COMPLEMENTOS

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

COMPLEMENTOS

DE

GEOMETRIA DESCRIPTIVA.

[illegible]

COMPLEMENTOS

DA

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

DE

H. de Courcy

PELO

Dr. R. R. de Sousa Pinto.

Lente Cathedratico da Faculdade de Mathematica na Universidade de Coimbra,
Correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa.

COIMBRA:
NA IMPRENSA DA UNIVERSIDADE
1853.

ADVERTENCIA.

Muitas das cousas, que contém este escripto, composto ha nove annos, foram devidas á leitura da *Geometria Descriptiva* de M. Monge; do *Tractado das superficies regradas* de M. Gascheau; da *Geometria Descriptiva* de M. Leroy; e da *Analyse applicada á Geometria de tres dimensões* de M. Leroy: por isso convirá algumas vezes consultar estas obras para maior desenvolvimento das materias respectivas.

Seguiu-se nelle a ordem d'inscripção dos differentes artigos da *Geometria Descriptiva de M. Fourcy*, que se apontaram á margem do texto; e fizeram-se as referencias, quanto foi possivel, ás figuras da mesma obra.

Indicaram-se duas versões de *surfaces gauches*: uma, *superficies torcidas*, empregada na traducção da *Geometria applicada ás artes* de M. Dupin pelo Sr. E. J. Ferreira; outra, *superficies enviezadas*, posteriormente lembrada pelo Sr. J. M. Baldy, da qual se usou com preferencia.

TABOA DAS MATERIAS.

ERRATAS.

Pag.	*Linhas*	*Erros*	*Emendas*
4	20	$(sf')^5$	$(sf')^2$
7	3	de	da
9	19	á funcções α	ás funcções φ
12	10	das quaes	das quaes, e das precedentes,
16	8	28	18
18	25	Ay^2	Ax^2
40	9	$A' = A''$	$A' = -A''$
»	17	de	da
42	6	ψ''	ψ^2
43	31	com as	com os
52	2	$\gamma^{2\,2} \cot^2 \theta$	$\gamma^2 \cot^2 \theta$
69	8	a curva	cada uma das projecções verticaes da curva
96	8	A	B
»	12	C	B

COMPLEMENTOS

DA

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

DE LEFEBURE DE FOURCY.

1. O Objecto da Geometria descriptiva é representar sobre um plano as partes da extensão existentes no espaço, de modo que seja facil deduzir desta representação as propriedades mais notaveis das mesmas partes, as suas dimensões, e as relações de posição que entre si guardam.

No estudo desta Sciencia convem empregar a Geometria analytica como complemento della: porque, se uma offerece meios geraes e expeditos de resolver as questões; a outra torna sensiveis os resultados a que as soluções conduzem, e mostra as applicações que dos mesmos resultados se podem fazer ás artes. Por este motivo nos empenharemos especialmente, nas observações de que vamos occupar-nos, em comparar as soluções graphicas com as analyticas.

Problemas sobre as linhas rectas e planos.

2. Seja $(ab, a'b')$ (fig. 1.) uma recta F. n.º 18.

$$y = mx + n, \quad z = px + q, \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

cujos traços sobre os planos (xy) e (xz) se procuram.

Fazendo $y = 0$ para ter o traço sobre (xz), vem

$$x = -\frac{n}{m}, \text{ ou } x = \frac{\text{AO}}{\text{tang ObA}} = \text{A}b;$$

por ser $-m$ a tangente trigonometrica de ObA, e n a ordenada inicial AO.

D'onde resulta que, para achar o traço da recta sobre o plano vertical (xz), basta determinar a ordenada bb', correspondente ao ponto b onde a projecção horizontal ab encontra a linha da terra.

Semelhantemente discorreriamos a respeito do traço horizontal. O que é com effeito o processo seguido no problema I da Geometria descriptiva de Fourcy.

F. n.° 19. 3. Sejam $(m'\alpha n)$, $(m'\epsilon n)$ (fig. 2.) dous planos

$$x = Az + By + C\,,\; x = A'z + B'y + C', \ldots\ldots\ldots (2).$$

As equações dos seus traços sobre (xy) serão:

$$\text{de } (m'\alpha n)\ldots x = By + C;\;\; \text{de } (m'\epsilon n)\ldots x = B'y + C'\ldots . (3).$$

As dos seus traços sobre (xz) serão:

$$\text{de } (m'\alpha n)\ldots x = Az + C;\;\; \text{de } (m'\epsilon n)\ldots x = A'z + C'\ldots . (4).$$

Para achar as projecções, sobre (xy) e (xz), da intersecção dos planos, eliminaremos z e y entre as suas equações (2); o que dará:

$$x = \frac{A'B - AB'}{A' - A}y + \frac{A'C - AC'}{A' - A},\;\; x = \frac{AB' - A'B}{B' - B}z + \frac{B'C - BC'}{B' - B}\ldots (5).$$

Mas procurando a intersecção dos traços dos planos sobre (xy) (eq. 3), acha-se $x = \frac{B'C - BC'}{B' - B}$; valor que sendo substituido na 2.ª das equações (5) dá $z = 0$, isto é, dá o traço da intersecção dos planos sobre (xy): logo este traço é a intersecção n dos traços dos planos.

Do mesmo modo se mostra que o traço m' da intersecção dos planos sobre (xz) é a intersecção dos traços dos mesmos planos sobre (xz). O que reduz ao inverso do precedente o problema de achar as projecções da intersecção.

Se o traço de $(m'\alpha n)$ sobre (xy) é perpendicular á linha de terra, temos $B = 0$; o que reduz a 2.ª das equações (5) a $x = Az + C$, que é a do traço sobre (xz): logo a projecção da intersecção sobre (xz) é neste caso o traço do plano.

Se os dous traços sobre (xy) são parallelos, é $B = B'$; o que substituido nas equações (5) dá:

$$x = \text{B}y + \frac{\text{A}'\text{C}-\text{AC}'}{\text{A}'-\text{A}},\ z = -\frac{\text{C}'-\text{C}}{\text{A}'-\text{A}}$$

logo a projecção da intersecção sobre (xy) é parallela aos traços; e a projecção sobre (xz) é parallela á linha de terra.

Se os planos encontram no mesmo ponto a linha de terra, é $\text{C}=\text{C}'$: o que reduz as equações (5) a

$$x = \frac{\text{A}'\text{B}-\text{AB}'}{\text{A}'-\text{A}}\,y + \text{C},\ x = \frac{\text{AB}'-\text{A}'\text{B}}{\text{B}'-\text{B}}\,z + \text{C};$$

das quaes se vê que a intersecção passa por aquelle ponto. E as abscissas $x = \frac{\text{B}'\text{C}-\text{BC}'}{\text{B}'-\text{B}}$, $x = \frac{\text{A}'\text{C}-\text{AC}'}{\text{A}'-\text{A}}$, de n e m', reduzindo-se ambas a $x=\text{C}$, com $y=0$ e $z=0$, mostram que estes pontos se confundem tambem com elle: o que torna impraticavel a construcção.

Se os planos são parallelos á linha de terra: B, B', A, A', tornam-se infinitos: logo os seus traços (eq. 3 e 4), e as projecções da sua intersecção, são parallelas á mesma linha.

De proposito fizemos esta analyse n'um exemplo tão simples, para acostumar o leitor a deduzir das considerações analyticas as modificações, que nos casos particulares se devem fazer aos processos geraes.

4. Quando construimos uma recta $(ab,\ a'b')$ (F. fig. V.) em verdadeira grandeza gf sobre o plano horizontal, gf produzida deve passar pelo traço horizontal da mesma recta: porque no movimento do trapezio $abgf$ em torno de ab deve ficar fixo aquelle traço. D'onde resulta não só uma verificação, mas tambem o meio de resolver o problema inverso, que consiste em achar o ponto de uma recta, cuja distancia a outro ponto dado da mesma recta é igual a uma quantidade conhecida $= d$. F. n.º 22.

Para isto basta levantar a perpendicular $af = a'r$, suppondo $(a,\ a')$ o ponto dado; unir f com o traço horizontal de $(ab,\ a'b')$ por uma recta; tomar nella $fg = d$; e abaixar de g sobre ab, e de b sobre a linha de terra, as perpendiculares gb, e bb', que darão o ponto procurado $(b,\ b')$.

Casos do angulo triedro.

F. n.os 42, 43, 44. 5. A construcção do angulo triedro só é possivel quando qualquer dos angulos planos é menor que a somma dos outros dois.

O mesmo se vê graphicamente. Com effeito, se (F. fig. XXV) a face *asb* fosse > a somma das outras duas, uma das partes *asm* ou *bsm* seria > a face correspondente *asc*, ou *bsc'*: logo uma das rectas, $hg = sg\,.\,\text{tang}\, msa$, $hg' = sg'\,.\,\text{tang}\, msb$, seria respectivamente

$$>(gf = sg\,.\,\text{tang}\, asc,\ g'f' = sg'.\,\text{tang}\, bsc');$$

e um dos dous circulos dos raios gf, $g'f'$, não encontraria hk, ou hk'. Por onde se vê que neste caso não haveria triedro.

6. Pela comparação dos triangulos da figura mostram-se os theoremas fundamentaes da trigonometria espherica: como vamos ver.

Chamemos A, B, C, os angulos diedros formados nas arestas *sa*, *sb*, *sc*. Os angulos planos, que respectivamente se lhes oppõe, são $c'sb = a$, $csa = b$, $asb = c$.

1.° Os triangulos *khg* e *k'hg'* dão $\dfrac{\text{sen}\,(kgh)}{\text{sen}\,(k'g'h)} = \dfrac{g'k'}{gk}$

$$\text{ou} \qquad \frac{\text{sen A}}{\text{sen B}} = \frac{g'f'}{gf} = \frac{\text{sen}\, a}{\text{sen}\, b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

2.° Os triangulos *kig*, *if's*, dão

$$(ki)^2 = (kg)^2 + (ig)^2 - 2(kg).(ig).\cos A = (if')^2 = (sf')^2 + (si)^2 - 2(sf').(si).\cos a,$$

ou, por ser $sf = sf'$,

$$(sf)^2.\text{sen}^2 b + (si)^2.\text{sen}^2 c - 2(sf).(si).\text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A = (sf)^2 + (si)^2 - 2(sf).(si).\cos a,$$

que, por ser $si = \dfrac{sg}{\cos c} = \dfrac{sf.\cos b}{\cos c}$, dá

$$\cos a = \cos b \cos c + \text{sen}\, b\, \text{sen}\, c \cos A \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Do mesmo modo os triangulos qmp, qps, psf, qfs', dão

$$(qm)^2+(pm)^2-2(qm).(pm).\cos C=(qs)^2+(ps)^2-2(ps).(qs).\cos c,$$

ou, por ser $(qm)=(qf')$, $pm=(pf)$, $(qf')=(qs).\mathrm{sen}\,a$, $pf=(ps).\mathrm{sen}\,b$:

$$(qs)^2.\mathrm{sen}^2 a+(ps)^2.\mathrm{sen}^2 b-2(qs).(ps)\mathrm{sen}\,a\,\mathrm{sen}\,b\cos C=(qs)^2+(ps)^2-2(ps).(qs)\cos c,$$

que, por ser $(qs).\cos a=(ps).\cos b$, dá

$$\cos b\cos a+\mathrm{sen}\,b\,\mathrm{sen}\,a\cos C=\cos c.$$

3.° Seja o angulo $msa=s$. Os triangulos khg, $k'hg'$, hsg, hsg', dão

$$(hg)=(hk).\cot A,\ (hg')=(hk').\cot B=(hk).\cot B;$$

logo $$\frac{(hg)}{(hg')}=\frac{\cot A}{\cot B}=\frac{\mathrm{sen}\,s}{\mathrm{sen}\,(c-s)}=\frac{1}{\mathrm{sen}\,c\cot s-\cos c};$$

ou, por ser

$$\cot s=\frac{sg}{hg}=\frac{sg}{kg.\cos A}=\frac{sg}{gf.\cos A}=\frac{\cot b}{\cos A},$$

$$\frac{\cot A\,\mathrm{sen}\,c\,\mathrm{cotg}\,b}{\cos A}-\cot A\cos c=\cot B;$$

ou $$\cos c\cos A=\mathrm{sen}\,c\,\mathrm{cotg}\,b-\mathrm{sen}\,A\cot B.\ \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

4.° O 4.° theorema fundamental da Trigonometria é o 2.° applicado ao triangulo supplementar.

7. As construcções graphicas indicam a ambiguidade da solução, quando a ha; e mostram os casos em que se podem estremar as soluções verdadeiras das, que o não são: tudo conforme com o que na trigonome-

tria espherica se ensina. Como se póde ver, figurando as construcções relativas ao angulo triedro, e comparando-as com as regras a esse respeito dadas (Francoeur n.os 648 e 649.)

Da geração das superficies.

F. n.° 46. 8. Qualquer superficie póde suppor-se gerada pelo movimento de uma linha, de fórma constante ou variavel, que sempre encontra outras linhas, ou se move segundo uma lei dada. A linha, que se move, chama-se *generatriz;* e as, que são encontradas pela generatriz, chamam-se *directrizes.*

Sejam:

$$f_{(1)}=0\,,\ F_{(1)}=0\,;\ f_{(2)}=0\,,\ F_{(2)}=0\,;\ldots;\ f_{(n)}=0\,,\ F_{(n)}=0\,;\ldots(1)$$

as equações de n directrizes;

e $$\varphi=0\,,\ \psi=0\,,$$

as de uma generatriz, que descreve a superficie encontrando sempre, durante o seu movimento, as n directrizes. Eliminando x, y, z, entre as duas equações da generatriz, e as duas de cada directriz, resultarão n equações:

$$A_{(1)}=0\,,\ A_{(2)}=0\,,\ \ldots\ldots\ldots\,,\ A_{(n)}=0\,,$$

entre os parametros, cada uma das quaes exprime a condição de ser a directriz respectiva encontrada pela generatriz. Depois, se entre estas n equações de condição e as duas da generatriz se eliminarem $n+1$ parametros da generatriz, a equação resultante em x, y, z, será a da superficie descripta pelo movimento della.

Se o numero total dos parametros da generatriz for $n+1$: a superficie será determinada. Se for maior que $n+1$: ficarão alguns parametros arbitrarios na equação resultante, e haverá uma infinidade de superficies representadas por esta equação. Se for menor que $n+1$: eliminados os parametros, resultarão 2, 3, ... equações, conforme for n, $n-1$, ... o numero delles: e estas equações representarão uma linha; um ponto; ou darão equações de condição entre os parametros das directrizes, eliminando x, y, z.

9. Em geral uma superficie é determinada, quando se conhecem as directrizes, a natureza de generatriz, a lei do seu movimento, e a das mudanças por que ella passa neste movimento. Para cada ponto da superficie será a generatriz determinada, quando houver um numero limitado de linhas, da natureza da generatriz, que passem por este ponto e encontrem as directrizes. Se a generatriz assim determinada for unica, não passará pelo ponto dado senão uma *folha* da superficie: se o não for, passarão tantas folhas, quantas são nesse ponto as generatrizes do mesmo systema.

Do plano tangente.

10. Para definir o plano tangente como prolongamento de uma face infinitesima da superficie, é necessario que á roda do ponto de contacto haja essa face, isto é, que *neste ponto as tangentes a todas as curvas traçadas por elle na superficie existam no mesmo plano.* F. n.º 49.

O raciocinio empregado por M. Fourcy (n.º 49.) para demonstrar este theorema suppõe a generatriz de fórma constante; mas applica-se igualmente, quando esta linha se suppõe variavel.

Com effeito, se os pontos da secção da corda com a curva se approximam um do outro pela lei de continuidade, a tangente é o limite da secante, quer esta approximação resulte só do movimento da secante, quer resulte promiscuamente desse movimento e da mudança de fórma da curva, com tanto que a mudança se faça tambem pela lei de continuidade. Esta approximação indefinida dos pontos da secção é o caracter distinctivo da relação que ha entre a secante e a tangente: nem se funda em outra consideração a definição da tangente como limite da secante.

Assim a mudança successiva do plano das tres secantes, e da posição destas linhas, pela lei da continuidade, conduz sempre ao theorema que se quer demonstrar. Por onde se vê que a difficuldade proveniente da applicação do mesmo raciocinio ao caso da mudança de fórma da generatriz não subsiste.

11. O theorema, de que se tracta, tambem resulta de considerações analyticas.

Seja $$z = f(x, y) \quad \ldots\ldots (1)$$

a equação da superficie;

e $$y=\varphi(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

a da projecção sobre o plano (xy) d'uma linha traçada nella arbitrariamente. Esta linha será a intersecção do cylindro projectante, cuja equação é (2), com a superficie; e a sua projecção sobre (xz) se achará eliminando y entre as equações (1) e (2), isto é, considerando y em (1) como uma funcção de x dada por (2).

Designemos por p e q os coefficientes differenciaes parciaes de z, em ordem a x e y consideradas como variaveis independentes; e por $\frac{dz}{dx}$ o coefficiente differencial de z tirado da equação (1), quando y se considera nella como funcção de x dada por (2). As equações da tangente á curva, de que se tracta, serão:

$$y-y'=\frac{dy}{dx}(x-x'),\ z-z'=\frac{dz}{dx}(x-x')=\left(p+q\frac{dy}{dx}\right)(x-x').$$

Se entre estas equações eliminarmos $\frac{dy}{dx}$, a equação resultante, por ser independente da fórma de (2), pertencerá a todas as linhas traçadas sobre a superficie pelo ponto (x, y, z). Esta eliminação dá a equação de um plano,

$$q(y-y')+p(x-x')=z-z',\ldots\ldots\ldots\ldots(3):$$

logo as tangentes a todas as curvas traçadas na superficie pelo ponto (x, y, z) estão no mesmo plano tangente.

Deve porém exceptuar-se o caso em que algum dos coefficientes p ou q se torne $\frac{0}{0}$ no ponto (x, y, z); o que acontece em certos pontos singulares, como no vertice de um cone.

Se a equação da superficie fosse dada debaixo da fórma

$$F(x, y, z)=0,$$

as suas differenciaes em ordem a x e y dariam

dF

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)p=0\,,\ \left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)q=0\,;\ \ldots\ldots\ldots(4)$$

e substituindo na equação do plano tangente as expressões de p e q tiradas dellas, esta equação tomaria a fórma mais symmetrica

$$(x-x')\left(\frac{dF}{dx}\right)+(y-y')\left(\frac{dF}{dy}\right)+(z-z')\left(\frac{dF}{dz}\right)=0.$$

Das differentes especies de superficies.

12. *Superficies planificaveis.* Estas superficies podem considerar-se como geradas pelo movimento de uma recta que é sempre tangente á aresta de reversão. F.n.º 53.

Sejam

$$x=\varphi(z),\ y=\psi(z)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

as equações da aresta de reversão. As equações da generatriz, tangente a ella, serão:

$$x-\varphi(\alpha)=(z-\alpha)\varphi'(\alpha),\ y-\psi(\alpha)=(z-\alpha)\psi'(\alpha)\ldots\ldots(2);$$

sendo $[\alpha,\ \varphi(\alpha),\ \psi(\alpha)]$ o ponto variavel de contacto da generatriz com a aresta.

A eliminação de α entre as equações (2) da generatriz daria a equação da superficie; mas esta equação não se póde estabelecer no estado finito, em quanto não se attribuem formas determinadas á funcções α e ψ.

Como as equações differenciaes parciaes da 2.ª ordem equivalem a equações finitas com duas funcções arbitrarias, vejamos se fazemos desapparecer pela differenciação as funcções φ e ψ.

Differenciando as equações (2) em ordem a x e a y, resultarão quatro, nas quaes haverá φ', φ'', ψ', ψ'', $\frac{d\alpha}{dx}$, $\frac{d\alpha}{dy}$; e eliminando $\frac{d\alpha}{dx}$ e $\frac{d\alpha}{dy}$ entre estas quatro, ficarão as duas:

$$\frac{p\varphi'(\alpha)-1}{p\psi'(\alpha)}=\frac{\varphi''(\alpha)}{\psi''(\alpha)},\ \frac{q\psi'(\alpha)-1}{q\varphi'(\alpha)}=\frac{\psi''(\alpha)}{\varphi''(\alpha)},$$

que resolvidas em ordem a p e q darão expressões da fórma

$$p = f(\alpha),\ q = f_1(\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Finalmente, differenciando as equações (3) em ordem a x e y, resultarão as quatro:

$$r = f'(\alpha)\frac{d\alpha}{dx},\ s = f'(\alpha)\frac{d\alpha}{dy},\ s = f'_1(\alpha)\frac{d\alpha}{dx},\ t = f'_1(\alpha)\frac{d\alpha}{dy},$$

das quaes se tira

$$\frac{r}{s} = \frac{s}{t},\ \text{ou}\ rt - s^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Tal é a equação differencial das superficies planificaveis (Ler. An. app. n.° 327). A mesma conclusão resulta de ser o plano tangente o de duas arestas consecutivas (Franc. Math. pur. n.° 806).

As equações (3) mostram que o plano tangente é o mesmo para todos os pontos da generatriz, que passa por um ponto $[\alpha,\ \varphi(\alpha),\ \psi(\alpha)]$ da aresta de reversão.

F. n.° 57. **13.** *Superficies de revolução.* Estas superficies, descriptas pela revolução d'uma linha generatriz em torno de um eixo director, podem tambem considerar-se como geradas pelo movimento de um circulo de raio variavel, parallelamente a si mesmo, de modo que o centro percorra o eixo e que a circumferencia encontre sempre uma directriz.

Sejam $$\varphi = 0,\ \psi = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

as equações da directriz. Tomando o eixo como eixo dos z, as equações do circulo gerador serão

$$z = \alpha,\ x^2 + y^2 = \beta.$$

A eliminação de x, y, z, entre estas equações e (5) dará uma resultante, que, resolvida em ordem a α, terá a fórma $\alpha = \Phi(\beta)$ dependente da natureza da directriz; e a equação da superficie será

$$z = \Phi(x^2 + y^2).$$

Differenciando esta equação successivamente em ordem a x e y, e dividindo uma das equações resultantes pela outra, acha-se a equação differencial das superficies de revolução,

$$py - qx = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

(Franc. Math. pur. n.os 662 e 745).

14. *Superficies torcidas ou enviezadas.* Sejam: F.n.° 61.

$$x = \alpha z + \gamma,\ y = \beta z + \delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

as equações da generatriz;

e $\quad M_1 = 0,\ N_1 = 0;\ M_2 = 0,\ N_2 = 0;\ M_3 = 0,\ N_3 = 0;$

as das tres directrizes.

Eliminando x, y, z entre as equações de cada directriz, e as da generatriz, resultarão tres equações de condição entre os parametros α, γ, β, δ, das quaes se tirarão expressões da fórma

$$\gamma = \varphi(\alpha),\ \beta = \psi(\alpha),\ \delta = \pi(\alpha);$$

e estas substituidas em (7) darão

$$x = \alpha z + \varphi(\alpha),\ y = z\psi(\alpha) + \pi(\alpha) \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

A eliminação de α entre as equações (8) não se póde fazer sem conhecer as fórmas de φ, ψ, π, e por conseguinte sem conhecer as equações das tres directrizes. Quando aquellas fórmas forem conhecidas, achar-se-ha a equação da superficie, eliminando α entre as duas equações do systema (8), que a representa.

15. Para ter a equação differencial das superficies enviezadas sem φ, ψ, π, será necessario recorrer ás differenças parciaes da 3.ª ordem. O calculo, póde fazer-se do modo seguinte.

