51M
MAR
CAVE

excluir
do
empréstimo
domiciliário

FRD

T

INSTITUIÇÕES MATHEMATICAS

SEGUNDA PARTE

ELEMENTOS DE GEOMETRIA

OBRA PÓSTHUMA

DO

SR. FRANCISCO SIMÕES MARGIOCHI

LISBOA
IMPRENSA NACIONAL
1869

ADVERTENCIA

A impressão das instituições mathematicas, ha muito começada, tem sido interrompida em diversos periodos por differentes causas, que me abstenho de expor.

He provavel que em uma obra de tão difficil composição typographica alguns erros tenham escapado, não obstante o muito cuidado com que as provas foram vistas por mim, e pelo meu antigo e illustrado amigo o sr. Daniel Augusto da Silva, e do grande trabalho a que se deu de verificar todos os calculos e demonstrações, effeituando n'um ou n'outro logar, varias modificações de importancia secundaria, que pareceram necessarias n'uma composição, a que seu auctor não fizera, em parte, a ultima revisão. Por aquelle grande trabalho devo dar aqui um publico testemunho da minha eterna gratidão ao sr. Daniel Augusto da Silva.

Julgou-se porém mais conveniente não fazer alteração alguma em varios logares d'esta obra, que já haviam sido publicados pelo auctor, na collecção das memorias da academia real das sciencias.

Entendi que não devia prevenir o juizo do publico a respeito do systema adoptado pelo auctor, nem emittir opinião em relação aos theoremas, proposições, ou demonstrações, que me pareceram novas em relação ao tempo em que foram escriptas por meu pae.

Para evitar alguns reparos dos criticos convem declarar, que os primeiros oito livros da segunda parte das instituições mathematicas, isto he dos elementos de geometria, foram escriptos pelo auctor durante as suas duas emigrações em Inglaterra e França desde 1823 até 1826, e de 1828 até á sua partida para a cidade do Porto, então sitiada; e que um anno antes do seu fallecimento, que teve logar em 6 de junho de 1838, se deu ao improbo trabalho de escrever não só a arithmetica universal, em que foram encorporadas algumas doutrinas já insertas nas obras publicadas pelo auctor na alludida collecção de memorias; mas tambem os dois ultimos livros dos elementos de geometria, vindo a morte obstar ao maior desenvolvimento dos assumptos ahi expostos e, especialmente, aos que são tratados no livro X, que deve ser considerado apenas como um rapido esboço de algumas doutrinas, e que a já muito adiantada enfermidade de meu pae não permittiu ampliar tanto quanto desejava.

Lisboa, 30 de Novembro de 1868.

FRANCISCO SIMÕES MARGIOCHI.

INDICE.

ELEMENTOS DE GEOMETRIA.

PRELIMINARES.

1. A EXTENSÃO considerada independentemente dos corpos que podem occupa-la, denomina-se *espaço* ou *vacuo*.

2. O espaço ou vacuo he portanto penetravel, homogeneo, contínuo e infinito.

He homogeneo porque, fazendo abstracção dos corpos, a heterogeneidade desapparece, visto que ella provém da diversa constituição dos corpos.

He contínuo e infinito, porque qualquer interrupção, que se lhe queira suppor, não póde ser senão vacuo ou espaço.

3. Assim, qualquer extensão tomada no espaço póde ser sobreposta a outra, porque são ambas penetraveis; e se além disto coincidem são identicas, porque são homogeneas.

4. Assim, ha no espaço modificações da extensão infinitas em numero e em grandeza.

5. *Volume* ou *solido* he huma parte do espaço com extensão em todos os sentidos.

6. *Superficie* he a extensão que divide o espaço em duas partes.

7. A superficie he pois commum ás duas partes do espaço. Logo a superficie não tem espessura, isto he, extensão no sentido de alguma destas partes.

8. *Linha* he a extensão que separa huma parte da superficie do resto della.

9. A linha he pois commum ás duas partes da superficie. Logo a linha não tem largura, isto he, extensão no sentido de alguma destas partes: e tambem não tem espessura como a superficie em que existe.

10. *Ponto* he o limite que separa huma parte da linha do resto della.

11. O ponto he pois commum ás duas partes da linha. Logo o ponto não tem comprimento, isto he, extensão no sentido de alguma destas partes: demais não tem largura, nem espessura como a linha em que existe.

12. *Linha recta* he a linha que, tendo dois pontos fixos no espaço, não póde mudar de posição, nem entre esses pontos, nem fóra delles.

13. Logo a linha recta he infinita.

14. *Plano* he huma superficie na qual, tomando dois pontos quaesquer, e fazendo passar por elles huma linha recta, esta achar-se-ha toda na superficie.

15. Logo o plano he infinito.

16. Muitas vezes chama-se superficie a huma parte della, e linha tambem a huma parte della; e, nestes casos, produzir huma superficie plana he augmenta-la com parte do seu plano infinito; e produzir huma recta he augmenta-la com parte da sua recta infinita.

17. O ponto he designado por huma letra escripta junto delle: a linha, ordinariamente, por duas letras escriptas junto de dois de seus pontos: a superficie, ordinariamente, por tres letras escriptas junto de tres de seus pontos, que não estejão em linha recta para evitar a confusão com esta: e o volume, ordinariamente, por quatro letras escriptas junto de quatro de seus pontos, que não estejão no mesmo plano para evitar a confusão com este.

GEOMETRIA RECTILINEA PLANA.

LIVRO 1.º

Dos Rectilineos que não circumscrevem plano.

18. RECTILINIO he o systema de linhas rectas e de pontos collocados no mesmo plano. *Lados do rectilineo* são as rectas que determinão a porção do plano tomado em consideração. *Vertices* são os pontos de concurso dos lados. *Diagonal* he a recta tirada de hum vertice a outro, sem ser lado. *Perimetro* he a linha composta de todos os lados. *Secante* he toda a recta que divide o rectilineo ou o seu perimetro em duas partes, que se chamão *segmentos*.

19. Dois rectilineos que têem tres pontos communs, mas não em linha recta, são partes de hum mesmo plano.

Sejão A, B, C os tres pontos communs aos dois rectilineos. Tirem-se as rectas AB, AC, BC, as quaes estarão em ambos os rectilineos (§ 18). Tome-se hum ponto qualquer F em hum dos rectilineos. Porque F não está em linha recta com os tres pontos A, B, C, visto que estes, por hypothese, o não estão, segue-se que se podem conduzir, pelo menos, duas rectas de F a dois destes pontos, entre as quaes e por F, e no mesmo plano de hum dos rectilineos, conduzindo huma recta, esta encontrará duas das tres primeiras em dois pontos G, H. Fig. 1.

Estes dois pontos estão nos dois rectilineos com as rectas AC, BC. Por consequencia GH e o ponto F desta recta estão nos dois rectilineos tambem.

Isto quer dizer que cada ponto de hum dos rectilineos he commum ao outro, ou que cada rectilineo he parte do mesmo plano infinito do outro.

20. O concurso ou a intersecção de varias rectas he hum ponto.

*

Porque se neste concurso existissem dois pontos, as rectas se confundirião na recta infinita que passa por elles; o que he contra a hypothese.

21. *Bilatero* he cada huma das duas porções do plano dividido por duas rectas, cada huma das quaes tem hum só limite, sendo este hum ponto commum a ambas as rectas.

22. *Angulo* he a figura do bilatero ao sahir do vertice.

23. O angulo e o bilatero, em que está a recta tirada entre dois pontos dos lados, designa-se por tres letras, huma das quaes se escreve junto do vertice, e as outras duas dos lados. Quando se junta huma quarta letra he para designar o bilatero, em que ella está escripta, ou o seu angulo. Quando o angulo he designado por huma só letra, entende-se o angulo do bilatero menor, ou o angulo do bilatero em que ella está escripta, se ha outros angulos com o mesmo vertice.

24. Hum bilatero he igual, maior, ou menor que outro, se o angulo do primeiro he respectivamente igual, maior, ou menor que o do segundo; e reciprocamente.

Fig. 2. Nos bilateros BAC, EDF sejão iguaes os angulos BAC, EDF. Colloque-se, sem alterar o angulo, o vertice D sobre o vertice A, e algum outro ponto E de DE sobre AB. Os dois lados DE, AB se confundirão. Colloque-se tambem o ponto F no plano BAC do primeiro bilatero, mas para a parte de AC, e ficarão confundidos os planos dos bilateros (§ 19).

Porque o ponto D está em A, o lado DE em AB, o plano do bilatero EDF no plano do bilatero BAC, o lado DF da mesma parte que AC, e os angulos EDF, BAC são iguaes, fica evidente que DF coincide com AC. Logo os dois bilateros são iguaes.

Nos dois bilateros BAG, EDF seja o angulo BAG maior do que o angulo EDF. Então a mesma sobreposição mostra que DF ficará em algum logar AC entre AB e AG. Mas he o bilatero $BAG > BAC$; logo o bilatero BAG será maior do que o bilatero EDF.

Reciprocamente, se o bilatero BAC fôr igual ao bilatero EDF, será ang. $BAC =$ ang. EDF. Porque se estes dois angulos fossem desiguaes, desiguaes serião tambem os dois bilateros, como se acaba de demonstrar; o que seria contra a hypothese actual.

Se o bilatero BAG fôr maior que o bilatero EDF, será tambem ang. $BAG > EDF$. Porque se fosse ang. $BAG \leqq EDF$, seria pela proposição directa o bilatero $BAG \leqq$ bilatero EDF contra a presente supposição.

25. Angulos dos quaes cada hum tem os lados em linha recta são iguaes.

Sejão os dois angulos $ABCD$, $EFGH$, tendo o primeiro os lados na recta AC, e o outro na recta EG. Fig. 3.
Digo que estes angulos são iguaes.

Porque pondo o vertice B sobre F, e algum ponto de AB sobre EF, e o ponto D do plano ACD sobre algum ponto H do plano EGH; BA se confundirá com FE, BC com FG, e os dois bilateros e seus angulos se ajustarão perfeitamente, o que prova que já erão identicos antes da sobreposição.

26. *Perpendicular* a huma recta he outra recta que a encontra, fazendo com ella dois angulos iguaes. Cada hum destes angulos chama-se *recto*.

27. Todos os angulos rectos são iguaes.

Porque se fôr $DBA = DBC$, DB será perpendicular sobre AC, e DBA, DBC serão angulos rectos; da mesma fórma se $HFE = HFG$, estes dois angulos serão tambem rectos e iguaes aos primeiros, porque cada hum dos segundos he metade de hum angulo que tem os lados em linha recta, assim como os primeiros o são de hum outro igual angulo.

28. *Angulo agudo* chama-se aquelle que é menor do que o recto, e *obtuso* o que he maior.

29. *Angulos adjacentes* são aquelles que teem o vertice e hum lado communs, e os outros dois lados para partes oppostas a respeito do lado commum.

30. *Supplemento de hum angulo* he hum outro angulo que faz com o primeiro huma somma igual a dois angulos rectos $= 2r$.

31. Se em huma serie de angulos adjacentes successivos os lados não communs estiverem em linha recta, a reunião de todos esses angulos equivale a dois rectos, e reciprocamente.

Fig. 4. Porque os angulos a, b, c, d fórmão o angulo $ABCD$, que tem os lados AB, BC sobre a recta AC, e por consequencia he igual a dois rectos.

Reciprocamente, se os angulos adjacentes, tomados juntamente, fazem dois rectos, os lados não communs estarão em linha recta. Porque se fôr $a+b+c+d = 2$ rectos, será o ang. $ABCD = 2r$, isto he, os lados AB, BC estarão em linha recta.

32. Os angulos adjacentes successivos, nos quaes todos os lados são communs a dois angulos, tomados juntos são iguaes a quatro angulos rectos, e reciprocamente.

Fig. 5. Sejão a, b, $EBDA$, c angulos, nos quaes todos os lados são communs a dois destes angulos. Produzindo CB de B para A, teremos

$$a+b+EBDA+c = (a+b+EBA)+(ABD+c)$$

$$= CBAE + CBAD = 4r.$$

Reciprocamente, se fôr

$$a+b+EBDA = 4r,$$

como tambem $a+b+EBDA+c = 4r$, será $c = 0$, isto he, BD cahirá sobre BC, e por consequencia cada hum dos lados será commum a dois dos angulos, que se considerão.

33. Duas rectas que teem hum ponto commum cortão-se sendo produzidas, se fôr necessario.

Fig. 6. Supponhamos que as rectas BA, AC tenhão o ponto A commum. Prolongue-se BA de A para D, será $BAC < 2r$, e tambem $DAC < 2r$.

Mas o prolongamento AE de CA faz com CA hum angulo $=2r$. Logo AE não póde cahir em nenhum dos dois angulos BAC, DAC; por consequencia estará na outra parte do plano a respeito de BD. Da mesma maneira se prova que AD está separada de AB por CE, ou que as duas rectas se cortão mutuamente.

34. *Angulos verticalmente oppostos* são aquelles, em que os lados de hum são prolongamentos dos lados do outro.

35. Os angulos verticalmente oppostos são iguaes; e, reciprocamente, se duas rectas vindo de partes oppostas encontrão huma terceira em hum ponto, fazendo com ella iguaes os angulos não adjacentes, estes angulos serão verticalmente oppostos.

Sejão ainda AD o prolongamento de AB, e AE de AC. Serão BAC, DAE verticalmente oppostos, e

$$BAC+CAD=2r=CAD+DAE;$$

logo

$$BAC=DAE.$$

Reciprocamente, se CA, EA encontrão a recta BD no ponto A, fazendo $CAB=EAD$, ou $CAD=EAB$, será

$$BAC+CAD=2r=EAD+CAD;$$

logo EA he o prolongamento de CA.

36. Chamão-se *parallelas* duas rectas situadas no mesmo plano, que não se encontrão para parte alguma por mais que sejão produzidas.

37. Duas rectas são parallelas, quando formão com huma terceira, tirada de huma á outra, dois rectilineos trilateros, que admittem sobreposição.

A secante EF corte AB, CD nos pontos G, H. Os trilateros $AGHC$, $BGHD$ admittem sobreposição, em primeiro logar, quando os angulos em G, H são rectos. Fig. 7.

Dobrando pois a figura por GH, cahirá GA sobre GB, e HC sobre HD, porque os angulos HGA, HGB

são iguaes, visto serem rectos por hypothese, bem como os angulos GHC, GHD. D'onde se segue que se as rectas AB, CD concorrem da parte de A, C, as mesmas rectas concorrem tambem da parte de B, D; mas isto he impossivel, logo AB, CD são parallelas.

Mais geralmente, os trilateros admittem sobreposição quando o ang. $AGH =$ ang. GHD. Porque neste caso os angulos BGH, CHG são tambem iguaes, por serem supplementos dos primeiros. Então a sobreposição dos trilateros póde effectuar-se, collocando o ponto G do trilatero $AGHC$ sobre o ponto H do trilatero $BGHD$, e o ponto H do primeiro sobre o ponto G do segundo; e applicando assim os dois trilateros, hum sobre o outro, elles se ajustarão; do que póde concluir-se que as rectas AB, CD são parallelas.

38. Os angulos AGH, GHD, chamão-se *alternos internos*. Logo duas rectas são parallelas, quando fórmão com huma secante angulos alternos internos iguaes.

39. Os angulos EGB, FHC chamão-se *alternos externos*; mas elles são iguaes aos alternos internos, por serem verticalmente oppostos: logo duas rectas são parallelas quando fórmão com huma secante angulos alternos externos iguaes.

40. Os angulos AGH, GHC chamão-se *internos da mesma parte*. Logo se estes dois angulos tomados juntos fizerem dois rectos, AB, CD serão parallelas; porque os alternos AGH, GHD serão iguaes, visto que hum e outro serão supplementos de GHC.

41. Os angulos AGE, CHF chamão-se *externos da mesma parte*; e se a sua somma fôr $= 2r$, sel-o-ha tambem $(AGH + GHC)$. Logo AB e CD serão parallelas.

42. Os angulos EGB, EHD chamão-se *externo e interno da mesma parte*. Logo se elles forem iguaes, será $AGH = GHD$, e as rectas AB, CD parallelas.

43. Duas rectas perpendiculares a huma terceira são parallelas.

44. Duas rectas que fórmão com a secante o angulo externo maior que o angulo interno e opposto da mesma parte, concorrem sendo produzidas.

Seja $ECD > EAB$. Será o bilatero ECD maior que o bilatero EAB. Logo o lado CD do primeiro deve sahir fóra do bilatero EAB cortando AB. Fig. 8.

45. Quando duas rectas são parallelas, o angulo externo feito com a secante he igual ao angulo interno opposto. Porque se fôr maior as rectas concorrem, contra a supposição; e se menor, o angulo externo seu adjacente será maior que o interno seu opposto, o que tambem não he possivel.

Segue-se mais, que os angulos alternos internos são iguaes. Os angulos alternos externos são tambem iguaes. Os angulos internos da mesma parte, tomados juntos, são iguaes a dois rectos. E os angulos externos da mesma parte, tambem tomados juntos, valem dois rectos.

46. Por hum ponto não se póde tirar mais que huma parallela a huma recta, cuja posição he dada.

47. Dois bilateros são iguaes, quando teem os lados parallelos, ou hum commum e os outros dois parallelos, não obstante ser hum dos bilateros comprehendido pelo outro.

Os bilateros DEF, DGC são iguaes, se EF he parallela a GC. Porque tomando sobre GD as partes EH, HI, etc. ao infinito, todas iguaes a EG, e suppondo HL, IM, etc. parallelas a GC, prova-se pela sobreposição que todos os trilateros $CGEF$, $FEHL$, $LHIM$, etc. são iguaes. He pois o bilatero DEF composto de hum numero infinito destes trilateros, e por consequencia não póde ser augmentado por hum $CGEF$ igual a qualquer delles. Do que se segue que o bilatero CGD não differe de FED, ou que he o mesmo bilatero conduzido á posição CGE. Fig. 9.

Da mesma maneira se prova que he o bilatero CBA $=$ bilatero CGD, sendo AB parallela a DG: logo bilatero $CBA =$ bilatero FED.

48. Rectas parallelas a outra são parallelas entre si.

Fig. 10 Sejão as rectas AB, CD parallelas a EF. Digo que AB, CD são parallelas entre si. Por dois pontos G e L das primeiras tire-se a recta IK. Esta linha encontrará EF em algum ponto H, aliàs ser-lhe-hia parallela, e passarião pelo mesmo ponto G duas parallelas a EF, o que he impossivel. Será

$$IGB = IHF, \text{ e } ILD = IHF:$$

logo

$$IGB = ILD;$$

e por consequencia AB e CD são parallelas.

Se além disto houver huma terceira recta parallela a EF, ella será parallela a CD, como se acaba de demonstrar, e tambem a AB, e assim seguidamente, qualquer que fôr o numero dessas parallelas.

49. Em dois systemas de duas rectas correspondentemente parallelas, ou em direitura, dois angulos quaesquer ou são iguaes, ou supplemento hum do outro.

Fig. 11. Sejão AB, CD parallelas entre si, e EF, GH tambem parallelas entre si; serão

$$AIE = AKG = CMG = CLE = FLD = HMD$$

$$= HKB = FIB,$$

e os outros oito angulos tambem serão iguaes entre si, porque cada hum junto com hum destes he igual a dois rectos.

50. Dois angulos que têem dois lados parallelos, e os outros dois ou parallelos ou em direitura, são iguaes ou supplementos, porque fórmão os systemas precedentes: sómente serão o supplemento hum do outro, quando os lados que pertencem a hum dos systemas são infinitos para a mesma parte a respeito do outro systema, e os lados deste para partes oppostas relativamente ao primeiro.

Assim he $AIE = CMG$, porque os lados parallelos AI, CM são infinitos no sentido de A, C, pontos que estão da mesma parte relativamente ao systema de EI, MG, e estes ultimos são infinitos no sentido de E, G, que estão tambem da mesma parte a respeito de AI, CM.

He $FIB = CMG$, porque os lados parallelos IF, MG são infinitos em sentido contrario a respeito do systema IB, CM; e estes são tambem infinitos em sentido opposto a respeito do systema IF, MG.

Porém $AIE + GKB = 2r$, porque os lados parallelos IE, KG são infinitos no mesmo sentido a respeito do systema IA, KB, e estes, que estão em direitura, são infinitos em sentido opposto a respeito do systema IE, KG.

51. Dois angulos serão iguaes, ou supplementos, se os lados de hum delles forem respectivamente perpendiculares aos do outro.

Seja BAC hum angulo qualquer, e EFG outro angulo Fig. 12.
não representado na figura, e no qual o lado FE seja perpendicular a AB, e FG perpendicular a AC; será $BAC = EFG$, ou $BAC + EFG = 2r$. No ponto A imagine-se AE' parallela a FE, e infinitas ambas para o mesmo lado; AG' parallela a FG e ambas tambem infinitas para o mesmo lado; será $E'AG' = EFG$ (§ 50): e tendo AE' e AG' as posições que a figura representa, como he $E'AB = G'AC$, tirando destes angulos o angulo commum $G'AB$, teremos $E'AG' = BAC$, logo $EFG = BAC$.

Se AE' tomasse a direcção opposta AE'', como $E'AG' + G'AE'' = 2r$, e $G'AE'' = EFG$, teriamos $EFG + BAC = 2r$.

Se AE' e AG' tomassem ambas as direcções oppostas AE' e AG'', teriamos $G''AE'' = EFG = E'AG' = BAC$.

E se unicamente AG' tomasse a direcção opposta AG'', teriamos $E'AG'' + E'AG' = 2r = EFG + BAC$.

Vê-se pois que BAC e EFG são iguaes quando as perpendiculares no ponto A aos lados BA e CA fórmão com estas angulos rectos contados no mesmo sentido, e que BAC e EFG são supplementos quando aquelles angulos rectos são contados em sentido differente. Do mesmo modo procederiamos se o angulo BAC fosse obtuso.

52. Dois angulos rectos, que teem dois de seus lados ou parallelos, ou em direitura, teem tambem os outros dois ou parallelos ou em direitura.

Sejão *a*, *b* os lados de hum dos angulos rectos, e *c*, *d* os lados do outro; e sejão *a*, *c* parallelos, ou estejão na mesma recta. Digo que *b*, *d* são tambem parallelos, ou estão na mesma recta.

Porque suppondo a recta *f*, tirada pelo vertice do segundo angulo, parallela a *b*, ou em direitura com elle, será recto o angulo compreendido entre *f*, *c*, por ser igual ao angulo formado por *a*, *b*, ou ser seu supplemento; logo elle he igual ao angulo de *c*, *d*; por consequencia *f* está na mesma recta com *d*, e logo o lado *d* ou he parallelo a *b*, ou está na mesma recta.

LIVRO 2.º

Dos Rectilinios que circumscrevem plano.

53. Os angulos internos do rectilineo fechado são tantos quantos os vertices, e estes tantos quantos os lados. Hum similhante rectilineo póde ser chamado *polygono*, e designado ou pelo numero dos seus lados, ou pelo dos seus angulos. Chama-se *triangulo* o polygono de tres lados, *quadrilatero* o de quatro, e tem respectivamente os nomes de *pentagono*, *hexagono*, *heptagono*, *octogono*, *enneagono*, *decagono*, etc. os polygonos de cinco lados, seis, sete, oito, nove, dez, etc.

Os vertices determinão os polygonos.

54. *Partes de hum polygono* são os seus lados, e os angulos internos.

55. *Poligono convexo* he aquelle, cujo perimetro não póde ser cortado por huma recta em mais de dois pontos. O polygono póde ter dois perimetros, ou ser a differença de dois polygonos convexos, hum exterior e outro interior. Sempre que não se declare o contrario, considerão-se os polygonos convexos e de hum só perimetro.

56. Dois lados com o angulo que elles formão, menor que dois rectos, determinão o triangulo.

Os triangulos ABC, DEF serão identicos, se forem Fig. 13.
$AB=DE$, $AC=DF$, $BAC=EDF$.

Os vertices A, C podem ser postos em D, F, porque $AC=DF$; podem tambem fazer-se coincidir os angulos BAC, EDF por serem iguaes. O ponto B cahirá sobre E, porque $AB=DE$. E pois que os vertices coincidem, tambem coincidirão os lados e os angulos, e os triangulos se ajustarão perfeitamente. Logo antes da sobreposição erão iguaes, cada huma a cada huma, as partes dos triangulos oppostas ou adjacentes a partes iguaes.

57. Se, além das supposições antecedentes, fôr tambem $AB=AC$, então póde fazer-se outra sobreposição, ajustando AB com DF, e AC com DE, e ter-se-ha o angulo $ABC=DFE$; mas pelo paragrapho precedente $ACB=DFE$, logo será $ABC=ACB$, isto he,

O triangulo que tem dois lados iguaes, tem tambem iguaes os angulos oppostos a esses lados.

58. O polygono que tem todos os lados iguaes, chama-se *equilatero;* e o que tem iguaes todos os angulos, *equiangulo.* O triangulo que tem dois lados iguaes, chama-se *isosceles*, e o que os tem todos desiguaes *scaleno.*

59. Dois angulos, cuja somma he menor que dois rectos, e o lado adjacente a ambos determinão o triangulo.

Sejão $BAC=EDF$, $BCA=DFE$, $AC=DF$, e $BAC+BCA<2r$, porque assim he preciso para que os lados AB, CB se encontrem, e possa existir triangulo.

Podem pôr-se os vertices A, C sobre os vertices D, F, o angulo BAC sobre o angulo EDF; cahirá AB sobre DE. Porque os angulos estão confundidos, tambem o estarão os seus planos, e ficará ACB da parte de DFE; e porque estes ultimos angulos são iguaes, pela hypothese do theorema, cahirá CB sobre FE. Por consequencia o ponto B, que era commum ás duas rectas AB, CB, he agora tambem commum ás duas DE, EF. Logo B fica collocado em E, e porque os tres vertices do primeiro triangulo coincidem assim com os vertices do segundo, a conclusão he que estes triangulos são identicos.

60. Demais se se supposer $BAC=ACB$, então por outra sobreposição de C, A respectivamente sobre D, F, se mostra que $BC=DE$; mas pela primeira era $AB=DE$, logo será $BC=AB$, isto he,

O triangulo que tem dois angulos iguaes, tem tambem iguaes os lados oppostos, isto he, ou he isosceles ou equilatero.

61. O angulo externo de hum triangulo, ou o que he formado pelo prolongamento de hum lado e pelo lado conti-

guo, he maior que cada hum dos angulos internos oppostos ou separados.

Produzão-se para D, E os lados BA, CA do triangulo ABC. Supponha-se F o meio de AB. Conduza-se CF produzida até ser $FG = CF$, e tire-se AG. Fig. 14.

Porque $AF = BF$ por supposição, $FG = FC$ por construcção, e (§ 35) $AFG = CFB$, será (§ 56) $CBF = FAG < BAE$. Mas $BAE = CAD$, logo cada hum dos angulos externos, contiguos ao angulo BAC, he maior que cada hum dos outros dois angulos do triangulo.

62. Os tres angulos do triangulo tomados juntos valem dois angulos rectos.

Sendo o angulo externo BAF maior que ABC, huma parte delle $BAD = ABC$, e então será DA parallela a BC. Produza-se DA para E; por ser AE parallela a BC, será $EAC = ACB$: mas $BAD + BAC + CAE = 2r$; logo tambem $ABC + BAC + ACB = 2r$. Fig. 15.

63. O angulo externo do triangulo he igual á somma dos dois angulos internos oppostos.

64. O triangulo não póde ter dois angulos rectos ou obtusos, ou hum recto e outro obtuso.

65. Os angulos iguaes de hum triangulo são agudos.

66. O triangulo chama-se *obtusangulo* quando tem hum angulo obtuso; *acutangulo* quando tem todos agudos; e *rectangulo* quando tem hum angulo recto. *Hypothenusa* he, no triangulo rectangulo, o lado opposto ao angulo recto.

67. De dois angulos do triangulo, o maior he aquelle que fôr opposto ao maior lado, e reciprocamente.

No triangulo ABC seja $AB > BC$. Fig. 16.

Corte-se $BD = BC$, e tire-se CD, será (§ 57)

$BDC = BCD$, logo $BAC < BDC$ (§ 61) é tambem $< BCD < ACB$. Isto quer dizer que o angulo ACB, opposto ao lado maior AB, he tambem maior que o angulo CAB opposto ao lado menor CB.

Reciprocamente, se fôr $BCA > BAC$, não poderá ser $BA < BC$, porque então BCA sería menor que BAC, como se acaba de demonstrar, e cahir-se-hia em contradicção com a hypothese actual. Tambem não póde ser $BA=BC$, porque nesse caso sería $BCA=BAC$, ainda contra a hypothese; logó he $BA>BC$.

68. A somma de dois lados quaesquer do triangulo he maior que o terceiro.

No lado AB, não menor que cada um dos outros, tome-se $BD=BC$, e tire-se CD. Será BDC agudo (§ 65), logo CDA obtuso, e logo DCA agudo, e por conseguinte $CA>DA$: em conclusão será $BC+CA>BD+DA$, ou $BC+CA>BA$. Porque os dois lados não maiores que o terceiro são juntos maiores do que elle, serão tambem cada hum dos dois, mais o terceiro, maiores do que o outro.

69. As tres condições do paragrapho precedente reduzem-se a huma só, isto he, se chamarmos a, b, c os tres lados de hum triangulo, deve ser

$$a+b>c;\ a+c>b;\ b+c>a;$$

e se fôr c o maior lado, as outras duas condições verificam-se evidentemente. Se houver dois lados iguaes, e esses forem os maiores dos tres, he claro que terão logar forçosamente as tres condições precedentes.

70. Os tres lados com as condições precedentes determinão o triangulo.

Fig. 17. Sejão $AB=BD$, $AC=DC$, e BC commum aos dois triangulos ABC, BDC, unidos pelos lados iguaes. Tire-se AD.

No triangulo isosceles ABD he $BAD=BDA$, e no triangulo isosceles ACD he $CAD=CDA$: logo $BAC=BDC$, porque estes dois angulos são a somma ou a differença de angulos iguaes, ou são os mesmos angulos iguaes. Por consequencia (§ 56) os triangulos ABC, BDC são identicos.

71. Fazer hum angulo igual a outro dado com hum lado e vertice tambem dados.

Sejão CAB, DE, D o angulo, o lado, e o vertice dados. Fig. 13.
De hum ponto qualquer do lado AC a outro ponto do lado AB do angulo dado, tire-se CB. Tome-se $DE = AB$. As rectas ou distancias DF, EF iguaes respectivamente a AC, BC sendo tomadas, para maior facilidade, nas aberturas de dois compassos, fixe-se huma extremidade do primeiro em D, e huma do segundo em E, e fação-se encontrar as outras extremidades em F. Desta maneira teremos dois triangulos identicos (§ 70), e será $EDF = BAC$.

72. Por hum ponto dado fóra de huma recta tirar huma parallela a essa recta.

Do ponto dado G a hum ponto qualquer H da recta Fig. 7.
dada CD tire-se GH; faça-se o angulo AGH igual ao angulo GHD; será (§ 38) AG a parallela pedida.

73. Dividir huma recta dada em duas partes iguaes.

Seja AB a recta dada. Tire-se AC de grandeza arbi- Fig. 18.
traria, fazendo com AB hum angulo qualquer $< 2r$. Faça-se para a parte opposta o triangulo ABD identico ao triangulo ABC, mas em posição inversa, isto he, tendo o lado $AD = BC$, e $BD = AC$. Tire-se CD, que dividirá AB em duas partes iguaes no ponto E.

Porque os triangulos ACD, CBD teem CD commum, $AD = CB$, e $AC = BD$, será $ADC = BCD$. Nos triangulos ADE, BCE he $EAD = EBC$ por construcção, $EDA = ECB$ pela demonstração, $AD = CB$ por construcção; logo $AE = EB$.

74. Dividir hum angulo em duas partes iguaes.

Seja BAC o angulo dado. Tome-se $AC = AB$; tire-se Fig. 19.
BC; faça-se o triangulo BDC igual ao triangulo ABC. Tire-se AD, que dividirá ao meio o angulo proposto.

Porque os dois triangulos ABD, ACD teem todos os lados iguaes entre si, será (§ 70) $BAD = CAD$, isto he, serão iguaes as duas partes em que o angulo está dividido.

75. Pelo ponto A fóra de huma recta infinita tirar a perpendicular a esta recta, e, mais geralmente, huma recta que faça com a proposta hum angulo dado.

Do ponto dado não se póde abaixar sobre a recta mais do que huma perpendicular, porque duas farião com ella hum triangulo com dois angulos rectos, o que he impossivel.

Fig. 17. Tirem-se duas rectas quaesquer do ponto A a BC, e sejão AB, AC. Faça-se o triangulo BDC igual ao triangulo BAC, mas opposto e com o lado $BD = BA$. Tire-se AD, que será a perpendicular pedida.

Porque seja E o ponto de encontro de AD com BC. Nos triangulos ABE, DBE ter-se-ha BE commum, $AB = BD$, $ABE = DBE$; logo elles são identicos, e por consequencia BE, AD são perpendiculares entre si.

Se o ponto C fôr o mesmo ponto E, a demonstração fica a mesma, mudando sómente E em C.

Quanto á segunda parte do problema, depois de se haver abaixado a perpendicular AE sobre a recta proposta, faça-se, do lado que se quizer, o angulo BAE, que seja o complemento para hum recto do angulo que AB deve fazer com BC, se este angulo fôr agudo, ou o complemento do seu supplemento, se elle fôr obtuso.

Fig. 20. 76. Para tirar por hum ponto dado E huma recta que faça dois angulos iguaes com duas rectas DC, DB tambem dadas; se as duas rectas formarem angulo, divida-se este ao meio por DA, e depois abaixe-se EA perpendicular sobre DA, e produza-se para C e B: os angulos DCB, DBC serão iguaes, porque os triangulos DAC, DAB o são.

Se as rectas dadas forem parallelas, qualquer recta que se tire pelo ponto E dá huma solução do problema.

77. Pelo ponto A da recta AB levantar a perpendicular a esta recta.

Sobre BA, prolongada se fôr preciso, faça-se $AC = AB$. Com duas rectas de grandeza arbitraria, mas iguaes entre si, e maiores cada huma que AB, tomadas nas aberturas de dois compassos, fixe-se huma ponta de cada hum em hum dos pontos B, C, busque-se o ponto D commum ás outras duas pontas, e ter-se-hão os tres vertices do triangulo BDC, porque o ponto D não póde estar nem entre B, C na recta BC, nem fóra destes pontos na mesma recta, pois contra o primeiro caso he $BD+DC>BC$, e contra o segundo $BD=DC$ pelas hypotheses.

Tire-se AD que será a perpendicular pedida. Porque os triangulos BAD, CAD, teem os lados iguaes, serão identicos; e por consequencia $BAD=CAD$, ou DA perpendicular sobre BC.

78. Todos os lados de hum polygono, excepto hum, tomados juntos são maiores do que este.

Sejão n o numero dos lados do polygono, $l_1, l_2, l_3, \ldots l_n$ seus lados, e $d_1, d_2, d_3, \ldots d_{n-3}$ as diagonaes tiradas da origem de l_1 para as origens de $l_3, l_4, \ldots l_{n-1}$.

Teremos

$$l_1 + l_2 > d_1,$$

$$d_1 + l_3 > d_2,$$

$$d_2 + l_4 > d_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d_{n-3} + l_{n-1} > l_n.$$

Mas a somma dos primeiros membros destas desigualdades he maior que a somma dos segundos, logo, tirando de huma e de outra parte os termos communs, teremos

$$l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_{n-1} > l_n.$$

No polygono $ABCDE$ tirem-se as diagonaes AC, AD. Fig. 21.
Será

$$AB+BC>AC,$$

$$AC+CD>AD,$$

$$DA+DE>AE;$$

das quaes se deduz

$$AB+BC+CD+DE>AE.$$

79. O perimetro de hum polygono exterior he maior que o do interior, se este ultimo fôr convexo; ou antes, no polygono de dois perimetros o exterior he maior, se o interior fôr convexo.

Produzão-se, no mesmo sentido, todos os lados do perimetro interior até encontrarem o perimetro exterior. Desta maneira formar-se-hão novos polygonos compostos: 1.° de hum lado, que he o prolongamento do lado do perimetro interior; 2.° de hum outro lado, que he o lado do perimetro interior immediato ao ultimo mencionado, com o seu prolongamento; 3.° de huma parte do perimetro exterior cortada por estes. Assim sendo l_1, l_2, l_3, etc. os lados do polygono interior, n seu numero, c_1, c_2, c_3, etc. seus respectivos prolongamentos, p_1, p_2, p_3, etc. as partes interceptadas no perimetro exterior, teremos

$$c_1+p_1>l_2+c_2,$$

$$c_2+p_2>l_3+c_3,$$

$$c_3+p_3>l_4+c_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n+p_n>l_1+c_1;$$

logo

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n>l_1+l_2+l_3+\ldots+l_n,$$

isto he, o perimetro de hum polygono exterior he maior que o do interior.

Fig. 22. Sejão $ABCDE$, $FGHIKL$ os dois perimetros. Produza-se EA até M, e AB até N. Teremos

$$AM+MH+HN>AB+BN,$$

$$BN+NI+IC>BC,$$

$$CK+KL+LD>DC,$$

$$DE=DE,$$

$$EF+FG+GM>EA+AM;$$

logo

$$MH+HN+NI+IC+CK+KL+LD+DE+EF$$

$$+FG+GM>AB+BC+CD+DE+EA.$$

80. Se dois lados de hum triangulo são iguaes a dois lados de outro triangulo, cada hum a cada hum; se ao mesmo tempo o angulo comprehendido pelos primeiros he maior que o angulo comprehendido pelos segundos; o terceiro lado do primeiro triangulo será maior que o terceiro do segundo; e reciprocamente.

Nos dois triangulos ABC, abc, sejão $AB=ab$, Fig. 23.
$BC=bc$, e $ABC>abc$.

Faça-se $CBD=abc$, e $BD=ba$; será $DC=ac$.

Primeiramente, cáia o ponto D fóra do triangulo ABC, e seja E a intersecção de AC e BD. Tire-se AD. No triangulo isosceles ABD he $BDA=BAD$; logo $CDA>BDA>CAD$. Por consequencia (§ 67) no triangulo ACD será $AC>DC$, e nos triangulos propostos $AC>ac$.

Em segundo logar, se o ponto D cahir sobre AC, he Fig. 24.
evidente que $AC>DC$, ou $AC>ac$.

Em terceiro logar, se o ponto D cahir dentro do trian- Fig. 25.
gulo ABC, será o perimetro $ABC>$ que o perimetro BDC, ou $>$ que o perimetro abc; logo tirando as partes iguaes AB, ab, e BC, bc, ficará $AC>ac$.

Reciprocamente, se fôr $AC>ac$, e os outros lados iguaes, cada hum a cada hum, será $ABC>abc$.

Porque se se dissesse que $ABC = abc$, sería $AC = ac$ contra a supposição actual: se se dissesse que $ABC < abc$, sería $AC < ac$, como está demonstrado, tambem contra a supposição actual; logo será $ABC > abc$.

81. Se nos dois triangulos da proposição precedente se tiver sómente $BC = bc$, $ABC > abc$, e além disso o angulo a fôr recto; será ainda $AC > ac$.

Porque se o ponto a ou D está sobre AC, a asserção he evidente. Se elle cae fóra, então pois que $CDB = a$ he hum angulo recto, será $CE > CD$, e por isso $AC > CD$, ou $AC > ac$. Se o ponto D cae dentro do triangulo, produzindo BD até encontrar AC em E, e sendo CDE recto, será $CE > CD$, logo $AC > CD$ ou $AC > ac$.

82. Dois angulos, cuja somma fôr menor que dois rectos, com hum lado determinão o triangulo, se conhecermos a qual dos angulos fica opposto o lado.

Fig. 26. Porque com o lado BC, e o angulo C dados não he possivel construir dois triangulos diversos, em que sejão iguaes os dois angulos BDC, BAC oppostos ao lado BC, porque $BDC > BAC$.

83. A secante tirada de hum vertice do triangulo ao lado opposto he menor, pelo menos, do que hum dos outros dois lados.

No triangulo ABC seja BD tirada do vertice B, e terminada no lado AC.

Hum dos angulos ADB, CDB não he menor que hum angulo recto; seja ADB. Logo BAD será agudo, e por consequencia $BD < BA$.

84. De hum ponto a huma recta não podem tirar-se tres rectas iguaes, ou huma recta não póde ter tres pontos, que estejão a igual distancia de hum outro ponto.

85. No triangulo isosceles, todas as rectas tiradas do vertice principal, ou commum aos lados iguaes, para o lado opposto ou base, são menores cada huma que hum dos lados iguaes.

