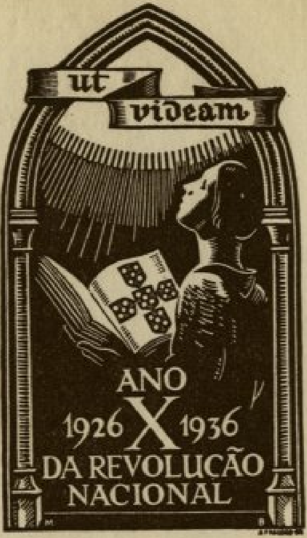
ut videam
ANO
1926 X 1936
DA REVOLUÇÃO
NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

NA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

SUPERFICIES E CURVAS

DE SEGUNDA ORDEM E COM CENTRO

NA

THEORIA MATHEMATICA

DA

ELASTICIDADE DOS CORPOS SOLIDOS

POR

Alfredo Filgueiras da Rocha Peixoto

DOUTOR NA FACULDADE DE MATHEMATICA E BACHAREL FORMADO NA DE PHILOSOPHIA
PELA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

COIMBRA
IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1874

AOS

Illustrissimos e Excellentissimos

VISCONDES

DA

TORRE DAS DONAS

Meu querido Visconde,

Na ceremonia em que me foi conferido o grão de doutor, tive de V. Ex.ª um abraço de irmão. Creia que, entre as muitas e realmente grandes finezas que lhe devo, é esta a primeira.

Venho agora dar-lhe um testemunho publico da minha gratidão, offerecendo a V. Ex.ª e á sua virtuosissima Esposa este pequeno livro.

Abraça-o com extremoso affecto o seu amigo muito dedicado e grato

A. Peixoto.

INDICE

INTRODUCÇÃO

Dous traços historicos

CAPITULO PRIMEIRO

Equações geraes da elasticidade dos corpos solidos

CAPITULO SEGUNDO

Theoria do ellipsoide de elasticidade

CAPITULO TERCEIRO

Importancia e uso do ellipsoide de elasticidade

Nemo geometriæ ignarus huc ingreditur.

INTRODUCÇÃO

Dous traços historicos

Importancia e difficuldade dos estudos historicos. Archimedes, Galileu e os progressos da mecanica. Lagrange e a sua mecanica analytica. Relações entre a geometria, a mecanica e a physica mathematica.

Uma das feições que mais caracterisam este seculo é o estudo da historia. Em qualquer sciencia é rara hoje a obra cujo methodo, pelo menos, não seja determinado ou apoiado pelo desenvolvimento que a sciencia seguiu, desde os primeiros factos isolados até ás ultimas theorias ligadas e constituidas em doutrina. «O methodo historico «illumina as questões actuaes com o reflexo das antigas» disse, ha pouco, o erudito escriptor da — physica de Voltaire —.

Mas a historia sem a critica philosophica nada vale para a sciencia: é como o calculo material sem o raciocinio, como a palavra solta no espaço sem a idea firme no espirito. Por isso é difficil a missão do verdadeiro historiador, principalmente quando, em cada phase do desenvolvimento da sciencia a que dedica os seus estudos, encontra uma questão transcendente e de critica delicada.

Tão elevadas difficuldades offerece a historia philosophica da mecanica racional. Em qualquer occasião seriam insufficientes para ella os meus recursos; mas, se n'esta dissertação eu tentasse vencel-as, teria de sahir dos limites que me são prescriptos, alterando a natureza legal d'esta obra.

Descreverei então dous traços historicos apenas, não tanto para seguir o espirito scientifico do seculo, como para justificar a escolha do assumpto d'esta dissertação, escolha cuja responsabilidade é inteira e sómente minha, e que devo defender como a doutrina que escrevo, com o amor do pae que protege a pureza da filha.

Foi a estatica — a sciencia do equilibrio — a primeira parte da mecanica racional que veio ao mundo scientifico. Averiguar se este facto foi produzido por um mero acaso ou determinado por uma lei do espirito, se foi um capricho da sorte ou consequencia d'uma regra logica, fôra discutir uma velha questão de methodo, realmente de valor nas abstracções da philosophia, talvez de grande vantagem pratica no ensino da sciencia, mas de pequena importancia para um estudo profundo da mecanica racional, e inteiramente inutil para o assumpto d'esta dissertação.

Para a estatica foi Archimedes o que, passados annos, cerca d'um seculo, foi Hipparco para a astronomia. O sabio heroe de Syracusa, tão sublime pelas concepções com que enriqueceu a sciencia, como admiravel pelas machinas que construiu para a defesa da sua terra, foi o unico que, entre os antigos, deixou uma theoria do equilibrio, no seu livro — *De œquiponderantibus* — ou — *De planorum œquilibriis.* — Fundou a estatica no *principio da alavanca,* principio que estabeleceu com tamanho enthusiasmo, que por elle se comprommettia até a fazer alterar o andamento eterno do mundo. É bem conhecido este feliz pensamento de Archimedes, a quem n'uma outra sciencia, passados seculos, Raspail quiz imitar, «Uma boa definição é metade d'uma demonstração» escreveu Freycinet. A importancia d'esta grande verdade é maior ainda quando se trata de estabelecer uma noção fundamental. Por esta consideração dedico especial cuidado, como faz Lamé, á definição da *força elastica,* para que já expuz os necessarios elementos.

Considere-se uma molecula no interior do solido; e imagine-se: 1.º uma esphera com o centro n'essa molecula e de raio egual ao da actividade molecular, limite da distancia, em que é insensivel a acção mutua das moleculas; 2.º pelo centro d'essa esphera um plano qualquer, que assim a divide em dous hemispherios H e H', pelas regras fataes da geometria; 3.º sobre esse plano e no mesmo centro da esphera um elemento de superficie ϖ extremamente pequeno; 4.º e finalmente n'um dos hemispherios, em H' por exemplo, um cylindro recto muito delgado, cuja base seja ϖ. Por qualquer alteração de forma, as moleculas do hemispherio H exercem acções sobre as moleculas do cylindro; e a resultante de todas estas acções é a *força elastica* exercida por H sobre H' e referida ao elemento ϖ. Esta resultante, que póde ser designada por ϖE, é em geral obliqua ao elemento plano ϖ; sendo-lhe normal, representa uma *tracção* ou uma *pressão,* conforme é dirigida para o hemispherio H ou para o H'; e finalmente, sendo-lhe parallela, tende a fazer mover o cylindro parallelamente ao plano de separação dos hemispherios e sobre esse plano, caso em que se lhe dá o nome de *força elastica tangencial.* Considerando-se agora um cylindro identico no hemispherio H, vê-se que a resultante das acções exercidas sobre as moleculas d'este cylindro pelas do hemispherio H' é a *força elastica* exercida por H' sobre H e referida ao elemento plano ϖ, força que póde ser representada por $\varpi E'$. Estas duas forças têm evidentemente a mesma intensidade e direcções oppostas, estando o corpo em equilibrio de elasticidade, depois d'uma pequena alteração de forma. É claro e elementar que E e E′ representam estas forças elasticas referidas á unidade da superficie.

Lamé considera e define assim a *força elastica*. Cauchy tinha adoptado tambem esta definição; abandonou-a depois como viciosa. A duvida de Cauchy porem, longe de mostrar um vicio, confirma a excellencia d'esta definição.

Parece que assim se introduz na *força elastica* um certo numero de acções estranhas, multiplicando-se umas das que n'ella entram realmente e omittindo-se algumas outras. O abbade Moigno, distincto e dedicado discipulo de Cauchy, para apresentar bem clara esta duvida, considera o exemplo d'um parallelipipedo rectangulo. N'este caso, diz elle, facil é ver que entram tres vezes as acções dos oito angulos triedros; duas vezes as dos diedros; e que pelo contrario são omittidas completamente as acções exercidas sobre estes triedros e diedros. Se esta illusão é facil, egualmente facil tambem, se não mais ainda, é ver: 1.° que mutuamente se destroem todas estas acções que parecem introduzidas além das reaes; e 2.° que são realmente consideradas tambem as acções a que estão sujeitos os angulos triedros e diedros, nas acções exercidas sobre as faces.

É pois rigorosa esta definição, cujo caracter é geometrico e physico.

Lamé dá ainda uma outra definição, apparentemente mais simples, mas que em clareza e rigor é inferior á primeira. Considerando-se o corpo solido, depois d'uma pequena alteração de forma, em equilibrio de elasticidade, imagine-se que o corta um plano em duas partes H e H′. Se fosse supprimida a parte H, seria destruido evidentemente o equilibrio de H′; mas poderia elle ser conservado, se em cada ponto do plano secante fosse applicada ao mesmo tempo uma força de intensidade e direcção convenientes. Esta força é precisamente a *força elastica* exercida por H sobre H'. Por esta definição fica a *força elastica* analoga á *tensão* d'um fio em equilibrio.

Poderia ser admittida esta segunda definição no tempo em que se acreditava na continuidade da materia e na acção do simples contacto; mas na physica actual não se póde acceitar, porque nada esclarece, nem explica. Tinha sido dada tambem por Cauchy; mas ainda assim o abbade Moigno, não obstante o seu enthusiasmo pelas concepções do seu respeitavel mestre, rejeita-a tambem, até com as mesmas palavras de Lamé. Acceital-a como exacta fôra realmente retrogradar muito na physica.

A solução completa de todas as questões da — physica mathematica — compõe-se de duas partes: a deducção das equações differenciaes que exprimem as leis do equilibrio e do movimento; e a integração d'essas equações.

Vou pois agora deduzir as equações differenciaes para o equilibrio do parallelipipedo elementar.

Imagine-se no meio solido um parallelipipedo elementar

$$\omega = dxdydz,$$

com as arestas parallelas aos eixos coordenados; sejam designadas por A, B e C as tres faces do angulo triedro no vertice mais proximo da origem, faces cujas areas são

$$\varpi_1 = dydz,\ \varpi_2 = dzdx \text{ e } \varpi_3 = dxdy;$$

e por A', B' e C' as faces respectivamente parallelas a estas, que formam o angulo triedro opposto áquelle. O elemento ω ha-de estar em equilibrio sob a acção das forças elasticas exercidas sobre as suas seis faces e das forças que lhe solicitam a massa $\rho\omega$, representando ρ a densidade e $\rho\omega X_0$, $\rho\omega Y_0$ e $\rho\omega Z_0$ as componentes, no sentido dos tres eixos, da resultante d'estas ultimas forças.