Differenciando as equações (8) em ordem a x e y successivamente, resultam:

$$1=\alpha p+(z+\varphi')\frac{d\alpha}{dx},\quad 0=\alpha q+(z+\varphi')\frac{d\alpha}{dy},$$

$$0=p\psi+(z\psi'+\pi')\frac{d\alpha}{dx},\ 1=q\psi+(z\psi'+\pi')\frac{d\alpha}{dy},$$

das quaes se tira

$$\psi=\frac{1-\alpha p}{q}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9).$$

Differenciando (9) em ordem a x e y, resulta

$$\psi'\frac{d\alpha}{dx}=-\frac{q\left(\alpha r+p\dfrac{d\alpha}{dx}\right)+(1-\alpha p)s}{q^2},\ \psi'\frac{d\alpha}{dy}=-\frac{q\left(\alpha s+p\dfrac{d\alpha}{dy}\right)+(1-\alpha p)t}{q^2},$$

das quaes se tira

$$\frac{\dfrac{d\alpha}{dx}}{\dfrac{d\alpha}{dy}}=\frac{\alpha qr+(1-\alpha p)s}{\alpha qs+(1-\alpha p)t}=\frac{1-\alpha p}{-\alpha q},$$

ou, reduzindo,

$$(1-\alpha p)^2t+2(1-\alpha p)\alpha qs+\alpha^2q^2r=0\ldots\ldots\ldots(10).$$

Differenciando (10) em ordem a x e y, resultam equações da fórma:

$$C\frac{d\alpha}{dx}=2(1-\alpha p)\alpha tr-(1-\alpha p)^2\frac{dt}{dx}-2(1-\alpha p)\alpha\left(s^2+q\frac{ds}{dx}\right)-\alpha^2q^2\frac{dr}{dx},$$

$$C\frac{d\alpha}{dy}=-2(1-\alpha p)\alpha q\frac{ds}{dy}-(1-\alpha p)^2\frac{dt}{dy}+\alpha^2\left(2qs^2-q^2\frac{dr}{dy}-2qrt\right);$$

ou, substituindo na primeira em logar de α^2q^2, e na segunda em logar de $(1-\alpha p)^2$, as suas expressões tiradas de (10):

$$C\frac{d\alpha}{dx}=(1-\alpha p)\left\{2\alpha\left(rt-s^2-q\frac{ds}{dx}\right)-(1-\alpha p)\left(\frac{dt}{dx}-\frac{t}{r}\frac{dr}{dx}\right)+2\alpha\frac{qs}{r}\;\frac{dr}{dx}\right\},$$

$$C\frac{d\alpha}{dy}=\alpha q\left\{-2\alpha(rt-s^2)+2(1-\alpha p)\left(\frac{s}{t}\;\frac{dt}{dy}-\frac{ds}{dy}\right)+\alpha q\left(\frac{r}{t}\frac{dt}{dy}-\frac{dr}{dy}\right)\right\}.$$

Logo

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}}=\frac{1-\alpha p}{-\alpha q}=\frac{(1-\alpha p)\left\{2\alpha\left(rt-s^2-q\frac{ds}{dx}\right)-(1-\alpha p)\left(\frac{dt}{dx}-\frac{t}{r}\frac{dr}{dx}\right)+2\alpha\frac{qs}{r}\frac{dr}{dx}\right\}}{\alpha q\left\{-2\alpha(rt-s^2)+2(1-\alpha p)\left(\frac{s}{t}\frac{dt}{dy}-\frac{ds}{dy}\right)+\alpha q\left(\frac{r}{t}\frac{dt}{dy}-\frac{dr}{dy}\right)\right\}};$$

d'onde se tira

$$1-\alpha p=-\alpha q\frac{2\left(\frac{ds}{dx}-\frac{s}{r}\frac{dr}{dx}\right)+\frac{dr}{dy}-\frac{r}{t}\frac{dt}{dy}}{2\left(\frac{ds}{dy}-\frac{s}{t}\frac{dt}{dy}\right)+\frac{dt}{dx}-\frac{t}{r}\frac{dr}{dx}}.$$

Esta expressão de $1-\alpha p$ substituida em (10) dá finalmente a equação differencial das superficies enviezadas, ou antes de todas as superficies regradas (*):

$$B^2t-2ABs+A^2r=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11):$$

(*) Se, para verificar, substituirmos em logar de $t\frac{dr}{dx}$ e $r\frac{dt}{dy}$ as suas expressões tiradas das differenciaes de (4), e attendermos a que é $\frac{dt}{dx}=\frac{ds}{dy}$ e $\frac{dr}{dy}=\frac{ds}{dx}$, as expressões de A e B reduzir-se-hão a

$$A=4(rt-s^2)\frac{ds}{dy}=0\ ,\ B=4(rt-s^2)\frac{ds}{dx}=0;$$

o que torna (11) n'uma identidade. É o que deve acontecer com effeito; porque a equação geral das superficies regradas deve satisfazer ás superficies planificaveis.

sendo $\begin{cases} A = 2r\left(t\dfrac{ds}{dy} - s\dfrac{dt}{dy}\right) + t\left(r\dfrac{dt}{dx} - t\dfrac{dr}{dx}\right) \\ B = 2t\left(r\dfrac{ds}{dx} - s\dfrac{dr}{dx}\right) + r\left(t\dfrac{dr}{dy} - r\dfrac{dt}{dy}\right). \end{cases}$

16. Para construir uma superficie enviezada, determinando as suas generatrizes por meio de tres directrizes, póde empregar-se qualquer dos tres processos seguintes.

1.° De cada ponto da 1.ª directriz, como vertice, descreva-se um cone, que tenha a 2.ª por base; e determinem-se os pontos onde este cone corta a 3.ª directriz. As rectas, que unirem o vertice do cone com os pontos de intersecção, serão generatrizes da superficie: e a reunião das rectas consecutivas, assim traçadas por todos os pontos da 1.ª directriz, assentará na folha correspondente da superficie. Dizemos das *rectas consecutivas*, para que ellas assentem sobre a mesma folha da superficie; porque, d'entre as diversas generatrizes, que passam por dous pontos da directriz infinitamente vizinhos, pertençem á mesma folha as duas que estão infinitamente proximas uma da outra. No entretanto as folhas podem coincidir, quando as superficies admittem mais d'um modo de geração; como veremos em alguns exemplos.

2.° De cada ponto da 1.ª directriz, como vertice, descrevam-se dois cones, cujas bases sejam as outras duas directrizes. As intersecções destes cones serão as generatrizes, que passam pelo vertice.

3.° De um ponto da 1.ª directriz como vertice descreva-se um cone, que tenha por base a 2.ª directriz; e d'outro qualquer vertice outro cone que tenha por base a 3.ª directriz; procure-se a intersecção dos dois cones, e depois os pontos onde esta intersecção corta a 3.ª directriz. As rectas, que unirem estes pontos com o vertice do primeiro cone, serão generatrizes da superficie. Com effeito estas rectas encontram a 2.ª directriz, por serem generatrizes do primeiro cone; e encontram as 1.ª e 3.ª directrizes, por se fazerem passar por pontos dellas.

A solução antecedente é um caso particular desta.

Em logar do segundo cone póde servir um cylindro vertical, isto é, póde suppor-se o vertice deste cone collocado a uma distancia infinita acima ou abaixo do plano horizontal.

De passagem observaremos, que neste modo de descripção das superficies regradas vae incluido o das planificaveis. As superficies regradas pertencem a este genero, quando os cones, cuja intersecção deve dar as generatrizes que passam por um ponto da 1.ª directriz, se tocam em toda a extensão das suas arestas. Neste caso, sendo commum ás duas superficies o plano tangente que passa pela aresta de contacto, as tangentes ás bases dos cones, nos pontos onde ella as encontra, estão no plano tangente, e por isso a passagem de uma posição da generatriz para a consecutiva se faz no mesmo plano. Por onde se vê igualmente que a aresta de reversão, como directiz, ou a condição de não saír a generatriz do mesmo plano em duas posições consecutivas, com mais duas directrizes, determinariam completamente a superficie planificavel.

17. A geração das superficies *enviezadas* pelo encontro da generatriz com tres directrizes é a mais usada e geral; por se poderem cortar as superficies por tres planos, ou por tres quaesquer superficies, e tomar para directrizes as tres linhas de intersecção. No entretanto ha outros modos de gerar as mesmas superficies, d'entre os quaes mencionaremos os seguintes, por serem aquelles que nas applicações se encontram:

1.° Se a generatriz, além de encontrar uma linha dada, ou de ser parallela a um plano dado, deve tocar duas superficies tambem dadas: descreveremos no primeiro caso, de cada ponto da linha dada, como vertice, dous cones circumscriptos ás superficies dadas: as intersecções destes cones serão generatrizes, por tocarem as superficies e encontrarem a linha dada. No segundo caso cortaremos as duas superficies por planos parallelos ao dado, e tiraremos tangentes communs ás curvas resultantes da intersecção de cada um destes planos com as duas superficies: estas tangentes serão generatrizes, por estarem em planos parallelos ao director e tocarem as duas superficies.

Se d'outro qualquer modo se combinassem entre si as condições de encontrar uma linha, ser parallela a um plano director, e tocar uma superficie, facilmente se vê o que se deveria fazer.

2.° Se as directrizes forem tres superficies S, S', S'', que a generatriz deve tocar: determinaremos, como se acaba de dizer, uma superficie auxiliar Σ, cujas generatrizes toquem as duas superficies S, S', e encontrem uma linha qualquer L; depois acharemos a intersecção de Σ com S''; e finalmente tiraremos a esta intersecção uma tangente que encontre a linha L. Esta tangente, por encontrar L e tocar a superficie Σ, será generatriz da mesma superficie, e tocará conseguintemente S e S'; e como tambem toca S'', será generatriz da superficie procurada.

Poderemos tambem servir-nos d'um plano qualquer P; determinando a superficie auxiliar Σ, cujas generatrizes tocam S e S' e são parallelas a P; procurando depois a intersecção de Σ com S''; e finalmente tirando á mesma intersecção uma tangente parallella a P. Esta tangente, por ser parallela a P e tocar Σ, será generatriz de Σ, e por isso tocará S e S′; e como tambem toca S″, será generatriz da superficie procurada.

Fazendo variar nestes dous processos a linha auxiliar L, ou a posição do plano auxiliar P, acharemos tantas generatrizes da superficie quantas quizermos.

F. n.° 62 (*). 28. D'entre as superficies enviezadas, o hyperboloide e o paraboloide são de 2.ª ordem; e só elles o são.

Com effeito, cortemos o hyperboloide enviezado por um plano, que contenha qualquer generatriz d'um dos systemas (†). Por ser esta generatriz commum ao plano e ao hyperboloide, segue-se que eliminando uma das coordenadas entre as equações delles, a equação resultante, que é a projecção da sua intersecção sobre o plano das outras coordenadas, deve decompor-se em dous factores, um dos quaes seja do 1.° grão. Se o outro factor fosse de um grão superior ao 1.°; o ramo, que lhe corresponde, da intersecção do plano com o hyperboloide seria uma curva. Mas tirando pelos pontos desta curva generatrizes do outro systema, estas generatrizes encontrariam a do primeiro systema, como se mostra no n.° 71 de Fourcy, e por conseguinte estariam todas no plano secante; o que é impossivel, segundo o mesmo n.° Logo o segundo factor ou é constante, ou do 1.° grão: e como tambem não póde ser constante, por já sabermos que ha posições do plano secante em que a intersecção dá duas rectas, segue-se que é do 1.° grão. Por onde se vê que a intersecção do plano com o hyperboloide é do 2.° grão; e por conseguinte tambem é do mesmo grão o hyperboloide.

A demonstração precedente é applicavel ao paraboloide enviezado em virtude do n.° 73 de Fourcy.

Deste modo de demonstrar se concluiria igualmente, que, se uma superficie do 2.° grão admitte um primeiro systema de generatrizes rectilineas, tambem admitte um segundo; e que qualquer generatriz de um dos systemas é encontrada por todas as do outro. Com effeito, fazendo variar a posição do plano secante que passa por uma generatriz, em cada uma das posições ha outra generatriz, que encontra a primeira.

(†) As doutrinas dos n.os 71 e 73 de Fourcy, de que aqui nos servimos, não dependem das proposições, que tractamos de demonstrar.

O theorema proposto tambem resulta de que uma recta não póde cortar a superficie senão em dous pontos; por que, se a cortasse em tres, encontraria as tres generatrizes, que por elles passam, e assentaria sobre a superficie (n.^{os} 71 e 73).

Como as directrizes das outras superficies enviezadas são de gráo superior ás do hyperboloide e paraboloide, as mesmas superficies são de gráo superior a estes: por conseguinte o hyperboloide e o paraboloide são as unicas superficies enviezadas de 2.ª ordem.

19. Estes theoremas tambem se mostram analyticamente. Para facilitar a demonstração, supponhamos construido o parallelipipedo, de que são arestas as tres directrizes do hyperboloide enviezado, tirando por cada uma dellas dous planos respectivamente parallelos ás outras duas; e tomemos para eixos coordenados as tres parallelas a estas directrizes, que se cortam no centro do parallelipipedo: o que dá um systema de coordenadas obliquas. Sejam $2a$, $2b$, $2c$, os comprimentos das arestas (A), (B), (C), parallelas aos eixos dos x, y, z. As equações dellas serão:

$$\left.\begin{matrix} y=-b \\ z=+c \end{matrix}\right\}(\mathrm{A}),\qquad \left.\begin{matrix} x=a \\ z=-c \end{matrix}\right\}(\mathrm{B}),\qquad \left.\begin{matrix} x=-a \\ y=b \end{matrix}\right\}(\mathrm{C}).$$

Referimo-nos á fig. 24 de Fourcy; mas bem se vê que os signaes destas coordenadas podem mudar, conforme a disposição das arestas e os nomes dos eixos.

Sejam agora

$$x=mz+p,\qquad y=nz+q$$

as equações da generatriz. Eliminando x, y, z, entre estas equações e cada um dos systemas (A), (B), (C), resultarão tres equações entre m, p, n, q; e depois eliminando estes quatro parametros entre essas tres equações e as da generatriz, virá a equação procurada do hyperboloide:

$$ayz+bxz+cxy+abc=0 \;.............. \;(12).$$

Logo o hyperboloide enviezado é uma superficie de 2.ª ordem: e tem centro; por não mudar a equação (12), quando nella se mudam os signaes das tres coordenadas (Ler. An. appl. n.^{os} 151 e 152).

Em quanto ao paraboloide enviezado, tomemos o plano director para plano dos xy; a recta, que une os traços das duas directrizes sobre este plano, para eixo dos y; o meio desta recta para origem; o plano dos xz parallelo ás directrizes; e o eixo dos z tal que divida em duas partes iguaes o angulo de duas parallelas ás directrizes, tiradas pela origem. A equação da superficie referida a este systema deverá ser evidentemente mais simples.

As equações das directrizes serão:

$$y=h,\ x=az;\quad y=-h,\ x=-az;$$

e as da generatriz serão:

$$z=\gamma,\quad y=\alpha x+\beta.$$

Eliminando x, y, z, entre as equações da generatriz e as duas de cada directriz; e depois α, β, γ, entre as resultantes e as da generatriz: virá a equação do paraboloide

$$ayz=hx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(13)}.$$

Logo o paraboloide enviezado é uma superficie de 2.ª ordem sem centro. (Ler. An. appl. n.° 177).

20. Mostremos agora a identidade do hyperboloide e paraboloide enviezados com as duas superficies de 2.ª ordem, ás quaes, por serem geradas pelo movimento da ellipse sobre a hyperbole na direcção do eixo imaginario, e da hyperbole sobre a parabola, se dão os nomes de hyperboloide de uma folha e de paraboloide hyperbolico.

Para isso lembremo-nos da classificação das superficies de 2.ª ordem: na qual supporemos reduzida a equação dellas a alguma das fórmas

$$Ay^2+By^2+Cz^2=H,\quad My^2+Nz^2=Px;$$

o que sempre é possivel, como está demonstrado na Geometria analytica (Franc. Math. pur. n.° 685 e seguintes).

1.ª CLASSE.

SUPERFICIES COM CENTRO, $Ax^2+By^2+Cz^2=H$.

1.º GENERO —— *Ellipsoide* —— $+A,\ +B,\ +C$

comprehendendo	
Ponto	$H=0$
Cylindro de base elliptica	$(A,\ \text{ou}\ B,\ \text{ou}\ C)=0$
Dous planos parallelos	$(A\ \text{e}\ B,\ \text{ou}\ A\ \text{e}\ C,\ \text{ou}\ B\ \text{e}\ C)=0$

2.º GENERO —— *Hyperboloide de uma folha* —— $+A,\ +B,\ -C$

comprehendendo	
Cone asymptotico de base elliptica	$H=0$
Cylindro de base hyperbolica	$(A\ \text{ou}\ B)=0$
Cylindro de base elliptica	$C=0$
Dous planos, que se cortam	$(A\ \text{e}\ H,\ \text{ou}\ B\ \text{e}\ H)=0$
Dous planos parallelos	$(A\ \text{e}\ C,\ \text{ou}\ B\ \text{e}\ C)=0$

3.º GENERO —— *Hyperboloide de duas folhas* —— $+A,\ -B,\ -C$

comprehendendo	
Cone asymptotico de base elliptica	$H=0$
Cylindro de base hyperbolica	$(B,\ \text{ou}\ C)=0$
Dous planos, que se cortam	$(B\ \text{e}\ H,\ \text{ou}\ H\ \text{e}\ C)=0$
Dous planos parallelos	$B\ \text{e}\ C=0$

2.ª CLASSE.

SUPERFICIES SEM CENTRO, $My^2+Nz^2=Px$

1.º GENERO —— *Paraboloide elliptico* —— $+M,\ +N$

comprehendendo	
Eixo dos x	$P=0$
Plano yz	$M\ \text{e}\ N=0$
Cylindro de base parabolica	$(M,\ \text{ou}\ N)=0$

2.º GENERO —— *Paraboloide hyperbolico* —— $+M,\ -N$

comprehendendo	
Dous planos, que se cortam	$P=0$
Plano yz	$M\ \text{e}\ N=0$
Cylindro de base parabolica	$(M,\ \text{ou}\ N)=0$

Para que uma recta assente sobre alguma destas superficies é necessario, em primeiro logar, que a superficie seja indefinida no sentido da recta. Ora:

1.° Em quanto á primeira classe: o ellipsoide é limitado em todos os sentidos; e as duas folhas do hyperboloide de duas folhas são separadas por um espaço, onde não ha superficie. Logo o primeiro não póde conter uma recta indefinida. Nem tão pouco a póde conter o segundo: por que nelle, ou a recta ha de existir em um plano perpendicular ao eixo, e então não póde assentar na secção elliptica formada por esse plano; ou ha de ser obliqua ao eixo, e atravessar a parte onde não ha superficie.

2.° Em quanto á segunda classe: como o paraboloide elliptico é limitado d'um dos lados no sentido do eixo, e aberto só do lado opposto, nenhuma recta assenta nesta superficie.

Por onde se vê que não ha senão na primeira classe o hyperboloide de uma folha, e na segunda o paraboloide hyperbolico, a respeito dos quaes não mostrem as considerações precedentes a impossibilidade de assentar nelles uma recta: sem fallarmos no cylindro e no cone, por serem planificaveis. Mas já mostrámos que uma recta, movendo-se sobre tres directrizes rectilineas não parallelas a um mesmo plano, gera uma superficie de segunda ordem, que tem centro; e que uma recta movendo-se sobre duas directrizes rectilineas, com a condição de ser parallela constantemente a um plano director, gera uma superficie de segunda ordem, que não tem centro: logo estas superficies não podem ser outras senão o hyperboloide de uma folha, e o paraboloide hyperbolico.

Vê-se pois, que as superficies enviezadas geradas pelo movimento d'uma recta sobre tres não parallelas a um mesmo plano, ou sobre duas e parallelamente a um plano director, são identicas com as de segunda ordem, a que se dão os nomes d'hyperboloide de uma folha e paraboloide hyperbolico; e que estas superficies de segunda ordem teem a propriedade de sobre ellas assentar uma recta em toda a sua extensão.

21. O calculo tambem mostra esta ultima propriedade: como vamos ver.

1.° Seja a equação das superficies da primeira classe,

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}y^2-\mathrm{C}z^2=\mathrm{H}.$$

Para que uma recta

$$x=ay+b, \quad z=cy+d,$$

assente sobre as superficies representadas por aquella equação, é necessario que, eliminando duas das coordenadas entre as equações da superficie e da recta, a equação resultante tenha logar independentemente da terceira coordenada; de sorte que, para todos os valores desta coordenada, se verifique a coincidencia dos pontos correspondentes da superficie com os da recta.

Substituindo pois na primeira equação as expressões de x e z dadas pelas outras duas, virá

$$y^2(B+Aa^2-Cc^2)+2y(Aab-Ccd)+Ab^2-Cd^2=H;$$

e, para que esta equação se verifique independentemente dos valores de y, teremos:

$$B+Aa^2-Cc^2=0,\quad Aab-Ccd=0,\quad Ab^2-Cd^2=H.$$

Da primeira e terceira destas equações de condição resultam

$$a=\sqrt{\left(\frac{Cc^2-B}{A}\right)},\quad b=\sqrt{\left(\frac{H+Cd^2}{A}\right)};$$

e a segunda das mesmas equações reduz-se, em virtude destes valores, a

$$\sqrt{(Cc^2-B)(H+Cd^2)}-Ccd=0;$$

ou, transpondo, quadrando e reduzindo, a

$$Cc^2-B=\frac{BCd^2}{H}.$$

Assim os valores de a, b, c, são:

$$a=d\sqrt{\left(\frac{BC}{AH}\right)},\ b=\sqrt{\left(\frac{H+Cd^2}{A}\right)},\ c=\sqrt{\left(\frac{B}{CH}\right)}\cdot\sqrt{(H+Cd^2)},\ldots(14);$$

ficando arbitrario o de d.

Em quanto na equação da superficie os coefficientes dos quadrados das variaveis, com os signaes explicitos, são $+A$, $+B$, $-C$, os valores (14) são reaes: mas quando muda o signal de B, ou o de C, isto é, quando a superficie é um hyperboloide de duas folhas, ou um ellipsoide, o valor de a torna-se imaginario. Logo na 1.ª classe das superficies de 2.ª ordem só o hyperboloide de uma folha tem a propriedade de assentar nelle uma recta.

2.º Seja a equação das superficies da 2.ª classe,

$$My^2 - Nz^2 = Px.$$

Para que nestas superficies assente uma recta

$$x = ey + f, \quad z = gy + h,$$

acharemos, por um processo semelhante ao precedente, as equações de condição:

$$M - Ng^2 = 0, \quad 2Ngh + Pe = 0, \quad Nh^2 + Pf = 0,$$

ou

$$g = \sqrt{\frac{M}{N}}, \; f = -\frac{N}{P}h^2, \; e = -\frac{2\sqrt{MN}}{P}h \; \ldots\ldots \; (15);$$

as quaes mostram igualmente que, em quanto os coefficientes de y^2 e z^2, na equação da superficie, forem $+M$ e $-N$, os valores (15) serão reaes; mas que, se um daquelles coefficientes mudar de signal, isto é, se a superficie for um paraboloide elliptico, g e e se tornarão imaginarios.

Logo na 2.ª classe das superficies de 2.ª ordem só o paraboloide hyperbolico contém uma recta em toda a sua extensão.

22. Attendendo ás equações, das quaes provêm (14), vê-se que os valores de a e b admittem, em virtude dos radicaes, todas as combinações de signaes; e que o de c deve ter o signal $\pm$, conforme se tomarem com o mesmo signal, ou com signal differente, os radicaes de a e b. Destas equações resulta o seguinte quadro, para cada valor positivo de d:

$$+c\begin{cases} +a, +b \ldots\ldots AB \quad \ldots\ldots A'A'' \\ -a, -b \ldots\ldots a_ib_i \quad \ldots\ldots A'A'' \end{cases}$$

$$-c\begin{cases} -a, +b \ldots\ldots ab \quad \ldots\ldots a'a'' \\ +a, -b \ldots\ldots a_{ii}b_{ii} \quad \ldots\ldots a'a'' \end{cases}$$

o que dá a figura (3) conforme com os signaes de a, b, c.

Uma analyse semelhante podia ter logar a respeito das equações (15): attendendo a que, em virtude das equações, das quaes se tiraram os valores de g e e, os radicaes, que nelles entram, se devem tomar com o mesmo signal.

23. No hyperboloide de uma folha as projecções das rectas, de que se tracta, sobre o plano (xy) são tangentes á secção da superficie por este plano.