86. De dois triangulos, que teem hum lado commum, e hum angulo adjacente tambem commum e não menor

que hum angulo recto, o maior triangulo tem maior o lado opposto ao angulo commum: e, reciprocamente, será maior o triangulo, que tiver maior o lado opposto ao angulo commum.

Nos triangulos ABC, DBC, seja C recto ou obtuso. Serão agudos BAD, BDC; logo BDA obtuso, e $AB > BD$.

Reciprocamente, se fôr $AB > BD$, he preciso então que BD cáia dentro do angulo ABC, logo o triangulo ABC será maior que o triangulo BDC.

87. Dois lados com o angulo opposto ao maior, ou a qualquer delles, quando são iguaes, determinão o triangulo.

Se he possivel sejão ABC, DBC dois triangulos, tendo BC, e C communs, e $AB = BD > BC$.

Porque ABD he então hum triangulo isosceles, será o angulo BDA agudo, logo BDC obtuso, e por consequencia $BC > BD$ contra a supposição de ser $BC \leqq BD$.

88. Dois lados com o angulo opposto ao menor, não determinão o triangulo, senão no caso de ser o lado opposto perpendicular ao lado não dado.

Sejão dados A, AB, BD, mas $BD < AB$.

Se BD fôr perpendicular á recta AD, o triangulo será determinado ou unico, porque outra recta qualquer tirada de B a AC não será igual a BD, mas maior porque será huma hypothenusa. Se BD fôr menor que a perpendicular abaixada de B sobre AD, o triangulo será impossivel. Se BD fôr maior que esta perpendicular, então podem construir-se dois triangulos, hum em que o lado BD fique entre A e a perpendicular, e outro em que BD fique situado da outra parte da perpendicular, relativamente ao ponto A.

89. No triangulo isosceles a recta tirada do vertice principal ao meio da base, divide o triangulo em dois identicos, e he perpendicular á base; e reciprocamente.

Seja A o meio da base do triangulo isosceles BDC. Fig. 20.
Os dois triangulos BDA, CDA teem DA commum, e os outros dois lados de hum iguaes respectivamente aos lados

do outro; logo elles são identicos, e $BAD = CAD$; por consequencia estes dois angulos são rectos, ou DA he perpendicular a BC.

Reciprocamente, no mesmo triangulo a perpendicular tirada do vertice principal sobre a base cae dentro do triangulo, porque os angulos sobre a base são agudos; e divide esta base em partes iguaes, porque os triangulos BDA, CDA terão então DA commum, $DB = DC$, e rectos os angulos em A, logo (§ 87) serão identicos, e por consequencia $BA = CA$.

90. Construir hum triangulo, sendo dadas as partes que o determinão, e sendo sempre qualquer dos angulos dados $< 2r$.

1.° Sendo dados dois lados e o angulo comprehendido.

Faça-se hum angulo igual ao dado com os lados iguaes aos dados, e juntem-se suas extremidades. Ficará assim formado o triangulo pedido.

2.° Dado hum lado com a condição de ser adjacente a dois angulos dados, cuja somma seja $< 2r$.

Sobre o lado dado fação-se da mesma parte dois angulos iguaes aos dados, e que tenhão os vertices nas extremidades do dito lado. Os outros dois lados dos angulos determinarão o terceiro vertice do triangulo.

3.° Dados os tres lados, com tanto que o maior delles seja $<$ que a somma dos outros dois.

Fixando as extremidades de dois lados nas extremidades do terceiro, e unindo as outras extremidades ficará construido o triangulo.

4.° Com dois angulos cuja somma seja $< 2r$, e o lado opposto a hum delles.

Juntem-se os dois angulos, e ache-se o supplemento da sua somma. Este supplemento com o angulo dado, que deve ser adjacente ao lado dado, reduzem este caso ao segundo.

5.° Com dois lados, e o angulo opposto ao não menor.

Faça-se hum dos lados do angulo igual ao lado não maior dado, e na extremidade, não vertice, deste lado fixe-se a extremidade do lado não menor; com a outra extremidade busque-se o ponto do lado do angulo, não dado em grandeza, que será o terceiro vertice do triangulo pedido.

6.° Com dois lados, e o angulo opposto ao menor.

Faça-se com o lado maior o que se fez com o menor no caso precedente, e com o menor o que se praticou com o maior. Então, se a extremidade deste não encontrar o lado não determinado do angulo, será impossivel o que se pede. Se o encontrar em hum só ponto, hum só triangulo resolve o problema. Se o encontrar em dois pontos, teremos construidos dois triangulos com as mesmas condições.

91. Sendo dados os tres angulos sómente, sería o mesmo que se fossem dados dois, porque o terceiro ficaria conhecido; e então póde escolher-se hum lado arbitrario, e podem construir-se tantos triangulos quantos se quizer: neste caso o problema he não só ambiguo, mas de huma indeterminação absoluta.

92. Os angulos interiores do polygono de dois perimetros, tomados juntos, valem tantas vezes dois rectos, quantos forem os lados que houver nos dois perimetros.

No polygono $ABCDEFGHIKLM$ tirem-se todas as diagonaes, que se poder, sem que se cortem entre si nem com os lados. Assim vê-se logo que o polygono he composto de tantos triangulos, quantos os lados que ha nos dois perimetros, e depois que os angulos interiores do polygono são a somma dos angulos de todos estes triangulos. Fig. 27.

93. A somma de todos os angulos interiores de hum polygono de hum só perimetro he igual a tantas vezes dois angulos rectos quantos forem os lados menos dois.

Porque se o perimetro $ABCDEF$ tem sómente tres lados, e $GHIKLM$ tem m lados, a somma de todos os angulos interiores he $(3+m)\,2r$. Mas nesta hypothese a somma dos angulos do perimetro exterior he igual a $2r$; logo os outros que teem os vertices G, H, I, K, L, M valem todos juntos $(2+m)\,2r$. E porque estes ultimos com os interiores do polygono $GHIKLM$ fazem $m \times 4r$, segue-se que os angulos interiores deste ultimo polygono de hum só perimetro valem

$$m \times 4r - (2+m)\,2r = (m-2)\,2r.$$

Poder-se-hia fazer a demonstração suppondo o perimetro interior triangular.

94. *Polygono symetrico ou conjugado* he aquelle, em que não existe lado, que não tenha outro igual opposto, e parallelo, seguindo-se no perimetro, continuamente e em ordem inversa, as duas series de lados correspondentemente iguaes.

Pontos oppostos no polygono symetrico são aquelles que nos lados oppostos estão a igual distancia dos vertices oppostos.

Transversaes são as rectas que juntão pontos oppostos. *Centro da transversal* he o meio desta.

95. Construir hum polygono symetrico qualquer.

Fig. 28. Por hum ponto G tirem-se quantas rectas se quizer AD, BE, CF de grandeza arbitraria, mas de sorte que G esteja no meio de todas. Juntem-se os seus extremos pelas rectas AB, BC, etc. Será $ABCDEF$ o polygono symetrico pedido.

Porque nos triangulos oppostos AGB, DGE he $AG = GD$, $BG = GE$ por construcção, e os angulos oppostos no vertice G são iguaes, os triangulos serão identicos; logo $AB = DE$, $ABG = GED$, e AB parallela a DE. Da mesma maneira se prova que BC he igual e parallela a EF, e assim por diante. Logo o polygono he symetrico.

96. Os angulos oppostos no polygono symetrico são iguaes.

Porque (§ 50) hum angulo qualquer BAF he igual a EDC, por serem os lados AF, DC destes angulos parallelos, e infinitos para partes oppostas relativamente aos lados AB, DE, tambem parallelos, e infinitos para partes oppostas a respeito dos primeiros.

97. No polygono symetrico o centro de huma transversal qualquer he centro de todas.

Nos lados oppostos CD, AF tomem-se CH, FI iguaes. Serão H, I pontos oppostos, e HI transversal. Tire-se tambem a transversal CF, a qual cortará a primeira em algum ponto G.

Os triangulos CGH, FGI são iguaes, porque $CH=FI$, e os angulos GCH, GHC, e GFI, GIF são alternos internos. Logo $GH=GI$, $GC=GF$. Desta maneira se vê que o centro de HI o he tambem de CF. Similhantemente se prova que AD passa por G, e fica dividida ao meio neste ponto. O mesmo acontece a qualquer transversal que passar entre D e E, e assim por diante.

98. Huma transversal qualquer divide o polygono symetrico em duas partes identicas.

A parte $HIABC$ póde ser sobreposta á parte $IHDEF$, collocando HI sobre IH, isto he, o ponto H em I, e I em H; então os angulos HIA, IHD coincidirão, porque são iguaes: A cahirá em D, por ser $IA=HD$, e da mesma sorte coincidirão os outros angulos e lados.

99. *Parallelogrammo* he o quadrilatero, cujos vertices são as extremidades de parallelas entre parallelas.

100. *Trapezio* he o quadrilatero, cujos vertices são as extremidades de sómente duas rectas parallelas.

101. Sendo dados dois lados contiguos com o angulo comprehendido, completar o parallelogrammo.

Sejão dados os lados contiguos AB, AC, em grandeza e posição, isto he, tres vertices. He preciso unicamente achar o quarto. Tire-se BC. Faça-se o triangulo BDC identico com ABC, mas tendo o lado $BD=AC$. Para obter isto tomem-se AB, AC nas aberturas de dois compassos, e, collocando huma ponta do primeiro em C e huma do segundo em B, e unindo as outras duas pontas no mesmo plano, o ponto D ficará determinado. Fig. 29.

Porque os dois triangulos são identicos e $DC=AB$, será $DBC=BCA$; logo BD, AC são parallelas. Similhantemente, por ser $BD=AC$, serão iguaes os angulos oppostos *BCD*, *CBA*; logo *AB*, *CD* parallelas, e *ABDC* parallelogrammo.

102. Póde empregar-se o mesmo processo para tirar por hum ponto *B* a parallela a huma recta dada *AC*.

Colloque-se a ponta de hum compasso em *B* e a outra em hum ponto qualquer *A* da recta dada; colloque-se tambem a ponta d'outro compasso em *A*, e a outra ponta em algum ponto *C* da mesma recta: trocando então os compassos já se vê como se acha *D*, ou a parallela *BD* pedida.

103. O parallelogrammo he hum polygono symetrico.

Porque sendo *ABDC* hum parallelogrammo, será *BD* parallela a *AC*, e *DC* a *AB*; logo $DBC = BCA$, $DCB = CBA$. Teem pois os triangulos *DBC*, *ABC* hum lado commum adjacente a angulos iguaes respectivamente, logo são identicos, e por isso iguaes os lados oppostos a angulos iguaes, isto he, $DC = AB$, e $BD = AC$; mas estes lados são tambem parallelos por hypothese; logo o parallelogrammo he symetrico.

104. Cada huma das diagonaes divide o parallelogrammo em partes identicas.

105. As diagonaes do parallelogrammo cortão-se mutuamente em partes iguaes.

106. No parallelogrammo os angulos oppostos são iguaes.

107. No parallelogrammo ha sempre dois angulos oppostos, cada hum dos quaes não he menor que hum recto.

108. O quadrilatero que tem dois lados parallelos e iguaes he hum parallelogrammo.

No quadrilatero *ABDC* sejão iguaes e parallelos os lados oppostos *BD*, *AC*.

Tirando a diagonal *BC*, teremos os angulos *DBC*, *BCA* alternos internos, e portanto iguaes. Nos triangulos *DBC*, *BCA* he $DB = AC$ por hypothese, *BC* commum, e $DBC = BCA$; logo os triangulos são identicos; logo serão iguaes os angulos oppostos aos lados iguaes, isto he, $DCB = CBA$, e por isso *DC* he parallela a *AB*. Logo o quadrilatero he hum parallelogrammo.

109. O quadrilatero que tem os lados oppostos iguaes, dois a dois, he parallelogrammo.

Porque tirando huma diagonal se formarão dois triangulos identicos, por causa da igualdade dos lados; e entre os angulos iguaes, haverá huns que serão alternos internos a respeito dos lados oppostos do quadrilatero; logo estes serão parallelos, e o quadrilatero será parallelogrammo.

110. O quadrilatero que tem os angulos oppostos iguaes, dois a dois, he parallelogrammo.

Porque como os angulos do quadrilatero juntos equivalem a quatro rectos, na hypothese actual, cada hum com o seu immediato valerá dois rectos; porém estes são angulos internos da mesma parte, logo (§ 40) cada lado e o seu opposto são parallelos.

111. O quadrilatero, cujas diagonaes se cortão reciprocamente em partes iguaes, he parallelogrammo.

Porque he polygono symetrico (§ 95).

112. Chama-se *rectangulo* o quadrilatero que tem todos os angulos iguaes.

113. Os angulos do rectangulo são todos rectos.

Porque sendo o rectangulo hum quadrilatero, tem quatro angulos; e como estes fazem a somma $4r$, e são iguaes, será cada hum delles hum angulo recto.

114. O rectangulo he parallelogrammo.

Porque cada angulo e o seu immediato sendo rectos, cada lado e o seu opposto serão parallelos (§ 40).

115. *Rhombo* he o quadrilatero que tem iguaes todos os lados.

116. O rhombo he parallelogrammo (§ 109).

117. O rectangulo que tambem he rhombo chama-se *quadrado*.

118. Com hum lado dado construir o quadrado.

Na extremidade A do lado dado AB levante-se AC Fig. 30.
igual e perpendicular a AB (§ 77), e com os lados AB, AC, e o angulo recto A complete-se o parallelogrammo $ACDB$ (§ 101), que será o quadrado pedido.

Porque CD he parallela a AB por construcção, será $A+C=2r$, e $C=r$, por ser A recto: da mesma maneira he $D=r$, e $B=r$. Logo este parallelogrammo he rectangulo.

Temos tambem $CD=AB$, $BD=AC$. Mas $AC=AB$ por construcção, logo os quatro lados são iguaes, e o parallelogrammo he rhombo. Logo he quadrado por ser rectangulo e rhombo.

119. *Altura de hum polygono* he a maior perpendicular que se poder tirar de hum ponto do perimetro sobre hum lado tomado por base.

120. *Polygonos iguaes* são aquelles que fechão porções iguaes de superficie plana. A porção de superficie encerrada em qualquer polygono chama-se *area desse polygono*.

121. Os parallelogrammos que teem as bases iguaes entre si, e tambem as alturas, são iguaes.

Fig. 31. Os parallelogrammos propostos $ABCD$, $DEFG$ podem ser collocados sobre a recta AG de maneira que os angulos ADC, EDG, não maiores que rectos, tenhão o vertice D commum. De C, E, abaixem-se perpendiculares sobre AG. Digo que estas perpendiculares são as alturas. Porque as perpendiculares abaixadas dos pontos de BC não são maiores que CH, por lhe serem iguaes. E se em hum outro lado CD houvesse hum ponto I, tal que a perpendicular IK fosse $>CH$, então poderia tomar-se sobre IK huma parte $=CH$, e tirar, pelo ponto de divisão, huma parallela a HD, e fazer hum triangulo identico com CHD e ao mesmo tempo menor; absurdo.

Porque as alturas CH, EI são iguaes por supposição, e parallelas, será (§ 108) CE parallela a AG, e portanto CE estará em linha recta com BC, e EF. Os trapezios $BADE$, $CDGF$ são identicos, pois admittem sobreposição, por ser $CD=BA$, os angulos CDG, DCF iguaes respectivamente a A, B, e $AD=DG$, $CE+BC=CE+EF$, ou $BE=CF$. Tirando pois dos trapezios o triangulo commum CDE, teremos $ABCD=DEFG$.

Se os parallelogrammos na indicada situação são adjacentes, ou contiguos, isto he, rectangulos, então elles mesmos admittem sobreposição.

122. Triangulos que teem as bases iguaes, e as alturas tambem iguaes entre si são iguaes.

Porque são as metades de parallelogrammos nas hypotheses do paragrapho precedente.

123. As areas dos parallelogrammos, que teem a mesma altura, estão entre si como as bases.

Seja P hum dos parallelogrammos, e $ABCD$ o outro. Fig. 32.

Faça-se DE igual á base de P, e complete-se o parallelogrammo CE. Será $CE=P$.

Primeiramente, sejão AD, DE commensuraveis, e AG sua medida commum, ou seja AD composta exactamente das partes iguaes AG, GH, HI, etc.; e DE composta tambem de partes iguaes a AG.

Se pelos pontos G, H, etc. se tirarem parallelas a AB, taes como GL, HM, etc., vê-se que BD he composto de parallelogrammos iguaes BG, LH, etc., porque tem iguaes as bases, bem como as alturas: he tambem evidente que BD contém BG, hum destes parallelogrammos, tantas vezes, como AD contém AG, logo

$$BD : BG :: AD : AG;$$

similhantemente se vê que

$$CE : BG :: DE : AG,$$

logo

$$BD : CE :: AD : DE.$$

Em segundo logar, sejão $AD=x$, e $DE=y$ incommensuraveis. Representando por ϕx, e ϕy as areas dos parallelogrammos BD, CE, vê-se claramente que cada huma dessas funcções cresce augmentando a respectiva raiz; mas quando x e y são commensuraveis já demonstramos ser

$$\varphi x : \varphi y :: x : y;$$

logo (Arithmetica Universal, § 152) a proposição precedente será tambem verdadeira quando x e y forem incommensuraveis.

124. As areas dos triangulos da mesma altura estão entre si como as bases.

125. As areas de dois parallelogrammos equiangulos entre si, estão na razão composta de dois lados contiguos.

Sejão $ABCD$, $DEFG$ os dois parallelogrammos equiangulos entre si. Complete-se o parallelogrammo GC, e teremos Fig. 33

$$BD : CG :: AD : DG,$$

e, considerando DC, DE como as bases dos parallelogrammos CG, EG, teremos

$$CG : DEFG :: DC : DE;$$

e destas proporções resulta

$$BD : DEFG :: \frac{AD}{DG} \times \frac{DC}{DE} : 1.$$

126. As areas dos triangulos que teem hum angulo igual, como os triangulos ACD, DFG, que teem $ADC = DGF$: e as areas dos triangulos, nos quaes hum angulo de hum he supplemento de hum angulo d'outro, como os triangulos ACD, DEG, estão na rasão composta dos lados destes angulos.

Porque estes triangulos são as metades dos parallelogrammos, que teem estes mesmos angulos e lados.

127. As areas dos parallelogrammos estão na razão composta das bases e alturas.

Porque se aos parallelogrammos se substituirem rectangulos com as mesmas bases e alturas, estes serão parallelogrammos equiangulos entre si, e seus lados serão as bases e alturas dos parallelogrammos propostos, e estarão na dita razão composta; logo as areas dos parallelogrammos propostos, que são iguaes a estes rectangulos, estarão tambem na mesma razão.

128. As areas de dois triangulos estão na razão composta das bases e das alturas.

Porque as areas dos triangulos são as metades dos parallelogrammos respectivos.

129. A area de hum parallelogrammo he igual á de outro qualquer multiplicada pelo producto das razões das bases e das alturas. O ultimo póde ser o quadrado feito sobre a recta que mede a base e a altura do primeiro, ou sobre a unidade linear. Assim quando se diz que a area do parallelogrammo he igual ao producto da base pela altura, deve subentender-se em rigor o producto do numero de vezes que a altura contém a unidade linear pelo numero de vezes que a base contém a mesma unidade, multiplicado esse producto pelo quadrado formado sobre a unidade linear, o qual he então a unidade de superficie.

130. A area do triangulo he metade do producto da base pela altura.

Por ser metade do parallelogrammo, que tem as mesmas dimensões.

Entende-se tambem que os factores deste producto são os numeros, que resultão da medição da base e da altura; e que a unidade superficial ou o quadrado da linha, que tem servido de unidade nos factores, he a unidade desse producto.

131. A area do trapezio he igual á metade do producto da somma das bases parallelas pela altura.

Porque tirando huma diagonal, o trapezio ficará dividido em dois triangulos, cujas superficies fórmão esta quantidade.

132. AB^q significa a area do quadrado formado sobre AB.

$\overline{AB}^2$ significa que a recta AB deve ser medida com a unidade linear, que chamaremos u; e que o numero que dahi resulta está elevado á segunda potencia, ou está multiplicado por si mesmo. Assim teremos

$$AB^2 = \overline{AB}^2 \times u^2.$$

133. A recta, que divide ao meio hum angulo do triangulo, divide o lado opposto em dois segmentos proporcionaes aos outros dois lados.

Fig. 34. No triangulo ABC seja $ABD = DBC$.

Os triangulos ADB, CDB teem a mesma altura, porque teem o vertice B commum, e as bases sobre a recta AC, logo (§ 124)

$$\text{area } ADB : \text{area } CDB :: AD : CD;$$

mas tambem (§ 126)

$$\text{area } ADB : \text{area } CDB :: \frac{AB}{BC} \times \frac{BD}{BD} : 1;$$

logo

$$AD : CD :: AB : BC.$$

134. *Triangulos similhantes* são aquelles, que teem os vertices situados de maneira que os angulos de hum são iguaes aos angulos do outro, cada hum a cada hum.

135. Dois triangulos similhantes teem os lados proporcionaes; os termos homologos da proporção são os lados oppostos ou adjacentes aos angulos iguaes, e reciprocamente.

Fig. 35. Nos triangulos ABC, DEF sejão $A = D$, $B = E$, logo $C = F$; ter-se-ha

$$\text{area } ABC : \text{area } DEF :: \frac{AC}{DF} \times \frac{AB}{DE} : 1,$$

$$\text{area } ABC : \text{area } DEF :: \frac{AC}{DF} \times \frac{BC}{EF} : 1,$$

logo

$$AB : DE :: BC : EF;$$

da mesma fórma acharemos

$$AC : DF :: BC : EF,$$

logo

$$AB : DE :: BC : EF :: AC : DF.$$

Reciprocamente, se tiverem logar estas proporções os triangulos serão similhantes. Porque, se se negar a igualdade dos angulos de hum a respeito dos angulos do outro, póde fazer-se com AB hum triangulo equiangulo com DEF, que terá os lados proporcionaes aos deste, e por conseguinte serão respectivamente iguaes os lados do triangulo construido e do triangulo ABC, isto he, estes dois triangulos serão identicos.

136. As areas dos triangulos similhantes estão entre si na razão composta duplicada, ou como os quadrados dos lados homologos.

Porque sendo

$$\text{area } ABC : \text{area } DEF :: \frac{AB}{DE} \times \frac{BC}{EF} : 1,$$

será tambem $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$, logo

$$\text{area } ABC : \text{area } DEF :: \frac{AB}{DE} \times \frac{AB}{DE} : 1$$

$$:: \frac{AB}{DE} \times \frac{AB}{DE} \times DE^2 : DE^2 :: AB^2 : DE^2 \text{ (§ 132)}.$$

137. Dois triangulos, que teem hum angulo igual comprehendido por lados proporcionaes são similhantes.

Nos triangulos ABC, DEF, sejão $B = E$, e

$$AB : DE :: BC : EF.$$

*

Sobre $AB > DE$ tome-se $BG = DE$, e tire-se GH parallela a AC. Será $BGH = A$, logo os triangulos ABC, GBH serão similhantes, e será

$$AB : BG \text{ (ou } DE) :: BC : BH,$$

por consequencia $BH = EF$ pela supposição. Segue-se pois que o triangulo BGH he identico ao triangulo EDF, e por isso este ultimo he similhante ao triangulo ABC.

138. Dois triangulos, que teem dois lados proporcionaes, cada hum a cada hum, e o angulo opposto ao maior destes lados, no primeiro, igual ao angulo opposto ao maior dos dois lados no segundo, são similhantes.

Nos triangulos ABC, DEF sejão

$$AB : DE :: BC : EF,$$

$AB > BC$, $C = F$. Será tambem $DE > EF$.

Se os triangulos não são identicos, haverá algum lado de hum maior que o seu homologo do outro. Seja pois $AB > DE$. Tome-se $BG = ED$, e tire-se GH parallela a AC. Serão similhantes os triangulos ABC, GBH; logo

$$AB : BG \text{ (ou } DE) :: BC : BH,$$

e portanto $BH = EF$. Os triangulos DEF, GBH são identicos (§ 87) porque $BG = ED$, $BH = EF$, $BHG = C = F$, e $DE > EF$, ou $BG > BH$. Mas o triangulo BHG he similhante ao triangulo ABC, logo DEF tambem o he.

139. Dois triangulos, nos quaes não ha lado de hum, que não tenha outro parallelo ou em linha recta no segundo triangulo, são similhantes.

Sejão a, b, c os lados, e A, B, C os angulos respectivamente oppostos de hum dos triangulos; a', b', c' os lados, A', B', C' os angulos oppostos do outro triangulo; e seja a' parallela ou em linha recta com a, o mesmo seja

b' a respeito de b, e c' a respeito de c. Porque a', b' são os lados do angulo C', e não podem cortar os lados do angulo C, sendo produzidos, segue-se que ou $C'=C$, ou C' he supplemento de C. O mesmo acontece a B' a respeito de B, e a A' a respeito de a. Agora digo que os tres angulos A', B', C' não podem ser ao mesmo tempo supplementos de A, B, C, porque sería

$$A'+B'+C'=2r-A+2r-B+2r-C=6r$$

$$-A-B-C=4r:$$

absurdo. Digo mais que dois dos primeiros angulos não podem ser supplementos de dois dos segundos, porque sería ainda

$$A'+B'+C'=2r-A+2r-B+C=4r$$

$$-(A+B+C)+2C=2r+2C:$$

absurdo. Digo finalmente que nem mesmo hum angulo de hum dos triangulos póde ser supplemento do seu correspondente, á excepção do caso em que este he recto, visto que então o angulo e seu supplemento são iguaes, porque sería

$$A'+B'+C'=2r-A+B+C;$$

equação, cujo segundo membro não póde ser $=2r$ sem ser $A=B+C$, isto he, sem que A seja recto, mas então tambem $A'=2r-A=A$. Logo he sempre $A'=A$, $B'=B$, $C'=C$, e os triangulos são similhantes.

140. Dois triangulos, que teem os tres lados de hum perpendiculares aos tres lados do outro, são similhantes.

A demonstração he como a precedente, mudando as palavras parallelas, e em linha recta, em perpendiculares.

141. Em dois systemas, hum de rectas que se cortão em hum ponto, e outro de parallelas, são proporcionaes

as partes das primeiras rectas comprehendidas entre esse ponto e as parallelas, e as partes destas mesmas parallelas, cortadas pelas rectas concorrentes.

Fig. 36. AH, AK, AI, comprehendidas entre A, e HI são proporcionaes a AB, AF, AC, comprehendidas entre A, e BC parallela a HI.

GD, EG são proporcionaes a BF, CF, porque sendo parallelas são cortadas pelas mesmas rectas concorrentes DB, GF, EC; e assim das outras partes.

He isto effeito da similhança dos triangulos, a qual nestas circumstancias dá proporções com termos communs, da suppressão dos quaes resulta a verdade da proposição.

142. Cortar huma recta em partes, que tenhão razões dadas.

Fig. 37. Seja AB a recta que se quer dividir em partes, que estejão entre si como AC, CD, DE.

Sobre huma recta qualquer AE, fazendo com AB hum angulo $< 2r$, cortem-se successivamente as partes dadas, e tire-se EB, e depois DF, CG parallelas a EB. Teremos assim AB dividida em partes AG, GF, FB, que estarão entre si nas razões dadas.

Se se fizer o triangulo ABE' identico a ABE, sendo BE' parallela a AE, e se tomar $BD' = ED$, $D'C' = DC$, e se depois se juntarem DD', CC', cortar-se-ha a recta AB nos mesmos pontos F, G.

143. Achar a quarta proporcional a tres rectas dadas.

Sejão AE, AD, AB as tres rectas dadas, porque em qualquer situação que sejão dadas, sempre se lhes póde dar a actual. Tire-se DF parallela a EB, e será AF a recta pedida.

Tirando DF parallela a GC, he AF a quarta proporcional ás tres rectas AC, AD, AG.

O problema de achar a terceira proporcional a duas rectas dadas, se reduz a fazer $AD = AB$, ou $AD = AG$.

144. *Dois polygonos* chamão-se *similhantes*, quando teem o mesmo numero de lados, e são compostos sómente de triangulos similhantes, situados da mesma maneira nos dois polygonos.

145. Os polygonos similhantes teem todos os angulos iguaes, cada hum a cada hum; e proporcionaes os lados adjacentes aos angulos iguaes.

Os polygonos $ABCDE$, $abcde$, tendo o mesmo numero de lados, sejão compostos respectivamente dos triangulos ABC, ACD, ADE, e de abc, acd, ade similhantes ou equiangulos com os primeiros, e dispostos da mesma maneira. Fig. 38.

Serão os angulos $BAC = bac$, $CAD = cad$, $DAE = dae$, logo $BAE = bae$; $B = b$, $BCA = bca$, $ACD = acd$, logo $BCD = bcd$: similhantemente se demonstra a igualdade dos outros angulos dos polygonos, que são ou os mesmos angulos dos triangulos, iguaes por supposição, ou sommas destes angulos.

A similhança dos triangulos dá

$$AB : ab :: BC : bc :: AC : ac :: CD : cd :: AD : ad$$

$$:: DE : de :: AE : ae;$$

logo

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae,$$

proporções que formão a segunda parte da proposição.

146. Se dois polygonos são equiangulos, e teem proporcionaes os lados adjacentes aos angulos iguaes, elles serão similhantes.

Nos polygonos $ABCD$, $abcd$, sejão os angulos $ABC = abc$, $BCD = bcd$, $CDA = cda$, $DAB = dab$, e além d'isto Fig. 39.

$$AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DA : da.$$

De hum ponto qualquer E do polygono $ABCD$ tirem-se aos vertices as rectas EA, EB, EC, ED. Faça-se no polygono $abcd$ o triangulo abe similhante ao triangulo

ABE, e situado da mesma maneira. Tirem-se ec, ed. Pois que $ABE = abe$ por construcção, será

$$EBC = ABC - ABE = abc - abe = ebc.$$

Mas por hypothese

$$AB : ab :: BC : bc,$$

e por construcção

$$AB : ab :: BE : be,$$

logo

$$BE : be :: BC : bc.$$

Por consequencia (§ 137) são similhantes e dispostos da mesma maneira os triangulos BCE, bce; e da mesma fórma se prova a similhança de figura bem como de posição dos triangulos CDE, cde, e de ADE, ade. Logo os polygonos são similhantes (§ 144).

147. Os polygonos similhantes estão entre si na razão composta duplicada de dois de seus lados homologos, ou como os quadrados feitos sobre estes lados.

Temos (§ 136)

$$\text{area } ABE : \text{area } abe :: \frac{AB}{ab} \times \frac{AB}{ab} : 1,$$

$$\text{area } BCE : \text{area } bce :: \frac{BC}{bc} \times \frac{BC}{bc} : 1 :: \frac{AB}{ab} \times \frac{AB}{ab} : 1,$$

$$\text{area } CDE : \text{area } cde :: \frac{CD}{cd} \times \frac{CD}{cd} : 1 :: \frac{AB}{ab} \times \frac{AB}{ab} : 1,$$

etc., etc.

logo

$$\text{area } ABE + \text{area } BCE + \text{area } CDE + \text{etc.}$$

$$: \text{area } abe + \text{area } bce + \text{area } cde + \text{etc.} :: \frac{AB}{ab} \times \frac{AB}{ab} : 1,$$

isto he,

$$ABCD : abcd :: \frac{AB}{ab} \times \frac{AB}{ab} : 1 :: AB^2 : ab^2.$$

148. No triangulo rectangulo, sendo a base a hypothenusa, a altura he meia proporcional entre os segmentos da hypothenusa; e cada hum dos lados meio proporcional entre a hypothenusa e o segmento adjacente.

No triangulo ABC seja recto o angulo em A. De A abaixe-se AD perpendicular sobre a hypothenusa; esta ficará dividida em dois segmentos, porque a perpendicular deve cahir dentro do triangulo, sendo agudos os angulos B, C. Fig. 40.

O angulo ADC he recto por construcção, logo $C + CAD = r$, mas he $BAD + CAD = r$ por hypothese, logo $C = BAD$; e porque além disto $CDA = BDA$, segue-se que os triangulos BAD, CAD são similhantes, logo

$$BD : DA :: DA : DC.$$

Cada hum dos triangulos parciaes he similhante ao total, porque são rectangulos tambem, e teem hum angulo commum a este. Logo

$$BC : AB :: AB : BD,$$

e

$$BC : AC :: AC : DC.$$

149. No triangulo rectangulo os polygonos similhantes, construidos hum G sobre a hypothenusa, outro F sobre hum lado do angulo recto, como lados homologos, teem entre si a razão da hypothenusa e do segmento della adjacente a este lado.

Porque sendo F construido sobre o lado AC, será $G : F :: 1 : \frac{AC}{BC} \times \frac{AC}{BC}$; mas he tambem

$$\text{area } BAC : \text{area } CAD :: 1 : \frac{AC}{BC} \times \frac{AC}{BC} :: BC : DC \text{ (§ 124)},$$

logo

$$G : F :: BC : DC.$$

Da mesma maneira se acha, sendo E o polygono similhante construido sobre AB,

$$G : E :: BC : BD.$$

150. Dos tres polygonos similhantes construidos sobre os tres lados do triangulo rectangulo, como lados homologos, aquelle que pertence á hypothenusa he igual á somma dos outros dois.

Porque he

$$E : F : G :: BD : DC : BC,$$

será

$$E + F : G :: BD + DC \text{ (ou } BC) : BC;$$

logo

$$G = E + F.$$

151. Os quadrados formados sobre os tres lados do triangulo rectangulo, sendo polygonos equiangulos entre si e tendo os lados proporcionaes, são similhantes; logo o quadrado da hypothenusa he igual á somma dos quadrados dos outros dois lados.

Fig. 41. **152.** Construir hum angulo recto BAC.

Hum modo de construir o angulo recto he achar em numeros inteiros a relação dos lados de hum triangulo rectangulo ABC.

Estejão os dois lados e a hypothenusa na razão dos numeros a, b, c, que se pretende achar. Será

$$AB^2 + AC^2 = BC^2,$$

ou

$$a^2 u^2 + b^2 u^2 = c^2 u^2, \text{ ou } a^2 + b^2 = c^2,$$

logo

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 = d^2,$$

logo

$$2ab = d^2 - c^2 = (d + c)(d - c);$$

portanto se se fizer $2a = d + c$, $b = d - c$, sommando, teremos estas equações,

$$2a + b = 2d;$$

$$4a^2 + 4ab + b^2 = 4d^2;$$

mas

$$4a^2 + 8ab + 4b^2 = 4d^2,$$

logo por subtracção

$$4ab + 3b^2 = 0, \text{ ou } 4a + 3b = 0;$$

donde se tira

$$a = -3p, \ b = 4p.$$

O mais simples he suppôr $a = -3$, ou $a = 3$, porque se deve elevar a á segunda potencia; logo $b = 4$, e $c = 5$.

Por consequencia com tres rectas, que estejão entre si como os numeros 3, 4, 5, ou como os seus equimultiplos, póde formar-se o triangulo rectangulo.

153. Achar a média proporcional entre duas rectas dadas.

Com as rectas dadas BD, DC componha-se a recta BC. Fig. 40.
Divida-se esta em duas partes iguaes no ponto H. Com $HA = HB$, com HD, e o angulo recto ADH faça-se o triangulo DHA.

Digo que AD he a média proporcional pedida. Porque tirando AC, AB, o triangulo ABC será rectangulo por serem isosceles os triangulos BHA, AHC, e portanto $HAB = B$, $HAC = C$, ou $BAC = B + C = r$; logo AD he a linha pedida.

*

De outro modo. Sejão BC, CD as rectas dadas. Faça-se a mesma construcção, e será AC a média proporcional pedida.

154. Construir o triangulo rectangulo, de que se conhece hum lado do angulo recto e a hypothenusa.

Seja BC a grandeza e posição da hypothenusa, e AC a grandeza do outro lado dado; trata-se de achar o vertice A do angulo recto.

Procure-se CD, terceira proporcional a BC e AC (§ 143) determine-se depois o vertice A do triangulo rectangulo ADC, como no problema precedente.

155. Se o quadrado feito sobre hum lado de hum triangulo fôr maior que a somma dos quadrados dos outros dois lados, o angulo opposto a esse lado he obtuso; e se o dito quadrado fôr menor, o angulo opposto he agudo.

Fig. 42. No triangulo ABC, seja $\overline{AB}^2 > \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

Faça-se (§ 154) com a hypothenusa AB e o lado $AD = AC$ o triangulo rectangulo ADB. Será $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2$, logo $BD > BC$, e logo o triangulo rectangulo da construcção envolverá o triangulo proposto, porque sendo recto o angulo em D, se o vertice C podesse estar ou sobre hum lado do angulo recto, ou fóra deste, então ou AC não sería igual a AD, ou BC não sería menor que BD.

Segue-se portanto que o angulo C he maior que D, ou obtuso.

Fig. 43. No triangulo ABC seja $\overline{AB}^2 < \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

Faça-se da mesma sorte o triangulo ADB rectangulo em D, e com $AD = AC$. Será $BC > BD$; logo ABC não póde ser envolvido por ABD, nem cortar o lado BD. Junte-se C e D. No triangulo issosceles ACD, o angulo ACD he agudo, logo ACB tambem o he.

156. Fazer hum polygono similhante a outro dado, e que tenha com elle huma razão dada.

Sejão P o polygono dado, e X aquelle que se pede; e estejão BD, DC na razão dada. Fig. 44.

Sobre BC como hypothenusa, e com os segmentos BD, DC faça-se (§ 153) o triangulo rectangulo ABC. Sobre AB tome-se AE, igual a hum dos lados do polygono P. Tire-se EF parallela a BC, e será AF o lado homologo do polygono X. Porque (§ 149)

$$P:X::EG:GF::BD:DC.$$

Para acabar a construcção, formem-se sobre AF angulos iguaes aos que estão formados no polygono P com o lado AE, e que tenhão os lados proporcionaes aos deste, e sobre os lados assim determinados continue-se da mesma fórma até fechar o polygono X.

157. Dividir huma recta em duas partes taes, que huma seja média proporcional entre a outra e a recta toda.

Seja AB a recta proposta. Levante-se sobre ella a perpendicular $BC=\frac{1}{2}AB$. Tire-se AC. Corte-se $CD=BC$, e $AE=AD$; será AE a média proporcional pedida. Fig. 45.

No prolongamento de AC tóme-se $CF=CD=CB$ $=\frac{1}{2}AB$, e tirem-se BD, BF.

Porque DCB he isosceles, $\frac{1}{2}DCB+CBD=r$; mas he tambem $ABD+CBD=r$ por construcção; logo $ABD=\frac{1}{2}DCB$. Porque CFB he isosceles, será BFC $=\frac{1}{2}DCB$, logo $ABD=AFB$. Por consequencia os triangulos ABD, AFB, que, além desses angulos iguaes, teem o angulo A commum, são similhantes. Logo

$$AF:AB::AB:AD, \text{ e } AF-AB:AB::AB-AD:AD.$$

Mas $DF=AB$, $AF-AB=AD=AE$, $AB-AD=BE$,

logo

$$AE:AB::BE:AE, \text{ ou } AB:AE::AE:BE.$$

158. *Corda do polygono* he qualquer recta, que termina em dois pontos do perimetro. *Diametro* he a recta que divide igualmente todas as cordas parallelas entre si. A grandeza do diametro limita-se, como a das cordas, pelos pontos de intersecção com o perimetro. *Eixo* he o diametro perpendicular ás cordas.

159. No parallelogrammo cada huma das rectas, que dividem ao meio os lados oppostos, he diametro das cordas parallelas a estes lados; e cada huma das diagonaes he diametro das cordas parallelas á outra.

Fig. 46. No parallelogrammo $ABCD$ os lados AB, DC estejão divididos ao meio nos pontos E, F pela recta EF. Tirem-se as cordas GH parallelas a AB, cortando EF nos pontos I.

Porque AE, DF são iguaes e parallelas, será $ADFE$ hum parallelogrammo, logo EI, AG são parallelas; mas GI, AE são parallelas tambem por construcção; logo $AEIG$ he parallelogrammo, e $GI=AE$. Da mesma maneira se prova que $IH=EB$, logo $GI=IH$. Logo huma corda qualquer parallela a AB he dividida ao meio por EF; logo EF he diametro.

Fig. 47. No parallelogrammo $ABCD$ seja EF parallela á diagonal DB, e cortada em G pela diagonal AC, e seja H a intersecção das diagonaes. Será (§ 141)

$$EG:GF::DH:HB.$$

Mas (§ 105) $DH=HB$, logo $EG=GF$. Por consequencia a diagonal AC passa pelo meio de todas as cordas parallelas á outra diagonal.

160. No rectangulo a perpendicular ao meio de hum lado divide o rectangulo e o perimetro em partes iguaes, e he eixo.

No rectangulo $ABCD$ sejão E o meio de AB, e EF Fig. 48.
perpendicular a AB.