Para se exprimir este equilibrio, sejam no vertice mais vizinho da origem

$$\varpi_1 X_1,\ \varpi_1 Y_1,\ \varpi_1 Z_1,$$

$$\varpi_2 X_2,\ \varpi_2 Y_2,\ \varpi_2 Z_2,$$

e

$$\varpi_3 X_3,\ \varpi_3 Y_3,\ \varpi_3 Z_3$$

os valores particulares das componentes da força elastica: os da primeira linha horizontal quando o elemento plano é perpendicular ao eixo dos x; os da segunda quando elle é perpendicular ao eixo dos y; e os da terceira no mesmo caso para o eixo dos z. Estas nove quantidades são funcções sómente de quatro variaveis, as tres coordenadas e o tempo, x, y, z e t.

Como cada um dos planos ϖ_1, ϖ_2 e ϖ_3 separa o meio solido em duas partes, estas nove quantidades são as componentes da força elastica, conforme a definição já dada, exercida pela parte do meio solido mais distante da origem sobre a outra, onde está a origem; e então as componentes da força elastica exercida pela segunda parte sobre a primeira são estas mesmas nove quantidades com signaes contrarios.

Seguem-se agora as seis equações do equilibrio do elemento solido ω, pelos principios da mecanica.

Para a somma dos componentes, no sentido do eixo dos *x*, de todas as forças applicadas a este elemento, as faces A e A′ dão os termos

$$-\varpi_1 X_1 + \varpi_1 \left(X_1 + \frac{dX_1}{dx} dx\right),$$

que se reduzem a

$$\omega \frac{dX_1}{dx},$$

por ser

$$\varpi_1 dx = \omega;$$

as faces B e B′, pela mesma forma, dão

$$\omega \frac{dX_2}{dy};$$

as faces C e C′

$$\omega \frac{dX_1}{dx};$$

e finalmente o ultimo termo

$$\rho\omega X_0$$

vem das forças que solicitam a massa $\rho\omega$. Assim se obtem pois a primeira das equações (1).

A avaliação das componentes parallelas aos y dá a segunda e a das parallelas aos z a terceira. Assim apparecem as tres equações:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dX_1}{dx}+\dfrac{dX_2}{dy}+\dfrac{dX_3}{dz}+\rho X_0=0,\\[2ex] \dfrac{dY_1}{dx}+\dfrac{dY_2}{dy}+\dfrac{dY_3}{dz}+\rho Y_0=0\\[2ex] \text{e}\\ \dfrac{dZ_1}{dx}+\dfrac{dZ_2}{dy}+\dfrac{dZ_3}{dz}+\rho Z_0=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Para serem obtidas as outras tres, as dos momentos, considere-se um eixo que passe pelo centro do parallelipipedo ω, parallelo ao eixo dos x. Vê-se assim:

1.º que é nullo o momento da resultante das forças $\rho\omega X_0$, $\rho\omega Y_0$ e $\rho\omega Z_0$, porque esta resultante é applicada ao centro de ω, pela natureza da questão;

2.º que não contribuem para a somma dos momentos as forças elasticas exercidas sobre as faces A e A′, porque as suas resultantes encontram o eixo nos centros d'essas mesmas faces; nem as componentes

$$-\bar{\omega}_2 Y_2+\bar{\omega}_2\left(Y_2+\frac{dY_2}{dy}dy\right) \text{ e } -\bar{\omega}_3 Z_3+\bar{\omega}_3\left(Z_3+\frac{dZ_3}{dz}dz\right)$$

das forças elasticas exercidas respectivamente sobre as faces B, B′, C e C′, porque concorrem n'um ponto do eixo; e nem as componentes

$$-\bar{\omega}_2 X_2+\bar{\omega}_2\left(X_2+\frac{dX_2}{dy}dy\right) \text{ e } -\bar{\omega}_3 X_3+\bar{\omega}_3\left(X_3+\frac{dX_3}{dz}dz\right)$$

das mesmas forças elasticas, porque são paralleias ao eixo;

3.° que as componentes

$$-\varpi_2 Z_2 + \varpi_2 (Z_2 + \frac{dZ_2}{dy} dy) \text{ e } -\varpi_1 Y_1 + \varpi_1 (Y_1 + \frac{dY_1}{dz} dz),$$

tangenciaes respectivamente ás faces B, B′, C e C′, n'um plano perpendicular ao eixo, formam dous binarios de sentidos contrarios, o das duas primeiras com o *braço de alavanca* egual a dy e o outro com o *braço de alavanca* egual a dz, sendo desprezados os infinitamente pequenos da ordem inferior.

Serão estes binarios

$$\varpi_2 Z_2\, dy = \omega Z_2 \text{ e } \varpi_1 Y_1\, dz = \omega Y_1$$

reduzindo-se a equação dos momentos, para o eixo considerado, á egualdade d'estes binarios, isto é, á primeira das equações (2). A consideração de mais dous eixos que passem pelo centro do parallelipipedo, um parallelo ao eixo dos y e outro parallelo ao dos z, dá as outras equações pela mesma forma.

Assim apparecem as equações:

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= Z_2, \\ Z_1 &= X_1 \\ X_2 &= Y_1 \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2),$$

e

que exprimem que são eguaes, duas a duas, seis das nove componentes.

As equações (1) e (2) são as do equilibrio do parallelipipedo elementar.

Diversas notações têm sido propostas para estas componentes, das quaes tres são normaes, em geral distinctas, e tangenciaes as outras seis, eguaes duas a duas. D'uma nota publicada pelo abbade Moigno na obra —*Leçons de mécanique analytique*—transcrevo os quadros d'essas notações, rectificando o da notação de Poisson e accrescentando uma outra de Lamé, indicando os x, y e z das linhas horizontaes o sentido da decomposição e os das verticaes os eixos a que são perpendiculares os elementos planos a que se referem as forças:

Cauchy (1827)

	x	y	z
x	A	F	E
y	F	B	D
z	E	D	C

Poisson (1829)

	x	y	z
x	P_3	Q_3	R_3
y	P_2	Q_2	R_2
z	P_1	Q_1	R_1

Lamé e Clapeyrm

	x	y	z
x	N_1	T_3	T_2
y	T_3	N_2	T_1
z	T_2	T_1	N_3

Kirchoff

	x	y	z
x	X_x	X_y	X_z
y	Y_x	Y_y	Y_z
z	Z_x	Z_y	Z_z

Coriolis					Lamé (segunda)			
	x	y	z			x	y	z
x	p_{xx}	p_{xy}	p_{xz}		x	$C^{(x)}_{x}$	$C^{(x)}_{y}$	$C^{(x)}_{z}$
y	p_{yx}	p_{yy}	p_{yz}		y	$C^{(y)}_{x}$	$C^{(y)}_{y}$	$C^{(y)}_{z}$
z	p_{zx}	p_{zy}	p_{zz}		z	$C^{(z)}_{x}$	$C^{(z)}_{y}$	$C^{(z)}_{z}$

D'estas notações são preferiveis as de Kirchoff, Coriolis e a segunda de Lamé, tanto pela completa generalidade a que se prestam, como pelo enunciado facil e lucido que dão ás equações (2), que então se reduzem a

$$Z_y = Y_z,\ X_z = Z_x \text{ e } Y_x = X_y$$

na notação de Kirchoff; a

$$p_{zy} = p_{yz},\ p_{xz} = p_{zx} \text{ e } p_{yx} = p_{xy}$$

na de Coriolis; e a

$$C^{(z)}_{y} = C^{(y)}_{z},\ C^{(x)}_{z} = C^{(z)}_{x} \text{ e } C^{(y)}_{x} = C^{(x)}_{y}$$

na segunda de Lamé; mas n'esta dissertação adopto a primeira d'este autor, por ser a que elle adopta na obra —*Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*— e porque tambem lhe adopto o methodo, pelas razões que em lugar proprio hei-de dar.

O abbade Moigno, na obra que já citei, adoptou a notação de Coriolis, como tambem já tinha feito Cauchy em 1854 (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tom. XXXVIII, pag. 327).

A notação de Poisson dá as seguintes relações, que elle tambem deduziu:

$$Q_1 = R_2,\ R_3 = P_1 \text{ e } P_2 = Q_3.$$

É de notar as posições relativas que n'estes quadros todos têm as forças tangenciaes eguaes.

Emfim, na notação que adopto, o equilibrio do elemento parallelipipedico é expresso pelas seguintes equações:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+\rho X_0=0,\\ &\frac{dT_1}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+\rho Y_0=0\\ \text{e}\quad &\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_1}{dz}+\rho Z_0=0 \ (*) \end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(3).$$

Imagine-se um tetraedro infinitamente pequeno, sendo parallelas aos eixos coordenados as tres arestas que se cortam no vertice mais proximo da origem; sejam desi-

(*) Estas equações são uma generalização das fundamentaes da hydrostatica.

gnadas por a, b e c as areas das tres faces triangulares do triedro do vertice considerado, faces que são perpendiculares a ao eixo dos x, b ao dos y e c ao dos z, pela disposição do tetraedro; e sejam finalmente ϖ, m, n e p a area da outra face do tetraedro, que é inclinada, e os cosenos dos tres angulos que com os eixos dos x, y e z faz a normal a esta face. Por meio de theoremas elementares facilmente apparecem as relações

$$m^2+n^2+p^2=1,$$

$$a=m\varpi,\ b=n\varpi \text{ e } c=p\varpi.$$

Ora, para que esteja em equilibrio o tetraedro sujeito á acção das forças elasticas exercidas sobre as suas quatro faces e das forças que lhe solicitam a massa, é necessario que sejam nullas as sommas das componentes d'estas forças, no sentido de cada um dos tres eixos.