Com effeito, procurando os pontos, onde a projecção $x=ay+b$ sobre (xy) encontra a ellipse de secção $Ax^2+By^2=H$, temos as equações:

$$Ax^2+By^2=H\,,\ x=ay+b=dy\sqrt{\left(\frac{BC}{AH}\right)}+\sqrt{\left(\frac{H+Cd^2}{A}\right)};$$

entre as quaes eliminando x, vem:

$$\left\{y\sqrt{\left(\frac{B}{H}\right)}\cdot\sqrt{(H+Cd^2)}+d\sqrt{C}\right\}^2=0,\quad y=-d\sqrt{\frac{CH}{B(H+Cd^2)}}.$$

Como as duas raizes desta equação são iguaes, vê-se que os pontos de secção se reduzem a um só, e que a recta é tangente: o que se póde verificar, substituindo este valor no de $\frac{dx}{dy}$ tirado da equação da ellipse; porque a substituição dá

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{B}{A}\cdot\frac{y}{x}=d\sqrt{\left(\frac{BC}{AH}\right)}=a.$$

M. Fourcy tambem demonstra esta propriedade no caso particular de ser o hyperboloide de revolução (Geom. descript. n.º 64) (†).

(†) A equação da secção do hyperboloide de revolução por um plano é (F., n.º 70),

$$y^2=\left(\frac{\text{sen}^2 6}{\text{sen}^2\alpha}-1\right)x^2+2bx\cos 6+a^2-b^2.$$

Para ter a secção por um plano parallelo ao do annel, dever-se-hia fazer

Para a projecção sobre (yz), temos,

$$By^2 - Cz^2 = H\,,\quad z = cy + d = y\sqrt{\left(\frac{B}{CH}\right)}\cdot\sqrt{(H + Cd^2)} + d\,;$$

$\beta = 0$, com $b = \infty$, nesta equação: o que nada daria. Mas, transportando a origem dos x ao ponto, onde o eixo da superficie atravessa o plano secante, e exprimindo b em funcção da altura h deste ponto acima do plano do annel, é:

$$b = h\cot\beta\,,\quad x = x' + \frac{h}{\operatorname{sen}\beta}\,;$$

o que substituido na equação precedente, e feitas as reducções, dá:

$$y^2 + x'^2 = a^2 + h^2\cot^2\alpha.$$

Esta equação é a de um circulo de raio igual á ordenada da secção central feita pelo eixo (F. n.º 69.)

Como a altura h é commum a todos os pontos da secção parallela ao annel: se posermos z em logar de h, a equação, ficando independente da altura, será a da superficie. Temos assim a equação da superficie

$$y^2 + x'^2 = a^2 + z^2\cot^2\alpha\,,$$

ou

$$\frac{y^2 + x'^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2\operatorname{tang}^2\alpha} = 1.$$

Esta equação, comparada com a equação geral do hyperboloide de uma folha,

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{x^2}{B^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1\,,$$

que para o de revolução se reduz a

$$\frac{y^2 + x^2}{A^2} - \frac{z^2}{C^2} = 1\,,$$

mostra que os dous eixos iguaes do hyperboloide de revolução são iguaes ao diametro do annel, e que o terceiro é $2a\operatorname{tang}\alpha$.

Se $\alpha = 90°$: a equação é a do cylindro recto,

$$y^2 + x^2 = a^2.$$

que dão

$$\left\{y\sqrt{\left(\frac{BC}{H}\right)}.d+\sqrt{(H+Cd^2)}\right\}^2=0\,,\; y=-\frac{\sqrt{H(H+Cd^2)}}{d\sqrt{BC}},\; z=-\frac{H}{Cd};$$

e $$\frac{dz}{dy}=\frac{B}{C}.\frac{y}{z}=\sqrt{\left(\frac{B}{CH}\right)}.\sqrt{(H+Cd^2)}=c:$$

logo a projecção sobre (yz) é tangente á secção da superficie por este plano.

Poderiamos fazer um calculo semelhante a respeito de (xz); mas não é necessario, porque a symmetria da equação relativamente a x e y mostra que a conclusão deve ser a mesma.

No paraboloide hyperbolico temos semelhantemente para (xy) as equações:

$$x=ey+f,\; My^2=Px\,,$$

que dão, em virtude das equações (15),

$$\left\{y+h\sqrt{\left(\frac{N}{M}\right)}\right\}^2=0\,,\; y=-h\sqrt{\left(\frac{N}{M}\right)};$$

e $$\frac{dx}{dy}=\frac{2M}{P}.y=-\frac{2\sqrt{MN}}{P}h=e.$$

Para (xz) temos:

$$x=\frac{e}{g}z+f-\frac{e}{g}h=-\frac{2N}{P}hz+\frac{N}{P}h^2,\; Nz^2=-Px\,,$$

que dão

$$N(z-h)^2=0\,,\;\; z=h\,;$$

e $$\frac{dx}{dz}=-\frac{2N}{P}z=-\frac{2N}{P}h=\frac{e}{g}.$$

Donde resulta que as projecções da recta sobre os planos (xy) e (xz) são tangentes ás secções do paraboloide por estes planos (†).

24. Tomando tres generatrizes do hyperboloide enviezado para directrizes d'um novo hyperboloide, este segundo hyperboloide coincide com o primeiro.

Ainda que a demonstração de M. Fourcy seja rigorosa, não é menos clara e elegante a de M. Leroy, que reproduzimos com alguma modificação.

Lemma 1.° Corte-se o triangulo ABC (fig. 4) por uma recta RQP; e por B tire-se BH parallela a esta secante.

As parallelas dão:

$$\mathrm{AR:BR::AP:HP}, \quad \mathrm{CQ:BQ::CP:HP};$$

logo

$$\frac{\mathrm{BR.AP}}{\mathrm{AR}}=\frac{\mathrm{BQ.CP}}{\mathrm{CQ}}, \text{ ou } \mathrm{CQ.BR.AP=CP.AR.BQ},$$

isto é, o producto dos tres segmentos não continuos igual ao producto dos outros tres (††).

(†) Para (yz) teriamos, procedendo do mesmo modo,

$$z=gy+h, \ My^2=Nz^2;$$

ou

$$z=gy+h, \ z=\pm gy, \ \frac{dz}{dy}=\pm g.$$

A intersecção da recta, de que se tracta, com $z=+gy$ dá $y=\infty$; e com $z=-gy$ dá $y=-\frac{h}{2g}$. Assim aquella recta é parallela á primeira, e encontra a segunda no ponto $\left(-\frac{h}{2g}, +\frac{h}{2}\right)$.

(††) Tambem se póde usar da recta RC em logar da parallela BH. Temos então

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QR}}=\frac{\mathrm{sen\,BRQ}}{\mathrm{sen\,RBC}}, \ \frac{\mathrm{QC}}{\mathrm{QR}}=\frac{\mathrm{sen\,CRQ}}{\mathrm{sen\,RCB}}, \ \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PR}}=\frac{\mathrm{sen\,ARP}}{\mathrm{sen\,RAP}}, \ \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{PR}}=\frac{\mathrm{sen\,PRC}}{\mathrm{sen\,PCR}};$$

logo

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{sen\,RCB}}{\mathrm{sen\,RBC}}\cdot\frac{\mathrm{sen\,RAP}}{\mathrm{sen\,RCP}}=\frac{\mathrm{BR.CR}}{\mathrm{CR.AR}}=\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{AR}},$$

Lemma 2.° Cortem-se os lados oppostos do quadrilatero enviezado

---

ou $$CP \cdot AR \cdot BQ = CQ \cdot BR \cdot AP.$$

Applicando este theorema, na fig. 26 de Fourcy, ao triangulo NKL cortado por OQ, teriamos

$$KO \cdot NQ \cdot LM = NO \cdot LQ \cdot KM,$$

ou $$\frac{KO}{NO} = \frac{LQ}{NQ} \cdot \frac{KM}{LM} = \frac{AE}{BE} = \frac{LQ}{NQ} \cdot \frac{CF}{DF},$$

isto é $$\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF} \cdot a,$$

que é a proposição do Scolio III. do n.° 73 do mesmo auctor.

Na mesma figura temos

$$\frac{AG}{CG} = \frac{AQ}{KQ}, \quad \frac{BH}{DH} = \frac{BQ}{LQ}, \quad \frac{AQ}{KQ} = \frac{BQ}{NQ}:$$

logo $$\frac{AG}{CG} \cdot \frac{DH}{BH} = \frac{LQ}{NQ};$$

o que, substituido em $$\frac{AE}{BE} = \frac{LQ}{NQ} \cdot \frac{CF}{DF},$$

dá o lemma 2.° $$AE \cdot BH \cdot CG \cdot DF = AG \cdot BE \cdot CF \cdot DH;$$

d'onde se tira $$\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF} \cdot \frac{\frac{AG}{CG}}{\frac{BH}{DH}};$$

e por conseguinte $$a = \frac{\frac{AG}{CG}}{\frac{BH}{DH}}.$$

Depois do que dizemos no texto, escusada fôra esta nota, se não quizessemos facilitar a intelligencia das indicações de M. Fourcy no fim do Scolio III. do n.° 73.

ABCD (fig. 5) por duas secantes MN, PQ, que se encontrem em qualquer ponto O.

As rectas MP e QN, por estarem no plano das duas MN e PQ, devem concorrer; e, por existirem respectivamente nos planos BAC e ACD, cuja intersecção é AR, deve o seu ponto de concurso estar na diagonal AR. Applicando pois o lemma 1.º aos triangulos ABC, ADC, cortados por MR, QR, teremos

$$AM.BP.CR = AR.CP.BM, \quad AQ.DN.CR = AR.CN.DQ:$$

logo

$$\frac{AM.BP}{AQ.DN} = \frac{CP.BM}{CN.DQ}, \text{ ou } AM.BP.CN.DQ = AQ.DN.CP.BM,$$

isto é, o producto de quatro segmentos do quadrilatero não continuos igual ao producto dos outros quatro.

Inversamente: quando esta igualdade se verifica, as secantes MN, PQ, encontram-se. Por quanto, se não se encontrassem, poderia tirar-se pelo ponto M outra secante MN′, que encontrasse PQ; e applicando a MN′ e PQ o theorema, que acabamos de demonstrar, teriamos a igualdade

$$AM.BP.DQ.CN' = AQ.DN'.BM.CP,$$

que, dividida pela precedente, daria a equação absurda

$$\frac{CN'}{CN} = \frac{DN'}{DN}, \text{ ou } DN(CN + NN') = CN(DN - NN').$$

Dando á igualdade precedente a forma $\dfrac{\dfrac{AM}{BM}}{\dfrac{DN}{CN}} = \dfrac{\dfrac{AQ}{DQ}}{\dfrac{BP}{CP}}$,

vê-se que o quociente das razões, que teem entre si os segmentos formados por uma secante em dous lados oppostos, é igual ao quociente das razões, que teem entre si os segmentos formados por outra secante nos outros dous lados; com tanto que os antecedentes das razões, que servem de dividendos, sejam adjacentes ao mesmo vertice do quadrilatero. Assim, designando por $q(A)$ o quociente que corresponde a uma secante A, e por $q(A')$ aquelle que corresponde a outra secante (A′), teremos:

$$q(A) = q(A').$$

Posto isto, sejam (fig. 6) A, A', A'', tres directrizes d' um hyperboloide; e B, B', B'', tres generatrizes, que tomaremos para directrizes d' outro hyperboloide. E tiremos uma generatriz A''' deste segundo hyperboloide.

Para mostrar que A''' assenta sobre o primeiro hyperboloide, basta fazer ver que, tirando por qualquer dos seus pontos O uma recta b''' que encontre A e A', esta recta tambem encontra A'', e por conseguinte é generatriz do primeiro hyperboloide. Ora, se no quadrilatero formado por A, A', B, B', considerarmos os quatro systemas de secantes

$$B'' \text{ e } A''', \; B'' \text{ e } A'', \; b''' \text{ e } A''', \; b''' \text{ e } A'',$$

nos tres primeiros dos quaes as secantes se cortam, teremos a respeito destes, em virtude do lemma 2.°, as igualdades:

$$q(B'')=q(A''), \; q(B'')=q(A'''), \; q(b''')=q(A''');$$

das quaes se tira $$q(A'')=q(b'''):$$

logo, em virtude da inversa do mesmo lemma, b''' encontra A''.

Assim, por cada ponto O de A''' passa uma generatriz do primeiro hyperboloide, sobre o qual por isso assenta A'''; e como se póde dizer o mesmo a respeito de todas as generatrizes do segundo hyperboloide, segue-se que este coincide com o primeiro (†).

(†) M. Leroy, em vez de suppor que b''', além de encontrar A e A', passa por um ponto O de A''', e provar depois que é generatriz do primeiro hyperboloide, isto é, que tambem encontra A'': suppõe que b''' é generatriz, e depois mostra que encontra A'''. Na verdade, podendo b''' tomar posições indefinidamente proximas umas das outras; e encontrando nellas A''' em pontos differentes, por não se conservar no mesmo plano na passagem de uma para outra consecutiva: vê-se, que os pontos do encontro das generatrizes successivas do primeiro hyperboloide com A''' ficarão tam visinhos como se quizer, e conseguintemente A''' assentará toda no mesmo hyperboloide. No entre tanto este modo de concluir carece de considerações infinitesimaes, ou d' outras equivalentes, as quaes se evitam com a modificação que fizemos.

Para mostrar porém, que duas generatrizes de differente systema estão no mesmo plano, é mais directo, e estranho a considerações infinitesimaes, o modo de concluir de M. Leroy.

De qualquer modo: feita a escolha da recta (A'' ou A'''), a respeito da qual se quer mostrar que encontra b''', o raciocinio é absolutamente o mesmo.

Em quanto á demonstração de M. Fourcy: sujeitar o plano tirado por AA'

25. Sejam (fig. 7) A, A', A'', tres generatrizes da superficie; e tiremos um numero qualquer de rectas B, B', B'', ..., que as cortem. Considerando no quadrilatero formado por A, A', B, B', os systemas de secantes

$$B'' \text{ e } A'',\ B''' \text{ e } A'',\ \ldots\ldots,\ B^{(n)} \text{ e } A'',$$

temos pelo lemma 2.°:

$$q(A'') = q(B'') = q(B''') \ldots = q(B^{(n)}) = a,$$

pondo a constante

$$a = \frac{B_1 A''_1}{A'_1 A''_1} : \frac{B'_1 Q'}{P'Q'}:$$

ou

$$\frac{B_1 B^{(n)}_1}{B'_1 B^{(n)}_1} = a\, \frac{A'_1 P^{(n)}}{P'P^{(n)}},$$

chamando $B^{(n)}_1$, $P^{(n)}$, $Q^{(n)}$, os pontos onde uma recta qualquer $B^{(n)}$ encontra A, A', A'': o que é o theorema enunciado no fim do Scolio III. do n.° 73 de Fourcy.

Se as rectas A, A', A'' são parallelas, é $\frac{B_1 A_1''}{A_1' A_1''} = \frac{B_1' Q'}{P'Q'}$;

logo $a = 1$, e $\frac{B_1 B^{(n)}_1}{B_1' B^{(n)}_1} = \frac{A_1' P^{(n)}}{P'P^{(n)}}$;

que é o theorema analogo relativamente ao paraboloide.

(F. fig. 23) a passar pelo ponto O, para ter uma generatriz; ou não o sujeitar a passar por O, e tiral-o arbitrariamente; nada influe na sua demonstração: obrigando só, no primeiro caso, a provar de mais a coincidencia do ponto m''' com O.

Tambem observaremos, que as considerações feitas para demonstrar o lemma 2.° indicam um meio facil de tirar, entre os lados oppostos d'um quadrilatero, duas secantes que se cortem. Basta tomar arbitrariamente uma das secantes MN, e um dos pontos Q onde a outra deve cortar um dos outros dous lados AD; depois tirar QN, e produzil-a até encontrar em R a diagononal AC; e finalmente tirar por R e por M a recta MR. A intersecção P desta recta com o lado BC será o segundo ponto da secante procurada PQ.

26. É facil mostrar (F. n.° 72) que cada uma das faces do parallelipipedo construido sobre tres directrizes do modo indicado no n.° 19, contém duas directrizes, uma d'um systema, outra do outro; por conseguinte as faces são tangentes, e o parallelipipedo é circumscripto á superficie. F. n.° 72.

Pela construcção deste parallelipipedo tambem se vê facilmente, que a qualquer generatriz de um hyperboloide enviezado corresponde sempre outra parallela de differente systema (F. n.° 72).

Cumpre porém observar que esta propriedade não se verifica no paraboloide enviezado. Com effeito, se nesta superficie fosse a generatriz de um systema parallela a alguma do outro systema, tambem seria parallela ao plano director deste segundo systema, e não poderia conseguintemente encontrar as generatrizes d'elle; nem poderia ser lhes parallela, por ellas não estarem no mesmo plano com aquella, a que já se suppõe parallela: o que é contradictorio com o que está demonstrado (F. n.° 73).

27. Sendo muito notavel a geração do hyperboloide de uma folha, e do paraboloide hyperbolico, pelo movimento de uma linha recta: para tornar ainda mais saliente a identidade destas superficies com o hyperboloide e paraboloide enviezados, vamos demonstrar analyticamente, que ellas admittem, como as ultimas, dous modos de geração pela linha recta.

Segundo o que vimos no n.° 22 relativamente ás equações (14), a que estão sujeitas as rectas que assentam sobre o hyperboloide d'uma folha, os radicaes de a e b admittem ambos os signaes $+$ e $-$; e o de c muda de signal, quando muda um dos dous, o de a ou o de b. D'onde resulta, que, se distribuirmos as rectas em dous systemas, um daquellas nas quaes o radical de a se toma com o signal $+$, e o outro daquellas nas quaes o mesmo radical se toma com o signal $-$: para que duas rectas de differente systema tenham a mesma projecção sobre

(xy), é necessario que sejam contrarios os signaes de c, e os de d. Teremos pois:

1.º SYSTEMA **2.º SYSTEMA.**

$$x=ay+b\ ,\ z=cy+d\ ..(A) \qquad x=ay+b\ ,\ z=-c\ y-d\ ..(B)$$
$$x=a'y+b'\ ,\ z=c'y+d'\ ..(A') \qquad x=a'y+b',\ z=-c'\ y-d'\ ..(B')$$
$$x=a''y+b'',\ z=c''y+d''..(A'') \qquad x=a''y+b'',\ z=-c''y-d''..(B'')$$

....

Para que se cortem duas rectas (A) e (A′) do mesmo systema, ou duas (A) e (B′) de differente systema, devem verificar-se respectivamente as condições seguintes (Franc. Math. pur. n.º 666):

(A) com (A′) (A) com (B′)

$$(a-a')(d-d')=(c-c')(b-b') \qquad (a-a')(d+d')=(c+c')(b-b').$$

Pondo nestas equações as expressões (14), em logar de a, b, c, a', b', c'; e observando, que a cada signal do radical de a' correspondem dous do radical de b', e que os signaes de c' mudam com os de b'; resultam:

$$\frac{C}{H}(d-d')^2=\left\{\sqrt{(1+\frac{C}{H}d^2)}\mp\sqrt{(1+\frac{C}{H}d'^2)}\right\}^2,$$

$$\frac{C}{H}(d\mp d')(d+d')=\left\{\sqrt{1+\frac{C}{H}d^2}\pm\sqrt{1+\frac{C}{H}d'^2}\right\}.\left\{\sqrt{1+\frac{C}{H}d^2}\mp\sqrt{1+\frac{C}{H}d'^2}\right\};$$

na segunda das quaes se devem tomar simultaneamente ambos os signaes superiores, ou ambos os inferiores.

A′ primeira não se póde satisfazer, quando se toma o signal inferior, como facilmente se vê desenvolvendo os dous membros: e, quando se toma o signal superior, esta equação reduz-se a $\frac{C}{H}(d-d')^2=0$; o que

dá $$d=d',\quad \text{e}\quad a=a',\ b=b',\ c=c',$$

em virtude de (14): logo as rectas coincidem.

A

A segunda é uma identidade.

Por tanto no hyperboloide de uma folha duas rectas do mesmo systema nunca estão no mesmo plano; e duas de systema differente estão sempre no mesmo plano. Donde resultam dous modos de geração da superficie: um, tomando por directrizes tres rectas do 1.° systema; outro, tomando por directrizes tres rectas do 2.° systema.

28. Para achar a intersecção de duas rectas (A) e (B') de differente systema, eliminemos z entre as equações das suas projecções sobre o plano (yz). Virá:

$$y=-\frac{d+d'}{c+c'}=-\frac{d+d'}{\sqrt{\frac{B}{CH}}\cdot\left\{\sqrt{H+Cd^2}\pm\sqrt{H+Cd'^2}\right\}}=-\sqrt{\frac{H}{BC}}\cdot\frac{\sqrt{H+Cd^2}\mp\sqrt{H+Cd'^2}}{d-d'}.$$

As rectas serão parallelas, quando for $y=\infty$; isto é, quando for $d=d'$, $a=a'$, e se tomar o signal inferior: ou

$$d=d',\ a=a';\quad \text{e}\quad c=-c',\ b=-b'.$$

Assim as projecções sobre os planos (xy) e (yz) das rectas parallelas serão respectivamente parallelas, e cortarão os eixos dos x e dos z a distancias iguaes para uma e outra parte da origem. Logo as generatrizes parallelas ficarão symmetricamente collocadas a respeito da origem, a qual dividirá em duas partes iguaes todas as secantes da superficie, que por ella passarem e terminarem nas mesmas generatrizes.

Comparando entre si duas quaesquer equações correspondentes (A) e (B), vê-se que a cada generatriz de um systema corresponde sempre outra do outro systema, que a encontra; e que estas duas generatrizes estão no mesmo plano projectante sobre (xy), e collocadas symmetricamente a respeito de uma parallela ao eixo dos z, tirada pelo seu ponto de concurso. Esta propriedade é analoga á, que se acha na Geometria descriptiva de Fourcy (n.° 65), relativa ao hyperboloide de revolução.

29. Passemos ao paraboloide hyperbolico. Como nas equações (15) do n.° 21 os radicaes, que entram em g e e, se devem tomar com o mesmo signal: se distribuirmos as rectas em dous systemas, um em que se tome o radical de e com o signal $+$, outro em qne se tome com o signal $-$; g e h devem ter ambos signaes contrarios nas equações das

rectas de differente systema, cuja projecção sobre o plano (xy) for commum. Assim:

1.° SYSTEMA.	2.° SYSTEMA.
$x=e\,y+f,\quad z=g\,y+h\ldots(\mathrm{A})$	$x=e\,y+f,\quad z=-g\,y-h\ldots(\mathrm{B})$
$x=e'\,y+f',\quad z=g'\,y+h'\ldots(\mathrm{A}')$	$x=e'\,y+f',\quad z=-g'\,y-h'\ldots(\mathrm{B}')$
$x=e''y+f'',\quad z=g''y+h''\ldots(\mathrm{A}'')$	$x=e''y+f'',\quad z=-g''y-h''\ldots(\mathrm{B}'')$
....	....

Para que duas rectas do mesmo systema, ou duas de differente systema, se encontrem, temos respectivamente as condições:

$$(\mathrm{A})\ \text{com}\ (\mathrm{A}')\qquad\qquad (\mathrm{A})\ \text{com}\ (\mathrm{B}')$$

$$(e-e')(h-h')=(g-g')(f-f'),\quad (e-e')(h+h')=(g+g')(f-f').$$

Substituindo nestas equações os valores (15) de e, f, g, e', f', g'; e observando, que a cada signal do radical de e corresponde um só do radical de g; resultam:

$$-2\frac{\sqrt{\mathrm{MN}}}{\mathrm{P}}(h-h')^2=0,\quad \frac{-2\sqrt{\mathrm{MN}}}{\mathrm{P}}(h^2-h'^2)=-\frac{2\sqrt{\mathrm{MN}}}{\mathrm{P}}(h^2-h'^2).$$

A primeira destas equações dá $h=h'$: por conseguinte $e=e'$, $f=f'$; e as rectas coincidem. A segunda é uma identidade.

Logo duas rectas do mesmo systema nunca se encontram, e duas de differente systema encontram-se sempre. Donde resulta, que o paraboloide hyperbolico admitte dous modos de geração pelo movimento d'uma recta sobre outras.

O mesmo se póde mostrar pelas considerações seguintes.

Por ser g independente de h, as projecções das rectas do mesmo systema sobre o plano (yz) são parallelas entre si: logo estas rectas, ou não estão duas a duas no mesmo plano, ou são parallelas: e como não são parallelas, por se cortarem as suas projecções sobre (xy), segue-se que não estão no mesmo plano.

