudo não terem ainda assim seguido, nas suas soluções, o caminho mais curto.

N. B. Ainda se não recebeu a solução da questão proposta no n.º 11 do vol. I.

ESTUDO SOBRE O PROBLEMA PROPOSTO NO N.º 10

POR

F. DA PONTE HORTA

(Continuação)

SEGUNDA PARTE

Logares geometricos dos centros dos circulos que cortam dois circulos dados debaixo de angulos dados

Tomando para origem de dois eixos orthogonaes o centro C de um dos circulos dados (fig. 3); por eixo dos x a linha dos centros CC', e designando a distancia d'estes por a; os raios dos circulos dados e secante por r, r' e R; as coordenadas do centro d'este por x e y; e continuando a designar por α e α' os angulos agudos que fórma o raio do mesmo secante com cada um dos raios dos circulos dados nos respectivos pontos de secção, teremos:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2&=r^2+R^2\pm 2Rr\cos\alpha,\\ x'^2+y'^2&=r'^2+R^2\pm 2Rr'\cos\alpha'.\end{aligned}\right\}\ (1)$$

em que se reunem quatro equações.

Subtrahindo a primeira da segunda, na qual $x'=a-x$; deduzindo o valor de R da equação resultante, e substituindo emfim esse valor na primeira, obtêm-se as equações

$$\left.\begin{aligned} b^2y^2+(b^2-4a^2)x^2+mx&=p\\ b'^2y^2+(b'^2-4a^2)x^2+m'x&=p'\end{aligned}\right\}\ (2).$$

O logar procurado é pois constituido por duas conicas, as quaes podem ser representadas por uma só das equações anteriores; mas em quanto para uma d'ellas as constantes têm os valores b, p e m, têm na outra os valores b', p' e m', consignados no seguinte quadro:

$$\left.\begin{aligned}
b &= 2\,(r\cos\alpha - r'\cos\alpha'),\\
p &= b^2 r^2 + (a^2+r^2-r'^2)^2 - 2\,r\,b\cos\alpha\,(a^2+r^2-r'^2),\\
m &= 4\,a\,(a^2+r^2-r'^2-r\,b\cos\alpha),\\
b' &= 2\,(r\cos\alpha + r'\cos\alpha'),\\
p' &= b'^2 r'^2 + (a^2+r^2-r'^2)^2 - 2\,r\,b'\cos\alpha\,(a^2+r^2-r'^2),\\
m' &= 4\,a\,(a^2+r^2-r'^2-r\,b'\cos\alpha).
\end{aligned}\right\}(3).$$

Ora, como $b'>b$, conclue-se que as duas conicas são:

1.° ambas circulares quando $a=o$; isto é, no caso em que os circulos dados são concentricos;

2.° duas ellipses se $\dfrac{b}{2}>a$;

3.° uma ellipse e uma parabola se $\dfrac{b}{2}=a$;

4.° uma parabola e uma hyperbole se $\dfrac{b'}{2}=a$;

5.° duas hyperboles se $\dfrac{b'}{2}<a$.

Deriva d'estas conclusões, que, só podem haver ellipses ou parabolas entre estes logares, quando um dos circulos dados entrar no outro. Logo que os circulos não tenham parte alguma commum, ambas as curvas são hyperboles.

Tomaremos actualmente para origem os centros das conicas. Para isso, faremos na primeira das equações (1)

$$x = x + \frac{m}{2\,(4\,a^2-b^2)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

de que resulta a transformada

$$b^2 y^2 + (b^2 - 4a^2)x = p + \frac{m^2}{4(b^2 - 4a^2)} \dots\dots (5).$$

As distancias dos centros das conicas ao centro do circulo de raio r são

$$D = \frac{m}{2(4a^2 - b^2)},\ \text{e}\ D' = \frac{m'}{2(4a^2 - b'^2)} \dots\dots (6).$$

Designando os semi-eixos por A e B, teremos

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p(b^2 - 4a^2) + m^2}{(b^2 - 4a^2)^2}}; \\ B &= \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{4p(b^2 - 4a^2) + m^2}{b^2 - 4a^2}}; \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots (7),$$

e visto que d'estes valores se deduz

$$\frac{A}{B} = \frac{b}{\sqrt{4a^2 - b^2}},$$

segue-se que as equações das asymptotas, no caso das hyperboles, serão

$$y = \pm \frac{x\sqrt{4a^2 - b^2}}{b} \dots\dots\dots\dots (8).$$

No caso d'uma das conicas ser parabola, a sua equação será

$$y^2 + \frac{mx}{b^2} = \frac{p}{b^2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9),$$

a qual corta o eixo dos x á distancia $x = \frac{p}{m}$.

Se os circulos dados C e C′ se intersectam, tambem nos mesmos pontos se intersectarão ambas as conicas, visto que suas equações são verificadas com as coordenadas

$$x = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a} \text{ e } y = \frac{\sqrt{4a^2r^2 - (a^2 + r^2 - r'^2)^2}}{2a}.$$

Estas curvas podem ser descriptas por pontos. Para isso tiraremos dois raios quaesquer nas circumferencias C e C′, e por seus extremos D e D′ rectas que formem com elles, respectivamente, os angulos α e α'; e tomando sobre estas rectas as grandezas eguaes $Dx = D'x'$, os arcos descriptos dos centros C e C′ com os raios Cx e Cx' interceptar-se-hão em dois pontos, que serão centros de dois circulos secantes. O problema da intercepção dos dois circulos dados por um terceiro debaixo dos angulos α e α', fica assim determinado quando se dá a grandeza $Dx = D'x'$ do raio do circulo secante. Os circulos obtidos voltam a convexidade para os centros C e C′.

Se ao contrario da precedente construcção, tomarmos os dois segmentos eguaes nos prolongamentos dos primeiros; a saber $Dx_{,} = D'x_{,}'$, os circulos secantes voltarão a concavidade para os centros C e C′; e finalmente, se um dos segmentos fôr tomado para fóra da circumferencia e outro para dentro, os circulos secantes voltarão a concavidade para um dos centros e a convexidade para o outro.

Os theoremas estabelecidos na primeira parte d'este artigo deduzem-se das equações (2) e (3), fazendo r ou $r' = o$.

Appliquemos estas fórmulas a alguns casos particulares:

1.° Sejam $\alpha = \alpha' = 0$.

Este caso é o dos circulos pedidos serem tangentes aos circulos dados. Das formulas (3) deduz-se

$$b = 2(r - r'),\ p = [a^2 - (r - r')^2]^2,\ m = 4a[a^2 - (r - r')^2]:$$

e substituindo estes valores nos de A e B, fórmula (7), obtêm-se os seguintes valores dos semi-eixos d'uma das conicas

$$A = \frac{1}{2}(r - r'),\ B = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (r' - r)^2}.$$

Acharemos de modo similhante para a outra conica

$$A' = \frac{1}{2}(r + r'),\ B' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - (r + r')^2}.$$

Substituindo os valores de m e b, ou m' e b' nas fórmulas (6) acharemos

$$D = \frac{a}{2},\ D' = \frac{a}{2}.$$

As distancias dos centros aos respectivos fócos são

$$\sqrt{A^2 + B^2} = \frac{a}{2},\ \sqrt{A'^2 + B'^2} = \frac{a}{2}.$$

Logo os centros dos circulos dados são fócos communs de ambas as conicas. No caso de duas hyperboles, as equações de suas asymptotes serão respectivamente

$$y = \pm \frac{x\sqrt{a^2 - (r - r')^2}}{r - r'} \text{ e } y = \pm \frac{x\sqrt{a^2 + (r + r')^2}}{r + r'}.$$

As primeiras são tambem as equações dos raios da circumferencia C, que se dirigem aos seus pontos de contacto com as tangentes exteriores communs a C e C': emquanto que as segundas são as dos raios que se dirigem aos pontos de contacto com as tangentes interiores, como é facil verificar. As duas tangentes exteriores são pois os limites dos circulos tangentes que voltam a concavidade ou a convexidade para *ambos* os centros dos circulos dados, ao passo que as tangentes interiores são os limites dos circulos tangentes que voltam a concavidade para um e a convexidade para o outro.

Deve notar-se que n'este caso dos circulos pedidos serem tangentes aos dados, o logar dos centros não póde constituir parabolas por quanto, suppondo $b^2 = 4a^2$, e por conseguinte $b = 2a$, tem-se ao mesmo tempo $m = 0$ e $p = 0$, e por conseguinte $y^2 = 0$; e em logar da parabola, acha-se o eixo dos x, como deveria ser, por que os dois circulos dados são então tangentes entre si interior ou exteriormente num ponto d'este eixo; e todos os circulos passando por este ponto com o centro no eixo dos x, são tangentes a esses dois circulos.

2.° Seja $\alpha=\alpha'=90$ (circulos orthogonaes).

As fórmulas (3) dão então

$$b=0,\ b'=0,\ p=p'=(a^2+r^2-r'^2)^2,\ m=m'=4a(a^2+r^2-r'^2);$$

e logo

$$D=D'=\frac{a^2+r^2-r'^2}{2a};\ A=A'=0,\ B=B'=\frac{0}{0}.$$

Os dois logares geometricos fundem-se pois n'uma só recta, perpendicular á linha dos centros, e a uma distancia do centro do circulo de raio r tendo por valor

$$D=\frac{a^2+r^2-r'^2}{2a}.$$

Esta recta é o eixo radical dos circulos dados.

3.° Seja $r\cos\alpha=r'\cos\alpha'$.

Recorrendo ás fórmulas (3) obtem-se

$$b=0,\ p=(a^2+r^2-r'^2)^2,\ m=4a(d^2+r^2-r'^2),$$

e por conseguinte [fórmula (6)]

$$D=\frac{a^2+r^2-r'^2}{2a},\ A=0,\ B=\frac{0}{0}.$$

Logo uma das conicas reduz-se ao eixo radical dos circulos dados.

Póde verificar-se este resultado muito simplesmente como se segue:

Seja M (fig. 3) o centro d'um dos circulos secantes que voltam a concavidade ou convexidade para ambos os centros C e C', cujo raio designaremos por R; baixemos a perpendicular M P sobre a linha CC', e designemos as distancias CM, $C'M$ e CP por ρ, ρ' e c, respectivamente teremos

$$\rho'^2 = \rho^2 + a^2 - 2ac,$$

d'onde

$$c = \frac{a^2 + \rho^2 - \rho'^2}{2a}:$$

mas

$$\rho^2 = (R + r\cos\alpha)^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 a\,; \quad \rho'^2 = (R + r'\cos\alpha')^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 a,$$

d'onde

$$\rho^2 - \rho'^2 = r^2 - r'^2,$$

logo

$$c = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a}.$$

4.° Sejam $\alpha = 0$, $\alpha' = 90$.
Deduz-se das fórmulas (3), (6) e (7)

$$b = b' = 2r, \quad m' = m = 4a(a^2 + r^2 - r'^2);$$

$$p' = p = (a^2 - r^2 - r'^2), \quad D = D' = \frac{a(a^2 - r^2 - r'^2)}{2(a^2 - r^2)};$$

$$A = A' = \frac{(a^2 - r^2 - r'^2)\,r}{2(r - a)}, \quad B = B' = \frac{a^2 - r^2 - r'^2}{2\sqrt{r^2 - a^2}}.$$

Estes logares constituem, pois, uma só ellipse, se fôr $r > a$; uma hyperbole, se fôr $r < a$; e finalmente uma parabola no caso de $r = a$. Ambas estas curvas têm um de seus fócos no centro do circulo de raio r, pois que, para a ellipse e hyperbole se obtem

$$\sqrt{A^2 - B^2} = \pm D;$$

e como relativamente á parabola seja

$$m = -4ar'^2, \text{ e } p = r'^4,$$

a equação (9) mudar-se-ha em

$$y^2 = \frac{r'^2}{r} x + \frac{r'^4}{4r^2}$$

d'onde se deduz para $x=0$ $(y)=\frac{r'^2}{2r}$, e para $y=0$ $(x)=-\frac{r'^2}{4r}$, e por conseguinte $(y)=2(x)$, o que confirma a asserção emittida.

Podem explicar-se os papeis d'estas duas conicas, no caso de duas hyperboles, do seguinte modo:

Descrevam-se duas circumferencias C e C′, das quaes o raio r da primeira (fig. 4) seja maior que duas vezes o raio r' da segunda. Tirem-se a tangente commum exterior TT′, os raios CT e C′T′, a recta T″T, tangente ao circulo C′ no ponto $T_{//}$ opposto a $T_{/}$, cortando o raio CT no ponto $T_{/}$; a recta $C'T_0$ parallela ás duas primeiras, e finalmente descrevam-se as circumferencias $CT_{/}$.

A tangente exterior TT′ representa o limite dos circulos tangentes a C e C′ que voltam a concavidade ou a convexidade para os dois pontos C e C′, tendo os centros na hyperbole, cujo eixo real é egual a $r-r'$; isto é, $CT - C'T' = CT_0$. Se os raios CT e C′T′ diminuirem simultaneamente da mesma grandeza, a hyperbole manter-se-ha invariavel de fórma e posição; mas esta diminuição dos raios póde representar-se pelo deslocamento d'aquella tangente, *ou circulo limite*, parallelamente a si mesma, com o correspondente retrahimento dos circulos dados. Logo, porém, que ella tiver chegado ao ponto C′, o proseguimento da diminuição dos raios fará que o raio de C′ se torne negativo, e a mesma hyperbole, cujo eixo real é dado pela differença $r-(-r')=r+r'$, que se traduz no mesmo valor $CT_{/}+T_{/}T_0=CT_0$ (suppondo que o circulo em C′ retomou a mesma grandeza), dá então os centros dos circulos tangentes, cujo circulo limite é a recta $T_{/}T''$, *tangente interior,* isto é, dos circulos que voltam a concavidade para um dos centros CC′ e a convexidade para o outro. Se o deslocamento de TT′ continuar ainda, até que o ponto $T_{/}$ haja passado ao outro lado de C, teremos a mesma hyperbole a dar outra vez os centros dos circulos tangentes que valtam a concavidade ou a convexidade para *ambos* os centros C e C′, e ainda outra vez o seu eixo real, expresso nos raios dos circulos dados, terá por valor $-r-(-r')=r'-r$.

É pois evidente, que, para dois circulos invariaveis de raios r e r', a hyperbole de eixo real $r-r'$ ou $r'-r$ contém os centros dos circulos tangentes que voltam a concavidade ou a convexidade para ambos os circulos dados, emquanto que a hyperbole de eixo real egual a $r+r'$, contém os centros dos circulos tangentes que voltam a concavidade para um e a convexidade para o outro.

Não seria difficil o chegar a conclusões analogas no caso dos logares serem constituidos por duas ellipses.

D'estas considerações concluiremos relativamente ao caso $\alpha=\alpha'=0$:

Se traçarmos circumferencias tangentes a um circulo dado, cujos centros existam n'uma hyperbole de que o centro do circulo dado seja um dos fócos, todas essas circumferencias tangentes terão ainda um novo circulo involucro, cujo centro será o outro fóco da mesma hyperbole e raio egual a $r-2\text{A}$ ou $r+2\text{A}$; com tanto que se tomarmos um dos ramos para centros dos circulos que voltam a concavidade para o centro do circulo dado, seja o outro para os circulos que lhe voltam a convexidade.

A mesma proposição se applica á ellipse, mas sendo esta curva constituida por um só ramo, os circulos traçados ou hão de todos voltar a concavidade ou todos a convexidade para o centro do circulo dado.

Estes resultados generalisam-se para o espaço a tres dimensões, imaginando que a figura toda, composta dos dois circulos focaes e respectivas hyperboles ou ellipses, gira em tôrno da linha dos fócos. Então os circulos tornam-se espheras, e as hyperboles ou ellipses mudam-se em hyperboloides ou ellipsoides de revolução.

Estabelecendo o parallelo entre o caso geral dos circulos focaes cortados pelos angulos α e α', e o caso dos circulos tangentes, diremos: que uma das duas conicas reune os centros dos circulos secantes que voltam a concavidade ou convexidade para *ambos* os centros dos circulos dados; emquanto que a outra offerece os centros dos circulos secantes que voltam a concavidade para um d'aquelles centros e a convexidade para o outro.

Quando entre as duas conicas que constituem os logares dos centros dos circulos secantes hajam hyperboles ou parabolas, podem os circulos dados ser cortados simultaneamente por linhas rectas debaixo dos angulos dados α e α':

Por uma só recta, se os logares forem constituidos por uma ellipse e uma parabola.

Por duas, se forem constituidos por uma hyperbole e uma ellipse, Por tres, se formados por uma hyperbole e uma parabola.

Por quatro, se constituidos por duas hyperboles.

No caso das hyperboles, poderemos obter simultaneamente a direcção das asymptotas e rectas secantes do seguinte modo:

Tire-se um raio na circumferencia C (fig. 5), que fórme o angulo α com a recta $C\,C'$, e descreva-se uma circumferencia concentrica com C, e cujo raio seja a projecção d'aquelle na recta $C\,C'$. Faça-se o mesmo na circumferencia C': as tangentes ás duas novas circumferencias concentricas com C e C', respectivamente, serão as secantes pedidas.

Querendo porém verificar que os raios $C\,T$ e $C'\,T'$ dirigidos aos pontos de contacto têm a direcção das asymptotas, abaixe-se a perpendicular $T\,P$ sobre $C\,C'$, e do ponto de contacto T' tire-se a recta $T'\,Q$ parallela a $C\,C'$. As coordenadas x e y do ponto T da recta $C\,T$ são $C\,P$ e $T\,P$, cuja relação se deduzirá, comparando os triangulos similhantes $C\,T\,P$ e $Q\,T'\,T$. Com effeito: d'este triangulo, em que é

$$TQ = CT - C'T' = r\cos\alpha - r'\cos\alpha' = \frac{b}{2};$$

e

$$TT' = \sqrt{\overline{T'Q}^2 - \overline{TQ}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 - b^2}$$

deduz-se

$$TP : CP :: TT' : TQ,$$

isto é

$$y : x :: \sqrt{4a^2 - b^2} : b$$

d'onde

$$y = x\frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{b}.$$

que é exactamente a equação (8).

Este methodo de obter as rectas secantes é geral; elle convém egualmente ao caso da parabola, mas como a sua direcção no caso actual é normal á linha dos centros $C\,C'$, segue-se que as duas circumferencias $C\,T$ e $C'\,T'$ a que ella deve ser tangente commum, serão tangentes entre si no mesmo ponto da recta $C\,C'$.

(Continúa).

ESTUDO SOBRE O PROBLEMA PROPOSTO NO N.º 10

POR

F. DA PONTE HORTA

(Continuação)

Logares dos centros dos circulos que cortam uma recta dada pelo angulo α', e um circulo, tambem dado, pelo angulo α.

Tome-se para eixo dos x a recta Cx, tirada pelo centro do circulo dado, perpendicularmente á recta dada DD'; e para eixo dos y a perpendicular ao eixo dos x, tirada pelo mesmo centro.

Designemos por a, b e d os tres lados do triangulo rectangulo CBG (fig. 6), tendo um vertice no centro do circulo, um lado segundo o eixo dos x, desde o centro do circulo até á recta dada, outro sobre esta recta, e finalmente o terceiro parallelo a um dos raios do circulo secante que se dirigem ás suas intersecções com a dicta recta. Chamar-lhe-hemos o triangulo metrico.

As curvas dos centros podem obter-se do seguinte modo:

Tire-se pelo ponto L da circumferencia dada a recta Lu, formando o angulo α com o eixo dos x; sobre esta e sobre o lado GC do triangulo metrico, marcaremos as grandezas arbitrarias $GE = Lu$, e pelo ponto E tiraremos uma recta parallela á recta dada DD', a qual interceptaremos por um arco de circulo descripto do centro C com o raio Cu. O ponto de intercepção M, será um ponto da curva.