Para esta somma no sentido do eixo dos x a face inclinada ϖ dá o termo

$$X\varpi;$$

as faces a, b e c os termos

$$-mN_1\varpi,\ -nT_3\varpi \text{ e } -pT_2\varpi.$$

Assim se obtem a primeira das equações (4). Um processo identico para se obter as sommas das componentes nos sentidos dos y e z dá, do mesmo modo, as outras duas. Assim são deduzidas as tres equações:

$$\left.\begin{aligned} X &= mN_1+nT_3+pT_2, \\ Y &= mT_3+nN_2+pT_1 \\ Z &= mT_2+nT_1+pN_3. \end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

e

A inspecção d'estas equações demonstra um theorema geral, de que já appareceu um caso particular nas equações (2). N_1, T_2 e T_3 são as tres componentes da força elastica exercida, no vertice mais proximo da origem, sobre um elemento plano perpendicular ao eixo dos x; e então a componente d'esta força no sentido da normal á face inclinada é

$$mN_1 + nT_3 + pT_2,$$

que a primeira das equações (4) mostra ser egual a X, que representa a componente em projecção, no sentido do eixo dos x, da força elastica exercida sobre o elemento inclinado. O mesmo resultado se obtem com qualquer das outras duas equações, em que Y e Z têm uma significação analoga á de X.

Como os eixos são quaesquer, tem toda a generalidade o theorema seguinte:

Sendo, n'um mesmo ponto d'um meio solido, E *e* E′ *as forças elasticas exercidas sobre dous elementos planos* ϖ *e* ϖ', *cujas normaes sejam* L *e* L′, *as projecções de* E *sobre* L′ *e de* E′ *sobre* L *são eguaes.*

Além da importancia geometrica que a tão simples theorema não póde ser contestada, tem elle verdadeira importancia na physica mathematica. N'estes casos as melhores demonstrações são os factos, os exemplos; e, para completar esta doutrina, vou agora dar um, que hei-de aproveitar no capitulo seguinte, onde empregarei este theorema com vantagem, mais que uma vez.

Sejam considerados, com a mesma origem, dous systemas de coordenadas rectangulares x, y, z e x', y', z'; sejam designados por m_1, m_2 e m_3, n_1, n_2 e n_3, p_1, p_2 e p_3 os cosenos dos angulos que os eixos dos x, y, z fazem com os x', y', z', sendo assim m_1, n_1 e p_1, m_2, n_2 e p_2, m_3, n_3 e p_3 os cosenos dos angulos que os eixos dos x', y', z'

fazem com os outros; sejam representadas por N_1, N_2, N_3, T_1, T_2 e T_3 as componentes normaes e tangenciaes da força elastica no primeiro systema, como indica a notação adoptada; e por N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2 e T'_3 as componentes relativas ao outro systema, sendo estas para os segundos planos e eixos coordenados o que para os primeiros são aquell'outras. Este theorema—*da egualdade das componentes normaes reciprocas*— dá immediatamente as relações:

$$\left.\begin{aligned}
m_1N'_1 + m_2T'_3 + m_3T'_2 &= m_1N_1 + n_1T_3 + p_1T_2,\\
n_1N'_1 + n_2T'_3 + n_3T'_2 &= m_1T_3 + n_1N_2 + p_1T_1,\\
p_1N'_1 + p_2T'_3 + p_3T'_2 &= m_1T_2 + n_1T_1 + p_1N_3,\\
m_1T'_3 + m_2N'_2 + m_3T'_1 &= m_2N_1 + n_2T_3 + p_2T_2,\\
n_1T'_3 + n_2N'_2 + n_3T'_1 &= m_2T_3 + n_2N_2 + p_2T_1,\\
p_1T'_3 + p_2N'_2 + p_3T'_1 &= m_2T_2 + n_2T_1 + p_2N_3,\\
m_1T'_2 + m_2T'_1 + m_3N'_3 &= m_3N_1 + n_3T_3 + p_3T_2,\\
n_1T'_2 + n_2T'_1 + n_3N'_3 &= m_3T_3 + n_3N_2 + p_3T_1\\
\text{e}\qquad & \\
p_1T'_2 + p_2T'_1 + p_3N'_3 &= m_3T_2 + n_3T_1 + p_3N_3.
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(5).$$

Para deduzir as equações (4) indica Lamé um outro methodo, independentemente da consideração do tetraedro. Sem necessidade de o expor, aprecial-o-hei ligeiramente, para assim mostrar a verdadeira importancia do tetraedro elementar na physica mathematica.

Deduzidas as equações do equilibrio do parallelipipedo elementar e combinadas, depois de faceis artificios de calculo, com as equações do equilibrio conhecidas na mecanica racional, facilmente apparecem as equações (4), que ficam tendo o mesmo valor e a mesma significação.

Além de ser indirecto e arbitrario este methodo, é pouco lucido, porque n'um problema de physica mathematica confunde considerações proprias d'esta sciencia com outras da mecanica racional.

Por esta consideração unicamente, é preferivel o tetraedro de Cauchy, cuja importancia na physica mathematica fica assim plenamente demonstrada.

É apenas philosophica esta importancia; mas Lamé pretende que ella seja pratica tambem. Não me parece que n'isto tenha razão este fecundo escriptor de physica mathematica, porque a importancia das relações (4) é a mesma e com a mesma clareza se manifesta, qualquer que seja o methodo por que ellas hajam sido deduzidas, sendo esse methodo rigoroso, embora directo ou indirecto.

O equilibrio de elasticidade d'uma parte qualquer d'um meio solido é completamente determinado pelas equações (3) e (4). Qualquer que seja a forma d'uma porção solida, é certo e evidente que, no interior da sua massa, póde ser decomposta em parallelipipedos elementares e, sobre os parallelipipedos que mais proximos ficarem da superficie, em tetraedros. Esta consideração não é puramente abstracta; é apoiada pela noção da molecula.

Com faceis artificios de calculo e por simples considerações geometricas, Lamé verifica que effectivamente as seis equações (3) e (4) são as necessarias e sufficientes para o equilibrio de elasticidade d'uma porção finita de forma qualquer. Não considerando absolutamente indispensavel esta verificação, embora a repute de alguma importancia, não seguirei este trabalho de Lamé e limitar-me-hei a apresentar as equações:

$$\Sigma\bar{\omega}X + \Sigma\rho\omega X_0 = 0,$$

$$\Sigma\bar{\omega}Y + \Sigma\rho\omega Y_0 = 0,$$

$$\Sigma\bar{\omega}Z + \Sigma\rho\omega Z_0 = 0,$$

$$\Sigma(zY - yZ)\bar{\omega} + \Sigma\rho\omega(zY_0 - yZ_0) = 0,$$

$$\Sigma(xZ - zX)\bar{\omega} + \Sigma\rho\omega(xZ_0 - zX_0) = 0$$

e

$$\Sigma(yX - xY)\bar{\omega} + \Sigma\rho\omega(yX_0 - xY_0) = 0,$$

deduzidas unicamente das (3) e (4).

Acerca das leis do equilibrio de elasticidade houve entre Navier e Poisson uma polemica animada, cujos pormenores se encontram nos tomos XXXVIII e XXXIX da primeira serie dos — *annaes de chimica e physica* —. No catalogo das obras de Poisson, por elle mesmo feito e que F. Arago publicou com a biographia de tão fecundo mathematico, vêm citadas, entre os artigos insertos nos referidos annaes, as tres seguintes publicações:

— *Préambule et extrait de mon mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* — tom. XXXVII, pag. 337;

— *Réponse à une note de M. Navier sur l'article précédent* — tom. XXXVIII, pag. 433; e

— *Lettre de Poisson à Arago, en réponse à une seconde note de Navier* — tom. XXXIX, pag. 204.

Quiz ler e apreciar bem esta polemica; mas não me foi possivel encontrar a primeira serie dos — *annaes de chimica e physica* —, nem na bibliotheca da Universidade, nem na da faculdade de Philosophia, que n'estes ultimos annos tem sido bem enriquecida, pela solicitude do meu respeitavel mestre o Ex.mo Dr. Viegas.

Felizmente nem para o assumpto d'este escripto, nem ainda para a apreciação dos methodos de Navier e Poisson, é indispensavel o conhecimento de semelhante polemica.

O methodo de Navier — *de integração ao redor d'um ponto* — está condemnado, porque suppõe e traduz a continuidade da materia, erro que nem se presta a um sophisma, nem a um capricho de raciocinio.

O methodo de Poisson, a que não se póde negar certo valor, considerado na epoca em que foi publicado, é muito inferior ao de Lamé, que segui.

É simples e elegante o methodo de Lamé; e o de Poisson obriga a calculos longos. Lamé, no methodo referido, obtem as equações geraes da elasticidade sómente por considerações proprias da theoria respectiva; e Poisson confunde esta questão com as da mecanica racional. Poisson emprega tambem a consideração do tetraedro elementar; mas nem d'elle deduz as consequencias que Lamé estabelece, nem mostra a sua importancia na theoria da elasticidade. Ainda assim é digna de se ler a obra

— *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* —, publicada no tomo 8.º das memorias da Academia das Sciencias do Instituto de França.

Poisson pensou tambem no erro do methodo de Navier e, tentando destruil-o, apenas o illudiu. Realmente o erro é o mesmo nos integraes de Navier e nos sommatorios de Poisson. D'esta difficuldade sahiu Lamé, deixando indeterminada a funcção que representa a acção molecular.

N'este trabalho mostrou ser Lamé um espirito profundamente philosophico, como em muitos outros.

CAPITULO SEGUNDO

Theoria do ellipsoide de elasticidade

Primeiro *ellipsoide de elasticidade* ou *ellipsoide inverso da primeira especie, hyperboloides* e *cóne asymptotico*. Segundo ellipsoide ou *ellipsoide inverso da segunda especie*. Terceiro ellipsoide ou *ellipsoide directo*. Existencia das *forças elasticas principaes*. Determinação das grandezas d'estas forças. Direcções das mesmas. Ellipsoide, hyperboloides e cóne da direcção das forças elasticas. Ellipse, hyperboles e asymptotas. Caso d'uma unica *força elastica principal*. Ellipsoide de revolução e esphera.

Facilmente são reconhecidos nas equações (5) tres grupos distinctos, cada um de tres equações tambem distinctas.