Dobre-se o rectangulo por EF. EB cahirá sobre EA, o angulo B sobre o angulo A, BC sobre AD, o ponto C em D; logo FC coincidirá com DF; logo F he o meio de DC; EF he diametro, e tambem eixo, porque será perpendicular a todas as cordas parallelas a AB (§ 159).

161. *Centro de pontos* he hum ponto tal, que as rectas tiradas delle aos primeiros são iguaes, e cada huma se chama *raio*. *Centro de rectas* he o ponto do qual se podem abaixar perpendiculares iguaes sobre todas as rectas, e cada huma destas perpendiculares se chama *apothema*. *Centro de figura* he o ponto, que ao mesmo tempo he centro dos vertices e dos lados do polygono.

162. Dois pontos teem hum numero infinito de centros, mas todos na perpendicular ao meio da recta, de que elles são extremos; e reciprocamente.

Seja D hum dos centros de B, C. Tirem-se DB, DC, Fig. 20.
BC e DA ao meio de BC. Será A centro tambem.

Porque D he centro por hypothese, será $DB = DC$, e pela mesma razão $BA = CA$; e porque DA he commum aos dois triangulos DAB, DAC, estes serão identicos, e por isso $DAC = DAB = r$, e DA perpendicular a BC. Logo hum centro qualquer das extremidades de BC está na perpendicular ao seu meio: e demonstra-se com a mesma facilidade, que os pontos desta perpendicular são todos centros daquellas extremidades.

163. Todos os pontos da recta que divide ao meio hum angulo, são centros dos seus lados; e reciprocamente.

Divida-se o angulo proposto BAC em duas partes iguaes Fig. 49.
pela recta AD. De hum ponto qualquer D de AD abaixem-se as perpendiculares DB, DC sobre os lados do angulo.

Os triangulos ADB, ADC são identicos, porque teem hum lado commum AD, demais $DBA = DCA$ por construcção, $BAD = CAD$ por hypothese, logo $DB = DC$. Portanto D he centro dos lados AB, AC.

Reciprocamente, se D he centro dos lados AB, AC, a perpendicular DB será igual á perpendicular DC; e porque DA he commum aos dois triangulos rectangulos, estes serão identicos, e o angulo $BAD = CAD$, isto he, DA dividirá ao meio o angulo proposto.

164. O triangulo tem centro de vertices, mesmo no seu plano.

Fig. 50. Levantem-se as perpendiculares DF, EF ao meio dos lados AB, AC do triangulo ABC.

Estas perpendiculares, sendo lados de angulos rectos, concorrem, porque d'outra maneira serião parallelas, o que não he possivel (§ 52), pois que os outros lados DA, EA dos angulos rectos não são parallelos, porque teem o ponto A commum, nem estão em linha recta, porque então não existiria triangulo. Seja pois F o ponto de encontro destas perpendiculares. Será F centro de A, B, visto pertencer á perpendicular DF ao meio de AB (§ 162), logo $FA = FB$. Similhantemente, F he centro de A, C, por existir em EF, logo $FA = FC$. Logo são iguaes os raios AF, BF, CF, e F he centro dos tres vertices, e o unico no plano do triangulo.

165. O triangulo tem dentro em si centro de lados.

Fig. 51. AD, BD dividão ao meio os angulos BAC, ABC.

AD, BD concorrem sendo produzidas, porque os angulos que ellas fórmão com AB são sempre agudos, por serem as metades dos angulos do triangulo; e sendo continuadas até aos lados oppostos, ter-se-hão já cortado em algum ponto D. Tirem-se DE, DF, DG perpendiculares aos lados do triangulo proposto ABC.

Cada huma destas perpendiculares, DE por exemplo, não póde cahir senão na parte commum aos bilateros agudos DAB, DBA, isto he, dentro de DAB; e assim das outras. Logo (§ 163) $DE = DF$, e $DE = DG$. Por consequencia D he o centro dos lados do triangulo ABC.

166. O centro dos vertices do triangulo rectangulo está no meio da hypothenusa; e, reciprocamente, se o centro

dos vertices de hum triangulo estiver sobre hum lado, o triangulo será rectangulo, e esse lado será a hypothenusa.

Seja rectangulo em A o triangulo ABC, e D o meio da hypothenusa. Fig. 52

Os angulos DAB, DAC, B, C juntos valem $2r$. $DAB + DAC = r$, logo $B + C = r$, ou

$$DAB + DAC = B + C.$$

Mas se fôr $AD < BD$, será tambem $AD < DC$ por hypóthese, logo $B < DAB$, e $C < DAC$, logo

$$B + C < DAB + DAC, \text{ absurdo.}$$

Se fôr $AD > BD$, será $AD > DC$; logo $B > DAB$, e $C > DAC$; logo $B + C > DAB + DAC$, absurdo. Por consequencia $AD = BD = CD$, e D meio da hypothenusa he o centro dos vertices do triangulo rectangulo.

Reciprocamente, se no triangulo ABC fôr $DB = DA = DC$, será $B = DAB$, $C = DAC$, logo

$$B + C = DAB + DAC = BAC;$$

logo BAC he recto, e BC hypothenusa.

167. Levantar huma perpendicular na extremidade A de huma recta AB, sem a produzir. Fig. 53.

No meio C de AB levante-se a perpendicular CD de grandeza arbitraria, tire-se $BDE = 2BD$, e depois EA, que será a perpendicular pedida, por ser D o centro dos pontos E, A, B.

D'outro modo. Levante-se a perpendicular CD em hum ponto qualquer C, e depois tire-se AE parallela a CD. Ou tambem, ache-se o ponto E com as aberturas de compasso $AE = \frac{3}{4}AB$, e $BE = \frac{5}{4}AB$.

168. O quadrilatero no qual a somma de dois angulos oppostos, e por consequencia a dos outros dois, he

igual a dois rectos tem centro de vertices; e reciprocamente.

Fig. 54. 1.° Esteja o centro E dos vertices D, B, C fóra do quadrilatero $ABCD$, no qual he

$$ABC+ADC=2r,$$

e

$$BAD+BCD=2r.$$

Porque os triangulos EDC, EBC são isosceles, será $e=f$, $c=d+e$; mas pela hypothese da proposição he $b+c+g=2r$, e $a+h+d=2r$, logo

$$b+d+e+g=a+h+d,$$

ou

$$b+f+g=a+h.$$

Agora digo que he $AE=DE=BE$. Porque se fôr $AE \gtrless DE$, ou $AE \gtrless BE$, será $f+g \gtrless h$, e $b \gtrless a$; logo

$$f+g+b \gtrless h+a,$$

absurdo. Portanto E he o centro dos quatro vertices.

Fig. 55. 2.° Esteja o centro E dos vertices A, B, C dentro do quadrilatero. Tirem-se EA, EB, EC, ED. Será $EA=EB=EC$, logo $a=b$, $c=d$. Mas he por hypothese

$$b+c+f+g=2r,$$

$$a+h+d+e=2r,$$

equações, das quaes eliminando a, c por meio das primeiras, resulta

$$f+g=h+e,$$

equação que não póde subsistir sem ser $ED=EA=EC$.

3.° Esteja o centro E dos tres vertices A, B, C sobre hum dos outros dois lados do quadrilatero. Fig. 56.

Será

$$a=b,\ c=d,\ b+c+e=2r=a+f+d,$$

equações das quaes se deduz logo

$$e=f, \text{ e } EA=ED;$$

por consequencia E he o centro dos quatro vertices.

Reciprocamente, se o quadrilatero tiver centro de vertices, a somma dos angulos oppostos será igual a dois rectos.

1.° Porque os triangulos EAB, EBC, ECD, EDA são isosceles, será Fig. 54.

$$a=b,\ c=d+e,\ e=f,\ f+g=h;$$

logo

$$a+h+d=b+c+g,$$

ou

$$BAD+BCD=ABC+ADC,$$

e logo

$$BAD+BCD=2r,$$

$$ABC+ADC=2r.$$

2.° Seja Fig. 55.

$$a+h=b+g,\ d+e=c+f,$$

logo

$$a+h+d+e=b+g+c+f,$$

isto he

$$BAD+BCD=ABC+ADC=2r.$$

3.° Seja Fig. 56.

$$a+f=b+e,\ d=c,$$

logo

$$a+f+d=b+c+e,$$

ou $$BAD+C=ABC+D=2r.$$

Fig. 57. **169.** No primeiro caso o centro E de A, B, C não póde ter huma posição tal que o vertice D fique dentro do angulo AEC, porque na proposição directa teriamos $BAE+BCE>2r$; mas $BAE=ABE$, e $BCE=CBE$, logo

$$ABE+CBE>2r,$$

absurdo: e na proposição inversa serião iguaes EA, ED, EC, absurdo.

Fig. 58. No terceiro caso. Se na proposição directa se diz que o centro E dos vertices A, B, C póde estar sobre hum dos lados AB, BC; então B he hum angulo agudo do triangulo rectangulo, que se póde construir com os vertices A, B, C, logo D he obtuso, e então a demonstração póde começar pela supposição de que E he o centro dos tres vertices A, D, C, e que o centro não está sobre algum dos lados AD, DC.

170. Dois triangulos sobre a mesma base, cujos angulos oppostos a esta são iguaes, teem o mesmo centro de vertices; e reciprocamente.

Fig. 59. Nos dois triangulos ABC, ABD sobre a mesma base AB, seja $ACB=ADB$.

Tire-se pelo vertice e dentro do angulo ACB huma recta qualquer CE. Faça-se o triangulo ABF com os angulos $BAF=ACE$, e $ABF=BCE$; será F o supplemento de ACB, ou de ADB. Logo (§ 168) o centro dos vertices do triangulo ABF he tambem centro de C, D, isto he, A, B, C, D tem o mesmo centro.

Reciprocamente, se os dois triangulos ABC, ABD teem o mesmo centro de vertices, este será commum aos quadrilateros $ACBF$, $ADBF$; logo ACB, e ADB serão cada hum supplemento de F, e por tanto iguaes.

171. No theorema precedente as partes dos lados que se cortão em G, ou concorrem em H, são inversamente proporcionaes; e reciprocamente.

Como os triangulos ACG, BDG teem $ACG=BDG$, e $AGC=BGD$, são similhantes, logo

$$CG:DG::AG:BG.$$

Os triangulos ADH, BCH, tendo $ADH=BCH$, por serem supplementos de angulos iguaes, e o angulo H commum, são similhantes, logo

$$AH:BH::DH:CH.$$

Se o concurso fôr em hum ponto abaixo de AB, a demonstração he inteiramente analoga.

Reciprocamente, se fôr

$$CG:DG::AG:BG,$$

pois que $CGA=DGB$ os triangulos CGA, DGB serão similhantes, logo $ACG=BDG$. Se fôr

$$AH:BH::DH:CH,$$

porque H he commum, os dois triangulos ADH, BCH serão similhantes, logo

$$ADH=BCH, \text{ e } ADB=ACB.$$

O mesmo acontece se o concurso fôr no ponto inferior.

172. Se o vertice de hum d'estes angulos oppostos á base, fôr o centro dos vertices do outro triangulo, o primeiro dos ditos angulos será o dobro do segundo.

Se nos triangulos ABC, ABD, fôr C o centro dos vertices A, B, D, tire-se a recta DCG, e será isosceles o triangulo ADC, logo $ACG=2ADG$: similhantemente será $BCG=2BDG$, logo Fig. 60.

$$ACB=2ADB.$$

Se nos triangulos ABC, ABE, fòr C o centro dos vertices A, B, E; será isosceles o triangulo CEB, logo

$$ACB = 2E.$$

Se nos triangulos ABC, ABF, fòr C o centro dos vertices A, B, F, tire-se a recta FCH. Será isosceles o triangulo CFB, logo $HCB = 2HFB$. Será tambem isosceles AFC, logo $HCA = 2HFA$, por consequencia

$$HCB - HCA = 2(HFB - HFA),$$

isto he,

$$ACB = 2AFB.$$

173. Achar a expressão do raio de vertices de hum triangulo por meio dos lados do triangulo e da sua area.

Fig. 61. Seja ABC o triangulo.

Nos vertices A, C de seus mais pequenos angulos levantem-se as perpendiculares AD, CD sobre AB, CB, as quaes fazendo angulos agudos com AC, se encontrarão em algum ponto D. Tire-se BD. O quadrilatero $ABCD$ tem centro de vertices, e este centro está no meio E de BD (§ 166). Abaixe-se de B a perpendicular BF sobre AC. Os angulos BAC, BDC são iguaes (§ 170), logo os dois triangulos rectangulos ABF, BDC são similhantes, logo

$$AB : BF :: BD : BC,$$

donde

$$BD = 2BE = \frac{AB \times BC}{BF},$$

e por conseguinte

$$\text{o raio } BE = \frac{AB \times BC \times AC}{2\,FB \times AC} = \frac{AB \times BC \times AC}{4 \text{ areas}} \text{ (§ 130).}$$

Fig. 51. 174. No triangulo ABC he o apothema

$$DG = \frac{2 \text{ areas}}{AB+BC+AC}.$$

Porque o triangulo ABC he composto de tres, cujas bases são os mesmos lados de ABC, e que todos teem o vertice D centro destes lados, e de que as alturas são por consequencia todas iguaes ao apothema DG, e cujas areas são $\frac{1}{2}AB \times DG$, $\frac{1}{2}BC \times DG$, $\frac{1}{2}AC \times DG$, cuja somma he $=$ area.

175. O centro de vertices do rectangulo he a intersecção das diagonaes, ou dos eixos.

Porque as diagonaes se cortão mutuamente em partes iguaes (§ 105), será $AE=EC$, $BE=ED$. Mas as diagonaes do rectangulo são iguaes, porque nos triangulos rectangulos BAD, ADC he $BA=CD$, e AD commum, logo $AC=BD$. Logo Fig. 62.

$$AE=BE=CE=DE,$$

e será E o centro de vertices do rectangulo.

E pois que o triangulo EBC he isosceles, a perpendicular abaixada de E sobre BC, passará pelo meio desta (§ 89), e será eixo (§ 158), e da mesma sorte será eixo a perpendicular tirada de E sobre AB; logo E he a intersecção dos eixos.

176. O quadrilatero, em que a somma de dois lados oppostos he igual á somma dos outros dois, tem centro de lados; e reciprocamente.

No quadrilatero $ABCD$ seja $AB+DC=AD+BC$. Fig. 63.

Divida-se ao meio cada hum dos angulos A, B pelas rectas AE, BE, que concorrerão em algum ponto E. Todos os pontos de AE são centros dos lados AB, AD (§ 163), e todos os pontos de BE centros de AB, CB: logo as perpendiculares EF, EG, EH, abaixadas de E sobre estes lados, são iguaes. Os triangulos rectangulos AEH, AEF são identicos, por terem commum a hypothenusa, e os angulos em A iguaes, logo $AH = AF$. Se fôr escolhido AB, o menor ou hum dos menores lados do quadrilatero, vê-se que o ponto H está entre A e D, pois de outra sorte $AF = AH$ seria $\overline{\geq} AD$, isto he, $AF > AB$; absurdo, porque a perpendicular EF corta AB, sendo agudos os angulos em A, B do triangulo AEB. Da mesma maneira se prova que $BF = BG$, e que o ponto G está entre C e B, logo $AF + BF = AH + BG$, ou $AB = AH + BG$, e logo pela hypothese da proposição $DC = DH + CG$.

Faça-se $DI = DH$, e tire-se EI; será $IC = GC$. Digo que EI he igual ás tres perpendiculares EH, EG, EF, e perpendicular sobre DC. Porque se EI fosse $\lesseqgtr EH$, ou $\lesseqgtr EG$, os angulos em I serião (§ 155) ambos obtusos, ou ambos agudos, o que he impossivel; por conseguinte $EI = EH = EG$, e EI he perpendicular sobre DC.

Reciprocamente, se o quadrilatero $ABCD$ tem centro E de lados, será

$$AB + DC = AD + BC.$$

Porque tirando as rectas EA, EB, EC, ED, ellas dividirão os angulos A, B, C, D do quadrilatero em partes iguaes, que serão angulos agudos, e abaixando de E as perpendiculares ou apothemas sobre todos os lados, estas perpendiculares EF, EG, EI, EH encontrarão os lados entre os seus extremos.

Os triangulos AEH, AEF são identicos, logo $AF = AH$; com os triangulos BEF, BEG se prova da mesma maneira que $BF = BG$; e da mesma maneira tambem se acha $CI = CG$, $DI = DH$. Todas estas equações juntas dão

$$AB + DC = BC + AD.$$

177. No rhombo o centro de lados está na intersecção das diagonaes, dos diametros, ou das transversaes.

Porque qualquer diagonal divide o rhombo em dois triangulos identicos e isosceles, e por consequencia divide ao meio os angulos oppostos, e contém o centro de lados. A intersecção das diagonaes he tambem commum aos diametros, e ás transversaes.

178. Se duas rectas cortão proporcionalmente os lados oppostos de hum quadrilatero, cada huma cortará a outra na mesma razão, em que corta os dois lados oppostos.

As rectas EF, GH cortem os lados do quadrilatero $ABCD$, de sorte que seja Fig. 64.

$$AH:HD::BG:GC,$$

e

$$AE:EB::DF:FC.$$

Tirem-se CH, FH; e depois Bb parallela a GH e que encontre CH produzida, e Ee parallela tambem a GH e terminada em Ab; e tire-se mais eH. Será

$$bH:HC::BG:GC::AH:HD;$$

logo os triangulos AHb, DHC são similhantes. Será depois

$$Ae:eb::AE:EB::DF:FC;$$

donde se deduz

$$Ae:DF::Ab:DC;$$

mas os triangulos similhantes AHb, DHC dão

$$Ab:DC::AH:DH;$$

logo

$$Ae:DF::AH:DH;$$

além disto, sendo similhantes os triangulos AHb, CHD, será o angulo $HAe = HDF$; logo os triangulos AHe, DHF são tambem similhantes, e será o angulo $AHe = DHF$, donde se segue que FHe he huma linha recta. Agora pois, sendo parallelas Ee, MH, teremos

$$EM : MF :: eH : HF$$

$$:: AH : HD.$$

Por huma construcção similhante se demonstra que

$$HM : MG :: AE : EB.$$

Á excepção do caso do parallelogrammo, he sempre possivel a construcção para a demonstração, como a figura a representa, isto he, estando a recta Bb entre BA e GH, ou sendo o angulo $ABC > CGH$; porque se todos os quatro angulos do quadrilatero proposto fossem ao mesmo tempo menores que os quatro angulos correspondentes de GH com os lados oppostos, seguir-se-hia o absurdo, que os quatro angulos de hum quadrilatero não farião a somma de quatro angulos rectos.

Mas quando o quadrilatero proposto he hum parallelogrammo, não he necessaria construcção alguma, porque a igualdade das rectas parallelas entre rectas parallelas fornece immediatamente a demonstração.

179. Com hum lado dado adjacente a dois angulos dados fazer hum quadrilatero, que tenha centro de vertices, e centro de lados.

Fig. 65. Sejão AB o lado, e A, B os angulos dados.

Em hum ponto qualquer C do lado de hum dos angulos faça-se o angulo ACD supplemento do seu opposto B. Os lados d'estes angulos concorrerão em algum ponto D. Dividão-se em partes iguaes os angulos A, B por meio de rectas que concorrerão em algum ponto E. Deste ponto abaixem-se perpendiculares sobre todos os lados do quadrilatero $ABCD$. Tres destas perpendiculares serão iguaes, a saber, EF, EG, EH, e se EI o não fôr tambem, faça-se EK igual a huma dellas. Por K conduza-se LM parallela a CD, e sejão L, M os pontos de encontro com AC, BD produzidas. $ALMB$ será o quadrilatero pedido.

Porque o angulo $L = ACD$ he supplemento de B, o quadrilatero $ALMB$ tem centro de vertices (§ 168), EK he perpendicular a LM, e $= EF = EG = EH$, logo E he o centro de lados.

180. O polygono de hum numero par de lados, e em que ha centro de vertices, tem a somma dos angulos alternados igual á somma dos outros. Fig. 66.

Divida-se o polygono $ABCDEFGH$ em quadrilateros por diagonaes, que não se cortem; o que he possivel, porque o polygono que tem centro de vertices he convexo, ou não tem angulos interiores maiores que dois rectos, sendo agudos os angulos formados pelos lados e os raios. Logo teremos

$$A + h = a + H,$$

$$g + c = b + f,$$

$$d + E = e + D,$$

equações cuja somma he

$$A + G + C + E = B + H + F + D.$$

181. O polygono de hum numero par de lados, e em que ha centro de lados, tem a somma dos lados alternados igual á somma dos outros.

Nestes polygonos os apothemas encontrão os lados entre seus extremos, o que se conclue facilmente advertindo que as rectas tiradas do centro dos lados para os vertices fazem angulos agudos com os lados.

Sejão pois G, H, I, K, L, M os pontos, em que os apothemas encontrão os lados do polygono $ABCDEF$. Fig. 67.
Será

$$AG = AM,$$

$$BG = BH,$$

$$CI = CH,$$

$$DI = DK,$$

$$EL = EK,$$

$$FL = FM,$$

equações cuja somma he

$$AB + CD + FE = AF + BC + DE.$$

182. *Polygono regular* he aquelle que tem todos os angulos iguaes, bem como todos os lados. *Angulo de polygono regular* he hum qualquer dos angulos iguaes. Cada hum destes angulos, sendo n o seu numero, he $= \frac{n-2}{n} 2r$ (§ 93).

Assim, exprimindo o angulo recto r por 90° (90 gráos), será o angulo do triangulo equilatero $= 60°$, o angulo do quadrado $= 90°$, o do pentagono regular $= 108°$, o do hexagono regular $= 120°$, o do octogono regular $= 135°$, o do decagono regular $= 144°$, e o do dodecagono regular $= 150°$.

183. No polygono regular as rectas que dividem os angulos em duas partes iguaes, e as perpendiculares que dividem os lados em duas partes iguaes, dividem tambem o polygono e o perimetro em partes iguaes, e são eixos.

Fig. 68. No polygono regular $ABCDEFG$ tire-se AM que divida ao meio o angulo A. Dobre-se o polygono por AM. Os lados AG, e AB coincidirão, por ser $GAM = BAM$ por construcção; coincidirão tambem os pontos G, e B, porque $AG = AB$ por hypothese; e tambem os pontos

F, C, porque o angulo $G=B$, e $GF=BC$; e assim por diante; finalmente coincidirão EM e DM. Logo o polygono e o perimetro são divididos em partes iguaes por AM.

Tome-se sobre o perimetro hum ponto qualquer H, e corte-se a porção do perimetro $ABCI=AGFH$. Tire-se HI, que cortará AM em algum ponto K. Dobrando a figura por AM, se achará $HK=IK$, e $HKA=IKA$; logo AM he perpendicular á corda HI no seu meio. Considerando todos os pontos H de huma parte, e os correspondentes I da outra, ter-se-hão as extremidades de todas as cordas perpendiculares a AM, e por consequencia parallelas entre si, e que são divididas em partes iguaes por AM. Logo AM he hum eixo.

Prova-se igualmente por outra sobreposição a segunda parte da proposição, isto he, dobrando a figura por NE, perpendicular no meio de AB, vê-se que o polygono, o perimetro, e as cordas parallelas a LQ ficão divididas ao meio por NE, e lhe são perpendiculares, comtanto que L e Q sejão tomadas a iguaes distancias de N sobre o perimetro.

184. O polygono regular tem centro de figura na intersecção de todos os eixos; e reciprocamente.

No polygono regular $ABCDE$ tirem-se os eixos AF, Fig. 69.
BF, que se encontrarão no interior da figura, porque d'outra sorte não dividirião em partes iguaes o polygono; seja pois F esse ponto de encontro. Tirem-se FC, FD.

No triangulo AFB he $a=b$ porque estes dois angulos são metades dos angulos do polygono proposto, logo $FA=FB$. Os triangulos FAB, FBC tendo $AB=BC$, FB commum, $b=c$, são identicos, donde $FC=FA$, e $d=a$, e logo FC he hum eixo tambem. Proseguindo desta maneira póde provar-se que todas as rectas tiradas de F aos vertices são iguaes, e eixos, logo F he centro de vertices.

De F abaixem-se FG, FH, FI perpendiculares aos lados AB, BC, CD do polygono, as quaes sendo tiradas do vertice principal dos triangulos isosceles, dividirão ao meio os lados do polygono, isto he, serão eixos.

Nos triangulos rectangulos FBG, FBH he FB commum, e $b=c$, logo $FH=FG$. Similhantemente se póde provar que $FI=FH$, e tambem que são iguaes todas as perpendiculares abaixadas de F sobre os outros lados; logo F he tambem centro de lados.

Reciprocamente, se F fôr centro de figura o polygono será regular.

Nesta hypothese será

$$FA=FB=FC,$$

e

$$FG=FH=FI,$$

logo $a=b$. Nos triangulos rectangulos FBG, FBH he FB commum, $FG=FH$, logo $b=c$. Nos triangulos FAB, FBC he FB commum, $AF=CF$, $b=c$, logo (§ 87) $AB=BC$; e da mesma maneira se prova a igualdade dos outros lados do polygono.

Pois que $a=b=c$, segue-se que a he metade do angulo ABC; e da mesma sorte se prova que $c=a$ he metade do angulo BCD, e por isso $ABC=BCD$, e seguidamente se conclue a igualdade de todos os outros angulos do polygono, que por consequencia será regular, pois está já demonstrada a igualdade dos lados.

185. O polygono que tem os lados iguaes, e centro de vertices, he regular.

Pelas supposições da proposição são isosceles e identicos os triangulos FAB, FBC, FCD, etc., logo $a=b=c=d=e=$etc.; e logo $b+c=d+e$, ou $ABC=BCD$, por onde se vê já que todos os angulos do polygono são iguaes.

186. O polygono que tem os angulos iguaes, e centro de lados, he regular.

Pelas supposições da proposição, he nos quadrilateros $FGBH$, $FHCI$ o angulo GFH supplemento de GBH, e HFI supplemento de HCI, logo GFH, HFI são iguaes; e pois que os lados destes angulos são tambem iguaes, assim como os angulos em G, H, I, por serem rectos, segue-se que os dois quadrilateros admittem duas sobreposições, das quaes se deduz $GB = BH = HC = CI$: da mesma maneira se póde achar $CI = ID =$ etc., logo $BC = CD$. Similhantemente se póde demonstrar a igualdade dos outros lados, logo o polygono he equilatero, e equiangulo, isto he, regular.

187. *Sector do polygono regular* he o triangulo formado por dois de seus raios e hum lado. *Angulo do centro do polygono regular* he o angulo do sector que tem o vertice no centro. O angulo do sector he $= \frac{4r}{n} = \frac{360^\circ}{n}$, sendo n o numero dos lados.

Assim achar-se-ha no triangulo equilatero o angulo do centro $= 120^\circ$, no quadrado $= 90^\circ$, no pentagono regular $= 72^\circ$, e no hexagono regular $= 60^\circ$.

188. O triangulo equilatero construe-se da mesma fórma que qualquer triangulo, tomando os lados iguaes.

189. O hexagono regular construe-se dividindo em duas partes iguaes cada hum dos tres angulos do centro do triangulo equilatero, e fazendo iguaes as seis rectas que sahem do centro, cujas extremidades serão os vertices do hexagono regular.

190. O dodecagono he formado do hexagono, da mesma maneira que este se fórma do triangulo equilatero. E assim, similhantemente, todos os polygonos regulares de hum numero de lados duplo do numero de lados de outro polygono que se saiba construir.

191. O quadrado está já construido; mas póde tambem construir-se com duas perpendiculares iguaes, e que se cortem em partes iguaes. Suas extremidades são os vertices do quadrado.

192. Construcção do pentagono regular.

Sejão ABC hum angulo, e AB, BC dois lados do pentagono regular. Tire-se AC. Fig. 70.

Será $ABC = 108^\circ$, logo no triangulo ABC teremos $A = C = 36^\circ$. Faça-se $ABD = 36^\circ$. Será $AD = BD$, e $DBC = 72^\circ$. Mas $C = 36^\circ$, logo $BDC = 72^\circ$, e logo o triangulo BCD he isosceles, ou $DC = BC = AB$. Os triangulos ABC, ABD são similhantes, por terem A commum, e $ABD = C$ por construcção, logo

$$AC : AB \text{ (ou } CD) :: AB \text{ (ou } CD) : AD.$$

Para achar pois o angulo do pentagono regular, divida-se huma recta AC em média e extrema razão. Sobre a parte maior CD faça-se o triangulo DCB com o lado $BC = CD$, e $DB = DA$. Tire-se AB, e será ABC o angulo procurado.

193. O angulo do centro do pentadecagono regular he $= 24^\circ$, logo he metade da differença dos angulos do centro do triangulo equilatero, e do pentagono regular.

194. Dois polygonos se dizem hum *inscripto* e outro *circumscripto*, a respeito hum do outro, quando todos os vertices do primeiro tocão todos os lados do segundo.

195. Para inscrever em hum polygono regular dado outro polygono regular em que o numero dos lados seja o duplo dos do primeiro, procederemos do modo seguinte.

Dividão-se todos os angulos do centro do polygono dado, cada hum em quatro partes iguaes, por tres rectas tiradas do centro, e terminadas no perimetro. De cada tres destas rectas despreze-se a média, e os extremos das outras serão os vertices do polygono inscripto, que se pede. Com effeito, o polygono construido terá hum numero de lados duplo dos do polygono dado, e será regular, porque tem centro de vertices, e os lados iguaes (§ 185).

196. Nos tres primeiros polygonos regulares o raio he menor que o apothema do hexagono regular equilatero com elles; e em todos os outros he maior.

Fig. 71. Seja o triangulo equilatero ABC o sector do hexagono regular.

A recta CF, perpendicular tirada de hum vertice sobre o lado opposto, será igual ao apothema deste hexagono. Tire-se BD de maneira, que divida ao meio o angulo $B = 60°$. Será $BDC = 120°$, e o triangulo BDC sector do triangulo equilatero, que tem o mesmo lado BC de hum hexagono regular; e já se vê que o raio DC desse triangulo equilatero he menor que o apothema CF do hexagono, ou que a altura do mesmo triangulo.

O centro do quadrado, que tem com o hexagono regular o lado AC commum, deve estar entre B e D, porque o seu angulo do centro $= 90 > ABC$ e $< ADC$. Esteja pois em E. Por ser $GEC = 90°$, será $EC < CG < CF$, isto he, o raio do quadrado menor que o apothema do hexagono regular equilatero com elle.

O centro H do pentagono regular deve estar entre B e E, por ser o angulo $H = 72°$. Será tambem $HCA = 54°$, logo $HCF = 24°$. Tire-se FH. A perpendicular que de F se tirasse sobre BK deveria cahir no meio I de BK, e portanto abaixo de E, por ser $EK = AK > \frac{1}{2} BK$; logo FH está entre FB e esta perpendicular; logo $FH < FB$ ou $< FA$, donde $FHA > FAH$ ou $> 6°$, logo $FHC > 78°$, por conseguinte $HFC < 78°$, e logo $HC < FC$, isto he, o raio do pentagono regular he menor que o apothema do hexagono regular equilatero com elle.

Todos os sectores dos outros polygonos regulares de hum numero de lados maior que seis, devem ter o angulo do centro $< 60°$, e por consequencia envolverão o sector ABC do hexagono, se os polygonos forem equilateros com elle; logo o raio de cada hum destes he $> BC > CF$.

197. *Polygonos semiregulares* são aquelles que teem todos os lados iguaes, e centro sómente de lados, ou aquelles que teem todos os angulos iguaes, e centro sómente de vertices.

198. Construir polygonos semiregulares.

Para a construcção dos polygonos semiregulares da primeira especie, sejão AGB, BGC, CGD, etc. todos os angulos do centro de hum polygono regular qualquer de Fig. 72.

I

numero par de lados, e que se possa construir geometricamente. Divida-se cada hum destes angulos em partes desiguaes, mas as mesmas em todos, por meio de rectas iguaes GH, GI, GK, GL, etc., e de maneira que essas partes sigão huma ordem inversa, isto he, que se a maior fica á esquerda da menor em hum angulo do centro, fique no seguinte á direita, e no seguinte á esquerda, e assim por diante; e para isto ser possivel, he necessario que o numero dos angulos do centro seja par. Pelos extremos H, I, K, etc. destas rectas iguaes tirem-se AB, BC, CD, etc. que lhes sejão perpendiculares; as quaes encontrarão os lados dos primeiros angulos, por serem necessariamente agudos os angulos que são partes dos primeiros, visto que estes primeiros não podem ser maiores que rectas em polygonos de numero par de lados.

As rectas AB, BC, CD, etc. se encontrão tambem como indica a figura nos pontos B, C, D, etc. dos lados dos primeiros angulos; porque nos triangulos GHB, GIB rectangulos por construcção, he $GH = GI$, e $BGH = BGI$; logo são identicos, sua hypothenusa commum, e o ponto B desta hypothenusa será tambem commum aos dois lados AB, BC: o mesmo se póde provar dos outros pontos, vertices deste polygono. Segue-se tambem que $BH = BI$, e póde demonstrar-se da mesma fórma que $BI = DK$, ou que todas as partes menores do perimetro são iguaes entre si, assim como que são iguaes entre si as partes maiores IC, CK, LE, etc. Mas cada hum dos lados do polygono $ABCDEF$ he composto de huma destas partes maiores e de huma das menores; logo estes lados são iguaes; e ultimamente o polygono tem centro de lados, ou são iguaes os apothemas GH, GI, GK, etc. O rhombo he o mais simples dos polygonos desta especie.

Fig. 73. Para a construcção dos polygonos semiregulares da segunda especie, tomem-se tambem os angulos ADB, BDC, CDA do centro de hum polygono regular, mas de qualquer numero de lados, e fação-se DA, DB, DC todas iguaes. Divida-se cada hum destes angulos em duas par-

tes desiguaes, mas as mesmas em todos, e em ordem directa, por meio das rectas DE, DF, DG iguaes ás primeiras. Os extremos de todas estas rectas serão os vertices de hum polygono $AEBFCG$ da segunda especie. Já pela construcção existe centro de vertices, falta só demonstrar que os angulos são iguaes. Ora os triangulos alternados ADE, BDF, CDG são identicos e isosceles, e os triangulos EDB, FDC, GDA tambem são identicos entre si e isosceles, logo $AED=DBF$, $DEB=EBD$, logo $AEB=EBF$, e da mesma sorte $EBF=BFC$, e assim por diante.

O rectangulo póde construir-se com dois angulos cada hum $=2r$.

199. De todos os triangulos sobre a mesma base, e com os vertices oppostos na mesma recta, teem menor perimetro aquelle, cujos lados fórmão angulos iguaes com esta recta.

Sejão ABC, ABD dois triangulos sobre a mesma base, e com os vertices C, D sobre a recta CD; e sejão iguaes os angulos ACE, BCD, que são formados pelos lados AC, BC do primeiro, e por DC. Fig. 74.

Produza-se BC até ser $CF=CA$. Tirem-se AF, DF, e produza-se DC até encontrar AF em E. Pois que $BCD=ACE$, e $BCD=FCE$, será $ACE=FCE$. Nos triangulos ACE, FCE he CE commum, $AC=FC$, e são iguaes os angulos comprehendidos, logo os triangulos são identicos, e portanto $CEF=CEA$, e $EF=EA$; mas além disto os triangulos FED, AED teem DE commum, logo são tambem identicos, e por consequencia $DF=DA$. Porém $BF<BD+DF$, isto he, $BC+AC<BD+AD$, logo o perimetro $AB+BC+AC<$ perimetro $AB+BD+AD$.

200. De todos os triangulos com a mesma base, e a mesma area, o isosceles he aquelle que tem menor perimetro.

Quando DC he parallela a AB, todos os triangulos sobre a base AB, e com os vertices sobre DC teem areas iguaes, e aquelle cujos lados AC, CB fazem angulos iguaes com DC ou que tem menor perimetro (§ 199) será isosceles; porque sendo então $ACE=CAB$, $DCB=CBA$, e por hypothese $ACE=BCD$, será $CAB=CBA$, isto he, o triangulo ABC isosceles.

201. De todos os triangulos com perimetro e base iguaes, he o isosceles que tem maior area.

Fig. 75. Porque o triangulo isosceles ACE com a mesma altura ou area de ACD tem o perimetro menor (§ 200), e o triangulo isosceles ABC igual em perimetro a ACD, involverá AEC, ou será maior que elle, ou que ACD.

202. De todos os triangulos com a mesma base, e os angulos oppostos a esta iguaes, o isosceles tem maior area.

Os triangulos ABC, ADC tenhão commum a base AC,
Fig. 76. e iguaes os angulos B, D; e seja o primeiro isosceles. Será $BCA=BAC$, logo $BCA>DAC$, e logo $EA>EC$; além disto os triangulos AEB, EDC são similhantes, por ser $B=D$ e $BEA=DEC$, e por consequencia $BAE=ECD$; logo a area $AEB>ECD$, porque o primeiro triangulo tem hum lado maior adjacente a angulos iguaes aos angulos do segundo adjacentes a hum lado menor. Assim juntando a cada hum o triangulo AEC, resulta a area do triangulo $ABC>$ area ADC.

203. Nas mesmas hypotheses, o triangulo isosceles tem tambem o perimetro maior.

Pois que nos triangulos similhantes BEA, DEC, he $AE>EC$, seja $AE=rEC$: será $r>1$. Logo

$$AB+BE-AE=r(DC+DE-EC):$$

logo

$$AB+BE-AE>DC+DE-EC,$$

ou

$$AB+BE+EC>DC+DE+AE:$$

e portanto

$$AB+BC+AC>DC+AD+AC.$$

204. De todos os triangulos isoperimetros com a mesma base, o isosceles he o que tem maior o angulo opposto á base.

Porque o triangulo isosceles que tivesse o angulo opposto á base igual ao angulo tambem opposto á base de hum dos outros triangulos, teria o perimetro maior, pela proposição precedente; logo envolveria o triangulo isosceles da proposição actual, e por consequencia teria o angulo do vertice menor do que o deste.

205. De todos os triangulos que se podem formar, sendo dados sómente dois lados, tem maior area aquelle em que estes dois lados são perpendiculares entre si.

Nos triangulos EBC, ABC, DBC, que teem o lado Fig. 77.
BC commum, e iguaes os lados EB, AB, DB, o que tem maior altura he o triangulo ABC, em que AB he perpendicular a BC; logo he o triangulo maior.

206. Sendo dado hum angulo, e hum ponto dentro delle, o triangulo de menor area, que huma recta tirada por esse ponto póde fazer com os lados do angulo, he aquelle em que o dito ponto está situado no meio da recta.

Sejão BAC o angulo, e D o ponto dado. Fig. 78.

Tire-se DE parallela a AB, e faça-se $EC = AE$. Por C e D tire-se CB; será D o meio de CB, porque sendo ED e AB parallelas, he $AE : EC :: BD : BC$, mas $AE = EC$, logo $BD = DC$. Tire-se por D outra recta FG terminada tambem nos lados do angulo proposto.

Digo que a area do triangulo $ABC <$ area AFG. Porque sendo o angulo $DCG > CBA$, $GDC = BDF$, e $CD = BD$, será a area $DCG >$ area BDF; juntando pois a cada huma a do quadrilatero $ACDF$, resulta area $BAC <$ area FAG. Se a recta tirada por D termina entre A e C, a demonstração he a mesma, mudando sómente as letras.

207. De todas as rectas tiradas por hum ponto situado na recta que divide ao meio hum angulo, e terminadas em seus lados, a menor he aquella, que faz com estes lados hum triangulo isosceles, de que ella he a base.

Esteja D na recta AD, que divide ao meio o angulo Fig. 79.

BAC. Por D tire-se a recta BC perpendicular a AD, a qual encontrará os dois lados do angulo, porque suas metades são angulos agudos. Serão identicos os triangulos ADB, ADC equiangulos entre si, logo $AB = AC$ e $BD = CD$, ou será isosceles o triangulo ABC cuja area $< AEF$ (§ 206). Abaixe-se de A sobre a base deste triangulo AEF a perpendicular AG, e produza-se esta base FE, se fôr necessario: será $AG < AD$ altura do triangulo isosceles, logo o triangulo maior AEF tem huma altura menor, e por isso he preciso que tenha a base $EF > BC$.

208. De todos os polygonos formados com lados dados e hum arbitrario, tem maior area aquelle que tem centro de vertices situado nesse ultimo lado.

Fig. 80. Seja $ABCDEF$ o maior dos polygonos formados pelos lados dados AB, BC, CD, DE, EF, e o ultimo AF arbitrario. Tirem-se as diagonaes DA, DF.