Do centro M do circulo secante, tirem-se os seus dois raios MN e MQ para os dois pontos onde elle intercepta o circulo e a recta dada; e sejam P e R os pontos onde a ordenada de M e o raio MQ cortam os eixos dos x e dos y, respectivamente; teremos

$$x^2 = \overline{MC}^2 - y^2,$$

Mas

$$\overline{MC}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{MN}^2 + 2MN.CN\cos\alpha = r^2 + \overline{MN}^2 + 2r.MN.\cos\alpha;$$

$$MN = MQ = MR + d,\quad \frac{MR}{x} = \frac{d}{a};$$

logo

$$MN = d\frac{a+x}{a}.$$

Substituindo na primeira equação, obtem-se

$$x^2 = r^2 + \frac{d^2}{a^2}(a+x)^2 + \frac{2dr}{a}(a+x)\cos\alpha - y^2$$

d'onde, por ser $d^2 = a^2 + b^2$,

$$a^2y^2 - b^2x^2 - 2ad(d + r\cos\alpha)x = a^2r^2 + a^2d^2 + 2a^2rd\cos\alpha.$$

Relativamente ao circulo secante que corta o circulo dado no outro ponto N′, em que a mesma recta MN corta esse circulo, teremos a equação

$$a^2y^2 - b^2x^2 - 2ad(d - r\cos\alpha)x = a^2r^2 + a^2d^2 - 2a^2rd\cos\alpha,$$

a qual se obtem da anterior mudando α em $180 - \alpha$.

Ha pois duas conicas a constituirem os logares procurados, as quaes representaremos por uma só equação

$$a^2y^2 - b^2x^2 - px = q \dots\dots\dots\dots \text{(A)},$$

sendo

$$p = 2ad(d + r\cos\alpha),\ \text{e}\ q = a^2r^2 + a^2d^2 + 2a^2rd\cos\alpha;$$

transitando-se d'uma para a outra pela simples mudança de α em $180 - \alpha$.

Estas duas conicas ou são duas hyperboles ou duas parabolas; por que, ou nenhum dos coefficientes a e b é zero, e haverá duas hyperboles, ou é $b=0$, e teremos duas parabolas; ou serão b e a simultaneamente eguaes a zero, visto que a hypothese de $a=0$, involve o ser tambem $b=0$, e teremos outra vez duas hyperboles caracterisadas pela equação $y^2-x^2\operatorname{tg}^2\alpha'\mp\frac{2r\cos\alpha}{\cos\alpha'}x=r^2$, a qual se obtem dividindo a equação (A) por a^2, e determinando os limites de $\frac{p}{a^2}$ e $\frac{q}{a^2}$, notando que $\lim.\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\alpha'$ (*).

Estas duas conicas interceptam-se com a recta dada nos mesmos dois pontos da circumferencia dada; visto que ambas as suas equações são verificadas com as coordenadas

$$x=-a, \text{ e } y=\pm\sqrt{r^2-a^2}.$$

Os semi-eixos A e B, têm os valores

$$A=\frac{1}{2b^2}\sqrt{p^2-4b^2q},\quad B=\frac{1}{2ab}\sqrt{4b^2q-p^2}.$$

As equações das asymptotas

$$\frac{y}{x}=\pm\frac{b}{a},$$

são communs ás duas conicas; ellas têm pois asymptotas da mesma direcção, uma das quaes é parallela ao lado d do triangulo metrico; e por conseguinte ha só duas rectas que cortam o circulo e a recta dada pelos angulos α e α'.

Ha um caso em que o centro d'uma das conicas coincide com o centro do circulo dado, é quando $D=\frac{p}{2b^2}=0$, isto é $p=0$; o que só tem logar sendo $d=r\cos\alpha$.

Quando $\alpha=0$ e $b=0$, os circulos deixam de ser secantes para se tornarem tangentes á recta e ao circulo dado; e succede,

---

(*) Na fig. 6 o angulo α' não é BGC, como está indicado, mas sim BCG.

em contraposição com o caso dos dois circulos dados, em que os logares dos centros não podiam constituir parabolas, que as duas conicas, no caso presente, são sempre parabolas.

As suas equações, como se deduz da (A) são

$$y^2 = 2(a+r)x + (a+r)^2$$

$$y^2 = 2(a-r)x + (a-r)^2.$$

Estas duas parabolas têm o seu fóco no centro do circulo dado.

As suas directrizes, ambas parallelas á recta dada, estão d'um e outro lado d'esta recta á distancia r.

A hypothese $a=r$ reduz uma das parabolas á recta $y=0$, isto é, ao eixo dos x, como era evidente.

Se fôr $\alpha = 90^\circ$ e $b=0$, os circulos pedidos serão tangentes á recta dada, e cortarão orthogonalmente o circulo dado.

As duas conicas fundir-se-hão n'uma só, tendo por equação

$$y^2 = 2ax + a^2 + r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)}.$$

Esta parabola offerece de notavel o ser tangente ao circulo dado nos pontos D e D', em que este é cortado pela recta dada.

Com effeito, designando por B a intersecção do eixo dos x com a recta dada, por O o vertice da parabola, e por T o ponto onde a tangente ao circulo no ponto D' corta o eixo dos x, ter-se-ha

$$r^2 = a \times \mathrm{CT},$$

d'onde

$$\mathrm{CT} = \frac{r^2}{a}.$$

Da equação (B) deduz-se

$$\mathrm{CO} = -\frac{a^2+r^2}{2a},$$

logo

$$\mathrm{OB} = \mathrm{CO} - \mathrm{CB} = \frac{a^2+r^2}{2a} - a = \frac{r^2-a^2}{2a}.$$

Designando por T' o ponto onde a tangente á parabola no ponto D', corta o eixo dos x, teremos

$$OT' = OB = \frac{r^2 - a^2}{2a};$$

logo

$$CT' = CB + 2OB = a + \frac{r^2 - a^2}{a} = \frac{r^2}{a};$$

e por tanto

$$CT = CT'.$$

O seu fóco está a uma distancia do respectivo vertice egual a $\frac{a}{2}$.

As ordenadas correspondentes ás duas intersecções do circulo dado com o eixo dos x, são $a + r$ e $a - r$, como era evidente.

A serie dos circulos que cortam uma circumferencia e uma recta em angulos dados α e α' respectivamente, cujos centros se acham na mesma hyperbole, tendo o respectivo eixo real na perpendicular baixada do centro do circulo sobre a recta, são envolvidos por duas circumferencias de circulo, cujos centros são os fócos da mesma hyperbole.

A fig. 7 representa as duas hyperboles dos centros dos circulos que cortam o circulo C D pelo angulo α e a recta D D' pelo angulo α'. Sómente representamos o ramo D A M da hyperbole, que tem o eixo real segundo C B, perpendicular a D D', visto ficar o outro um pouco distante.

Seja F um dos fócos d'esta hyperbole, tire-se o raio F D'; e na direcção das distancias obliquas á directriz, marque-se D'G = F D', e pelo ponto G tire-se a recta G P perpendicular a F A, a qual será a directriz.

Seja M um dos circulos secantes, tirem-se M F e M Q que prolongaremos até P, será

$$MP = MF,$$

mas

$$MS = MQ,$$

logo

$$FS = QP = FD' = \text{constante}.$$

Se augmentassemos MQ d'uma grandeza $QP' = F'D'$ (distancia do outro fóco ao ponto D') obteriamos a segunda directriz, e ter-se-hia

mas

$$MF' = MP',$$

logo

$$MS' = MQ,$$

$$F'S' = QP' = F'D' = \text{constante}.$$

Se dos differentes pontos d'uma hyperbole, como centros, descrevermos circumferencias que cortem uma recta parallela ás directrizes em angulo constante, de modo que os raios dos pontos de secção sejam parallelos ás asymptotas, todas essas circumferencias poderão ser cortadas debaixo d'um angulo constante por uma nova circumferencia, tendo o respectivo centro em ponto escolhido arbitrariamente sobre o eixo real da mesma hyperbole.

Com effeito, referindo a equação da hyperbole ao centro C, escolhido arbitrariamente, tomado por origem (fig. 6) teremos

$$y^2 - S^2x^2 - 2tx = u^2;$$

e identificando esta com a equação (A) teremos

$$S^2 = \frac{b^2}{a^2},\ t = \frac{d}{a}(d + r\cos\alpha);\ u^2 = r^2 + d^2 + 2rd\cos\alpha \ldots \text{ (C)}.$$

Mas logo que se deu o ponto C, deu-se o valor de $a = CB$, e por conseguinte deram-se implicitamente os valores de $b = BG$ e $d = CG$; bem como o da relação $\frac{a}{d}$, que designaremos por n: logo pela segunda das equações anteriores obteremos o valor de $r\cos\alpha$, que substituido depois na ultima equação, permittirá determinar o valor de

$$r = \sqrt{u^2 + d^2 - 2ntd},$$

e com este valor determinaremos

$$\cos\alpha = \frac{nt - d}{\sqrt{u^2 + d^2 - 2ntd}}.$$

Reciprocamente se fôr dada a hyperbole dos centros, bem como o circulo C, tendo o centro no eixo real da mesma hyperbole, que é cortado pela serie dos circulos secantes, segundo o angulo α, será determinada a recta parallela á directriz, que é cortada pelos circulos secantes em angulo constante.

Por quanto supponde a hyperbole referida ao centro C, dando á equação d'esta curva a fórma $y^2-S^2x^2-2tx=u^2$; e observando que das equações (C) se deduz

$$S^2=\frac{d^2}{a^2}-1;$$

d'onde

$$a=\frac{d}{\sqrt{1+S^2}};$$

$$2at=2d^2+2dr\cos\alpha,$$

e eliminando a entre estas duas equações, teremos, para determinar a posição da recta secante, as equações

$$d=\frac{t}{\sqrt{1+S^2}}-r\cos\alpha,\ a=\frac{d}{\sqrt{1+S^2}},\ \text{e}\ b=\sqrt{d^2-a^2}.$$

O angulo α' será determinado pela equação $\operatorname{tg}\alpha'=\frac{b}{a}$.

Toda a serie dos circulos que cortam dois circulos dados pelos angulos α e α', cujos centros estão na mesma hyperbole, tendo o eixo real na recta que une os centros d'estes circulos, é involvida por outros dois circulos, cujos centros são os fócos da mesma hyperbole.

Com effeito, considerando a circumferencia C e a hyperbole dos centros dos circulos secantes; como todos estes circulos podem ser cortados por uma recta parallela á directriz em angulo constante, recahe-se assim no caso primeiramente tratado, para o qual a proposição se acha demonstrada.

Esta propriedade do involvimento dos circulos secantes por dois circulos determinados, é geral, ella tem sempre logar, quaesquer que sejam as conicas constituidas pelos centros dos circulos da serie, e deriva do seguinte theorema:

Os circulos que cortam dois circulos dados C e C' debaixo de angulos constantes, cortam egualmente por um angulo constante todo o circulo C'', que tenha com qualquer dos dois primeiros o mesmo eixo radical que estes têm entre si.

Com effeito, substituindo o circulo C'' ao circulo C', cujo centro supporemos á distancia a' do centro C; será a equação do logar dos centros dos circulos que cortam o circulo C pelo mesmo angulo α, e C'' pelo angulo α''

$$b'^2 y^2 + (b'^2 - 4a'^2)x^2 + m'x = p'$$

sendo

$$b' = 2(r\cos\alpha - r''\cos\alpha''),$$

$$p' = b'^2 r^2 + 4a'^2 c^2 - 4a'b'cr\cos\alpha,$$

$$m' = 4a'(2a'c - rb'\cos\alpha);$$

e em que

$$c = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a} = \frac{a'^2 + r^2 - r''^2}{2a'}$$

é a distancia do eixo radical commum ao centro immovel C. Identifica-se esta equação com a que é relativa aos circulos C e C', a saber

$$b^2 y^2 + (b^2 - 4a^2)x^2 + mx = p,$$

sendo os mesmos os circulos secantes, fazendo

$$b' = \frac{ba'}{a}.$$

O theorema está pois demonstrado. Accrescentaremos ainda como corollario d'esta proposição, que:

A serie dos circulos que cortam dois circulos dados por angulos constantes, é involvida por dois novos circulos, cujos centros estão na recta que une os centros dos circulos dados.

Com effeito, traçando um circulo tangente a um qualquer dos circulos da serie, tendo o centro na recta CC' e cujo eixo radical com C ou C' seja o mesmo de C e C', esse circulo será tangente a todos os outros da mesma serie.

Determinação dos circulos involucros

Da condição

$$b' = \frac{b}{a} a'$$

deduz-se

$$r \cos \alpha - r'' \cos \alpha'' = \frac{a'}{a} (r \cos \alpha - r' \cos \alpha')$$

d'onde

$$a r'' \cos \alpha'' = (a - a') r \cos \alpha + a' r' \cos \alpha'$$

é tambem

$$r''^2 = a'^2 + r^2 - 2 a' c.$$

Se arbitrarmos o valor de a', determinaremos r'' por esta ultima equação, e a anterior dará o valor de α''.

Eliminando r'' entre as duas ultimas equações teremos

$$a^2 \cos^2 \alpha'' (a'^2 + r^2 - 2 a' c) = [(a - a') r \cos \alpha + a' r' \cos \alpha']^2.$$

Se o circulo C'' fôr tangente aos circulos da serie, teremos

$$\alpha'' = 0,$$

e logo

$$a^2 (a'^2 + r^2 - 2 a' c) = \left(a r \cos \alpha - \frac{a' b}{2}\right)^2.$$

Resolvendo esta equação em ordem a a' obtem-se

$$a'^2 (4 a^2 - b^2) + 2 (2 a b r \cos \alpha - 4 a^2 c) a' = - 4 a^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

d'onde

$$a' = -\frac{(4 a^2 c - 2 a b r \cos \alpha) \pm \sqrt{(4 a^2 c - 2 a b r \cos \alpha)^2 + (b^2 - 4 a^2) 4 a^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}}{b^2 - 4 a^2}$$

mas

$$m = 2(4a^2c - 2abr\cos\alpha);$$

$$p = b^2r^2 + 4a^2c^2 - 4abcr\cos\alpha = b^2r^2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$+ (2ac - br\cos\alpha)^2 = b^2r^2\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{m^2}{16a^2};$$

d'onde

$$m^2 = 16a^2(p - b^2r^2\operatorname{sen}^2\alpha);$$

e emfim

$$4a^2r^2\operatorname{sen}^2\alpha(b^2 - 4a^2) = -\frac{m^2}{4} + \frac{a^2}{b^2}[4p(b^2 - 4a^2) + m^2].$$

Substituindo no valor de a' teremos

$$a' = -\frac{mb \pm 2a\sqrt{4p(b^2 - 4a^2) + m^2}}{2b(b^2 - 4a^2)}.$$

Os centros dos dois circulos involucros são pois os fócos da conica que reune os centros dos circulos da serie, visto que as distancias do centro da conica aos fócos têm por valor

$$\sqrt{A^2 - B^2} = \frac{a\sqrt{4p(b^2 - 4a^2) + m^2}}{b(b^2 - 4a^2)}:$$

e como a distancia do centro do circulo C ao centro da conica seja

$$D = \frac{m}{2(4a^2 - b^2)},$$

serão as distancias do ponto C aos dois fócos

$$CF \text{ ou } CF' = -\frac{mb \pm 2a\sqrt{4p(b^2 - 4a^2) + m^2}}{2b(b^2 - 4a^2)}$$

valores identicos com os que achamos para a'.

Poderemos demonstrar d'outro modo a notavel propriedade do involvimento dos circulos secantes.

Provaremos primeiramente que no caso dos circulos dados se não cortarem, as duas hyperboles que constituem os logares dos centros, têm os eixos focaes respectivos sobre o eixo coordenado dos x, e que os dois ramos de cada uma se acham de lados differentes do eixo radical.

Já vimos que as duas conicas eram duas hyperboles, por ser $2a > b' > b$.

Fazendo na equação (2, 2.ª P.) $y=0$ obteremos

$$(4a^2-b^2)x^2-mx+p=0\ldots\ldots\ldots \text{(D)}.$$

As raizes d'esta equação serão reaes se fôr

$$m^2 > 4p(4a^2-b^2).$$

O que se verifica na hypothese admittida, porque sendo

$$m^2=16a^2p-16a^2b^2r^2\operatorname{sen}^2\alpha,$$

ter-se-ha

$$16a^2p-16a^2b^2r^2\operatorname{sen}^2\alpha > 16a^2p-4b^2p,$$

d'onde

$$p > 4a^2r^2\operatorname{sen}^2\alpha;$$

mas

$$p=(br-2ac\cos\alpha)^2+4a^2c^2\operatorname{sen}^2\alpha,$$

logo

$$(br-2ac\cos\alpha)^2 > 4a^2(r^2-c^2)\operatorname{sen}^2\alpha,$$

desigualdade evidente, visto que o segundo membro é negativo.

Estas duas raizes acham-se comprehendidas, uma entre 0 e c, e outra entre c e ∞.

Por quanto para $x=0$, o primeiro membro da equação (D) reduz-se a p, quantidade positiva; e para $x=c$ deduz-se

$$(4a^2-b^2)c^2-4ac(2ac-rb\cos\alpha)$$

$$+b^2r^2-4a^2c^2-4abcr\cos\alpha=-b^2(c^2-r^2)$$

quantidade negativa; emquanto que para $x=\infty$, se obtem $+\infty$.

Se os circulos C e C′ se cortarem, as duas raizes da equação (2) poderão ser imaginarias (*), e n'esse caso o eixo real da respectiva conica terá a direcção do eixo dos y.

Os valores dos raios dos circulos secantes

$$R=\pm\frac{2a}{b}(c-x) \text{ e } R'=\pm\frac{2a}{b'}(c-x)$$

mostram, por serem estes valores essencialmente positivos, que o signal + que os affecta, corresponde aos centros que se acham á esquerda do eixo radical, emquanto que o signal — se refere aos centros que se acham do lado direito.

(*) Póde reconhecer-se a possibilidade das raizes imaginarias do seguinte modo:

Supponha-se

$$r\cos\alpha+r'\cos\alpha'=c$$

teremos

$$c^2(r-a\cos\alpha)^2>(r^2-c^2)\,a^2\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Ora, se no circulo C tirarmos um raio que forme com C C′ o angulo α, e designarmos por d' a differença entre este raio e a projecção de $CC'=a$ sobre elle; por $d''=a\operatorname{sen}\alpha$ a perpendicular baixada de C′ sobre o mesmo; e finalmente por d a metade da corda commum ás duas circumferencias C e C′ teremos

$$c^2d'^2>d^2d''^2$$

d'onde

$$\frac{c}{d}>\frac{d''}{d'}$$

desigualdade que póde deixar de verificar-se, porque se fizermos variar o raio da circumferencia C′, conservando a corda commum, variarão d' e d'', cuja relação póde crescer sem limite, emquanto que $\frac{c}{d}$ se conservará constante.

Notaremos ainda que nem a ellipse nem a parabola podem ter os seus eixos focaes segundo o eixo coordenado dos y, por ser

$$\frac{A^2-B}{A^2}=\frac{4a^2}{b^2};$$

e logo

$$A>B,$$

incluindo $A=\infty$ se fôr

$$\frac{4a^2}{b^2}=1.$$

Passando a origem das coordenadas aos centros das conicas, e notando que

$$\frac{2a}{b}=\sqrt{\frac{A^2-B^2}{A^2}}=e$$

teremos

$$R=\pm e(c-D-x);\ R'=\pm e'(c-D'-x)\ldots\ (E).$$

Designando por M e M′ os pontos onde um raio vector da hyperbole conduzido do fóco esquerdo F, encontra o primeiro e o segundo ramo; e por F′ o segundo fóco, teremos

$$FM=-(ex+A);\ F'M=-(ex-A);$$

$$FM'=ex+A,\ \text{e}\ F'M=ex-A\ldots\ldots\ (F).$$

Da combinação das fórmulas (E) e (F), deduz-se, relativamente aos circulos secantes que voltam a concavidade ou a convexidade para ambos os centros C e C′,

ramo esquerdo $\quad R-FM=ec-eD+A=\text{constante},$
$\qquad\qquad\qquad\ R-F'M=ec-eD-A=\text{constante},$

ramo direito $\quad FM'-R=ec-eD+A,$
$\qquad\qquad\qquad F'M'-R=ec-eD-A.$

Estes circulos secantes são pois involvidos por dois novos circulos, cujos centros são os fócos F e F′ da hyperbole correspondente. Seus raios são $ec-eD+A$ e $ec-eD-A$, respectivamente. A differença dos raios dos circulos involucros é egual a $2A$, eixo transverso da hyperbole.