A somma das tres equações de cada grupo, respectivamente multiplicadas por m_i, n_i e p_i, sendo o indice i successivamente 1, 2 e 3, com as relações bem conhecidas na geometria entre estes cosenos, dá facilmente as formulas:

$$
\left.\begin{aligned}
N'_1 &= m_1^2 N_1 + n_1^2 N_2 + p_1^2 N_3 + 2n_1 p_1 T_1 + 2p_1 m_1 T_2 + 2m_1 n_1 T_3, \\
N'_2 &= m_2^2 N_1 + n_2^2 N_2 + p_2^2 N_3 + 2n_2 p_2 T_1 + 2p_2 m_2 T_2 + 2m_2 n_2 T_3, \\
N'_3 &= m_3^2 N_1 + n_3^2 N_2 + p_3^2 N_3 + 2n_3 p_3 T_1 + 2p_3 m_3 T_2 + 2m_3 n_3 T_3, \\
T'_1 &= m_2 m_3 N_1 + n_2 n_3 N_2 + p_2 p_3 N_3 \\
&\quad + (n_2 p_3 + n_3 p_2) T_1 + (p_2 m_3 + p_3 m_2) T_2 + (m_2 n_3 + m_3 n_2) T_3 \\
T'_2 &= m_3 m_1 N_1 + n_3 n_1 N_2 + p_3 p_1 N_3 \\
&\quad + (n_3 p_1 + n_1 p_3) T_1 + (p_3 m_1 + p_1 m_3) T_2 + (m_3 n_1 + m_1 n_3) T_3 \\
&\text{e} \\
T'_3 &= m_1 m_2 N_1 + n_1 n_2 N_2 + p_1 p_2 N_3 \\
&\quad + (n_1 p_2 + n_2 p_1) T_1 + (p_1 m_2 + p_2 m_1) T_2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1) T_3
\end{aligned}\right\} (6).
$$

Tomando-se agora sobre a normal N'_1, a partir do respectivo pé, um comprimento

$$r = \frac{1}{\sqrt{\pm N'_1}},$$

conforme N'_1 for uma quantidade positiva ou negativa; e sendo designadas por x_1, y_1 e z_1 as coordenadas das extremidades d'este comprimento, no primeiro systema; ter-se-ha

$$x_1 = \frac{m_1}{\sqrt{\pm N'_1}},\ y_1 = \frac{n_1}{\sqrt{\pm N'_1}}\ \text{e}\ z_1 = \frac{p_1}{\sqrt{\pm N'_1}}$$

ou

$$m_1 = x_1 \sqrt{\pm N'_1},\ n_1 = y_1 \sqrt{\pm N'_1}\ \text{e}\ p_1 = z_1 \sqrt{\pm N'_1}.$$

Estas pequenas formulas, introduzidas na primeira das equações (6), dão

$$N_1 x_1^2 + N_2 y_1^2 + N_3 z_1^2 + 2T_1 y_1 z_1 + 2T_2 x_1 z_1 + 2T_3 x_1 y_1 = \pm 1 \ldots (7),$$

equação d'uma superficie de segunda ordem com centro.

Se, para quaesquer systemas de valores de x_1, y_1 e z_1, coordenadas das extremidades dos raios r, se conserva constantemente positivo ou negativo o primeiro membro d'esta equação, a superficie de segunda ordem é um ellipsoide, porque os raios r são reaes em todos os sentidos; no caso contrario, em que o primeiro membro é $+1$ para um systema de valores das coordenadas e para outro -1, ha dous hyperboloides conjugados, com o mesmo cóne asymptotico. As intersecções d'estes hyperboloides com qualquer dos planos coordenados são, em cada um, duas hyperboles com as mesmas asymptotas; por exemplo no plano xy estas curvas são representadas pela equação

$$N_2\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2+2T_3\frac{y_1}{x_1}+N_1=\pm\frac{1}{x_1^{\,2}}.$$

N'um systema de eixos coordenados que se confundam com os tres eixos principaes d'esta superficie de segunda ordem, na equação (7) desapparecem os rectangulos das variaveis; e assim hão-de ser nullos os coefficientes d'estes rectangulos, que são as forças elasticas tangenciaes aos elementos planos perpendiculares aos novos eixos.

Por esta theoria simples e engenhosa estabelece o abbade Moigno as seguintes conclusões, que têm o caracter de theoremas:

1.ª É um ellipsoide a superficie formada pelas extremidades das normaes a todos os elementos planos que passam pelo mesmo ponto d'um corpo, sendo-lhes dados, a partir d'este ponto, comprimentos eguaes ou proporcionaes ás raizes quadradas dos valores numericos das componentes N'_1, *no sentido d'estas normaes, das forças elasticas que solicitam os diversos elementos, quando taes componentes são todas positivas ou todas negativas; e é um de dous hyperboloides conjugados, quando a força elastica normal* N'_1 *é positiva para uns elementos e negativa para outros, sendo nulla a força elastica normal para os elementos planos perpendiculares ás generatrizes do cóne asymptotico, caso em que ha sómente —forças elasticas tangenciaes—;*

2.ª Em qualquer ponto d'um corpo ha tres elementos planos, perpendiculares entre si, que são solicitados sómente por forças elasticas normaes.

A estas ultimas forças deu Cauchy a denominação de *forças elasticas principaes.*

É realmente de notar como os hyperboloides e o respectivo cóne asymptotico representam a lei da continuidade nas forças elasticas. Se ha elementos planos para os quaes é positiva a força elastica normal e outros para os quaes é negativa, casos que os dous hyperboloides representam, ha tambem elementos planos para os quaes é nulla essa força, caso representado pelo cóne asymptotico. Se ha *tracções* e *pressões,* ha tambem *forças elasticas tangenciaes.*

Sem a pretensão de propor denominações novas, parece-me proprio para este ellipsoide a de—*ellipsoide de elasticidade inverso da primeira especie*—, sendo assim introduzida na theoria da elasticidade uma denominação analoga á que tem sido adoptada na theoria potencial.

Das equações (4) resulta um outro ellipsoide, para que proponho a denominação de—*ellipsoide de elasticidade inverso da segunda especie*—.

Sejam E a força elastica que solicita um elemento plano inclinado sobre os planos coordenados; X, Y e Z as suas componentes no sentido dos eixos coordenados x, y e z, eixos com que a direcção de E faz os angulos dos cosenos a, b e c; e advirta-se que m, n e p representam os cosenos dos angulos que com estes eixos faz a normal ao elemento plano. Tem-se assim, pelas equações (4),

$$X = aE = mN_1 + nT_3 + pT_2,$$

$$Y = bE = mT_3 + nN_2 + pT_1$$

e

$$Z = cE = mT_2 + nT_1 + pN_3,$$

d'onde facilmente resulta

$$E^2 = (mN_1 + nT_3 + pT_2)^2 + (mT_3 + nN_2 + pT_1)^2 + (mT_2 + nT_1 + pN_3)^2.$$

Tomando-se sobre a normal ao elemento plano considerado um comprimento egual a $\frac{1}{E}$; e sendo x_1, y_1 e z_1 as coordenadas da extremidade da recta assim determinada; ter-se-ha

$$x_1 = \frac{m}{E}, \quad y_1 = \frac{n}{E} \quad \text{e} \quad z_1 = \frac{p}{E}$$

ou

$$m = Ex_1, \quad n = Ey_1 \quad \text{e} \quad p = Ez_1.$$

Assim vem a equação d'um ellipsoide

$$(N_1 x_1 + T_3 y_1 + T_2 z_1)^2 + (T_3 x_1 + N_2 y_1 + T_1 z_1)^2$$
$$+ (T_2 x_1 + T_1 y_1 + N_3 z_1)^2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Vou emfim considerar um terceiro ellipsoide, a que me parece caber a denominação de—*ellipsoide de elasticidade directo*—, admittidas as denominações que proponho para os outros dous. Este, que foi obtido por Lamé, apparece muito mais naturalmente.

Por um ponto qualquer sejam tirados tres eixos recctangulares, parallelos aos x, y e z. Sendo designadas por x_1, y_1 e z_1 as coordenadas, em relação a estes eixos, da extremidade d'uma recta que parta do ponto considerado a representar, em grandeza e direcção, a força elastica exercida sobre o elemento plano cuja normal faz com os x, y e z os angulos dos cosenos m, n e p; as equações (4) dão:

$$\left.\begin{aligned} mN_1 + nT_3 + pT_2 &= x_1, \\ mT_3 + nN_2 + pT_1 &= y_1 \\ mT_2 + nT_1 + pN_3 &= z_1 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

e

Sejam agora considerados tres eixos parallelos ás direcções das forças elasticas que solicitam os elementos planos perpendiculares aos eixos dos x, y e z; sejam representadas estas forças por F_1, F_2 e F_3; sejam designadas por x'_1, y'_1 e z'_1 as coordenadas, em relação a estes novos eixos, do ponto cujas coordenadas, em relação aos primeiros, são x_1, y_1 e z_1; e observe-se que em geral os novos eixos são obliquos. Como as componentes de F_1, F_2 e F_3, no sentido dos eixos dos x, y e z, são N_1, T_3 e T_2 de F_1, T_3, N_2 e T_1 da segunda e T_2, T_1 e N_3 da outra, os cosenos dos angulos dos eixos novos com os antigos são dados pelo quadro seguinte:

	x_1	y_1	z_1
x'_1	$\frac{N_1}{F_1}$	$\frac{T_3}{F_1}$	$\frac{T_2}{F_1}$
y'_1	$\frac{T_3}{F_2}$	$\frac{N_2}{F_2}$	$\frac{T_1}{F_2}$
z'_1	$\frac{T_2}{F_3}$	$\frac{T_1}{F_3}$	$\frac{N_3}{F_3}$

As formulas da transformação das coordenadas dão

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{N_1}{F_1}x'_1+\frac{T_3}{F_2}y'_1+\frac{T_2}{F_3}z'_1=x_1,\\
&\frac{T_3}{F_1}x'_1+\frac{N_2}{F_2}y'_1+\frac{T_1}{F_3}z'_1=y_1\\
\text{e}\quad&\\
&\frac{T_2}{F_1}x'_1+\frac{T_1}{F_2}y'_1+\frac{N_3}{F_3}z'_1=z_1
\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\ (10).$$

Sendo resolvidas as equações (9), em relação a m, n e p, e as (10), em relação a

$$\frac{x'_1}{F_1},\ \frac{y'_1}{F_2}\ \text{e}\ \frac{z'_1}{F_3},$$

são obtidos evidentemente os mesmos valores para

$$m\ \text{e}\ \frac{x'_1}{F_1},\ n\ \text{e}\ \frac{y'_1}{F_2},\ p\ \text{e}\ \frac{z'_1}{F_3}.$$

São assim

$$m=\frac{x'_1}{F_1},\ n=\frac{y'_1}{F_2}\ \text{e}\ p=\frac{z'_1}{F_3},$$

d'onde resulta

$$\left(\frac{x'_1}{F_1}\right)^2+\left(\frac{y'_1}{F_2}\right)^2+\left(\frac{z'_1}{F_3}\right)^2=1\dots\dots\dots\ (11),$$

lugar geometrico das extremidades das linhas que representam, em grandeza e direcção, as forças elasticas que solicitam todos os elementos planos que passam por um mesmo ponto. É esta a equação do terceiro ellipsoide. As forças elasticas correspondentes a tres elementos planos rectangulares dão tres diametros conjugados d'esta superficie.