Se o angulo ADF não fosse recto, então, conservando as partes $ABCD$, DEF taes como são, sería possivel augmentar a area ADF (§ 205), e por consequencia a do polygono inteiro, fazendo recto o angulo ADF; mas esta area não póde ser augmentada, porque a suppozemos chegada ao seu maximo, logo ADF he já hum angulo recto, e igualmente o são os angulos não descriptos ABF, ACF, AEF. Logo cada hum dos vertices B, C, D, E teem o seu centro com os vertices A, F no meio G de AF (§ 166). Digo mais que o lado não dado AF he unico neste caso de ser maxima a area do polygono.

Porque tirando os raios GB, GC, GD, GE, vê-se que o polygono he composto sómente de triangulos isosceles, e que a somma dos angulos, que teem os vertices em G, a saber

$$AGB + BGC + CGD + DGE + EGF = 2r.$$

Logo, suppondo em outro polygono maximo outro lado diverso de AF, sua metade seria ou maior ou menor que AG, e os novos triangulos isosceles terião todos os seus angulos no centro menores ou maiores que os actuaes, e por conseguinte sua somma não faria dois rectos, como he necessario.

Vê-se tambem que se póde mudar a ordem dos lados dados AB, BC, etc. porque o lado AF será sempre o mesmo, assim como a area do polygono maximo he a mesma.

209. Entre os polygonos formados com todos os lados dados, tem maior area o que tem centro de vertices.

Seja $ABCDEFG$ hum polygono com o centro H de vertices, e $abcdefg$ outro com os mesmos lados, isto he, $ab=AB$, $bc=BC$, $cd=CD$, etc. Digo que o primeiro tem maior area do que o segundo, se este não tiver centro de vertices. Fig. 81

Pelo centro H e hum dos vertices E tire-se $EI=2EH$, e tirem-se tambem AI, BI. Sobre $ab=AB$ faça-se o triangulo abi identico com ABI, e disposto da mesma maneira, e tire-se ei.

O ponto I tem o mesmo centro H com E pela construcção, logo o polygono $EFGAI$, que tem centro de vertices situado em EI, e os lados iguaes aos lados do polygono $efgai$, exceptuando EI, ei, tem area maior, ou igual á deste ultimo polygono, se este tambem tiver centro de vertices situado em ei. Por igual razão a area $EDCBI > edcbi$, pois não se póde suppor ainda este polygono com centro de vertices situado em ei, como o primeiro $efgai$, porque então o polygono inteiro $abcdefg$ teria esse centro, contra a hypothese. Por consequencia será a area $EFGAIBCD > efgaibcd$, e tirando de huma e de outra cada huma das areas iguaes ABI, abi, conclue-se que he a area $ABCDEFG > abcdefg$.

Se o centro do primeiro polygono estiver fóra do perimetro, a construcção e a demonstração serão analogas.

Se o centro estiver em hum dos lados, a demonstração do theorema actual deduz-se immediatamente do § 208.

Demonstra-se, tão facilmente como na proposição precedente, que o raio deste polygono maximo, assim como a sua area, não mudão, qualquer que seja a ordem dos lados.

210. De todos os polygonos isoperimetros, e de igual numero de lados, o regular tem maior area.

Fig. 82. Nenhum polygono $ABCDE$ com as condições do theorema, póde ser maximo sem ter os lados iguaes. Porque se AB, BC forem desiguaes, tire-se AC, e forme-se sobre ella o triangulo isosceles AFC, em que seja

$$AF = CF = \frac{1}{2}(AB + BC).$$

Será a area $AFC > ABC$, logo o novo polygono $AFCDE$ tem o mesmo perimetro e o mesmo numero de lados, e tem maior area que $ABCDE$, o qual por conseguinte não póde ser supposto o maximo.

Porque o polygono maximo deve ter os lados iguaes, e centro de vertices, segue-se que he regular (§ 185).

211. Dos polygonos com a mesma area, e o mesmo numero de lados, o regular he o que tem menor perimetro.

Porque se tivesse hum perimetro igual, teria maior area, contra a supposição, e se tivesse perimetro maior, seria ainda maior a area.

212. De todos os polygonos regulares isoperimetros, o que tem maior numero de lados tem maior area.

Fig. 83. De hum dos vertices A do polygono regular $ABCD$ tire-se huma corda AE a hum dos pontos de hum lado do angulo immediato B. Será $AB > BE$. Faça-se sobre AE o triangulo isosceles AFE isoperimetro com ABE. Então o polygono $AFECD$ tem hum perimetro igual ao de $ABCD$ e hum lado de mais, e tem maior area do que $ABCD$, por ser o triangulo $AFE > ABE$. Mas o polygono regular isoperimetro e do mesmo numero de lados que $AFECD$ he ainda maior (§ 210), logo a proposição

he verdadeira no polygono regular, que tem hum lado mais, e será verdadeira tambem passando para outro que tenha hum lado mais do que este, e assim por diante.

213. De todos os polygonos regulares com a mesma area o que tem maior numero de lados tem menor perimetro.

Porque se o seu perimetro fosse igual ou maior, sua area seria tambem maior, contra a supposição.

J

GEOMETRIA RECTILINEA NO ESPAÇO.

LIVRO 3.º

Dos Polyedros que não circumscrevem espaço.

214. POLYEDRO he o systema de planos, rectas, e pontos situados em mais de hum plano. Os planos exteriores do systema chamão-se *faces*. Os encontros ou intersecções das faces são chamadas *arestas*, ou *lados*.

215. Dois planos infinitos distinctos, que teem hum ponto commum, cortão-se mutuamente.

Porque tirando duas rectas quaesquer pelo ponto commum, cada huma em seu plano, se os planos se não cortassem, tambem as rectas, que n'elles estão, se não cortarião: absurdo.

216. A intersecção de dois planos he huma linha recta.

Porque se houvessem nesta intersecção tres pontos, que não estivessem em linha recta, os planos se confundirião (§ 19), contra a supposição de que elles se cortão; e pois que os planos são continuos, tambem na sua intersecção não ha interrupção; logo esta intersecção he huma linha recta.

217. Se huma recta e hum plano infinitos teem hum só ponto commum cortão-se.

Porque d'outro modo, a recta tirada no plano pelo ponto commum não cortaria a proposta: absurdo.

218. A intersecção de huma recta e de hum plano he hum ponto.

Porque se teem dois pontos communs, existe toda a recta no plano (§ 14), contra a supposição.

219. *Diedro infinito* he cada huma das duas porções do espaço, separadas por dois planos, que começão de huma recta infinita.

*

220. *Angulo diedro*, ou simplesmente *diedro*, he a figura do diedro infinito ao sahir da aresta. O diedro indica-se com quatro letras, das quaes as duas medias estão na aresta, e cada huma das outras duas em sua face, e entende-se o diedro, no qual está a recta que une os pontos designados pelas letras extremas. Em caso de duvida, huma quinta letra, escripta junto de hum ponto fóra das faces, mostrará que o diedro de que se trata, he aquelle dentro do qual ella existe.

221. Os diedros cada hum dos quaes tem as faces em direitura são iguaes.

Fig. 84. Os diedros $ABCDE$, $FGHIK$ tenhão ambos as faces em direitura, isto he, sejão $ABCD$, $FGHI$ planos.

Faça-se a sobreposição do polyedro $ABCDE$ ao polyedro $FGHIK$, pondo a aresta BC sobre a aresta GH, e algum ponto A de ABC sobre algum ponto L de FGH. A face BCD se confundirá no plano GHI. E pois que, sem alterar os dois systemas, as arestas e faces dos dois diedros coincidem, he porque elles erão iguaes.

222. *Plano perpendicular a outro* he aquelle que faz com o segundo, da mesma parte deste, dois diedros iguaes. Cada hum destes diedros chama-se *recto*.

223. Todos os diedros rectos são iguaes.

Porque são metades d'angulos diedros com as faces em direitura, os quaes são iguaes.

224. Dois planos perpendiculares a hum terceiro, e partindo de huma recta, que seja extremo deste, estão em direitura.

Porque fazem com o terceiro dois diedros rectos, ou fórmão o diedro que tem as faces em direitura.

225. Chama-se *diedro agudo* aquelle que he menor do que o recto, e *obtuso* o maior. Dois diedros são supplementos hum do outro, quando juntos fazem a somma de dois diedros rectos. *Diedros adjacentes* são aquelles que teem a aresta commum, huma face commum, e as outras duas em sentido opposto.

226. Dois diedros adjacentes são supplementos hum do

outro, quando as faces não communs estão em direitura; e reciprocamente.

Sejão $ABCE$, $EBCD$ os dois diedros com a aresta BC, e a face BCE communs, e estando as outras duas no plano ABD. Seja BCF o plano perpendicular a ABD passando pela recta BC. Serão rectos os diedros $ABCF$, $FBCD$. Mas temos Fig. 85.

$$EBCD+EBCA=FBCD+FBCE+EBCA$$

$$=FBCD+FBCA,$$

logo os dois diedros adjacentes juntos valem os dois diedros rectos.

Reciprocamente, se os dois diedros, que teem huma aresta commum, duas faces em direitura, e as outras duas dirigidas para a mesma parte, são juntos iguaes a dois rectos, segue-se que elles enchem o espaço do diedro birectangulo, e que as outras duas faces se confundem, ou que os diedros são adjacentes.

227. *Diedros oppostos na aresta* são aquelles, em que as faces de cada hum são a continuação das faces do outro.

228. Os diedros oppostos na aresta são iguaes; e reciprocamente.

Seja AB a intersecção dos planos BCD, BEF. Será ABF continuação de ABE, e ABC de ABD. O diedro $CABE$ he ao mesmo tempo supplemento do diedro $CABF$, e do diedro $EABD$ opposto ao ultimo na aresta, logo $CABF=EABD$. Fig. 86.

Reciprocamente, se os dois planos ABE, ABF concorrem com o plano CDB em AB, fazendo iguaes os diedros $FABC$, $DABE$ não adjacentes, será

$$FABC+CABE=DABE+CABE=2r.$$

Logo (§ 226) FAB he continuação do plano ABE, e os dois diedros são oppostos na aresta.

229. *Angulo solido* he hum dos dois polyedros que compõem o espaço, formados por varios angulos planos adjacentes, dos quaes não haja dois no mesmo plano, e nos quaes todos os lados sejão communs a dois. Quando se falla de hum angulo solido entende-se o menor dos dois, que tem as mesmas faces. *Angulo polyedro* he a figura do angulo solido ao sahir do vertice.

230. *Angulo polyedro convexo* he aquelle, cujas faces não podem ser encontradas em mais de dois pontos por huma recta qualquer que atravesse o espaço encerrado ou antes cortado por elle. *Angulos polyedros symetricos* ou *conjugados* são aquelles que teem os angulos planos iguaes cada hum a cada hum, e na mesma ordem ou directa ou inversa, e que demais teem iguaes, cada hum a cada hum, os diedros formados por angulos iguaes. *Angulo polyedro regular* he aquelle que tem todos os seus angulos planos, e diedros iguaes.

231. *Angulo triedro* ou sómente *triedro* he o que tem tres faces. Designa-se por quatro letras, a primeira no vertice, e cada huma das outras tres em huma aresta. O angulo polyedro de quatro faces, ou o angulo *tetraedro*, he designado por cinco letras, a primeira no vertice, e cada huma das outras em cada huma das arestas. Da mesma maneira se designa por seis letras o angulo *pentaedro;* e assim dos outros angulos polyedros.

232. *Partes do triedro* são os tres angulos das faces, e os tres diedros formados por ellas.

233. *Triedros oppostos no vertice* são aquelles, em que as arestas de hum são continuações das arestas do outro.

234. Dois triedros oppostos no vertice teem as partes iguaes, cada huma a cada huma, mas em ordem inversa.

Fig. 87. Produzão-se as arestas do triedro $ABCD$ no sentido do vertice, e teremos as arestas do triedro $AEFG$, seu opposto no vertice.

Os angulos FAE, FAG, EAG são iguaes aos seus respectivamente oppostos BAC, CAD, BAD; e os diedros $FAEG$, $FAGE$, $EAFG$ aos diedros oppostos nas arestas $CABD$, $CADB$, $BACD$, cada hum a cada hum. Mas estes angulos e estes diedros seguem huma ordem inversa em cada hum dos triedros.

235. Dois angulos das faces, e o diedro comprehendido por elles, determinão o triedro.

Nos triedros $ABCD$, $EFGH$ sejão $BAC = FEG$, $CAD = GEH$, $BACD = FEGH$; e estejão HEF, DAB postos no mesmo plano. Fig. 83.

Primeiramente, fiquem EG, AC situadas da mesma parte a respeito deste plano. Applique-se o vertice A sobre o vertice E, a aresta AC sobre a aresta EG, e o angulo CAB sobre o angulo GEF. Cahirá a aresta AB sobre EF, e o angulo CAD sobre GEH, porque o diedro $BACD = FEGH$. Logo AD coincidirá com EH. E porque as tres arestas se ajustão, os triedros são identicos.

Estejão agora EG, AC em posições oppostas a respeito do plano HEF. Então no triedro $EIKL$, verticalmente opposto a $EFGH$, ficará EK da mesma parte que AC a respeito do plano HEF, e teremos

$$IEK = GEF = BAC;$$

$$LEK = GEH = CAD;$$

$$LEKI = FEGH = BACD.$$

Logo os triedros $ELKI$, $ABCD$ são identicos, como fica demonstrado. Por consequencia são iguaes as partes dos triedros propostos $ABCD$, $EFGH$.

236. Hum triedro que tem angulos iguaes tem iguaes os diedros oppostos.

Suppondo os mesmos dados que na proposição precedente, AC, GE do mesmo lado do plano HEF, e demais $BAC = CAD$, e por conseguinte

$$FEG = GEH = IEK = KEL;$$

então he possivel applicar o triedro $ABCD$ sobre o triedro $EFGH$, começando a sobreposição por CAB e GEF, como se tem feito, o que provará que o diedro $CABD = GEFH$. Póde tambem applicar-se o triedro $ABCD$ sobre o triedro $EIKL$, verticalmente opposto a $EFGH$, começando por applicar CAB sobre KEL, o que provará que o diedro $CADB = KEIL$. Mas $KEIL = GEFH$, logo $CADB = CABD$, isto he, no triedro $ABCD$, são iguaes os diedros oppostos aos angulos iguaes BAC, CAD. Se além disto fôr $CAB = DAB$, teremos tambem

$$CADB = BACD.$$

237. Dois diedros com o angulo adjacente determinão as outras partes do triedro.

Nos triedros $ABCD$, $EFGH$ sejão $CBAD = GFEH$, $CADB = GEHF$, $DAB = HEF$.

Colloquem-se DAB, HEF no mesmo plano, e estejão primeiramente AC, EG da mesma parte a seu respeito. Applique-se DAB sobre HEF. Cahirá o plano CAB sobre GEF, e DAC sobre HEG, por causa da igualdade dos diedros respectivos. Logo AC, que era commum ás faces DAC, BAC, será commum ás faces HEG, FEG, isto he, AC coincidirá com EG. E porque sem alterar os triedros, suas arestas se ajustão, elles são identicos.

Estejão agora AC, EG oppostas a respeito do plano HEF. Então no triedro $EIKL$ opposto de $EFGH$ estarão EK, AC da mesma parte a respeito do mesmo plano HEF. Nos triedros $ABCD$, $EIKL$ teremos portanto $CABD = KEIL$, $CADB = KELI$, $DAB = IEL$. Applicando pois A sobre E, AB sobre EI, BAD sobre IEL, cahirá CAB sobre KEI, CAD sobre KEL, e logo AC sobre EK. Logo são identicos os triedros $ABCD$, $EIKL$, e por conseguinte iguaes as partes dos triedros propostos $ABCD$, $EFGH$.

238. O triedro que tem diedros iguaes tem iguaes os angulos oppostos.

Suppondo os mesmos dados que na proposição precedente, AC, EG da mesma parte do plano HEF, e demais $CABD = CADB$, e por conseguinte

$$GEFH = GEHF = KEIL = KELI,$$

he possivel então sobrepôr o triedro $ABCD$ a $EFGH$, applicando AD sobre EH, DAB sobre HEF, como se tem feito, o que prova que $CAB = GEF$; e tambem se póde sobrepôr $ABCD$ a $ELKI$, applicando AD sobre EI, e DAB sobre IEL, o que provará que $DAC = IEK$, ou $DAC = FEG$; logo

$$DAC = CAB.$$

239. Os tres angulos determinão as outras tres partes do triedro.

Nos triedros $ABCD$, $EFGH$ sejão $BAC = FEG$, $BAD = FEH$, $CAD = GEH$. Primeiramente, sejão AC, EG oppostas a respeito do plano DAB, HEF. Applique-se o angulo DAB ao angulo HEF, e seja EM a posição de AC. Tire-se o plano GEM.

No triedro $EFMG$ será $FEGM = FEMG$ por ser

$$MEF = CAB = GEF.$$

No triedro $EHMG$ será $HEGM = HEMG$ pela mesma razão. Logo o diedro $HEMF$, ou $DACB = HEGF$ por serem sommas ou differenças dos diedros iguaes, ou por serem os mesmos diedros iguaes. Por conseguinte os triedros propostos $ABCD$, $EFGH$ teem todas as partes correspondentemente iguaes, porque teem $DAC = HEG$, $BAC = FEG$, $DACB = HEGF$ (§ 235).

Estejão agora AC, EG da mesma parte do plano $DABHEF$. Então EK, AC serão oppostas a respeito do mesmo plano. Applique-se A sobre E, AD sobre EL, DAB sobre LEI, e serão ainda oppostas EK, AC; e igualmente se provará que os triedros $ABCD$, $ELKI$ teem todas as suas partes iguaes, cada huma a cada huma, logo tambem são iguaes as partes dos triedros propostos $ABCD$, $EFGH$, isto he, aquellas que são oppostas a partes iguaes.

240. No triedro hum angulo qualquer he menor que a somma dos outros dois.

Fig. 89. No triedro $ABCD$ seja o angulo BAC não menor que cada hum dos outros angulos.

Por dois pontos tomados sobre os lados deste angulo tire-se a recta BC. Com o vertice A, e hum destes lados AB, e para a parte do outro, faça-se o angulo $BAE = BAD$. O lado AE encontrará BC entre B e C, porque BAC não he menor que BAD. Corte-se $AD = AE$, e tirem-se DB, DC.

Será o triangulo $BAD = BAE$ por construcção, por conseguinte $BD = BE$. Mas

$$BD + DC > BC,$$

logo $DC > EC$. Nos triangulos DAC, EAC he $AD = AE$, AC commum, e $DC > EC$, logo (§ 80) $DAC > EAC$, e logo

$$BAD + DAC > BAC.$$

E porque os dois angulos não maiores que o terceiro, são juntos maiores do que elle, será tambem cada hum delles junto com o terceiro maior do que o outro.

241. Em hum angulo polyedro qualquer angulo he menor que a somma de todos os outros.

Designem-se por a_1, a_2, a_3, $\cdots$ a_n os angulos do angulo polyedro, e por d_1, d_2, $\cdots$ d_{n-2} os das secções diagonaes, as quaes teem a primeira aresta de a_1 commum a todas. Será o primeiro angulo do polyedro junto com o segundo maior que o angulo da primeira secção diagonal; o desta com o seguinte do polyedro maior que o da segunda secção diagonal, e assim por diante; e finalmente o angulo da ultima secção diagonal com o penultimo do polyedro maior que o ultimo deste, isto he, será

$$a_1 + a_2 > d_1;\ d_1 + a_3 > d_2;\ d_2 + a_4 > d_3 \cdots$$

$$d_{n-2} + a_{n-1} > a_n;$$

desigualdades das quaes resulta que a somma dos primeiros membros he maior que a somma dos segundos, e tirando os termos communs, teremos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} > a_n.$$

242. A somma dos angulos do angulo polyedro exterior he maior que a somma do interior, se elles tiverem o mesmo vertice, e o interior fòr convexo.

Produzão-se todas as faces do interior, se fòr necessario, até encontrarem o exterior, e todas no mesmo sentido. Formar-se-hão angulos polyedros compostos de hum angulo, continuação de hum angulo do polyedro interior, de hum segundo que he o angulo immediato do interior mais a sua continuação, e de huma parte da superficie do exterior. Sejão pois n o numero dos angulos do interior, $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ estes angulos, $c_1, c_2, c_3, \cdots c_n$ suas continuações, $p_1, p_2, p_3, \cdots p_n$ as partes interceptadas da superficie do angulo polyedro exterior: teremos pois a seguinte serie de desigualdades

$$c_1 + p_1 > a_2 + c_2,$$

$$c_2 + p_2 > a_3 + c_3,$$

$$c_3 + p_3 > a_4 + c_4,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n + p_n > a_1 + c_1;$$

logo

$$p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n>a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

243. No triedro ao diedro maior he opposto maior angulo; e reciprocamente.

No triedro $ABCD$, seja $BADC>DABC$; digo que $BAC>DAC$.

Pois que $BADC>DABC$, existirá hum plano DAE, que fará $BADE=DABC$, e que cortará BAC n'huma linha AE. Será $BAE=DAE$ (§ 238), logo

$$BAE+EAC=BAC=DAE+EAC.$$

Mas

$$DAE+EAC>DAC \text{ (§ 240)},$$

logo

$$BAC>DAC.$$

Demonstra-se a proposição inversa imitando o que se disse no § 67.

244. No triedro o supplemento de hum diedro qualquer he maior que a differença dos outros dois.

No triedro $ABDE$ seja $EBAD>EADB$. Existirá hum plano DAC, que fará $CADB=EBAD$, e encontrará BAE (§ 215) e seja AC esta intersecção.

Será $DAC=BAC$, logo $DAC>EAC$, e por conseguinte $CAED>CADE$.

Mas $CAED$ he o supplemento de $DAEB$, e

$$CADE=EBAD-EADB,$$

logo a proposição he verdadeira.

245. Em dois triedros que teem dois angulos iguaes, cada hum a cada hum, aquelle que tem maior o diedro comprehendido por estes angulos, tem tambem maior o terceiro angulo; e reciprocamente.

Fig. 90. Nos triedros $ABCD$, $AECD$ que teem CAD com-

mum, seja $BAC = EAC$, e $BACD > EACD$. Digo que he

$$BAD > EAD.$$

Porque ou EA cahe no angulo BAD, e então a asserção he evidente, ou cahe fóra ou dentro de triedro $ABCD$.

Se EA cahe fóra, seja AF a intersecção de CAE e BAD. Será (§ 240)

$$FAC + FAB > BAC, \text{ e } FAE + FAD > EAD;$$

logo

$$(FAC + FAE) + (FAB + FAD) > BAC + EAD,$$

ou

$$CAE + BAD > BAC + EAD,$$

e, tirando $CAE = BAC$, teremos

$$BAD > EAD.$$

Se EA cahe dentro do triedro $ABCD$, será

$$BAC + BAD > EAC + EAD,$$

mas $BAC = EAC$; logo

$$BAD > EAD.$$

Quando os triedros se não podem pôr para a mesma parte do angulo commum, póde fazer-se a demonstração por meio do triedro opposto a hum dos dois propostos.

A demonstração da inversa, ou de que sendo, com as outras condições, $BAD > EAD$, he $BACD > EACD$, póde fazer-se como a do § 80.

246. A recta que he perpendicular sobre outras duas

na sua intersecção, he tambem perpendicular a todas as rectas tiradas pela intersecção, e no plano das duas segundas.

Fig. 91. Seja a recta AB perpendicular ás duas CE, DF na sua intersecção A. Por A e no plano das duas rectas CE, DF tire-se huma recta qualquer GH. Digo que AB he perpendicular a GH.

Pois que os triedros $ABCD$, $ABEF$ teem $CAD = FAE$, verticalmente oppostos, e $DAB = BAF$, $CAB = BAE$ por serem rectos estes quatro angulos, será $BADG = BAFH$. Os triedros $ABDG$, $ABFH$ teem $BADG = BAFH$, $DAB = BAF$, $DAG = FAH$, logo $BAG = BAH$, e logo AB he perpendicular a GH, e da mesma fórma a qualquer outra recta tirada por A, e no plano CAD.

247. Todas as rectas perpendiculares a outra em hum ponto commum estão no plano de duas quaesquer dellas.

Sejão CE, DF, AG perpendiculares a AB no ponto A.

Porque os planos CAD, GAB teem o ponto A commum, cortão-se em huma recta AH. Será recto BAH (§ 246); mas BAG he tambem recto, e AH está no plano GAB, logo GH he huma só recta, e porque huma parte AH está no plano CAD, segue-se que GH está toda neste plano.

Da mesma maneira se prova, que qualquer outra recta perpendicular a AB em A está no plano das duas CE, DF.

248. A recta que faz angulos iguaes, em hum ponto commum, com outras tres, que estejão em hum plano, está em plano perpendicular ao de todas as tres.

As rectas CE, DF, GH estejão todas no plano CAD, e fazendo angulos iguaes com AB no ponto A.

Em cada hum dos triedros $ABCD$, $ABCG$, $ABDG$ ha dois angulos iguaes, logo são iguaes os diedros oppostos, a saber, $BACD = BADC$, $BACD = BAGC$, $BADC = BAGD$, logo $BAGC = BAGD$, logo o plano BAG he perpendicular a CAD, e por conseguinte tambem BAC, BAD são perpendiculares a CAD.

249. *A perpendicular a hum plano* he a recta que no ponto de encontro he perpendicular a todas as rectas tiradas por esse ponto, e nesse plano.

250. Por huma recta situada em hum plano tirar o plano perpendicular ao primeiro.

Pelo ponto B da recta AB, dada de posição e no plano proposto, tire-se CD perpendicular a AB; e em outro plano, que passe por CD, e do ponto B tire-se BE perpendicular a CD. Digo que o plano ABE he perpendicular ao plano ACD. Fig. 92.

Pois que nos triedros $BACE$, $BADE$ sendo ABE commum, e

$$ABC = ABD = CBE = EBD,$$

todos angulos rectos por construcção, serão iguaes os diedros $EBAC$, $EBAD$, e por conseguinte ABE he perpendicular ao plano proposto ACD.

251. Todos os planos, nos quaes se acha huma recta perpendicular a outro plano, são tambem perpendiculares a este plano.

Seja a recta BE perpendicular ao plano ACD proposto. Tire-se por BE hum plano qualquer ABE, e seja AB sua intersecção com o proposto. Por B e no plano ACD tire-se CD perpendicular a AB.

Os triedros $BCAE$, $BDAE$ teem ABE commum, $CBE = DBE$ por hypothese (§ 249), e $ABC = ABD$ por construcção, logo as outras partes são iguaes, logo $EBAC = EBAD$, logo estes dois diedros são rectos, e o plano ABE, que he hum qualquer d'aquelles em que está BE, será perpendicular a ACD.

252. A intersecção de dois planos perpendiculares a hum terceiro he tambem perpendicular a este.

Sejão os planos ABE, CDE ambos perpendiculares ao plano ACD. Digo que a intersecção BE dos primeiros he perpendicular a ACD.

Porque todos os diedros $EBAC$, $EBCA$, $EBAD$, $EBDA$ são iguaes por serem rectos, e logo nos triedros

BACE, *BADE* serão $EBC = ABE$, $EBD = ABE$, logo $EBC = EBD$, logo são rectos, e por consequencia *ABE* he recto tambem. Logo (§ 246) *BE* he perpendicular ao plano *ABD*, ou *ACD*.

253. Se huma recta he perpendicular á intersecção de dois planos, perpendiculares entre si, e se essa recta está em hum dos planos, será perpendicular ao outro.

Sejão os planos *ACD*, *ABE*, cuja intersecção he *AB*, perpendiculares entre si, e seja *BE*, que está em hum delles, perpendicular a *AB*. Digo que *BE* he perpendicular ao plano *ACD*.

Por *B* tire-se no plano *ACD*, *CD* perpendicular a *AB*. Os triedros *BCAE*, *BDAE* teem *ABE* commum, $ABC = ABD$ por construcção, $EBAC = EBAD$ por hypothese, logo $CBE = DBE$, logo estes dois angulos são rectos, mas tambem *ABE* he recto por hypothese, logo *BE* he perpendicular a *ACD*.

254. A recta que faz angulos iguaes com outras tres, que estão em hum mesmo plano e tem hum ponto commum, he perpendicular a todas tres.

Fig. 91. Está demonstrado (§ 248) que neste caso os tres planos *BAC*, *BAG*, *BAD* são todos perpendiculares ao plano *CAD*, logo (§ 252) sua intersecção *AB* tambem o he.

255. Dois angulos, de que hum sómente he recto, com o diedro opposto a este, determinão o triedro.

Fig. 93. No triedro *BDAE* sejão dados *ABE* não recto, *ABD* recto, e o diedro opposto *ABED*. Digo que não póde existir outro triedro diverso com estes dados.

Porque, se he possivel, seja *BACE* hum outro triedro, que tenha com *BADE* o angulo *ABE* commum, o diedro $ABED = ABEC$, e recto o angulo *ABC*, ou igual a *ABD*. Será então *AB* perpendicular ao plano *CDE*, e logo *ABE* he recto, contra a supposição.

256. Dois diedros, dos quaes hum só he recto, com o angulo opposto a este determinão o triedro.

No triedro *BADE* sejão dados *ABED* não recto, *ABDE* recto, e o angulo opposto *ABE*.

Se he possivel, seja $BACE$ outro triedro, que tenha com $BADE$ communs o angulo ABE, o diedro $ABED$ ou $ABEC$, e recto o diedro $ABCE$. Serão então ABC, ABD dois planos perpendiculares ao plano CDE, logo (§ 252) tambem AB perpendicular a este plano, logo (§ 251) o plano ABE perpendicular tambem a CDE, e logo o diedro $ABED$ recto, contra a supposição.

257. Se duas rectas existentes em dois planos perpendiculares forem tambem entre si perpendiculares, huma dellas, pelo menos, será perpendicular ao plano em que não existe, e á intersecção dos dois planos.

Sejão os dois planos ABE, ACD perpendiculares entre si; e BE que está em hum, e CD que está no outro tambem perpendiculares entre si. Digo que se BE não fôr perpendicular a BA, será CD perpendicular ao plano ABE e por conseguinte a AB. Fig. 92.

Porque nos triedros $BACE$, $BADE$ he ABE commum, $CBE = DBE$ ambos rectos por hypothese, e os diedros oppostos a estes angulos são tambem iguaes e rectos por hypothese, isto he, $EBAC = EABD$, logo (§ 255) os triedros são identicos, donde $ABC = ABD$, e estes dois angulos serão rectos, logo CD faz angulos rectos com BA e BE, e por isso he perpendicular ao plano ABE, e a AB.

258. Se de hum ponto tirarmos huma perpendicular e huma obliqua a hum plano, e unirmos os dois pontos em que estas linhas encontrão o mesmo plano, a recta que existir no mesmo, e fôr perpendicular á linha de união, será perpendicular á obliqua; e reciprocamente.

Seja DA a perpendicular e DB a obliqua ao plano ABC, e AB a linha de união dos pontos em que a perpendicular e a obliqua encontrão o plano ABC; o plano ADB será perpendicular ao plano ABC (§ 251). Se suppozermos que he BC perpendicular a AB, será (§ 253) BC perpendicular ao plano DAB, e por conseguinte á recta DB. Reciprocamente, se suppozermos que he BC perpendicular a DB, não sendo esta perpendicular ao Fig. 94.

plano ABC, será (§ 257) BC perpendicular ao plano DAB, e por conseguinte a AB.

259. De hum ponto dado em hum plano não se póde levantar mais do que huma perpendicular a este plano.

Fig. 93. Se he possivel, sejão BC, BD perpendiculares ao plano ABE. Seja AB a intersecção do plano CBD, e do proposto ABE. Será CBA recto, e DBA tambem recto nesta supposição: absurdo.

260. A recta perpendicular a hum plano está em todos os planos perpendiculares ao proposto tirados pelo pé da perpendicular.

Seja ABC o plano proposto, ao qual BE he perpendicular, e seja CBD qualquer dos planos perpendiculares a ABC, que elle corta em BC, passando pelo pé B da perpendicular.

Faça-se no plano proposto o angulo recto CBA. Porque AB he perpendicular, por construcção, á intersecção dos planos perpendiculares ABC, BCD, será (§ 253) AB perpendicular ao plano BCD, logo ABD he recto; e como ABE he recto tambem por hypothese, concluir-se-ha (§ 247), que a recta BE está situada no plano CBD.

261. As intersecções de tres planos perpendiculares entre si são tambem perpendiculares entre si; e reciprocamente.

Fig. 95. Porque os dois planos ABC, CBD são perpendiculares a ABD, será a intersecção CB dos primeiros perpendicular ao terceiro, logo CB he perpendicular ás duas AB, BD; e porque CBD, ABD são perpendiculares a ABC, será igualmente BD perpendicular a AB.

Reciprocamente, se cada huma das intersecções he perpendicular ás outras duas, ella o será ao seu plano, e cada hum dos dois planos que por ella passão será perpendicular ao outro.

262. De hum ponto para hum plano não se póde tirar mais do que huma perpendicular, e esta he ao mesmo tempo a menor recta que ha entre elles.

Se he possivel, sejão DA, DB duas rectas perpendiculares ao plano ABC. Tire-se AB. Serão rectos os dois angulos DAB, DBA: absurdo. Fig. 94.

Se DA he a perpendicular unica, então outra recta qualquer DB, tirada de D para o plano proposto, he maior que DA, porque será a hypothenusa do triangulo DAB rectangulo em A.

263. Abaixar de hum ponto a perpendicular sobre hum plano.

Seja ABC o plano, e D o ponto dado.

Tire-se no plano proposto huma recta qualquer BC, e no plano DBC tire-se DB perpendicular a BC. Levante-se do ponto B e no plano ABC a perpendicular BA sobre BC, e no plano ABD abaixe-se DA perpendicular a AB. Será DA a perpendicular pedida.

Porque BC, sendo perpendicular ás duas BD, BA, he perpendicular ao plano ABD, logo os planos ABC, ABD são perpendiculares entre si. Mas AD, que está no segundo, he perpendicular á sua intersecção AB, logo AD he perpendicular ao plano ABC.

264. De hum ponto dado em hum plano levantar a perpendicular a este plano.

Sejão ABC o plano, e A o ponto dado.

Tire-se no plano dado huma recta qualquer BC, mas que não passe por A, e de A tire-se sobre BC a perpendicular AB. Em outro plano que passe por BC, e do ponto B, levante-se BD perpendicular a BC. No plano ABD levante-se AD perpendicular a AB. Será AD a perpenpendicular pedida, encontre ou não a BD.

A demonstração he a mesma do problema precedente.

265. Por huma recta dada fazer passar o plano perpendicular a outro dado.

Sejão AB a recta, e CDE o plano dados. Fig. 96.

Por hum ponto qualquer B da recta tire-se a perpendicular BE sobre o plano, será o plano ABE aquelle em que está AB, e que he perpendicular a CDE. Este plano he unico, porque se por AB podesse conduzir-se outro plano perpendicular a CDE, então poderião tambem tirar-se duas perpendiculares, huma em cada hum delles, de qualquer ponto de AB ás intersecções destes planos com CDE: absurdo.

266. Sendo dados dois planos com hum ponto situado em hum delles ou fóra, tirar por este ponto hum plano perpendicular aos dois primeiros.

Do ponto dado tire-se a perpendicular a hum destes planos, e do pé desta perpendicular abaixe-se outra ao outro plano. O plano destas duas perpendiculares he o plano pedido.

Se as duas rectas perpendiculares coincidem, as soluções são nesse caso em numero infinito.

267. *Inclinação de huma recta sobre hum plano* he o mais pequeno dos dois angulos formados por ella e pela intersecção do plano proposto com o plano tirado por ella, perpendicular a este.

268. A inclinação da recta he o mais pequeno de todos os angulos que ella fórma com outras rectas, tiradas pelo seu pé no plano proposto.

Fig. 97. Seja AB a recta, e CBD o plano.

Levante-se de B a perpendicular BE ao plano proposto. Será EBA o plano perpendicular a CBD, que passa por AB. Seja BC sua intersecção com o proposto. Será ABC a inclinação. Tire-se por B no plano proposto huma recta qualquer BF.

No triedro $BEAF$ temos

$$EBF < EBA + ABF,$$

mas he $EBF = EBC$ por construcção, logo EBC, ou

$$EBA + ABC < EBA + ABF,$$

ou

$$ABC < ABF.$$

269. Por hum ponto de huma recta tirar hum plano, que tenha com ella huma inclinação dada.

Seja BA a recta e B o ponto, e faça-se o angulo CBA igual á inclinação dada. Levante-se BD perpendicular ao plano CBA. Serão perpendiculares entre si os planos CBD, CBA, logo o angulo CBA he a inclinação mutua da recta proposta BA e do plano pedido CBD.

270. Por hum ponto dado fóra de huma recta tirar hum plano, que tenha com ella huma inclinação dada.

Seja AB a recta, e C o ponto dado. Tirando por C, DE parallela a AB, fação-se ECB, DCA iguaes cada hum á inclinação dada. Fig. 98.

Será CBA ou CAB a inclinação dada. Levantem-se BF, AG perpendiculares ao plano ABC.

Cada hum dos planos CBF, CAG tem sobre AB a inclinação dada, e passa por C.

A demonstração he a do problema precedente.

No caso em que se pede, que o plano seja perpendicular á recta, não he preciso tirar a recta parallela DE, basta então tirar CB perpendicular sobre AB, e depois BF perpendicular a ABC.

271. Se huma de varias rectas parallelas he perpendicular a hum plano, todas as outras o serão tambem.

Sejão AD, BE parallelas entre si, e AD perpendicular ao plano ABC. Fig. 99.

Será o plano $DABE$ das duas parallelas perpendicular ao mesmo plano ABC, e AD a AB: logo será BE perpendicular a AB (§ 45). Mas AB he a intersecção de dois planos perpendiculares entre si, logo (§ 253) BE será perpendicular ao plano ABC.

272. As perpendiculares, tiradas de hum ponto do espaço sobre rectas parallelas, estão em hum plano perpendicular a todas estas rectas.

Sejão CA, CB duas perpendiculares ás duas parallelas AD, BE. Produza-se AB até F.

Nos triedros $ADCF$, $BECF$ são rectos os angulos DAC, EBC por hypothese, iguaes DAF, EBF tambem por hypothese, e commum o diedro $CAFD$ opposto aos angulos rectos, logo os triedros são identicos, se os angulos *DAF*, *EBF* não são rectos, e teremos nessa hypothese $CAB = CBF$: absurdo. Logo *DAF*, *EBF* são rectos, e as duas parallelas são perpendiculares ao plano *CAB* das duas perpendiculares abaixadas sobre ellas do ponto *C* do espaço.

Facilmente se vê que o mesmo tem logar sendo maior o numero das parallelas e das perpendiculares respectivas, e ainda quando o ponto está no plano das duas parallelas.

273. As rectas perpendiculares a hum plano são parallelas entre si.

Sejão *AD*, *BE* perpendiculares ao plano *ABC*. Será o plano *DAB* perpendicular ao plano *ABC*, e *DAB* recto; e porque *EB* he perpendicular ao mesmo plano *ABC*, será *EBA* recto tambem. *EB* está no plano *DAB* que passa por *B*, porque *EB* he perpendicular ao plano *ABC*, e *DAB* tambem (§ 260). Porque *BE*, *AD* estão no mesmo plano, e fazem com *AB* dois angulos interiores rectos, são parallelas.

274. As rectas parallelas a outra no espaço são parallelas entre si.

Fig. 100. Sejão as rectas *AB*, *CD* parallelas a *EF*.

Tire-se o plano *ACE* perpendicular a *EF*, o qual cortará perpendicularmente as duas rectas *AB*, *CD* (§ 271), logo *AB*, *CD* são parallelas entre si (§ 273).

275. Os planos infinitos que fazem com as faces de hum diedro triedros, que tenhão as partes de hum iguaes ás partes de hum outro e similhantemente dispostas, são parallelos, ou não se encontrão jámais.

Fig. 101. Os planos *BAC*, *EDF* fação com as faces do diedro *EDGF* os triedros identicos *ABCG*, *DEFG*, e de maneira que seja $GAB = GDE$, $GAC = GDF$, $BAC = EDF$. Digo que os planos *ABC*, *DEF* são parallelos.

Se he possivel, seja *H* hum ponto d'encontro destes planos. No plano *BAC* tire-se *AI* que passe por *H*, e no plano *EDF* tire-se *DH*. Porque os triedros *ABCG*, *DEFG* são identicos, teremos nos triedros *AGBI*, *DEGH* o angulo $GAB = GDE$, o diedro $GABI = GDEH$, e sendo commum o diedro $BAGI$, são iguaes todas as suas partes, logo $GAI = GDH$, e logo AI, DH parallelas: absurdo.

276. Os planos perpendiculares á mesma recta são parallelos.

Seja GD perpendicular aos planos EDF, BAC. Faça-se com a aresta GD hum diedro não birectangulo, cujas faces GDE, GDF tenhão com os planos propostos as intersecções AB, AC, DE, DF.