Com respeito aos circulos que voltam a concavidade para um dos centros C, C′, e a convexidade para o outro, teremos

$$\begin{aligned} R'-FM&=\ \ e'c-e'D'+A' \\ F'M-R'&=-e'c+e'D'+A' \\ FM'-R'&=\ \ e'c-e'D'+A' \\ R-FM'&=-e'c+e'D'+A'. \end{aligned}$$

Resultado similhante ao que obtivemos anteriormente, e em que tambem a differença entre os raios dos circulos involucros, é egual ao eixo transverso da hyperbole.

Quando os circulos dados se cortam entre si, as duas conicas interceptam-se com elles nos mesmos pontos do eixo radical; e notaremos que se o eixo focal da conica considerada existir sobre o eixo dos x, o mesmo ramo de curva passará por essas duas intersecções, e deveremos dar signaes differentes ao valor de R, conforme a parte considerada esteja de um ou de outro lado do eixo radical.

Supponhamos, por exemplo, que uma das conicas é uma parabola e a outra uma hyperbole (fig. 8), sendo por conseguinte $b < 2a$ e $b' = 2a$.

Na parte da parabola que se acha á esquerda do eixo radical, teremos $R = c - x$; e na parte direita, cuja corda é o eixo radical, será $R = x - c$.

Tirando a directriz EE', ver-se-ha que no ponto M, situado á esquerda do eixo radical, tem-se

$$R = c - x = CG - CP = PG = MT.$$

E no ponto M', á direita do mesmo eixo

$$R = x - c = CP' - CG = GP' = MT':$$

logo os circulos secantes, cujos centros estão n'uma parabola, são tangentes ao eixo radical. É um dos circulos involucros que se tornou infinito.

Nos centros que estão á esquerda do eixo radical tem-se ainda

$$\rho - R = FM - MS = ME - MT = ET.$$

Nos centros que estão á direita

$$\rho + R = FS' = FM' + M'T' = M'E' + M'T' = ET.$$

Logo os circulos secantes têm ainda um circulo involucro, cujo centro é o fóco da parabola e raio egual á distancia entre o eixo radical e a directriz. Este circulo volta a concavidade para os secantes que têm os centros na parte da parabola sustentada pelo eixo radical, e a concavidade para todos os outros.

Supponha-se actualmente que uma das conicas dos centros dos circulos secantes é a ellipse, e que os circulos dados se cortam.

Para os raios vectores que partem do fóco F tem-se $FM = A + ex$; e para os que partem do fóco F', $F'M = A - ex$:

Logo: á esquerda do eixo radical $\quad FM + R = A + ec - eD$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad F'M - R = A - ec + eD$

á direita do dicto eixo $\quad FM - R = A + ec - eD$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad F'M + R = A - ec + eD.$

Ha pois dois circulos involucros, cujos centros são os fócos. Seus raios $A + ec - eD$ e $A - ec + eD$, dão uma somma egual ao eixo maior da ellipse.

Notaremos ainda a circumstancia da mudança entre a concavidade e a convexidade, quando se passa d'um lado ao outro do eixo radical.

Quando os circulos dados se cortarem poderá acontecer, como já provámos, que uma das curvas dos centros seja uma hyperbole, tendo o respectivo eixo transverso na direcção do eixo coordenado dos y. N'este caso os circulos secantes, cujos centros ella representa, não poderão ser involvidos.

Com effeito, os dois ramos d'esta hyperbole passam cada um por uma só das intersecções dos circulos dados, e, como sabemos, os raios dos circulos secantes crescerão continuamente a partir do eixo radical, tanto para um como para o outro lado.

Ora, considerando dois d'estes circulos infinitamente proximos, de raios finitos, e designando por dR o accrescimo do raio na passagem d'um ao outro, e por dS a distancia dos centros; ha de necessariamente dar-se (considerando os valores absolutos d'estes accrescimos) algum dos tres casos seguintes:

$$dS < dR, \quad dS = dR \quad \text{e} \quad dS > dR.$$

No primeiro, o circulo maior involverá o menor. No segundo, tocar-se-hão ambos do lado do centro do circulo menor. No terceiro, emfim, hão de cortar-se tambem do lado do centro do menor d'elles. A condição do involvimento dos circulos secantes, é, pois

$$dS > dR.$$

Representando a conica dos centros pela equação

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1;$$

ter-se-ha

$$dS=dx\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}}.$$

É tambem, em valor absoluto, $dR=e\,dx$.

E substituindo estes valores na desigualdade precedente, teremos

$$e<\sqrt{1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}};$$

d'onde

$$e^2<\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}:$$

mas

$$e^2=\frac{a^2+b^2}{a^2}:$$

substituindo e simplificando, obteremos emfim

$$\frac{y^2}{b^2}<\frac{x^2}{a^2};$$

e a equação da conica seria, para que houvesse involvimento

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

o que confirma a asserção emittida.

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

PAR

F. GOMES TEIXEIRA

(Fim)

9. Les formules (6) (page **11** — vol. I) donnent l'expression algebrique des numérateurs des fractions simples en lesquelles on peut décomposer une fraction rationnelle, en fonction immédiate des quantités données. On peut aussi trouver l'expression algebrique de ces numérateurs en fonction des dérivées d'une certaine fonction, comme a fait Mr. Serret dans son *Cours d'Algèbre supérieure.* Nous allons exposer ces formules.

Nous avons

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{M_1}{x-a_1}+\frac{M_2}{(x-a_1)^2}+\ldots+\frac{M_\alpha}{(x-a_1)^\alpha}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

où

$$\varphi(x)=(x-a_2)^\beta(x-a_3)^\gamma\ldots(x-a_n)^\lambda.$$

En posant $x=a_1+h$, il vient

$$\frac{F_1(a_1+h)}{F(a_1+h)}=\frac{M_1}{h}+\frac{M_2}{h^2}+\ldots+\frac{M_\alpha}{h^\alpha}+\frac{\varphi_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}$$

et, multipliant par h^α,

$$\frac{F_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}=M_\alpha+M_{\alpha-1}h+M_{\alpha-2}h^2+\ldots+M_1h^{\alpha-1}+\frac{h^\alpha\varphi_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}.$$

Nous avons déjà dit que $\frac{\varphi_1(a_1+h)}{\varphi\ (a_1+h)}$ ne contient pas des puissances négatives de h, donc la formule précédente représente le développement de $\frac{F_1(a_1+h)}{\varphi\ (a_1+h)}$ en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de h. Par conséquent cette formule doit être identique à celle de Maclaurin, qui est

$$\frac{F_1(a_1+h)}{\varphi\ (a_1+h)}=\psi(a_1+h)=\psi(a_1)+h\psi'(a_1)+\frac{h^2}{1.2}\psi''(a_1)$$

$$+\ldots+\frac{h^{\alpha-1}}{1.2\ldots(\alpha-1)}\psi^{(\alpha-1)}(a_1)+\ldots$$

étant

$$\frac{F_1(x)}{\varphi\ (x)}=\psi(x).$$

Cette identité donne

$$\left.\begin{array}{l} M_\alpha=\psi(a_1),\ M_{\alpha-1}=\psi'(a_1),\ M_{\alpha-2}=\dfrac{\psi''(a_1)}{1.2}, \\[2ex] M_{\alpha-3}=\dfrac{\psi'''(a_1)}{1.2.3},\ \ldots,\ M_2=\dfrac{\psi^{(\alpha-2)}(a_1)}{1.2\ldots(\alpha-2)}, \\[2ex] \qquad\qquad\qquad\qquad M_1=\dfrac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1.2\ldots(\alpha-1)} \end{array}\right\} \quad (10).$$

Nous avons donc

$$\frac{F_1(x)}{F\ (x)}=\frac{\psi(a_1)}{(x-a_1)^\alpha}+\frac{\psi'(a_1)}{(x-a_1)^{\alpha-1}}$$

$$+\ldots+\frac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1.2\ldots(\alpha-1)(x-a_1)}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi\ (x)}.$$

On trouve de la même manière les numérateurs des autres fractions dans lesquelles on décompose la fraction donnée. Nous avons donc

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{\psi(a_1)}{(x-a_1)^\alpha} + \frac{\psi'(a_1)}{1.(x-a_1)^{\alpha-1}}$$

$$+\dots+\frac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1.2\dots(\alpha-1)(x-a_1)} + \frac{\theta(a_2)}{(x-a_2)^\beta} + \frac{\theta'(a_2)}{1.(x-a_2)^{\beta-1}}$$

$$+\dots+\frac{\theta^{(\beta-1)}(a_2)}{1.2\dots(\beta-1)(x-a_2)}$$

$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$+\frac{\varpi(a_n)}{(x-a_n)^\lambda} + \frac{\varpi'(a_n)}{1.(x-a_n)^{\lambda-1}} + \dots + \frac{\varpi^{(\lambda-1)}(a_n)}{1.2\dots(\lambda-1)(x-a_n)}$$

étant

$$\psi(x) = (x-a_1)\frac{F_1(x)}{F(x)},$$

$$\theta(x) = (x-a_2)\frac{F_1(x)}{F(x)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varpi(x) = (x-a_n)\frac{F_1(x)}{F(x)}.$$

10. En comparant les formules (10) aux formules (6) de la page 11 du vol. I, remarquant que, lorsque $F_1(x) = 1$, les M_i coincident avec les A_i, nous obtenons l'expression algebrique de la dérivée d'ordre n d'une fraction $\frac{1}{F(x)}$.

*

En effet, cette comparaison donne

$$\frac{\psi^{(\alpha-1)}(a_1)}{1.2\ldots(\alpha-i)}=(-1)^{\alpha-i}\,\Sigma\frac{[(\beta+\delta'-1)\,C\,\delta']}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}}\times\frac{[(\gamma+\delta''-1)\,C\,\delta'']}{(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}}$$

$$\times\ldots\times\frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,C\,\delta^{(n-1)}]}{(a_1-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}}$$

étant

$$\delta'+\delta''+\ldots+\delta^{(n-1)}=\alpha-i,$$

ou, faisant $\alpha-i=m$, et substituant a_1 par x,

$$\frac{d^m\dfrac{1}{(x-a_2)^\beta(x-a_3)^\gamma\ldots(x-a_n)^\lambda}}{1.2\ldots m\,dx^m}$$

$$=(-1)^m\,\Sigma\frac{[(\beta+\delta'-1)\,C\,\delta']}{(x-a_2)^{\beta+\delta'}}\times\frac{[(\gamma+\delta''-1)\,C\,\delta'']}{(x-a_3)^{\gamma+\delta''}}$$

$$\times\ldots\times\frac{[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)\,C\,\delta^{(n-1)}]}{(x-a_n)^{\lambda+\delta^{(n-1)}}}$$

étant

$$\delta'+\delta''+\ldots+\delta^{(n-1)}=m.$$

11. Nous avons dans les numéros précédents trouvé l'expression algebrique des numérateurs des fractions simples dans lesquelles on peut décomposer une fraction rationnelle. Les formules trouvées ont beaucoup d'applications importantes, dont nous nous occuperons plus tard.

Quand on veut décomposer une fraction numérique $\frac{F_1(x)}{F(x)}$, l'application des formules précédents donne beaucoup de peine, et par conséquent il est préférable employer des autres méthodes, qui sont bien connus. Nous en allons exposer les plus simples, quand les racines de $F(x)=0$ sont réelles, et quand sont imaginaires.

Soit proposée la fraction

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^\alpha(x-a_2)^\beta\ldots(x-a_n)^\lambda}.$$

Nous avons prémièrement

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)\varphi(x)}=\theta(x)+\frac{A_\alpha}{x-a_1}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

étant

$$\varphi(x)=(x-a_2)^\beta(x-a_3)^\gamma\ldots(x-a_n)^\lambda,$$

où A_α et $\varphi_1(x)$ sont donnés par les formules

$$A_\alpha=\frac{F_1(a_1)}{\varphi'(a_1)},\quad \varphi_1(x)=\frac{F_1(x)-A_\alpha\varphi(x)}{x-a_1}-\theta(x)\varphi(x)$$

dont la première vient de (6) et (7), et dont la deuxième vient de la formule supérieure.

En divisant par $x-a_1$, il vient

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^2\varphi(x)}=\theta_1(x)+\frac{\theta(a_1)}{x-a_1}+\frac{A_\alpha}{(x-a_1)^2}+\frac{\varphi_1(x)}{(x-a_1)\varphi(x)}.$$

En décomposant de la même manière la dernière fraction, on obtient

$$\frac{\varphi_1(x)}{(x-a_1)\varphi(x)}=\frac{A}{x-a_1}+\frac{\varphi_2(x)}{\varphi(x)}$$

où A e $\varphi_2(x)$ sont trouvés comme précédemment.

Donc

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^2\varphi(x)}=\theta_1(x)+\frac{\theta(a_1)+A}{x-a_1}+\frac{A_\alpha}{(x-a_1)^2}+\frac{\varphi_2(x)}{\varphi(x)}$$

$$=\theta_1(x)+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a_1}+\frac{A_\alpha}{(x-a_1)^2}+\frac{\varphi_2(x)}{\varphi(x)}.$$

En divisant par $x-a_2$, il vient

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^3\varphi(x)}=\theta_2(x)+\frac{\theta_1(a_1)}{x-a_1}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a_1)^2}+\frac{A_\alpha}{(x-a_1)^3}$$

$$+\frac{\varphi_2(x)}{(x-a_1)\varphi(x)}.$$

La dernière fraction donne

$$\frac{\varphi_2(x)}{(x-a_1)\varphi(x)}=\frac{A'}{x-a_1}+\frac{\varphi_3(x)}{\varphi(x)}$$

donc

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^3\varphi(x)}=\theta_2(x)+\frac{\theta_1(a_1)+A'}{x-a_1}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a_1)^2}+\frac{A_\alpha}{(x-a_1)^3}+\frac{\varphi_3(x)}{\varphi(x)}$$

$$=\theta_2(x)+\frac{A_{\alpha-2}}{x-a_1}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a_1)^2}+\frac{A_\alpha}{(x-a_1)^3}+\frac{\varphi_3(x)}{\varphi(x)}.$$

En continuant de la même manière on obtient la formule

$$\frac{F_1(x)}{(x-a_1)^\alpha\varphi(x)}=\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}$$

$$+\dots+\frac{A_\alpha}{(x-a_1)^\alpha}+\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi(x)}.$$

Ainsi la décomposition de la fraction $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ reste dépendante de la décomposition de la fraction $\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi(x)}$ que ne contient pas dans le dénominateur $(x-a_1)^\alpha$. Cette fraction donne de la même manière

$$\frac{\varphi_\alpha(x)}{\varphi(x)}=\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{(x-a_2)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-a_2)^\beta}+\frac{\psi_\beta(x)}{\psi(x)}$$

où $\psi(x)$ ne contient pas $(x-a_2)^\beta$.

En continuant de la même manière on décompose completement la fraction proposée.

Nous allons appliquer cette doctrine à l'exemple déjà considéré

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}.$$

Nous avons

$$F_1(x)=x^2-3x+5 \text{ et } \varphi(x)=(x-2)x$$

donc

$$A_\alpha=-3 \text{ et } \varphi_1(x)=4x-5$$

et par conséquent

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)(x-2)x}=-\frac{3}{x-1}+\frac{4x-5}{(x-2)x}.$$

Ensuite

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^2(x-2)x}=-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{4x-5}{(x-1)(x-2)x}$$

$$=-\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{5-x}{x(x-2)}.$$

Continuant de la même manière, on obtient

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^3(x-2)x}=-\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{5-x}{(x-1)x(x-2)}$$

$$=-\frac{3}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{4}{x-1}+\frac{4x-5}{x(x-2)}$$

et ensuite

$$\frac{x^2-3x+5}{(x-1)^4(x-2)x}=-\frac{3}{(x-1)^4}+\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{5-x}{x(x-2)}$$

$$=-\frac{3}{(x-1)^4}+\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{\frac{5}{2}}{x}+\frac{\frac{3}{2}}{x-2}.$$

On voit par le nº 4 qu'on peut aussi faire la décomposition de $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ divisant $F_1(a_1+h)$ par $\frac{F(a+h)}{h^\alpha}$.

12. Nous allons considérer maintenant le cas de le denominateur de la fraction proposée contenir des facteurs imaginaires du premier degré. La méthode de décomposition précédente est encore applicable, mais on peut éviter les imaginaires décomposant la fraction proposée de la manière suivante:

$$\frac{F_1(x)}{F(x)}=\frac{A_1x+B_1}{(x^2+px+q)^\alpha}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^{\alpha-1}}$$

$$+\ldots+\frac{A_\alpha x+B_\alpha}{x^2+px+q}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

étant x^2+px+q le produit de deux facteurs imaginaires conjugués $x-\theta-\theta'\sqrt{-1}$ et $x-\theta+\theta'\sqrt{-1}$, et $\varphi(x)$ le produit de tous les autres facteurs de $F(x)$.

Pour trouver A_1, B_1, A_2, B_2, etc., on procede comme dans le cas précédent, partant de $\alpha=1$. Nous avons, en effet,

$$\frac{F_1(x)}{(x-\theta-\theta'\sqrt{-1})(x-\theta+\theta'\sqrt{-1})\varphi(x)}$$

$$=\frac{A}{x-\theta-\theta'\sqrt{-1}}+\frac{B}{x-\theta+\theta'\sqrt{-1}}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

étant

$$A_1=\frac{F_1(\theta+\theta'\sqrt{-1})}{F'(\theta+\theta'\sqrt{-1})}=K+K'\sqrt{-1}$$

$$A_2=\frac{F_1(\theta-\theta'\sqrt{-1})}{F'(\theta-\theta'\sqrt{-1})}=K-K'\sqrt{-1}$$

donc

$$\frac{F_1(x)}{(x^2+px+q)\varphi(x)}=\frac{K+K'\sqrt{-1}}{x-\theta-\theta'\sqrt{-1}}+\frac{K-K'\sqrt{-1}}{x-\theta+\theta'\sqrt{-1}}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}$$

$$=\frac{2K(x-\theta)-2K'\theta'}{(x-\theta)^2+\theta'^2}+\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}.$$

Procédant comme dans le cas des facteurs réels, c'est-à-dire faisant des multiplications successives par x^2+px+q, on décompose la fraction proposée.

SOBRE UM PROBLEMA DE MECANICA APPLICADA

POR

L. F. Marrecas Ferreira

Construir uma arcada n'um determinado vão, dadas as seguintes condições:

a) arcos iguaes e ellipticos;
b) extradorso parallelo ao intradorso;
c) largura de secção nas impostas, igual á differença entre os eixos das duas ellipses de cada arco;
d) a pressão, que se descarrega em cada centimetro quadrado da superficie das impostas, igual a uma quantidade determinada;
e) suppõe-se conhecida a flecha dos extradorsos.

Sejam: x, o numero de vãos dos arcos; y, a espessura no fecho de cada arco; z, o comprimento de cada vão; c, o comprimento do vão total e supponha-se: largura do pegão, ou pé direito $\frac{c-xz}{x}=w$;

a, flecha commum aos extradorsos;

P, peso d'um centimetro cubico do material empregado;

ρ, pressão, sob a qual trabalham os materiaes nas secções das impostas, referida ao centimetro quadrado.

Os eixos d'uma ellipse de extradorso serão: a (semi-eixo menor), $z+w$ (eixo maior); os do intradorso: $a-y$ (semi-eixo menor), z (eixo maior).

A area comprehendida entre ellas e as impostas é representada por:

$$\frac{\pi}{2}\left(a\frac{z+w}{2}-(a-y)\frac{z}{2}\right);$$

o peso do arco, sob 1^m de espessura:

$$P \times \frac{\pi}{2} \times \frac{\left(a\frac{z+w}{2} - (a-y)\frac{z}{2}\right) \times 1^m}{1^{ccc}};$$

a area que, sob aquella espessura, apresenta a secção d'um pé direito, juncto ás impostas, será: $w \times 1^m$ e $\frac{w+1^m}{1^{cc}}$ o numero de centimetros quadrados que n'ella se contêm.