Além da extrema simplicidade com que se deduz este ellipsoide, tem sobre os outros a grande vantagem de dar directamente as forças elasticas.

A comparação d'estes tres ellipsoides de elasticidade parece-me justificar bem as denominações que lhes proponho.

Entre os systemas dos diametros conjugados das superficies de segunda ordem ha, em geral, um unico em que elles são rectangulares: é o dos eixos.

Suppondo-se que os planos coordenados primitivos estão dispostos por forma que o ellipsoide (11) esteja referido aos seus eixos, são rectangulares x'_1, y'_1 e z'_1, como x_1, y_1 e z_1; e então têm lugar simultaneamente as equações

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{N_1}{F_1}\right)^2+\left(\frac{T_3}{F_2}\right)^2+\left(\frac{T_2}{F_3}\right)^2&=1, \\ \left(\frac{T_3}{F_1}\right)^2+\left(\frac{N_2}{F_2}\right)^2+\left(\frac{T_1}{T_3}\right)^2&=1, \\ \left(\frac{T_2}{F_1}\right)^2+\left(\frac{T_1}{F_2}\right)^2+\left(\frac{N_3}{F_3}\right)^2&=1, \end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\dots (12)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{N_1}{F_1}\right)^2+\left(\frac{T_3}{F_1}\right)^2+\left(\frac{T_2}{F_1}\right)^2=1,\\
&\left(\frac{T_3}{F_2}\right)^2+\left(\frac{N_2}{F_2}\right)^2+\left(\frac{T_1}{F_2}\right)^2=1\\
\text{e}\qquad&\\
&\left(\frac{T_2}{F_3}\right)^2+\left(\frac{T_1}{F_3}\right)^2+\left(\frac{N_3}{F_3}\right)^2=1,
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

que combinadas para a eliminação de N_1, N_2 e N_3 dão

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{F_2^2}-\frac{1}{F_1^2}\right)T_3^2+\left(\frac{1}{F_3^2}-\frac{1}{F_1^2}\right)T_2^2=0,\\
&\left(\frac{1}{F_3^2}-\frac{1}{F_2^2}\right)T_1^2+\left(\frac{1}{F_1^2}-\frac{1}{F_2^2}\right)T_3^2=0\\
\text{e}\qquad&\\
&\left(\frac{1}{F_1^2}-\frac{1}{F_3^2}\right)T_2^2+\left(\frac{1}{F_2^2}-\frac{1}{F_3^2}\right)T_1^2=0.
\end{aligned}\right\}\ldots (14)$$

F_1, F_2 e F_3 são os eixos do ellipsoide, em geral deseguaes. É licito suppor estas quantidades collocadas assim, pela ordem decrescente da grandeza, por ser absolutamente indifferente esta ordem, como é facil ver.

Na hypothese assim justificada

$$F_1 > F_2 > F_3,$$

as equações (14) conduzem fatalmente ao resultado

$$T_3 = 0,\ T_2 = 0 \text{ e } T_1 = 0.$$

As equações (12) ou (13) dão agora

$$F_1 = N_1,\ F_2 = N_2 \text{ e } F_3 = N_3,$$

o que significa que os eixos do ellipsoide são eguaes, em grandeza, ás normaes aos elementos planos sobre que se exercem as forças elasticas representadas por estes eixos.

Finalmente as equações (10) dão

$$x'_1 = x_1,\ y'_1 = y_1 \text{ e } z_1' = z_1,$$

o que quer dizer que as direcções dos mesmos eixos e d'estas normaes são as mesmas.

Assim se confundem os eixos do ellipsoide com as normaes aos elementos planos sobre que se exercem as forças elasticas representadas pelos mesmos eixos.

Eis deduzida directâmente a conclusão a que conduz o primeiro ellipsoide acerca das—*forças elasticas principaes*—: *em qualquer ponto d'um corpo ha tres elementos planos, perpendiculares entre si, que são solicitados sómente por forças elasticas normaes.* Estes planos são as secções principaes do *ellipsoide de elasticidade.*

Segue-se, e muito naturalmente, a determinação das *forças elasticas principaes* em cada ponto do corpo.

Sejam A a grandeza desconhecida d'uma *força elastica principal; m, n* e *p* os cosenos dos angulos que com os eixos *x, y* e *z* faz a sua direcção, tambem desconhecida; e designadas por X, Y e Z as suas componentes no sentido dos tres eixos. Tem-se assim

$$X = mA,\ Y = nA,\ Z = pA,$$

e

$$\left.\begin{aligned} m(N_1 - A) + nT_3 + pT_2 &= 0, \\ mT_3 + n(N_2 - A) + pT_1 &= 0 \\ mT_2 + nT_1 + p(N_3 - A) &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

equações que com a relação

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1$$

determinam os valores das incognitas A, *m, n* e *p,* isto é, a intensidade e a direcção da *força elastica principal.*

Por qualquer methodo de eliminação se obtem a equação

$$(N_1 - A)(N_2 - A)(N_3 - A) + 2T_1T_2T_3 - (N_1 - A)T_1^2$$
$$- (N_2 - A)T_2^2 - (N_3 - A)T_3^2 = 0,$$

a que se póde dar a forma

$$A^3 - (N_1 + N_2 + N_3)A^2 + (N_2N_3 + N_1N_3 + N_1N_2$$
$$- T^2_1 - T^2_2 - T^2_3)A - (N_1N_2N_3 + 2T_1T_2T_3 - N_1T^2_1$$
$$- N_2T^2_2 - N_3T^2_3) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

São reaes todas as raizes d'esta equação. Por ella ser do terceiro gráo, é real uma das raizes pelo menos; e, demonstrado que uma das outras é real tambem, fica demonstrada a existencia das tres raizes reaes. Para isto, supponha-se que a raiz real A é a grandeza da *força elastica principal,* cuja direcção faz com os eixos dos x, y e z angulos dos cosenos m, n e p; considere-se uma outra *força elastica principal* cuja grandeza seja B, em geral differente de A, e cuja direcção seja determinada pelos cosenos m_1, n_1 e p_1, sendo os eixos os mesmos; e sejam repetidos em relação a B, m_1, n_1 e p_1, com as mesmas considerações, os calculos feitos com A, m, n e p. Assim se obtem a mesma equação (16), em que apparecem A, m, n e p substituidos por B, m_1, n_1 e p_1; do que se conclue que B é real como A.

Da existencia d'estas tres raizes reaes vou dar uma outra demonstração, de calculo muito simples tambem, que me parece muito interessante.

A primeira das equações (15) póde ter as formas

$$nT_3 + pT_2 = m(A - N_1),$$

$$\frac{n}{T_2} + \frac{p}{T_3} = \frac{m}{T_2T_3}(A - N_1)$$

e finalmente

$$\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_2}+\frac{p}{T_3}=\frac{m}{T_2T_3}\left(A+\frac{T_2T_3}{T_1}-N_1\right).$$

Egualmente para as outras duas vêm as formas

$$\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_2}+\frac{p}{T_3}=\frac{n}{T_1T_3}\left(A+\frac{T_1T_3}{T_2}-N_2\right)$$

e

$$\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_2}+\frac{p}{T_3}=\frac{p}{T_1T_2}\left(A+\frac{T_1T_2}{T_3}-N_3\right).$$

Pondo-se

$$\frac{T_2T_3}{T_1}-N_1=P,\ \frac{T_1T_3}{T_2}-N_2=Q \text{ e } \frac{T_1T_2}{T_3}-N_3=R\ldots\ldots (17),$$

tem-se evidente e facilmente

$$\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_2}+\frac{p}{T_3}=\frac{m}{T_2T_3}(A+P)=\frac{n}{T_1T_3}(A+Q)=\frac{p}{T_1T_3}(A+R)$$

$$=\frac{\frac{m}{T_1}}{\frac{T_1T_2T_3}{T_1^2(A+P)}}=\frac{\frac{n}{T_2}}{\frac{T_1T_2T_3}{T_2^2(A+Q)}}=\frac{\frac{p}{T_3}}{\frac{T_1T_2T_3}{T_3^2(A+R)}}$$

e, por uma bem conhecida propriedade das fracções algebricas,

$$\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_3}+\frac{p}{T_3}=\frac{\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_2}+\frac{p}{T_3}}{\frac{T_1T_2T_3}{T_1^2(A+P)}+\frac{T_1T_2T_3}{T_2^2(A+Q)}+\frac{T_1T_2T_3}{T_3^2(A+R)}}.$$

D'estes calculos tão simples resulta immediatamente

$$\frac{T_1T_2T_3}{T_1^2(A+P)}+\frac{T_1T_2T_3}{T_2^2(A+Q)}+\frac{T_1T_2T_3}{T_3^2(A+R)}=1,$$

relação que póde ter a forma

$$\frac{1}{T_1^2(A+P)}+\frac{1}{T_2^2(A+Q)}+\frac{1}{T_3^2(A+R)}=\frac{1}{T_1T_2T_3}\ \ldots\ldots\ (18).$$

Suppondo-se collocadas pela ordem decrescente da grandeza as quantidades P, Q e R, que são as relações (17) entre as componentes das forças elasticas, isto é,

$$P>Q>R,$$

a simples inspecção d'esta equação do terceiro gráo mostra immediatamente que ella tem tres raizes reaes comprehendidas entre ∞ e as quantidades P, Q e R, cujos signaes dependem do que tem o producto $T_1T_2T_3$.