Nos triedros $AGBC$, $DGEF$ he commum o diedro $BAGC$, e iguaes os angulos GAB, GAC aos angulos GDE, GDF, por serem todos rectos por hypothese, logo estes triedros teem todas as suas partes iguaes e similhantemente situadas, logo (§ 275) os planos ABC, DEF são parallelos.

277. Os angulos que teem os lados parallelos e nas faces do mesmo diedro são iguaes, e seus planos parallelos.

Nos angulos BAC, EDF sejão AB parallela a DE, e AC a DF, e estejão nas faces do diedro $BAGC$.

Será $GAB = GDE$, $GAC = GDF$, logo os triedros $AGBC$, $DGEF$ são identicos, por terem hum diedro commum comprehendido por angulos iguaes e igualmente collocados, logo são iguaes os angulos BAC, EDF, e parallelos os seus planos.

278. Por hum ponto dado fóra de hum plano tirar outro que lhe seja parallelo.

No plano dado tirem-se por hum ponto qualquer D duas rectas DE, DF, e pelo ponto A dado tire-se AB parallela a DE, e AC a DF. Então AB, AC ou seus prolongamentos estarão nas faces do mesmo diedro com DE, DF, ás quaes além disto as primeiras linhas são parallelas, logo BAC he o plano pedido (§ 277).

279. Planos parallelos, sendo cortados pelas faces de hum diedro, fazem com ellas triedros identicos, e similhantemente situados.

Os planos ABC, DEF sejão parallelos, AB, DE as suas intersecções com a face BAG do diedro $BAGC$, e

AC, DF as suas intersecções com a outra face GAC. AB, DE são parallelas, porque estão no mesmo plano, e não concorrem, por estarem em planos parallelos. Similhantemente AC e DF são parallelas. Logo $GAB = GDE$, e $GAC = GDF$. Logo os triedros $AGBC$, $DGEF$, que teem hum diedro commum, comprehendido entre angulos iguaes e similhantemente dispostos, teem as outras partes iguaes, e similhantemente dispostas.

280. As intersecções AB, DE de dois planos parallelos ABC, DEF com hum terceiro BGA são parallelas.

281. Os diedros correspondentes $GABC$, $GDEF$ formados por planos parallelos ABC, DEF com outro plano BGA, são iguaes. Logo tambem são iguaes os diedros alternos internos, e os alternos externos; e iguaes a dois rectos os diedros internos da mesma parte, tomados juntos, e os diedros externos da mesma parte.

282. Por hum ponto A, ou por huma recta AB não se póde conduzir mais de hum plano parallelo a outro EDF.

283. Todas as rectas tiradas por hum ponto fóra de hum plano, parallelas a este plano, estão em outro plano parallelo ao proposto.

Sejão AB, AC parallelas ao plano EDF.

Por hum ponto qualquer D do plano proposto e por AB conduza-se hum plano, e seja DE a sua intersecção com o proposto; e da mesma fórma seja DF a intersecção do plano CAD com o proposto EDF.

Serão AB, DE parallelas, por estarem no mesmo plano por construcção, e porque AB não póde encontrar o plano DEF por hypothese. Pela mesma razão serão AC, DF parallelas entre si.

Tendo os angulos BAC, EDF os lados parallelos, e situados nas faces de hum mesmo diedro, segue-se que os seus planos são parallelos.

Da mesma maneira por que se acaba de provar que AC está com AB em hum plano parallelo a DEF, se prova que huma outra parallela AI ao plano DEF está com AB em hum plano parallelo ao proposto. Mas por AB

não se póde tirar mais de hum plano parallelo a este (§ 282), logo todas estas rectas tiradas por A, parallelamente a EDF, estão em hum mesmo plano parallelo ao proposto.

284. Os planos parallelos a outro são parallelos entre si.

Supponhamos os planos p, p' parallelos a p''.

Os planos p, p'' formarão com hum diedro d triedros t, t'' iguaes e dispostos da mesma maneira (§ 279). Os planos p', p'' igualmente formarão com o mesmo diedro d triedros t', t'' iguaes e dispostos da mesma maneira, porque he necessario que p' encontre d. Logo os planos p, p' fórmão com o diedro d triedros t, t' iguaes e da mesma fórma dispostos, logo estes planos são parallelos (§ 275).

285. A recta perpendicular a hum de varios planos parallelos he perpendicular a todos.

Sejão parallelos os planos ABC, DEF, e GA perpendicular a ABC.

Digo primeiramente que GA encontra o plano DEF produzido, se fôr necessario, porque de outra sorte lhe seria parallela, e estaria então no plano ABC; absurdo; porque por hypothese ella lhe he perpendicular. Seja pois D o ponto em que GA encontra o plano DEF. Forme-se hum diedro qualquer $< 2r$, e de que GD seja a aresta, e sejão AB, AC, DE, DF as intersecções de suas faces com os planos parallelos. Serão AB, DE parallelas, e tambem o serão AC, DF. Logo $GDE = GAB$, $GDF = GAC$. Mas GAB, GAC são rectos por hypothese, logo GDE, GDF são tambem rectos, ou GD he perpendicular sobre o plano DEF.

286. Mais geralmente: a recta inclinada sobre hum de varios planos parallelos entre si tem a mesma inclinação sobre todos.

Seja GAB o angulo de inclinação da recta GA sobre o plano BAC parallelo a EDF. O plano GAB será perpendicular ao plano BAC. A recta GA, produzida se fôr necessario, encontrará o outro plano em algum ponto D, porque de outra fórma lhe sería parallela, e estaria então no plano *BAC*, contra a hypothese de lhe ser inclinada. Seja pois *DE* a intersecção dos planos *GAB*, *EDF*. Tire-se por *GA* outro plano *GAC*, que faça com *GAB* hum diedro não birectangulo, e sejão *AC*, *DF* as suas intersecções com os planos propostos, parallelos entre si. Serão identicos e similhantemente dispostos os triedros *ABCG*, *DEFG*; logo *GDE*=*GAB*, e o diedro *GDEF*=*GABC*, isto he, o plano *GDE* he perpendicular a *EDF*, e *GDE* he a inclinação de *GA* sobre *EDF*, e igual á inclinação da mesma recta *GA* sobre *ABC*.

287. Huma recta parallela a outra he parallela a todos os planos em que existir sómente a ultima.

Fig. 102. Seja *AB* parallela a *CD*, e *CDE* hum plano qualquer daquelles em que estiver *CD*, mas não *AB*.

Estando *AB* por hypothese no plano *ABCD* das duas parallelas, não poderá encontrar o plano *CDE* senão na intersecção *CD* dos dois planos; mas esse encontro he impossivel por serem parallelas *AB*, *CD*; logo *AB* não encontra o plano *CDE*, nem algum outro daquelles, que contêem *CD* sem conter *AB*.

288. Por huma de duas rectas, que não estejão em hum plano, tirar o plano parallelo á outra.

Fig. 103. Sejão *AB*, *CD* as duas rectas que não estão em hum plano.

De hum ponto qualquer *C* de huma *CD* tire-se *CE* parallela a *AB*, e será *DCE* o plano pedido.

Este plano he unico. Porque se houvesse outro plano parallelo a *AB*, e que passasse por *CD*, a sua intersecção *CF* com o plano *ABC* seria então parallela a *AB*, e logo *CF*, *CE* serião parallelas: absurdo.

289. Por hum ponto dado fóra de duas rectas dadas em posição, mas não no mesmo plano, tirar o plano parallelo ás duas rectas, ou parallelo a huma, e que contenha a outra.

Fig. 104. Sejão dados o ponto *A*, e as rectas *BC*, *DE*.

Tire-se *AF* parallela a *BC*, e *AG* parallela a *DE*, e será *AFG* o plano procurado: este he unico, porque a sua posição he determinada por AF e AG, que tem tambem huma unica posição.

AF, AG não podem coincidir, porque então BC, DE serião parallelas, contra a supposição. Entretanto huma dellas, por exemplo, AF póde ser a intersecção dos planos ABC, ADE, e então o plano pedido conterá a recta DE.

290. Se huma recta e hum plano são parallelos, e a recta he perpendicular a outro plano, os dois planos serão perpendiculares entre si.

Se a recta AB he parallela ao plano DCE, e perpendicular ao plano BCD, digo que o plano DCE he perpendicular ao plano BCD. Fig. 105.

Do ponto B, em que AB encontra o plano BCD, tire-se BC perpendicular á intersecção CD dos dois planos BCD, CDE. Seja CE a intersecção dos planos ABC, CDE. Será AB parallela a CE por hypothese; mas o angulo ABC he recto por hypothese, logo BCE he recto. Sendo BCD recto por construcção, segue-se que BC he perpendicular a DCE, logo os planos BCD, DCE são perpendiculares entre si.

291. Dois planos perpendiculares a hum terceiro, e cujas intersecções com este são parallelas entre si, são tambem parallelos entre si.

Porque se se suppõe que os dois planos se encontrão fóra do terceiro, então de hum ponto do encontro se podem tirar duas perpendiculares ás suas intersecções com o terceiro, e estas perpendiculares o serão tambem ao terceiro plano: absurdo.

Não se póde suppôr que os dois planos se encontrão sobre o terceiro; por quanto esse encontro seria em hum dos pontos das intersecções, o que he impossivel, porque estas são parallelas.

292. Mais geralmente: dois planos, cujas intersecções com hum terceiro são parallelas, e que fazem com elle diedros iguaes e similhantemente dispostos, são parallelos entre si.

Sejão parallelas entre si as secções AB, DE feitas no Fig. 101.

plano *GDB* pelos planos *ABC*, *DEF*; e iguaes os diedros *GBAC*, *GEDF*. Tire-se outro plano *GCF* pela aresta *GD*, cujas intersecções com os planos propostos *ABC*, *DEF* sejão *AC*, *DF*.

Então nos triedros *ABCG*, *DEFG* serão iguaes os diedros *GBAC*, *GEDF* por hypothese, o diedro *BAGC* será commum, e os angulos adjacentes *GAB*, *GDE* iguaes pela hypothese de serem *AB*, *DE* parallelas, logo os triedros são identicos (§ 237), logo *ABC*, *DEF* são parallelos entre si.

293. Hum plano e huma recta fóra delle são parallelos, se forem perpendiculares a outro plano ou recta.

Fig. 105. Sejão o plano *DCE*, e a recta *AB* perpendiculares ao plano *BCD*, digo que *DCE*, *AB* são parallelos.

Do pé *B* da perpendicular *AB* tire-se *BC* perpendicular á intersecção *DC* dos dois planos, e seja *CE* a intersecção dos planos *ABC*, *DCE*.

Porque *BC* he perpendicular, por construcção, á intersecção dos dois planos *DCE*, *BCD*, perpendiculares entre si por hypothese, e porque ella está em hum, será perpendicular ao outro, logo *BCE* he recto. Mas *ABC* he recto tambem por hypothese, logo *AB* he parallela a *CE*, e por consequencia ao plano *DCE*.

Se *AB* e *DCE* são perpendiculares á recta *BC*, então temos logo *AB* parallela a *CE*, e ao plano *DCE*.

294. Por hum ponto tirar huma recta parallela a hum plano.

No plano *DCE* proposto tire-se huma recta *CE* qualquer, e pelo ponto proposto *A* tire-se no plano *ACE* a recta *AB* parallela a *CE*. Será *AB* a parallela pedida.

Vê-se que as soluções são infinitas em numero.

295. As rectas parallelas entre planos parallelos são iguaes.

Fig. 106. Sejão as rectas *AB*, *CD* parallelas e terminadas nos planos *ACF*, *BDE* tambem parallelos entre si. *BD*, *AC* serão as intersecções dos planos parallelos com o plano *ABCD* das duas rectas parallelas, logo *BD* he parallela

a AC, e $ABDC$ será hum parallelogrammo: logo $AB = CD$.

296. As rectas perpendiculares a dois planos parallelos e nelles terminadas são iguaes, por serem parallelas entre planos parallelos.

297. Por duas rectas, que não estejão em hum plano, tirar dois planos parallelos entre si.

Sejão AB, DF as duas rectas. Por hum ponto A da Fig. 101. primeira tire-se AC parallela a DF, e por hum ponto D da segunda tire-se DE parallela á primeira AB. Serão ABC, DEF os planos pedidos.

298. Achar a recta perpendicular ao mesmo tempo a outras duas rectas dadas de posição no espaço, mas não no mesmo plano.

Sejão AB, CD as rectas dadas no espaço. Fig. 107.

Por hum ponto qualquer E de huma destas rectas tire-se EF parallela á outra AB. O plano DEF será tambem parallelo a AB. Por AB tire-se hum plano perpendicular ao plano EDF, e seja GH huma parte da sua intersecção. Será GH parallela a AB, porque GH está no plano ABG, e no plano DEF parallelo a AB.

Mas EF he tambem parallela a AB por construcção, logo GH, EF são parallelas, e por isso GH, produzida se fôr necessario, encontrará CD em hum ponto I. De I no plano ABI levante-se IK perpendicular sobre IH. Será IK a perpendicular pedida.

Por ser IK perpendicular, por construcção, a huma das duas parallelas AB, IK, ella o será á outra AB. Por ser IK perpendicular á intersecção de dois planos perpendiculares entre si ABI, IHD, e porque está em hum delles, será perpendicular ao outro IHD; logo IK he perpendicular a CD, além de o ser já a AB.

Esta perpendicular he unica, porque, se he possivel, Fig. 108. sejão AC, BD duas rectas, cada huma das quaes he simultaneamente perpendicular ás duas AB, CD. Tire-se AD.

Os triangulos ABD, ACD estarão em dois planos. Logo no triedro $ABCD$ teremos

$$DAB + DAC > BAC;$$

e no triedro $DBAC$ teremos

$$ADC + ADB > CDB.$$

Ora CAB, ACD, ABD, BDC são rectos, nesta hypothese, logo

$$DAB + DAC + ADC + ADB > 2r.$$

Mas os triangulos ABD, ACD, rectangulos em B e C, dão

$$DAB + DAC + ADC + ADB = 2r;$$

absurdo: logo não podem existir duas rectas perpendiculares cada huma ao mesmo tempo a outras duas, que não estejão em hum plano.

299. Esta mesma perpendicular a duas rectas situadas no espaço he a menor recta, que se póde tirar entre as ditas rectas.

Seja AC a perpendicular ás duas rectas AB, CD.

No triedro $ABCD$ temos

$$BAD + DAC > r,$$

e no triangulo ACD he

$$ADC + DAC = r,$$

logo

$$BAD > ADC.$$

Nos dois triangulos ABD, ACD, hum rectangulo em C, he AD commum, e além disso o angulo ADC do triangulo rectangulo $<$ que o angulo DAB do outro, logo $AC < DB$ (§ 81).

300. Nas rectas cortadas por planos todos parallelos

entre si, as partes interceptadas por dois destes planos são proporcionaes ás partes das mesmas rectas, interceptadas por outros dois quaesquer desses planos parallelos.

As rectas AGD, BHE, CIF encontrem os planos ABC, GHI, DEF, parallelos entre si, nos pontos por meio dos quaes são designados estes planos e estas rectas. Fig. 109.

Tirem-se as rectas AE, CE, e sejão K, L os pontos em que ellas cortão o plano GHI. Tirem-se tambem KG, KH, LH, LI. Serão parallelas GK, DE, porque estão no mesmo plano ADE e em planos parallelos. Logo

$$AD : AG :: AE : AK,$$

d'onde

$$AD - AG : AG :: AE - AK : AK,$$

ou

$$DG : AG :: EK : AK.$$

Pela mesma razão temos

$$EK : AK :: EH : BH :: EL : LC :: IF : IC,$$

logo

$$DG : AG :: EH : HB :: FI : IC.$$

301. As intersecções das faces de hum angulo polyedro com planos parallelos entre si, fórmão polygonos similhantes, cujas areas são entre si como os quadrados das partes d'huma recta qualquer, que passe pelo vertice, e comprehendidas entre esse ponto e os planos dos polygonos.

Sejão $BCDE$, $FGHI$ as intersecções de dois planos parallelos com a superficie do angulo polyedro $ABCDE$. Fig. 110.

Teremos FG parallela a BC, e

$$BC : FG :: AC : AG;$$

similhantemente

$$AC : AG :: CD : GH;$$

e assim por diante, de sorte que será

$$BC : FG :: CD : GH :: DE : HI :: BE : FI;$$

logo os polygonos $BCDE$, $FGHI$ teem os lados proporcionaes. Falta demonstrar a igualdade dos angulos adjacentes a lados homologos.

Os triedros $GAFH$, $CABD$ teem iguaes as partes similhantemente dispostas, porque os planos GFH, BCD são parallelos; logo o angulo $FGH = BCD$, e da mesma maneira se prova a igualdade dos outros angulos dos polygonos comprehendidos entre lados homologos.

A segunda parte da proposição demonstra-se assim:

$$\text{area } BCDE : \text{area } FGHI :: BC^2 : FG^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{AG}^2,$$

e AC está com AG na razão das partes de huma recta qualquer tirada de A, sendo estas partes tomadas entre A e os planos dos dois polygonos.

302. Reciprocamente, se tres arestas de hum angulo polyedro, terminadas em hum plano, são proporcionaes ás mesmas tres arestas, mas terminadas em outro plano, estes dois planos serão parallelos.

Fig. 111. No triedro $ABCD$, qualquer d'aquelles que compõem hum angulo polyedro, sejão

$$AB : AE :: AC : AF :: AD : AG.$$

Digo que os planos BCD, EFG são parallelos.

Porque o angulo BAC he commum aos triangulos ABC, AEF, e seus lados são proporcionaes por hypothese, estes triangulos são similhantes, logo o angulo $BCA = EFA$: pela mesma razão nos triangulos ADC, AGF he $DCA = GFA$, logo BC he parallela a EF, e CD a FG, e por conseguinte os planos BCD, EFG são parallelos.

303. Os tres angulos do triedro, tomados juntos, valem menos de quatro angulos rectos.

Fig. 112. Seja AE a continuação, no sentido do vertice, de huma das arestas AB do triedro $ABCD$.

Será

$$BAD + DAE = 2r;\ BAC + CAE = 2r;$$

mas no triedro $AEDC$ he

$$DAC < DAE + CAE:$$

logo, juntando esta inequação com as duas equações e reduzindo, teremos

$$BAD + BAC + DAC < 4r.$$

304. Todos os angulos do angulo polyedro convexo, tomados juntos, valem menos de quatro angulos rectos.

Porque produzindo huma primeira face e a terceira no mesmo sentido em que estão a respeito da segunda, ellas formarão todas tres hum triedro, que encerrará o angulo polyedro, porque sendo este convexo, não póde ser cortado por alguma de suas faces produzidas. Mas o angulo polyedro, sendo desta maneira interior ao triedro, tem a somma de seus angulos menor que a somma dos angulos do triedro, e por conseguinte $< 4r$.

305. Qualquer plano que cortar as arestas do dito triedro, cortará todas as arestas do angulo polyedro.

306. A somma dos tres diedros de hum triedro he maior que dois diedros rectos.

No triedro proposto $ABCD$ o diedro $BCAD$ he supplemento do diedro $DCAE$, logo he maior que a differença dos dois $CADE$, $DEAC$. Assim, no caso de ser $CADE > DEAC$, teremos $BCAD > CADE - DEAC$, logo

$$BCAD + CADB > CADB + CADE - DEAC,$$

logo

$$BCAD + CADB + DEAC > CADB + CADE.$$

Mas $DEAC$ he a mesma coisa que $CABD$, e $CADB + CADE = 2r$.

Logo a somma dos tres diedros

$$BCAD + CADB + CABD > 2r.$$

No caso de ser $CADE \leq DEAC$, então he $CABD \geq CADE$, logo

$$CABD + BADC \geq CADE + BADC = 2r;$$

logo tambem

$$CABD + BADC + DACB > 2r.$$

307. A somma de todos os diedros do angulo polyedro convexo de n faces he maior que $(n-2)\,2r$.

Porque tirando planos de huma de suas arestas a todas as outras, o angulo polyedro ficará composto de $n-2$ triedros, e todos os diedros destes farão a somma dos diedros do angulo polyedro; logo esta somma será maior que $(n-2)\,2r$.

308. Os diedros são proporcionaes aos angulos formados pelas intersecções das suas faces com planos perpendiculares a ellas ou ás arestas.

Fig. 113. Nos triedros $ABCD$, $EFGH$ seja o plano BAC perpendicular á aresta AD de hum, e FEG a EH no outro, ou seja BAC perpendicular ás outras faces de hum, e FEG ás outras duas faces do segundo. Serão rectos BAD, CAD, FEH, GEH. Primeiramente supponhamos commensuraveis os angulos BAC, FEG, isto he, multiplos de hum mesmo angulo BAI, parte de BAC. Faça-se ainda $IAK = BAI$, adjacentes e no mesmo plano BAC. Serão rectos IAD, KAD. Logo são identicos os triedros $ABID$, $AIKD$, e por conseguinte são iguaes os diedros $BADI$, $IADK$. Póde pois dividir-se o diedro $BADC$

em tantos diedros iguaes quantos são os angulos iguaes a *BAI* contidos em *BAC;* e o mesmo se póde affirmar do diedro *FEHG* e do angulo *FEG.* Logo os diedros propostos são tão multiplos do diedro *BADI* como os angulos perpendiculares ás suas arestas ou faces, e por estas comprehendidos, o são da sua medida *BAI;* logo teremos

$$\text{diedro } BADC : \text{diedro } FEHG :: BAC : FEG.$$

Quando os angulos *BAC*, *FEG* forem incommensuraveis a demonstração será inteiramente analoga á do § 123.

309. De ser

$$BADC : BADI :: BAC : BAI,$$

segue-se que, supponde *BADI* a unidade dos diedros e *BAI* a unidade angular, he então $BADC = BAC$. Assim quando se diz que hum diedro he igual ao angulo plano perpendicular ás suas faces, e por ellas comprehendido, bem se vê o que se subentende, isto he, que se deve dividir o angulo pela sua unidade, e multiplicar a unidade dos diedros por este quociente para ter o diedro. Este angulo que he a medida do diedro, chama-se tambem *inclinação das faces do diedro.*

310. Por huma recta não perpendicular a hum plano tirar outro plano, que faça com o primeiro hum diedro dado.

Se a recta dada *AB* he parallela ao plano dado *ECD*, Fig. 114.
tire-se por hum ponto qualquer *B* da recta hum plano *BCD* que lhe seja perpendicular, e cuja intersecção com o plano *ECD* seja a recta *CD*. De *B* tirem-se para *CD* as rectas *BC*, *BD* que fação com *CD* angulos iguaes cada hum ao diedro dado (§ 75). Qualquer dos planos *ABC*, *ABD* será o plano pedido, porque se pelos pontos *C*, *D* tirarmos no plano *ECD* as rectas *CE*, *DI* parallelas a *AB*, essas rectas existirão respectivamente nos planos *ABC*,

ABD; logo serão as intersecções destes com o plano *ECD*: de mais as mesmas rectas serão perpendiculares ao plano *BCD* (§ 271); logo *BC*, *CF* serão perpendiculares a *EC*, e *BD*, *DF* a *DI*, e por isso os angulos *BCF*, *BDF* são as medidas dos diedros formados pelos planos *ABC*, *ABD* com *ECD*.

Se *AF* existir no plano *ECD*, tiraremos por hum ponto qualquer *F* de *AF* o plano *BCD* perpendicular a *AF*, e cuja intersecção com *ECD* seja *CD*. Formando pois no plano *BCD* os angulos *CFG*, *DFH* cada hum igual ao diedro dado, os planos *AFG*, *AFH* resolverão o problema.

Fig. 115. Finalmente se a recta *AB* fòr obliqua ao plano dado *ACE* e o encontrar em *A*, tire-se de hum ponto *B* da recta a perpendicular *BC* sobre o plano, e fazendo passar huma recta *AD* pelos pontos *A* e *C*, forme-se o angulo *BDC* igual ao diedro dado; depois construão-se os triangulos *ACF*, *ACE* rectangulos em *F* e *E*, e nos quaes seja $CF = CD = CE$; serão os triangulos rectangulos *BCF*, *BCE* identicos com *BCD*, e os angulos *BFC*, *BEC* iguaes a *BDC*. Ora as rectas *AF*, *AE* são respectivamente perpendiculares a *BF*, *BE* (§ 258): logo os planos *ABF*, *ABE* fazem com *ACE* diedros iguaes ao diedro dado.

D'ahi se conclue, que por hum ponto póde fazer-se passar hum numero infinito de planos, que tenhão a mesma inclinação sobre hum plano dado.

311. *Angulo de duas rectas*, que não estão em hum plano, he o angulo dos dois planos que passão por cada huma e pela perpendicular commum.

312. Este angulo he igual ao angulo, que huma das ditas rectas faz com a recta tirada pela extremidade correspondente da perpendicular parallelamente á outra.

Fig. 107. Seja *IK* a perpendicular ás duas rectas *AB*, *CD*, que não estão no mesmo plano. O angulo das duas rectas he o diedro formado pelos planos *ABI*, *CDK*, e este he igual a *DIH* (§ 308), por ser *IH* parallela a *AB*, por hypo-

these, e portanto perpendicular a KI, a que DI he perpendicular tambem por hypothese.

313. *Triedro supplementario d'outro* he aquelle cujos diedros são supplementos, cada hum de cada hum dos angulos do segundo; ou tambem aquelle em que cada hum dos angulos he supplemento de cada hum dos diedros do segundo.

314. Construir o triedro supplementario de hum triedro proposto.

No vertice A do triedro $ABCD$ e para fóra deste tirem-se AE, AF, AG respectivamente perpendiculares sobre as tres faces ABC, ABD, ACD. Os triedros $AEFG$, $ABCD$ serão supplementarios hum do outro. Fig. 114.

Porque EA he perpendicular a ABC, o plano EAC será perpendicular tambem a ABC, logo o diedro $EACB$ he recto. Pela mesma razão que GA he perpendicular a ACD, he tambem recto o diedro $GACD$. O diedro $EACG = EAG$, porque EA, GA são ambas perpendiculares á aresta AC. Os quatro diedros em tôrno da aresta AC são juntos iguaes a quatro diedros rectos, isto he,

$$EACG + EACB + BACD + GACD = 4r,$$

ou

$$EAG + r + BACD + r = 4r,$$

logo

$$EAG + BACD = 2r.$$

Assim temos já hum angulo do triedro $AEFG$ supplemento de hum diedro do triedro proposto.

Da mesma maneira, tomando em consideração as duas perpendiculares EA, FA respectivas aos planos ABC, ABD, acharemos

$$EAF + CABD = 2r,$$

e similhantemente se achará

$$FAG + CADB = 2r.$$

Porque EA, FA são perpendiculares a AB, será AB perpendicular á face EAF do triedro $AEFG$, e pela mesma razão serão AC, AD respectivamente perpendiculares ás faces EAG, AFG, e por isso, como se acaba de demonstrar, serão os angulos BAC, CAD, BAD respectivamente supplementos dos diedros $FAEG$, $FAGE$, $EAFG$.

315. Os tres diedros determinão o triedro.

No triedro $ABCD$ sejão dados os tres diedros. Digo que os seus angulos são determinados, ou que não póde haver outro triedro diverso com iguaes diedros.

Construa-se o triedro supplementario $AEFG$. Os diedros do triedro proposto sendo dados, serão dados tambem os tres angulos do supplementario, logo são determinados os seus diedros, e logo no proposto serão determinados os angulos, que são os supplementos dos diedros do segundo triedro.

316. Construir triedros com dados que os determinem.

Fig. 117. 1.° Dados os angulos a, b, e o diedro comprehendido C.

Faça-se o angulo $D'BC' = C$ diedro comprehendido. Levante-se BA perpendicular ao plano $BD'C'$ e de grandeza arbitraria. No plano ABD' faça-se o angulo $BAD = a$, e no plano BAC' o angulo $BAC = b$. Será $ABCD$ o triedro pedido.

Porque além dos angulos dados, tem o diedro $DBAC = D'BC' = C$, por serem $D'B$, $C'B$ perpendiculares a AB.

2.° Dados os diedros A, B, e o angulo comprehendido c.

Construa-se hum triedro com os angulos $2r - A$, $2r - B$, e o diedro comprehendido $2r - c$, como se acaba de fazer, e construa-se depois o supplementario deste, que será o triedro pedido.

3.° Dados os tres angulos a, b, c, taes que a somma de dois quaesquer seja sempre maior que o terceiro (para o que basta que o angulo maior seja menor que a somma dos outros dois), e a somma de todos tres menor que quatro rectos.

Suppondo primeiro que nenhum destes angulos he recto, então dois pelo menos necessariamente são agudos, ou dois são obtusos. Sejão a, b agudos. Com AB de grandeza arbitraria, e com $DAB=a$ forme-se o triangulo ABD rectangulo em B; e com o mesmo lado AB, e o angulo $CAB=b$ forme-se o triangulo ABC rectangulo tambem em B, mas cada hum em plano differente. Com as rectas AD, AC tambem determidadas, e o angulo $DAC=c$ faça-se o triangulo DAC. Com as rectas BD, BC, DC assim achadas faça-se o triangulo BDC. Será $DBC=DBAC$ hum diedro determinado do triedro pedido, o qual póde ser agora construido com este diedro e com os angulos a, b, como no primeiro caso.

Se todos os angulos do triedro são rectos, a construcção do triedro se reduz a levantar huma perpendicular no vertice de hum angulo recto ao seu plano.

Se unicamente são rectos dois angulos, forme-se o terceiro angulo, e no seu vertice levante-se a perpendicular ao seu plano.

Se hum só he recto, então com

$$DAB=a,\ CAB=2r-b,\ DAC=r$$

póde construir-se o triedro como no principio deste 3.° caso, suppondo agora a agudo e b obtuso, porque a serem ambos agudos já este caso fica resolvido; produza-se a aresta AC deste triedro $ABDC$ para F; será $ABDF$ o triedro pedido. Porque tem $DAB=a$, $BAF=2r-CAB$ $=2r-(2r-b)=b$, e $DAF=2r-DAC=r$.

Se a, b são ambos obtusos, faça-se o triedro $ABDC$ com os angulos $2r-a$, $2r-b$, c, como se tem feito. Produza-se BA para E, e será $AEDC$ o triedro pedido, porque $EAD=a$, $EAC=b$, $DAC=c$.

4.° Dados os tres diedros A, B, C, taes que a differença de dois quaesquer seja menor que o supplemento do terceiro, e a somma de todos tres maior que dois diedros rectos.

Faça-se hum triedro com os angulos $2r-A$, $2r-B$, $2r-C$, o supplementario do qual será o triedro pedido.

5.° Dados os angulos a, r, e o diedro C opposto a r, não sendo a recto.

Faça-se o angulo $DBC=C$. Levante-se BA perpendicular ao plano DBC. Faça-se no plano BDA e em algum ponto A da recta BA o angulo $DAB=a$. Tire-se por A hum plano perpendicular a AD, cuja intersecção com o plano ABC seja AC. Será $ABDC$ o triedro pedido.

Porque DAC he recto, visto ser DA perpendicular por construcção ao plano em que está AC, o mesmo DAC he opposto ao diedro $DBAC=DBC=C$, e $DAB=a$.

6.° Dados os diedros A, r, e o angulo c opposto ao diedro recto, e não sendo A recto.

Faça-se hum triedro com os angulos $2r-A$, r, e o diedro opposto a $r=2r-c$, como no caso precedente; o supplementario deste triedro será o triedro pedido.

317. Os triedros que teem suas partes iguaes, cada huma a cada huma, são iguaes, ainda que não sejão identicos.

Fig. 118. Nos triedros $ABCD$, $EFGH$ sejão $BAC=FEG$, $CAD=GEH$, $BAD=FEH$, mas esteja AC para cima do plano da figura, e EG para baixo, que he o caso em que elles não admittem sobreposição.

Fação-se AB, AC, AD, EF, EG, EH todas iguaes. Tirem-se BC, CD, DB, FG, GH, HF. Os triangulos ABC, ACD, ABD, BCD serão respectivamente identicos aos triangulos EFG, EGH, EFH, FGH. Logo os triedros $CABD$, $GEFH$ teem as partes iguaes, logo o diedro $ABCD=EGFH$, e $ACDB=EGHF$. Achem-se os centros L, O dos vertices dos triangulos identicos BCD, FGH por meio das perpendiculares IL, KL, MO, NO aos meios I, K, M, N dos lados BC, CD, FG, GH. Tirem-se AI, AK, EM, EN, que sendo rectas tiradas dos vertices de triangulos isosceles ao meio de suas bases, serão perpendiculares a estas bases. Tirem-se tambem LA, LB, LC, LD, OE, OF, OG, OH.

Porque BC he perpendicular a IA e IL, serão perpendiculares entre si os planos AIL, BCD; e pela mesma razão que AK e LK são perpendiculares a CD, serão perpendiculares entre si os planos AKL, BCD; logo AL he perpendicular a BCD, e tambem EO a FGH.

Prova-se facilmente que $AI=EM$, $IL=MO$; mas $AIL=EMO$ por serem medidas dos diedros iguaes $ACBD$, $EGFH$; logo os triangulos AIL, EMO são identicos, e $AL=EO$.

Os triedros $LABC$, $OEFG$ teem $BLC=FOG$, e ALC, ALB, EOG, EOF são rectos. Sobrepondo pois estes triedros, cahirá L em O, B em G, C em F, A em E, logo o triedro $ABLC=$ triedro $EGOF$. Da mesma maneira se acha o triedro $ALDC=EOGH$, e o triedro $ALDB=EOHF$. Logo

$$\text{o triedro } ABCD=ABLC+ALDC-ALBD$$

$$=EGOF+EOGH-EOHF=EFGH.$$

Se os centros dos triangulos BCD, FGH estão nos lados BD, FH, então os triedros propostos são ainda iguaes, por ser cada hum delles somma de dois triedros identicos com os dois que compõem o outro.

Se os centros cahem dentro dos triangulos BCD, FGH, serão os triedros propostos compostos cada hum de tres triedros que coincidem com os tres do outro. Logo são sempre iguaes os triedros propostos, ainda que não sejão identicos.

318. Os angulos polyedros symetricos ou conjugados são iguaes.

Nos angulos polyedros symetricos $aBCDEF$, $aGHIKL$ Fig. 119.
são iguaes os diedros comprehendidos por angulos iguaes. Logo os triedros $aBEF$, $aGKL$ são iguaes, por serem as suas partes iguaes cada huma a cada huma, e logo $BaE=GaK$, e o diedro $BaEF=GaKL$. Logo nos triedros $aBED$, $aGKI$ são iguaes os diedros $BaED$, $GaKI$,

por serem differenças de diedros iguaes; e são comprehendidos por angulos iguaes, logo estes triedros são iguaes, e iguaes tambem os angulos BaD, GaI, assim como os triedros $aBCD$, $aGHI$. Logo os angulos polyedros propostos são iguaes, porque são compostos de triedros iguaes.

319. No triedro, que tem dois diedros iguaes e agudos, os angulos oppostos são tambem iguaes e agudos; e se os diedros iguaes são obtusos, os angulos oppostos serão obtusos: e reciprocamente.

Fig. 123. No triedro $ABCD$ seja $CABD = CADB$, e sejão agudos estes dois diedros. Levante-se AE perpendicular a BAD, e da mesma parte de AC.

Serão rectos os diedros $EABD$, $EADB$, logo o triedro $ABDE$ envolverá o triedro proposto $ABCD$, e logo teremos

$$EAB + EAD > CAB + CAD.$$

Mas os dois primeiros angulos são rectos, e os dois segundos iguaes, logo estes são agudos.

Se os diedros iguaes $CABD$, $CADB$ forem obtusos, então o triedro $ABCD$ envolverá o triedro $ABDE$, logo teremos

$$CAB + CAD > EAB + EAD.$$

Mas os dois primeiros angulos são iguaes, e os ultimos rectos, logo os primeiros são obtusos.

Reciprocamente, se os angulos CAB, CAD do triedro proposto $ABCD$ são iguaes e agudos, então necessariamente os diedros $CABD$, $CADB$ são agudos; porque se estes fossem obtusos, os angulos CAB, CAD o serião tambem pela proposição directa, o que he contra a supposição actual; ou se os diedros fossem rectos, os angulos CAB, CAD o serião da mesma sorte, o que he absurdo, logo são agudos.

A outra proposição reciproca prova-se permutando as palavras agudos e obtusos; porém huma e outra podem demonstrar-se por meio do triedro supplementario, se se quizer evitar a reducção ao absurdo.

320. *Centro das faces de hum polyedro* he o ponto do qual se podem abaixar perpendiculares iguaes sobre todas as faces. Estas perpendiculares chamão-se *cathetos*.

321. Todos os pontos do plano que divide ao meio hum diedro são centros das suas faces, ou das suas continuações.

O plano EAB divida o diedro $CABD$ em dois diedros iguaes $CABE$, $DABE$.

Por hum ponto qualquer E do plano tire-se o plano ACD perpendicular á aresta AB, e sejão AC, AD as intersecções deste ultimo plano com as faces do diedro proposto.

Teremos EA, CA, DA perpendiculares a AB, logo EAC, EAD são iguaes e agudos, porque medem os dois diedros iguaes, em que está dividido o proposto. Tire-se EC perpendicular sobre AC, e ED sobre AD. Os planos CAB, DAB são ambos perpendiculares a ACD por ser em ambos AB perpendicular a ACD por construcção. Mas EC he perpendicular em C á intersecção AC do primeiro CAB com o terceiro ACD, logo EC he perpendicular á face CAB do diedro proposto, e pela mesma razão he ED perpendicular á face DAB. Será pois E o centro destas faces, se fôr $EC=ED$.

322. Os triangulos EAC, EAD rectangulos em C, D, teem AE commum, e iguaes os angulos EAC, EAD, logo são identicos, e $EC=ED$.

Todos os pontos do plano perpendicular ao meio de huma recta são centros dos seus extremos.

No meio C da recta AB esteja tirado o plano DCE Fig. 121.
perpendicular a esta recta.

Neste plano tome-se outro ponto qualquer E, e tirem-se EC, EA, EB. Serão rectos os angulos ACE, BCE por hypothese. Os triangulos rectangulos ACE, BCE teem $AC=BC$ por hypothese, CE commum, logo $EA=EB$, e logo E he o centro dos extremos A, B.

323. Todos os pontos do plano que divide ao meio hum angulo, sendo perpendicular ao seu plano, são centros dos lados deste angulo, ou das suas continuações.

Fig. 120. Esteja o angulo CAD dividido em partes iguaes pela recta AE, e esteja levantado o plano EAB perpendicular ao plano CAD. Digo que hum ponto qualquer B deste plano EAB he centro dos lados AC, AD do angulo CAD, ou que as perpendiculares BC, BD a seus lados são iguaes.

Os triedros $ABCE$, $ABDE$ teem iguaes os diedros $BAEC$, $BAED$, porque são rectos por hypothese, BAE he commum, e $CAE = DAE$ por hypothese; logo $BAC = BAD$.

Os triangulos ABC, ABD, rectangulos em C, D, teem AB commum, $BAC = BAD$; logo $BC = BD$.

Se estas perpendiculares cahem nas continuações dos lados, a demonstração he similhante.

324. No angulo polyedro regular os planos que dividem so diedros pelo meio teem huma intersecção commum a todos, que se chama *eixo*, e cujos pontos são todos centros de todas as faces do polyedro.

Fig. 122. Seja regular o angulo polyedro $ABCDE$.

Seja AF a intersecção dos dois planos FAB, FAC, que dividem ao meio respectivamente os diedros $CABE$, $DACB$.

Os triedros $AFCD$, $AFCB$ teem o angulo FAC commum, $DAC = BAC$ por hypothese, e os diedros $DACF$, $BACF$ tambem iguaes, por serem metades do diedro $DACB$, logo esses triedros são iguaes, e logo o diedro $CADF = CABF$; mas este ultimo he a metade do diedro $CABE$, igual a $CADE$ tambem por hypothese, logo o plano FAD divide ao meio o diedro $CADE$. Já se vê como se póde provar que o plano FAE divide tambem ao meio o diedro $DAEB$.

Hum ponto qualquer F do eixo AF, estando em planos que dividem os diedros em partes iguaes, he centro de huma primeira face e da segunda, da segunda e da terceira, e assim por diante, e finalmente da ultima e da primeira, de sorte que os cathetos, ou as perpendiculares abaixadas deste ponto sobre as faces, serão iguaes a segunda á primeira, a terceira á segunda, e assim por diante, e a final a primeira á ultima. Logo este ponto F qualquer do eixo he centro de todas as faces.

325. No angulo polyedro regular, fazendo as arestas iguaes, o plano que passar por tres dos seus extremos passa por todos; a secção deste plano na superficie do angulo polyedro he hum polygono regular; o eixo passa pelo centro deste polygono, e he perpendicular sobre elle.