O peso que se descarrega sobre um pé direito é pois dado pela formula:

$$\frac{\left(\frac{\frac{P\pi}{2}\left(a\frac{z+w}{2} - (a-y)\frac{z}{2}\right) \times 1^m}{1^{ccc}}\right)}{\left(\frac{w \times 1^m}{1^{cc}}\right)} = \rho,$$

fazendo $\frac{4\,\rho}{P\pi} \times 1^c = m$, vem a formula igualmente homogenea:

$$a(z+w) - (a-y)\,z = m\,w,$$

e substituindo w pelo seu valor:

$$\frac{ac}{x} - (a-y)\,z = m\,\frac{c-xz}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Sendo homotheticas as duas ellipses de cada arco, resulta:

$$a:(a-y)::(z+w) \times \frac{1}{2} : z \times \frac{1}{2}$$

ou

$$a\,z = (a-y)\,\frac{c}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

A relação entre o fecho e abertura do arco, ou entre y e z, é dada pela formula de Léveillé, applicavel a este caso:

$$y = p + qz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

em que p representa uma fracção do metro, e q é um numero abstracto, menor que a unidade.

As equações (1) e (2) dão:

$$a\frac{c}{x} - \frac{(a-y)^2}{a}\frac{c}{x} = m\frac{c}{x} - m\frac{a-y}{a}\frac{c}{x}$$

ou

$$(a-y)^2 - m(a-y) = (a-m)a$$

d'onde

$$a - y = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + a(a-m)} = \frac{m}{2} \pm \left(a - \frac{m}{2}\right)$$

resultando para $(a-y)$ os valores a e $(m-a)$; de sorte que $y = \begin{cases} 0 \\ 2a-m \end{cases}$, e não podendo admittir-se o primeiro valor, teremos portanto o seguinte systema:

$$y = 2a - m$$

$$z = \frac{2a-m-p}{q} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$x = \frac{qc(m-a)}{a(2a-m-p)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Sendo $y < a$ pelas condições do problema, tem-se: $2a - m < a$, ou $a < m$, e pelos valores de z e x: $2a > m + p$ ou $a > \frac{m+p}{2}$;

d'onde resulta:

$$p < m$$

$$(3) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m+p}{2} < a < m;$$

taes são as relações que devem existir entre os dados.

x, devendo ser inteiro, escolheremos o maior inteiro contido no seu valor, e representando este por x', será:

$$c - x'(z+w)$$

a parte do vão que se deve junctar á occupada pelos encontros.

z deve ser maior que y, como realmente indica a formula, visto que p e q são fracções das respectivas unidades.

Os pegões, ou pés direitos, não podem funccionar como encontros.

Havendo uma sobrecarga de peso constante P', uniformemente distribuido, será $\frac{P'}{x}$ o peso correspondente a cada arco e obtem-se:

$$\frac{\left(\frac{\frac{P\pi}{2}\left(\frac{a(z+w)}{2} - \frac{(a-y)z}{2}\right) \times 1^{m}}{1^{ccc}} + \frac{P'}{x}\right)}{\left(\frac{w \times 1^{m}}{1^{cc}}\right)} = \rho,$$

soffre apenas uma ligeira modificação a equação (1), ficando inalteraveis as outras e o problema resolve-se por um modo analogo ao anterior.

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA NO N.º 1

POR

C. H. Craveiro Lopes

PROBLEMA (*)

Dadas tres circumferencias de centros A, B, C, das quaes as primeiras têm uma corda commum I J, traçar por I uma transversal que as encontre respectivamente nos pontos X, Y e Z, por tal fórma que seja X Z para X Y em uma razão dada $m:n$.

SOLUÇÃO

Seja I Y uma transversal passando por I, e seja Z o ponto que divide o segmento X Y na proporção dada $m:n::XZ:XY$.

Tiro os diametros I A D e I B E; os pontos D, J e E estarão em linha recta. Por X, por Y e por Z levanto perpendiculares a I Y, das quaes a primeira passa necessariamente em D, a segunda em E, e a terceira determina sobre D E um ponto F, tal que $DF:DE::XZ:XY::m:n$; isto é, que divide a recta D E na razão dada.

Seja qual fôr a direcção d'uma transversal $X'Y'$ passando por I, sendo X' e Y' os pontos em que córta as circumferencias A e B, se pelos pontos X', Y' lhe levantarmos perpendiculares, passarão estas necessariamente em D e E, e a perpendicular á transversal levantada no ponto Z', que divide $X'Y'$ na razão dada, irá em virtude do parallelismo das tres, dividir D E na mesma razão, isto é, passará em F.

Então I F é a hypothenusa commum a uma infinidade de triangulos rectangulos, cujos vertices de angulo recto são os pontos que dividem os segmentos considerados como $m:n$; um d'estes

(*) Pede-se aos leitores que vão traçando a figura como vae sendo indicado.

triangulos é IJF. O logar geometrico dos pontos Z é pois uma circumferencia de circulo passando por I e por J; então o seu centro estará sobre AB, e como tambem deve estar sobre o diametro IF, estará no ponto N encontro d'estas rectas.

O parallelismo de AB e DE mostra logo que o ponto N divide AB na razão dada.

O que fica dito auctorisa a estabelecer o seguinte

THEOREMA

Dadas duas circumferencias que se cortam, se tirarmos rectas para um dos seus pontos de encontro, o logar geometrico dos pontos que dividem em uma razão constante os segmentos n'estas determinados pelas circumferencias, é uma outra circumferencia que tambem passa nos pontos onde as primeiras se cortam, e cujo centro divide na mesma razão a distancia dos centros dados.

Como consequencia d'este principio resolve-se o problema proposto pela seguinte

CONSTRUCÇÃO

Tira-se AB; sobre esta marca-se N, por fórma que seja $AN:AB::m:n$; com centro em N e raio NI córta-se a circumferencia C nos pontos Z e Z'; as rectas dirigidas segundo IZ e IZ' respondem á questão.

DISCUSSÃO

Se as circumferencias N e C não se cortam, o problema é impossivel; cortando-se ha duas soluções, como no caso da figura; sendo tangentes estas duas soluções reduzem-se a uma só, que é a linha recta determinada por I e pelo ponto de contacto de N e C.

Se a circumferencia C passa em I, uma das soluções está na corda commum a C e N. A outra será a tangente a N tirada em I, porquanto considerando que o ponto Z se foi deslocando sobre a circumferencia N até chegar a confundir-se com I, as successivas posições da transversal IZ seriam as secantes a N, que girassem sobre I, e quando Z cahir sobre I, a secante tomará a posição da tangente a N em I. Passando C em I e sendo tangente a N, as duas soluções confundir-se-ão sobre a tangente commum a N e C, isto é, a que passa em I.

Quando C passar em I e J uma das soluções, como acabamos de ver, será a tangente em I á circumferencia N, e a outra seguindo a corda commum ás duas, será I J. É bom, porém, advertir que esta solução I J convém então, qualquer que seja a razão dada $m:n$; visto como estando então confundidos em J os pontos X, Y, Z, será $\frac{XZ}{XY}=\frac{0}{0}$.

Se por acaso as circumferencias C e N se confundem, ha uma infinidade de soluções, visto que qualquer ponto de N é commum a C; é o caso de indeterminação do problema.

OBSERVAÇÃO

Tudo quanto fica dito com referencia á circumferencia N subintende-se tambem para uma circumferencia N', de raio N'I, e cujo centro N' está tambem sobre a recta A B e é symetrico de N com relação a A; d'onde se póde concluir que o problema proposto tem quatro soluções, duas determinadas por N e duas por N'.

Esta solução é geral, e convém ainda ao caso em que a circumferencia C é substituida por qualquer linha, sendo então tantas as soluções, quantos os pontos de encontro das circumferencias N e N' com a linha dada em substituição de C.

QUESTÃO PROPOSTA N.º 11

Provar geometricamente que os logares H, H' dos pontos do espaço, cujas distancias a duas rectas fixas M, N, não situadas no mesmo plano, estão n'uma razão constante $\frac{m}{n}$, são hyperboloides escalenas ou não de revolução (*).

A. Schiappa Monteiro.

(*) Foi M. Ferry quem primeiro determinou analyticamente a natureza das superficies H, H', no seu *Ensaio sobre as machinas*, publicado em Metz em 1806. Sobre esta questão (que não nos consta ter sido ainda tractada geometricamente) diz o illustre geometra T. Olivier o seguinte:

«Je n'ai pu encore parvenir à déterminer la nature géométrique du lieu H au moyen des considérations de la géométrie descriptive; j'ai donc dû recourir à l'analyse de Descartes.

Mais pour tous les cas où l'on suppose que $\frac{m}{n}=1$, j'ai pu parvenir au résultat par des considérations géométriques assez simples.»

EXTRACTO DE UMA CARTA DO PROFESSOR G. BELLAVITIS A F. GOMES TEIXEIRA

Nel n.º 3 del vol. II del *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* trovo un bel teorema del sig. Craveiro Lopes, che rende facile la soluzione richiesta (pag. 47). Se per un punto J sono tirate tre rette fisse JX, JY, JZ, e da un punto I parte una recta qualiavoglia IXZY, è ben noto che rapporto duplice IY.XZ:IZ.XY $\simeq m$ è constante. Col mezzo dell'inversione rispetto al punto I ne risulta todo che tre circoli IJX, IJZ, IJY, tagliano ogni retta IXZY in modo che XZ$=m$.XY. Io pure al risolvere il problema (*Spozione del metodo delle equipollenze* (*) n.º 88) devevo accorgermi che se il centro C coincide col punto L dato da AL $\simeq m$AC, la LC si annulla, perciò la cercata IXY porà avere qualunque direzione. Queste posteriori considerazioni non diminuiscone il merito d'invenzione del sig. Craveiro Lopes.

Padova, 22—7—79.

QUESTÃO PROPOSTA N.º 12

Dados dois pontos, determinar com o compasso ordinario o ponto medio da distancia que os separa.

L. F. Marrecas Ferreira.

(*) Esta Memoria do professor Bellavitis, publicada em Modena em 1854, foi traduzida em francez por Mr. Laisant.

SOBRE A QUESTÃO PROPOSTA N.º II

POR

L. F. Marrecas Ferreira

Provar geometricamente que os logares H, H′ dos pontos do espaço, cujas distancias a duas rectas fixas M, N, não situadas no mesmo plano, estão n'uma razão constante $\frac{m}{n}$, são hyperboloides escalenos ou não de revolução.

Tire-se por M um plano parallelo a N, e seja N′ a projecção d'esta recta sobre elle, cortando M n'um ponto V (fig. 1.ª, est. 3.ª). H_1 represente o logar geometrico dos pontos do espaço, cujas distancias a M guardem com as respectivas distancias a N′ a relação $\frac{m}{n}=k$; H'_1 o logar correspondente á relação $\frac{1}{k}$. Para determinar H_1 imaginem-se cylindros rectos de base circular, tendo por eixos M e N′, guardando os raios dos primeiros a relação k com os correspondentes de eixo N′. H_1 é o logar das intersecções dos dois systemas.

A fig. 2.ª representa a intersecção de dois cylindros correspondentes feita pelo plano MN′, escolhido para a projecção; os diametros estão relacionados por: $\frac{cd}{ab}=k$; a recta ef fazendo com as geratrizes angulos: aeb, dfc iguaes entre si, perpendicular á bissetriz do angulo PVQ, determinará segmentos eb e cf, taes que: $\frac{cf}{eb}=\frac{cd}{ab}=k$.

Escolhamos planos secantes auxiliares, perpendiculares ao de projecção, tendo por traços sobre este as rectas AQ, A′Q′..., perpendiculares á bissetriz de PVQ. Cada systema de cylindros será interceptado segundo ellipses homotheticas; mas os eixos maiores n'um systema (como cf) são proporcionaes aos maiores (como eb)

no outro, guardando entre si a relação k; os menores são os raios dos respectivos cylindros, que mantêm igualmente a mesma relação; portanto as ellipses d'um systema, além de serem homotheticas entre si, serão tambem homotheticas com as do outro systema.

O logar dos pontos d'um plano, cujas distancias a dois pontos d'elle têm entre si a relação k, é uma circumferencia, representando esta o logar das intersecções de dois systemas de circumferencias, tendo cada um por centro um dos dois pontos dados.

Pela transformação homologica, ou projecção sobre um plano parallelo á linha dos centros, as circumferencias convertem-se em ellipses, sendo as de cada grupo homotheticas entre si e com as do outro.

Cada plano secante auxiliar contem dois systemas de ellipses, produzindo pelas intersecções uma ellipse ε, similhante ás propostas. Assim no plano A Q é A C o eixo maior de ε, dando-se: $\frac{AQ}{AP}=\frac{CQ}{PC}=k$; e B, ponto medio de A C, será o centro. No plano A′Q′ será A′C′ o eixo maior de ε', determinado segundo relações analogas.

A, A′, A″... estarão em linha recta; B, B′, B″... n'outra e finalmente C, C′, C″... n'uma terceira, todas dirigidas para V.

Os eixos menores das ellipses ε, ε'..., perpendiculares ao plano de projecção, erguendo-se sobre B, B′..., guardando uma relação constante com os eixos maiores correspondentes, terão os seus extremos situados sobre duas rectas que se cortam em V. H_1 é pois um cone e da mesma sorte H'_1.

Para determinar H e H′, imagine-se que N′ soffre uma translação perpendicular ao plano, até occupar a posição N; considerem-se ainda os dois systemas de cylindros e os mesmos planos auxiliares.

Sujeitando os dois systemas de circumferencias, precedentemente considerados, á transformação homologica segundo um eixo obliquo á linha dos centros, os eixos maiores de todas as ellipses obtidas serão parallelos ao eixo de transformação, e ellas ainda homotheticas entre si, guardando-se a relação k.

Σ, Σ'..., ellipses resultantes das novas intersecções, são igualmente homotheticas.

Seja P′p (fig. 3.ª) a altura a que se elevou N′, P′ e Q′ são centros de dois systemas de circumferencias primitivas de que resultou ε, de eixo maior A′C′ e centro B′. Se p e Q′ fossem os centros, a circumferencia resultante teria o centro b sobre a perpendicular $B'b$, sendo a e c extremos do diametro ac, dados por: $\frac{aQ'}{ap}=\frac{cQ'}{cp}=k$; estando aquelles pontos nas perpendiculares $A'a$ e $C'c$.

Da transformação homologica resulta uma ellipse Σ, de eixo $a_1 c_1$, parallelo a $A'C'$, sendo $ab=a_1 b$.

Os centros das novas ellipses resultantes projectam-se sobre a recta VB (fig. 1.ª) e existem sobre uma outra recta, como se póde demonstrar até elementarmente (*), portanto os eixos maiores de Σ, Σ'... existem n'um plano parallelo ao de projecção.

No plano auxiliar tirado por V obtem-se uma outra ellipse, ainda homothetica das precedentes, cujo centro está acima de V, na recta que juncta os pontos b, b',...

A fig. 3.ª mostra que a differença entre $a_1 c_1$ e $A'C'$, ou a semi-differença $A'A_1$, depende da distancia $P'Q'$ ou do angulo em Q', o seu valor augmenta á medida que o ponto Q' se aproxima de V, correspondendo a este ponto o seu valor maximo, e decrescendo depois para o lado opposto de V.

H admitte, pois, dois planos diametraes: o de projecção e o perpendicular a este tirado por VB; as suas secções parallelas feitas pelos planos AQ, $A'Q'$...., serão ellipses homotheticas entre si e com as do cone H_1; mas pela conclusão anterior vê-se que H não póde ser um cone, aproximando-se A_1 e C_1 de A' e C', quando Q' se afasta de V, afastando-se no caso contrario.

Se em logar dos planos secantes auxiliares: AQ, $A'Q'$... empregarmos outros planos igualmente perpendiculares ao de projecção, tendo os seus traços sobre este parallelos entre si, mas com uma direcção diversa da dos precedentes, os cones H_1 e H'_1 serão cortados segundo um novo systema de ellipses: ε_1, ε'_1...; por conseguinte das superficies H e H' resulta um outro systema de conicas: Σ_1, Σ'_1...; como a relação projectiva $A'_1 A'=C'C_1$ se mantem invariavel nas novas conicas, segue-se que o logar dos pontos A_1 e C_1 é uma hyperbole, que tem por assymptotas as rectas VA e VC, que definem o contorno apparente do cone H_1.

(*) A fig. 1.ª representa um paraboloide hyperbolico, cuja linha de stricção, perpendicular ao plano MN', está projectada em V, concorrendo n'este ponto as geratrizes d'um systema, e sendo as do outro representadas por AQ, $A'Q'$... O plano de projecção será o plano central da geratriz M.

Os pontos b, b'..., segundo a relação de k, existem n'uma das geratrizes que passam em V.

Será, pois, H um hyperboloide que admitte um cone director parallelo a H_1, tendo o vertice na recta projectada em V; H' será igualmente um outro hyperboloide.

Como os planos auxiliares determinam curvas ellipticas $\varepsilon, \varepsilon' \ldots$, segue-se que H e H' não podem conter nenhum systema de circumferencias, e serão portanto hyperboloides escalenos. Ainda mesmo no caso em que os planos fossem perpendiculares a um dos eixos M ou N, seriam obliquos ao outro; os cylindros produziam um systema de circumferencias a interceptar por um outro de ellipses, resultando da mesma sorte curvas ellipticas.

A intersecção dos cylindros será um arrancamento entre os limites da tangencia interna e externa.

Em V existem os pontos mais altos e baixos da curva Σ, que em cada superficie encontra aquella perpendicular; bem como os da secção feita pelo plano perpendicular V B, que é o diametral para as cordas parallelas a A Q. N'esses pontos, que pertencem á linha de stricção, será o plano tangente parallelo ás rectas M e N; obtendo-se as linhas de stricção ou ellipse de gola em cada superficie, tirando por V um plano perpendicular ao respectivo eixo, sendo este uma recta parallela á bissetriz do angulo A V C na superficie H.

Á hypothese $\frac{m}{n} = 1$ corresponde a tangencia dos dois logares geometricos n'um ponto da recta V.

Entre dois eixos não situados no mesmo plano póde pois realisar-se por meio d'uma engrenagem hyperbolica a transmissão de movimento, com as rotações e escorregamentos necessarios, para que os pontos centraes das geratrizes em coincidencia se vão ajustando, bem como os planos centraes. Alguns escriptores modernos da Mecanica têm feito sobre este assumpto interessantes estudos, nomeadamente Bour, e entre nós o ex.^{mo} sr. Francisco da Ponte Horta; Rankine tambem se occupa d'este systema, cuja introducção na pratica, pelas difficuldades que apresenta, se torna quasi inexequivel, restringindo-se apenas a alguns modelos de gabinete, e é certamente por tal motivo, que n'uma obra importantissima — *Traité de mécanique générale*, pelo dr. H. Resal, distincto engenheiro francez, o systema não tem cabimento.

RECHERCHES SYNTHÉTIQUES ET ANALYTIQUES SUR LE CERCLE VARIABLE ASSUJETI A COUPER CONTINUELLEMENT DEUX CERCLES DONNÉS SOUS DES ANGLES ÉGALEMENT DONNÉS

PAR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Avertissement

1. Lorsque nous avons présenté dans ce Journal la solution *purement géométrique et élémentaire* du problème, qui a pour objet de trouver *un cercle* (x), *qui coupe deux cercles donnés* (E) *et* (I) *sous des angles également donnés* e *et* i (*): problème proposé par Mr. Pedro Amorim Vianna, dans ce même Journal (en supposant le cas tout particulier où les cercles donnés sont concentriques) (**): nous y avons dit, que, plus tard, nous étudierions les diverses propriétés remarquables, qui se déduisaient de la figure, soit dans le cas particulier, soit dans le cas général: ce que nous passons maintenant à faire.