Em quanto ás rectas de differente systema, as suas projecções NE e N′E (fig. 8) sobre o plano (yz) fazem com o eixo dos y angulos iguaes, mas voltados para partes oppostas: ora a parallela ao eixo dos x, tirada pela intersecção das projecções sobre (xy), tangentes á parabola (n.° 23), divide a corda em duas partes iguaes (†); logo esta parallela passa pelo meio de NN′, e conseguintemente por e. Donde resulta que os pontos e e D estão sobre a mesma perpendicular a $O'y'$, ou que estes pontos são projecções d' outro commum ás duas rectas.

Por tanto as rectas de differente systema encontram-se sempre.

Se procurarmos a intersecção de duas rectas (A) e (B′) de differente systema, acharemos:

$$y=\frac{h+h'}{g+g'}=\frac{h+h'}{2\sqrt{\frac{M}{N}}}.$$

Esta equação mostra que y não póde ser infinito: por conseguinte não ha no paraboloide duas generatrizes parallelas; no que differe a propriedade agora demonstrada da analoga do hyperboloide de uma folha.

30. Por ser g constante nas equações (15): vê-se, que, em cada um dos dous systemas, os planos projectantes de todas as generatrizes desse systema sobre o plano (yz) são parallelos entre si; ou que as generatrizes de cada systema são parallelas a um mesmo plano.

(†) A equação da corda, que une os pontos de contacto de duas tangentes tiradas á parabola por um ponto exterior (α, ϵ), é (Franc. Math. pur. n.° 407)

$$\epsilon y=p(\alpha+x).$$

Combinando esta equação com a da parabola $y^2=2px$, a resultante

$$x^2+a\left(2\alpha-\frac{2\epsilon^2}{p}\right)+\alpha^2=0$$

dá os pontos onde a corda encontra a curva.

A abscissa do meio da corda deve ser a semisomma $x_1=\frac{\epsilon^2-p\alpha}{p}$ das raizes desta equação. Ora a equação $y=\epsilon$ da parallela aos x, que passa pelo ponto exterior, combinada com a da corda dá a abscissa da sua intersecção $\frac{\epsilon^2-p\alpha}{p}=x_1$: logo o meio da corda está na parallela ao eixo dos x tirada pelo ponto exterior.

As mesmas equações mostram, que os angulos, feitos pelos planos projectantes das rectas de um systema com os projectantes das rectas do outro systema, são divididos em duas partes iguaes pelos planos tirados pela sua intersecção parallelamente a xy.

Comparando entre si as equações (A) e (B), acha-se a mesma disposição de generatrizes duas a duas de differente systema que se achou no fim da pag. 22 a respeito do hyperboloide de uma folha.

31. As differentes propriedades do hyperboloide de uma folha e do paraboloide hyperbolico, que ficam apontadas, concordam com as do hyperboloide e do paraboloide enviezados; o que torna ainda mais saliente a identidade destas ultimas superficies com as primeiras.

Sobre os planos tangentes ás superficies enviezadas.

F. n.° 75. 32. O modo mais simples e ordinario de tirar por qualquer ponto d'uma superficie enviezada o plano tangente á mesma superficie, é substituil-a por um hyperboloide, que tenha de commum com ella a generatriz que passa pelo ponto dado; e cujas directrizes sejam as tangentes ás tres directrizes da superficie nos pontos onde ellas encontram a mesma generatriz, ou outras quaesquer rectas tiradas por estes pontos nos planos tangentes que por elles passam: porque o plano, tangente a este hyperboloide no ponto dado, tambem é tangente no mesmo ponto á superficie proposta.

Mas nem sempre a lei, que servio para a descripção da superficie, faz conhecer as suas directrizes; e, quando estas se conhecem, nem sempre se lhes sabem tirar tangentes. Neste caso póde usar-se do processo seguinte.

Tirem-se muitas generatrizes proximas da, que contem o ponto dado, para uma e outra parte della; depois tire-se por aquella generatriz um plano qualquer; e em fim pelos pontos de intersecção deste plano com as generatrizes construidas faça-se passar uma curva, que encontrará a generatriz que passa pelo ponto dado.

No ponto, onde tiver logar este encontro, o plano será tangente á superficie, por conter a generatriz e a tangente á curva; e por conseguinte, se nesse ponto cortarmos o plano por outro qualquer, a secção será uma linha recta, que se poderá tomar para directriz da superficie auxiliar.

Fazendo o mesmo com mais dous planos conduzidos pela generatriz que contém o ponto dado, acharemos mais duas rectas directrizes do hyperboloide auxiliar: o que acabará de o determinar.

Se a generatriz estivesse sugeita, entre outras condições, a tocar, durante o seu movimento, uma superficie dada: tirando pelo ponto de contacto um plano tangente a esta superficie, é claro que o mesmo plano tambem seria tangente á proposta; por conter a generatriz, e a tangente á curva de contacto das duas superficies. Logo poderia tomar-se para directriz do hyperboloide auxiliar uma recta qualquer tirada no mesmo plano pelo ponto de contacto.

33. A determinação dos planos tangentes é de summa importancia na construcção das abobadas.

Para que uma abobada se construa com segurança, convém que as *juntas* sejam normaes á superficie, a fim de que, sendo rectos os dous angulos formados nas *arestas* das *aduellas*, o esforço d' um sobre o outro não faça quebrar um delles: o que não aconteceria se estes angulos fossem desiguaes, porque o agudo seria mais facilmente quebrado pelo obtuso.

Determinada pois a configuração da aresta da aduella, deve a superficie da junta ser o logar geometrico das normaes á superficie da abobada tiradas por todos os pontos da mesma aresta. Assim:

1.° Se a superficie da abobada for planificavel, e as arestas das aduellas forem generatrizes rectilineas desta superficie, as juntas deverão ser planas.

Com effeito, sendo a superficie planificavel tocada pelo plano tangente em todos os pontos da mesma generatriz, as normaes tiradas por estes pontos são parallelas entre si, e conseguintemente estão em um plano.

2.° Se a superficie for enviezada, e as arestas das aduellas forem generatrizes rectilineas, as juntas deverão ser paraboloides hyperbolicos.

Para o mostrar, representemos (fig. 9) por LMN uma generatriz; cortemos a superficie, em quaesquer pontos L, M, N, N′, ... desta generatriz, por planos perpendiculares á mesma recta; e construamos um paraboloide hyperbolico, tomando por directrizes tres das intersecções LA, MB, NC, destes planos com os tangentes á superficie nos mesmos pontos. Como, em todos os pontos de LMN, os planos tangentes ao paraboloide hyperbolico são tangentes á superficie proposta (F. n.° 74); todas as intersecções LA, MB, NC, N′C′... assentam no paraboloide (F. n.° 73 Sc. II). Mas LMN, por ser perpendicular a estas intersecções e ás normaes La, Mb, Nc, $N'c'$, ..., é perpendicular aos planos aLA, bMB,

cNC, $c'N'C'$,...; e aL, bM, cN, $c'N'$,... são respectivamente perpendiculares a AL, BM, CN, C'N',... Logo, se dermos ao paraboloide hyperbolico um movimento de rotação de 90° á roda de LN, as tangentes LA, MB, NC, N'C'... pôr-se-hão em direitura com as normaes, La, Mb, Nc, $N'c'$,...; e por conseguinte o logar geometrico das normaes será identico com o mesmo paraboloide.

Este theorema notavel, cuja demonstração geometrica é tão simples, reduz a construcção das juntas á da superficie enviezada que mais facilmente se descreve, o paraboloide hyperbolico. Para achar as directrizes de cada paraboloide correspondente a cada uma das juntas, basta determinar os planos tangentes á superficie da abobada em tres pontos da aresta respectiva; cortal-os por planos perpendiculares á mesma aresta nesses tres pontos; construir as intersecções destes planos secantes com os tangentes; e finalmente dar ás intersecções construidas um movimento de rotação de 90° em torno da aresta.

34. Para confirmar uma propriedade tão singular e interessante das superficies enviezadas, procuremos demonstral-a analyticamente.

Sejam:

$$x=\alpha z+\varphi(\alpha),\ y=z\psi(\alpha)+\pi(\alpha)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$x-x'+p(z-z')=0,\ y-y'+q(z-z')=0\ \ldots\ldots\ldots (2)$$

as equações das superficies enviezadas (n.° 14), e as da normal.

Substituindo em (2) as expressões de p, q, x, y tiradas de (1) e de suas derivadas: a eliminação de z entre as duas equações resultantes dará, para cada α, uma final em x', y', z', que será a do logar geometrico das normaes á superficie tiradas por todos os pontos da generatriz correspondente a esse α.

Differenciando pois, como no n.° 15, as equações (1) em ordem a x e y; e eliminando $\frac{d\alpha}{dx}$ e $\frac{d\alpha}{dy}$ entre as quatro equações differenciaes: as expressões de p e q, tiradas das duas resultantes, serão

$$p=\frac{z\psi'+\pi'}{(z\psi'+\pi')\alpha-(z+\varphi')\psi},\ q=-\frac{z+\varphi'}{(z\psi'+\pi')\alpha-(z+\varphi')\psi}.$$

Estas expressões e (1), substituidas em (2), dão:

$$\alpha z+\varphi-x'+\frac{z\psi'+\pi'}{(z\psi'+\pi')\alpha-(z+\varphi')\psi}(z-z')=0,$$

$$z\psi+\pi-y'-\frac{z+\varphi'}{(z\psi'+\pi')\alpha-(z+\varphi')\psi}(z-z')=0.$$

Teriamos agora de eliminar z entre estas duas equações, para achar a das superficies formadas pelas normaes: mas como, no caso de que se tracta, os pés das normaes estão sobre a mesma generatriz, é mais simples tomar para plano (yz) um, que passe por esta generatriz; e para origem das coordenadas, um ponto della: o que dá

$$x=0,\quad y=z\psi(\alpha)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

para equações da generatriz,

e $\alpha=0,\ \gamma=0=\varphi,\ \delta=0=\pi;$

e reduz as equações precedentes a

$$x'-\frac{z\psi'+\pi'}{(z+\varphi')\psi}.(z'-z)=0,\ y'-z\psi+\frac{z'-z}{\psi}=0.$$

Finalmente, eliminando z entre estas, resulta a equação da superficie das normaes, que passam pela generatriz dada:

$$\left.\begin{array}{l}\psi\psi'.(y'^2-z'^2)+\psi'.(1-\psi^2)z'y'+\psi.(1+\psi^2)x'y'+(1+\psi^2)x'z'\\ +\varphi'.(1+\psi^2)^2x'-\psi\pi'.(1+\psi^2)z'+\pi'.(1+\psi^2)y'=0\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots(4).$$

Esta superficie, por ser da 2.ª ordem e gerada pelo movimento d'uma linha recta, não póde ser senão um hyperboloide de uma folha, ou um paraboloide hyperbolico; e para conhecer a qual destes generos pertence, basta examinar se tem, ou não tem, centro.

Para isso devem substituir-se $x+a$, $y+b$, $z+c$, em logar de x, y, z, na equação da superficie; igualar a zero os coefficientes de x, y, z; e ver se as tres equações de condição resultantes podem subsistir simultaneamente, isto é, se os valores de a, b, c, deduzidos dellas vem debaixo da fórma finita. Ora, feito este calculo na equação geral do 2.º grão:

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bzy+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+E=0,$$

as expressões de a, b, c, deduzidas das tres equações de condição, teem a fórma

$$a=\frac{N}{D},\ b=\frac{N'}{D},\ c=\frac{N''}{D};$$

sendo

$$D=AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B'':$$

e como na equação (4) é

$$A=0,\ A'=A''=\psi.\psi,\ 2B=\psi'.(1-\psi^2),\ 2B'=1+\psi^2,\ 2B''=\psi.(1+\psi^2);$$

temos $D=0$; e a, b, c, infinitos. Logo a superficie, de que se tracta, é um paraboloide hyperbolico.

Procuremos agora a equação do paraboloide auxiliar, gerado pelo movimento de uma recta que encontra sempre as intersecções dos planos tangentes á superficie proposta, em todos os pontos da generatriz de que se tracta, com os planos perpendiculares nesses pontos á mesma generatriz.

A equação do plano, tangente á superficie em qualquer dos pontos da generatriz, é

$$z''-z=p(x''-x)+q(y''-y),\ \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

sendo $$p=-\frac{z\psi'+\pi'}{(z+\varphi').\psi},\ q=\frac{z+\varphi'}{(z+\varphi').\psi}=\frac{1}{\psi};$$

e a do plano perpendicular á generatriz (3) é

$$z-z''=-(y-y'').\psi\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6).$$

Eliminando pois x, ou y, entre as equações destes dous planos, resultam as equações das directrizes do paraboloide:

$$y'' - y = -\frac{1}{\psi}(z'' - z),\quad x'' - x = -\frac{1+\psi^2}{\psi}\cdot\frac{z+\varphi'}{z\psi'+\pi'}(z''-z).$$

Como a generatriz deste paraboloide deve encontrar todas as directrizes, a eliminação de x'', y'', z'', entre as equações destas e as da generatriz, que supporemos da fórma

$$x'' = mz'' + n,\quad y'' = m'z'' + n',$$

dará uma equação de condição entre m, n, m', n', a qual se deve partir em tantas, quantas forem necessarias para que ella tenha logar independentemente dos valores de x, y, z. Ora a eliminação dá

$$\left.\begin{array}{l}\left(n' - y - \dfrac{z}{\psi}\right)\cdot\left\{mz\psi' + m\pi' + \dfrac{1+\psi^2}{\psi}\cdot(z+\varphi')\right\}\\[2ex] -\left(m' + \dfrac{1}{\psi}\right)\cdot\left\{(n-x)(z\psi'+\pi') - \dfrac{1+\psi^2}{\psi}z(z+\varphi')\right\}\end{array}\right\} = 0\,;$$

que, em virtude de (3), tem a fórma

$$Pz^2 + Qz + R = 0:$$

logo, para que esta equação se verifique independentemente dos valores de z, devem ser

$$P = 0,\ Q = 0,\ R = 0,$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{1+\psi^2}{\psi}\cdot\left(m\psi' + \dfrac{1+\psi^2}{\psi}\right) + \left(m' + \dfrac{1}{\psi}\right)\cdot\dfrac{1+\psi^2}{\psi} = 0\\[2ex] n'\left(m\psi' + \dfrac{1+\psi^2}{\psi}\right) - \dfrac{1+\psi^2}{\psi}\cdot\left(m\pi' + \dfrac{1+\psi^2}{\psi}\cdot\varphi'\right) - \left(m' + \dfrac{1}{\psi}\right)\left(n\psi' - \dfrac{1+\psi^2}{\psi}\cdot\varphi'\right) = 0,\\[2ex] n'\left(m\pi' + \dfrac{1+\psi^2}{\psi}\cdot\varphi'\right) - \left(m' + \dfrac{1}{\psi}\right)\cdot n\pi' = 0.\end{array}\right\}\ldots(7)$$

A primeira e terceira das equações (7) dão

$$m' = m\psi' + \psi\,,\quad n' = \frac{m\psi' + \dfrac{1+\psi^2}{\psi}}{m\pi' + \dfrac{1+\psi^2}{\psi}\,.\,\varphi'}\,.\,n\pi'\,;$$

e combinando estas expressões com

$$x'' = mz'' + n\,,\quad y'' = m'z'' + n'\,,$$

resultam

$$m = \frac{\varphi'(1+\psi^2)z'' + \pi'.\dfrac{1+\psi^2}{\psi}\,x'' - \varphi'.\dfrac{1+\psi^2}{\psi}\,y''}{\pi'y'' - \psi\varphi'.\dfrac{1+\psi''}{\psi}\,z'' - \psi\pi'.z'' - \psi'\pi'.x'' + \dfrac{1+\psi^2}{\psi}\,\pi'.z''}\,,$$

$$m' = m\psi' + \psi,\ n = x'' - mz'',\ n' = \frac{m\psi' + \dfrac{1+\psi^2}{\psi}}{m\pi' + \dfrac{1+\psi^2}{\psi}\,.\,\varphi'}\,.\,n\pi'\,;$$

que se reduzem a

$$m = \frac{\pi'x'' - \varphi y''}{(\pi' - \psi'\varphi')z''},\ m' = \frac{\psi'(\pi'x'' - \varphi'y'')}{(\pi' - \psi'\varphi')z''},\ n = \frac{\varphi'(y'' - \psi'x'')}{\pi' - \psi'\varphi'},\ n' = \frac{\pi'(y'' - \psi'x'')}{\pi' - \psi'\varphi'}\,,$$

se tomarmos para eixo dos z a generatriz correspondente a α, o que suppõe $\psi = 0$.

Na mesma hypothese a 2.ª das equações (7), posta debaixo da fórma

$$n' - n\psi' = (1+\psi^2)\,.\,\frac{m\pi' - m'\varphi' + \psi\varphi'}{m'\psi + 1}\,,$$

se reduz a

$$n' - n\psi' = m\pi' - m'\varphi'\,;$$

e substituindo nesta os valores precedentes de m, m', n, n', resulta a equação do paraboloide:

$$z''y'' - \psi' z'' x'' - \pi' x'' + \varphi' y'' = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (8)\ (\dagger).$$

Esta equação torna-se identica com a (4), fazendo nella x'' negativo, e mudando depois respectivamente x'' e y'' em y'' e x'': logo os paraboloides, que as duas equações representam, são identicos; e collocados n'uma disposição tal que, dando a um delles o movimento de 90° em torno do eixo dos z, todas as suas generatrizes ficam em direitura com as do outro.

Tudo isto concorda com o, que se demonstrou geometricamente.

Dos planos tangentes ás superficies planificaveis.

35. Um plano tangente a uma superficie planificavel deve conter a generatriz que passa pelo ponto de contacto, ou uma parallela a essa generatriz, e a tangente a uma secção da superficie que passa por qualquer ponto da generatriz. Donde resultam os processos ensinados na geometria discriptiva para tirar planos tangentes aos cylindros e aos cones.

Mas em todos os problemas relativos a estas, e ás outras superficies planificaveis, não se deve ajuntar á condição de tangencia senão mais outra condição, por exemplo, a de passar o plano por um ponto dado, ou a de ser parallelo a uma recta dada. Com effeito: sendo o plano tangente n'um ponto da superficie planificavel igualmente tangente em toda a extensão da generatriz que contém esse ponto, a condição de tangencia envolve as duas condições que determinam a posição da generatriz. Por onde se vê, que não se póde em geral resolver o problema de tirar um plano tangente á superficie planificavel, de modo que contenha uma recta dada: salvo o caso de ser a recta parallela á generatriz do cylindro; por que então a passagem do plano por ella é consequencia da passagem por um dos seus pontos.

(†) Como para achar esta equação se não particularisaram os pontos da generatriz da superficie, por onde passam as directrizes do paraboloide, mas se tomaram todos os da mesma generatriz; e como por outra parte sabemos que as intersecções dos planos tangentes em tres pontos da generatriz com as perpendiculares nesses pontos á mesma recta determinam o paraboloide: fica assim demonstrada analyticamente uma proposição comprehendida no n.º 75 de Fourcy, a saber, que o paraboloide, que toca a superficie em tres pontos d'uma generatriz, a toca em todos os outros pontos da mesma recta.

36. Para mostrar que a natureza das superficies planificaveis envolve uma condição relativa aos planos tangentes, tomemos as equações do cylindro e do cone:

$$mp+nq=1, \quad z-c=p(x-a)+q(y-b),$$

nas quaes m e n dependem da direcção das generatrizes do cylindro, e a, b, c, são as coordenadas do vertice do cone.

A condição de serem as generatrizes do cylindro parallelas aos planos tangentes,

$$z-z'=p(x-x')+q(y-y'),$$

dá (Franc. Math. pur., n.° 667)

$$mp+nq=1,$$

que é a equação do mesmo cylindro. Logo esta equação já exprime a condição de ser o plano tangente parallelo ás generatrizes.

Do mesmo modo a equação do cone exprime a condição de passar o plano tangente pelo vertice.

Em geral o plano tangente em qualquer ponto de uma superficie planificavel passa pelo ponto onde a generatriz correspondente encontra a aresta de reversão (n.° 12).

Dos planos tangentes ás superficies de revolução.

37. O plano tangente em qualquer ponto de uma superficie de revolução deve conter as tangentes ao parallelo e ao meridiano desse ponto.

Para construir o plano tangente quando o contacto deve ter logar sobre um parallelo dado, póde empregar-se como superficie auxiliar o cone circumscripto á superficie por esse parallelo, ou a esfera inscripta pelo mesmo parallelo; e quando o contacto deve ter logar sobre um meridiano dado, póde empregar-se o cylindro circumscripto por esse meridiano.

38. A determinação dos cones circumscriptos ás superficies serve para achar o contorno apparente das mesmas superficies vistas do vertice do cone. Os raios visuaes que, partindo desse ponto, vão tocar a superficie, são as generatrizes do cone. F. n.° 90.

Seja ABMCE (fig. 10) uma superficie da 2.ª ordem com centro.

Tire-se do ponto exterior D uma tangente DM á mesma superficie; por M faça-se passar o plano MM'N parallelo ao diametral BB'E; e pelos differentes pontos M, M', M'', ... da secção da superficie pelo mesmo plano tirem-se planos MDO, M'DO, M''DO, ... que passem pelo diametro DO. As secções da superficie por estes ultimos planos serão curvas ABM, AB'M', AB''M'', ..., que encontrarão MM'M e BB'E nos pontos M, M', M'', ..., e B, B', B'', ...

Por qualquer ponto M' de MM'N tire-se uma tangente á curva correspondente AB'M'. Como OB' e PM' são intersecções dos planos MM'N e BB'E com M'DO, estas intersecções são parallelas: ora AO e OB' são os diametros conjugados de AB'M'; porque, dividindo o plano diametral BB'E em duas partes iguaes todas as cordas da superficie parallelas a AO, tambem OB' divide em duas partes iguaes aquellas destas cordas que existem no plano M'DO: logo PM' é a ordenada do ponto M' referido aos diametros conjugados de ABM', e a subtangente

$$\frac{a^2-x^2}{x}=\frac{(AO)^2-(PO)^2}{PO}$$

é constante para todos os pontos da curva MM'N.

Donde resulta, que todas as tangentes á superficie nos pontos da secção plana MM'N concorrem em D; e por conseguinte a linha de contacto do cone circumscripto, cujo vertice é D, com a superficie é a curva plana MM'N.

O mesmo se mostraria a respeito das superficies de 2.ª ordem que não teem centro, por ser nellas a subtangente $=$ 2AP (†).

(†) Note-se que nestas superficies o centro O está no infinito, ou que os diametros são parallelos ao eixo principal. Imprimindo na expressão

$$\text{subtang.}=\frac{(AO)^2-(PO)^2}{PO}=\frac{(AP)^2+2(AP).(PO)}{PO}=\frac{(AP)^2}{PO}+2AP$$

a condição PO $=\infty$, resulta subtang. $=$ 2AP.

Logo as curvas de contacto dos cones circumscriptos ás superficies de 2.ª ordem são planas, e por isso tambem de 2.ª ordem. Assim, se a superficie for um ellipsoide, a curva de contacto será uma ellipse.

39. Este theorema tambem se póde demonstrar analyticamente. Appliquemos a equação do plano tangente (n.º 11) ás superficies de 2.ª ordem, cuja equação desembaraçada dos termos em xz, yz, xy, é

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Bx + 2B'y + 2B''z + E = 0 \ldots\ldots (a).$$

A equação do plano tangente a esta superficie será

$$(x' - x)(Ax + B) + (y' - y)(A'y + B') + (z' - z)(A''z + B'') = 0,$$

ou $$x'(Ax+B) + y'(A'y+B') + z'(A''z+B'') + Bx + B'y + B''z + E = 0 \ldots (b)$$

em virtude da equação (a).

Sujeitando este plano a uma condição, da qual resulte uma relação entre as coordenadas x, y, z, do contacto; e fazendo variar o ponto de contacto, sem que deixe de satisfazer á equação da superficie; a combinação desta equação com aquella relação, tendo logar para todos os pontos de contacto, dará as equações da curva de contacto.

Por exemplo: se o plano deve passar por um ponto fixo (α, β, γ), a equação (b) será

$$\alpha(Ax+B) + \beta(A'y+B') + \gamma(A''z+B'') + Bx + B'y + B''z + E = 0 \ldots (c);$$

e a intersecção da superficie, representada por (c), com a representada por (a) será a curva de contacto. Ora (c) é a equação de um plano; logo a curva de contacto é plana.