No angulo polyedro regular $ABCDE$ sejão iguaes AB, AC, AD, AE. Tirem-se BC, CD, DE, EB. Serão isosceles e identicos os triangulos ABC, ACD, ADE, AEB, porque, segundo a hypothese, teem os lados iguaes, bem como os angulos comprehendidos: logo

$$BC = CD = DE = EB.$$

Os triedros $CABD$, $DACE$ são identicos, porque os angulos ACB, ACD, ADC, ADE são iguaes, bem como os diedros $DCAB$, $CDAE$, logo he o diedro $ACDB = ACDE$, e logo os planos BCD, CDE coincidem, ou o plano que passa por B, C, D passa tambem por E.

A identidade dos triedros dá tambem angulo $BCD = CDE$, e da mesma maneira se achará $CDE = DEB$, e $EBC = BCD$. Logo o polygono $BCDE$ tem iguaes os lados e os angulos, ou he regular.

Seja F o ponto em que o eixo AF encontra o polygono. Tirem-se FC, FD, FE.

Vio-se na demonstração do theorema precedente que o eixo faz com duas arestas quaesquer o mesmo triedro que com outras duas contiguas, logo faz tambem com as arestas angulos iguaes. Assim os triangulos FAC, FAD, FAE são identicos, por terem iguaes os angulos em A, AF commum, e os outros lados AC, AD, AE iguaes. Logo FC, FD, FE são iguaes, e logo F he o centro do polygono.

A identidade dos triangulos dá tambem a igualdade dos angulos AFC, AFD, AFE; logo AF he perpendicular ao plano $BCDE$ (§ 254).

326. Sendo dados hum angulo e o numero de faces de hum angulo polyedro regular, achar hum dos seus diedros, ou construi-lo.

Porque o angulo BAC he dado, será conhecido

$$ACB = \frac{1}{2}(2r - BAC) = ACD;$$

e porque o numero de faces he dado, serão dados no polygono $BCDE$ o numero de lados, e por consequencia o valor do angulo BCD. Se se puder construir este polygono regular, então no triedro $CABD$ conheceremos os seus angulos, e construindo-o, teremos feito o diedro pedido, que he hum dos diedros do angulo polyedro regular procurado.

De outra maneira: faça-se o polygono regular, se fôr possivel, com tantos lados, quantas são as faces do angulo polyedro, porém de grandeza arbitraria. No centro F do polygono levante-se a perpendicular indeterminada FA. Com hum lado BC, e com os angulos

$$ABC = ACB = \frac{1}{2}(2r - BAC)$$

faça-se o triangulo BCA; e com hum dos seus lados iguaes CA determine-se agora o ponto A na perpendicular FA. Tirando rectas por A e pelos vertices do polygono, estas serão as arestas do angulo polyedro pedido.

327. O diedro do angulo tetraedro regular, cujo angulo he de 60°, he supplemento do diedro do triedro regular, cujo angulo tambem he de 60°.

Fig. 124. Seja $ABCDE$ o angulo tetraedro regular, e FG a intersecção de dois dos planos de suas faces oppostas ABE, ACD. Os triedros $ABCF$, $AEDG$ são identicos, porque

$BAC=EAD$, e os diedros $FABC$, $FACB$, $GAED$, $GADE$ são todos iguaes, por serem supplementos dos diedros do angulo tetraedro proposto. Logo $BAF=EAG$; mas estes dois angulos com BAE fazem 180°, e $BAE=60°$, logo $BAF=60°$, e da mesma fórma he $CAF=60°$; e porque $BAC=60°$ por hypothese, segue-se que o triedro $ABCF$ he regular, o seu angulo $=60°$, e o seu diedro $FABC$ supplemento do diedro $EABC$ do angulo tetraedro regular, cujo angulo he de 60°.

328. Dois planos, cujas inclinações sobre a mesma recta não estão no mesmo plano, concorrem.

Sejão HBA, EAB as inclinações respectivas dos planos Fig. 125. FGH, EDE sobre a recta AB, e não seja $HBA<EAB$, nem estejão ambos no mesmo plano. Seja IG a intersecção dos planos EEB, FGH. Será ABI ou $ABG>ABH$, logo ABI ou $ABG>EAB$, e logo IG produzida encontra EE produzida, se fôr necessario, isto he, huma recta do plano FGH encontra outra do plano EDE.

Deve subentender-se aqui que os dois angulos d'inclinação não são rectos ao mesmo tempo, porque nesse caso os planos são parallelos.

329. O quadrilatero, ainda que não seja plano, em que a somma de dois lados oppostos he igual á somma dos outros dois, tem centros de lados, que se acharão todos situados em huma só recta.

No quadrilatero não plano $ABCD$ seja Fig. 126.

$$AB+DC=AD+BC.$$

Dividão-se ao meio os angulos A, B por planos EAG, FBG perpendiculares aos seus planos. Estes dois planos concorrem, porque sendo EAG perpendicular ao plano DAB, em que suppomos EA, he o angulo EAB a inclinação da recta AB sobre este plano EAG. Similhantemente, suppondo FB no plano ABC, FBA he a inclinação da mesma recta AB sobre o plano FBG; mas AEB, BFA são planos diversos por hypothese, porque o quadrilatero proposto não está em hum plano; logo os planos EAG, FBG concorrem. Seja G hum dos pontos do concurso.

De G abaixem-se as perpendiculares GH, GI, GK, GL sobre todos os lados do quadrilatero proposto. Teremos (§ 323)

$$GL = GH = GI.$$

Digo que teremos tambem

$$GK = GL = GI.$$

Como os triangulos rectangulos GAL, GAH teem commum a hypothenusa e iguaes os lados GL, GH, será $AL = AH$. Da mesma maneira he $BI = BH$, logo

$$AL + BI = AB,$$

e logo, em virtude da equação de condição, será

$$DL + CI = DC.$$

Por consequencia se nos triangulos rectangulos GDL, GDK, que teem a hypothenusa commum, fosse $GL \gtrless GK$, seria $DL \lessgtr DK$; e nos triangulos rectangulos GCI, GCK aconteceria o mesmo, isto he, seria $GI \gtrless GK$, e $CI \lessgtr CK$, logo

$$DL + CI \lessgtr DK + CK, \text{ ou } \lessgtr DC;$$

absurdo. Logo G he centro dos lados do quadrilatero.

A mesma propriedade competirá a qualquer outro ponto da intersecção dos planos EAG, FBG.

330. Se duas rectas cortarem cada huma os dois lados oppostos de hum quadrilatero não plano em partes pro-

porcionaes, ellas se cortão mutuamente na mesma proporção.

Se as duas rectas EF, GH cortarem os lados do quadrilatero $ABCD$ não plano, de sorte que seja Fig. 127.

$$AG : BG :: DH : CH :: AF : DF :: BE : CE,$$

digo que as duas rectas se cortão em algum ponto I, e na mesma proporção de

$$FI : EI :: GI : HI :: AG : BG.$$

Tire-se a aresta AC do triedro $CBAD$. Conduza-se EK parallela a AB e terminada em hum ponto K de AC. Tirem-se KH, KF, KG, EH, GF, BD. Pela construcção temos

$$AK : CK :: BE : CE :: AG : BG$$

por hypothese, logo KG he parallela a BC. Similhantemente se prova que KH, KF, EH, FG são respectivamente parallelas a AD, CD, BD, BD; logo EH, GF são parallelas, logo estão no mesmo plano, e logo EF, GH estão neste plano, e cortão-se em hum ponto I.

Os triangulos IEH, IGF são pois similhantes, e dão

$$FI : EI :: GI : HI :: GF : EH.$$

Os triangulos KEH, AGF são tambem similhantes, por terem os lados parallelos, e dão

$$GF : EH :: AG : EK \text{ (ou } BG\text{)},$$

logo

$$FI : EI :: GI : HI :: AG : BG.$$

Não he necessaria outra demonstração para o caso em que os termos da proporção

$$AG : BG :: BE : CE$$

não sejão consecutivos na figura, como o são estes, porque se isto acontece a respeito dos angulos A, C, não acontece a mesma cousa a respeito dos outros dois, visto que temos

$$BE : CE :: DH : CH,$$

termos que não são linhas consecutivas na figura.

331. Mais geralmente: se duas rectas cortão cada huma os dois lados oppostos do mesmo quadrilatero proporcionalmente, mas em diversas proporções, cada huma cortará ainda a outra na mesma proporção em que corta os lados oppostos.

Fig. 64. Sejão

$$DF : CF :: AE : BE,$$

e

$$DH : AH :: CG : BG.$$

Digo que as rectas EF, GH se cortão em M, e que teremos

$$HM : GM :: DF : CF,$$

bem como

$$FM : EM :: DH : AH.$$

Pelos dois pontos B, E tirem-se Bb, Ee parallelas a GH, e terminadas no plano ADC. Facilmente se vê que bHC he a recta intersecção do plano ADC e do plano das duas parallelas Bb, HG. Logo teremos

$$bH : HC :: BG : GC :: AH : HD;$$

e logo os triangulos AHb, DHC são similhantes. Teremos depois

$$Ae : eb :: AE : EB :: DF : FC,$$

donde

$$Ae : DF :: Ab : DC;$$

mas por causa dos triangulos similhantes AHb, DHC he

$$Ab:DC::AH:HD;$$

logo

$$Ae:DF::AH:DH:$$

além disto os triangulos AHb, CHD sendo similhantes, teem o angulo $HAe=HDF$; logo são similhantes os triangulos AHe, DHF, e logo o angulo $AHe=DHF$.

Segue-se pois que eHF he huma linha recta, e que assim o ponto F está no plano das parallelas Ee, GH, isto he, que GH, EF estão situadas no mesmo plano, e se cortão em hum ponto M. Depois disto, em consequencia de serem parallelas Ee, MH, teremos

$$EM:MF::eH:HF::AH:HD.$$

Por huma construcção similhante se demonstraria, que

$$HM:MG::DF:CF.$$

332. Tres planos perpendiculares ás tres arestas de hum triedro concorrem dois a dois; as suas intersecções fórmão hum triedro; e este triedro he supplementario do primeiro.

Os tres planos $EFCG$, $EGDH$, $EHBF$ são respectivamente perpendiculares ás tres arestas AC, AD, AB do triedro $ACDB$, e CF, CG, DG, DH, BH, BF são as intersecções dos planos com as faces do triedro. Serão rectos os angulos ACF, ACG, ADG, ADH, ABH, ABF. Fig. 128.

Os tres planos concorrem dois a dois, porque se $EFCG$, $EGDH$ não concorressem, então ou coincidirião, e teriamos AC, AD perpendiculares ao mesmo plano, absurdo: ou serião parallelos, e neste caso AD que he perpendicular a hum o seria ao outro, isto he, a $EFCG$, e logo AC, AD ainda perpendiculares ao mesmo plano, absurdo. Sejão pois EG, EH, EF as intersecções dos planos dois a dois;

ellas serão perpendiculares ás faces do triedro, e os angulos EGC, EGD, EHD, EHB, EFB, EFC serão rectos. Estas intersecções tambem concorrem duas a duas, porque estando duas a duas em cada hum dos planos, por exemplo, EF, EG no plano $EFCG$, se não concorressem serião parallelas, mas ellas são perpendiculares ás faces ABC, ACD, logo estas faces ou serião parallelas, ou estarião em direitura, absurdos. As tres intersecções EF, EG, EH não estão no mesmo plano, porque então este plano $FEGH$, visto conter EF perpendicular á face ABC, lhe seria tambem perpendicular, mas o plano EGH tambem he perpendicular a AD, logo ABC, e AD serião parallelos (§ 293), absurdo.

As tres intersecções concorrem no mesmo ponto E, porque se FE não encontrar GE no concurso de GE com HE, mas em outro ponto, então não poderá encontrar HE, porque não estão todas tres no mesmo plano; mas isto he contrario ao que se tem demonstrado, logo $EFGH$ he hum triedro. No quadrilatero $EFCG$ os angulos em F, G são rectos, logo FEG he supplemento de FCG, mas este he a medida do diedro $BACD$, logo já temos hum angulo do triedro $EFGH$, que he o supplemento de hum diedro do triedro $ABCD$. Por meio dos quadrilateros $EGDH$, $EHBF$ se achará da mesma maneira que os outros dois angulos do triedro $EFGH$ são os supplementos respectivos dos outros dois diedros do triedro proposto.

No quadrilatero $ABFC$ os angulos em B, C são rectos, logo BFC he o supplemento do angulo BAC, mas BFC he a medida do diedro $GEFH$, logo temos já hum diedro do triedro $EFGH$, que he o supplemento de hum angulo do triedro $ABCD$. Por meio dos quadrilateros $ACGD$, $ABHD$ se achará CGD supplemento de CAD, e BHD supplemento de BAD, isto he, os outros dois diedros do triedro $EFGH$ supplementos dos outros dois angulos do triedro proposto, cada hum de cada hum.

LIVRO 4.°

Dos Polyedros que circumscrevem espaço.

333. Polyedro definido, ou sómente *Polyedro* he o volume circumscripto por planos.

334. Construir polyedros.

São para este effeito necessarios mais de tres vertices, que não estejão no mesmo plano. Tirem-se então rectas de cada hum dos vertices para todos os outros, e planos pelas rectas que concorrem duas a duas. O volume encerrado pelas faces ou polygonos exteriores será hum polyedro.

335. *Prisma* he o polyedro, cujos vertices são os extremos de rectas parallelas terminadas entre planos parallelos. *Bases do prisma* são as duas faces que estão nestes planos parallelos. *Eixo do prisma* he a recta tirada entre os centros das bases, quando ellas os teem. *Altura do prisma* he a perpendicular entre as bases. *O prisma he recto* quando as bases são perpendiculares ás outras faces.

336. As bases do prisma são polygonos identicos, e as outras faces parallelogrammos.

As bases $ABCD$, $EFGH$ sendo planos parallelos, e Fig. 129.
as arestas entre ellas AE, BF, CG, DH sendo parallelas, segue-se que as intersecções AB, EF das bases com o plano $ABFE$ serão parallelas, logo $ABFE$ he hum parallelogrammo, e $AB = EF$. Similhantemente se acha que as outras faces lateraes, ou não bases, são parallelogrammos, e que as arestas BC, CD, DA são respectivamente parallelas e iguaes ás arestas FG, GH, HE. Assim temos o angulo $ABC = EFG$, porque os seus lados são parallelos e estão no diedro $ABFC$, e da mesma ma-

neira se prova a igualdade dos outros angulos comprehendidos entre os lados iguaes dos polygonos $ABCD$, $EFGH$, logo estes, que são as bases, são identicos.

337. *Deutoprisma* he o polyedro cujos vertices são os de dois polygonos identicos e parallelos, mas taes que os lados de hum não são parallelos aos seus iguaes no outro. Os dois polygonos são as *bases*. As outras faces são triangulos. Se os polygonos teem centros, o deutoprisma tem por eixo a recta que os une. Se o eixo he perpendicular ás bases, o deutoprisma he *recto*.

338. Construir deutoprismas rectos e equilateros.

Fig. 130. Seja ABC hum polygono regular de hum numero qualquer de lados, e ADC hum dos seus sectores. Divida-se em partes iguaes o angulo do centro ADC pela recta DE igual ao raio DA. Levante-se EF indeterminada, mas perpendicular ao plano do polygono. Com AF ou $CF = AC$, determine-se agora na perpendicular o ponto F. Em cada hum dos sectores do polygono faça-se huma similhante construcção.

Todos os pontos como E serão vertices de hum polygono identico a ABC, que está no mesmo plano, e tem o mesmo centro, por ter o mesmo angulo do centro composto de dois semi-angulos do centro como ADE, e iguaes os raios DE a DA. Todas as rectas como AE serão iguaes, por serem bases de triangulos isosceles identicos. Todas as rectas como AF são iguaes, porque o são aos lados do polygono regular. Logo todas as perpendiculares como EF são iguaes, por serem lados de triangulos rectangulos como AEF, de que os outros lados são absolutamente os mesmos.

Todos os pontos F serão vertices de hum polygono identico áquelle que tem os vertices E, e terá parallelos aos deste os lados iguaes correspondentes, porque a recta entre hum primeiro ponto F e o segundo he parallela e igual á recta tirada entre os dois pontos E correspondentes, por serem aquelles pontos extremos de perpendiculares ao mesmo plano, e iguaes. Da mesma maneira são iguaes e parallelas as rectas tiradas entre o segundo e terceiro F; e entre o segundo e terceiro E; e assim por diante. Logo cada angulo FFF he igual a cada angulo EEE, e por consequencia os vertices F pertencem a hum polygono identico áquelle que tem os vertices E. Todos estes vertices são os vertices de hum prisma. Este prisma he recto, porque suppondo-se G o centro do polygono FF etc., será $GF=DE$; e estas duas rectas são tambem parallelas, porque estão nos planos parallelos dos dois polygonos, e no plano que divide ao meio o diedro, cuja aresta he EF, pois que GF, DE sendo raios de polygonos regulares, dividem ao meio os angulos F, E destes polygonos, e estes angulos são cada hum a medida daquelle diedro, por estarem em planos perpendiculares á aresta EF. Logo $EDGF$ he hum rectangulo. Por consequencia he recto o deutoprisma, cujos vertices são A, B, C, e os pontos F, porque tem o mesmo eixo daquelle prisma e tem commum com elle a base superior; e he tambem equilatero, porque além das arestas, que são lados de polygonos identicos, tem iguaes a estas, por construcção, as outras arestas taes como AF, FC, etc.

339. *Parallelipipedo* he o prisma, cujas faces são todas parallelogrammos.

340. Construir o parallelipipedo, sendo dados hum vertice e suas tres arestas, com os angulos que ellas fórmão.

Sejão AB, AD, AE as tres arestas dadas em grandeza e posição. Fig. 129

Complete-se o parallelogrammo $ABCD$. Tirem-se para a parte de AE as rectas BF, CG, DH parallelas e iguaes a AE; e os extremos destas rectas serão os vertices do parallelipipedo pedido.

Porque EF será parallela a AB, visto serem rectas que unem os extremos da mesma parte de parallelas iguaes. Pela mesma razão GF, GH são respectivamente parallelas a CB, CD; logo os planos EFG, FGH são parallelos ao plano $ABCD$. Mas por F ou por FG não se podem tirar dois planos parallelos a $ABCD$, logo $EFGH$ he hum plano. Logo os oito vertices mencionados o são de hum prisma, por serem extremos de parallelas entre planos parallelos. Porém huma das bases he parallelogrammo, logo a outra base e as outras faces o serão tambem, isto he, todas são parallelogrammos.

341. 1.° As quatro diagonaes do parallelipipedo cortão-se reciprocamente em partes iguaes, por serem ao mesmo tempo diagonaes dos parallelogrammos formados pelas arestas oppostas e pelas diagonaes de faces oppostas.

2.° Os seis parallelogrammos diagonaes do parallelipipedo cortão-se tambem mutuamente em partes iguaes, porque se cortão ou pelas suas diagonaes, ou pelo meio de seus lados oppostos.

3.° No parallelipipedo huma aresta, a diagonal respectiva do parallelipipedo, e a diagonal respectiva da face em que não ha aresta alguma parallela á primeira, estão em hum plano diagonal.

4.° A secção feita no parallelipipedo por hum plano parallelo a huma face ou base, he parallelogrammo.

5.° A secção que passa por huma diagonal do parallelipipedo, he parallelogrammo.

Fig. 131. 6.° Se huma aresta AD do parallelipipedo $ABCD$, estiver dividida em partes iguaes no ponto F, a diagonal AG do parallelipipedo estará no plano AHI das duas diagonaes dos parallelogrammos BF, CF.

Porque as diagonaes suppostas IG, FM dos parallelogrammos IG, FM estão em faces parallelas, e no plano das duas parallelas IF, GM; logo são parallelas. Mas tambem he AH parallela a FM: logo AH, IG são parallelas, ou estão no mesmo plano; e nelle estão AH, AI, AG.

Fig. 132. 7.° Mais geralmente: se huma aresta AD do parallelipipedo $ABCD$ estiver dividida de modo que seja $AE = DF$; a diagonal AG do parallelipipedo estará no plano AHI das duas diagonaes dos parallelogrammos BF, CE.

Porque as diagonaes suppostas IG, EM dos parallelogrammos IG, EM estão em faces parallelas, e no plano das duas parallelas IE, GM; logo são parallelas. Mas tambem he AH parallela a EM: logo AH, IG são parallelas ou estão no mesmo plano; e nelle estão *AH*, *AI*, *AG*.

8.º O enunciado dos dois numeros precedentes se reduz ao seguinte:

Se dois planos parallelos ás bases, e equidistantes destas, cortão o parallelipipedo, temos então em hum mesmo plano huma diagonal do parallelipipedo, e as duas diagonaes dos parallelogrammos contiguos entre si e com huma das bases, e que são interceptados nas faces pelos dois planos. O mesmo acontece quando hum plano equidistante das bases, e parallelo a ellas, corta o parallelipipedo.

342. *Parallelipipedo rectangulo* he aquelle em que todas as faces são rectangulos.

343. Construir hum parallelipipedo rectangulo.

Com tres arestas perpendiculares entre si complete-se o parallelipipedo, e as bases e todas as faces serão rectangulos, porque todas as arestas que se encontrão são perpendiculares entre si.

344. *Cubo* he o polyedro cujas faces são todas quadrados.

345. Com hum lado dado construir o cubo.

Com tres arestas perpendiculares entre si, e cada huma igual ao lado dado, complete-se o parallelipipedo, e as suas bases e as outras faces serão quadrados, porque todas as arestas serão iguaes, e aquellas que se encontrão perpendiculares entre si.

346. *Pyramide* he o polyedro que tem todos os vertices, excepto hum, no mesmo plano. *Base da pyramide* he a face que está neste plano. *Vertice principal* he o vertice exceptuado. Todas as faces que se encontrão no vertice são triangulos. Se a base tem centro de lados, a recta tirada deste ponto para o vertice he o *eixo*. Se o eixo he perpendicular á base, a *pyramide* he *recta*. Se as arestas do vertice são iguaes, cada huma chama-se *lado da pyramide*. *Altura da pyramide* he a perpendicular abaixada do vertice sobre o plano da base e terminada neste plano.

347. Os prismas, bem como as pyramides, distinguem-se pelo numero d'angulos da base. Assim os *prismas triangulares* são aquelles que teem triangulos por bases; *prismas quadrangulares* aquelles cujas bases são quadrilateros; etc. *Pyramide triangular* he aquella cuja base he hum triangulo; etc.

348. He facil de ver, que no prisma triangular os tres diedros formados pelas faces lateraes ou não bases, valem juntos dois diedros rectos, tirando por huma das suas arestas o plano parallelo á terceira face, e imitando a demonstração do § 62. Tambem he claro que, tirando hum plano perpendicular a estas mesmas faces lateraes, a sua intersecção com ellas he hum triangulo, cujos angulos são cada hum a medida do diedro respectivo, e que estes diedros e os parallelogrammos das faces lateraes teem entre si as mesmas relações que os angulos e lados do dito triangulo. Tambem póde substituir-se o volume do prisma á superficie do triangulo, para affirmar desde já que este volume he o producto de huma face lateral e da metade da perpendicular abaixada sobre ella da aresta parallela. Em huma palavra, chamando triedro prismatico o systema das tres faces lateraes do prisma triangular, e igualmente polyedro prismatico hum similhante systema de faces dos outros prismas, podem formar-se tantas proposições, quantas ha na geometria rectilinea plana sobre os triangulos e polygonos, mudando sómente as palavras vertices em arestas, lados em faces, angulos em diedros, e superficie em volume, da mesma maneira que triangulos em triedros prismaticos, e polygonos em polyedros prismaticos. Assim póde affirmar-se, por exemplo, que huma face lateral do prisma he menor que a somma das outras faces lateraes.

349. Na pyramide triangular e no parallelipipedo qualquer face he base.

350. Distinguem-se geralmente os polyedros pelo numero das suas faces. Assim aquelle que tem quatro faces chama-se *tetraedro*, o de cinco *pentaedro*, o de seis *hexaedro*, o de sete *heptaedro*, o de oito *octaedro*, o de doze

dodecaedro, o de vinte *icosaedro*. A pyramide triangular he hum tetraedro; e, reciprocamente, o prisma triangular hum pentaedro; e o parallelipipedo hum hexaedro.

351. Quando se falla das tres arestas da pyramide ou do prisma triangulares, ou do parallelipipedo, deve subentender-se as tres arestas de hum de seus triedros, as quaes bastão para determinar estes polyedros, que podem ser designados pelas mesmas letras do triedro, expressando-se comtudo se he pyramide, ou prisma triangular, ou parallelipipedo.

352. Dois prismas que teem as arestas d'entre as bases em direitura e iguaes são iguaes.

Nos prismas $ADEB$, $IPMK$ as arestas AB, DC, EF, HG d'entre as bases de hum sejão os prolongamentos das arestas correspondentes IK, ML, PN, GO do outro, e sejão iguaes todas estas arestas. Fig. 133.

He sempre possivel, mantendo essas hypotheses, suppôr commum hum dos vertices G, sem que os volumes dos prismas se sobreponhão.

De $AB = IK$ conclue-se $AI = BK$, e teremos tambem $DM = CL$, $EP = FN$.

Os volumes $ADHEIPGM$, $BCGFKNOL$ admittem sobreposição, porque as suas faces $ADHE$, $BCGF$ são identicas, e tambem as outras faces, arestas, e diedros. Logo estes dois volumes são identicos, e, tirando de cada hum a parte commum $BCGFIPGM$, os restos, que são os prismas dados, são iguaes.

353. Mudar hum parallelipipedo em outro, que lhe seja igual e rectangulo, e que tenha igual altura e igual base.

Seja no parallelipipedo proposto $ABED$ o angulo HGF não maior que recto, e o diedro $BFGE$ tambem não obtuso. Tire-se o plano PGM perpendicular a GH, o qual será encontrado pelas arestas parallelas a GH produzidas, e seja nos pontos P, M, I. Produza-se HG até ser $GO = GH$, e complete-se o parallelipipedo $GPMO$, que será igual ao proposto, e terá a base $PGON = EHGF$, por serem estas parallelogrammos de bases iguaes, e da mesma altura, que he a perpendicular entre as parallelas *EN*, *HO*. Terá tambem o ultimo prisma a mesma altura que o proposto, a qual he a perpendicular entre os planos parallelos *ADK*, *EHN*.

Se com o ultimo parallelipipedo *GPMO* se pratíca o mesmo para a parte do diedro agudo *MGOP*, levantando o plano *GSR* perpendicular a *GP*, e encontrado em *R*, *S* por *IM*, *NO* produzidas, e continuando *PG* até ser $GQ = GP$, será *GQSR* o parallelipipedo pedido, depois de completado.

Porque, sendo *GR* a intersecção dos dois planos *GPM*, *SGR* perpendiculares ao plano *QGS*, por passar este ultimo por *GO* perpendicular a *GPM*, e por *GQ* perpendicular a *SGR*, será *GR* perpendicular a *GS* e *GQ*. Mas *GQ* he perpendicular a *GS* por construcção; logo são perpendiculares entre si as arestas *GQ*, *GR*, *GS*, e o seu parallelipipedo he rectangulo, e terá com o segundo, e portanto com o proposto, iguaes o volume, a base, e a altura.

354. O prisma triangular he metade do parallelipipedo que tem as mesmas tres arestas.

Porque, sendo parallelogrammos as faces do parallelipipedo *ABDE*, serão *DC*, *EF* parallelas entre si, pois que o são a *AB*; logo as diagonaes *DE*, *CF* das faces oppostas estão no plano destas parallelas, com o qual teem cada huma dois pontos communs. Este plano *DEFC* divide o parallelipipedo em dois prismas triangulares, e produzido divide tambem em dois prismas o parallelipipedo *IKMP*. Ora sendo o plano *PGM* perpendicular a *GO*, o prisma triangular *IKMP* he igual ao prisma triangular *GOPM*, porque os triedros que os determinam admittem sobreposição, por serem rectos os angulos *KIM*, *KIP*, bem como *OGP*, *OGM*, e $PIM = MGP$, e por serem iguaes as arestas sobrepostas. Mas estes dois prismas identicos são tambem iguaes, cada hum a cada hum, aos primeiros *ABDE*, *HDEG* (§ 352), logo estes são iguaes entre si. Logo o prisma triangular *ABDE* he metade do parallelipipedo *ABDE*, que tem as mesmas tres arestas *AB*, *AD*, *AE*.

355. Os prismas, que teem em direitura as arestas de entre as bases, estão entre si na razão destas arestas.

Digo que os dois prismas $ABCF$, $FGHI$, que teem as arestas d'entre as bases nas mesmas parallelas, estão entre si na razão das arestas AF, FI. Fig. 134.

Porque se estas forem commensuraveis, e AD a sua medida commum, o prisma $ABCF$ será composto do prisma $ABCD$ tomado tantas vezes quantas AF contém AD; e o prisma $FGHI$ contém tambem o prisma $ABCD$ tantas vezes quantas FI contém AD. Estão pois os prismas propostos na razão das arestas AF, FI em direitura. O mesmo acontece se as arestas forem incommensuraveis (§ 123).

356. Se hum parallelipipedo tiver hum triedro com as mesmas partes de hum triedro d'outro parallelipipedo, estarão os dois parallelipipedos na razão composta das razões das tres arestas de hum para as tres arestas do outro similhantemente postas.

Em dois parallelipipedos, que teem entre si dois triedros symetricos como $ABCD$, $BEIH$, podem sempre fazer-se adjacentes as faces dos triedros, as quaes teem angulos iguaes como GBF, HBI, e pôr em direitura as faces, em que estão angulos iguaes como CAB, IBE, e tambem em direitura as faces DAB, HBE, por causa dos diedros iguaes $CABD$, $IBEH$, ficando portanto AB, BE em direitura tambem; porque ainda que os triedros dados sejão symetricos em ordem inversa, comtudo, como em cada parallelipipedo cada triedro he symetrico em ordem inversa com o seu opposto e tem iguaes arestas, podemos sempre trazer hum dos parallelipipedos á posição representada na figura. Será Fig. 135.

parallelip. $ABCD$: parallelip. $BEFG$ :: AB : BE,

parallelip. $BEFG$: parallelip. $BEFH$ :: BG : BH,

parallelip. $BEFH$: parallelip. $BEIH$ :: BF : BI, por conseguinte

$$\text{parallelip. } ABCD : \text{parallelip. } BEIH$$

$$:: \frac{AB}{BE} \times \frac{AD}{BH} \times \frac{AC}{BI} : 1.$$

357. Dimensões do parallelipipedo, do prisma, e da pyramide triangulares são a sua altura, a altura da base, e a base da base.

358. Dois parallelipipedos estão na razão composta das razões das suas dimensões.

Porque mudando os parallelipipedos dados em outros rectangulos, e de bases e alturas iguaes ás dos primeiros (§ 353), os ultimos, tendo as mesmas dimensões que os primeiros, e triedros identicos por serem trirectangulos, estão entre si na razão composta das razões das suas arestas, as quaes são tambem as dimensões dos parallelipipedos propostos.

359. Se hum dos dois parallelipipedos fôr o cubo, o outro será igual ao cubo multiplicado pelo producto das razões das suas dimensões com o lado do cubo, isto he, o parallelipipedo he igual ao producto das suas dimensões avaliadas em numeros por meio do lado do cubo, que he a unidade do producto.

360. AB^c significa o cubo construido sobre a recta AB. $\overline{AB}^3$ significa que AB deve ser medida com a unidade linear u, e que o numero que resulta deve ser elevado á terceira potencia. Assim teremos

$$AB^c = \overline{AB}^3 \times u^c.$$

361. O parallelipipedo he igual ao producto da sua base pela sua altura. Porque a base he o producto de duas dimensões do parallelipipedo. Assim, sendo P o volume do parallelipipedo, B a sua base, A a sua altura, b a base da

base B, e a a altura de B, será $P = B \times A$, o que na realidade quer dizer que

$$P = \frac{b}{u} \times \frac{a}{u} \times \frac{A}{u} \times u'.$$

362. Hum prisma qualquer he tambem o producto de huma das bases pela altura. Porque se o prisma he triangular, então tem a mesma altura do parallelipipedo com as mesmas tres arestas; logo (§ 354) elle e a sua base são metades respectivas do parallelipipedo e da sua base, e a proposição he verdadeira. Se o prisma não he triangular, póde comtudo ser dividido em prismas triangulares de altura igual á do prisma dado, para os quaes a proposição he certa, e por conseguinte o he tambem para o prisma reunião de todos esses prismas triangulares.

363. As pyramides que teem a mesma altura e as bases iguaes são iguaes.

As pyramides $ABCD$, $abcd$ tenhão a mesma altura DX, e iguaes as areas das bases BCD, bcd que supponho situadas no mesmo plano. Digo que são iguaes. Fig. 136.

Se he possivel, seja a pyramide $ABCD > abcd$. Então póde separar-se por hum plano FGH parallelo ás bases a differença $FGHBCD$ das duas pyramides, ou imagina-la.

Divida-se a altura DX em tantas partes iguaes nos pontos I, K, L, quantas forem necessarias para que huma DL seja menor que a altura da dita differença. Por estes pontos conduzão-se planos parallelos ao plano das bases das pyramides. As intersecções MNO, PQR, STU, mno, pqr, stu destes planos com as pyramides são polygonos respectivamente similhantes ás suas bases. Completem-se os prismas $URST$, $ROPQ$, $ODMN$, $urst$, $ropq$, $odmn$.

A pyramide $ABCD$ será composta dos primeiros destes prismas, e além disso de polyedros, tendo cada hum dos ultimos, a altura DL, e preenchendo exactamente a reunião das suas bases a area BCD; e como esses polyedros são limitados superiormente pelo ponto A, e pelas arestas ST, PQ, MN, sendo a pyramide $ABCD$ triangular, e se o não fôr por maior numero d'arestas, que não fórmão polygono em cada polyedro, vê-se claramente que estes polyedros não prismas, tomados juntos, são menores que a differença supposta $FGHBCD$ das duas pyramides. Logo os prismas da pyramide $ABCD$ juntos são maiores que os prismas da pyramide $abcd$ juntos tambem. Mas huns e outros teem alturas iguaes, logo a somma das bases dos primeiros he maior que a somma das bases dos segundos, isto he,

$$MNO + PQR + STU > mno + pqr + stu.$$

Mas temos (§ 301)

$$STU : PQR : MNO : BCD :: \overline{XI}^2 : \overline{XK}^2 : \overline{XL}^2 : \overline{XD}^2$$

$$:: stu : pqr : mno : bcd;$$

logo

$$STU + PQR + MNO : BCD :: stu + pqr + mno : bcd.$$

Porém o primeiro antecedente he maior que o segundo, como se acaba de demonstrar, logo $BCD > bcd$; absurdo. Por consequencia as duas pyramides não teem differença.

364. As proporções antecedentes mostrão que nas pyramides, que teem alturas e bases iguaes, as secções parallelas ás bases e equidistantes dos vertices são iguaes.

365. O prisma triangular he metade do producto de huma das faces não bases, e da perpendicular tirada da aresta opposta sobre essa face, como haviamos affirmado no § 348.

Porque este prisma he metade do parallelipipedo, que se póde completar com hum triedro e as suas arestas, que sahem de hum dos vertices daquella face, a qual se póde considerar como base do parallelipipedo, e a aresta opposta estará na outra base.

366. Segue-se do paragrapho precedente e do § 362, que o prisma triangular he o producto de huma das faces pela perpendicular tirada sobre ella de hum vertice opposto, quando este vertice está em huma face opposta; e a metade desse producto, quando está em huma aresta opposta.

367. O prisma triangular he composto de tres tetraedros iguaes.

Seja $ABCDEF$ o prisma. Por hum vertice qualquer C, Fig. 137.
e pela aresta opposta ED da base opposta tire-se hum plano. Pelo mesmo ponto C, e por huma BD das diagonaes da face opposta tire-se outro plano. Digo que os tres tetraedros $CABD$, $CEBD$, $CDEF$ que compõem o prisma são iguaes. Porque o tetraedro $CABD = CEBD$, por serem as suas bases ABD, EBD metades do parallelogrammo $ABED$, e a sua altura commum a perpendicular abaixada de C sobre o plano deste parallelogrammo. O tetraedro $CABD = CDEF$, porque teem por bases as bases ABC, DEF do prisma, e por altura a perpendicular entre ellas ou entre os seus planos.

368. O tetraedro he a terça parte do producto da base pela altura.

Por ser, como $CDEF$, a terça parte do prisma que se póde completar com o triedro $FCDE$ da base, e com as arestas FC, FD, FE.

369. Qualquer pyramide he a terça parte do producto da base pela altura.

Porque póde ser dividida em tetraedros por planos tirados pelo vertice e pelas diagonaes da base.

370. O tetraedro he composto de dois tetraedros identicos $(2T')$, e de dois prismas iguaes $(2p)$.

Seja $ABCD$ (T) o tetraedro, ABC (b) a base, e a a Fig. 138.
altura do tetraedro.

Divida-se cada huma das arestas em duas partes iguaes nos pontos E, F, G, H, I, L, e tirem-se por estes pontos as rectas traçadas na figura.

Serão HL, FG parallelas a AB, e portanto parallelas entre si. O plano destas parallelas com os dois EFH, *HIL* dividem o tetraedro nas quatro partes do enunciado.

Os tetraedros *BEFH*, *HILD* teem as arestas correspondentemente iguaes, e similhantemente postas, e por conseguinte iguaes todos os angulos das faces, e os triedros; logo admittem sobreposição, ou são identicos. O polyedro *CFGIHL* he hum prisma triangular, cuja base $CFG=\frac{b}{4}$, e a altura$=\frac{a}{2}$, logo o seu volume he$=\frac{ab}{8}$. O polyedro *AEFGHL* he outro prisma triangular, cujas bases são *AGL*, *EFH*, e cujo volume he

$$\frac{1}{2}\times EFGA\times\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}b\times\frac{a}{2}=\frac{ab}{8}.$$

Logo estes dois prismas são iguaes, e portanto

$$T=\frac{1}{4}ab+2T'.$$

371. Dividindo do mesmo modo T' em dois tetraedros $(2\,T'')$, e em dois prismas $(2p')$, a base de p' será $=\frac{1}{4^2}b$, e a altura $=\frac{1}{4}a$; por conseguinte

$$T'=2\left(\frac{ab}{4^3}+T''\right);$$

logo

$$T=\frac{1}{4}ab+\frac{1}{4^2}ab+4T'';$$

e, dividindo T'' da mesma fórma, será

$$T''=2\left(\frac{1}{4^3}b\times\frac{1}{8}a+T'''\right),$$

logo

$$T = \frac{1}{4}ab + \frac{1}{4^2}ab + \frac{1}{4^3}ab + 8T''',$$

e assim por diante, isto he, será (Arith. Univ. § 330)

$$T = \frac{ab}{4-1} = \frac{ab}{3}.$$

O que prova a proposição do § 368 sem dependencia da do § 363.

372. *Prisma truncado* ou *tronco do prisma* he huma das duas partes em que o prisma fica dividido por hum plano, que não seja parallelo ás bases nem as córte.

373. O prisma triangular truncado he composto de tres pyramides, que teem todas por base a mesma base do tronco, sendo a altura de cada huma a perpendicular abaixada sobre a base de cada hum dos tres vertices oppostos.

No pentaedro $ABCDEF$ não seja ABC parallelo a EDF, mas sejão AD, BE, CF parallelas entre si. Este pentaedro será hum tronco de qualquer dos prismas que se podem completar com o triedro $FCDE$, sendo as arestas FD, FE determinadas, mas a terceira de grandeza arbitraria não menor que cada huma das arestas parallelas. Fig. 137.

Este prisma truncado he composto de tres tetraedros $CDEF$, $CABD$, $CBDE$. O primeiro já tem por base DEF, e por altura a perpendicular abaixada do ponto C sobre o seu plano. O segundo $CABD$, considerando ACD como a sua base, he igual a outro tetraedro que tivesse esta mesma base e o vertice E, porque teria igual altura, sendo BE parallela a ACD. Este ultimo tetraedro que tem os vertices A, C, D, E, considerando AED como base, he igual a outro tetraedro, cujos vertices são A, D, E, F, por terem commum a base AED, e os vertices F, C na recta FC parallela ao plano ADE; logo o segundo tetraedro $CABD$ he igual a outro, que tem por base DEF, e por altura a perpendicular abaixada do vertice A sobre o seu plano.

*

O terceiro tetraedro *CBDE*, considerando nelle *BDE* como base, he igual ao tetraedro que tem a mesma base e o vertice *F*, por ser *CF* parallela ao plano *BDE*, logo he igual a hum tetraedro, cujos vertices são *B*, *D*, *E*, *F* ou cuja base he *DEF*, e a altura a perpendicular abaixada de *B* sobre o plano *DEF*.

374. *Pyramide truncada* he o resto de huma pyramide depois de se lhe separar outra por hum plano parallelo á base.