2. Nous pourrions naturellement faire notre étude tant *synthétique* que *analytique* en partant du cas général, pour en dériver ensuite tous les différents cas, qui peuvent se présenter; mais comme l'étude *purement géométrique,* ou *synthétique* est, sans doute, plus importante que l'*analytique,* et elle devient ici plus simple et plus élémentaire, en partant du cas des cercles concentriques, nous considérerons d'abord ce cas et ensuite le cas général.

(*) Voy. p. 174 et suiv. du vol. I.
(**) Voy. p. 160 du vol. I.

I

Cas des cercles concentriques

§ I

ÉTUDE SYNTHÉTIQUE

3. Soint R et r la grandeur des rayons des cercles (E) et (I); et traçons sur ces cercles respectivement les cordes ba et $b'_1 d'_1$, qui les coupent sous les angles e et i, et dont les points milieux seront représentés par m_1 et m'_1.

Comme le problème est indéterminé, si nous prenons le point arbitraire b du cercle (E), et voulons obtenir l'un (x) des cercles, qui, passant par ce point, coupe les deux cercles donnés, sous les angles également donnés, nous savons (*) que *nous avons à prendre sur la corde* $\mathrm{b\,a}$ *un segment* $\mathrm{b\,m_d}$ *égal à la moitié de la corde* $\mathrm{b'_1 d'_1}$, *lui élever au point* $\mathrm{m_d}$ *la perpendiculaire* $\mathrm{c_i\,m_d\,c_s}$, *en marquant sur celle-ci le segment* $\mathrm{m_d c_s}$ *égal au rayon* $\mathrm{r'}$ *du cercle* (I′), *enveloppe de la corde* $\mathrm{b'_1 d'_1}$ *du cercle* (I); *puis unir le point* $\mathrm{c_s}$ *avec le centre* C *de ce même cercle* (I), *et alors la corde* $\mathrm{b\,a'_1}$, *perpendiculaire en* b *à la corde* b a, *sera coupée par la perpendiculaire* $\mathrm{o\,n_s\,t}$, *élevée sur le milieu* $\mathrm{n_s}$ *de* $\mathrm{C\,c_s}$, *au point* o, *centre de l'un* (x) *des cercles demandés.*

Quand nous considérerons, sur la perpendiculaire $c_i m_d c_s$, le segment $m_d c_i = c_s m_d$, la perpendiculaire $o' n_i t$, sur le milieu n_i de $C c_i$, coupera $b a'_1$ au point o', qui sera le centre du second cercle demandé (x').

4. Si nous marquons sur la corde ba le segment $b m_e = m_d b$, et en m_e lui élevons la perpendiculaire $c'_s m_e c'_i$, en prenant sur celle-ci les segments $m_e c'_s$ et $c'_i m_e$, égaux au rayon r', nous troverons les mêmes cercles (x) et (x'): car il est facile de reconnaître que les perpendiculaires $o\, n'_s t$ et $o' n'_i t'$, élevées aux points milieux n'_s et n'_i de $C c'_s$ et $C c'_i$ coupent $b a'_1$ respectivement aux mêmes points o et o', où cette droite est rencontrée par les perpendiculaire $o\, n_s t$ et $o' n_i t$.

(*) Voy. notre solution générale, déjà citée.

5. En considérant l'autre extrémité a'_1 de la corde $b\,a'_1$, si l'on trace la corde $a'_1\,b_3$, parallèle à $b\,a$ et l'on fait des constructions analogues aux précédentes, nous trouverons deux points o_1 et o'_1, qui représenteront les centres de deux cercles (x_1) et (x'_1) respectivement éguax à (x) et (x'), et symétriquement placés à l'égard de ceux-ci.

6. Si nous voulons déterminer les cercles (x_c) et (x'_c), qui coupent les cercles (E) et (I) sous les angles *complémentaires* des angles donnés, leurs centres correspondants t et t' seront déterminés respectivement par les droites $o\,n_s\,t$ et $o\,n'_s\,t'$, ou $o'\,n_i\,t$ et $o'\,n'_i\,t'$, que nous avons considérées antérieurement: ce qu'on reconnaîtra aisément, en appliquant les constructions précédentes à la corde complémentaire $b\,a'_1$ de la corde $b\,a$.

7. En considérant aussi la corde $a\,b_3$, parallèle à $b\,a'_1$, et en y employant les constructions précédentes, nous trouverons des cercles égaux aux cercles (x), (x'); (x_1), (x'_1); (x_c), (x'_c), et symétriques de ceux-ci.

8. Comme nous avons dit (dans notre solution) la seconde corde $b\,a_1$, qui coupe le cercle (E) au point b, sous l'angle e, donnera aussi deux cercles (x_2) et (x'_2) égaux aux cercles (x) et (x'), et symétriment placés par rapport à ceux-ci.

9. Étant b' et b'_2 les points où le cercle (x) coupe le cercle (I), et b'' et b''_1 leurs points de rencontre avec le cercle (x'): les tangentes $b'\,t$ et $b'_2\,t$, au cercle (x), aux points b' et b'_2, coupent évidemment $b\,a$ sur les points t et t'; et les tangentes $b''\,t$ et $b''_1\,t$ au cercle (x') anx points b'' et b''_1, passeront respectivement par ces points-là: toutes ces droites étant également tangentes au cercle (I'). Semblablement les tangentes $b'\,o$ et $b''\,o'$ au cercle (x_c) coupent $b\,a'_1$, aux points o et o', par lesquels passent respectivement aussi les tangentes $b'_2\,o$ et $b''_1\,o'$ aux points b'_2 et b''_1 du cercle (x'_c): toutes ces droites étant évidemment aussi tangentes au cercle (I''), enveloppe de la corde $b'_1\,d'_2$ perpendiculaire à la corde $b'_1\,d'_1$; et dont le rayon nous représenterons par r''.

Il en résulte que le cercle (x_c) passera par les points b' et b''; et le cercle (x'_c) par les points b'_2 et b''_1.

10. On reconnait immédiatement que les *lieux géométriques* des centres o, $o_1,\ldots$, de la *suite des cercles* (x), $(x_1),\ldots$; et des centres o', $o'_1,\ldots$; de la *suite* (x'), $(x'_1),\ldots$; sont deux *cercles* complétement déterminés, et que nous représenterons respectivement par (X) et (X').

11. *Observation.* — Comme on le verra ces deux cercles se transformeront en *deux autres coniques* (Σ) et (Σ'), lorsque les cercles (E) et (I) laisseront d'être concentriques, et lesquelles représenteront alors les lieux géométriques des *deux nouvelles suites de cercles*, qui résolvent le problème dans ce cas.

De même, les *cercles enveloppes* des cordes d'intersection des cercles (E) et (I) avec les cercles (x) et (x'), ainsi que les *cercles*, qui représentent les lieux géométriques des *poles* de ces cordes, se transformeront en *d'autres coniques*.

Au contraire, les *cercles enveloppes* des cercles (x) et (x'), après la transformation de la figure, continueront encore à être des *cercles*, mais qui pourront alors être *réels* ou *imaginaires;* et dont l'étude, combinée avec la méthode de Roberval, constitue la base principale de nous humbles recherches synthétiques.

12. On reconnaîtra immédiatement par les constructions faites, que les *centres des cercles* (x_0) et (x'_0), qui passeront par C et par les extrémités des côtés $c_s c'_s$ et $c_i c'_i$ du *rectangle auxiliaire* $c_s c_i c'_i c'_s$, auront pour *lieux géométriques* les cercles (X) et (X'). Il en sera de même des lieux géométriques des centres des cercles (x_c) et (x'_c), et de ceux qui passeront par C et par les extrémités des côtés $c_s c_i$ et $c'_s c'_i$.

13. Plusieurs autres propriétés se trouveront immédiatement, par la simple inspection de la figure, et que nous n'énumérons pas, parceque nous les jugeons de peu de valeur, dans le cas particulier, que nous considérons maintenant.

14. *Discussion.* — Représentons par (E') et (E'') les cercles enveloppes des cordes complémentaires ou orthogonales ba et ba'_1 du cercle (E); et par R' et R'' la grandeur de leurs rayons; et considérons, soit les *cercles auxiliaires* (y) et (y') (*), qui touchent (I') aux points m' et m'', et la corde ba au point m_d; soit le rectangle auxiliaire $c_s c'_s c'_i c_i$: ce qui nous conduira aisément à l'étude de la figure relative aux différents cas, qui se présenteront; en supposant toujours que nous prenons *arbitrairement* les points de la circonférence (E), par lesquels passent les circonférences demandées.

Ainsi:

1.° Quand il sera $R' > r'$ nous voyons tout de suite que l'un (y)

(*) Voy. notre solution.

des cercles auxiliaires étant touché extérieurement, l'autre (y') le sera intérieurement; et alors les cercles (x) et (x') se trouveront du même côté de ba.

2.° Si l'on a $R' < r'$, les cercles (y) et (y') seront touchés extérieurement par (I'), d'où il résulte que les cercles (x) et (x') se trouveront de côtés différents de ba.

3.° Étant $R' = r'$ le rayon de l'un (y') des cercles auxiliaires deviendra infini, et par suite il se réduira à la droite ba et à l'une parallèle à celle-ci, située à l'infini; d'où il suit qu'il en sera de même du cercle demandé correspondant (x'): le cercle (X') passant à l'infini.

4.° Si l'on a $R' = o$, ou $R'' = R$, ou bien $e = 90°$ les cercles (y) et (y') (touchant (I') extérieurement) seront égaux, ainsi que les cercles (x) et (x'), qui se trouveront situés de côtés différents de ba: les cercles (X) et (X') se confondant en un cercle unique.

5.° Quand nous avons $r' = o$, ou $r'' = r$, ou bien $i = 90°$, ou encore $r = o$, les cercles (x) et (x') se confondront, et il en sera de même des cercles (X) et (X').

6.° Si l'on a en même temps $R' = o$ et $r' = o$, ou $R'' = R$ et $r'' = r$, non-seulement les cercles (x) et (x') se confondront, mais ils auront aussi les rayons infinis; et par conséquent se réduiront à l'un des diamètres des cercles donnés et à l'une droite parallèle à celui-ci située à l'infini. Il en est de même pour $R' = o$ et $r = o$, ou $R'' = R$ et $r = o$. Les cercles (X) et (X') passeront évidemment à l'infini.

D'après cela, nous voyons, donc, que dans les trois premiers cas, pour chaque point arbitraire $b, \ldots$, du cercle (E), il y aura toujours quatre solutions égales et symétriques deux à deux.

Dans le quatrième et cinquième cas il y aura seulement deux solutions égales et symétriques.

Pour le sixième cas nous n'aurons qu'une solution.

Obs. — Nous fairons remarquer que quand il sera $e = i$, nous aurons évidemment

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \frac{R''}{r''}.$$

15. Si les centres des cercles demandés devaient se trouver sur une ligne donnée (L) le problème laisserait d'être indéterminé, et les centres des cercles demandés seraient les points d'intersection *(réels ou imaginaires)* de (X) et (X') avec (L).

§ II

ÉTUDE ANALYTIQUE

16. Voyons maintenant comme nous pourrons trouver l'expression du rayon d'un quelconque des cercles demandés.

En considérant le cercle (x), soit m'_2 le point milieu de la corde $b'b'''$ du cercle (I), mené par o, et tangente à (I''); et soit aussi m_2 le point milieu de ba'_1, qui contient ce même point o.

Les triangles rectangles Cm_2o et Cm'_2o donnent.

$$\overline{Co}^2-\overline{Cm_2}^2=\overline{m_2o}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

et

$$\overline{Co}^2-\overline{Cm'_2}^2=\overline{m'_2o}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

d'où

$$\overline{Cm_2}^2-\overline{Cm'_2}^2=\overline{m'_2o}^2-\overline{m_2o}^2 \ldots\ldots\ldots (3).$$

Cela étant, si nous faisons *tourner la droite* m'_2o *autour de* o, jusqu'à ce que le point b' *coincide* avec b, et prenons ce point pour *origine des segments*, que nous considérons *positifs*, quand ils seront *comptés de* b *vers* m_2, la formule (3) donnera

$$\overline{Cm_2}^2-\overline{Cm'_2}^2=(b'o-b'm'_2)^2-(bo-bm_2)^2 \ldots (4)$$

donc

$$bo=\frac{\overline{Cm_2}^2-\overline{Cm'_2}^2+\overline{bm_2}^2-\overline{b'm'_2}^2}{2(bm_2-b'm'_2)} \ldots\ldots (5)$$

ou

$$bo=\frac{\overline{bC}^2-\overline{b'C}^2}{2(bm_2-b'm'_2)} \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

En tenant compte du *signe* du segment $b'm'_2$, et en représentant par r_x les rayons bo et bo' des cercles (x) et (x'), l'expression générale, qui donne ces *rayons en grandeur* et *en direction*, sera

$$r_x = \frac{R'^2 - r'^2 + R''^2 - r''^2}{2(R' \pm r')} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

ou

$$r_x = \frac{R^2 - r^2}{2(R' \pm r')} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Autrement. — Nous pouvons déduire l'expression de r_x, en considérant dans le cercle (E) la corde $b a'_1$, et la corde $B' B'''$, déterminée par le prolongement de la corde $b' b'''$ du cercle (I). Pour cela, nous avons d'abord

$$b o . o a'_1 = B' o . o B''' \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

d'où

$$b o (b a'_1 - b o) = (b' o - b' B')(b' B''' - b' o) \ldots (10).$$

Ensuite, si, comme précédemment, nous faisons tourner la corde $B' B'''$ autour de o, jusqu'à ce que le point b' coincide avec b, nous aurons

$$b o = - \frac{b' B' . b' B'''}{b a'_1 - b' B' - b' B'''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

ou

$$b o = - \frac{(m'_2 B' - m'_2 b')(m'_2 B''' - m'_2 b')}{b a'_1 - (m'_2 B' - m'_2 b') - (m'_2 B''' - m'_2 b')} \ldots (12)$$

et comme il est

$$m'_2 B''' = - m'_2 B', \text{ et } b a'_1 = 2 b m_2$$

on aura

$$b o = \frac{\overline{m'_2 B'}^2 - \overline{m'_2 b'}^2}{2(b m_2 - b' m'_2)} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

mais il est

$$\overline{m'_2 B'}^2 = \overline{B'C}^2 - \overline{Cm'_2}^2 = \overline{bC}^2 - \overline{Cm'_2}^2$$

et

$$\overline{m'_2 b'}^2 = \overline{b'C}^2 - \overline{Cm'_2}^2$$

d'où

$$bo = \frac{\overline{bC}^2 - \overline{b'C}^2}{2(b\,m_2 - b'\,m'_2)} \dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

donc, etc., etc.

17. D'ailleurs, étant évidemment

$$R' = R.\cos e, \quad \text{et} \quad r' = r.\cos i$$

la formule (8) devient

$$r_x = \frac{R^2 - r^2}{2(R.\cos e \pm r.\cos i)} \dots\dots\dots\dots \quad (14).$$

Telle est la formule qui donne r_x en fonction de R et r, e et i; et à laquelle nous arriverons directement en considérant les triangles obC et $ob'C$.

18. Si nous représentons par r_{x_c} les rayons bt et bt' des cercles (x_c) et (x'_c), *complémentaires* de (x) et (x'), ou qui les coupent *orthogonalement*, nous trouverons facilement, d'une manière analogue à la précédente, les expressions

$$r_{x_c} = \frac{R^2 - r^2}{2(R'' \pm r'')} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (15)$$

et

$$r_{x_c} = \frac{R^2 - r^2}{2(R.\,\text{sen}\,e \pm r.\,\text{sen}\,i)} \dots\dots\dots \quad (16).$$

19. Comme nous savons, la construction de ces expressions générales se réduit à la détermination d'une troisième, ou quatrième proportionelle.

Considérons, donc, les formules (8) et (14). Pour trouver r_x comme une troisième proportionelle (par exemple), menons par b une tangente $b\beta$ au cercle (I), et marquons sur ba le segment $b\beta'$ égal au longueur $b\beta$ de cette tangente; puis il ne s'agira plus que de prendre sur ba'_1 les segments $b\alpha$ et $b\alpha'$ éguax à $R'+r'$ et $R'-r'$, ou $R.\cos e+r.\cos i$ et $R.\cos e-r.\cos i$ (pris dans la direction due), joindre le point β' à α et α', et élever les perpendiculaires $\beta'o$ et $\beta'o'$ à $\beta'\alpha$ et $\beta'\alpha'$ au point β' lesquelles détermineront sur ba'_1 les centres o et o' des cercles demandés (x) te (x').

Cette construction générale se simplifie beaucoup dans certains cas particuliers. Ainsi, pour $R''=r''$ les valeurs de r_x seront à peine la demi-somme et la demi-différence des rayons R' et r' [form. (7)]; etc., etc.

D'une manière analogue nous construirons les expressions (15) et (16).

20. La discussion de ces formules est tellement facile qu'il sera inutile de s'en occuper: surtant après la discussion purement géométrique que nous venons de faire.

21. *Observation.* — En faisant varier la grandeur de l'angle e, autour du point b, le lieu géométrique décrit par le point o, centre du cercle (x), sera une ***conique*** (*), dont ce ***point fixe*** (b) est un des ***foyers:*** car, la formule (14) peut prendre la forme générale

$$r_x=\frac{p}{1+f.\cos e}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17),$$

équation polaire d'une conique, rapportée aux foyers.

Il en sera de même par rapport aux points t et t', centres des cercles (x_c) et (x'_c).

22. La relation entre les rayons des cercles complémentaires considérés, sera évidemment

$$\frac{r_x}{r_{x_c}}=\frac{R''\pm r''}{R'\pm r'}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

ou

$$\frac{r_x}{r_{x_c}}=\frac{R.\operatorname{sen} e\pm r.\operatorname{sen} i}{R.\cos e\pm r.\cos i}\ldots\ldots\ldots (19).$$

23. Maintenant passons à déterminer l'équation polaire des lieux géométriques (X) et (X') des centres $o, o_1, \ldots$; et $o', o'_1, \ldots$; des cercles (x) et (x').

(*) Voy. la seconde partie de ce mémoire.

Pour cela nous pouvons, ou recourir directement aux formules (1) et (2), ou substituer, dans une quelconque de celles-ci, la valeur du rayon des cercles (x) et (x').

En suivant un quelconque de ces moyens nous trouverons aisément les formules

$$\overline{Co}^2=\overline{Cm_2}^2+\left[\frac{\overline{Cm_2}^2-\overline{Cm'_2}^2}{2(b\,m_2-b'\,m'_2)}-\frac{1}{2}(b\,m_2-b'\,m'_2)\right]^2 \quad (20)$$

ou

$$\overline{Co}^2=\overline{Cm'_2}^2+\left[\frac{\overline{Cm_2}^2-\overline{Cm'_2}^2}{2(b\,m_2-b'\,m'_2)}+\frac{1}{2}(b\,m_2-b'\,m'_2)\right]^2 \quad (21)$$

ou

$$\overline{Co}^2=\frac{(\overline{Cm_2}^2-\overline{Cm'_2}^2)^2}{4(b\,m_2-b'\,m'_2)^2}+\frac{2(\overline{Cm_2}^2+\overline{Cm'_2}^2)+(b\,m_2-b'\,m'_2)^2}{4} \quad (22).$$

En faisant $Co=\rho_o$, nous aurons respectivement

$$\rho_o^2=R''^2+\left[\frac{R''^2-r''^2}{2(R'\pm r')}-\frac{1}{2}(R'\pm r')\right]^2 \ldots. \quad (23)$$

ou

$$\rho_o^2=r''^2+\left[\frac{R''^2-r''^2}{2(R'\pm r')}+\frac{1}{2}(R'\pm r')\right]^2 \ldots. \quad (24)$$

ou

$$\rho_o^2=\frac{(R''^2-r''^2)^2}{4(R'\pm r')^2}+\frac{2(R''^2+r''^2)+(R'\pm r')^2}{4} \quad (25).$$

Si nous voulons tenir ρ_o en fonction de R et r, R' et r', ces expressions deviennent

$$\rho_o^2=R^2-R'^2+\left[\frac{R^2-r^2}{2(R'\pm r')}-R'\right]^2 \ldots\ldots \quad (26)$$

$$\rho_o^2=r^2-r'^2+\left[\frac{R^2-r^2}{2(R'\pm r')}\pm r'\right]^2 \ldots\ldots \quad (27)$$

$$\rho_o^2=\left[\frac{R^2-r^2}{2(R'\pm r')}-\frac{1}{2}(R'\mp r')\right]^2+\frac{2(R^2+r^2)-(R'\mp r')^2}{4} \quad (28).$$

En remplaçant R′ et r', par les valeurs $R.\cos e$ et $r.\cos i$, nous aurons encore

$$\rho_0{}^2 = R^2.\operatorname{sen}^2 e + \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R.\cos e \pm r.\cos i)} - R.\cos e\right]^2 \;..\; (29)$$

$$\rho_0{}^2 = r^2.\operatorname{sen}^2 i + \left[\frac{R^2 - r^2}{2(R.\cos e \pm r.\cos i)} \pm r.\cos i\right]^2 \;..\; (30)$$

$$\rho_0{}^2 = \left[\frac{R^2.\operatorname{sen}^2 e - r^2.\operatorname{sen}^2 i}{2(R.\cos e \pm r.\cos i)}\right]^2 + \frac{2(R^2 + r^2) - (R.\cos e \mp r.\cos i)^2}{4} \quad (31).$$

24. D'une manière analogue nous trouverons les équations des lieux géométriques des points t et t', centres des cercles (x_c) et (x'_c).