Se o plano tangente deve ser constantemente parallelo a uma recta dada

$$x = mz, \quad y = nz,$$

teremos (Franc. Math. pur. n.º 667)

$$-m.\frac{Ax+B}{A''z+B''} - n.\frac{A'y+B'}{A''z+B''} = 1,$$

ou $$m(Ax + B) + n(A'y + B') + A''z + B'' = 0:$$

e como esta equação é a de um plano, a curva de contacto tambem é plana.

O mesmo resultaria de considerar este caso como comprehendido no precedente, suppondo a uma distancia infinita o ponto (α, β, γ).

Assim as curvas de contacto das superficies de 2.ª ordem com os cones e cylindros circumscriptos a estas superficies são planas: e são de 2.ª ordem; porque as suas equações resultam da eliminação entre uma de 2.ª ordem e outra de 1.ª

Para ter a posição da curva de contacto, façamos primeiro algumas considerações sobre as superficies diametraes.

Se pelo meio de todas as cordas de qualquer superficie proposta parallelas a uma recta dada,

$$x = mz, \quad y = nz,$$

se fizer passar uma superficie, esta superficie será *diametral*, por dividir em duas partes iguaes todas as cordas parallelas á recta dada.

A equação das cordas é

$$x = mz + e, \quad y = nz + f \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (d),$$

sendo m e n constantes, e e e f variaveis na passagem de uma corda para outra. Se entre (d) e a equação $F = 0$ da superficie eliminarmos x e y, a equação resultante, que é do mesmo gráo que $F = 0$, terá a fórma

$$Mz^2 + Nz + P = 0,$$

no caso de ser $F = 0$ do 2.º gráo; e dará os z correspondentes ás extremidades de cada corda. A semisomma, $z_1 = -\dfrac{N}{2M}$, das raizes desta equação será o z correspondente ao meio da mesma corda. Ora z_1 é raiz da equação $2Mz + N = 0$, derivada de $Mz^2 + Nz + P = 0$; e esta é identica com a proposta $F = 0$, depois de substituidas nella as expressões (d) de x e y: logo para achar z_1, basta tomar a derivada de $F = 0$, considerando nella x e y como funcções de z dadas pelas equações (d). Esta derivação dá

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)\frac{dx}{dz} + \left(\frac{dF}{dy}\right)\frac{dy}{dz} + \left(\frac{dF}{dz}\right) = 0,$$

ou $$m\left(\frac{dF}{dx}\right)+n\left(\frac{dF}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(g).$$

Se substituissemos em (g) as expressões (d) de x e y, teriamos a equação, que para cada e e f daria o meio da corda correspondente: logo a equação (g) representa a *superficie diametral*, que divide ao meio as cordas parallelas á recta dada.

Combinando (a) com (g), resulta

$$m(Ax+B)+n(A'y+B')+A''z+B''=0\ldots\ldots\ldots(h),$$

que é a equação de um plano: logo a superficie diametral das superficies de 2.ª ordem é plana (Vej. tambem Franc. Math. pur. n.º 682).

Supponhamos agora as cordas parallelas á recta, que une o vertice (α, β, γ) do cone com o centro $\left(-\frac{B}{A}, -\frac{B'}{A'}, -\frac{B''}{A''}\right)$ da superficie. Teremos

$$m=\frac{\alpha+\frac{B}{A}}{\gamma+\frac{B''}{A''}},\quad n=\frac{\beta+\frac{B'}{A'}}{\gamma+\frac{B''}{A''}};$$

e substituindo estas expressões na equação (h) do plano diametral, virá

$$\frac{A\alpha+B}{A}(Ax+B)+\frac{A'\beta+B'}{A'}(A'y+B')+\frac{A''\gamma+B''}{A''}(A''z+B'')=0,$$

ou $$(A\alpha+B)x+(A'\beta+B')y+(A''\gamma+B'')z+K=0;$$

chamando K a parte independente de x, y, z.

Comparando esta ultima equação com a (c) do plano da curva de contacto, vê-se que os coefficientes de x, y, z, são os mesmos em ambos: por conseguinte (Franc. Math. pur. n.º 674) o plano da curva de contacto é parallelo ao plano diametral.

Pla-

Planos tangentes á superficie enviezada de revolução.

40. O traço horizontal do plano tangente a esta superficie póde determinar-se pela condição de passar pelos traços horizontaes das generatrizes de differente systema tiradas pelo ponto de contacto; ou de passar pelo traço d'uma destas generatrizes, e ser perpendicular ao traço do meridiano, que suppomos vertical, onde tem logar o contacto. O traço vertical deve passar pelo d'uma parallela ao horizontal, tirada pelo ponto de contacto ou, em geral, por um ponto qualquer que esteja no plano tangente.

Nos differentes problemas a difficuldade consiste em achar os pontos de contacto. Se é dada a projecção horizontal dos pontos de contacto, está claro que esta projecção deve ser a de dous pontos da superficie equidistantes do plano do annel; e por isso, quando se procuram as projecções verticaes dos mesmos pontos, devem estas projecções equidistar da projecção vertical do annel.

41. Se o plano tangente (F., fig. XVIII) deve passar por um ponto dado fóra da superficie, e se o contacto tiver logar n'um parallelo dado, usaremos do processo seguinte.

Seja (n, n') um ponto qualquer do parallelo dado. Tiradas pela projecção horizontal n deste ponto as tangentes, gm, hk, á projecção do collar, e depois a corda hg: descreva-se do ponto a como centro o circulo tangente á corda hg; e por o tirem-se tangentes a este circulo.

Cada tangente tirada por o dá uma corda g_1h_1 cujas extremidades, g_1 e h_1, são projecções dos pés das generatrizes procuradas no plano horizontal que passa por O. Logo as tangentes g_1n_1 e h_1n_1 ao annel darão os pontos q_1, s_1, e o traço horizontal q_1 s_1 do plano tangente procurado.

Se do ponto a como centro se descrevesse o circulo tangente á corda qs, a tangente a este circulo parallela a g_1 h_1 seria o traço pedido q_1 s_1.

O traço vertical do plano passa pelo da parallela $(og_1h_1$, $o'e')$ ao traço horizontal.

42. Se o plano tangente deve passar por uma recta dada: ache-se o traço desta recta sobre o plano do annel; e deste traço como vertice descreva-se um cone circumscripto á superficie: o plano tangente a este cone, que passar pela recta, será o pedido.

Procuremos a posição e figura da base do cone circumscripto.

Tomemos para eixo dos x o traço, sobre o plano do annel, do meridiano que passa pelo vertice do cone; para eixo dos y o traço do meridiano perpendicular ao primeiro; e para eixo dos z o eixo de rotação. É evidente que cada um dos planos (xy), (xz), (yz), passa pelo meio de todas as cordas parallelas á intersecção dos outros dous: por conseguinte estes planos são *principaes*; e os dous traços, e o eixo de rotação, são eixos da superficie. Donde resulta, que o plano da curva de contacto, devendo ser parallelo ao plano (yz) conjugado com x, é perpendicular ao do annel, e ao traço do meridiano que contém o vertice; e que os dous eixos desta curva existem nos planos (xy) e (xz), e são parallelos aos y e z.

Logo os dous eixos da curva de contacto serão dados pelos pontos, onde tocam a superficie as generatrizes do cone existentes nos planos (xy) e (xz); e se acharão tirando do vertice tangentes ás curvas que resultam da secção da superficie por estes planos. As tangentes, que se poderem tirar, determinarão as extremidades do eixo real; e as, que não se poderem tirar, indicarão a existencia do eixo imaginario no plano correspondente.

Ora as secções da superficie pelos planos (xy) e (xz) são o annel, e a hyperbole central, cujo eixo transverso é o diametro do annel. Logo:

1.° Se o vertice estiver fóra do annel, ficará dentro d'um dos ramos da hyperbole; as tangentes ao annel darão o eixo transverso; e o outro eixo será imaginario, por não se poderem tirar as tangentes á hyperbole.

2.° Se o vertice estiver dentro do annel, ficará entre os dous ramos da hyperbole; as tangentes á hyperbole darão o eixo real; e o outro eixo será imaginario, por não se poderem tirar as tangentes ao annel.

3.° Em fim, se o vertice estiver na circumferencia do annel, as tangentes a este reduzir-se-hão a uma só, assim como as tangentes á hyperbole, que serão perpendiculares ao plano do annel; os dous eixos anniquilar-se-hão; e o cone ficará reduzido ao plano das duas rectas parallelas ás asymptotas.

43. Para confirmar estes resultados pela analyse, façamos $\beta = 90°$ na equação da secção do hyperboloide por um plano [F. n.° 70, eq. (4)]

$$y^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 1\right)x^2 + 2bx\cos\beta + a^2 - b^2,$$

o que a reduzirá a

$$y^2 = x^2 \cot^2\alpha + a^2 - b^2.$$

Esta equação é d'uma hyperbole; e as suas asymptotas,

$$y = \pm x \cot\alpha,$$

por serem parallelas ás da hyperbole central, fazem com o plano do annel o mesmo angulo que fazem com este plano as generatrizes da superficie. Posto isto:

Se o vertice do cone for exterior ao annel, o traço do plano da curva de contacto sobre o plano do annel será interior ao mesmo annel; porque os pontos, onde tocam o annel as tangentes que se lhe tiram do vertice, devem pertencer á superficie. Logo $a > b$; e na equação da hyperbole de contacto o eixo dos y, existente no plano do annel, será o real.

Se o vertice do cone for interior ao annel, o traço do plano da hyperbole de contacto não cortará o mesmo annel; porque, se o cortasse, existiriam no annel dous pontos da curva, que deveriam corresponder a duas tangentes tiradas pelo vertice ao mesmo annel, o que é impossivel. Logo $a < b$; e na equação da hyperbole de contacto o eixo dos x, perpendicular ao plano do annel, é o real.

Em fim, se o vertice estiver na circumferencia, o traço do plano da curva de contacto tocará o annel. Logo $a = b$; e a equação da curva reduzir-se-ha á das asymptotas $y = \pm x \cot\alpha$.

44. Procuremos directamente a expressão analytica das differentes propriedades do cone circumscripto, que ficam enunciadas.

Vimos [n.° 23, (†)] que a equação do hyperboloide de revolução, referida ao centro do annel, é

$$y^2 + x^2 = a^2 + z^2 \cot^2\theta;$$

sendo (yx) o plano do annel, e θ o angulo que as generatrizes fazem com este plano.

Comparando esta equação com a (a) do n.° 39, a equação (c) do mesmo n.°, que é a do plano da curva de contacto do cone circumscripto, reduz-se a

$$\alpha x + \beta y - \gamma z^2 \cot^2\theta - a^2 = 0;$$

ou fazendo $\gamma = 0$, quando o vertice do cone está no plano do annel,

$$\alpha x + \beta y - a^2 = 0.$$

Esta equação, por não conter z, é a do traço do plano da curva sobre o plano do annel, e ao mesmo tempo a projecção da curva sobre este ultimo plano. Donde resulta, que o plano da curva de contacto é perpendicular ao do annel.

Da mesma equação tira-se

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x + \frac{a^2}{\beta};$$

e como a equação do traço do meridiano, que passa por (α, β), é $y = \frac{\beta}{\alpha}x$, segue-se que o plano da curva de contacto é perpendicular ao meridiano que contém o vertice do cone.

D'onde resulta que, se tomarmos o traço deste meridiano para eixo dos x, o plano da curva será parallelo a (yz). Nesta hypothese é $\beta = 0$, o que reduz a

$$\alpha x - a^2 = 0, \quad y^2 + x^2 = a^2 + z^2 \cot^2\theta,$$

as equações precedentes, que determinam a curva de contacto.

A 1.ª destas equações dá $x >, =,$ ou $< a$,

conforme é $\alpha <, =,$ ou $> a$:

logo o traço do plano da curva de contacto fica dentro do annel, ou o toca, ou fica fóra delle, conforme o vertice do cone é exterior ao mesmo annel, ou está na sua circumferencia, ou lhe é interior.

Eliminando x entre as duas equações, resulta a projecção da curva sobre o plano (yz)

$$y^2 = z^2 \cot^2\theta + \frac{a^2}{\alpha^2}(\alpha^2 - a^2);$$

que é a equação da mesma curva, por ser o seu plano parallelo a (yz).

45. Posto isto:

1.° Se $\alpha > a$; pondo na equação precedente $z = 0$, o semieixo transverso da hyperbole, parallelo aos y, será

$$A = \frac{a}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - a^2}.$$

Ora a ordenada do annel, correspondente a $x = \frac{a^2}{\alpha}$, é

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - a^2} = A:$$

logo a corda de secção do plano da curva de contacto com o annel é o eixo transverso.

Como a equação das tangentes ao annel, tiradas pelo vertice, é

$$y = (x - \alpha)\frac{dy}{dx} = -(x - \alpha)\frac{x}{y},$$

ou
$$y^2 + x^2 = \alpha x:$$

se combinarmos esta equação com a do annel

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

teremos $x = \frac{a^2}{\alpha}$ para abscissa dos pontos de tangencia. Donde resulta que estes pontos são as extremidades do eixo transverso; e que, para achar estas extremidades, basta tirar aquellas tangentes.

2.° Se $\alpha = a$: os eixos anniquilam-se; é $x = a$; e a equação da curva reduz-se a $y = \pm z \cot\theta$. Por onde se vê, que o traço do plano da linha de contacto é tangente ao annel; e que esta linha se reduz ao systema de duas rectas parallelas ás asymptotas.

3.° Se $\alpha < a$: o semieixo transverso A', parallelo aos z, é

$$A' = \frac{a}{\alpha \cot \theta} \sqrt{a^2 - \alpha^2}.$$

A secção da superficie pelo meridiano do ponto $(0, \alpha)$,

é $$x^2 = z^2 \cot^2 \theta + a^2;$$

e por isso a equação das tangentes a esta secção, tiradas pelo vertice $(0, \alpha)$, dá, nos pontos de contacto,

$$x - \alpha = z \frac{dx}{dz} = z \frac{z \cot^2 \theta}{x},$$

ou $$x^2 = z^2 \cot^2 \theta + \alpha x.$$

Combinando esta equação com a da hyperbole meridiana

$$x^2 = z^2 \cot^2 \theta + a^2,$$

teremos para os pontos de tangencia as coordenadas:

$$x = \frac{a^2}{\alpha}, \quad z = \pm \frac{a\sqrt{a^2 - \alpha^2}}{\alpha \cot \theta} = A';$$

das quaes se deduz primeiramente, que estes pontos estão no plano da curva de contacto, e por conseguinte no eixo transverso; e depois, que este eixo é igual á distancia entre elles. Logo as tangentes tiradas do vertice do cone á hyperbole meridiana determinam as extremidades do eixo transverso (†).

(†) Como, na passagem do vertice do cone de exterior para interior ao annel, o eixo horizontal A vae diminuindo, ao passo que o vertice se approxima da circumferencia; até se reduzir a zero quando o vertice chega á mesma cir-

46. Construindo neste caso a hyperbole meridiana, cujos 1.° e 2.° eixos são a e $a$tangθ, e cujas asymptotas fazem com o eixo transverso o angulo θ; e depois tirando do vertice do cone, que se quer circumscrever, tangentes a esta hyperbole; a corda, que passar pelos pontos de tangencia, será o 1.° eixo da curva de contacto: e como as asymptotas

$$y = \pm z \cot \theta$$

são parallelas ás generatrizes da superficie; fica facil a construcção desta curva, e dos pontos de contacto das tangentes tiradas a ella pelo traço da recta dada sobre o seu plano (†).

47. Quando a recta dada é parallella ao plano do annel, o vertice do cone fica a uma distancia infinita do centro; o cone torna-se n'um cylindro circumscripto, cujas generatrizes são parallelas á recta; e os pontos de tangencia, que determinam o eixo transverso, são as extremidades do diametro perpendicular á projecção horizontal della. Assim o problema reduz-se neste caso a tirar tangentes á hyperbole central, de cujo plano é traço aquelle diametro, pelo ponto onde a recta encontra o mesmo plano.

---

cumferencia, e passar a imaginario quando o vertice se torna interior ao annel: vê-se que a quantidade A^2 se torna de positiva em negativa, passando por zero. E assim deve ser; porque esta passagem deve seguir a lei de continuidade, quando a seguir o movimento do vertice do cone de fóra para dentro do annel.

Esta advertencia desvanece a singularidade, que parece haver na inversão que soffrem os ramos da hyperbole de contacto pela passagem do vertice do cone de fóra para dentro do annel.

(†) A construcção é a seguinte:

Fazendo gyrar (fig. 12) o plano meridiano Og até ficar parallelo ao vertical, a hyperbole meridiana projectar-se-ha neste em verdadeira grandeza; o seu eixo transverso será HI=diamet. do annel; e as asymptotas serão as parallelas ás generatrizes aa e cc. Pela rotação o ponto (g, g') virá a (G, G'); e tirando de (G, G') tangentes á hyperbole, acharemos dous pontos de contacto (M, M') e (M, N'), cuja distancia $M'N'$ será o eixo real da base do cone. Repoado depois o meridiano na posição primitiva: $M'N'$ tomará a posição $m'n'$; o traço do plano da curva de contacto será mk perpendicular a Og; e a intersecção k deste traço com a projecção horizontal gk da recta dada determinará o ponto (k, k'), onde ella atravessa aquelle plano. Tirando pois pelo ponto (k, k') tangentes á hyperbole, cujo eixo transverso vertical é $m'n'$, e cujas asymptotas são $a'a'$ e $c'c'$ parallelas a aa e cc; teremos os pontos, pelos quaes, e pela recta dada, devem passar os planos tangentes.

Assim a construcção reduz-se ao que já se ensinou no 1.° caso.

Quando o ponto, onde a recta dada encontra o plano da base do cone, e do qual se devem tirar tangentes á mesma base, ficar dentro d'um dos seus ramos, não se poderão tirar estas tangentes, e o problema será impossivel. Esta circumstancia tem logar quando a recta dada não encontra a superficie; como logo mostraremos.

48. Como pelo ponto de contacto passam duas generatrizes que existem no plano tangente, uma dellas pelo menos ha de necessariamente encontrar a recta dada.

O mesmo se vê attendendo a que, sendo em geral dous os pontos de contacto dados pela construcção, a generatriz de um systema, que passa por um delles, deve encontrar a de differente systema que passa pelo outro; e como os planos tangentes, que as conteem, concorrem na recta dada, a intersecção hade ser na mesma recta. Logo a recta dada encontra a superficie em dous pontos, quando por ella se podem tirar planos tangentes á mesma superficie.

A consideração precedente mostra com toda a clareza, que as quatro generatrizes correspondentes aos dous pontos de contacto dão só duas intersecções com a recta.

Donde resulta um novo processo para tirar pela recta dada planos tangentes á superficie.

Procuram-se as intersecções da recta com a superficie (F. n.° 141); e pelas projecções horizontaes dellas tiram-se tangentes ao annel. Os traços dos planos tangentes devem passar pelos da recta dada, e pelos das generatrizes cujas projecções horizontaes são aquellas tangentes.

Inversamente: quando pelo processo ordinario se acham os pontos de contacto, as quatro generatrizes, que por elles passam, combinadas duas a duas de differente systema, dão os dous pontos onde a recta encontra a superficie.

Se a recta dada é parallela ás duas generatrizes, que determinam o plano tangente que a contém, o ponto de contacto é no infinito. Ora, como estas generatrizes são parallelas entre si, as parallelas, que no cone asymptotico lhes correspondem, coincidem; logo o plano, que contém as primeiras, é tangente ao cone. Por onde se vê, que para construir neste caso os planos tangentes á superficie, basta tirar pela recta dada planos tangentes ao cone asymptotico: e o problema é possivel, por ser a recta dada parallela a uma generatriz do cone.

Na construcção ordinaria tem logar o contacto no infinito, quando o ponto, onde a recta dada encontra o plano da base do cone circumscripto, pertence a uma das asymptotas da mesma base.

49. Do que acabamos de ver nos dous numeros precedentes resulta, que o problema de tirar pela recta dada planos tangentes á superficie é impossivel: ou quando o traço da recta sobre o plano da base do cone circumscripto fica interior a um dos ramos da mesma base; ou quando a recta não encontra a superficie. Mas estes dous caracteres d' impossibilidade não são distinctos, como vamos mostrar.

Para ter as intersecções da recta dada, que encontra o plano do annel no ponto (α, o, o), com a superficie, eliminaremos as coordenadas entre as suas equações

$$x-\alpha=mz,\ y=nz,$$

$$x^2+y^2=z^2\cot^2\theta+a^2;$$

o que dará, feitas as reducções:

$$\left.\begin{aligned} z'&=\frac{1}{m^2+n^2-\cot^2\theta}\cdot\left(-m\alpha\pm\sqrt{a^2m^2+n^2(a^2-\alpha^2)-(a^2-\alpha^2)\cot^2\theta}\right)\\ y'&=\frac{n}{m^2+n^2-\cot^2\theta}\cdot\left(-m\alpha\pm\sqrt{a^2m^2+n^2(a^2-\alpha^2)-(a^2-\alpha^2)\cot^2\theta}\right)\end{aligned}\right\}\cdot\cdot(a)$$

Para ter a intersecção da recta com o plano da base do cone, eliminaremos as coordenadas entre as suas equações e a equação do plano,

$$x-\alpha=mz,\ y=nz,$$

$$\alpha x-a^2=0;$$

o que dará

$$z''=\frac{a^2-\alpha^2}{m\alpha},\ y''=\frac{n(a^2-\alpha^2)}{m\alpha}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (b).$$

1.° CASO. $a>\alpha$.

O eixo dos z é transverso.

A intersecção da recta com o plano da base terá logar fóra dos ramos della, quando z'' substituido por z na equação da mesma base

$$y^2 = z^2 \cot^2\theta - \frac{a^2}{\alpha^2}(a^2 - \alpha^2)$$

fizer y imaginario, ou y real e $< y''$; e terá logar dentro d'um dos ramos da base, quando, feita aquella substituição, sair y real e $> y''$.

Ora a substituição dá

$$y^2 = \frac{a^2 - \alpha^2}{m^2\alpha^2}\left[(a^2 - \alpha^2)\cot^2\theta - a^2m^2\right]:$$

logo as condições necessarias para que y seja imaginario, ou real e $< y''$; e para que seja real e $> y''$; são:

Para y imaginario ..... $a^2m^2 - (a^2 - \alpha^2)\cot^2\theta > 0.$

Para $y < y''$ .... $n^2(a^2 - \alpha^2) + a^2m^2 - (a^2 - \alpha^2)\cot^2\theta > 0.$

Para $y > y''$ .... $n^2(a^2 - \alpha^2) + a^2m^2 - (a^2 - \alpha^2)\cot^2\theta < 0.$

Comparando estas condições com as equações (a), vê-se que as duas primeiras, correspondentes a y imaginario e a $y < y''$, dão z' e y' reaes; e que a ultima, correspondente a $y > y''$, dá z' e y' imaginarios: logo a recta encontra a superficie, quando a sua intersecção com o plano da da base do cone tem logar fóra dos ramos da mesma base; e não encontra a superficie, quando aquella intersecção tem logar dentro d'um dos ramos.

2.° CASO. $a < \alpha$.

O eixo transverso é o dos y.

A recta encontra o plano da base fóra dos ramos della, quando a $y=y''$ corresponde z imaginario, ou z real e $< z''$; e não o encontra, quando a $y=y''$ corresponde $z > z''$. Ora $y=y''$ substituido na equação da base dá

$$z^2\cot^2\theta = \frac{\alpha^2 - a^2}{m^2\alpha^2}\cdot\left[n^2(\alpha^2 - a^2) - m^2a^2\right];$$

logo teremos as condições:

Para z imaginario........... $a^2m^2 + n^2(a^2 - \alpha^2) > 0$

Para $z < z''$ .... $n^2(a^2 - \alpha^2) + a^2m^2 - (a^2 - \alpha^2)\cot^2\theta > 0$

Para $z > z''$ .... $n^2(a^2 - \alpha^2) + a^2m^2 - (a^2 - \alpha^2)\cot^2\theta < 0.$

As duas primeiras dão z' e y' reaes; a ultima dá z' e y' imaginarios: d'onde resultam as mesmas conclusões, que no caso de $a > \alpha$.

Assim, em todos os casos, a intersecção da recta dada com o plano da base do cone circumscripto tem logar fóra, ou dentro, dos ramos desta base, segundo a mesma recta encontra, ou não encontra, a superficie; de sorte que são identicos estes dous caracteres, pelos quaes se conhece a possibilidade ou impossibilidade de tirar pela recta dada planos tangentes á superficie.