375. O tetraedro truncado he composto de tres tetraedros, que teem todos por altura a altura do tronco, e por bases respectivas a base inferior do tronco, a superior, e huma meia proporcional entre as duas.

Fig. 139. Sejão *ABCDEF* o tronco, e *ABC*, *DEF* as suas bases, que serão parallelas e similhantes.

Tirem-se os planos *CED*, *CBD*, a recta *CG* parallela a *BE*, e tire-se tambem *DG*.

O tetraedro truncado proposto compõe-se dos tres tetraedros *CDEF*, *CABD*, *CEBD*. O primeiro tem por base *DEF* que he a base inferior do tronco, e por altura a perpendicular abaixada de *C*, a qual he ao mesmo tempo a altura do tronco, por estar *C* na base superior. O segundo tetraedro *CABD*, considerando nelle *ABC* como base, tem por base a base superior do tronco, e por altura a perpendicular tirada do seu vertice *D* para esta base, a qual he tambem altura do tronco. O terceiro tetraedro *CEBD*, considerando-lhe a base *BDE*, he igual ao tetraedro *GEBD*, porque os vertices *C*, *G* estão em *CG* parallela a *BE* e por conseguinte ao plano *BDE*. Logo este terceiro tetraedro equivale a outro, cuja base he *DEG*, e cuja altura he a perpendicular abaixada de *B* sobre o plano desta base, a qual he tambem altura do tetraedro truncado. Resta só mostrar que a area *DEG* he meia proporcional entre as areas *ABC*, *DEF*.

Os triangulos *DEF*, *DEG*, que teem o vertice *D* commum, e as bases *EF*, *EG* sobre a mesma recta, dão

$$\text{area } DEF : \text{area } DEG :: EF : EG.$$

BC, *EG* sendo parallelas por hypothese, e *BE*, *CG* por construcção, segue-se que he $EG = BC$.

Os angulos *ABC*, *DEG*, sendo iguaes, por serem similhantes as bases do tronco, segue-se que as perpendiculares abaixadas de *C* sobre *AB*, e de *G* sobre *ED* são iguaes. Logo

$$\text{area } DEG : \text{area } ABC :: ED : BA.$$

Pela similhança das bases do tronco he

$$EF : BC \text{ (ou } EG) :: ED : BA;$$

logo

$$\text{area } DEF : \text{area } DEG :: \text{area } DEG : \text{area } ABC.$$

376. O mesmo tem logar em qualquer pyramide truncada.

Porque pondo a pyramide, e hum tetraedro de base igual e da mesma altura, sobre hum plano, e fazendo nestes dois polyedros duas secções em cada hum por dois planos parallelos ás bases, huma das secções para determinar cada hum dos troncos, e a outra para determinar no tetraedro a secção media proporcional; será a base superior do tronco do tetraedro igual á base superior do tronco da pyramide, a altura de hum tronco igual á do outro, hum dos troncos igual ao outro, a secção media de hum igual á secção media do outro, sendo por hypothese iguaes as bases inferiores dos dois troncos.

377. *Dois tetraedros similhantes* são aquelles cujos vertices estão situados de maneira que todos os diedros de hum sejão iguaes a todos os diedros do outro, cada hum a cada hum, e pela mesma ordem.

378. Dois tetraedros, que teem dois triedros identicos, cada hum a cada hum, e similhantemente dispostos, são similhantes.

Nos tetraedros *ABCD*, *EFGH* seja o triedro *ABCD* Fig. 140.

identico com o triedro $EFGH$, e o triedro $BACD$ com o triedro $FEGH$, e situados da mesma fórma. Digo que os outros dois triedros de hum são identicos com os outros dois triedros do segundo, cada hum com cada hum, e similhantemente postos, isto he, todos os diedros de hum são iguaes aos diedros do outro e similhantemente postos, assim como todos os angulos.

Porque o diedro $DCAB = HGEF$, e o diedro $ACBD = EGFH$ por hypothese, e o angulo $ACB = EGF$, porque pertencem aos triangulos ABC, EFG cujos angulos são iguaes pela hypothese dos triedros identicos, segue-se que o triedro $CABD$ he identico com $GEFH$. O triedro $DABC$ he identico com o triedro $HEFG$, porque teem entre si os diedros iguaes, por pertencerem estes aos outros triedros identicos.

379. Os tetraedos serão identicos por sobreposição, se além de serem similhantes, tiverem tambem huma aresta igual, e similhantemente disposta.

380. Serão pois similhantes dois tetraedros em todos os casos em que cinco partes de hum delles são correspondentemente iguaes a cinco do outro, similhantemente postas, e proprias para determinar dois triedros em cada hum dos tetraedros, a saber, tres partes que determinem hum triedro em cada tetraedro, por exemplo, os triedros $ABCD$, $EFGH$, e outras duas partes que com os diedros $CABD$, $GEFH$ sejão aptas para a determinação dos triedros $BACD$, $FEGH$.

381. Com dados superfluos são similhantes os tetraedros, quando se dão tres faces similhantes e similhantemente postas em cada tetraedro, e com os dados sufficientes, quando sómente duas faces de hum tetraedro são similhantes, e similhantemente dispostas em relação a duas do outro, sendo tambem iguaes os diedros comprehendidos por essas faces.

382. A similhança destas faces póde ser o resultado da proporcionalidade das arestas, o que augmenta ainda os casos de similhança dos tetraedros.

383. Dois tetraedros similhantes estão na razão triplicada composta das arestas adjacentes a triedros identicos correspondentes.

Os tetraedos $ABCD$, $EFGH$ estão como os prismas triangulares formados com os triedros identicos $ABCD$, $EFGH$, e com as suas arestas, dos quaes prismas os tetraedos são cada hum a terça parte; e estes prismas estão como os parallelipipedos formados com os mesmos triedros e arestas, dos quaes são metades; e os parallelipipedos estão na razão composta das razões das arestas de hum dos ditos triedros para as arestas do outro similhantemente postas. Logo

$$\text{tetraed.}\, ABCD : \text{tetraed.}\, EFGH :: \frac{AB}{EF} \times \frac{AC}{EG} \times \frac{AD}{EH} : 1.$$

Mas pela similhança das faces temos

$$\frac{AC}{EG} = \frac{AB}{EF}, \text{ e } \frac{AD}{EH} = \frac{AB}{EF},$$

logo, substituindo estes valores, teremos

$$\text{tetraed.}\, ABCD : \text{tetraed.}\, EFGH :: \frac{\overline{AB}^3}{\overline{EF}^3} : 1.$$

384. *Polyedros similhantes* são aquelles que, tendo o mesmo numero de faces, são compostos de tetraedros similhantes, e dispostos da mesma maneira.

385. Prova-se, imitando o que se fez no § 147, que os polyedros similhantes estão na razão triplicada composta das arestas adjacentes a vertices similhantemente postos.

386. O tetraedro tem por centro de vertices o ponto commum a tres planos perpendiculares a tres arestas de hum dos seus triedros, e tirados pelo meio dellas.

Sejão E, F, G os meios das tres arestas do triedro Fig. 141.

ABCD no tetraedro *ABCD*. Sejão *HEL*, *IFL*, *KGL* tres planos perpendiculares respectivamente ás mesmas tres arestas *AB*, *AC*, *AD*.

Os tres planos concorrem em algum ponto *L* (§ 332). Este ponto *L* he centro dos extremos de *AB*, porque está em hum plano perpendicular a esta recta no seu meio, logo $LA = LB$. Por igual razão he $LA = LC$, e $LA = LD$, isto he, quatro pontos, que não estão no mesmo plano, teem centro.

387. A perpendicular abaixada de hum vertice do tetraedro sobre o plano da face opposta cahe dentro della, quando as outras faces fazem com esta diedros todos agudos.

Fig. 142. Sejão *ABCD* o tetraedro, *A* o vertice, e *BCD* a face opposta. De *A* tire-se *AF* perpendicular a *BC*; de *F* levante-se no plano *BCD* a perpendicular *FG* a *BC*. Será *BC* perpendicular ao plano *AFG*; logo tambem os planos *AFG*, *BCD* são perpendiculares entre si. O angulo *AFG* he agudo, por ser a medida do diedro formado pela face *ABC* com a proposta, e agudo por hypothese. Tire-se *AG* perpendicular a *FG*, a qual cahirá dentro do angulo *AFG*, e portanto dentro do diedro *ABCD*. Mas *AG* he perpendicular a *BCD*, por estar em hum plano que lhe he perpendicular, e por ella mesmo o ser á intersecção dos dois, por construcção; da mesma fórma *AG* está dentro dos outros dois diedros *ABDC*, *ACDB*; logo está na parte commum aos tres diedros, isto he, dentro do tetraedro.

388. O tetraedro tem por centro de faces o ponto de concurso de tres planos, que dividem ao meio cada hum dos tres diedros, aos quaes huma face do tetraedro he commum; e os cathetos estão todos no tetraedro.

Fig. 143. Os planos *BCE*, *CDE*, *BDE* dividão ao meio, e respectivamente os diedros *ABCD*, *ACDB*, *ABDC*, os quaes teem commum a face *BCD* do tetraedro *ABCD*. Qualquer destes planos não póde encontrar a face opposta sem que primeiro córte dentro do tetraedro os outros dois planos, e a sua intersecção; seja *E* a intersecção commum dos tres planos. Este ponto *E*, pois que está no plano *BCE*, he

centro das faces *ABC*, *BCD* (§ 321), e centro das faces *ACD*, *BCD*, porque está no plano *EDC;* e por analoga razão he centro das faces *ABD*, *BCD;* logo as perpendiculares abaixadas de *E* sobre as faces *ABC*, *ACD*, *ABD* são iguaes cada huma á perpendicular abaixada do mesmo ponto sobre a face *BCD*, isto he, *E* he o centro das faces do tetraedro.

O catheto da face *BCD* cahe dentro do tetraedro proposto, porque *EBCD* he outro tetraedro que tem agudos os diedros feitos com *BCD* (§ 387) os quaes são metades dos diedros que teem as mesmas arestas no tetraedro proposto, logo esta perpendicular abaixada de *E* cahe dentro do tetraedro *EBCD*, e logo dentro do proposto. Ora este centro *E* de todas as faces, que está necessariamente nos tres planos *BCE*, *CDE*, *BDE*, póde comtudo ser achado por iguaes divisões d'outros diedros das outras faces, e então tambem nos outros tetraedros, como *EBCD*, os cathetos cahem dentro delles, ou do proposto.

389. Cada hum dos seis planos, que passão pelo centro das faces do tetraedro, e por cada huma das arestas, divide o diedro respectivo em duas partes iguaes.

390. Qualquer pyramide recta, cuja base tem centro de lados, tem centro de faces sobre o eixo.

Na base *BCDE* da pyramide *ABCDE* seja *F* o centro dos lados, e *FG*, perpendicular a *BC*, hum dos apothemas, e seja o eixo *AF* perpendicular sobre a base. Fig. 144.

Corte-se o diedro *ABCD* em partes iguaes pelo plano *BCH* que encontre o eixo em *H*. Tirem-se *AG*, e *HI* perpendicular a *AG*. Os planos *AFG*, *BCD* são perpendiculares entre si, porque no primeiro he *AF* perpendicular ao segundo, por hypothese; *BC*, por construcção, he perpendicular á sua intersecção *GF*, logo *BC* he perpendicular ao primeiro *AFG*, e a *AG*.

Sendo *BC* perpendicular ao plano *AFG*, e achando-se na face *ABC*, será esta face perpendicular a *AFG*. *HI* he perpendicular á intersecção *AG* destes dois planos, logo he perpendicular á face *ABC*. *H* he hum ponto do plano

BCH que divide ao meio o diedro $ABCD$, logo as duas perpendiculares HF, HI sobre as suas faces são iguaes.

AG, sendo perpendicular a BC, como se acaba de demonstrar, he a altura da face ABC, e sendo hypothenusa do triangulo AFG, cujos outros lados são sempre os mesmos, a saber, o eixo e o apothema da base, segue-se que todas as alturas das faces lateraes são iguaes.

Os triangulos AFG, AIH, rectangulos em F, I, teem o angulo FAG commum, logo são similhantes, e dão

$$AG : GF :: AH : HI,$$

ou

$$AG : GF :: AF - HI : HI,$$

ou

$$AG + GF : GF :: AF : HI,$$

proporção, na qual os tres primeiros termos são sempre os mesmos, e por conseguinte tambem o quarto; logo todas as perpendiculares ás faces tiradas de H são iguaes, cada huma a HF, e logo o ponto H do eixo he centro das faces da pyramide proposta.

391. No tetraedro equilatero o apothema dos lados da
Fig. 145. base he o terço da altura desta, e o catheto das faces he a quarta parte da altura do tetraedro.

O centro F dos lados do triangulo equilatero BCD está nas duas rectas BL, DG, que dividem ao meio dois angulos B, D. Estas rectas dividem o triangulo em dois identicos, ou he cada huma perpendicular ao lado opposto, que ellas dividem em partes iguaes, ou he cada huma a altura do triangulo. Tire-se GL que será parallela a BD, e sua metade, por serem G, L os meios de BC, DC. Os triangulos BDF, GLF são pois similhantes, logo $GF = \frac{1}{2} DF$, ou

$$GF = \frac{1}{3} GD = \frac{1}{3} AG,$$

por hypothese.

O ponto F he tambem centro dos vertices B, C, D, porque os triangulos FBC, FCD, FBD são identicos em razão da igualdade dos lados do triangulo BCD e dos seus semi-angulos, isto he, temos $FB=FC=FD$.

Em consequencia desta igualdade, da igualdade das arestas do tetraedro actual $ABCD$, e de ser AF commum aos triangulos AFB, AFC, AFD, estes serão identicos, por conseguinte iguaes os angulos em F, logo rectos, portanto o eixo AF perpendicular á base, isto he, o tetraedro recto. Teremos pois pela ultima proporção em que he agora $AG=3GF$

$$4GF : GF :: AF : HI \text{ (ou } HF\text{)},$$

donde se conclue

$$HF = \frac{1}{4} AF.$$

392. O parallelipipedo rectangulo tem centro de vertices, que he o ponto commum a tres planos perpendiculares a tres arestas, que tomadas duas a duas não são parallelas, e tirados pelo meio de cada huma.

Seja $ABDE$ o parallelipipedo rectangulo, e I o ponto commum aos tres planos perpendiculares ás tres arestas AB, AD, AE nos seus meios K, L, M. Fig. 146.

Porque o plano que passa por K he perpendicular a todas as arestas parallelas a AB, e as divide em partes iguaes, teremos $IA=IB$, $IC=ID$, $IE=IF$, $IG=IH$. Por igual razão, a respeito do plano que passa por L, teremos $IB=IC$, $IF=IG$. Relativamente ao plano que passa por M, teremos $ID=IH$. Logo $IA=IB=IC=ID=IH=IG=IF=IE$, ou he I centro de todos os vertices.

393. No polyedro convexo a somma do numero S dos angulos solidos, e do numero F das faces he igual ao numero A das arestas mais dois, isto he,

$$S+F=A+2.$$

Primeiramente, seja o polyedro huma pyramide, e l o numero dos lados da sua base; he claro que teremos as equações seguintes

$$S=l+1,\ F=l+1,\ A=2l;$$

logo

$$S+F=A+2.$$

Agora podemos imaginar hum polyedro qualquer como o aggregado de tantas pyramides quantas faces elle tem, as quaes tenham todas hum vertice commum no interior do polyedro, e cada huma das faces deste por base de cada huma. Ora, quando se unem duas destas pyramides pela face commum, se as outras faces lateraes não estão em direitura, então o polyedro composto destas duas pyramides terá de menos tres angulos solidos que se confundem nos outros tres, e tres arestas pela mesma razão, e as duas faces que reunindo-se em huma desapparecem; de maneira que sendo S, S', S'' os numeros respectivos dos angulos solidos das duas pyramides e do seu composto, e similhantemente F, F', F'' os numeros das faces destes tres polyedros, e A, A', A'' os numeros das suas arestas, será

$$S''=S+S'-3;\ F''=F+F'-2;\ A''=A+A'-3.$$

Mas nas duas pyramides componentes temos

$$S+F=A+2;\ S'+F'=A'+2;$$

logo

$$S+S'+F+F'=A+A'+4,$$

isto he

$$(S+S'-3)+(F+F'-2)=(A+A'-3)+4-2,$$

donde resulta

$$S''+F''=A''+2.$$

Se na reunião das duas pyramides ficão em direitura duas faces lateraes, ou, o que he o mesmo, se se reduzem a huma só, então F'' ficará diminuido de huma unidade, mas neste caso tambem se perde a aresta que deveria separa-las, e A'' fica tambem com huma unidade de menos, de maneira que a ultima equação subsiste ainda, e o polyedro composto das duas pyramides verifica o theorema.

Se a este ultimo composto se reune outra das pyramides, em que o polyedro proposto se dividio, pela face commum, desapparecem da mesma fórma tres angulos solidos, duas faces, e tres arestas, de sorte que sendo agora S, F, A as denominações respectivas ao primeiro composto binario, S', F', A' as relativas á terceira pyramide, e S'', F'', A'' a este novo composto ternario, será ainda

$$S+F=A+2,$$

$$S'+F'=A'+2,$$

$$S+S'+F+F'=A+A'+4,$$

$$(S+S'-3)+(F+F'-2)=(A+A'-3)+4-2;$$

logo

$$S''+F''=A''+2,$$

e a proposição he ainda verdadeira, e assim por diante.

Quando ao reunir de huma nova pyramide a hum destes compostos, em huma face commum, ou o que he o mesmo por duas faces identicas, se faz ao mesmo tempo a reunião d'outras duas faces contiguas, então desapparecem quatro angulos solidos, porque se confundem com outros quatro, desapparecem as quatro faces da reunião, por ficarem no interior do composto; e tambem seis arestas, quatro porque se confundem com outras quatro, e duas por ficarem dentro do composto; de maneira que sendo sempre S, F, A as denominações no composto antecedente, S', F', A' as da ultima pyramide ajuntada, e S'', F'', A'' as do composto actual, teremos por quarta equação

$$(S+S'-4)+(F+F'-4)=(A+A'-6)+2,$$

ou

$$S''+F''=A''+2.$$

Quando tres faces contiguas de huma nova pyramide se confundem, em sua reunião ao composto de pyramides, com outras tres deste composto, perdem-se então cinco angulos solidos, que se reunem a outros cinco; perdem-se seis faces, que ficão no composto; e nove arestas, cinco que se confundem com outras cinco, e quatro que ficão no composto: por isso temos então

$$(S+S'-5)+(F+F'-6)=(A+A'-9)+2,$$

isto he

$$S''+F''=A''+2.$$

E assim por diante, de maneira que, sendo $2m$ o numero de faces continuas reunidas e perdidas, o numero de angulos solidos perdidos será $m+2$, e o numero das arestas perdidas será $3m$. Logo teremos

$$(S+S'-m-2)+(F+F'-2m)=(A+A'-3m)+2,$$

ou

$$S''+F''=A''+2.$$

Finalmente, a ultima pyramide fica reunida ao ultimo composto por todas as suas n faces lateraes triangulares, e fórma o polyedro proposto. Mas perdem-se $n+2$ angulos solidos, porque se perdem tambem os do vertice, que ficão dentro do polyedro; perdem-se $2n$ faces; e $3n$

arestas; $2n$ dentro do polyedro, e n que se confundem na superficie; logo

$$(S+S'-n-2)+(F+F'-2n)=(A+A'-3n)+2,$$

por conseguinte he sempre

$$S''+F''=A''+2.$$

394. Sendo a_3, a_4, a_5, etc. os numeros respectivos das faces triangulares, quadrangulares, pentagonaes, etc. de hum polyedro, temos

$$F=a_3+a_4+a_5+a_6+\text{etc.} \;\ldots\ldots\; (A).$$

O numero d'angulos das faces, ou dos seus lados, quando ellas estivessem separadas, seria $3a_3+4a_4+5a_5+6a_6$ $+$ etc. Mas o numero d'arestas ou de diedros do polyedro he metade deste numero de lados, logo

$$A=\frac{1}{2}(3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+\text{etc.}) \;\ldots\ldots\; (B).$$

Sendo s_3, s_4, s_5, s_6, etc. os numeros respectivos dos angulos triedros, tetraedros, pentaedros, hexaedros, etc de hum polyedro, he tambem $3s_3+4s_4+5s_5+6s_6$ $+$ etc. o numero dos seus angulos; logo

$$3s_3+4s_4+5s_5+6s_6+\text{etc.}=3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+\text{etc.} \;\ldots\ldots\; (C).$$

Combinando as equações (A), (B) com a equação do theorema precedente

$$S+F=A+2, \;\ldots\ldots\; (D)$$

resulta

$$2S=a_3+2a_4+3a_5+4a_6+\text{etc.}+4 \;\ldots\ldots\; (E).$$

395. Conclue-se das equações (B), (E), que não havendo faces triangulares, ou sendo o numero dellas < 8, o numero das arestas he menor que o dôbro do numero dos angulos solidos.

396. No angulo polyedro convexo, cujos angulos conservão os mesmos valores, não póde hum diedro mudar de valor sem que outros tres pelo menos mudem tambem.

He necessario que o angulo polyedro tenha mais de tres faces, porque o triedro, cujos tres angulos são invariaveis, tem os diedros determinados, ou invariaveis tambem.

Fig. 147. Seja pois $ABCDEFG$ o angulo polyedro convexo proposto.

Seja $CABG$ hum diedro que augmente ou diminua; então os angulos que o comprehendem sendo constantes, o terceiro angulo CAG do triedro $ABCG$ augmentará tambem ou diminuirá. Mas se qualquer dos outros diedros não varia, o triedro $ACDE$, por exemplo, será constante, e logo constante o angulo diagonal CAE, e o diedro $CAED$; e tirando este diedro do diedro $DAEF$, será determinado o diedro $CAEF$, logo constante o triedro $ACEF$, e por consequencia o angulo diagonal CAF; e proseguindo deste modo, se concluirá que CAG he constante: absurdo. Nem se diga que CAG póde ficar constante, apezar da mudança do diedro $CABG$, porque isto só aconteceria quando este diedro de saliente passasse para reintrante, caso excluido por hypothese, por se haver supposto convexo o polyedro.

He pois necessario que varie algum outro diedro do angulo polyedro $ACDEFG$; e não basta que seja só o diedro immediato $BACD$, porque se os outros ficão invariaveis, tudo então será constante no angulo polyedro $ADEFG$. O angulo GAD sendo constante, bem como CAD, esses angulos e a differença $GADC$ dos dois diedros constantes $CADE$, $GADE$ farião constante o triedro $ACDG$, e logo GAC constante: absurdo.

Seja pois $DAEF$ outro diedro variavel além do diedro $CABG$. Conceba-se agora o angulo polyedro proposto dividido em dois *ABCDE*, *ABGFE* por hum plano *BAE* tirado pelas arestas dos dois diedros variaveis. He claro já, que se qualquer dos diedros *BACD*, *CADE* não varia no angulo polyedro *ABCDE*, tudo nelle será constante, e o mesmo acontecerá no angulo polyedro *ABGFE*, se os diedros *BAGF*, *GAFE* forem constantes. Por conseguinte o diedro *CABG*, que se compõe de dois *CABE*, *GABE* constantes, seria tambem constante: absurdo.

Logo he preciso que hum terceiro diedro varie, e seja *CADE* sómente, se fôr possivel. Será constante o angulo polyedro *ABCD*, mesmo quando fosse mais que triedro, e tambem constante *BAD*; e será variavel o diedro *BADE*, e logo tambem variavel o angulo *BAE*, o que não póde ser se o angulo polyedro *ABGFE* fôr constante. Por consequencia he preciso que varie hum quarto diedro, ou no angulo polyedro *ABCDE*, e que faça *BAE* constante, ou no angulo polyedro *ABGFE*, e que o faça variavel. Assim, variando hum angulo solido cujos angulos são constantes, varião, pelo menos, quatro dos seus diedros.

397. Com as mesmas faces e dispostas da mesma fórma não se podem formar dois polyedros convexos differentes.

Para que com as hypotheses do enunciado se podessem construir polyedros diversos, seria necessario que os diedros, e por consequencia os angulos solidos, não fossem todos constantes.

Seja pois, se he possivel, s o numero d'angulos solidos variaveis, s' o numero dos constantes, d o numero dos diedros variaveis, e d' o numero dos constantes.

1.° Não havendo faces triangulares, nem angulos solidos triedros.

Será (§ 396) $d \geqq 2s$, por ser cada diedro commum a dois angulos solidos. Será tambem $d' \geqq 2s'$, por não haver triedros, e por consequencia não serem menos de quatro os diedros constantes em cada hum dos s' angulos solidos constantes; logo

$$d + d' \geqq 2(s + s').$$

Mas $d+d'=A$, numero das arestas do polyedro em questão,

$$=2a_4+\frac{5}{2}a_5+3a_6+\frac{7}{2}a_7+\text{etc.}$$

Tambem $s+s'=S$, numero dos angulos solidos, logo

$$2(s+s')=2S=2a_4+3a_5+4a_6+5a_7+\text{etc.}+4,$$

logo

$$2a_4+\frac{5}{2}a_5+3a_6+\frac{7}{2}a_7+\text{etc.}\geqq 2a_4+3a_5+4a_6+5a_7+\text{etc.}+4$$

absurdo. Logo o polyedro he invariavel neste primeiro caso.

2.° Tendo o polyedro faces triangulares, mas não angulos solidos triedros.

Fig. 148. Sobre cada huma ABC das faces triangulares construa-se hum heptaedro $ABCDEFGHI$, que não tenha outra face triangular além da mesma face ABC do polyedro proposto, a qual ficará dentro do novo polyedro composto, o que se obtem da maneira seguinte:

Pelas arestas AB, BC, AC, e pelo vertice B tirem-se os quatro planos $ADEB$, $BCGF$, $ACGHD$, $BEIF$, que fação com a base ABC diedros tão agudos, quanto he preciso para que o novo polyedro seja ainda convexo. Antes que dois oppostos destes quatro planos se encontrem, tirem-se pelas rectas DE, FG situadas nelles dois planos diversos $DEIH$, $FGHI$, que se encontrem em HI, e terminem nos outros dois planos $BEIF$, $ADHGC$. Cada hum destes heptaedros tem só triangular a face ABC; as outras faces são cinco quadrilateros, e hum pentagono.

Estes heptaedros são invariaveis, porque a sua configuração depende só dos triangulos sobre os quaes são construidos, e esses não varião por hypothese.

Isto posto, e conservando as denominações do primeiro caso, o novo polyedro, sendo a_3 o numero das faces triangulares do proposto, tem mais do que este $11\,a_3$ arestas, ou diedros, $6\,a_3$ angulos solidos, $5\,a_3$ quadrilateros, a_3 pentagonos. Assim teremos

$$d \geqq 2\,s,$$

$$d' \geqq 2\,s',$$

$$11\,a_3 = 2 \cdot 6\,a_3 - a_3;$$

logo, ajuntando estas expressões, será

$$d + d' + 11\,a_3 \geqq 2\,(s + s' + 6\,a_3) - a_3,$$

expressão em que o primeiro membro he o numero das arestas ou dos diedros do polyedro augmentado, e $s + s' + 6\,a_3$ o numero dos seus angulos solidos. Assim teremos

$$2a_4 + \frac{5}{2}a_5 + 3a_6 + \text{etc.} + 11\,a_3 \geqq 2(a_4 + 5a_3) + 3(a_5 + a_3) + 4a_6 + \text{etc.} + 4 - a_3:$$

absurdo. Logo o polyedro he ainda invariavel neste caso.

3.° Tendo o polyedro angulos solidos triedros.

Separe-se do polyedro huma pyramide triangular formada pelas tres arestas de hum triedro, e que será invariavel. Se no polyedro restante, que tem hum angulo solido menos do que o proposto, houver ainda algum triedro, separe-se ainda similhantemente outra pyramide triangular: continuando assim, chegaremos finalmente ou a hum polyedro sem triedros, e por conseguinte invariavel, ou a hum polyedro só com quatro angulos solidos, isto he, a hum tetraedro, igualmente invariavel: logo tambem he invariavel o polyedro proposto.

398. Todo o angulo solido convexo tem hum angulo solido supplementario, que se construe do mesmo modo que o do triedro.

399. No polygono rectilineo convexo não póde hum angulo mudar quando os lados são constantes, sem que ao mesmo tempo mudem pelo menos tres angulos mais. Prova-se isto imitando o que se fez no § 396.

400. Com as mesmas arestas e os mesmos diedros, dispostos pela mesma ordem, não se podem formar dois polyedros diversos e convexos.

Porque para isso ser possivel, seria necessario que os angulos das faces mudassem (§ 397). Ora hum angulo não póde mudar sem que outros tres variem tambem no mesmo angulo solido, como se póde provar por meio do seu supplementario, e da proposição § 396. Seja pois, se he possivel, s o numero de angulos solidos variaveis, s' o numero dos constantes, a o numero dos angulos variaveis, e a' o dos constantes.

1.° Não havendo faces triangulares, nem angulos solidos triedros.

Será $a \geqq 4s$, e $a' \geqq 4s'$; logo

$$a + a' \geqq 4(s + s').$$

Mas

$$a + a' = 4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + \text{etc.}$$

Tambem $s + s' = S$, numero dos angulos solidos, logo

$$4(s + s') = 4a_4 + 6a_5 + 8a_6 + 10a_7 + \text{etc.} + 8;$$

logo

$$4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + 7a_7 + \text{etc.} \geqq 4a_4 + 6a_5 + 8a_6 + 10a_7 + \text{etc.} + 8;$$

absurdo. Logo o polyedro he invariavel neste primeiro caso.

2.° Tendo o polyedro faces triangulares, mas não angulos solidos triedros.

Construa-se sobre cada huma hum heptaedro, como na proposição do § 397. Estes heptaedros são agora invariaveis, porque são construidos sobre triangulos invariaveis, pois que não mudão os tres lados de cada hum delles por hypothese.

Similhantemente teremos

$$a \geqq 4s;\ a' \geqq 4s';\ 22a_3 = 4\cdot 6a_3 - 2a_3;$$

logo, juntando estas expressões, será

$$a + a' + 22a_3 \geqq 4(s + s' + 6a_3) - 2a_3.$$

O primeiro membro he o numero dos angulos do polyedro augmentado, e $s + s' + 6a_3$ o numero dos seus angulos solidos.

Assim teremos,

$$4a_4 + 5a_5 + 6a_6 + \text{etc.} + 22a_3 \geqq 4(a_4 + 5a_3) + 6(a_5 + a_3) + 8a_6 + \text{etc.} + 8 - 2a_3:$$

absurdo. Logo o polyedro he ainda invariavel neste caso.

3.° Tendo o polyedro angulos solidos triedros, pratique-se como na proposição do § 397.

401. No polyedro convexo com as faces regulares, e os angulos solidos todos symetricos, qualquer destes e o seu immediato teem os angulos das faces em ordem inversa, quando as duas ordens directa e inversa existem.

Os angulos solidos $aABCa$, $aDEFa$, que teem a aresta aa commum, teem iguaes os angulos a, a da face regular commum, e tambem iguaes d, d pela mesma razão; porém a, d seguem-se em huma ordem n'hum dos angulos solidos, e em outra ou em sentido opposto no outro. Fig. 149.

402. Nos polyedros desta especie, sendo as faces polygonos regulares não todos do mesmo genero, se os angulos planos dos angulos solidos forem todos desiguaes em cada hum, não poderá existir face alguma que tenha hum numero impar de lados.

Por quanto, se isto fosse possivel, passando de hum primeiro angulo solido, dos que teem por vertices os desta face, para o segundo, a ordem directa dos seus angulos planos se mudaria em inversa, do segundo para o terceiro em directa, do terceiro para o quarto em inversa, e assim por diante. Ora, se a face he triangular este quarto angulo solido vem a ser o primeiro, e por conseguinte este angulo solido teria os seus angulos ao mesmo tempo em ordem directa e inversa: absurdo. Se a face he hum pentagono, então no quinto angulo solido a ordem dos angulos planos he directa, e no sexto inversa: absurdo, porque este sexto he neste caso o primeiro; e assim por diante.

403. Com todas as outras condições dos dois theoremas precedentes, se algum dos angulos no angulo solido fôr igual ao seu adjacente, tambem a face, á qual pertence qualquer destes angulos eguaes, não póde ter hum numero impar de lados.

Fig. 150. Se fôr $d=a$ sómente, então a face, cujos angulos são a, não poderá ter hum numero impar de lados. Porque, segundo se vê na figura, chegar-se-hia a huma face que devendo ser regular, teria os angulos desiguaes d, b: absurdo.

404. O absurdo desapparece sendo $c=a$, os quaes não são adjacentes, sendo tambem $d=b$; mas subsistiria se tivessemos $a=d$, $b=c$.

405. *Polyedro regular* he aquelle que tem as arestas iguaes, os angulos iguaes, e os diedros tambem iguaes. Por consequencia todos os seus angulos solidos são regulares e identicos, e as faces dos polygonos tambem regulares e identicas.

406. Construir polyedros regulares.

Tomando triangulos equilateros para faces do polyedro regular, cada angulo solido ficará composto de angulos destes triangulos, cada hum dos quaes he $=60°$.

1.° Logo o angulo solido póde ser composto de tres destes angulos, porque $3\times 60° < 4r$.

2.° Póde tambem conter quatro, porque $4\times 60° < 4r$.

3.° Póde ainda ser composto de cinco, porque $5\times 60° < 4r$.

Tomando quadrados para faces do polyedro regular, qualquer dos seus angulos solidos ficará composto dos angulos dos quadradros, cada hum dos quaes vale $90°$.

4.° Póde portanto o angulo solido ser composto de tres destes angulos, porque $3 \times 90° < 4r$.

Mas já não póde conter quatro, por ser $4 \times 90° = 4r$.

Tomando pentagonos regulares para faces do polyedro regular, ficará qualquer dos seus angulos solidos composto dos angulos destes pentagonos, cada hum dos quaes vale $108°$.

5.° Póde logo o angulo solido ser composto de tres destes angulos, porque $3 \times 108° < 4r$.

Mas já não de quatro, porque $4 \times 108° < 4r$.

Com hexagonos regulares, ou com polygonos regulares de maior numero de lados, não he possivel formar polyedros regulares, porque já tres angulos do hexagono regular fazem a somma de $360°$, que nenhum angulo solido póde conter.

He preciso agora dar nomes a estes polyedros regulares, ou achar o numero das suas faces.

Porque no primeiro todas as faces são triangulos, e todos os angulos solidos são triedros, as equações (C), (E) (§ 394) se reduzem a

$$3s_3 = 3a_3,$$

$$2s_3 = a_3 + 4,$$

das quaes eliminando s_3, resulta $a_3 = 4$. Logo este solido he tetraedro.

No segundo, porque as faces são ainda triangulos, e os angulos solidos são tetraedros, as equações (C), (E) dão

$$4s_4 = 3a_3,$$

$$2s_4 = a_3 + 4;$$

eliminando s_4, resulta $a_3 = 8$. Logo este solido he octaedro.

No terceiro temos similhantemente

$$5s_3 = 3a_3,$$

$$2s_3 = a_3 + 4.$$

Logo $a_3 = 20$, ou o solido he icosaedro.

No quarto temos

$$3s_3 = 4a_4,$$

$$2s_3 = 2a_4 + 4.$$

Logo $a_4 = 6$, ou o solido he hexaedro ou cubo.

No quinto temos

$$3s_3 = 5a_3,$$

$$2s_3 = 3a_3 + 4.$$

Logo $a_3 = 12$, ou o solido he dodecaedro.

Falta construir o octaedro e o icosaedro regulares, porque a construcção dos outros tres polyedros regulares he conhecida, sendo triedros os seus angulos solidos (§ 316).

Fig. 151. Para construir o octaedro regular, forme-se o quadrado $ABCD$, e do seu centro E levante-se a perpendicular EF. Com $AF = AB$ determine-se o ponto F. Tirem-se as rectas FA, FB, FC, FD, as quaes serão iguaes entre si, e aos lados do quadrado, por serem hypothenusas de triangulos rectangulos que teem iguaes os lados EA, EB, EC, ED, e EF commum, e por se haver feito $FA = AB$. Logo são equilateros os triangulos ABF, BCF, CDF, DAF, logo tambem equiangulos, e o angulo tetraedro $FABCD$ fica formado por todos estes angulos de 60° cada hum, como os angulos do octaedro; falta só demonstrar que os diedros deste angulo solido são iguaes tambem entre si. Os triedros $AFBD$, $BFAC$ teem cada hum dois angulos de 60°, e hum de 90°, logo são identicos, e logo o diedro $BFAD = AFBC$, e em cada hum dos triedros

BFAC, *CFBD* he da mesma sorte o diedro *AFBC* $=$ *BCFD*, e finalmente o diedro *BCFD* $=$ *CDFA*, isto he, todos os diedros do angulo tetraedro *FABCD* são iguaes.

Para construir o icosaedro regular forme-se hum pentagono regular; do seu centro levante-se a perpendicular ao seu plano; de hum de seus vertices, com huma recta igual a hum dos seus lados, determine-se na perpendicular o vertice do angulo pentaedro, e tirando rectas deste ponto aos vertices do pentagono, serão estas as suas arestas, e as de diedros iguaes. A demonstração he como a precedente, mudando sómente 90° em 108°, e accrescentando hum lado ao polygono da construcção.

407. Em todo o polyedro regular ha centro de faces, que he ao mesmo tempo centro de vertices.

Seja *ABDEF* hum dos angulos solidos do polyedro regular. Fig. 152.

Dividão-se em partes iguaes os diedros, de que *AB* e *AD* são as arestas, por planos cuja intersecção seja *AI*. Todos os pontos do eixo *AI* serão centros das faces do angulo polyedro *ABDEF* (§ 324). O angulo *BAI* será agudo (§ 319), por ser hum dos angulos do triedro *ABDI* opposto a hum dos diedros iguaes e agudos, os quaes diedros são metades dos diedros do polyedro regular, que he necessariamente convexo, e por consequencia os seus diedros menores cada hum que $2r$.

Construa-se para as faces d'outro angulo polyedro immediato, cujo vertice seja *B*, outro eixo ou linha dos centros *BI*, dividindo da mesma maneira dois diedros de *BACGH* em partes iguaes. *ABI* será agudo tambem e igual a *BAI*, e *AI*, *BI* estarão no mesmo plano, que he aquelle que divide ao meio o diedro de que *AB* he aresta. Logo *AI* e *BI* concorrem e são iguaes.

No mesmo ponto *I* concorre qualquer outro eixo, por exemplo *CI*, porque $BC = AB$, sendo arestas do polyedro regular. Logo *I* he centro de todas as faces e de todos os vertices do polyedro regular.

408. *Polyedro semi-regular* he aquelle cujas faces são todas polygonos regulares, mas de mais de huma especie, e cujos angulos são todos symetricos.

409. Em todo o polyedro, cujos angulos solidos são só triedros, temos

$$3a_3+2a_4+a_5=12+a_7+2a_8+3a_9+4a_{10}+\cdots+(m-6)a_m \ldots\ldots (F).$$

O que se conclue das equações (C), (E) (§ 394) substituindo-lhes S por s_3, e fazendo $s_4=0$, $s_5=0$, etc. e eliminando depois s_3.

410. Achar todos os polyedros semiregulares.

Não ha mais de tres especies destes polyedros, conforme os angulos solidos forem triedros, tetraedros, ou pentaedros; attendendo a que os menores angulos planos, que podem entrar na sua composição, são de 60° cada hum.

1.ª *Especie:* TODOS OS ANGULOS TRIEDROS.

1.° Caso. Sejão os tres angulos de cada triedro todos diversos, ou pertenção a tres qualidades de polygonos; então o numero total dos angulos dos polygonos do mesmo nome será igual ao numero total dos angulos dos polygonos de cada huma das outras duas qualidades. Logo serão iguaes tres membros das equações seguintes

$$3a_3=4a_4=5a_5=6a_6=7a_7=8a_8=\text{etc.} \ldots\ldots (G).$$

Neste mesmo caso não existirão faces, cujo numero de lados seja impar (§ 402). Tambem, por ser o angulo do quadrado $=90°$, o do hexagono regular $=120°$, o do octogono regular $=135°$, o do decagono regular $=144°$, o do dodecagono regular $=150°$, e daqui por diante sempre maiores, não poderemos combinar, neste caso, para formar o triedro, senão os angulos do quadrado, hexagono, e octogono, ou os angulos do quadrado, hexagono, e decagono: teremos por conseguinte no caso actual

Combinações.	*Condições* (G).	*Equações* (F).	*Resultados.*
a_4, a_6, a_8.....	$4a_4=6a_6=8a_8$.....	$2a_4=12+2a_8$.....	$a_4=12, a_6=8, a_8=6,$
a_4, a_6, a_{10}...	$4a_4=6a_6=10a_{10}$..	$2a_4=12+4a_{10}$...	$a_4=30, a_6=20, a_{10}=12.$

Isto he, na primeira especie e no primeiro caso temos

1.º Polyedro semiregular, tendo por faces

12 quadrados, 8 hexagonos, 6 octogonos.