De même que pour les cercles complémentaires (n.° 22), nous pourrons obtenir la relation entre les rayons de leurs lieux géométriques.

25. Comme nous savons, la construction des deux valeurs de ρ_0 est une conséquence de celle de r_x; mais si nous voulons faire directement les constructions, en partant des expressions respectives, nous pouvons considérer ρ_0 comme l'hypoténuse de triangles, dont la grandeur des cathètes sera la racine carrée de chacun des deux termes du seconde membre de ces mêmes expressions, et dont la construction sera très-simple.

La discussion de telles expressions sera aussi extrêmement facile.

26. *Obs.* — Nous n'ajoutons rien de plus, parce que ce serait, sans doute, non-seulement rendre cette étude trop fatigante, mais encore présenter inutilement des propriétés qui se déduisent tout de suite de l'étude du cas général, dont nous passons à nous occuper.

(à suivre).

SUR L'INTÉGRALE $\int_0^{2\pi} f(\sin x, \cos x)\, dx$

PAR

M. CH. HERMITE

Je supposerai que $f(\sin x, \cos x)$ soit une fonction rationnelle des quantités $\sin x$ et $\cos x$, de sorte qu'on ait en décomposant en éléments simples, l'expression suivante:

$$f(\sin x, \cos x) = \Pi(x) + \Phi(x)$$

où $\Pi(x)$ représente la partie entière, et $\Phi(x)$ une somme de termes de la forme $D^n{}_x \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)$. Cette formule donnée dans mon *Cours d'Analyse*, page 321, fait dépendre l'intégrale proposée de celle-ci: $\int_0^{2\pi} \cot \frac{1}{2}(x-\alpha)\, dx$, et en recourant à une construction géométrique, j'ai montré qu'elle a pour valeur $\pm 2i\pi$; c'est ce résultat que je vais établir en suivant une méthode différente qu'est entièrement élémentaire. Je parts à cet effet de la relation:

$$n \cot n x = \cot x + \cot\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \ldots + \cot\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

où n désigne un nombre entier et qu'on tire des premiers principes de la trigonométrie. Changeons d'abord x en $x-\alpha$, ou aura:

$$n \cot n(x-\alpha) = \cot(x-\alpha) + \cot\left(x - \alpha + \frac{\pi}{n}\right) + \ldots$$

$$+ \cot\left(x - \alpha + \frac{(n-1)\pi}{n}\right);$$

soit ensuite $\frac{\pi}{n} = dx$, et elle prendra cette nouvelle forme:

$$\pi \cot n(x-\alpha) = dx[\cot(x-\alpha) + \cot(x-\alpha+dx) + \dots$$
$$+ \cot(x-\alpha+(n-1)dx)].$$

Or la limite du second membre, en supposant le nombre entier n infini est précisement l'intégrale $\int_0^{2\pi} \cot(x-\alpha)\,dx$; le premier membre dans cette hypothèse est une quantité indéterminée, si l'on suppose la constante α réelle, mais si l'on fait: $\alpha = a + ib$, nous avons:

$$\cot n(x-\alpha) = i\frac{e^{2n(x-\alpha-ib)i}+1}{e^{2n(x-\alpha-ib)i}-1},$$

qui donne sur le champ $+1$ ou -1 pour limite, suivant que b est positif ou négatif. En désignant donc par (b) une quantité egale à l'unité en valeur absolue, et du signe de b, on a:

$$\int_0^{\pi} \cot(x-a-ib)\,dx = i(b)\pi,$$

et il suffit de remplacer x par $\frac{x}{2}$, puis $a+ib$ par $\frac{a+ib}{2}$, pour en conclure le résultat cherché à savoir:

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{1}{2}(x-a-ib)\,dx = 2i(b)\pi.$$

Je remarquerai enfin que l'expression de cot nx dont j'ai fait usage, résulte de la décomposition de cette quantité en éléments simples. En effet, cette fonction ayant pour période π, et devenant infinie pour les valeurs

$$x = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \dots \frac{(n-1)\pi}{n}$$

on peut faire:

$$\cot n x = \text{const} + \sum_{0}^{n-1}{}_k \, R \cot\left(x - \frac{k\pi}{n}\right).$$

Or on a

$$R = h \cot n\left(\frac{k\pi}{n} + h\right) \text{ pour } h = 0$$

c'est-à-dire $R = \frac{1}{n}$; quant à la constant c'est la demi-somme les valeurs de $\cot n x = i \frac{z^{2n}+1}{z^{2n}-1}$, en faisant $z = e^{ix}$, pour $z = 0$ et $z = \infty$, qu'est nulle. L'équation ainsi obtenue:

$$n \cot n x = \Sigma \cot\left(x - \frac{k\pi}{n}\right)$$

donne celle que j'ai employé en y changeant x en $-x$.

*

SOBRE A AREA LATERAL E VOLUME D'UMA CUNHA CONICA

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

Calcular elementarmente a area lateral e o volume d'uma cunha conica determinada pela intersecção d'um cone de revolução com dois planos, sendo um d'estes perpendicular ao eixo de revolução (*).

Advertencia

1. Tencionavamos, mais tarde, dizer algumas palavras sobre esta questão, por nós proposta, quando publicassemos as nossas observações e estudos sobre as questões propostas n'este jornal, bem como sobre as suas generalisações; mas visto termos de apresentar a sua solução, aproveitaremos a occasião para nos occuparmos tambem d'algumas questões, que têm intima relação com a proposta, e cujo estudo julgamos d'algum valor, estabelecendo para isso, d'um modo geral, os principios, que servem de base á solução pedida.

Representando, pois, por S o vertice do cone, e por (C) e (E) respectivamente as secções recta e obliqua, produzidas n'este pelos planos dados π_c e π_e, é claro que segundo a intersecção I d'estes dois planos fôr uma corda *real* ou *ideal* de (C) ou de (E), assim teremos uma *cunha* ou um *tronco conico*, cuja area e volume tractaremos de calcular, por meio de fórmulas geraes, ou que exprimam não só *as relações de grandeza*, mas tambem *as relações de posição*, que existem entre os elementos da figura considerada.

(*) Questão proposta na pag. 176 do vol. I d'este Jornal.

I

Determinação da area lateral da cunha e do tronco conico

2. Para chegarmos a obter esta area, consideraremos em primeiro logar uma *pyramide regular inscripta* no cone dado: porquanto sabemos que a superficie total do cone, sendo o limite da superficie total da pyramide inscripta, a superficie total da cunha ou do tronco conico será o limite da superficie total da cunha ou do tronco pyramidal inscripto.

Seja $x_0 y_0 y x$ uma das faces da cunha ou do tronco pyramidal, representando $x_0 x$ um dos lados da *base* ou *secção recta* (P_c) da pyramide inscripta, e $y_0 y$ o lado correspondente da sua *secção* (P_e), produzida pelo plano secante π_e.

Projectando *cylindricamente* a pyramide $S(P_c)$ sobre o plano π_c da sua base, tomando para projectante o eixo SC, e representando por (P'_e) e $y'_0 y'$ as projecções da secção (P_e) e do seu lado $y_0 y$, teremos evidentemente

$$\frac{\Delta y_0 S y}{\Delta y'_0 C y'} = \frac{\Delta x_0 S x}{\Delta x_0 C x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Designando por μ o ponto medio do lado $x_0 x$ de (P_c) as rectas $S\mu$ e $C\mu$ serão as alturas dos triangulos isosceles $x_0 S x$ e $x_0 C x$, ou os apothemas da pyramide e da sua base, e portanto será

$$\Delta y_0 S y = \frac{S\mu}{C\mu} \times \Delta y'_0 C y' \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

e por conseguinte

$$\text{quadril. } x_0 y_0 y x = \frac{C\mu \times \Delta x_0 S x - S\mu \times \Delta y'_0 C y'}{C\mu} \ldots (3).$$

Representando, pois, por q qualquer face da cunha ou do tronco pyramidal, por f a face correspondente da pyramide $S(P_c)$, e por j

a projecção da parte g d'esta face, pertencente á pyramide $S(P_e)$; e fazendo $S\mu = h$, $C\mu = h'$, teremos a expressão geral

$$q = \frac{h'.f - h.j}{h'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ou

$$q = f - g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

logo, designando por Q_p a somma das areas das superficies, taes como q, ou a area da superficie lateral da cunha ou do tronco pyramidal, e por F_p e J_p respectivamente as sommas das areas das superficies, taes como f e j, teremos finalmente

$$Q_p = \frac{h'.F_p^2 - h.J_p}{h'} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

ou

$$Q_p = F_p - G_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

onde G_p é a somma das areas das superficies taes como g.

Sejam agora as rectas SA_0 e SA as geratrizes rectas do cone dado situadas no plano π, conduzido pelo eixo SC, perpendicularmente ao plano π_e da secção (E), e B_0 e B os pontos em que esta curva é encontrada respectivamente por aquellas rectas. Então representando por Q_c, F_c, J_c e G_c os limites das superficies Q_p, F_p, J_p e G_p, e fazendo $SA = L$, $CA = R$, teremos

$$Q_c = \frac{R.F_c - L.J_c}{R} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

ou

$$Q_c = F_c - G_c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Taes são as expressões geraes da area da superficie lateral ou convexa Q_c da cunha ou do tronco conico.

§ I

CUNHA CONICA

3. Agora tractaremos de applicar esta fórmula á questão proposta.

N'este caso, a corda I sendo real, representemos por i_0 e i os seus extremos, ou os pontos de intersecção da base (C) do cone dado com a secção obliqua (E); e por m o ponto medio d'esta corda, ou o seu ponto de intersecção com o diametro A_0A.

Caso da secção elliptica

4. Sendo uma ellipse a secção (E), esta terá B_0B para eixo focal, e a projecção n'esta curva será a ellipse (E′), cujo centro representaremos por C_1, sendo um dos seus *fócos* o centro C da base do cone dado, e tendo para eixo focal a recta B'_0B', projecção de B_0B.

Assim (suppondo, por exemplo, que os pontos m e B' se acham entre C e A), se a grandeza Q_c representar a area da superficie lateral da cunha i_0AiB (tendo por bases o segmento circular i_0Ai e o segmento elliptico i_0Bi), as grandezas F_c e J_c representarão respectivamente a parte $S(i_0Ai)$ da superficie conica S(C), e a projecção $Ci_0B'i$ da parte $S(i_0Bi)=G_c$ da superficie conica S(E).

Passemos a exprimir F_c e J_c ou G_c em funcção das grandezas dadas ou conhecidas, e supponhamos que estas são: o raio $CA=R$ da base (C) do cone S(C), a grandeza da geratriz $SA=L$; e as grandezas das geratrizes $SB_0=\lambda_0$ e $SB=\lambda$ do cone S(E) (suppondo ser $\lambda_0>\lambda$).

Se sobre B'_0B', como diametro, descrevermos um semi-circulo B'_0gB', e prolongarmos a corda i_0i até cortar este em g, sabemos que as areas do semi-segmento elliptico $mB'i$ e do semi-segmento circular $mB'g$ estão entre si como as semi-cordas mi e mg, d'onde

$$J_c=2.CB'i=2.\frac{mi}{mg}\times CB'g\ldots\ldots\ (10).$$

As areas do semi-sector circular $C_1B'g$ e do triangulo C_1Cg, tendo por expressões

$$\frac{1}{2}.C_1g\times\widehat{B'g} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}.C_1C\times mg$$

a expressão (10) da area da superficie $CB'g$ póde tomar a fórma

$$\frac{1}{2}(C_1g\times\widehat{B'g}-C_1C\times mg)$$

ou

$$\frac{1}{2}[C_1B'\times\widehat{B'g}-(C_1B'-CB')mg]$$

e por conseguinte teremos

$$J_c=\frac{mi}{mg}[C_1B'\times\widehat{B'g}-(C_1B'-CB')mg]\ldots\ldots (11).$$

Pelo ponto B tire-se a recta BB''_0 parallela a A_0A, e sejam C_0, B_1 e B''_0 os pontos em que esta recta encontra as rectas SC, SA_0 e $B_0B'_0$: então a comparação dos triangulos CA_0S e $B'_0A_0B_0$; e dos triangulos CAS e C_0BS, dará as relações

$$\frac{B'_0C}{A_0C}=\frac{SB_0}{SA_0} \quad \text{e} \quad \frac{CB'}{CA}=\frac{SB}{SA}$$

d'onde

$$C_1B'=\frac{B'_0C+CB'}{2}=\frac{1}{2}.\frac{CA}{SA}(B_0S+SB)\ldots\ldots (12)$$

e portanto

$$B'_0C=\frac{R}{L}.\lambda_0\ldots\ldots\ldots (13), \quad CB'=\frac{R}{L}.\lambda\ldots\ldots\ldots (14)$$

e

$$C_1B'=\frac{1}{2}\frac{R}{L}(\lambda_0+\lambda)\ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

Pela comparação dos triangulos $B_0 A_0 m$ e $B_0 B_1 B$, teremos

$$A_0 m = \frac{S B_0 - S A_0}{S B_0 - S B_1} \times B_1 B \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

ou

$$A_0 m = 2 . \frac{R}{L} . \frac{\lambda_0 - L}{\lambda_0 - \lambda} . \lambda \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

e por conseguinte

$$m A = A_0 A - A_0 m = 2 . \frac{R}{L} . \frac{L - \lambda}{\lambda_0 - \lambda} . \lambda_0 \ldots\ldots \quad (18).$$

Ora é

$$\overline{-mi}^2 = m A \times A_0 m, \text{ ou } m i = \sqrt{m A \times m A_0}$$

logo

$$m i = 2 . \frac{R}{L} . \frac{1}{\lambda_0 - \lambda} \sqrt{\lambda_0 . \lambda (\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \ldots\ldots \quad (19).$$

Similhantemente, pela comparação dos triangulos $B_0 B' m$ e $B_0 B''_0 B$; e dos triangulos $B_0 B'_0 A_0$ e $B_0 B''_0 B_1$, acharemos

$$B'_0 m = \frac{S B_0 - S A_0}{S B_0 - S B_1} \times B'_0 B' \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

ou

$$B'_0 m = \frac{R}{L} . \frac{\lambda_0 + \lambda}{\lambda_0 - \lambda} (\lambda_0 - L) \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

d'onde

$$m B' = B'_0 B' - B'_0 m = \frac{R}{L} . \frac{\lambda_0 + \lambda}{\lambda_0 - \lambda} (L - \lambda) \ldots\ldots \quad (22)$$

e logo

$$m g = \frac{R}{L} . \frac{\lambda_0 + \lambda}{\lambda_0 - \lambda} \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \ldots\ldots \quad (23).$$

Representando por $\frac{1}{2}$B o arco do circulo $B'g$, e por ω o angulo $B'C_1g$, ou a inclinação de C_1g a respeito de C_1B', teremos

$$B=\frac{\omega}{180}\cdot\frac{\lambda_0+\lambda}{L}\cdot\pi\cdot R\ldots\ldots\ldots\ldots\ (24).$$

Para calcular ω podemos recorrer á funcção trigonometrica

$$\operatorname{tg}\omega=2\cdot\frac{\sqrt{(\lambda_0-L)(L-\lambda)}}{\lambda_0+\lambda-2\cdot L}\ldots\ldots\ldots\ (25)$$

ou

$$\operatorname{sen}\omega=\frac{2}{\lambda_0-\lambda}\sqrt{(\lambda_0-L)(L-\lambda)}\ldots\ldots\ (26).$$

Em virtude das expressões achadas, a fórmula (11) tornar-se-á

$$J_c=\frac{R^2}{L^2}\cdot\sqrt{\lambda_0\cdot\lambda}\left[\frac{L}{R}\cdot\frac{B}{2}-\sqrt{(\lambda_0-L)(L-\lambda)}\right]\ldots\ldots\ (27)$$

ou

$$J_c=\frac{R^2}{L^2}\cdot\sqrt{\lambda_0\cdot\lambda}\left[\frac{\omega}{360}\cdot\pi\cdot(\lambda_0+\lambda)-\sqrt{(\lambda_0-L)(L-\lambda)}\right]\ (28)$$

e portanto

$$G_c=\frac{R}{L}\cdot\sqrt{\lambda_0\cdot\lambda}\left[\frac{L}{R}\cdot\frac{B}{2}-\sqrt{(\lambda_0-L)(L-\lambda)}\right]\ldots\ldots\ (29)$$

ou

$$G_c=\frac{R}{L}\cdot\sqrt{\lambda_0\cdot\lambda}\left[\frac{\omega}{360}\cdot\pi\cdot(\lambda_0+\lambda)-\sqrt{(\lambda_0-L)(L-\lambda)}\right](30).$$

Designando por A o arco de circulo $i_0 A i$, e por σ angulo $A C i$, ou a inclinação de $C i$ a respeito de $C A$, será

$$A = \frac{\sigma}{90}\pi . R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

sendo o valor de σ dado pela funcção trignometrica

$$\operatorname{tg}\sigma = 2 . \frac{\sqrt{\lambda_0 . \lambda (\lambda_0 - L)(L - \lambda)}}{2 . \lambda_0 . \lambda - L(\lambda_0 + \lambda)} \ldots\ldots \quad (32)$$

ou

$$\text{sen} . \sigma = 2 . \frac{\sqrt{\lambda_0 . \lambda (\lambda_0 - L)(L - \lambda)}}{L(\lambda_0 - \lambda)} \ldots\ldots \quad (33).$$

Assim teremos

$$F_c = \frac{1}{2} . L . A = \frac{\sigma}{180} . L . \pi R \ldots\ldots\ldots \quad (34).$$

Substituindo os valores de F_c, J_c e G_c nas fórmulas (8) e (9), vem

$$Q_c = \frac{1}{2} . L . A - \frac{R}{L} . \sqrt{\lambda_0 . \lambda}\left[\frac{L}{R} . \frac{B}{2} - \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)}\right] \quad (35)$$

ou

$$Q_c = \frac{R}{L}\left[\frac{\sigma}{180}\pi . L^2 - \sqrt{\lambda_0 . \lambda}\left(\frac{\omega}{360}\pi(\lambda_0 + \lambda) - \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)}\right)\right] \quad (36).$$

Taes são as fórmulas que exprimem a area lateral da cunha $i_0 A i B$ situada acima da secção recta (C), ou da cunha $i_0 A_0 i B_0$ situada abaixo d'esta secção, segundo fôr $F_c >$ ou $< G_c$.