Planos tangentes a algumas outras superficies enviezadas.

50. Consideremos a superficie enviezada, que tem por directrizes tres ellipses semelhantes situadas em planos parallelos e equidistantes, cujos centros estão n'uma mesma recta perpendicular a elles, e das quaes a media é menor, e as extremas são iguaes entre si. Tomemos o plano da media para plano horizontal, e façamos passar o vertical pelo eixo maior.

Duas generatrizes de differente systema sempre estão no mesmo plano (F. n.° 103).

Mas nunca o estão duas do mesmo systema.

Com effeito a intersecção das projecções horizontaes, que se cortam, corresponde n' uma das generatrizes a um ponto inferior ao plano do annel, e na outra a um superior; e as projecções horizontaes parallelas correspondem a projecções verticaes, que se cortam: donde resulta, que as generatrizes do mesmo systema nem se cortam, nem são parallelas.

Logo a superficie é um hyperboloide enviezado, e por conseguinte um hyperboloide de uma folha.

51. Cortemos o hyperboloide de uma folha por dous planos parallelos ao annel e equidistantes delle. Como as secções são ellipses semelhantes ao annel e iguaes entre si, qualquer tangente ao annel é a projecção horizontal de uma recta que encontra as outras ellipses (F. n.° 103): logo esta recta assenta na superficie; porque, se a atravessasse, só o poderia fazer em dous pontos, por ser a superficie do 2.° grão.

Tambem se póde mostrar syntheticamente que as projecções verticaes das generatrizes são tangentes á hyperbole resultante da secção da superficie pelo plano vertical, a qual é a projecção vertical da superficie. Com effeito o plano tangente em qualquer ponto desta hyperbole deve conter as tangentes a ella, e á ellipse horizontal de que esse ponto é vertice: ora a tangente a esta ellipse é perpendicular ao plano vertical; logo o plano tangente é perpendicular ao mesmo plano; e o seu traço, tangente á hyperbole, é a projecção vertical das generatrizes que nelle existem.

Estes resultados já se acharam por outro modo nos n.os 20, 21, e 22.

52. Para demonstrar analyticamente a identidade da superficie gerada pelo movimento da recta sobre as tres ellipses com o hyperboloide de uma folha, procuremos a sua equação.

As equações das tres ellipses são

$$\begin{cases} z=0 \\ a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} z=h, \\ a^2y^2+b^2x^2=k^2a^2b^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} z=-h, \\ a^2y^2+b^2x^2=k^2a^2b^2, \end{cases}$$

chamando k a razão dos eixos maiores, que tambem é a dos eixos menores, por serem as ellipses semelhantes.

E as equações da recta generatriz são

$$x=mz+p, \qquad y=nz+q.$$

As tres condições do encontro das directrizes pela generatriz dão

$$a^2q^2+b^2p^2=a^2b^2,\qquad a^2(nh\pm q)^2+b^2(mh\pm p)^2=a^2b^2k^2,$$

ou

$$a^2q^2+b^2p^2=a^2b^2,\ a^2nq+b^2mp=0,\ a^2n^2+b^2m^2=\frac{a^2b^2}{h^2}(k^2-1).$$

Substituindo nas duas primeiras destas tres equações as expressões de p e q tiradas das equações da generatriz, e attendendo á terceira, vem

$$a^2y^2+b^2x^2-2z(a^2ny+b^2mx)+\frac{a^2b^2}{h^2}(k^2-1)z^2=a^2b^2,$$

$$a^2ny+b^2mx-\frac{a^2b^2}{h^2}(k^2-1)z=0;$$

das quaes, multiplicando a segunda por $2z$ e sommando com a primeira, desapparecem em fim m e n, e resulta a equação da superficie

$$a^2y^2+b^2x^2-\frac{a^2b^2}{h^2}(k^2-1)z^2=a^2b^2,$$

ou $$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{k^2-1}{h^2}z^2=1.$$

Fazendo $\frac{k^2-1}{h^2}=\frac{1}{c^2}$, temos

$$h^2=c^2(k^2-1)=\frac{c^2}{a^2}(a^2k^2-a^2).$$

Donde resulta que, descrevendo com os semieixos a e c uma hyperbole vertical, estarão nesta hyperbole as extremidades dos eixos maiores das duas ellipses extremas. Ora a equação da superficie, que pela hypothese precedente toma a fórma

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

ficaria a mesma, se se adoptassem para directrizes extremas outras ellipses semelhantes á media e cujos eixos tivessem as extremidades sobre a hyperbole: logo esta superficie é um hyperboloide d'uma folha, que tem por semieixos a, b, c; cuja directriz de fórma constante é a hyperbole vertical descripta com os semieixos a e c; e cuja generatriz é, n'uma das suas posições, a ellipse descripta com os semieixos a e b.

Ahi temos pois tres modos de geração da superficie; ou considerando-a como enviezada de directrizes rectilineas; ou como enviezada de directrizes ellipticas, parallelas, e semelhantes; ou finalmente como superficie de 2.ª ordem, que tem por directriz uma hyperbole, e por generatriz uma ellipse de fórma constante e grandeza variavel.

F. n.º 105. **53.** Tractemos agora da superficie enviezada, que tem por directrizes dous circulos verticaes, parallelos e iguaes, e uma recta horizontal tirada perpendicularmente aos planos dos circulos pelo centro do parallelogrammo formado sobre os seus diametros.

Esta superficie *(Biais passè)* offerece uma apparencia muito regular, com duas partes symmetricas, uma desde a generatriz horizontal, que passa por duas extremidades dos diametros, até áquella que é parallela ao horizonte; outra desde esta segunda generatriz até á horizontal que passa pelas outras duas extremidades dos mesmos diametros.

Quando esta superficie se emprega para cubrir com uma abobada o espaço parallelogrammo comprehendido entre os dous circulos, é necessario dar ás juntas a configuração de paraboloides hyperbolicos, iguaes aos auxiliares que servem para a construcção dos planos tangentes, e que se confundiriam com elles se se lhes desse o movimento de rotação de 90° em torno das generatrizes correspondentes da superficie (n.º 33).

Tambem satisfazem á condição d'encontrar as tres directrizes as rectas tiradas do centro do parallelogrammo para os pontos de uma das circumferencias; porque estas rectas encontram a outra circumferencia na região opposta relativamente ao plano horizontal. A superficie compõe-se então dos dous ramos d'um cone de base circular; mas é claro que este cone não póde servir para o fim de cubrir com uma abobada o espaço parallelogrammo (Leroy, Geom. descr. n.º 594 — 597).

54. Para ter a equação desta superficie tomemos por origem das coordenadas o centro do parallelogrammo; por eixo dos z uma perpendicular ao horizonte; por eixo dos y a directriz rectilinea; e por eixo dos x uma parallela aos diametros dos circulos. As equações das directrizes serão:

$$x=0,\ z=0\ ;\ y=b,\ (x-a)^2+z^2=r^2\ ;\ y=-b,\ (x+a)^2+z^2=r^2.$$

Combinando estas equações com as da generatriz

$$x=my+p,\quad z=ny+q,$$

resultam as tres equações de condição:

$$\frac{p}{m}=\frac{q}{n},\ (\pm mb+p\mp a)^2+(\pm nb+q)^2=r^2.$$

A differença das duas ultimas dá, attendendo á primeira,

$$p(mb-a)+qnb=0=\frac{q}{n}[m(mb-a)+n^2b].$$

O factor $\frac{q}{n}=0=\frac{p}{m}$ reduziria as equações da generatriz a

$$x=my,\quad z=ny,$$

que, por serem as de uma recta tirada pela origem, dariam uma superficie conica. O outro factor, com as outras equações de condição, dá

$$mb(z^2+x^2)=ax^2,\ p=x-my,$$

$$ap^2+(a^2-r^2)mb-am^2b^2=0\ ;$$

d'onde resulta a equação da superficie:

$$[axy-b(x^2+z^2)]^2=b^2[r^2x^2+(r^2-a^2)z^2].$$

55. Quando se quer achar a equação da curva formada pelas inter-

secções consecutivas das projecções das generatrizes d'uma superficie sobre um dos planos coordenados, eliminam-se por meio das equações de condição todos os parametros menos um; e differencia-se em ordem ao parametro restante a equação da projecção da generatriz sobre o plano de que se tracta: elimina-se depois o mesmo parametro entre esta equação e a derivada; e a equação resultante é a pedida.

Fazendo isto a respeito das projecções das generatrizes da superficie, de que se tractou no n.° antecedente, sobre o plano (xy), acha-se a hyperbole cuja equação é

$$x^2+\frac{r^2-a^2}{ab}xy+\frac{(r^2-a^2)^2}{4a^2}=0.$$

O eixo dos y é uma das asymptotas; e a outra é $y=\frac{ab}{a^2-r^2}x$: como se vê resolvendo a equação em ordem a x e y. Esta hyperbole é pois o contorno apparente da superficie sobre o plano horizontal (Leroy, Anal. n.os 324 — 325.)

56. Tambem se empregam na construcção das abobadas as superficies conoides, descriptas por uma generatriz rectilinea, que se move parallelamente a um plano director encontrando sempre uma recta e uma curva.

Tomemos para eixo dos z a recta directriz; para origem o ponto onde ella encontra um plano parallelo ao director; e este plano parallelo para plano (xy). As equações das directrizes referidas a este systema d'eixos, que é obliquo se a directriz rectilinea não é perpendicular ao plano director, serão da fórma

$$x=0,\ y=0,\ \mathrm{F}(x,\,y)=0,\ f(z,\,y)=0;$$

e as da generatriz, parallela ao plano director, serão

$$z=\beta,\quad y=\alpha x.$$

Nestas equações da generatriz já imprimimos a condição do encontro della com a directriz rectilinea. A condição do encontro com a outra di-

directriz daria uma equação em α e β; que, resolvida em ordem a β, sería

$$\beta = \varphi(\alpha);$$

φ designando uma funcção, cuja fórma depende das fórmas de F e f.

Assim a equação destas superficies é

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

que pela differençiação, e eliminação de φ', dá

$$px + qy = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a).$$

Por exemplo: Se as directrizes são uma ellipse e uma recta, a segunda das quaes, e o plano da primeira, são perpendiculares ao plano director e á distancia do centro da ellipse á recta; e se um eixo da ellipse é parallelo ao mesmo plano: tirando por este eixo um plano parallelo ao director, e contando os y parallelamente ao mesmo eixo; as equações da ellipse directriz são:

$$x = c, \quad a^2z^2 + b^2y^2 = a^2b^2.$$

Estas equações, com as da generatriz, dão a equação da superficie

$$\frac{b^2c^2}{a^2}y^2 = x^2(b^2 - z^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b),$$

cujas secções parallelas a (yz) são ellipses. (Ler. Anal. n.^{os} 307 e 308).

57. Façamos girar um semicirculo vertical, cujo diametro é horizontal, em torno de um eixo vertical levantado em qualquer ponto do prolongamento daquelle diametro. A superficie resultante chama-se *tóro.*

Cortemos esta superficie por dous planos verticaes, cuja intersecção seja o eixo; e levantando um cylindro vertical sobre o arco, que estes planos interceptam na circumferencia descripta pelo centro do semicirculo gerador, imaginemos enrolada neste cylindro uma ellipse vertical, cujo eixo horizontal seja igual ao mesmo arco, e cujo eixo vertical immovel seja igual ao raio do semicirculo.

O tóro cubrirá o espaço circular proveniente do movimento do semicirculo; e do corte pelos planos secantes resultará uma abertura, a qual imaginaremos cuberta com o conoide, cujas directrizes são a ellipse enrolada e o eixo do tóro. Os pontos das generatrizes deste conoide, que ficarem interiores ao tóro, não servirão; e por isso, para conhecer a curva que limita sobre o tóro a parte do conoide que serve, é necessario achar a intersecção destas duas superficies.

Para isso é mais simples considerar o tóro como gerado pelo movimento de dous circulos horizontaes concentricos, cuja distancia primitiva é igual ao diametro do semicirculo vertical, que até aqui tomamos por gerador e que agora faremos director.

Equação do tóro. Tomando para plano (xz) o do semicirculo director; para (xy) o dos circulos geradores concentricos; para origem o centro dos mesmos circulos; e chamando l a distancia daquelle centro ao do semicirculo director, e r o raio deste semicirculo: as equações dos circulos geradores são:

$$x^2+y^2=(l+p)^2,\ x^2+y^2=(l-p)^2;$$

onde p designa a abscissa, que corresponde á ordenada z no semicirculo vertical cuja equação é $p^2+z^2=r^2$.

Logo $$\sqrt{x^2+y^2}=l\pm\sqrt{r^2-z^2},$$

ou $$r^2=(l\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c).$$

Equação do conoide. Se a equação da ellipse vertical é $r^2y^2+b^2z^2=r^2b^2$: enrolando-a sobre o cylindro do raio l, e chamando s um arco da base contado do centro da ellipse, teremos as equações da directriz:

$$r^2s^2+b^2z^2=r^2b^2,\ x^2+y^2=l^2,\ \frac{s}{l}=\text{arc}\left(\text{sen}=\frac{y}{l}\right);$$

logo:

$$x^2+y^2=l^2,\ y=l\,\mathrm{sen}\left(\frac{b}{rl}\sqrt{r^2-z^2}\right).$$

E combinando estas equações com as da generatriz

$$z=c,\ y=\alpha x,$$

teremos a equação da superficie:

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{sen}\left(\frac{b}{rl}\sqrt{r^2-z^2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(d).$$

Posto isto, se eliminarmos z entre as equações (c) e (d), acharemos a da projecção sobre o plano (xy) da intersecção das duas superficies:

$$\pm\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{sen}\left[\left(l-\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{b}{rl}\right];$$

da qual, pondo $x=t\cos u$ e $y=t\,\mathrm{sen}\,u$, resultam:

$$t=l\mp\frac{lr}{b}u,\ t=l\mp\frac{rl}{b}(180^\circ-u).$$

Logo a curva tem duas regiões oppostas; e em cada uma dellas ha um ponto multiplo, o qual corresponde na primeira a $u=0$, e na segunda a $u=180^\circ$ (Ler. Anal. n.os 298 e 309, e Geom. descr. n.° 634).

Para tudo o mais, que respeita á intersecção das duas superficies, consulte-se a Geom. descr. de Leroy, n.os 630 — 638.

58. Consideremos o *heliçoide enviezado*, descripto pelo movimento F.n.°107.
d'uma recta horizontal obrigada a encontrar um helice traçado sobre um cylindro vertical, e a tocar outro cylindro.

Do helice. O helice tem a propriedade de serem as alturas dos seus pontos acima da base do cylindro proporcionaes aos arcos da mesma base. Supondo pois a base circular, como ordinariamente é; e tomando para eixo dos z o eixo do cylindro, e para eixo dos x o diametro que passa pelo ponto onde a curva encontra a base; as equações do helice são:

$$x^2+y^2=\mathrm{R}^2,\ z=ks,\ \frac{s}{\mathrm{R}}=\mathrm{arc}\left(\mathrm{sen}=\frac{y}{\mathrm{R}}\right),$$

ou $$x^2+y^2=\mathrm{R}^2,\ y=\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{z}{k\mathrm{R}}\right);\ (\dagger)$$

e por conseguinte $$x=\mathrm{R}\cos\left(\frac{z}{k\mathrm{R}}\right).$$

A primeira destas equações mostra que a projecção horizontal do helice é a base do cylindro. Introduzindo na segunda equação a altura $h=k.2\pi\mathrm{R}$, correspondente á circumferencia, fica

$$y=\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z}{h}\right);$$

onde h é o que se chama o passo do helice.

Destas equações resultam as seguintes consequencias:

1.° Pondo $z=nh+z'$, fica ainda

$$y=\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi z'}{h}\right);$$

(†) Se a equação da base do cylindro fosse $f(x,y)=0$; as do helice seriam em geral

$$f(x,y)=0,\quad z=k\int(\sqrt{dx^2+dy^2}).$$

logo a projecção do helice sobre o plano (yz) compõe-se de porções iguaes separadas por intervallos iguaes a h.

2.° Como os maiores valores de x e y são $\pm R$, a curva é limitada no sentido horizontal: o que por outra parte se vê claramente.

$$3.^{\circ} \left\{ \begin{matrix} \dfrac{dy}{dz}=0\,, & \text{ou} & \dfrac{d^2x}{dz^2}=0 \\ \dfrac{dx}{dz}=0\,, & \text{ou} & \dfrac{d^2y}{dz^2}=0 \end{matrix} \right\} \text{dão} \left\{ \begin{matrix} \dfrac{s}{R}=(n+\tfrac{1}{2})\pi \\ \dfrac{s}{R}=n\pi \end{matrix} \right\};$$

logo de 90° em 90° a curva offerece alternadamente um ponto onde a tangente é vertical, e outro de inflexão.

De ser constante o angulo formado pela tangente com o eixo do cylindro, resulta um meio facil de tirar tangentes ao helice parallelas a um plano dado:

De qualquer ponto do eixo, como vertice, descreve-se um cone, cujas generatrizes façam com o mesmo eixo um angulo igual ao que fazem com elle as tangentes do helice; e tira-se pelo vertice um plano parallelo ao dado. As generatrizes, pelas quaes este plano corta o cone, são parallelas ás tangentes pedidas: por conseguinte as projecções horizontaes destas tangentes tocam a base do cylindro, e são parallelas ás projecções das mesmas generatrizes; o seu traço horizontal acha-se tomando nellas, a partir do ponto de contacto com a base do cylindro, uma parte igual ao arco comprehendido entre este ponto e a origem; e as projecções verticaes são tangentes á projecção vertical do helice.

59. *Do heliçoide.* Como a generatriz do heliçoide é horizontal, e toca outro cylindro vertical, cuja equação supporemos $\varphi(x', y')=0$; as suas equações são:

$$\text{o systema } [y'-y=p(x'-x)\,,\ \varphi(x', y')=0]\,,\ z=\beta.$$

Eliminando x, y, z entre estas equações e as duas do helice, resultarão duas entre os parametros x', y', β, p; depois eliminando os mesmos parametros entre estas duas e as da generatriz, virá a equação da superficie.

Se o segundo cylindro se reduz ao seu eixo, a equação $\varphi(x', y')=0$ é substituida pelas duas $x'=0$, $y'=0$; e as da generatriz reduzem-se ás $y=px$, $z=\beta$, d' uma recta horizontal que encontra o eixo; como deve ser (Vej. Ler. Anal. n.° 310).

O heliçoide serve nas construcções das escadas de caracol. Por ser constante a inclinação das tangentes do helice, e por serem horizontaes as generatrizes, estas escadas satisfazem, como as ordinarias, ás condições de nellas se subir como por degráos collocados sobre um plano inclinado, e de serem estes degráos horizontaes nos logares onde assenta o pé.

60. Nos livros, que tractam de Geometria descriptiva, acham-se processos para tirar os planos tangentes ás diversas superficies de que até aqui nos havemos occupado; mas, quando as superficies não são daquellas a que se podem applicar os processos conhecidos, o meio mais geral de tirar planos tangentes a qualquer superficie por um ponto exterier é cortal-a por muitos planos secantes conduzidos pelo ponto dado; tirar desse ponto tangentes ás secções; e unir por uma curva os pontos de contacto tomados com a proximidade conveniente. Ficará assim construido o cone circumscripto á superficie proposta; e escolhendo o ponto da curva de contacto que satisfizer a uma nova condição, a generatriz correspondente será aquella pela qual o plano tangente pedido tocará o cone.

Mas cumpre não esquecer que, para as superficies planificaveis, o cone circumscripto se reduz a um plano, com o qual se confundem todos os tangentes nos pontos de contacto; e que a curva de contacto se reduz a uma aresta da superficie.

Se as operações, de que se tracta, se executam a distancias que permittam o uso dos instrumentos de observar angulos, e se não ha processos conhecidos para tirar as tangentes ás secções: pode collocar-se o circulo repetidor, ou outro instrumento de medir angulos, de modo que o seu plano seja o secante; dirigir a alidada de modo que o raio visual toque sensivelmente a superficie; e construir as projecções do ponto de contacto, determinando, geometrica ou trigonometricamente, a projecção horizontal da distancia desse ponto á estação, e a altura do mesmo ponto relativamente ao plano horizontal que passa pela estação. Dando ao plano do instrumento diversas inclinações, acham-se assim os pontos de contacto existentes nas secções respectivas (†).

(†) No entretanto nos desenhos relativos á fortificação as fórmas do terreno

61. Estes principios teem applicação nas fortificações das praças.

Delineadas as obras de fortificação, suppondo o plano horizontal: para applicar esse delineamento ao caso de haver uma eminencia exterior, que prejudique a praça, basta escolher dous pontos no terreno desta; construir o plano tangente á eminencia, com a condição de passar por esses dous pontos; e depois fazer todas as obras em relação a este plano, do mesmo modo que estavam delineadas a respeito do plano de nivel, cavando ou entulhando o terreno para lhe dar a inclinação do plano tangente. Este plano será determinado pelos dous pontos escolhidos, e pela intersecção das curvas de contacto dos dous cones circumscriptos á superficie, dos quaes são vertices os mesmos pontos; ou, em geral, por outro qualquer meio de sugeitar um plano a tocar uma superficie, e a passar por dous pontos dados.

Se houvessem duas eminencias, escolher-se-hia no terreno da praça um ponto, pelo qual se faria passar o plano tangente a ellas. Este plano seria tangente á superficie planificavel circumscripta ás duas eminencias, e conteria o ponto escolhido.

Se houvessem tres eminencias seria necessario construir o plano tangente a ellas. O processo, que para isso se tem indicado, é construir duas superficies planificaveis, cada uma das quaes seja circumscripta a duas das tres eminencias, combinadas duas a duas; e tirar pelos pontos communs a estas superficies e á eminencia tocada por ambas o plano tangente a qualquer dellas. No entretanto sómente em poucos casos particulares se sabe applicar este processo.

As condições, que devem determinar a escolha do ponto, ou pontos, pelos quaes ha de passar o plano tangente, são as seguintes: 1.ª que o angulo do plano tangente com o horizonte seja o menor possivel, para ficar menos incommodo o serviço da fortificação: 2.ª que a elevação desta

---

representam-se pela reunião das camadas ou secções horizontaes equidistantes. Imagina-se uma recta que se move sobre duas secções consecutivas, sendo sempre normal a uma dellas; o que faz substituir uma superficie enviezada, em logar da parte da superficie proposta comprehendida entre as duas secções.

Ordinariamente costumam tomar-se mesmo as secções tam vizinhas, que, sendo a normal a uma sensivelmente normal á outra, a superficie, que se substitue, seja planificavel; ou usar para generatriz d'uma curva perpendicular a ambas as secções, quando ellas são menos vizinhas.

Cada serie de normaes ás secções consecutivas, nas quaes o pé d'uma é ponto de partida da seguinte, fórma uma linha de *maior declive* da superficie.

acima do horizonte seja a menor possivel, a fim de tornar a construcção menos difficil e dispendiosa.

Taes são os principios que servem de base á operação do *desenfiamento*. (Vej. Geom. descr. de Monge, n.º 33.)

62. Por esta occasião advertiremos que nos projectos das obras de fortificação, das d'estradas, e das outras em que as mais das vezes as alturas dos pontos acima do horizonte são pouco consideraveis, o uso do plano vertical se torna incommodo e confunde os desenhos. As linhas de construcção, sendo neste caso quasi horizontaes, projectam-se no plano vertical quasi parallelamente á linha da terra; e as suas intersecções teem logar a distancias consideraveis, que as mais das vezes excedem as dimensões do quadro.

D'ahi vem que, em questões destas, se costuma usar sómente do plano horizontal; e, em logar das projecções verticaes, indicam-se por numeros, que se ajuntam ás projecções horizontaes, as alturas dos pontos relativamente a este plano. E mesmo, para abranger os casos em que os pontos estão abaixo do horizonte, toma-se um plano horizontal de *comparação* situado acima dos pontos mais elevados, ao qual se referem todos os pontos.

Deste modo a distancia de qualquer ponto ao *plano de comparação*, á qual se dá o nome de *cota*, é a differença entre as distancias do mesmo ponto e deste plano ao plano horizontal. E bem se vê que a *cota*, com a projecção horizontal, determina a projecção vertical.