A equação (18) póde ter tambem a forma

$$\frac{1}{T_1T_2T_3}(A+P)(A+Q)(A+R)-\frac{1}{T_1^2}(A+Q)(A+R)$$

$$-\frac{1}{T_2^2}(A+P)(A+R)-\frac{1}{T_3^2}(A+P)(A+Q)=0,$$

que, com as relações (17), é equivalente á equação (16).

Para a theoria completa das *forças elasticas principaes* falta sómente a determinação da sua direcção.

É intuitivo que esta determinação se obtem immediatamente, para cada *força elastica principal*, logo que seja conhecida a posição do plano sobre que ella se exerce.

Das equações (15) facilmente se conclue a equação d'este plano, pelos valores de m, n e p, d'ellas deduzidos (*),

$$\frac{x'-x}{AT_1+T_2T_3-N_1T_1}+\frac{y'-y}{AT_2+T_3T_1-N_2T_2}+\frac{z'-z}{AT_3+T_1T_2-N_3T_3}=0,$$

(*) Para obter esta equação, recorri á forma notavel, de emprego util e frequente, que toma a equação do plano pela introducção da perpendicular sobre elle abaixada da origem.

Seja

$$Ax+By+Cz+D=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

sendo x', y' e z' as coordenadas de qualquer ponto do plano, e x, y e z as coordenadas do ponto que tem sido considerado, coordenadas de que são funcções as forças elasticas.

A equação do *ellipsoide de elasticidade*, para que proponho a denominação de *directo*, referida ao centro e aos eixos, é

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

sendo A, B e C as tres raizes da equação (16).

---

a equação geral do plano disposta por forma que o termo D seja negativo no primeiro membro, o que é inteiramente admissivel.

A perpendicular δ tirada da origem sobre este plano, a distancia do plano á origem das coordenadas, é dada pela formula bem conhecida

$$\delta=\frac{D}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

sendo negativo o radical pela hypothese de ser D negativo; e para os cosenos m, n e p dos angulos de δ com os eixos coordenados, ha as formulas

$$m=\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ n=\frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ e } p=\frac{C}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

É facil mostrar porque estes radicaes são todos positivos nos valores d'estes cosenos.

Como agora são normaes as forças elasticas que se exercem sobre os planos coordenados, tem-se

$$N_1 = A,\ N_2 = B,\ N_3 = C \text{ e } T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

resultando então das equações (9)

$$m = \frac{x_1}{A},\ n = \frac{y_1}{B} \text{ e } p = \frac{z_1}{C},$$

valores dos cosenos dos angulos que com os novos eixos faz a normal ao elemento plano sobre que se exerce a

---

O plano representado pela equação (α) corta os eixos coordenados nos pontos

$$x' = -\frac{D}{A},\ y' = 0 \text{ e } z' = 0 \text{ para o eixo dos } x,$$

$$x' = 0 \quad ,\ y' = -\frac{D}{B} \text{ e } z' = 0 \text{ para o dos } y$$

e

$$x' = 0 \quad ,\ y' = 0 \text{ e } z' = -\frac{D}{C} \text{ para o dos } z.$$

É evidente, na hypothese posta, que os valores $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ e $-\frac{D}{C}$ têm os mesmos signaes de A, B e C. Ora, sendo a distancia x' positiva, são tambem positivos A, e, como é facil ver, o coseno m, para o que é necessario que seja positivo o denomiforça elastica representada, em grandeza e direcção, pelo semidiametro D_1, cuja extremidade tem por coordenadas x_1, y_1 e z_1. A equação d'este plano é pois

$$\frac{xx_1}{A}+\frac{yy_1}{B}+\frac{zz_1}{C}=0,$$

equação que, combinada com a equação geral do plano tangente á superficie F (x, y, z) e bem conhecida no calculo differencial applicado

$$(X-x)\frac{dF}{dx}+(Y-y)\frac{dF}{dy}+(Z-z)\frac{dF}{dz}=0,$$

---

nador d'este, isto é, o radical. Sendo negativa a distancia x', são tambem negativos A e m, para o que é necessario que seja positivo o mesmo radical. Resultados identicos dá a mesma discussão acerca dos cosenos n e p.

Assim é finalmente

$$A=-\frac{D}{\delta}m,\ B=-\frac{D}{\delta}n \text{ e } C=-\frac{D}{\delta}p,$$

sendo a equação (α) transformada em

$$mx+ny+pz=\delta,$$

de que resulta immediatamente

$$m(x'-x)+n(y'-y)+p(z'-z)=0,$$

equação do plano que passa pelo ponto (x', y', z').

mostra que tal plano é parallelo ao plano tangente á superficie representada pela equação

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=\pm K^2 \dots\dots\dots\dots \quad (20)$$

no ponto (x_1, y_1, z_1), em que o semidiametro D_1 a vae atravessar.

Quando as tres raizes da equação (16) têm todas o mesmo signal, a superficie representada pela equação (20) é um ellipsoide concentrico com o *de elasticidade;* e têm os seus eixos a mesma direcção dos d'este, sendo as suas grandezas proporcionaes ás raizes quadradas das *forças elasticas principaes*. N'este caso todo e qualquer semidiametro D_1 representa uma força elastica da mesma natureza das *forças elasticas principaes,* isto é, ou uma *tracção* ou uma *pressão,* segundo estas forças são *tracções* ou *pressões,* conforme vae ser demonstrado.

Se, a partir d'uma *força elastica principal* e do plano sobre que ella se exerce, se move este *continuamente*, por forma que tome todas as posições conforme a lei da continuidade, a força elastica evidentemente varía tambem conforme esta lei. Para que varie a natureza da força elastica, para que passe de *tracção* a *pressão* ou de *pressão* a *tracção,* é evidentemente necessario que antes d'isso nem seja *tracção,* nem *pressão,* o que sómente póde succeder quando a força elastica tem a direcção do plano. No caso do ellipsoide, a força elastica não póde ter semelhante direcção, porque o plano sobre que ella se exerce é parallelo ao plano tangente ao ellipsoide da equação (20), no ponto em que a recta D_1, direcção da força, atravessa esta superficie.

Quando as raizes da equação (16) são de signaes differentes, a equação (20) representa um systema de dous hyperboloides conjugados, um d'uma folha e outro de duas, com o mesmo cóne asymptotico, cuja equação é

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (21)$$

N'este caso as forças elasticas mudam de natureza, passando por tangenciaes. Se o semidiametro D_1 encontra o hyperboloide d'uma folha, representa uma força elastica da especie dupla nas *forças elasticas principaes;* se encontra o hyperboloide de duas folhas, representa uma força elastica da especie unica; e finalmente o plano sobre que se exerce a força elastica tangencial é tangente ao cóne asymptotico, onde se opéra a transição da força elastica d'uma natureza para outra. Este cóne tem a denominação de *cóne das forças elasticas tangenciaes.*

Sendo nullo o ultimo termo da equação (16), é nulla uma das *forças elasticas principaes;* e então todas as forças elasticas existem no plano sobre que não se exerce força elastica alguma, como exige a egualdade das componentes normaes reciprocas.

Sejam então C a raiz nulla; a origem das coordenadas o ponto que tem sido considerado; os eixos x e y as linhas que representam as *forças elasticas principaes* A e B; e γ a inclinação, sobre o plano d'estes eixos, do elemento plano solicitado pela força elastica representada pela recta D_1, cuja extremidade tem as coordenadas x_1,

y_1 e z_1; tem-se então

$$m = \frac{x_1}{A},\ n = \frac{y_1}{B},\ p = \cos\gamma$$

e, pela condição

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} = \operatorname{sen}^2\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22).$$

A equação do elemento plano de inclinação γ sobre o plano xy das forças elasticas é

$$\frac{xx_1}{A} + \frac{yy_1}{B} + z\cos\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

Assim desapparece o *ellipsoide de elasticidade* para vir a ellipse representada pela equação (22).

As forças elasticas exercidas sobre todos os planos da mesma inclinação γ são pois representadas pelos semidiametros d'uma ellipse cujos eixos são proporcionaes ambos a sen γ, um a A e outro a B. O traço do plano de inclinação γ, sobre que se exerce a força elastica representada pelo semidiametro D_1 d'esta ellipse, no plano xy, é parallelo á tangente á curva da equação

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = \pm K^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24),$$

no ponto em que a corta o mesmo semidiametro D_1.

Se A e B têm o mesmo signal, a equação (24) representa uma ellipse; e, no caso contrario, representa um systema de duas hyperboles conjugadas, com as mesmas asymptotas. No caso de desapparecerem as hyperboles para virem as asymptotas, isto é, sendo a equação de D_1

$$y = \pm x \sqrt{-\frac{B}{A}},$$

representa D_1 uma força elastica tangencial exercida sobre o plano de inclinação γ, cujo traço no plano xy é a mesma recta D_1.

Finalmente a equação (22) mostra que ás diversas inclinações do plano correspondem ellipses semelhantes, sendo a maior correspondente a $\frac{\Pi}{2}$, caso em que é perpendicular ao das forças elasticas o plano sobre que se exerce a força elastica representada pela recta D_1.

Se são nullas duas das *forças elasticas principaes*, o theorema da egualdade das componentes normaes reciprocas exige que todas as forças elasticas tenham a mesma direcção L, a da unica *força elastica principal*. Pelo mesmo theorema, a força elastica exercida sobre um elemento cuja normal é *l*, obtem-se projectando-se sobre *l* a *força elastica principal* existente e transportando-se a projecção obtida para a direcção L.