Se em relação á segunda cunha conica contarmos as inclinações de $C_1 g$ e $C i$, a partir dos segmentos $C_1 B'_0$ e $C A_0$, no sentido opposto ao das inclinações relativas á primeira, as grandezas F_c e G_c, virão affectas do signal —, de modo que tornando os signaes explicitos nas fórmulas geraes (35) e (36), teremos

$$Q_c = \pm \frac{1}{2} . L . A \mp \frac{R}{L} \left[\frac{L}{R} . \frac{B}{2} \mp \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \right] \, .. \quad (37)$$

e

$$Q_c = \pm \frac{R}{L} \left[\frac{\sigma}{180} \pi . L^2 - \sqrt{\lambda_0 . \lambda} \left(\frac{\omega}{360} \pi (\lambda_0 + \lambda) \mp \sqrt{(\lambda_0 - L)(L - \lambda)} \right) \right] \quad (38)$$

ou [form. (33)]

$$Q_c = \pm \frac{R}{L} \left[\frac{\sigma}{180} \pi . L^2 - \sqrt{\lambda_0 . \lambda} \left(\frac{\omega}{360} \pi (\lambda_0 + \lambda) \mp \frac{L(\lambda_0 - \lambda)}{2\sqrt{\lambda_0 . \lambda}} . \text{sen.} \, \sigma \right) \right] \quad (39).$$

(Continúa).

QUESTÃO PROPOSTA N.º 13

***Determinar o vertice commum de dois triangulos symetricamente similhantes, de bases dadas* A D *e* B C.**

A. SCHIAPPA MONTEIRO.

SOBRE A EQUAÇÃO DE SEGUNDO GRAU

POR

L. F. Marrecas Ferreira

A equação geral de segundo grau póde-se escrever:

$$+w^2=\pm pw\pm q;$$

ou:

$$1=\pm\frac{p}{w}\pm\frac{q}{w^2}.$$

Esta equação comprehendida na fórmula:

$$1=\pm\frac{x}{t}\pm\frac{y}{t'},$$

é a d'uma recta, que passa por um dos pontos $(\pm p, \pm q)$, tendo os traços sobre os dois eixos coordenados a distancias w e w^2 da origem.

É claro que podemos abstrahir n'estas considerações da unidade linear, indispensavel na construcção geometrica.

Fazendo $t'=t^2$ e desdobrando aquella fórmula nas duas seguintes:

$$1=+\frac{y}{t^2}\pm\frac{x}{t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

$$1=-\frac{y}{t^2}\pm\frac{x}{t}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

derivem-se estas em ordem a t, para determinar os envolucros das rectas que representam; obtem-se:

$$t = \pm \frac{2y}{x},$$

sendo em (a) o signal de $\frac{2y}{x}$ contrario ao de $\frac{x}{t}$ e em (b) os dois signaes iguaes.

O envolucro de (a) é uma parabola de segundo grau, tendo o eixo dirigido no sentido dos YY negativos, dada por $x^2 = -4y$; o de (b) é uma curva identica, de eixo dirigido segundo os YY positivos, dada por $x^2 = +4y$.

Os dois logares geometricos são tangentes ao eixo dos XX na origem das coordenadas, podendo ser estas obliquas ou orthogonaes, coincidindo os eixos das parabolas com o dos YY no caso de coordenadas orthogonaes, tendo direcções parallelas e symetricas com a d'aquelle eixo no outro caso.

Resolver uma equação de segundo grau, corresponde portanto a tirar por um ponto exterior a uma parabola as duas tangentes; as distancias á origem dos seus traços sobre um dos eixos representam as duas raizes; no outro eixo obtem-se os quadrados d'estas. A resolução é um problema geometrico, que requer apenas o emprego da regra e compasso.

Reciprocamente, tirar uma tangente a uma parabola corresponde a resolver uma equação de segundo grau, em que os parametros exprimem as coordenadas do ponto dado, em relação a um systema de eixos, formado por uma tangente e diametro conjugado, tomando-se por unidade linear o quarto do parametro da parabola.

Supponhamos que as coordenadas do ponto de passagem das tangentes são ambas positivas: $(+p, +q)$, applicando-se um raciocinio identico a qualquer variação de signaes, ha a considerar n'esta situação do ponto tres posições distinctas para as tangentes, sendo em todas ellas as distancias á origem dos traços sobre o eixo dos YY os quadrados das respectivas raizes.

Vê-se assim, que os signaes dos termos nos segundos membros podem provir, não só da posição do ponto de passagem, como tambem de t e t^2; assim para a posição de M e numeração indicada pela fig. 4.ª, est. 3.ª, teremos:

1.ª tangente $$\frac{+y}{+t^2}+\frac{+x}{+t}=1$$

2.ª tangente $$\frac{+y}{-t^2}+\frac{+x}{+t}=1$$

3.ª tangente $$\frac{+y}{+t^2}+\frac{+x}{-t}=1.$$

A 1.ª e 3.ª correspondem á parabola de eixo dirigido segundo os YY negativos; a 2.ª á outra. Trocando y em x nas fórmulas, obteriamos os quadrados das raizes sobre o eixo dos XX.

A todos os pontos da tangente á parabola corresponde uma raiz commum, variando a segunda raiz d'um ponto para outro, resultado que se obtem directamente pela analyse da equação de segundo grau; os parametros correspondentes a uma raiz commum variam segundo as coordenadas d'uma recta. Os coefficientes da equação ficam definidas logo que sejam dadas duas raizes, porque o ponto (p, q) corresponde á intersecção de duas rectas.

Duas parabolas, que admittem a mesma tangente, de eixos parallelos, admittem igualmente um diametro commum, e sendo os parametros iguaes, as coordenadas d'um ponto comprehendido entre as duas curvas, èm relação á tangente e diametros communs, constituem os coefficientes d'uma equação de segundo grau, cujas raizes podem ser fornecidas por qualquer das parabolas; segue-se portanto que as quatro tangentes, que do ponto se podem tirar, determinarão traços sobre os eixos situados, dois a dois, a distancias iguaes da origem, que é o ponto de tangencia das curvas.

Dado o ponto sobre a tangente commum, se por elle tirarmos as duas tangentes restantes ás parabolas, devem ellas produzir sobre o diametro conjugado traços situados a iguaes distancias da orig m.

Varios outros processos geometricos levam ainda á construcção das raizes:

a) $x(x \pm p) = +q$ corresponde á intersecção da hyperbole $xy = q$ com a recta $y = x \pm p$.

b) Conhecida a somma ou differença das quantidades x e $x \pm p$, bem como o seu producto, podemos determinal-as, interceptando uma hyperbole por uma ellipse, ou hyperbole.

c) Podemos fazer a determinação, baseados na propriedade da ordenada d'um ponto da circumferencia em relação a um dos diametros, quando fôr dada a somma, e no valor d'um catheto do triangulo rectangulo, expresso na hypothenusa e sua projecção sobre ella, sendo conhecida a differença.

d) A equação escripta d'este modo: $x^2 \pm px = qu$, sendo u a unidade linear, exprime uma equivalencia de areas, e reduz-se a sua resolução a interceptar uma hyperbole por uma recta, como indica a fig. 5.ª, em que se tomou $AB = p$, perpendicular a $AC = \frac{qu}{p}$; sendo $x\ (x+p) = q$ devemos ter: $\alpha\gamma \times \alpha C = DC \times DB = qu$.

Construa-se AT, lado do quadrado equivalente a BC; $At = AT$; levante-se $tO = \frac{1}{2} AB$, perpendicular a AB, tire-se AO, teremos finalmente: $Ar = AC = \alpha$; $As = A\gamma = \alpha C$ e as coordenadas de α serão as raizes.

$B\alpha$ é perpendicular á bissetriz dos eixos orthogonaes, assymptotas da hyperbole, que ella intercepta em α e no ponto symetrico d'este em relação ao eixo imaginario.

A interpretação (*d*) dá logar a varias construcções, reduzindo-se todas á intersecção d'aquelles dois logares geometricos.

e) A equação sob a fórma: $x^2 u \pm px = q$, corresponde á somma ou differença de duas rectas.

SOBRE A AREA LATERAL E VOLUME D'UMA CUNHA CONICA

POR

ALFREDO SCHIAPPA MONTEIRO

(Continuação)

5. *Discussão.* — Quando o plano π_e passar pelo centro C da base do cone dado, ou fôr $\sigma = \pm 90°$, a fórmula (32) dá

$$2.\lambda_0.\lambda - L(\lambda_0 + \lambda) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

d'onde

$$\lambda_0 = \frac{L.\lambda}{2.\lambda - L} \text{ ou } \lambda = \frac{L.\lambda_0}{2.\lambda_0 - L}.$$

Substituindo λ_0, por exemplo, pelo seu valor, nas expressões de ω, B, J_c, G_c, A, F_c e Q_c, teremos

$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\sqrt{L(2.\lambda - L)}}{L - \lambda} \ldots\ldots\ldots\ldots (25)'$$

$$\operatorname{sen}\omega' = \frac{\sqrt{L(2.\lambda - L)}}{\lambda} \ldots\ldots\ldots\ldots (26)'$$

$$B' = \frac{\omega'}{90} \cdot \frac{\lambda^2}{L(2.\lambda - L)} \pi.R \ldots\ldots\ldots\ldots (24)'$$

$$J'_c = \frac{R^2}{L^2}.\lambda\sqrt{\frac{L}{2.\lambda - L}}\left[\frac{L}{R}.\frac{B'}{2} - (L-\lambda)\sqrt{\frac{L}{2.\lambda - L}}\right] \quad (27)'$$

ou

$$J'_c = \frac{R^2}{L^2}.\lambda.\frac{\sqrt{L}}{2.\lambda - L}\left[\frac{\omega'}{180}.\frac{\pi.\lambda^2}{\sqrt{2.\lambda - L}} - (L-\lambda)\sqrt{L}\right] .. \quad (28)'$$

$$G'_c = \frac{R}{L}.\lambda.\frac{\sqrt{L}}{2.\lambda - L}\left[\frac{\omega'}{180}.\frac{\pi.\lambda^2}{\sqrt{2.\lambda - L}} - (L-\lambda)\sqrt{L}\right] .. \quad (30)'$$

$$A' = \pi.R. \dots \dots \dots \dots \quad (31)$$

$$F'_c = \frac{1}{2}L.\pi R. \dots \dots \dots \dots \quad (34)'$$

e por conseguinte

$$Q'_c = \frac{R}{L}\left[\frac{\pi.L^2}{2} - \lambda.\frac{\sqrt{L}}{2.\lambda - L}\left(\frac{\omega'}{180}.\frac{\pi.\lambda^2}{\sqrt{2.\lambda - L}} - (L-\lambda)\sqrt{L}\right)\right] \quad (36)'$$

ou (tornando explicitos os signaes de σ' e ω')

$$Q'_c = \pm\frac{R}{L}\left[\frac{\pi.L^2}{2} - \lambda.\frac{\sqrt{L}}{2.\lambda - L}\left(\frac{\omega'}{180}.\frac{\pi.\lambda^2}{\sqrt{2.\lambda - L}} \mp (C-\lambda)\sqrt{L}\right)\right] \quad (38)'.$$

Consideremos ainda o caso de ser o plano π_e tangente á secção recta (C) n'um dos extremos do diametro $A_0\,A$.

Quando o plano π_e fôr tangente em A_0, será $\sigma = \omega = +180^\circ$ ou $\lambda_0 = L$, d'onde

$$B'' = \frac{L+\lambda}{L}.\pi.R \dots \dots \dots \dots \quad (24)''$$

$$J''_c = R.\sqrt{\frac{\lambda}{L}}.\frac{B''}{2} \dots \dots \dots \dots \quad (27)''$$

ou

$$J''_c = \frac{1}{2}\frac{R}{L}(L+\lambda)\sqrt{\frac{\lambda}{L}}.\pi.R \ldots\ldots \quad (28)''$$

$$G''_c = \frac{1}{2}(L+\lambda)\sqrt{\frac{\lambda}{L}}.\pi.R \ldots\ldots \quad (30)''$$

$$A'' = 2.\pi.R \ldots\ldots \quad (31)''$$

$$F''_c = L.\pi.R \ldots\ldots \quad (34)''$$

e logo

$$Q''_c = \left[L - \frac{1}{2}(L+\lambda)\sqrt{\frac{\lambda}{L}}\right]\pi.R \ldots\ldots \quad (36)''.$$

Se o plano π_e é tangente em A, será $\sigma = \omega = -180^\circ$, ou $\lambda = L$, d'onde

$$B''' = -\frac{\lambda_0 + L}{L}\pi.R \ldots\ldots \quad (24)'''$$

$$J'''_c = -R\sqrt{\frac{\lambda_0}{L}}\frac{B'''}{2} \ldots\ldots \quad (27)'''$$

ou

$$J'''_c = -\frac{1}{2}.\frac{R}{L}(\lambda_0 + L)\sqrt{\frac{\lambda_0}{L}}.\pi.R \ldots\ldots \quad (28)'''$$

$$G'''_c = -\frac{1}{2}(\lambda_0 + L)\sqrt{\frac{\lambda_0}{L}}.\pi.R \ldots\ldots \quad (30)'''$$

$$A''' = -2.\pi.R \ldots\ldots \quad (31)'''$$

$$F'''_c = -L.\pi.R \ldots\ldots \quad (34)'''$$

e logo

$$Q'''_c = -\left[L - \frac{1}{2}(\lambda_0 + L)\sqrt{\frac{\lambda_0}{L}}\right]\pi.R \ldots \quad (36)'''.$$

*

Caso da secção parabolica

6. Sendo o plano secante π_e parallelo a alguma das duas geratrizes SA_0 e SA, sabemos que a secção (E) e a sua projecção (E'), que agora representaremos por (E_∞) e (E'_∞), são parabolas, tendo esta ultima para fóco o centro C da base do cone dado.

Para mais clareza nas referencias, que fizermos a estas figuras, que vamos considerando, representaremos por (f_1) a figura que se refere ao caso geral (n.° 2), e por (f_2) e (f_3) as que se referem á cunha no caso da secção elliptica (n.° 4), e a este caso que passamos a considerar, etc.

Supponhamos, pois, que o plano π_e é parallelo á geratriz SA_0, ou que é $\lambda_0 = \infty$. N'este caso os pontos B_0, B'_0, C_1 e g (fig. f_2), passarão a achar-se a distancia infinita, e os pontos B e B' (fig. f_3) serão os vertices das parabolas (E_∞) e (E'_∞) sendo agora $mB' = \frac{1}{2} mA$, por ser isosceles o triangulo mBA.

Consideremos o lado $y'_0 y'$ do polygono P'_e inscripto na parabola (E'_∞), á qual tiraremos nos vertices y_0 e y' d'este, as tangentes $y'_0 t_0$ e $y' t$, que se cortam em θ_0, encontrando o eixo $B'm$ em t_0 e t. Parallelamente a este eixo conduziremos pelo ponto θ_0 a recta $\theta_0 \theta$, que passará pelo meio μ'_0 da corda $y'_0 y$ (o que, como sabemos, tambem se demonstra elementarmente). Emfim, dos pontos y'_0, y' e μ'_0 baixemos sobre este eixo as perpendiculares $y'_0 y''$, $y' y''$ e $\mu'_0 \mu''_0$, que respectivamente o encontram em y'_0, y' e μ''_0. Agora comparemos o trapezio $y'_0 y''_0 y'' y'$ com o triangulo correspondente $\theta_0 t_0 t$. Ora temos que é

$$B' t_0 = y''_0 B' \text{ e } B' t = y'' B'$$

d'onde

$$t t_0 = y''_0 y'';$$

e sendo a recta $\mu'_0 \mu''_0$, que une os meios dos lados não parallelos do trapezio, egual á altura do triangulo, será a área do trapezio o dobro da do triangulo. Para os outros lados da parte do polygono P'_e, inscripto no semi-segmento parabolico $mB'i$, teremos outros tantos trapezios, com os seus triangulos correspondentes, e como se póde repetir o mesmo raciocinio, que fizemos anteriormente, teremos que a somma das áreas dos trapezios fica sempre egual ao dobro da somma das áreas dos triangulos.

Em vista d'isto, a tangente iT, no ponto i cortando o eixo B'm em T, teremos que o limite da primeira somma será a área do semi-segmento mB'i, e o limite da segunda a área Tiy'_0y'...B': d'onde resulta ser a área mB'i egual a dois terços da área do triangulo total iTm, logo

$$mB'i = \frac{2}{3}.mi \times mB'$$

ou

$$i_0B'i = \frac{3}{4}.mi \times mB' \dots\dots\dots\dots (41)$$

e portanto

$$Ci_0B'i = \frac{4}{3}.mi \times mB' + mi \times Cm$$

ou

$$J_{c_\infty} = \frac{1}{3}.mi(4.mB' + 3.Cm) \dots\dots\dots (42)$$

devendo attender-se aos signaes dos segmentos mB' e Cm.

Fazendo-se $\lambda_0 = \infty$, nas fórmulas relativas á secção elliptica (n.º 4) (que não se tornam infinitas para este valor de λ_0), teremos

$$CB' = \frac{R}{L}.\lambda \dots\dots (14)_\infty, \quad A_0 m = 2.\frac{R}{L}.\lambda \dots\dots (17)_\infty,$$

$$mA = 2\frac{R}{L}(L-\lambda) \dots\dots\dots\dots (18)_\infty,$$

$$mi = 2.\frac{R}{L}\sqrt{\lambda(L-\lambda)} \dots (19)_\infty, \quad mB' = \frac{R}{L}(L-\lambda) \dots (22)_\infty,$$

$$A_\infty = \frac{\sigma_\infty}{90}\pi.R \dots\dots (31)_\infty, \quad \operatorname{tg}\sigma_\infty = 2\frac{\sqrt{\lambda(L-\lambda)}}{2.\lambda - L} \dots\dots (32)_\infty,$$

$$\operatorname{sen}\sigma_\infty = 2.\frac{\sqrt{\lambda(L-\lambda)}}{L} \dots\dots\dots\dots (33)_\infty,$$

$$F_{c_\infty} = \frac{1}{2}.L.A_\infty = \frac{\sigma_\infty}{180}.L.\pi R \dots\dots (34)_\infty,$$

e portanto

$$Cm = \frac{m\,i}{\operatorname{tg}\sigma_\infty} = \frac{R}{L}(2.\lambda - L) \ldots\ldots\ldots (43)$$

ou

$$Cm = CA - mA = CB' - mB' = \frac{R}{L}(2.\lambda - L) \ldots (44).$$

Substituindo na fórmula (42) os valores de $m\,i$, $m\,B'$ e $C\,m$, teremos

$$J_{c_\infty} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^2}{L^2}(2.\lambda + L)\sqrt{\lambda(L-\lambda)} \ldots\ldots\ldots (45)$$

e acharemos egualmente

$$G_{c_\infty} = \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{L}(2.\lambda + L)\sqrt{\lambda(L-\lambda)} \ldots\ldots\ldots (46)$$

logo

$$Q_{c_\infty} = \frac{1}{2}.L.A_\infty - \frac{2}{3} \cdot \frac{R}{L}(2.\lambda + L)\sqrt{\lambda(L-\lambda)} \ldots (47)$$

ou

$$Q_{c_\infty} = \left[\frac{\sigma_\infty}{180} \cdot \pi L^2 - \frac{2}{3}(2.\lambda + L)\sqrt{\lambda(L-\lambda)}\right] \ldots (48).$$

Observação. — Como sabemos, estas fórmulas podem-se obter directamente partindo da fig. *f*3.

7. *Caso particular.* — Quando o plano secante π_c passar pelo centro C da base do cone, ou fôr $\sigma_\infty = +90°$, a fórmula $(32)_\infty$ dá

$$\lambda = \frac{1}{2}.L$$

d'onde

$$CB' = mB' = \frac{1}{2}.R, \quad A_0\,m = mA = m\,i = R, \quad Cm = 0,$$

$$A'_\infty = \pi R, \quad F_{c_\infty} = \frac{1}{2}.L.\pi R, \quad J'_{c_\infty} = \frac{2}{3}.R^2, \quad G'_{c_\infty} = L.R$$

e por conseguinte

$$Q'_{c_\infty}=\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{3}\right)L.R.\dots\dots\dots (48)'.$$

8. *Observação.* — Não trataremos do caso de ser $\lambda=\infty$, ou de ser o plano secante π_e parallelo á geratriz SA, por chegarmos a resultados perfeitamente identicos.