Das linhas curvas e suas tangentes.
Generalidades.

63. O modo mais geral e ordinario de considerar as linhas curvas é concebel-as como resultantes das intersecções de duas superficies.

Os problemas, que sobre estas linhas se teem de resolver, são relativos ás suas projecções sobre os planos coordenados, ás das suas tangentes, á sua verdadeira grandeza; e tambem ás transformadas, que resultam do seu desenvolvimento, quando é planificavel uma das superficies de cuja intersecção provéem as mesmas curvas.

A tangente, além do uso especial que póde ter nos problemas de construcções, serve para descrever a curva com mais exactidão e segurança: por que, se as construcções graphicas se houverem consideravelmente errado em algum ponto; ou se a linha, pela qual se ligam arbitratrariamente dous pontos vizinhos, saír muito differente da sua verdadeira configuração, a direcção da tangente nesse ponto accusará muitas vezes o erro commettido, e indicará a direcção que, pouco mais ou menos, se deve dar á curva. Conhecendo por exemplo (fig. 11) no ponto M a direcção MT da tangente; e sabendo por outra parte se nesse ponto a curva offerece, ou não offerece, uma inflexão; ficará facil descrever entre os pontos A, M, B, que se suppõe construidos, uma curva que não diffira consideravelmente da verdadeira.

O desenvolvimento é util todas as vezes que as obras, que se querem fazer no espaço, se talham primeiro n'um plano; como se verá em alguns exemplos, que apontaremos, d'entre os muitos que offerecem as applicações mais usuaes.

64. As superficies auxiliares, que por suas intersecções com as propostas determinam os pontos da curva, podem tomar-se mais ou menos proximas umas das outras; e a este respeito a escolha não é indifferente para a boa construcção da curva. Com effeito, tomando-as muito distantes, as porções curvas, pelas quaes se ligam depois arbitrariamente os pontos que ellas determinam, podem ser muito differentes das verdadeiras: e tomando-as muito proximas, os erros commettidos na construcção dos pontos por ellas determinados avultam mais. Por exemplo, se (fig. 13) a construcção der o ponto errado m', em logar do verdadeiro m, a curva $am'b$, que liga este ponto com os dous a e b, diffirirá da exacta amb menos do que differe $a'm'b'$, que liga o ponto m' com dous mais vizinhos a' e b'.

Donde resulta, que se deve escolher um meio termo, tomando superficies auxiliares nem muito proximas umas das outras, nem muito distantes. E ainda nisto se deve attender á configuração da curva nos logares onde se fizerem as construcções; avizinhando mais as superficies auxiliares nos pontos singulares, e tomando-as mais distantes nos pontos onde o curso da curva for mais uniforme. Para o que muito convém que á construcção graphica da curva preceda a discussão analytica das suas propriedades.

Como a corda da projecção d'uma curva sobre um plano é projecção da corda da mesma curva; e como as extremidades d'uma se vão approximando entre si, ao passo que se approximam as extremidades da outra, até se confundirem ao mesmo tempo, e se tornarem as cordas em tangentes ás curvas respectivas: vê-se, que a projecção da tangente é tangente á projecção da curva.

O mesmo se vê observando que o plano tangente ao cylindro projectante em qualquer ponto da curva, determinado pela tangente á curva e pela generatriz do ponto de contacto, deve conter a tangente á projecção da curva; e que por conseguinte esta tangente se deve confundir com a projecção da tangente á curva, a qual é o traço do plano tangente sobre o plano de projecção.

66. Quando as superficies propostas se tocam no ponto, pelo qual se pertende tirar a tangente á curva: os dous planos tangentes, de cuja intersecção ella deve resultar, confundem-se; e a sua determinação por este meio é impossivel.

Neste caso podem construir-se duas superficies enviezadas, das quaes a curva seja directriz commum, e cujas outras duas directrizes sejam rectilineas em ambas; depois construir os planos tangentes ás duas superficies enviezadas no ponto de contacto; e por fim determinar a intersecção destes planos, que será a tangente pedida. Mas como não se conhece a tangente á curva directriz, é necessario recorrer ao methodo indicado no n.° 32, para determinar os planos tangentes; e por isso este processo é pouco susceptivel de applicação. No entretanto quando a curva é plana, a tangente é a intersecção do seu plano com o plano tangente ás duas superficies no ponto de contacto.

Algumas vezes, quando os planos tangentes ás duas superficies são perpendiculares a um dos planos de projecção, as normaes indicam o modo de determinar a tangente; em quanto que a intersecção dos planos tangentes deixa uma das projecções indeterminadas: como adiante veremos.

Secção das superficies curvas por planos.

F. n.° 117. 67. Comecemos pela secção do cylindro recto por um plano. Tomemos o plano horizontal perpendicular ás generatrizes, e o vertical perpendicular ao secante.

Chamando ω o angulo $a'qa''$, facilmente se vê que, tanto na curva rebatida sobre o plano horizontal como na rebatida sobre o vertical, uma das coordenadas, por exemplo $M''d$ e md, de dous pontos correspondentes M'' e m da curva e da base do cylindro tem entre si a razão constante $1 : \cos \omega$; em quanto que a outra coordenada dos mesmos pontos é commum: logo, se a base do cylindro for um circulo ou uma ellipse, a secção será tambem elliptica.

Assim, se a base é uma ellipse que tem por eixos a e b, a curva é outra ellipse, cujos eixos são $\frac{a}{\cos\omega}$ e b. E então:

Se $a > b$: a ellipse é sempre alongada no sentido de a.

Se $a < b$: a ellipse ainda é alongada no mesmo sentido, quando $\cos\omega < \frac{a}{b}$; é um circulo, quando $\cos\omega = \frac{a}{b}$; e é alongada no sentido de b, quando $\cos\omega > \frac{a}{b}$.

68. Sejam E, E', E'', tres ellipses concentricas, situadas no mesmo plano, tendo um eixo commum que designaremos por b, e os tres differentes que designaremos por a, a', a'', dos quaes supporemos a o menor. Se levantarmos sobre E um cylindro recto, e por b tirarmos dous planos secantes taes que sejam

$$\frac{a}{\cos\omega'} = a', \quad \frac{a}{\cos\omega''} = a'':$$

as secções serão iguaes ás ellipses E' e E''; e conseguintemente terá logar a respeito das tres ellipses a propriedade relativa á intersecção commum das tangentes nos pontos das tres secções, rebatidas sobre o plano da base, dispostos sobre a mesma perpendicular ao eixo commum b.

69. Para obter a equação da transformada, tiremos por δ' uma parallela a $\alpha\beta\gamma\ldots$; e sobre esta parallela contemos as abscissas, pondo a origem em δ'. A abscissa do ponto μ' será o arco md, e a sua ordenada será a distancia de m' á recta uv.

Chamando x o arco md, a figura dá logo equação da transformada

$$y = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,x\,\mathrm{tang}\,\omega.$$

Como

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dy}{dx}=0\\[2ex]\dfrac{d^2y}{dx^2}=0\end{array}\right\}\text{dão}\left\{\begin{array}{ll}x=\pm\frac{1}{2}\pi, & \text{ou } x=\pm(n+\frac{1}{2})\pi,\\[2ex] x=0, & \text{ou } x=n\pi:\end{array}\right.$$

vê-se que na curva ha ordenadas maximas e minimas, e pontos de inflexão taes como δ'. O numero indefinido n indica a prolongação indefinida da curva; para conceber a qual basta suppor que sobre o cylindro estava dobrada, em numero de voltas indefinido, uma capa sem espessura, e que esta capa se foi desdobrando successivamente.

Suppõe-se o cylindro aberto pela generatriz $(a\ a'\ a'')$. Se se abrisse pela generatriz opposta, a transformada representaria a mesma figura, mas posta ás avessas.

70. O desenvolvimento desta secção, assim como o das secções de todas as superficies planificaveis, póde ser util, como já notámos, em obras que se talham sobre um plano para depois serem applicadas ás superficies.

O funileiro, por exemplo, que pertende ajuntar a um tubo cylindrico de folha, terminado por um corte obliquo, outro de igual calibre: deve construir sobre uma folha de grandeza conveniente a transformada da secção, que termina o tubo dado; depois cortar a folha ao longo dessa transformada; e por fim enrolal-a no cylindro, até que a transformada se ajuste exactamente com aquella secção.

Do mesmo modo o architecto, que pertende fazer um corte n' uma columna cylindrica macissa com uma inclinação dada: deve riscar n' um cartão a transformada da secção; enrolal-o sobre o cylindro; e cortar este segundo o risco feito no cartão.

F. n.º 119. 71. Passemos á intersecção do cone recto por um plano: tomando o plano vertical perpendicular ao secante, e o horizontal parallelo á base do cone.

Designando por h e R as rectas $o'o'$ e $a'o''$ que dão as dimensões do cone; por k'' a intersecção de $o'o''$ com $h'i'$; por s a de $o'o''$ com qp'; por k a recta $o's$, e por ω o angulo $p'qa'$, que determinam o plano secante: e fazendo

$$k''o' = z, \quad on = \rho, \quad don = \theta:$$

os triangulos $n'o'k''$, $m'o'o''$, $s'n'k''$, e o triangulo rectangulo formado com a hypothenusa no e com o angulo don, dão:

$$n'k'' = \frac{z}{h} \cdot \mathrm{R} \cos\theta, \quad n'k'' = (z - k)\cot\omega, \quad n'k'' = \rho\cos\theta.$$

Eliminando $n'k''$ e z entre estas tres equações, resultará em fim

$$\rho = \frac{\dfrac{\mathrm{R}k}{h}}{1 - \dfrac{\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\omega}{h} \cdot \cos\theta},$$

equação polar da projecção horizontal da secção. Logo esta projecção é uma secção conica, que tem um dos focos no pólo o.

Pondo

$$\frac{\mathrm{R}k}{h} = a(1 - e^2), \quad \frac{\mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,\omega}{h} = e,$$

teremos as dimensões a e e desta curva;

$$a = \frac{\dfrac{\mathrm{R}k}{h}}{1 - \dfrac{\mathrm{R}^2}{h^2}\mathrm{tang}^2\,\omega}, \quad e = \frac{\mathrm{R}}{h}\,\mathrm{tang}\,\omega;$$

a qual será:

$$\left\{\text{uma ellipse}, \quad \text{uma parabola}, \quad \text{uma hyperbole},\right\}$$

conforme for:

$$\left\{\frac{\mathrm{R}}{h}\,\mathrm{tang}\,\omega < 1, \quad \frac{\mathrm{R}}{h}\,\mathrm{tang}\,\omega = 1, \quad \frac{\mathrm{R}}{h}\,\mathrm{tang}\,\omega \geq 1,\right\}.$$

Fazendo $o'e' = c$, $qe'o' = \alpha$, $d'o'a' = \beta$,

e $$\omega = \alpha + \tfrac{1}{2}\beta - 90^\circ,\quad \frac{R}{h} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\,,\quad k = \frac{c \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)}\,;$$

e substituindo estes valores nas tres condições precedentes; resultam as seguintes

$$\frac{-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)} < 1\,,\quad \frac{-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)} = 1\,,\quad \frac{-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)} > 1\,,$$

ou

$$\frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}[180^\circ - (\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)]} < 1\,,\quad \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}[180^\circ - (\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)]} = 1,\quad \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta}{\operatorname{tang}[180^\circ - (\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)]} > 1\,;$$

e por conseguinte

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{ellipse} & \text{parabola} & \text{hyperbole} \\ \alpha + \beta < 180^\circ & \alpha + \beta = 180^\circ, & \alpha + \beta > 180^\circ \end{array}\right\};$$

que são com effeito as condições já conhecidas para que a curva seja ellipse, parabola, ou hyperbole.

As cordas horizontaes NN' da secção são iguaes ás cordas nn_1 da sua projecção; mas as distancias a ellas, contadas dos vertices K e k, teem entre si a razão constante $1 : \cos\omega$. Logo a curva resultante da secção do cone pelo plano é uma *secção conica*, cujos eixos a' e b' são

$$a' = \frac{a}{\cos\omega},\ b' = b\,;$$

chamando a e b os da projecção horizontal. D'onde resulta:

$$e'^2 = 1 - \frac{b'^2}{a'^2} = 1 - \frac{b^2\cos^2\omega}{a^2} = 1 - (1 - e^2)\cos^2\omega = \left(1 + \frac{R^2}{h^2}\right)\text{sen}^2\omega.$$

72. Para referir a secção ás coordenadas rectangulares, contadas do vertice como origem, e sobre o eixo KE como eixo dos x, faremos $\theta = 0$ na equação da projecção; o que dará a distancia do vertice della ao foco:

$$\rho_1 = a(1 + e) = \frac{\frac{Rk}{h}}{1 - \frac{R\,\text{tang}\,\omega}{h}}.$$

Assim a distancia do vertice k da projecção a cada corda será

$$\rho_1 - \rho\cos\theta = x\cos\omega = \frac{\frac{Rk}{h}}{1 - \frac{R\,\text{tg}\,\omega}{h}} - \frac{\frac{Rk}{h}\cos\theta}{1 - \frac{R\,\text{tg}\,\omega}{h}\cos\theta};$$

e a semicorda da secção será

$$y = \rho\,\text{sen}\,\theta = \frac{\frac{Rk}{h}\,\text{sen}\,\theta}{1 - \frac{R\,\text{tang}\,\omega}{h}\cos\theta}.$$

Eliminando θ entre estas equações, vem a equação da secção, referida ás coordenadas rectangulares contadas sobre o eixo e a partir do vertice K:

$$y^2 = \frac{2Rk\cos\omega}{h}.x - \left(1 - \frac{R^2\text{tang}^2\omega}{h^2}\right)\cos^2\omega.x^2.$$

Esta equação, comparada com

$$y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(2a'x - x^2),$$

dá:

$$a' = \frac{a}{\cos\omega} = \frac{\frac{R}{h}k}{\left(1 - \frac{R^2\tang^2\omega}{h^2}\right)\cos\omega},$$

$$e'^2 = 1 - \frac{b'^2}{a'^2} = 1 - \left(1 - \frac{R^2\tang^2\omega}{h^2}\right)\cos^2\omega$$

$$= \left(1 + \frac{R^2}{h^2}\right)\operatorname{sen}^2\omega;$$

e transformando-a em e, α, β, com attenção a ser

$$1 - \tang^2\tfrac{1}{2}\beta\cot^2(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta) = [1 - \tang\tfrac{1}{2}\beta\cot(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)][1 + \tang\tfrac{1}{2}\beta\cot(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta)]$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos^2\frac{1}{2}\beta\operatorname{sen}^2(\alpha + \frac{1}{2}\beta)},$$

resulta a equação ordinaria das secções conicas (Franc. Math. pur. n.° 400):

$$y^2 = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos^2\frac{1}{2}\beta}[cx\operatorname{sen}\beta - x^2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)].$$

Como a distancia $\delta = ae$ do centro da projecção ao foco o corresponde na secção a $\Delta = \frac{ae}{\cos\omega}$, é $\frac{\delta}{a} = e = \frac{\Delta}{a'}$: e como é $e'^2 = \operatorname{sen}^2\omega + e^2\cos^2\omega$, segue-se que o foco da secção não se projecta no foco da sua projecção horizontal.

73.

73. Passemos agora á transformada resultante do desenvolvimento da secção.

Designemos por r e l as distancias de cada parallela, e da base do cone, ao vertice, contadas sobre o apothema.

Os triangulos semelhantes $o'n'k''$ e $o'm'o''$ dão

$$r = l \cdot \frac{n'k''}{m'o''} = l \frac{\rho}{R} = \frac{\frac{l}{h} k}{1 - \frac{R \tang \omega}{h} \cos \theta}.$$

Como os arcos correspondentes aos raios vectores r no circulo de raio l, descripto sobre o cone, teem os mesmos valores absolutos que os dos arcos correspondentes no circulo de raio R: se designarmos por u os angulos subtendidos pelos primeiros, será

$$lu = R\theta, \text{ ou } \theta = \frac{l}{R} \cdot u;$$

o que dará para equação da transformada

$$r = \frac{\frac{l}{h} \cdot k}{1 \mp \frac{R \operatorname{tg} \omega}{h} \cdot \cos\left(\frac{lu}{R}\right)},$$

onde escrevemos os signaes $\mp$, por corresponder o superior ao caso em que se abre o cone pela aresta $(ao, a'o')$, e o inferior áquelle em que se abre o cone pela aresta $(od, o'd')$. Cada um destes valores de r reproduzir-se-ha em periodos, cujo intervallo angular será $u = \frac{2\pi R}{l}$; porque, para qualquer inteiro n, é

$$\cos\left\{\frac{l}{\mathrm{R}}(nu+u)\right\}=\cos\left(\frac{lu}{\mathrm{R}}\right):$$

e cada direcção de r reproduzir-se-ha em periodos, cujo intervallo será 2π. Logo cada raio reproduzir-se-ha em grandeza e direcção em periodos, cujo intervallo angular será $2\pi.\frac{i\mathrm{R}}{l}$, sendo i e $\frac{i\mathrm{R}}{l}$ numeros inteiros: e a curva será fechada. Mas como o haver ou não haver um numero inteiro i, que faça $\frac{i\mathrm{R}}{l}$ inteiro, depende de ser commensuravel ou incommensuravel a razão $\frac{l}{\mathrm{R}}$: vê-se que igualmente depende desta commensurabilidade ou incommensurabilidade o ser a curva fechada ou não o ser.

74. Para melhor conhecer a fórma da curva procuremos o angulo φ que a tangente faz com o raio vector, angulo que é dado pela fórmula

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{r}{r'} \text{ (Franc. Math. pur. n.° 765).}$$

Differenciando a equação da transformada, vem

$$r'=\mp\frac{lk}{h}\cdot\frac{\frac{l}{h}\operatorname{tang}\omega\,.\operatorname{sen}\frac{lu}{\mathrm{R}}}{\left\{1\mp\frac{\mathrm{R}\operatorname{tang}\omega}{h}\cos\left(\frac{lu}{\mathrm{R}}\right)\right\}^2};$$

o que dá
$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{1\mp\frac{\mathrm{R}\operatorname{tang}\omega}{h}.\cos\left(\frac{lu}{\mathrm{R}}\right)}{\frac{l\operatorname{tang}\omega}{h}.\operatorname{sen}\left(\frac{lu}{\mathrm{R}}\right)}.$$

Posto isto:

1.° Nos pontos correspondentes aos tres valores

$$u=0\,,\ \frac{lu}{\mathrm{R}}=180°,\ \frac{lu}{\mathrm{R}}=360°,$$

é tang $\varphi=\infty$, ou o raio vector perpendicular á tangente.

2.° Vejamos se ha pontos de inflexão; examinando se é nulla ou infinita a expressão

$$y''=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r'\cos u-r\,\mathrm{sen}\,u)^3}\ \text{(Franc. Math. pur. n.° 730).}$$

Attendendo ás expressões de $\frac{\mathrm{R}}{l}$, $\frac{h}{l}$, $\frac{\mathrm{R}}{h}$, k, em funcções de c, α, β; e differenciando $\frac{r}{r'}$; temos:

$$\frac{r}{r'}=\mp\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{\mathrm{tang}\,\omega}\cdot\frac{1\mp\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\beta\,\mathrm{tang}\,\omega\cos\left(\frac{lu}{\mathrm{R}}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{lu}{\mathrm{R}}\right)};$$

$$\frac{2r'^2-rr''}{r'^2}$$

$$=1+\frac{r'^2-rr''}{r'^2}$$

..

$$= \frac{\mp \cot \omega \cot \tfrac{1}{2} \beta \left\{ \pm \operatorname{tang} \omega \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \beta - \cos \left(\frac{lu}{R} \right) \right\} + \operatorname{sen}^2 \left(\frac{lu}{R} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{lu}{R} \right)}$$

$$= \frac{-\cos^2 \left(\frac{lu}{R} \right) \pm \cot \omega \cot \tfrac{1}{2} \beta \cos \left(\frac{lu}{R} \right)}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{lu}{R} \right)};$$

$$= \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{r'^2}$$

$$= \frac{-\cos^2 \left(\frac{lu}{R} \right) \pm \cot \omega \cot \tfrac{1}{2} \beta \cos \left(\frac{lu}{R} \right) + \cos^2 \tfrac{1}{2} \beta \cot^2 \omega \left\{ 1 \mp \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \beta \operatorname{tang} \omega \cos \left(\frac{lu}{R} \right) \right\}^2}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{lu}{R} \right)}$$

$$= \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2} \beta \cot^2 \omega - \cos^2 \tfrac{1}{2} \beta \cos^2 \left(\frac{lu}{R} \right) \pm \cot \tfrac{1}{2} \beta \cot \omega \cos \left(\frac{lu}{R} \right) \left\{ 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \beta \right\}}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{lu}{R} \right)}$$

$$= \frac{\cos^2 \tfrac{1}{2} \beta \left\{ \cot^2 \omega - \cos^2 \left(\frac{lu}{R} \right) \pm 2 \cot \beta \cot \omega \cos \left(\frac{lu}{R} \right) \right\}}{\operatorname{sen}^2 \left(\frac{lu}{R} \right)};$$

$$y'' = \frac{1}{r'} \cdot \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{r'^2} \cdot \frac{1}{\left(\cos u - \frac{r}{r'} \operatorname{sen} u\right)^3}$$

$$= A \frac{\left\{1 \mp \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \beta \operatorname{tg} \omega \cos\left(\frac{lu}{R}\right)\right\}^2 \cdot \left\{\cot^2 \omega - \cos^2\left(\frac{lu}{R}\right) \pm 2 \cot \omega \cot \beta \cos\left(\frac{lu}{R}\right)\right\}}{\left\{\cos u \operatorname{sen}\left(\frac{lu}{R}\right) - \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} \beta \operatorname{sen} u \cos\left(\frac{lu}{R}\right) \pm \cos \tfrac{1}{2} \beta \cot \omega \operatorname{sen} u\right\}^3}.$$

Igualando a zero os dous factores do numerador, resultam as raizes

$$\cos\left(\frac{lu}{R}\right) = \pm \cot \tfrac{1}{2} \beta \cot \omega\,, \quad \cos\left(\frac{lu}{R}\right) = \pm \cot \beta \cot \omega \left\{1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}\right\},$$

nas quaes a cada signal de fóra do parenthesis podem corresponder os dous de dentro, e que se reduzem ás distinctas:

$$\cos\left(\frac{lu}{R}\right) = \pm \cot \tfrac{1}{2} \beta \cot \omega \ldots (a), \quad \cos\left(\frac{lu}{R}\right) = \mp \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \beta \cot \omega \ldots\ldots (b).$$

A primeira só póde dar para $\frac{lu}{R}$ valores reaes quando $\omega > 90 - \frac{1}{2}\beta$, e a segunda quando $\omega > \frac{1}{2}\beta$. Ora $\omega > 90 - \frac{1}{2}\beta$ dá $\alpha + \beta > 180°$: logo só póde haver raizes reaes correspondentes á primeira condição quando a secção é uma hyperbola.

Igualando o denominador a zero, vem uma equação que só poderá ser tractavel quando $\frac{l}{R}$ for racional. Sendo, por exemplo, $\frac{l}{R}=2$, aquella equação dá

$$\cos^2 u = \frac{-\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta \mp \cos\frac{1}{2}\beta\cot\omega}{2(1-\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta)} = \mp \frac{\cos(\omega \mp \frac{1}{2}\beta)}{4\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}^2(45^\circ - \frac{1}{4}\beta)},$$

e

$$\cos\left(\frac{lu}{R}\right) = \cos 2u = 2\cos^2 u - 1 = \frac{-1 \mp \cos\frac{1}{2}\beta\cot\omega}{1-\operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta} \;\ldots\; (c).$$

Esta equação só póde dar angulos $\frac{lu}{R}$ reaes quando se usa do signal inferior, correspondente ao caso de se abrir o cone pela aresta (od, $o'd'$). E ainda assim é necessario, para serem $\frac{lu}{R}$ e u reaes, que se verifiquem as condições

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta\cot\omega - 1 < 1 - \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\beta\,, \quad \text{ou} \quad \cos(\omega - \tfrac{1}{2}\beta) < 2\operatorname{sen}\omega\,;$$

e $\qquad \cos\frac{1}{2}\beta\cot\omega > \operatorname{sen}\frac{1}{2}\beta\,, \qquad$ ou $\quad \omega < 90^\circ - \frac{1}{2}\beta\,,$

condição que só tem logar quando a secção é elliptica.