Como se vê, para estes casos é importantissimo o theorema das componentes normaes reciprocas.

Se são eguaes duas das raizes da equação (16), são de revolução o *ellipsoide de elasticidade* e as superficies representadas pela equação (20). Representam forças elasticas normaes todos os semidiametros do equador do ellipsoide (19).

No caso da egualdade de todas as tres raizes da equação (16), são espheras estas superficies e têm o mesmo valor todas as forças elasticas.

CAPITULO TERCEIRO

Importancia e uso do ellipsoide de elasticidade

Forma geometrica das leis que regem as forças elasticas. Relações importantes entre as componentes das forças elasticas relativas a eixos differentes. Uma analogia de methodo entre a mecanica racional e a theoria mathematica da elasticidade.

O argumento mais forte contra esta dissertação será talvez este pequeno capitulo, com que vou rematal-a. Pois, perguntar-se-ha talvez, pois é necessario demonstrar o que evidentemente se revela ao espirito, o que a historia mostra com toda a luz, emfim uma verdade para que bem basta a hoje ainda celebrada inscripção da philosophia antiga, inscripção que se lê tambem n'uma das primeiras d'estas paginas? Pois, quando a sciencia e a litteratura possuem o sublime pensamento e a eloquente phrase de Aimé-Martin—La géométrie est la raison de Dieu—, é admissivel um argumento, é acceitavel uma tentativa para se mostrar a importancia de qualquer verdade geometrica?

Qualquer que seja o valor d'estas considerações, que não discuto aqui, não retiro este capitulo de tão acanhadas dimensões. Ninguem póde duvidar da importancia da luz, do calor e do ar; e todavia a sciencia tem-lhe dedicado muitas paginas.

Geral e facil como a demonstração das leis que regem as forças elasticas, é o enunciado d'ellas, enunciado de forma inteiramente geometrica. Deduzidas, com todo o rigor e generalidade da geometria, independentemente de qualquer demonstração relativa á homogeneidade dos corpos e á natureza das acções moleculares, são estas leis traduzidas por superficies e curvas, sem perturbação alguma, com maior verdade ainda que o da traducção das leis dos movimentos celestes pelas secções conicas.

Não é simplesmente philosophica esta importancia; é tambem toda pratica. Para o engenheiro, que precisa de ter presentes sempre as leis a que ha-de recorrer e as regras que tem de applicar, com muita frequencia, convem muito, é até quasi uma necessidade, o enunciado em forma geometrica, não só pela facilidade com que se diz, mas tambem e principalmente pela promptidão e segurança com que se fixa na memoria.

É pois immensa e está bem demonstrada a importancia d'esta theoria tão simples, tão natural e tão fecunda nas applicações.

Sejam A, B e C as tres raizes da equação (16), de que são deduzidas, por formulas elementares, as equações

$$A + B + C = N_1 + N_2 + N_3,$$

$$BC + CA + AB = N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2$$

e

$$ABC = N_1 N_2 N_3 + 2T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2.$$

Como os eixos do *ellipsoide de elasticidade* se hão-de conservar os mesmos quando as quantidades N_1, N_2, N_3, e finalmente

$$\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_2}+\frac{p}{T_3}=\frac{m}{T_2T_3}(A+\frac{T_2T_3}{T_1}-N_1).$$

Egualmente para as outras duas vêm as formas

$$\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_2}+\frac{p}{T_3}=\frac{n}{T_1T_3}(A+\frac{T_1T_3}{T_2}-N_2)$$

e

$$\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_2}+\frac{p}{T_3}=\frac{p}{T_1T_2}(A+\frac{T_1T_2}{T_3}-N_3).$$

Pondo-se

$$\frac{T_2T_3}{T_1}-N_1=P,\ \frac{T_1T_3}{T_2}-N_2=Q \text{ e } \frac{T_1T_2}{T_3}-N_3=R \ldots\ldots (17),$$

tem-se evidente e facilmente

$$\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_2}+\frac{p}{T_3}=\frac{m}{T_2T_3}(A+P)=\frac{n}{T_1T_3}(A+Q)=\frac{p}{T_1T_3}(A+R)$$

$$=\frac{\frac{m}{T_1}}{\frac{T_1T_2T_3}{T_1^2(A+P)}}=\frac{\frac{n}{T_2}}{\frac{T_1T_2T_3}{T_2^2(A+Q)}}=\frac{\frac{p}{T_3}}{\frac{T_1T_2T_3}{T_3^2(A+R)}}$$

e, por uma bem conhecida propriedade das fracções algebricas,

$$\frac{m}{T_1}+\frac{n}{T_3}+\frac{p}{T_3}=\frac{\dfrac{m}{T_1}+\dfrac{n}{T_2}+\dfrac{p}{T_3}}{\dfrac{T_1T_2T_3}{T_1^2(A+P)}+\dfrac{T_1T_2T_3}{T_2^2(A+Q)}+\dfrac{T_1T_2T_3}{T_3^2(A+R)}}.$$

D'estes calculos tão simples resulta immediatamente

$$\frac{T_1T_2T_3}{T_1^2(A+P)}+\frac{T_1T_2T_3}{T_2^2(A+Q)}+\frac{T_1T_2T_3}{T_3^2(A+R)}=1,$$

relação que póde ter a forma

$$\frac{1}{T_1^2(A+P)}+\frac{1}{T_2^2(A+Q)}+\frac{1}{T_3^2(A+R)}=\frac{1}{T_1T_2T_3}\;\ldots\ldots\;(18).$$

Suppondo-se collocadas pela ordem decrescente da grandeza as quantidades P, Q e R, que são as relações (17) entre as componentes das forças elasticas, isto é,

$$P>Q>R,$$

a simples inspecção d'esta equação do terceiro gráo mostra immediatamente que ella tem tres raizes reaes comprehendidas entre ∞ e as quantidades P, Q e R, cujos signaes dependem do que tem o producto $T_1T_2T_3$.

A equação (18) póde ter tambem a forma

$$\frac{1}{T_1T_2T_3}(A+P)(A+Q)(A+R)-\frac{1}{T_1^2}(A+Q)(A+R)$$

$$-\frac{1}{T_2^2}(A+P)(A+R)-\frac{1}{T_3^2}(A+P)(A+Q)=0,$$

que, com as relações (17), é equivalente á equação (16).

Para a theoria completa das *forças elasticas principaes* falta sómente a determinação da sua direcção.

É intuitivo que esta determinação se obtem immediatamente, para cada *força elastica principal,* logo que seja conhecida a posição do plano sobre que ella se exerce.

Das equações (15) facilmente se conclue a equação d'este plano, pelos valores de *m, n* e *p,* d'ellas deduzidos (*),

$$\frac{x'-x}{AT_1+T_2T_3-N_1T_1}+\frac{y'-y}{AT_2+T_3T_1-N_2T_2}\text{ e }\frac{z'-z}{AT_3+T_1T_2-N_3T_3}=0,$$

(*) Para obter esta equação, recorri á forma notavel, de emprego util e frequente, que toma a equação do plano pela introducção da perpendicular sobre elle abaixada da origem.

Seja

$$Ax+By+Cz+D=0\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\alpha)$$

sendo x', y' e z' as coordenadas de qualquer ponto do plano, e x, y e z as coordenadas do ponto que tem sido considerado, coordenadas de que são funcções as forças elasticas.

A equação do *ellipsoide de elasticidade*, para que proponho a denominação de *directo*, referida ao centro e aos eixos, é

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

sendo A, B e C as tres raizes da equação (16).

---

a equação geral do plano disposta por forma que o termo D seja negativo no primeiro membro, o que é inteiramente admissivel.

A perpendicular δ tirada da origem sobre este plano, a distancia do plano á origem das coordenadas, é dada pela formula bem conhecida

$$\delta=\frac{D}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

sendo negativo o radical pela hypothese de ser D negativo; e para os cosenos m, n e p dos angulos de δ com os eixos coordenados, ha as formulas

$$m=\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ n=\frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \text{ e } p=\frac{C}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

É facil mostrar porque estes radicaes são todos positivos nos valores d'estes cosenos.

Como agora são normaes as forças elasticas que se exercem sobre os planos coordenados, tem-se

$$N_1 = A,\ N_2 = B,\ N_3 = C \text{ e } T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

resultando então das equações (9)

$$m = \frac{x_1}{A},\ n = \frac{y_1}{B} \text{ e } p = \frac{z_1}{C},$$

valores dos cosenos dos angulos que com os novos eixos faz a normal ao elemento plano sobre que se exerce a

---

O plano representado pela equação (α) corta os eixos coordenados nos pontós

$$x' = -\frac{D}{A},\ y' = 0 \text{ e } z' = 0 \text{ para o eixo dos } x,$$

$$x' = 0 \quad ,\ y' = -\frac{D}{B} \text{ e } z' = 0 \text{ para o dos } y$$

e

$$x' = 0 \quad ,\ y' = 0 \text{ e } z' = -\frac{D}{C} \text{ para o dos } z.$$

É evidente, na hypothese posta, que os valores $-\frac{D}{A}$, $-\frac{D}{B}$ e $-\frac{D}{C}$ têm os mesmos signaes de A, B e C. Ora, sendo a distancia x' positiva, são tambem positivos A, e, como é facil ver, o coseno m, para o que é necessario que seja positivo o denomiforça elastica representada, em grandeza e direcção, pelo semidiametro D_1, cuja extremidade tem por coordenadas x_1, y_1 e z_1. A equação d'este plano é pois

$$\frac{xx_1}{A}+\frac{yy_1}{B}+\frac{zz_1}{C}=0,$$

equação que, combinada com a equação geral do plano tangente á superficie F (x, y, z) e bem conhecida no calculo differencial applicado

$$(X-x)\frac{dF}{dx}+(Y-y)\frac{dF}{dy}+(Z-z)\frac{dF}{dz}=0,$$

---

nador d'este, isto é, o radical. Sendo negativa a distancia x', são tambem negativos A e m, para o que é necessario que seja positivo o mesmo radical. Resultados identicos dá a mesma discussão acerca dos cosenos n e p.