Caso da secção hyperbolica

9. Consideremos o caso da secção (E) e da sua projecção (E′) (fig. f_2) serem hyperboles, que agora designaremos por $({}^{\infty}E_{\infty})$ e $({}^{\infty}E'_{\infty})$ (fig. f_4), e é claro que um dos fócos d'esta ultima hyperbole será o centro C da base (C) do cone dado.

O plano π_e encontrará então ou o prolongamento da geratriz SA_0, ou o da geratriz SA: o que corresponde a suppor respectivamente negativo o valor de λ_0 ou de λ.

Supponhamos, pois, que o plano secante corta o prolongamento de SA_0. Então (como no caso da secção parabolica) considerando a fig. f_4 como a transformada da fig. f_2, relativa ao caso da secção elliptica, para esta nova posição do plano π_e, é evidente que o ponto B ficará entre S e A, e o ponto B_0 no prolongamento de SA_0, ou será $SB_0=-\lambda_0$ e $SB=+\lambda$; e os pontos B_0 e B da curva $({}^{\infty}E_{\infty})$, e os pontos B'_0 e B' da curva $({}^{\infty}E'_{\infty})$ serão os seus vertices.

Assim se pozermos $-\lambda_0$ em logar de $+\lambda_0$ nas fórmulas relativas á secção elliptica (n.º 4) (que não se tornam imaginarias para este valor de λ_0) teremos

$$B'_0C=-\frac{R}{L}.\lambda_0\dots\ {}^{\infty}(13)_{\infty},\quad CB'=\frac{R}{L}.\lambda\dots\ {}^{\infty}(14)_{\infty},$$

$$C_1B'=-\frac{1}{2}.\frac{R}{L}(\lambda_0-\lambda)\dots\dots\ {}^{\infty}(15)_{\infty},$$

$$A_0m=2.\frac{R}{L}.\frac{\lambda_0+L}{\lambda_0+\lambda}.\lambda\dots\dots\dots\ {}^{\infty}(17)_{\infty},$$

e por consequinte, das formulas de transformação

$$mA = 2 . \frac{R}{L} . \frac{L - \lambda}{\lambda_0 + \lambda} . \lambda_0 \ldots\ldots\ldots {}^{\infty}(18)_{\infty},$$

$$mi = 2 . \frac{R}{L} . \frac{1}{\lambda_0 + \lambda} \sqrt{\lambda_0 \lambda (\lambda_0 + L)(L - \lambda)} \ldots\ldots {}^{\infty}(19)_{\infty},$$

$$B'_0\, m = -\frac{R}{L} . \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 + \lambda} (\lambda_0 + L) \ldots\ldots {}^{\infty}(21)_{\infty},$$

$$mB' = \frac{R}{L} . \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 + \lambda} (L - \lambda) \ldots\ldots {}^{\infty}(22)_{\infty},$$

$$mg = \frac{R}{L} . \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 + \lambda} \sqrt{(\lambda_0 + L)(L - \lambda)} \ldots\ldots {}^{\infty}(23)_{\infty},$$

$${}^{\infty}A_{\infty} = \frac{{}^{\infty}\sigma_{\infty}}{180} . \pi R \ldots\ldots\ldots {}^{\infty}(31)_{\infty},$$

$$\operatorname{tg} {}^{\infty}\sigma_{\infty} = 2 . \frac{\sqrt{\lambda_0 . \lambda (\lambda_0 + L)(L - \lambda)}}{2 . \lambda_0 . \lambda - L(\lambda_0 - \lambda)} \ldots\ldots {}^{\infty}(32)_{\infty},$$

$$\operatorname{sen} {}^{\infty}\sigma_{\infty} = 2 . \frac{\sqrt{\lambda_0 . \lambda (\lambda_0 + L)(L - \lambda)}}{L(\lambda_0 + \lambda)} \ldots {}^{\infty}(33)_{\infty},$$

$${}^{\infty}F_{c_{\infty}} = \frac{1}{2} . L . {}^{\infty}A_{\infty} = \frac{{}^{\infty}\sigma_{\infty}}{180} . L . \pi R \ldots\ldots {}^{\infty}(34)_{\infty}.$$

Achando-se o ponto medio m da corda I ou $i_0\, i$ entre C e A, é claro que segundo o angulo $A\, m\, B_0$, comprehendido entre os angulos $A\, A_0\, S$ e $A\, m\, S$, fôr menor, egual ou maior do que 90°, assim teremos respectivamente λ_0 maior, egual ou menor do que λ.

Quando o referido angulo $A\, m\, B_0$, que designaremos por θ, variar entre o angulo $A_0\, m\, S$ e o angulo $A_0\, A\, S$, o segmento λ será sempre maior do que λ_0 e tornar-se-á negativo.

Em vista, pois, das variações da inclinação θ do plano π_s a respeito do plano π_c da base (C) do cone dado, os segmentos, angulos e linhas trigonometricas tomarão os devidos signaes, e as fórmulas que acabamos de obter,. e que poderiamos tambem deduzir directamente da fig. f_4, confirmarão mais uma vez a generalidade das fórmulas que deduzimos para nos servirem de base em todo este nosso estudo.

Agora passaremos a occuparmo-nos sómente do caso particular de ser $\theta = 90°$, para não deixarmos de tractar sempre elementarmente todos os pontos d'este estudo.

Com effeito, para determinar a área da superficie lateral da cunha (analogamente ao que fizemos no caso da secção elliptica), teriamos de descrever sobre $B'B'_0$, como *eixo focal uma hyperbole equilatera*, que cortaria a corda I ou $i_0 i$ nos pontos g' e g, e calcular a área do sector hyperbolico $C_1 g' B' g$. Depois de conhecida esta area, é que poderiamos obter a área do sector hyperbolico $C_1 i_0 B' i$ da hyperbole $({}^{\infty}E'_{\infty})$, d'onde deduziriamos a área de $C i_0 B' i$ ou ${}^{\infty}J_{c_{\infty}}$, e portanto a área ${}^{\infty}G_{c_{\infty}}$ da parte $S i_0 B i$ da superficie conica $S(C)$; e assim chegariamos á expressão da área lateral pedida ${}^{\infty}Q_{c_{\infty}}$.

10. *Caso particular.*—Sendo, pois, $\theta = 90°$, ${}^{\infty}J_{c_{\infty}}$ representará simplesmente a área do triangulo $i_0 C i$, e teremos

$${}^{\infty}J'_{c_{\infty}} = \frac{1}{2} . m i \times C m$$

ou

$${}^{\infty}G'_{c_{\infty}} = \frac{1}{2} . \frac{L}{R} \times m i \times C m.$$

Ora se nas fórmulas anteriormente obtidas fizermos $\lambda_0 = \lambda$, acharemos

$$B'_0 C = -\frac{R}{L} . \lambda, \quad C B' = \frac{R}{L} . \lambda, \quad C_1 B' = 0, \quad A_0 m = \frac{R}{L}(L + \lambda),$$

$$m A = \frac{R}{L}(L - \lambda), \quad m i = \frac{R}{L}\sqrt{L^2 - \lambda^2}, \quad B'_0 m = 0, \quad m B' = 0,$$

$$m g = 0, \quad \operatorname{tg}{}^{\infty}\sigma'_{\infty} = \frac{\sqrt{L^2 - \lambda^2}}{\lambda}, \quad \operatorname{sen}{}^{\infty}\sigma'_{\infty} = \frac{\sqrt{L^2 - \lambda^2}}{L},$$

logo

$$^{\infty}Q'_{c_\infty}=\frac{1}{2}[L.\,^{\infty}A'_\infty-\lambda\sqrt{L^2-\lambda^2}]\ldots\ldots (49)$$

ou

$$^{\infty}Q'_{c_\infty}=\frac{R}{L}\left[\frac{^{\infty}\sigma_\infty}{180}\pi.L^2-\frac{\lambda}{2}\sqrt{L^2-\lambda^2}\right]\ldots\ldots (50).$$

§ II

TRONCO CONICO

11. Para determinar a área pedida empregaremos tanto o *methodo directo* como o *indirecto*, por nos parecerem ambos dignos de se estudarem em especial.

Methodo directo. — Se suppozermos que o plano secante π_e, relativo ao caso da secção elliptica (n.° 4) (fig. f_2), se desloca de modo que a sua intersecção I com o plano π_c se torna *corda* ou *secante ideal* da secção recta (C), ou da secção obliqua (E), teremos a fig. f_5 relativa ao caso do tronco conico, de que nos vamos occupar.

Representemos por D_0D o diametro da base ou secção recta (C) do cone dado, conduzido perpendicularmente ao diametro A_0A; por E_0E e E'_0E os eixos menores da secção elliptica (E) e da sua projecção (E'); por M_1 o centro de (E), e por M o ponto de intersecção de B_0B com o eixo SC do cone.

Em vista d'isto teremos evidentemente

$$J_c=\pi C_1E'\times C_1B'\ldots\ldots\ldots\ldots (51).$$

Para calcular C_1E' imaginaremos a secção recta (C_{m_1}) determinada pelo plano π_{m_1}, conduzido pelo eixo menor (E_0E) da secção (E), e que corta as geratrizes rectas SA_0, SA e o eixo SC do cone nos pontos N_0, N e M_0.

A projecção da secção recta (C_{m_1}) será, pois, o circulo $N'_0E'_0N'E'$, que designaremos por (C'_{m_1}), que terá tambem para corda o eixo menor $E'_0 E'$ d'esta ellipse: por quanto $B'_0 C$ e CB' são as projecções, em verdadeira grandeza, dos raios das secções rectas (C_{b_0}) e (C_b) conduzidas pelas vertices B_0 e B da ellipse (E); e a somma d'estes raios é evidentemente egual ao diametro $N_0 N = N'_0 N'$ da secção recta (C_{m_1}) equidistante das duas outras (C_{b_0}) e (C_b).

Assim teremos

$$-\overline{C_1 E'}^2 = N'_0 C_1 \times C_1 N' \dots\dots\dots\dots (52)$$

e como é

$$N' C_1 = CB' \text{ e } C_1 N' = B'_0 C$$

será

$$C_1 E' = \sqrt{CB'_0 \times CB'} \dots\dots\dots\dots (53)$$

e portanto

$$J_c = \pi \times C_1 B' \sqrt{CB'_0 \times CB'} \dots\dots\dots (54).$$

Ora as expressões d'estes segmentos sendo evidentemente dados tambem pelas fórmulas (13), (14) e (15), que deduzimos para a cunha conica no caso da secção elliptica (n.° 4), teremos

$$J_c = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} (\lambda_0 + \lambda) \sqrt{\lambda_0 . \lambda} \ (*) \dots\dots\dots (55)$$

(*) Ainda podemos calcular a área J_c da superficie da ellipse (E') (fig. f_5) empregando o mesmo meio de que nos servimos para a cunha conica (no caso da secção elliptica n.° 4), isto é, recorrendo á relação entre as semi-cordas mi e mg (fig. f_2), relativas a esta ellipse (E') e ao circulo descripto sobre o seu eixo $B'_0 B'$ como diametro; muito embora sejam agora ideaes estas semi-cordas: por serem os segmentos λ_0 e λ menores ou maiores do que L, ou negativos.

Assim teremos

$$J_c = \frac{mi}{mg} \pi \overline{C_1 B'}^2$$

mas [n.° 4, fórmulas (15), (19) e (23)] é

$$C_1 B' = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} (\lambda_0 + \lambda) \quad \text{e} \quad \frac{mi}{mg} = 2 . \frac{\sqrt{\lambda_0 . \lambda}}{\lambda_0 + \lambda}$$

logo

$$J_c = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} (\lambda_0 + \lambda) \sqrt{\lambda_0 . \lambda}$$

q. e. d.

ou

$$J_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \sqrt{\lambda_0 . \lambda} . \pi R \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

$$G_c = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \sqrt{\lambda_0 . \lambda} . \pi R \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

$$F_c = L . \pi . R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

e portanto

$$Q_c = [L - \frac{1}{2} . \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \sqrt{\lambda_0 . \lambda}] \pi R \ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

ou, tornando explicitos os signaes de F_c e G_c

$$Q_c = \pm [L - \frac{1}{2} . \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \sqrt{\lambda_0 . \lambda}] \pi R \ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

por quanto os factores $\pi . R$ e $\frac{1}{2} . \frac{\lambda_0 + \lambda}{L} \pi R$ de F_c e G_c obtêm-se fazendo $\sigma = \omega = \pm 90°$, nas fórmulas (24) e (31), relativas á cunha conica (no caso da secção elliptica), e por conseguinte adoptar-se-á o signal superior ou inferior, segundo forem os segmentos λ_0 e λ menores ou maiores do que o segmento L, isto é, conforme a secçãe elliptica (E) ficar acima ou abaixo do plano π_c da base (C) do cone dado.

Quando o plano π_e cortar a segunda *folha* do cone, ou a secção elliptica (E) estiver acima do vertice S d'este cone, ainda a fórmula geral (59) satisfaz: porque então os segmentos λ_0 e λ serão negativos, e tornando os signaes explicitos em relação a todos os casos, teremos

$$Q_c = \pm [L - \frac{\pm(\lambda_0 + \lambda)}{2 . L} \sqrt{\lambda_0 . \lambda}] \pi . R \ldots\ldots \quad (61).$$

Methodo indirecto. — Se ne fórmula (39) [correspondente ao caso da secção elliptica (n.° 4)] fizermos $\sigma = \omega = \pm 180°$, teremos immediatamente a fórmula (60) relativa ao tronco conico, considerado como caso particular da cunha conica (*): por quanto esta transformação da fórmula (39) equivale a suppor que o plano secante π_e, depois de ser tangente em A_0 ou em A á base (C) do cone dado S (C) (fig. /2) (n.º 5), determinando uma das cunhas, cujas áreas designámos por Q''_c e Q'''_c, se desloca, tornando os segmentos λ_0 e λ menores ou maiores do que o segmento L, ou negativos; d'onde resulta ser então a área θ_c do tronco considerado egual á somma d'uma d'estas áreas e da área d'um tronco determinado pelas duas secções rectas que representam respectivamente a base do referido cone e a d'uma d'estas cunhas.

12. Consideremos agora um tronco de cone de revolução determinado pelas duas secções obliquas (E_1) e (E_2) (fig. /6), tendo para eixos focaes ou maiores ${}^1B_0 B_1$ e ${}^2B_0 B_2$, e tractemos de obter a expressão da área Q_{c_e} da sua superficie convexa.

Fazendo, pois, $S\,{}^1B_0 = + L_0$, $SB_1 = + L$, $S\,{}^2B_0 = \pm \lambda_0$ e $SB_2 = \pm \lambda$, as áreas lateraes dos troncos determinados pela secção recta (C) (correspondente ao segmento L) e por cada uma das duas secções obliquas consideradas, terão respectivamente para expressões

$$[L - \frac{1}{2}.\frac{\pm(\lambda_0 + \lambda)}{L}\sqrt{\lambda_0 . \lambda}]\, \pi R$$

e

$$\left[\frac{1}{2}.\frac{L_0 + L}{L}\sqrt{L_0 . L} - L\right] \pi R$$

(*) Considerando a fórmula (38), é evidente que no caso de ser $\lambda_0 < L$, ou $\lambda > L$, ou serem negativos os segmentos λ_0 e λ; isto é, quando a cunha se transformar em tronco, esta expressão tomará a fórma

$$M \pm N\sqrt{-1} = 0$$

e simplesmente em virtude da theoria das expressões imaginarias acharemos ainda a fórmula (60).

Como sabemos, poderiamos tambem estudar a questão proposta na parte que envolve a consideração das quantidades imaginarias sob o ponto de vista da sua representação nas construcções geometricas; mas não nos occupamos agora d'esse estudo, por alterar a direcção elementar, que temos seguido, e por tencionarmos mais tarde tractar d'estas quantidades, ou, em geral, das quantidades complexas.

d'onde

$$Q_{c_e} = \frac{1}{2.L}[(L_0 + L)\sqrt{L_0.L} \mp (\lambda_0 + \lambda)\sqrt{\lambda_0.\lambda}]\,\pi R \ldots (62).$$

No caso das bases (E_1) e (E_2) serem parallelas, teremos

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{L_0}{L}$$

e logo

$$Q'_{c_e} = \frac{(L_0 + L)(L^2 \mp \lambda^2)}{2.L^2}\sqrt{\frac{L_0}{L}}.\pi R \ldots\ldots (63)$$

ou (considerando separadamente os dois troncos)

$$Q''_{c_e} = \frac{(L_0 + L)(L - \lambda)}{2.L}\sqrt{\frac{L_0}{L}}\pi.\frac{L+\lambda}{L}.R \ldots\ldots (64)$$

e

$$Q'''_{c_e} = \frac{L_0 + L}{2.L}\sqrt{\frac{L_0}{L}}\pi.\frac{L^2 + \lambda^2}{L}.R \ldots\ldots (65).$$

13. *Discussão.* — Fazendo successivamente $\lambda_0 = L$ e $\lambda = L$ na fórmula (60), teremos, como casos particulares, as fórmulas $(36)''$ e $(36)'''$ (relativas á cunha conica na hypothese da secção (E) ser uma ellipse).

Quando fôr $\lambda_0 = \lambda$, as fórmulas (59) e (63) dão

$$Q'_c = Q'_{c_e} = \left(L \mp \frac{\lambda^2}{L}\right)\pi R = \frac{L^2 \mp \lambda^2}{L}\pi R \ldots (66)$$

ou (considerando separadamente os dois troncos)

$$Q''_c = Q''_{c_e} = \frac{L - \lambda}{L}\pi\frac{L+\lambda}{L}.R \ldots\ldots\ldots (67)$$

e

$$Q'''_c = Q'''_{c_e} = \pi \frac{L^2 + \lambda^2}{L} . R \ldots\ldots\ldots \quad (68).$$

São estas, pois, as expressões que correspondem a serem rectas as secções que limitam os troncos das duas *especies*.

Sendo r o raio da segunda base ou secção recta (C_b), teremos

$$\frac{\lambda}{L} = \frac{r}{R}$$

e portanto [fórmula (66)]

$$Q'_c = Q'_{c_e} = \frac{L}{R} \pi (R^2 \mp r^2) \ldots\ldots\ldots \quad (66)'$$

ou

$$Q'_c = Q'_{c_e} = \frac{L \mp \lambda}{R \mp r} \pi (R^2 \mp r^2) \ldots\ldots\ldots \quad (66)''.$$

Considerando separadamente os troncos conicos de *primeira* e de *segunda especie*, teremos

$$Q''_c = Q''_{c_e} = (L - \lambda) \pi (R + r) \ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

ou

$$Q''_c = Q''_{c_e} = (L + \lambda) \pi (R - r) \ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

e

$$Q'''_c = Q''_{c_e} = \frac{L + \lambda}{R + r} \pi (R^2 + r^2) \ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

ou

$$Q'''_c = Q'''_{c_e} = \frac{L - \lambda}{R - r} \pi (R^2 + r^2) \ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

e se representarmos por δ e ε respectivamente os apothemas $(L - \lambda)$

e $(L+\lambda)$ dos dois troncos considerados, ter-se-ão as fórmulas ordinarias

$$Q''_c = \delta\pi(R+r) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)'$$

e

$$Q'''_c = \varepsilon\pi\frac{R^2+r^2}{R+r} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)'.$$

Se fôr dada a semi-abertura $A_0SC=\alpha$ do cone $S(C)$ será tambem

$$Q'_c = \pi(R^2 \mp r^2)\,\mathrm{sen}\,\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66)'''.$$

(Continúa).

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO PROPOSTA N.º 12 (*)

Per dimezzàre la BA, si costruisca la $BE \simeq 2.BA$ (il che si fa descrivendo col centro A il semicircolo BCDE, $BA=BC=CD=DE$), poi sia $BA=BP=BP'=EQ$, $BE=BQ=EP=EP'$, $BA=PM$, $PQ=EM$, sarà $BM \simeq MA$. Se come sopra si costruisce $PR \simeq 2PB$, é anche $RP' = \frac{1}{2}BA = BM = MA$.

Padova, 24—11—79.

G. Bellavitis.

(*) Recebemos tambem uma solução do sr. Alfredo Schiappa Monteiro, que será publicada n'outro numero.