3.° Quando $\frac{lu}{R}=0$, as expressões de r' e r'' reduzem-se a

$$r' = 0\,,\ r'' = \mp B\,,$$

B designando uma quantidade positiva. Logo, no ponto correspondente a

$\frac{lu}{R}=0$ é *r maximo*, quando o cone se abre pela aresta $(ao\,,\ a'o')$; e, *minimo* quando o cone se abre pela aresta $(od\,,\ o'd')$.

Quando $\frac{lu}{R}=180°$, as mesmas expressões reduzem-se a

$$r'=0\,,\quad r''=\pm B.$$

Logo, no ponto correspondente a $\frac{lu}{R}=180°$ é *r minimo* ou *maximo*, conforme se abre o cone pela aresta $(ao\,,\ a'o')$ ou pela aresta $(od\,,\ o'd')$.

4.° A expressão (*a*) de $\cos\left(\frac{lu}{R}\right)$ substituida na de *r* dá $r=\infty$. Donde resulta que esta raiz não corresponde a ponto de inflexão; e só indica que a curva vae approximando-se da configuração rectilinea, ao passo que se afasta da origem: o que deve ser assim, por isso que a transformada tem asymptotas.

5.° A equação (*b*) mostra, que, se o cone se abre pela aresta $(ao\,,\ a'o')$, á qual corresponde o signal superior, os pontos de inflexão existem no 2.° e 3.° quadrante; e que, se o cone se abre pela aresta $(od\,,\ o'd')$, á qual corresponde o signal inferior, os pontos de inflexão existem no 1.° e 4.° quadrante.

6.° Se $\frac{1}{2}\beta$ é pouco menor que ω, $\frac{lu}{R}$ differe pouco de zero quando o cone se suppõe aberto pela aresta $(do\,,\ d'o')$; e differe pouco de 180°, quando o cone se suppõe aberto pela aresta $(ao\,,\ a'o')$: d'onde resulta que na primeira supposição os pontos de inflexão ficam proximos do correspondente a $\frac{lu}{R}=0$, onde ha o *minimo r*; e na segunda ficam proximos do correspondente a $\frac{lu}{R}=180°$, onde é então o *minimo r*.

7.° Supponhamos $\omega \geq 90°-\frac{1}{2}\beta$.

Se é $\beta > 90°$, temos $\cot\omega \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta > \cot\omega\cot\frac{1}{2}\beta$. Ora $\cot\omega\cot\frac{1}{2}\beta$ é o valor de $\cos\theta$, passado o qual a expressão do raio vector ρ da projecção horizontal da secção se torna negativa, e os ~~angulos~~ raios vectores correspondem ao segundo ramo da hyperbole; logo o valor (b) de $\cos\left(\frac{lu}{R}\right)$ corresponde a pontos da hyperbole pertencentes á transformada da secção da segunda folha do cone.

F. n.° 121 e 122. **75.** Passemos ás secções planas da superficie enviezada de revolução. Os pontos destas secções determinam-se por planos auxiliares parallelos ao do annel. Para fazer algumas reflexões sobre ellas sirvamo-nos das fig. V. e VI. da 3.ª parte de Fourcy.

1.° Se a recta bz encontra a circumferencia or, existem os pontos g e f onde o eixo of atravessa a curva: mas esta curva é uma ellipse, ou uma hyperbole, conforme estão um de uma parte, outro de outra, ou ambos da mesma parte, a respeito de oz, os pontos onde bz encontra aquella circumferencia; isto é, conforme ficam um de uma parte, e outro da outra da projecção do annel, ou ambos da mesma parte os pontos f e g. E se uma das rectas ou ou ov sáe parallela a ab, um dos pontos d ou e está a uma distancia infinita; e a curva, sendo o eixo fg infinito, é uma parabola.

Ora, se for $or > oz$, é claro que bz encontrará a circumferencia de or d'uma e outra parte de oz; se for $or < oz$, bz encontrará a circumferencia de or só de uma parte; e se for $or = oz$, um dos pontos de encontro de bz com a circumferencia de or será z, e a recta correspondente ou, confundindo-se com oz, será parallela a ab. Logo: a secção será ellipse; parabola, ou hyperbole; conforme for:

$$oz\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}or, \quad \text{ou} \quad o''z'\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\}o''q, \quad \text{ou} \quad \alpha\left\{\begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix}\right\}\beta;$$

designando α e β os angulos $a'b'q$ e $p'qb'$, como no n.° 70 de Fourcy: o que é conforme com o que se diz n'aquelle n.°

2.° Se a recta bz toca a circumferencia, o plano bz é tangente ao cone $qo'o''$; por conseguinte este plano não é senão o secante $o'qr$, tambem tangente ao cone, trazido áquella posição pelo movimento da recta $(or, o'q)$ á roda do eixo.

Ora o plano bz, contendo a generatriz ab, necessariamente contém ainda outra generatriz, por ser a superficie do 2.° gráo: logo a intersecção do plano $o'qr$ com a superficie é igualmente o systema de duas rectas. E como bz não póde tocar a circumferencia de or, sem que seja $or < oz$: vê-se que o systema, de que se tracta, é um caso particular da hyperbole.

Se a recta, que une o com o ponto de contacto, é parallela a ab, o systema reduz-se ao de duas rectas parallelas. E como isto não póde acontecer, sem que seja $or = oz$: vê-se que este systema é um caso particular da parabola. Tudo isto confirma o que se disse no mesmo n.° 70 da Geom. descr. de Fourcy.

3.° Em fim, se bz não encontra a circumferencia de or, não existem os pontos da curva g e f; e a secção é uma hyperbole, cujo eixo real se projecta perpendicularmente a or.

Como o centro da intersecção da superficie com um plano deve ser o mesmo que o da intersecção do cone asymptota com o mesmo plano; vê-se que, para determinar neste caso o eixo real, basta dividir em duas partes iguaes a porção da recta qp' interceptada pelas generatrizes $a'c'$ e $a'b'$, e procurar pelo processo geral os pontos da curva correspondentes ao plano horizontal que passa por esse ponto.

76. Vejamos agora que posição deve ter o plano pqp', para que bz corte, toque, ou não encontre circ. or.

Pondo:

$ao = a$, $b'o'' = \mathrm{R}$, $o'o'' = h$, $a'o'' = \mathrm{H}$, $oz = k$;

$b =$ distancia de a' ao ponto onde qp' encontra a projecção vertical do annel, ou seu prolongamento;

$p =$ perpendicular abaixada de o sobre bz;

$\rho = or = qo''$:

bz cortará, tocará, ou não encontrará circ. or, conforme for $p \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} \rho$.

Mas é

$$p = k\,\mathrm{sen}\,(ozv) = k\cos(z'zu) = \frac{ka}{zb} = \frac{ka}{\sqrt{a^2 + (R-k)^2}};$$

os triangulos semelhantes $o'o''z'$ e $a'o''b'$ dão

$$\frac{k}{R} = \frac{h}{H};$$

e finalmente temos

$$h = H - a'o' = H - b\,\mathrm{tang}\beta\ ,\ \text{e}\ H = R\,\mathrm{tang}\,\alpha:$$

logo $$p = \frac{\dfrac{ah}{\mathrm{tang}\,\alpha}}{\sqrt{a^2 + R^2\left(1 - \dfrac{h}{H}\right)^2}} = \frac{ah}{\sqrt{a^2\mathrm{tang}^2\alpha + b^2\mathrm{tang}^2\beta}},$$

e $$\frac{p}{\rho} = \frac{p}{h\cot\beta} = \frac{a}{\sqrt{a^2\mathrm{tang}^2\alpha\cot^2\beta + b^2}}.$$

Assim as condições $p \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} \rho$

reduzem-se a $a^2 \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} a^2\mathrm{tang}^2\alpha\cot^2\beta + b^2$.

A primeira destas condições tem sempre logar quando é $\alpha \left\{ \begin{matrix} \geq \\ = \end{matrix} \right\} \beta$;

e a terceira só o poderá ter quando for $\alpha < \beta$.

Para comparar estas condições com as que resultam da eq. (4) do n.° 70 de Fourcy; façamos nella desapparecer o termo da 1.ª ordem pela hypothese $x = x' - \dfrac{b\cos\beta}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 1}$.

Resultará

$$y^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 1\right)x'^2 + a^2 - b^2\left\{1 + \frac{\cos^2\beta\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha}\right\}$$

$$= \left(\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 1\right)x'^2 + \frac{a^2 - (a^2\operatorname{tg}^2\alpha\cot^2\beta + b^2)}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha\cot^2\beta}.$$

Esta equação em y e x', mostra que:

1.° No caso de $a^2 < a^2\operatorname{tg}^2\alpha\cot^2\beta + b^2$, a curva é ellipse, ou hyperbole com o eixo x' real, conforme é $\alpha \left\{ \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \right\} \beta$. Quando $\beta = \alpha$, a equação em x e y mostra que a curva é parabola.

2.° No caso de $a^2 = a^2\operatorname{tg}^2\alpha\cot^2\beta + b^2$, a curva se reduz ao systema de duas rectas, que formam um angulo, e cuja equação é $y = \pm x'\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2\beta}{\operatorname{sen}^2\alpha} - 1}$. No caso de $\beta = \alpha$, se $b = 0$, a equação em x e y mostra que estas rectas se tornam parallelas.

3.° No caso de $a^2 > a^2\operatorname{tg}^2\alpha\cot^2\beta + b^2$, a curva é uma hyperbole com o eixo dos y real.

O que tudo é conforme com o que por outro modo acabamos de mostrar.

Quando o plano pqp' não corta o annel, temos $a < b$; e porque a primeira das tres condições fica neste caso satisfeita, o eixo gf é real. Mas tambem póde ser real, quando $a > b$.

Intersecções das superficies curvas entre si.

F. n.° 123. 77. *Intersecção de dous cylindros.* Para construir estas intersecções cortaremos as duas superficies por planos parallelos ás generatrizes d'ambas, e acharemos para cada um destes planos os pontos communs ás secções das duas superficies.

Para as reflexões, que vamos fazer, servirnos-hemos das figuras VII. 1 e VII. 2 da 3.ª parte da Geomet. descr. de Fourcy.

As indicações da figura mostram sufficientemente o modo de extremar os pontos visiveis dos invisiveis: porque a projecção de um ponto visivel deve ser a intersecção das projecções visiveis de duas arestas dos cylindros.

Se ha *compenetração* (fig. VII. 1), as partes exteriores *ts* e *bz* correspondem aos intervallos em que não ha curva: por onde se vê que a curva tem dous ramos separados por um intervallo, e que estes ramos são as curvas de *entrada* e *sahida*. Se ha *arrancamento* (fig. VII. 2), o intervallo de separação desapparece, por se tornar *bz* nullo; e as curvas de entrada e sahida formam uma só linha.

78. Por esta occasião demonstraremos um theorema notavel sobre as superficies de 2.ª ordem, que servirá para conhecer os casos em que a planificação de um dos cylindros dá o desenvolvimento de curvas planas; theorema apontado por M. Fourcy no n.° 151: *Se for plana uma das curvas de entrada, ou sahida, da intersecção de duas superficies da 2.ª ordem, igualmente o será a outra.*

Com effeito, tomando por plano (xy) o da curva plana, a equação deste plano será $z=0$; e como a curva tambem é a secção de qualquer das superficies pelo plano, segue-se que, fazendo $z=0$ nas equações d'ellas, os resultados devem ser identicos. Por onde se vê, que os coefficientes dos termos independentes de z nas duas equações, devem ou ser respectivamente iguaes, ou ter uma razão constante; e por conseguinte, se multiplicarmos uma das equações por esta razão constante para tornar iguaes os mesmos coefficientes em ambas, e as subtrahirmos depois uma da outra, os termos independentes de z desapparecerão, e ficará uma resultante da fórma:

$$Az^2 + Bxz + Cyz + Dz = 0 \,,$$

que sendo combinada com a equação d'uma das superficies dará a intersecção commum dellas. Ora esta equação decompõe-se nas duas

$$z = 0 \,,\ Az + Bx + Cy + D = 0 \,;$$

a primeira das quaes é a do plano que se tomou para (xy), e a segunda dá tambem uma intersecção plana: fica pois demonstrado o theorema proposto.

Se B, C e D, fossem nullos, as equações dos dous planos seriam identicas; as curvas planas de entrada e sahida se confundiriam; e as superficies se tocariam em todos os pontos dellas.

Se A, B, C, fossem nullos, sem que o fosse tambem D, a equação do segundo plano seria absurda, e a segunda curva não existiria. (Veja-se An. appl. de Leroy n.os 206, 207, 208).

79. Nos pontos correspondentes ao traço *ts*, tangente á base do segundo cylindro, as tangentes confundem-se com as generatrizes deste cylindro que passam por *t* e *s*.

Com effeito a tangente é a intersecção dos planos tangentes aos dous cylindros, que contéem as generatrizes; e como o plano tangente á segunda superficie é neste caso o plano auxiliar, vê-se que as generatrizes, que passam pelos pontos *t* e *s* da primeira superficie, existindo no plano tangente a ella e no plano auxiliar, são tangentes á curva. Assim as generatrizes que passam por *t*, *s*, *v*, *z*, na fig. VII. 1, ou por *t*, *s*, *v*, *u*, na fig. VII. 2, são tangentes á curva.

Nos quatro pontos das bases dos cylindros, pelos quaes passam as generatrizes cujas projecções horizontaes são tangentes a estas bases, os planos tangentes são perpendiculares ao plano horizontal; e as generatrizes, pelas quaes passam estes planos, no caso de conterem pontos da curva, teem a mesma projecção horizontal que as tangentes á curva que nelles existem. Ha por tanto mais quatro generatrizes, cujas projecções horizontaes são tangentes á projecção horizontal da curva, sem que a mesma propriedade tenha logar a respeito das suas projecções no plano vertical.

Do mesmo modo nos quatro pontos correspondentes ás generatrizes, que existem nos planos tangentes perpendiculares ao plano vertical, as projecções verticaes das generatrizes são tangentes á projecção vertical da curva, quando nellas existem pontos da mesma curva.

Por onde se vê que, tanto no plano horizontal como no vertical, póde haver oito projecções de generatrizes tangentes á projecção da curva; mas que só quatro dellas são projecções de generatrizes tangentes á curva no espaço: o que dá ao todo doze generatrizes que, ou no plano horizontal, ou no vertical, ou em ambos, se projectam tangencialmente ás projecções da curva.

80. O processo de achar a tangente por meio da intersecção dos traços dos planos tangentes, póde ser inapplicavel quando esta intersecção tem logar fóra do quadro onde se faz o desenho.

Neste caso podemos servir-nos de qualquer dos planos auxiliares parallelos ás generatrizes. Por que, devendo as intersecções deste plano com os dous tangentes, que contéem a tangente pedida, ser respectivamente parallelas ás generatrizes dos dous cylindros: se tirarmos parallellas ás projecções horizontaes destas generatrizes pelos pontos, onde os traços horizontaes dos planos tangentes encontram o do plano auxiliar, a intersecção destas parallelas, sendo commum aos tres planos, pertencerá á projecção horizontal da tangente. Depois, se projectarmos sobre a linha de terra os mesmos pontos de encontro dos traços horizontaes dos planos tangentes com o do auxiliar, e tirarmos por estas projecções parallelas ás projecções verticaes das generatrizes dos dous cylindros, a sua intersecção pertencerá á projecção vertical da tangente. E finalmente, se unirmos por linhas rectas as projecções do ponto de contacto com as que acabamos de achar, teremos as projecções da tangente. (Leroy. Geom. descr. n.° 293).

Se quizermos, por ex., a tangente no ponto (n, n'), tiraremos um plano qualquer auxiliar, como *bc*; pelos pontos *m* e *p* tiraremos as tangentes *mq* e *pq* ás bases; e pelos pontos, onde estas tangentes encontrarem *bc*, tiraremos parallelas a *mn* e *pn*: a intersecção destas parallelas será um ponto, que unido por uma recta com *n* dará a projecção horizontal da tangente. Depois pelos mesmos pontos de encontro de *bc* com *mq* e *pq* abaixaremos perpendiculares á linha de terra; dos pés destas perpendiculares tiraremos parallellas a $m'n'$ e $p'n'$; e uniremos por uma recta a intersecção destas parallelas com n': o que dá a projecção vertical da tangente.

81. *Intersecção de dous cones.* Para construir estas intersecções, cortaremos as duas superficies por planos auxiliares que passem pelos vertices d'ambas, e acharemos os pontos communs ás secções, para cada um destes planos. Sirvamo-nos das figuras VIII e IX de Fourcy. F.n^{os}. 124 e 125.

Quando a projecção horizontal *bm* de uma generatriz do cone B pertence á folha inferior delle, isto é, quando o ponto *m* se projecta verticalmente na linha de terra, o prolongamento de *bm* é a projecção horizontal do prolongamento da mesma generatriz pertencente á folha superior. Donde resulta, que a intersecção de uma generatriz de A com uma de B pertence á intersecção das folhas inferiores dos cones; a de uma generatriz de A ou B com o prolongamento de uma de B ou A pertence á intersecção da folha inferior de A ou B com a superior de B ou A; e finalmente a do prolongamento de uma generatriz de A com o de uma de B pertence á intersecção das folhas superiores.

82. As tangentes, tiradas ás bases dos cones pelo traço horizontal da recta que une os seus vertices, mostram, como nos cylindros, se ha penetração, se arrancamento; e se as curvas de entrada e de sahida, no caso de as haver, são ou não são separadas por algum intervallo.

Para separar a parte visivel da invisivel na projecção vertical, é necessario tirar os planos tangentes aos cones perpendiculares ao plano vertical; e ficarão designados como visiveis, ou como invisiveis, os mesmos pontos que como taes se marcam nas fig. VII e VIII. Em quanto á projecção horizontal, é toda visivel, por se considerarem sómente as curvas de intersecção pertencentes ás folhas superiores, ou as pertencentes ás folhas inferiores.

83. Como os planos tangentes ao cone A nos pontos (t, t') e (u, u') se confundem com os auxiliares; prova-se, do mesmo modo que a respeito dos cylindros (n.° 79), que as tangentes á curva nestes pontos são generatrizes do cone B: o que tambem facilmente se vê por meio da construcção das tangentes. Tambem se mostra, como nos cylindros, que nos dous pontos onde os planos tangentes a A são perpendiculares ao vertical, e no de B, pertencente a fg (fig. VIII) onde o plano tangente a A é perpendicular ao vertical, as projecções verticaes das generatrizes são tangentes á projecção vertical da curva.

84. Se, depois de trazer o cone A á posição em que a sua base é $\delta kl\epsilon$, os pontos de secção k e l desta base com a de C se confundem, isto é, se a base de A fica tocando a de B; estes cones teem um plano tangente commum ao longo da generatriz pertencente ao ponto de contacto; e quando A volta á posição primitiva, este plano tangente fica parallelo ao de B: logo as tangentes kp e mp são então parallelas, e as asymptotas não existem; mas a curva tem ainda o ramo infinito, por existirem as parallelas bk e am que se encontram no infinito.

85. *Intersecção de duas superficies de revolução, cujos eixos se encontram.* Fig. X. de Fourcy.

A intersecção destas superficies com esferas auxiliares descriptas do ponto d'encontro como centro daria os pontos communs ás mesmas superficies, e só elles. Mas segundo o processo adoptado usa-se das intersecções das superficies com os planos de dous parallelos, planos que se podem suppor produzidos indefinidamente. D'ahi vem que:

1.° Se a intersecção das cordas $c'c''$ e $d'd''$ cáe dentro d'ambas, esta intersecção é a projecção vertical de pontos communs ás duas superficies; e as projecções horizontaes existem na de qualquer dos dous parallelos, de que essas cordas são projecções verticaes.

2.° Se a intersecção das cordas cáe dentro d'uma dellas e no prolongamento da outra, o ponto correspondente pertence a uma das superficies, mas não pertence á outra, e por isso existe no prolongamento da curva d'intersecção sobre a superficie a que pertence.

3.°

3.° Se a intersecção das cordas cáe no prolongamento d'ambas, o ponto existe fóra das superficies, e não pertence á curva, nem ao seu prolongamento sobre nenhuma dellas.

Como o plano dos eixos é principal a respeito das superficies representadas na figura, a projecção vertical da ametade anterior da intersecção confunde-se com a da posterior, e por isso é $h'i'h'$.

86. Esta projecção vertical é uma secção conica no caso de serem as superficies do 2.° gráo. Com effeito, tomando por plano (xy) o plano principal que contém os eixos, as equações destas superficies referidas a elle não contém a 1.ª potencia de z; e por isso, se entre ellas se eliminar z, multiplicando a primeira pelo coefficiente de z^2 na segunda, e a segunda pelo coefficiente de z^2 na primeira, e subtrahindo, a resultante ainda será do 2.° gráo: ora esta resultante, sendo independente de z, é a projecção da intersecção sobre o (xy); logo aquella projecção é uma secção conica. Esta demonstração seria a mesma, ainda que as duas superficies do 2.° gráo não fossem de revolução, com tanto que tivessem um plano principal commum (Veja-se Anal. app. de Leroy n.° 209).

A propriedade, que acabamos de deduzir, pode accusar algum erro commettido na construcção, quando este erro der á projecção vertical uma fórma incompativel com a das secções conicas.

87. A projecção horizontal da tangente á curva, nos pontos onde ella encontra o equador da primeira superficie, confunde-se com a da tangente ao equador; porque ambas existem no plano tangente perpendicular ao horizontal: logo nos pontos o e o_1 deve a projecção da curva tocar a do equador; o que tambem mostra a figura.

A projecção vertical da tangente nos pontos h' e i', onde a curva encontra o meridiano parallelo ao plano vertical, sendo a da intersecção dos dous planos tangentes ás duas superficies em cada um destes pontos, planos que são perpendiculares ao vertical, reduz-se a um ponto; e por isso o processo empregado para achar a tangente pela intersecção dos planos tangentes não dá naquelles pontos a tangente á projecção vertical da curva. O das normaes tambem involveria uma difficuldade que é preciso resolver; por quanto sendo cada uma das normaes ás superficies, no ponto de que se tracta, perpendicular ao plano tangente respectivo, é parallela ao plano vertical, e o plano das duas normaes é parallelo ao mesmo vertical. Logo o traço do plano das normaes sobre o vertical não existe, e o seu traço sobre o plano dos eixos é indeterminado: com effeito, estando os pontos i' e h' no plano principal dos eixos, no mesmo plano devem estar as normaes ás duas superficies tiradas por aquelles pontos. No entretanto, como em qualquer posição do ponto de contacto, por mais visinho que seja de i' ou h', a tangente á projecção da curva é perpendicular á recta que une as intersecções das normaes com os eixos; e como esta recta vae mudando de posição segundo a lei de continuidade, á medida que varía o ponto de contacto segundo a mesma lei: segue-se que nos limites h' e i' ainda subsiste aquella perpendicularidade; de sorte que, tirando em i' e h' as normaes aos meridianos, unindo por linhas rectas os pontos onde ellas encontram os eixos, e abaixando de i' e h' perpendiculares sobre estas linhas; ficarão ainda construidas as tangentes nos mesmos pontos i' e h' á projecção vertical da curva. Deste modo é que se deve entender o que diz M. Fourcy no fim do n.º 126.

As tangentes á intersecção da curva com o equador dão os limites (o, o_1), que separam na projecção horizontal a parte visivel da invisivel: e as tangentes á intersecção da curva com o plano dos eixos dão os limites h' e i', que separam a parte visivel da invisivel na projecção vertical; mas aqui a projecção da parte visivel confunde-se com a da invisivel.

F. n.º 127. 88. *Intersecção de duas superficies de revolução, cujos eixos não estão no mesmo plano.* Fig. XI de Fourcy.

Para ter os pontos da intersecção existentes n'um parallelo P da primeira superficie, observaremos que o raio desse parallelo é o da sua projecção horizontal: e que a sua intersecção com a segunda superficie se póde achar cortando a mesma segunda superficie e P por parallelos della; do que resultará uma curva, cuja intersecção com a projecção de P dará os pontos pedidos. Assim se acham os pontos (m, m'), (m_1, m'_1) existentes no parallelo $d'd''$.

Para ter os pontos existentes em um parallelo P' da segunda superficie, observaremos que a intersecção d'este parallelo com ella é um