Assim é finalmente

$$A=-\frac{D}{\delta}m,\ B=-\frac{D}{\delta}n \text{ e } C=-\frac{D}{\delta}p,$$

sendo a equação (α) transformada em

$$mx+ny+pz=\delta,$$

de que resulta immediatamente

$$m(x'-x)+n(y'-y)+p(z'-z)=0,$$

equação do plano que passa pelo ponto (x', y', z').

mostra que tal plano é parallelo ao plano tangente á superficie representada pela equação

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=\pm K^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

no ponto (x_1, y_1, z_1), em que o semidiametro D_1 a vae atravessar.

Quando as tres raizes da equação (16) têm todas o mesmo signal, a superficie representada pela equação (20) é um ellipsoide concentrico com o *de elasticidade;* e têm os seus eixos a mesma direcção dos d'este, sendo as suas grandezas proporcionaes ás raizes quadradas das *forças elasticas principaes.* N'este caso todo e qualquer semidiametro D_1 representa uma força elastica da mesma natureza das *forças elasticas principaes,* isto é, ou uma *tracção* ou uma *pressão,* segundo estas forças são *tracções* ou *pressões,* conforme vae ser demonstrado.

Se, a partir d'uma *força elastica principal* e do plano sobre que ella se exerce, se move este *continuamente*, por forma que tome todas as posições conforme a lei da continuidade, a força elastica evidentemente varía tambem conforme esta lei. Para que varie a natureza da força elastica, para que passe de *tracção* a *pressão* ou de *pressão* a *tracção,* é evidentemente necessario que antes d'isso nem seja *tracção,* nem *pressão,* o que sómente póde succeder quando a força elastica tem a direcção do plano. No caso do ellipsoide, a força elastica não póde ter semelhante direcção, porque o plano sobre que ella se exerce é parallelo ao plano tangente ao ellipsoide da equação (20), no ponto em que a recta D_1, direcção da força, atravessa esta superficie.

Quando as raizes da equação (16) são de signaes differentes, a equação (20) representa um systema de dous hyperboloides conjugados, um d'uma folha e outro de duas, com o mesmo cóne asymptotico, cuja equação é

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

N'este caso as forças elasticas mudam de natureza, passando por tangenciaes. Sé o semidiametro D_1 encontra o hyperboloide d'uma folha, representa uma força elastica da especie dupla nas *forças elasticas principaes;* se encontra o hyperboloide de duas folhas, representa uma força elastica da especie unica; e finalmente o plano sobre que se exerce a força elastica tangencial é tangente ao cóne asymptotico, onde se opéra a transição da força elastica d'uma natureza para outra. Este cóne tem a denominação de *cóne das forças elasticas tangenciaes.*

Sendo nullo o ultimo termo da equação (16), é nulla uma das *forças elasticas principaes;* e então todas as forças elasticas existem no plano sobre que não se exerce força elastica alguma, como exige a egualdade das componentes normaes reciprocas.

Sejam então C a raiz nulla; a origem das coordenadas o ponto que tem sido considerado; os eixos x e y as linhas que representam as *forças elasticas principaes* A e B; e γ a inclinação, sobre o plano d'estes eixos, do elemento plano solicitado pela força elastica representada pela recta D_1, cuja extremidade tem as coordenadas x_1,

y_1 e z_1; tem-se então

$$m = \frac{x_1}{A}, \quad n = \frac{y_1}{B}, \quad p = \cos\gamma$$

e, pela condição

$$m^2 + n^2 + p^2 = 1,$$

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} = \operatorname{sen}^2\gamma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (22).$$

A equação do elemento plano de inclinação γ sobre o plano xy das forças elasticas é

$$\frac{xx_1}{A} + \frac{yy_1}{B} + z\cos\gamma = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

Assim desapparece o *ellipsoide de elasticidade* para vir a ellipse representada pela equação (22).

As forças elasticas exercidas sobre todos os planos da mesma inclinação γ são pois representadas pelos semidiametros d'uma ellipse cujos eixos são proporcionaes ambos a sen γ, um a A e outro a B. O traço do plano de inclinação γ, sobre que se exerce a força elastica representada pelo semidiametro D_1 d'esta ellipse, no plano xy, é parallelo á tangente á curva da equação

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = \pm K^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (24),$$

no ponto em que a corta o mesmo semidiametro D_1.

Se A e B têm o mesmo signal, a equação (24) representa uma ellipse; e, no caso contrario, representa um systema de duas hyperboles conjugadas, com as mesmas asymptotas. No caso de desapparecerem as hyperboles para virem as asymptotas, isto é, sendo a equação de D_1

$$y = \pm x\sqrt{-\frac{B}{A}},$$

representa D_1 uma força elastica tangencial exercida sobre o plano de inclinação γ, cujo traço no plano xy é a mesma recta D_1.

Finalmente a equação (22) mostra que ás diversas inclinações do plano correspondem ellipses semelhantes, sendo a maior correspondente a $\frac{\Pi}{2}$, caso em que é perpendicular ao das forças elasticas o plano sobre que se exerce a força elastica representada pela recta D_1.

Se são nullas duas das *forças elàsticas principaes*, o theorema da egualdade das componentes normaes reciprocas exige que todas as forças elasticas tenham a mesma direcção L, a da unica *força elastica principal*. Pelo mesmo theorema, a força elastica exercida sobre um elemento cuja normal é *l*, obtem-se projectando-se sobre *l* a *força elastica principal* existente e transportando-se a projecção obtida para a direcção L.

Como se vê, para estes casos é importantissimo o theorema das componentes normaes reciprocas.

Se são eguaes duas das raizes da equação (16), são de revolução o *ellipsoide de elasticidade* e as superficies representadas pela equação (20). Representam forças elasticas normaes todos os semidiametros do equador do ellipsoide (19).

No caso da egualdade de todas as tres raizes da equação (16), são espheras estas superficies e têm o mesmo valor todas as forças elasticas.

CAPITULO TERCEIRO

Importancia e uso do ellipsoide de elasticidade

Forma geometrica das leis que regem as forças elasticas. Relações importantes entre as componentes das forças elasticas relativas a eixos differentes. Uma analogia de methodo entre a mecanica racional e a theoria mathematica da elasticidade.

O argumento mais forte contra esta dissertação será talvez este pequeno capitulo, com que vou rematal-a. Pois, perguntar-se-ha talvez, pois é necessario demonstrar o que evidentemente se revela ao espirito, o que a historia mostra com toda a luz, emfim uma verdade para que bem basta a hoje ainda celebrada inscripção da philosophia antiga, inscripção que se lê tambem n'uma das primeiras d'estas paginas? Pois, quando a sciencia e a litteratura possuem o sublime pensamento e a eloquente phrase de Aimé-Martin—LA GÉOMÉTRIE EST LA RAISON DE DIEU—, é admissivel um argumento, é acceitavel uma tentativa para se mostrar a importancia de qualquer verdade geometrica?

Qualquer que seja o valor d'estas considerações, que não discuto aqui, não retiro este capitulo de tão acanhadas dimensões. Ninguem póde duvidar da importancia da luz, do calor e do ar; e todavia a sciencia tem-lhe dedicado muitas paginas.

Geral e facil como a demonstração das leis que regem as forças elasticas, é o enunciado d'ellas, enunciado de forma inteiramente geometrica. Deduzidas, com todo o rigor e generalidade da geometria, independentemente de qualquer demonstração relativa á homogeneidade dos corpos e á natureza das acções moleculares, são estas leis traduzidas por superficies e curvas, sem perturbação alguma, com maior verdade ainda que o da traducção das leis dos movimentos celestes pelas secções conicas.

Não é simplesmente philosophica esta importancia; é tambem toda pratica. Para o engenheiro, que precisa de ter presentes sempre as leis a que ha-de recorrer e as regras que tem de applicar, com muita frequencia, convem muito, é até quasi uma necessidade, o enunciado em forma geometrica, não só pela facilidade com que se diz, mas tambem e principalmente pela promptidão e segurança com que se fixa na memoria.

É pois immensa e está bem demonstrada a importancia d'esta theoria tão simples, tão natural e tão fecunda nas applicações.

Sejam A, B e C as tres raizes da equação (16), de que são deduzidas, por formulas elementares, as equações

$$A + B + C = N_1 + N_2 + N_3,$$

$$BC + CA + AB = N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2$$

e

$$ABC = N_1 N_2 N_3 + 2T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2.$$

Como os eixos do *ellipsoide de elasticidade* se hão-de conservar os mesmos quando as quantidades N_1, N_2, N_3,

T_1, T_2 e T_3 forem substituidas pelas N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2 e T'_3 do exemplo do capitulo segundo e das formulas (5) e (6), facilmente apparecerão então as relações symetricas

$$N'_1 + N'_2 + N'_3 = N_1 + N_2 + N_3,$$

$$N'_2 N'_3 + N'_3 N'_1 + N'_1 N'_2 - T'^2_1 - T'^2_2 - T'^2_3 =$$

$$N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2$$

e

$$N'_1 N'_2 N'_3 + 2T'_1 T'_2 T'_3 - N'_1 T'^2_1 - N'_2 T'^2_2 - N'_3 T'^2_3 =$$

$$N_1 N_2 N_3 + 2T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2.$$

A primeira d'estas relações resulta tambem e immediatamente da somma das tres primeiras equações (6); mas, para d'estas mesmas serem deduzidas a segunda e a terceira, fôra necessario um calculo fastidioso e complicado.

São assim obtidas simultaneamente, com muita facilidade e por considerações elementares, na theoria do *ellipsoide de elasticidade,* tão importantes relações entre forças elasticas relativas a eixos differentes.

A mecanica racional emprega tambem, com grande vantagem, o *ellipsoide central,* construcção geometrica que representa a relação existente entre os momentos de inercia relativos a differentes eixos que passam pelo mesmo ponto.

É completa a analogia entre esta theoria e a do *ellipsoide de elasticidade,* analogia de valor philosophico e pratico. É de fé para mim — como a fé póde entrar na sciencia — que os progressos da mecanica racional e da physica mathematica hão-de mostrar bem a prodigiosa fecundidade de analogia tão completa.

FIM.

1874

A. FILGUEIRAS - DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

MATHEMATICA