2.º Polyedro semiregular

30 quadrados, 20 hexagonos, 12 decagonos.

2.º Caso. Sejão os tres angulos do triedro de duas qualidades sómente. Então, sendo duplo hum dos angulos do triedro, o polygono, a que elle pertence, não poderá ter hum numero impar de lados (§ 403). Logo o numero total dos angulos destes polygonos he o duplo do numero de todos os angulos, que estão sós em cada triedro. Esta condição involve-se na fórmula seguinte, sendo m numero par,

$$m a_m = 2 \cdot n a_n \; \ldots\ldots \; \text{(H)}.$$

Escreva-se sempre nas combinações seguintes em primeiro logar o numero dos polygonos, cujos angulos se considerão duplos no triedro, e teremos

Combinações.	*Condições* (H).	*Equações* (F).	*Resultados.*
a_4, a_3.....	$4a_4=2\cdot 3a_3$.....	$3a_3+2a_4=12$.....	$a_3=2, a_4=3,$
a_4, a_5.....	$4a_4=2\cdot 5a_5$.....	$2a_4+a_5=12$.....	$a_5=2, a_4=5,$
a_4, a_6.....	$4a_4=2\cdot 6a_6$.....	$2a_4=12$.....	$a_6=2, a_4=6,$

etc.

resultados que representão todos os prismas de bases regulares, excepto o cubo.

Combinações.	*Condições* (H).	*Equações* (F).	*Resultados.*
$a_6,\ a_3 \ldots\ldots$	$6a_6 = 2\cdot 3a_3 \ldots\ldots$	$3a_3 = 12 \ldots\ldots$	$a_6 = 4,\ a_3 = 4.$

3.º Polyedro semiregular

4 triangulos, 4 hexagonos.

Combinações.	*Condições* (H).	*Equações* (F).	*Resultados.*
$a_6,\ a_4 \ldots\ldots$	$6a_6 = 2\cdot 4a_4 \ldots\ldots$	$2a_4 = 12 \ldots\ldots$	$a_6 = 8,\ a_4 = 6.$

4.º Polyedro semiregular

6 quadrados, 8 hexagonos.

Combinações.	*Condições* (H).	*Equações* (F).	*Resultados.*
$a_6,\ a_5 \ldots\ldots$	$6a_6 = 2\cdot 5a_5 \ldots\ldots$	$a_5 = 12 \ldots\ldots$	$a_6 = 20,\ a_5 = 12.$

5.º Polyedro semiregular

12 pentagonos, 20 hexagonos.

Os hexagonos não podem combinar-se com polygonos de maior numero de lados, porque os valores dos seus angulos, de accôrdo com as equações (F), o não consentem.

Combinações.	*Condições* (H).	*Equações* (F).	*Resultados.*
$a_8,\ a_3 \ldots\ldots$	$8\cdot a_8 = 2\cdot 3a_3 \ldots\ldots$	$3a_3 = 12 + 2a_8 \ldots\ldots$	$a_8 = 6,\ a_3 = 8.$

6.º Polyedro semiregular

8 triangulos, 6 octogonos.

As combinações com o octogono não podem continuar-se, porque já $2\cdot 135° + 90° = 360°$.

Combinações.	*Condições* (H).	*Equações* (F).	*Resultados.*
$a_{10},\ a_3$	$10a_{10}=2\cdot 3a_3$	$3a_3=12+4a_{10}$	$a_{10}=12,\ a_3=20.$

7.º *Polyedro semiregular*

20 triangulos, 12 decagonos.

O dodecagono, e os polygonos de maior numero de lados, não podem produzir combinação alguma, por ser $2\cdot 150^\circ + 60^\circ = 360^\circ$.

Não ha pois, além dos prismas, mais do que sete polyedros semiregulares com os angulos solidos triedros.

2.ª *Especie:* TODOS OS ANGULOS SOLIDOS TETRAEDROS.

No polyedro cujos angulos solidos são todos tetraedros temos

$$a_3 = 8 + a_5 + 2a_6 + 3a_7 + 4a_8 + \cdots + (m-4)\,a_m \ \ldots\ldots \ (\mathrm{I}).$$

como se conclue das equações (C), (E), substituindo S por s_4, fazendo $s_3=0$, $s_5=0$, etc. e eliminando depois s_4.

Nesta segunda especie he necessario que a_3 exista sempre, porque se assim não acontecer a equação (I) será absurda.

Não póde existir angulo solido com quatro angulos de polygonos regulares todos diversos, porque a sua somma excede 360°.

1.º Caso. Tendo os angulos solidos tres qualidades de angulos planos. Então he preciso que hum delles seja duplo, na hypothese actual de ser o angulo solido tetraedro, ou he preciso satisfazer ás condições involvidas na fórmula seguinte

$$p\,a_p = 2\cdot q\,a_q = 2\cdot r\,a_r \ \ldots\ldots \ (\mathrm{J}).$$

O angulo duplo não póde pertencer a hum polygono de mais de quatro lados, nem de numero impar de lados.

Combinações.	*Condições* (J).	*Equações* (I).	*Resultados.*
a_4, a_5, a_8.....	$4a_4 = 2 \cdot 3a_5 = 2 \cdot 5a_8$.....	$a_5 = 8 + a_8$.....	$a_8 = 12,\ a_4 = 30,\ a_5 = 20.$

8.° Polyedro semiregular

20 triangulos, 30 quadrados, 12 pentagonos.

Neste caso, attendendo aos valores dos angulos, a combinação precedente he unica.

2.° Caso. Tendo cada hum dos angulos tetraedros duas qualidades de angulos unicamente, e sendo triplice hum destes.

Neste caso terá logar a condição seguinte

$$m\,a_m = 3 \cdot n\,a_n \;\ldots\ldots\; \text{(K)}.$$

Combinações.	*Condições* (K).	*Equações* (I).	*Resultados.*
$a_5,\ a_4$.....	$3a_5 + 3 \cdot 4a_4$.....	$a_5 = 8$	.....$a_4 = 2,\ a_5 = 8.$
$a_5,\ a_8$.....	$3a_5 = 3 \cdot 5a_8$.....	$a_5 = 8 + a_8$.....	$a_8 = 2,\ a_5 = 10.$

etc.

Todas estas combinações, cujo numero he infinito, dão em resultado a serie de todos os deutoprismas, excepto o octaedro regular

Combinações.	*Condições* (K).	*Equações* (I).	*Resultados.*
$a_4,\ a_5$.....	$4a_4 = 3 \cdot 3a_5$.....	$a_5 = 8$.....	$a_4 = 18,\ a_5 = 8.$

9.° Polyedro semiregular

8 triangulos, 18 quadrados.

Não ha mais combinações neste caso.

3.° Caso. Tendo cada angulo tetraedro dois angulos diversos, ambos duplos.

He necessario que estes angulos sejão alternados, porque d'outra sorte não poderia existir a_3 (§ 404), o que tornaria absurda a equação (I).

As condições (G) teem ainda logar aqui.

Combinações.	*Condições* (G).	*Equações* (I).	*Resultados.*
a_3, a_4	$3a_3 = 4a_4$	$a_3 = 8$	..... $a_4 = 6$, $a_3 = 8$.
a_3, a_5	$3a_3 = 5a_5$	$a_3 = 8 + a_5$	$a_5 = 12$, $a_3 = 20$.

10.º Polyedro semiregular

8 triangulos, 6 quadrados.

11.º Polyedro semiregular

20 triangulos, 12 pentagonos.

3.ª *Especie:* TODOS OS ANGULOS SOLIDOS PENTAEDROS.

No polyedro cujos angulos solidos tão todos pentaedros, temos

$$a_3 = 20 + 2a_4 + 5a_5 + 8a_6 + \text{etc.} \; ..... \; (L)$$

como se conclue das equações (C), (E), substituindo S por s_5, fazendo $s_3 = 0$, $s_4 = 0$, etc. e eliminando depois s_5.

O angulo solido pentaedro não póde formar-se nesta especie senão de duas maneiras: ou com quatro angulos de 60°, e hum de 90°, ou com quatro de 60°, e hum de 108°. Logo teremos a condição seguinte

$$3a_3 = 4 \cdot n a_n \; ..... \; (M).$$

Combinações.	*Condições* (M).	*Equações* (L).	*Resultados.*
a_3, a_4	$3a_3 = 4 \cdot 4a_4$	$a_3 = 20 + 2a_4$	..... $a_3 = 32$, $a_4 = 6$.
a_3, a_5	$3a_3 = 4 \cdot 5a_5$	$a_3 = 20 + 5 \cdot a_5$	$a_3 = 80$, $a_5 = 12$.

12.º Polyedro semiregular

32 triangulos, 6 quadrados.

13.º Polyedro semiregular

80 triangulos, 12 pentagonos.

Eis aqui todos os polyedros semiregulares, a saber, treze singulares, e duas series infinitas dos prismas e deutoprismas.

411. Construir todos os polyedros semiregulares.

Se nas faces do tetraedro regular, que são triangulos equilateros, se inscreverem hexagonos regulares, o polyedro que tiver por vertices os destes hexagonos terá os angulos solidos triedros e oito faces regulares, a saber,

4 triangulos, 4 hexagonos; e será o 3.º polyedro semiregular.

Se nas faces do hexaedro regular, as quaes são quadrados, se inscreverem octogonos regulares, o polyedro que tiver por vertices os destes octogonos terá os angulos solidos triedros e 14 faces, a saber,

8 triangulos, 6 octogonos; e será o 6.º semiregular.

Se nas faces do octaedro regular, as quaes são triangulos equilateros, se inscreverem hexagonos regulares, o polyedro, que tiver por vertices os destes hexagonos, terá os angulos solidos triedros e 14 faces regulares, a saber,

6 quadrados, 8 hexagonos; e será o 4.º semiregular.

Se nas faces do dodecaedro regular, as quaes são pentagonos regulares, se increverem decagonos regulares o polyedro que tiver por vertices os destes decagonos, terá os angulos solidos triedros, e 32 faces regulares, a saber,

20 triangulos, 12 decagonos; e será o 7.° semiregular.

Se nas faces do icosaedro regular, as quaes são triangulos equilateros, se inscreverem hexagonos regulares, o polyedro, que tiver por vertices os destes hexagonos, terá os angulos solidos triedros, e 32 faces, a saber,

12 pentagonos, 20 hexagonos; e será o 5.° semiregular.

Se nas faces do hexaedro regular se inscreverem octogonos regulares, e se fizerem depois mover todos igual e perpendicularmente aos cathetos respectivos deste polyedro regular, até que se possão introduzir quadrados entre cada dois lados destes octogonos que existião na mesma aresta do hexaedro, o polyedro, que tiver por vertices os destes octogonos, na posição que resultou daquelle deslocamento, terá todos os angulos solidos triedros, e 26 faces regulares, a saber,

12 quadrados, 8 hexagonos, 6 octogonos;
e será o 1.° semiregular.

Se nas faces do dodecaedro regular se inscreverem decagonos regulares, e se fizerem depois mover todos igual e perpendicularmente aos cathetos respectivos deste polyedro regular, até que se possão introduzir quadrados entre cada dois lados destes decagonos que existião na mesma aresta do dodecaedro, o polyedro, que tiver por vertices os destes decagonos, na posição que resultou daquelle deslocamento, terá todos os angulos solidos triedros, e 62 faces regulares, a saber,

30 quadrados, 20 hexagonos, 12 decagonos;
e será o 2.° semiregular.

Se nas faces e no meio das arestas do tetraedro regular se inscreverem triangulos, o polyedro, que tiver por vertices os destes ultimos triangulos, será o octaedro regular.

Mas se nas faces do hexaedro regular e no meio das arestas se inscreverem quadrados, o polyedro, que tiver por vertices os destes ultimos quadrados, terá todos os angulos solidos tetraedros, e 14 faces regulares, a saber,

8 triangulos, 6 quadrados; e será o 10.° polyedro semiregular.

Se nas faces e no meio das arestas do dodecaedro regular se inscreverem outros pentagonos regulares, o polyedro, que tiver por vertices os destes ultimos pentagonos, terá os angulos solidos tetraedros, e 32 faces regulares, a saber,

20 triangulos, 12 pentagonos; e será o 11.° semiregular.

Fazendo mover igual e perpendicularmente aos cathetos do hexaedro regular as faces respectivas, até que se possão introduzir quadrados entre cada dois lados que existião na mesma aresta; o polyedro, que tiver por vertices os destes ultimos quadrados, terá os angulos solidos tetraedros, e 26 faces regulares, a saber,

8 triangulos, 18 quadrados; e será o 9.° semiregular.

Fazendo mover igual e perpendicularmente aos cathetos do dodecaedro regular as faces respectivas, até que se possão introduzir quadrados entre cada dois lados que existião na mesma aresta; o polyedro, que tiver por vertices os destes quadrados, terá os angulos solidos tetraedros, e 62 faces regulares, a saber,

20 triangulos, 30 quadrados, 12 pentagonos; e será o 8.° semiregular.

Fazendo mover igual e perpendicularmente aos cathetos do hexaedro regular as faces respectivas, as quaes são quadrados, e demais imprimindo-lhes hum movimento de rotação, á roda dos cathetos, igual e no mesmo sentido, até que a distancia de hum dos vertices destes quadrados aos dos outros que antes se achavam reunidos no mesmo vertice, ou na mesma aresta do hexaedro e no mesmo sentido, seja igual a hum dos lados dos quadrados; o polyedro, que tiver por vertices os destes quadrados nesta nova posição, terá os angulos solidos pentaedros, e 38 faces regulares, a saber,

32 triangulos, 6 quadrados; e será o 12.° semiregular.

Fazendo o mesmo com o dodecaedro, cujas faces são pentagonos em vez de quadrados; o polyedro que d'ahi resulta terá os angulos solidos pentaedros tambem, e 92 faces regulares, a saber,

80 triangulos, 12 pentagonos; e será o 13.° semiregular.

A construcção dos prismas semiregulares não tem difficuldade. A construcção dos deutoprismas já está feita. Huns e outros são rectos e equilateros.

412. Todos os polyedros semiregulares teem centro de vertices, o qual he ao mesmo tempo centro das faces do mesmo nome.

Nos treze polyedros semiregulares, que resultão dos polyedros regulares, os centros destes são centros dos vertices dos semiregulares, e das suas faces; mas os cathetos são diversos, sendo só iguaes os das faces do mesmo nome, e por isso não se podem chamar centros geraes de todas as faces.

Nos prismas semiregulares o ponto do meio do eixo he o centro de todos os vertices; mas he centro parcial das bases e centro parcial das outras faces. Nos deutoprismas semiregulares acontece o mesmo; o centro das bases o he tambem das faces.

413. A pyramide chamada regular, porque tem regular o angulo polyedro do vertice e iguaes as arestas deste, não o he comtudo, nem mesmo semiregular, senão quando ella fôr o tetraedro regular. Entretanto tem sempre centro de faces, por ser recta e ser a sua base regular (§ 390): tambem tem centro de vertices, porque todos os planos, que dividem ao meio e perpendicularmente as arestas que partem do vertice, concorrem no ponto onde concorrem tres delles, por causa da disposição regular e da igualdade das ditas arestas.

414. O prisma recto tem menor superficie do que o obliquo, tendo a mesma base e altura.

Porque cada duas faces lateraes correspondentes do prisma recto e do obliquo são parallelogrammos, que teem por base hum lado da base commum dos dois prismas, mas as alturas são differentes, sendo menor a do primeiro, porque he perpendicular, e a segunda obliqua entre os mesmos planos parallelos.

415. Segue-se que para que o prisma recto tenha huma superficie igual á do obliquo da mesma base, he necessario que tenha maior altura, e logo tambem maior capacidade.

416. Entre os prismas rectos da mesma altura, e com bases iguaes e de igual numero de lados, tem menor superficie aquelle cuja base he regular.

Porque neste caso a superficie lateral he proporcional ao perimetro da base, o qual he menor no polygono regular.

417. Entre os prismas rectos da mesma altura, e com bases regulares e iguaes, tem menor superficie aquelle, cuja base tem maior numero de lados.

Porque o perimetro do polygono regular, da mesma area e de maior numero de lados, he menor, e deste perimetro depende a superficie lateral do prisma.

418. Entre os prismas rectos da mesma altura e superficie, e do mesmo numero de lados na base, o maior he aquelle cuja base he regular.

Porque se alguma das bases irregulares fosse igual á base regular, então, pois que os prismas teem a mesma altura, aquelle que corresponde á base irregular teria maior superficie: absurdo. O prisma teria tambem maior superficie, contra a hypothese, se a base irregular fosse maior. Logo a base irregular só póde ser menor, e por consequencia tambem o seu prisma.

419. Entre os prismas rectos da mesma altura e superficie, e de bases regulares, he maior aquelle cuja base tem maior numero de lados.

Porque se alguma das bases, que tem menos lados, fosse igual á que tem mais, então o perimetro daquella seria maior que o perimetro da ultima, e por conseguinte maior a superficie do prisma correspondente: absurdo. O prisma teria tambem maior superficie, contra a hypothese, se a base, tendo menos lados, fosse maior. Logo a base de menos lados só póde ser menor, e logo tambem o seu prisma.

420. O maior parallelipipedo, que se póde formar com dimensões cuja somma he dada, he aquelle em que estas dimensões são iguaes.

Porque o parallelipipedo *maximum* não póde ter duas dimensões desiguaes, pois que estas duas dimensões podem fazer-se pertencer a huma face de hum parallelipipedo igual ao *maximum*, a qual se póde tomar por base, e então o quadrado, que tiver a somma de suas duas dimensões igual á somma das dimensões daquella face, terá o perimetro igual ao da mesma face ou base, que se póde suppôr hum rectangulo; mas o quadrado he maior do que o rectangulo de igual perimetro, logo será maior o parallelipipedo, que tiver o quadrado por base e por altura a terceira dimensão.

421. O maior parallelipipedo, dos que teem duas dimensões iguaes, sendo dada a somma de huma com a terceira, he aquelle em que huma das dimensões iguaes he dupla da terceira.

Seja x huma das dimensões iguaes, e c a sua somma com a terceira. Será $c - x$ a terceira, e a expressão do parallelipipedo *maximum* será $x^2(c - x)$.

Esta expressão, bem como qualquer outra que contenha x e quantidades constantes, he hum *maximum* ou *minimum* quando ha hum valor de x, que a torne maior, ou menor do que o resultado da substituição de hum outro valor qualquer. Logo, representando pela mesma letra x o valor que convem ao *maximum* ou ao *minimum*, será

$$x^2(c-x) \gtrless (x+a)^2(c-x-a),$$

conforme o primeiro membro fôr hum *maximum* ou hum *minimum*.

Mas o segundo membro na desigualdade precedente he

$$x^2(c-x)+(-x^2+(2x+a)(c-x-a))\,a;$$

logo o segundo termo desta expressão he a sua differença com a expressão proposta do *maximum*, ou *minimum*. He preciso pois que esta differença seja negativa no caso de haver *maximum*, e positiva no caso do *minimum*.

Mas se tomarmos a sufficientemente pequeno, vê-se que se o termo dessa differença affecto da primeira potencia de a, isto he,

$$(-x^2+2x(c-x))\,a$$

não fosse nullo, a differença mudaria de signal quando a mudasse; logo para haver *maximum* ou *minimum* deve ser

$$-x^2+2x(c-x)=0,$$

donde resulta

$$x=2(c-x),$$

que nos mostra que a dimensão x he dupla da terceira, e que he $x=\frac{2}{3}c$.

Resta ainda examinar se a expressão proposta do parallelipipedo se torna hum *maximum*, ou hum *minimum* pela substituição do valor achado de x: esta expressão he então $\frac{4}{27}c^3$, e a differença acima considerada será $-a^2(c+a)$, que he sempre negativa, mesmo quando a o fôr tambem, porque então he $-a<x<c$. Logo o parallelipipedo he hum *maximum* no caso indicado.

422. O cubo he de todos os parallelipipedos do mesmo volume o que tem menor superficie; e de todos aquelles que tem a mesma superficie he o que tem maior volume.

Porque se o parallelipipedo he obliquo póde-se-lhe diminuir a superficie, fazendo-o recto, sem lhe mudar a base e a altura, isto he, conservando-lhe a mesma capacidade; e se elle he recto, não sendo a base quadrada, póde-se-lhe diminuir a superficie, mudando-o em outro tambem recto cuja base seja hum quadrado igual á primeira base; e se as outras faces não são tambem quadrados, da mesma fórma se póde ainda diminuir-lhe a superficie, a qual por conseguinte não era a menor, e nem o será sem que se chegue ao cubo.

Quanto á segunda parte da proposição, se o parallelipipedo he obliquo póde-se-lhe conservar a mesma base e superficie, e, fazendo-o recto, augmentar-lhe o volume, porque se lhe augmenta a altura; e se elle he recto, não sendo a base hum quadrado, póde augmentar-se a sua capacidade, conservando-lhe a mesma superficie e altura, fazendo a base hum quadrado; e se as outras faces não são quadrados ainda, tomando qualquer por base, póde augmentar-se a capacidade, a qual por conseguinte não era a maior, e nem o será sem que se chegue ao cubo.

423. Os volumes dos prismas rectos, que teem a mesma altura, e cujas bases teem centros de lados com o mesmo apothema para todos, estão entre si com as suas superficies.

Porque os volumes estão entre si como as bases, sendo a mesma a altura dos prismas. As bases estão entre si como os seus perimetros, porque o apothema he o mesmo em todas. Estes perimetros estão tambem na razão das superficies lateraes, porque os prismas são rectos, e as faces lateraes compostas de rectangulos, cujas alturas são as dos prismas. Logo he evidente a proposição.

424. De dois prismas rectos, cujas bases são similhantes e teem centro de lados, aquelle de que a altura he dupla do apothema da base, tem menor superficie com o mesmo volume, e maior volume com a mesma superficie.

Se hum dos prismas he o cubo P, e o outro hum parallelipipedo recto P', está já demonstrado que, sendo $P = P'$, será a superficie de $P <$ a superficie de P', e que, sendo a superficie de $P =$ á superficie de P', será $P > P'$: ora no cubo he a altura dupla do apothema da base.

Sejão agora p, p' dois prismas rectos quaesquer de bases similhantes, tendo respectivamente as mesmas alturas e apothemas de P, P'. Teremos

$$P : p :: \text{superficie de } P : \text{superficie de } p,$$

$$P' : p' :: \text{superficie de } P' : \text{superficie de } p'.$$

Ora, sendo $P = P'$, teremos $p = p'$; logo as proporções precedentes mostrão que, sendo superficie de $P <$ superficie de P', será superficie de $p <$ superficie de p'; e, se fôr superficie de $P =$ superficie de P', teremos superficie de $p =$ superficie de p', e por conseguinte $P > P'$, e será $p > p'$. Logo a proposição he sempre verdadeira.

425. De dois prismas rectos, cujas bases são similhantes e teem centro de lados, aquelle, cuja superficie lateral he quadrupla da base, tem a menor superficie com o mesmo volume, e o maior volume com a mesma superficie.

Cada hum dos rectangulos, que compõem a superficie lateral, está para esta superficie, como o lado correspondente da base para todo o seu perimetro. Cada sector da base tem com esta a mesma razão. Logo se a superficie lateral he quadrupla da base, tambem qualquer dos seus rectangulos he quadruplo do sector correspondente da base. Por conseguinte a altura do rectangulo, ou do prisma, he dupla do apothema da base, como na proposição precedente.

426. As superficies lateraes de duas pyramides são proporcionaes aos seus volumes, quando as perpendiculares abaixadas de hum ponto de cada huma das bases sobre as faces são todas iguaes entre si collectivamente nas duas pyramides.

Porque cada huma das pyramides propostas se póde suppôr composta de tantas pyramides, quantas são as suas faces lateraes, tendo por bases estas faces, por vertice commum o dito ponto da base, e por altura qualquer das referidas perpendiculares iguaes; donde se segue que os volumes das propostas estão entre si, como os productos das superficies lateraes pelo terço de huma destas perpendiculares, ou simplesmente como essas superficies.

427. As superficies das pyramides, que teem o mesmo catheto das faces, estão entre si como os volumes.

Porque taes pyramides são compostas cada huma de tantas pyramides parciaes, quantas as suas faces, comprehendida a base, tendo estas faces por bases, por vertice commum o centro das faces, e por altura commum o catheto; donde concluiremos que os volumes das pyramides propostas devem estar entre si, como os productos das superficies pelo terço do catheto, ou simplesmente como as superficies.

428. As superficies, ou os volumes das pyramides rectas, que teem o mesmo catheto das faces e as bases similhantes, estão na razão composta da razão directa dos quadrados das alturas, e da inversa das differenças das alturas e do dôbro do catheto.

Seja AU a altura de huma das pyramides, AT o apothema dos lados da base, e portanto UT a altura de qualquer das faces, e seja C o centro das faces, e $CD=CA$ Fig 153.

o seu catheto. O seu volume ou a sua superficie serão proporcionaes a $\overline{AT}^2 \times AU$. Mas

$$\overline{AT}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{AU}^2 : \overline{UD}^2 = \overline{UC}^2 - \overline{CD}^2;$$

logo $\overline{AT}^2 \times AU$ he proporcional a

$$\frac{\overline{AU}^3}{\overline{UC}^2 - \overline{CA}^2} = \frac{\overline{AU}^2}{AU - 2CA}.$$

429. Nas mesmas hypotheses, a menor pyramide he aquella, cuja altura he quadrupla do catheto.

Porque a expressão ultima he minima, quando $AU = 4AC$, como vamos provar.

Fazendo $AU = x$, e $2AC = c$, a expressão fica $\frac{x^2}{x-c}$.

Discorrendo como no § 421, e substituindo $x+a$ em logar de a resulta

$$\frac{x^2 + 2ax + a^2}{x - c + a} = \frac{x^2}{x - c} + \frac{(2ax + a^2)(x - c) - ax^2}{(x - c)(x - c + a)};$$

e igualando a zero os termos do segundo membro affectos da primeira potencia de a acharemos

$$2x(x - c) - x^2 = 0,$$

que dá $x = 2c$, valor que sendo substituido na expressão proposta, a reduz a $4c$, quantidade sempre menor que $\frac{(2c \pm a)^2}{c \pm a}$, ou $< \frac{4c^2 \pm 4ac + a^2}{c \pm a}$, como facilmente se vê.

430. Nas mesmas hypotheses a superficie da pyramide he tambem a menor:

431. A distancia do centro ao vertice he triplice do catheto.

432. A altura de huma face lateral qualquer he o triplo do apothema correspondente na base.

433. Entre as pyramides rectas da mesma superficie, tendo cathetos de todas as faces e apothemas dos lados das bases, e sendo estas similhantes, tem maior catheto aquella, em que a altura de cada face lateral he o triplo do apothema.

Porque se o seu catheto fosse igual a hum dos das outras pyramides, sua superficie seria menor (§ 430), contra a hypothese. Se este catheto fosse menor que hum dos outros, a superficie desta pyramide se tornaria tambem menor, contra a hypothese, como he facil de ver.

434. Entre as pyramides rectas do mesmo volume, tendo cathetos de todas as faces e apothemas dos lados das bases, sendo estas similhantes, tem maior catheto aquella, em que a altura de cada face lateral he o triplo do apothema.

Porque se o seu catheto fosse igual a hum dos das outras pyramides, o seu volume seria menor, contra a hypothese. Se este catheto fosse menor do que hum dos outros, o volume desta pyramide se tornaria tambem menor, como he facil de ver, o que he igualmente contra a hypothese.

435. Nas hypotheses do § 433, o volume da pyramide, em que a altura de cada face he tripla do apothema, he o maior.

436. Nas hypotheses do § 434, a superficie da pyramide, em que a altura de cada face he tripla do apothema, he a menor.

437. O tetraedro regular tem a menor superficie com o mesmo volume, e o maior volume com a mesma superficie, relativamente a todas as pyramides triangulares rectas, e de bases equilateras.

LIVRO 5.°

Applicação do Algorithmo dos Senos á Geometria Rectilinea.

438. ESCOLHE-SE para unidade angular, que se designa por u, o angulo recto r dividido pelo numero q (Arith. Univ. § 278), isto he, faz-se $u=\frac{r}{q}$.

439. No triangulo rectangulo são complementos de q os dois numeros, que resultão da divisão dos angulos obliquos pela unidade angular.

Porque no triangulo rectangulo ABC teremos Fig. 154.

$$ACB+ABC=r,$$

logo

$$\frac{ACB}{u}+\frac{ABC}{u}=\frac{r}{\frac{r}{q}}=q.$$

440. No triangulo rectangulo cada lado do angulo recto he egual ao producto da hypothenusa pelo seno do numero, que resulta da divisão do angulo opposto pela unidade angular; e igual tambem ao producto da hypothenusa pelo coseno do numero, que resulta da divisão do angulo adjacente pela unidade u.

Primeiramente, seja o triangulo rectangulo ABC metade do triangulo equilatero CBD. Será

$$AB=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}BC.$$

O angulo $BCA = \frac{1}{3} r$, logo

$$\text{sen}\,\frac{BCA}{u} = \text{sen}\,\frac{\frac{1}{3}r}{\frac{r}{q}} = \text{sen}\,\frac{1}{3}q = \frac{1}{2}.$$

Logo

$$AB = BC\,\text{sen}\,\frac{BCA}{u} = BC\cos\frac{CBA}{u},$$

(Arith. Univ. §§ 288, 290); e a propriedade he verdadeira para o lado AB.

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$$

$$= \overline{BC}^2 - \overline{BC}^2\,\text{sen}^2\,\frac{BCA}{u}$$

$$= \overline{BC}^2\left(1 - \text{sen}^2\,\frac{BCA}{u}\right)$$

$$= \overline{BC}^2\cos^2\frac{BCA}{u},$$

ou

$$AC = BC\cos\frac{BCA}{u} = BC\,\text{sen}\,\frac{CBA}{u}.$$

Assim fica demonstrada a proposição, quando BCA he o terço do angulo recto.

Para mais simplicidade supprimiremos, d'aqui em diante, a unidade angular, e diremos senos e cosenos d'angulos; porém advirta-se sempre que ôs senos e cosenos são numeros que se podem obter, sendo necessario, dividindo os ditos angulos pela unidade angular, que precedentemente estabelecemos.

Passando agora do triangulo BCA, em que a proposição está demonstrada, para o triangulo DCE, tambem rectangulo em E, e com o angulo DCE (ou a) $=\frac{1}{2}BCA$, teremos Fig. 155.

$$BC:CA::BF:AF, \text{ ou } BC+CA:CA::BA:AF,$$

ou

$$BC(1+\cos 2a):BC\cos 2a::BC\operatorname{sen} 2a:AF,$$

donde (Arith. Univ. §§ 271, 273)

$$2\cos^2 a:\cos 2a::2BC\operatorname{sen} a\cos a:AF=BC\frac{\operatorname{sen} a\cos 2a}{\cos a}.$$

Mas temos tambem

$$AC:AF::CE:DE,$$

ou

$$BC\cos 2a:BC\frac{\operatorname{sen} a\cos 2a}{\cos a}::\sqrt{\left(\overline{CD}^2-\overline{DE}^2\right)}:DE,$$

donde

$$DE=\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}\sqrt{\left(\overline{CD}^2-\overline{DE}^2\right)}.$$

Logo

$$\cos^2 a\,\overline{DE}^2=\operatorname{sen}^2 a\,\overline{CD}^2-\operatorname{sen}^2 a\,\overline{DE}^2;$$

donde

$$DE=CD\operatorname{sen} a, \text{ e } CE=CD\cos a.$$

Isto he, a proposição ainda he certa, quando hum angulo obliquo he metade do terço do angulo recto.

Passando deste ultimo triangulo para outro tambem rectangulo, com hum angulo obliquo $=\frac{1}{2}a$, e assim por diante, a verdade da proposição se torna evidente para todos os triangulos rectangulos, que teem hum angulo obliquo igual ao quociente do terço do angulo recto dividido por huma potencia inteira qualquer do numero 2.

Sejão agora a, b, dois angulos obliquos em dois triangulos, para os quaes já está provada a proposição, mas
Fig. 156. $a+b<r$. Sobre huma recta AD, e com o vertice A faça-se o angulo $DAB=b$, e na parte opposta, e no mesmo plano, o angulo $DAC=a$. Tire-se por algum ponto D de AD a recta BC que lhe seja perpendicular. BC encontrará as duas rectas AB, AC, por hypothese, e teremos dois triangulos, nos quaes a proposição está já provada. Abaixe-se a perpendicular BE sobre AC, e será verdadeira a proposição no triangulo BEC, porque o angulo $CBE=DAC$, por serem ambos complementos de C. Logo

$$BE=BC\cos a=(BD+DC)\cos a$$

$$=\left(AB\,\mathrm{sen}\,b+\frac{AD\,\mathrm{sen}\,a}{\cos a}\right)\cos a$$

$$=AB\,\mathrm{sen}\,b\cos a+AB\cos b\,\mathrm{sen}\,a$$

$$=AB\,\mathrm{sen}\,(a+b).$$

Logo a proposição fica demonstrada no triangulo ABE, no qual o angulo BAE he a somma de dois angulos obliquos de triangulos já verificados. Isto he, a proposição he verdadeira para os triangulos, nos quaes hum angulo obliquo he multiplice de hum angulo da grandeza $\frac{r}{3\cdot 2^n}$, sendo n hum inteiro qualquer.

Agora digo que a proposição he sempre verdadeira, isto he,

Fig. 157. $$CA=CD\,\mathrm{sen}\,CDA,\ \text{e}\ BA=DB\,\mathrm{sen}\,BDA.$$

Se he possivel seja $CA<CD\,\mathrm{sen}\,CDA$; então alguma hypothenusa BD, e angulo BDA menores, farão CA

$=BD \operatorname{sen} BDA$. Haverá algum angulo $\frac{r}{3 \cdot 2^n} < CDB$, e por conseguinte tambem hum de seus multiplices $EDA < CDA$, e $> BDA$. Logo

$$AE = DE \operatorname{sen} EDA > BD \operatorname{sen} BDA.$$

Logo $AE > AC$; absurdo.

Se he possivel seja $BA > BD \operatorname{sen} BDA$, então alguma hypothenusa CD, e angulo CDA maiores, farão $BA = CD \operatorname{sen} CDA$. Haverá algum angulo $\frac{r}{3 \cdot 2^n} < CDB$; logo haverá tambem hum multiplo EDA de $\frac{r}{3 \cdot 2^n} < CDA$, e $> BDA$. Logo

$$AE = DE \operatorname{sen} EDA < CD \operatorname{sen} CDA;$$

e portanto $AE < AB$; absurdo.

Logo he sempre hum lado do angulo recto igual ao producto da hypothenusa pelo seno do angulo opposto, ou pelo coseno do angulo obliquo adjacente.

441. Em qualquer triangulo rectilineo, sendo a, b, c os lados, e A, B, C os angulos respectivamente oppostos, temos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \; \ldots\ldots \; \text{(A)}$$

e mais duas fórmulas similhantes.

Teremos no triangulo ABC, em que BD he perpendicular a AC Fig. 158.

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$$

$$= (AD + CD)(AD - CD) + \overline{BC}^2$$

$$= AC(AC - 2CD) + \overline{BC}^2$$

Fig. 159. ou

$$=AC(AC+2CD)+\overline{BC}^2.$$

Mas he

Fig. 158.

$$CD=BC\cos ACB$$

Fig. 159.

$$=-BC\cos ACB.$$

Logo será sempre

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2AC\times BC\cos ACB.$$

442. Em qualquer triangulo são os lados proporcionaes aos senos dos angulos oppostos.

Porque

Fig. 158.

$$BD=AB\,\text{sen}\,A=BC\,\text{sen}\,C;$$

logo

$$AB:BC::\text{sen}\,C:\text{sen}\,A;$$

Fig. 159.

$$BD=AB\,\text{sen}\,A=BC\,\text{sen}\,BCD=BC\,\text{sen}\,BCA,$$

logo

$$AB:BC::\text{sen}\,BCA:\text{sen}\,A.$$

O mesmo principio póde estabelecer-se por hum modo puramente analytico, por meio da fórmula (A). Porque temos

$$\text{sen}^2 C=1-\cos^2 C=1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2$$

$$=\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{4a^2b^2c^2}\times c^2,$$

e como o que multiplica c^2 he huma funcção symetrica, ou invariavel, qualquer permutação que se faça entre as suas raizes, se a designarmos por N, teremos similhantemente

$$\text{sen}^2 A=N\cdot a^2,\ \text{e}\ \text{sen}^2 B=N\cdot b^2,$$

logo

$$a:b::\text{sen}\,A:\text{sen}\,B\ \ldots\ldots\ (\text{B}).$$

443. Por ser

$$\cos C = \cos\left(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C\right)$$

$$= \cos^2 \frac{1}{2} C - \text{sen}^2 \frac{1}{2} C$$

$$= 1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} C = 2\cos^2 \frac{1}{2} C - 1,$$

se na fórmula (A) se substitue $1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{1}{2} C$ a $\cos C$, teremos

$$\text{sen}^2 \frac{1}{2} C = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab} = \frac{\frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2}}{ab}$$

$$= \frac{\left(\frac{c+a+b}{2} - a\right)\left(\frac{c+a+b}{2} - b\right)}{ab} \;\ldots\ldots\; (C).$$

Se se substitue $2\cos^2 \frac{1}{2} C - 1$, teremos

$$\cos^2 \frac{1}{2} C = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab} = \frac{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}{ab}$$

$$= \frac{\frac{a+b+c}{2}\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}{ab} \;\ldots\ldots\; (D).$$

444. Da fórmula (B) se deduz (Arith. Univ. § 274)

$$a + b : a - b :: \text{sen}\, A + \text{sen}\, B : \text{sen}\, A - \text{sen}\, B$$

$$:: \text{tang}\, \frac{A+B}{2} : \text{tang}\, \frac{A-B}{2} \;\ldots\ldots\; (E).$$

445. A relação entre os tres lados e hum dos angulos do triangulo, está estabelecida nas fórmulas (A), (C), ou (D).

Entre os angulos e hum dos lados não existe relação.

A relação entre dois lados e os seus angulos oppostos, está dada nas fórmulas (B) e (E).

A relação entre dois lados e dois angulos não oppostos ao mesmo tempo, póde reduzir-se á precedente, porque sendo 180° a somma dos tres angulos, se dois são conhecidos, o terceiro o será tambem.

Fig. 160. **446.** No triangulo ABC em que o angulo C he recto, sendo o coseno deste zero, e o seno 1, as relações (A) e (B) se reduzem a

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \ldots\ldots \quad \text{(F)}$$

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{b \operatorname{sen} A}{\cos A} = b \operatorname{tang} A \quad \ldots\ldots \quad \text{(G)}.$$

Destas duas fórmulas, pela eliminação de a, resulta

$$c^2 = \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 A}{\cos^2 A} + b^2 = \frac{b^2 (\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A)}{\cos^2 A} = \frac{b^2}{\cos^2 A},$$

ou

$$b = c \cos A \quad \ldots\ldots \quad \text{(H)},$$

como já se sabia.

447. Estas tres fórmulas fórmão hum systema completo para a resolução dos triangulos rectangulos, e proprio para o calculo por meio das taboas dos logarithmos dos senos e tangentes, e dos numeros naturaes, quando além do angulo recto são dadas outras duas partes do triangulo, sendo huma dellas sempre hum lado. Assim

1.° Caso. Sendo dados os dois lados do angulo recto, para achar a hypothenusa, procure-se A pela fórmula (G), e depois c pela (H).

2.° Caso. Com os mesmos dados, querendo-se hum dos angulos obliquos, achar-se-ha immediatamente pela fórmula (G).

3.° Caso. Com hum lado e o angulo adjacente, para achar a hypothenusa temos a fórmula (H).

4.° Caso. Se se quer o outro lado, serve a fórmula (G).

5.° Caso. Com a hypothenusa e hum dos lados, acha-se o outro lado pela transformação de (F).

$$a^2 = c^2 - b^2, \text{ ou } a = \sqrt{((c+b)(c-b))} \;\ldots\ldots\; (\mathrm{I})$$

6.° Caso. Com os mesmos dados, acha-se o angulo comprehendido pela fórmula (H), e o outro he o seu complemento.

448. Quando b e c differem mui pouco, não convem empregar as taboas para achar A por meio do coseno; então calcula-se primeiro a como no 5.° caso, e depois com a, b procure-se A pela fórmula (G).

A fórmula (C) não he da mesma maneira conveniente, quando $\frac{1}{2}C$ he mui proximo a 90°. Então deve usar-se da fórmula (D), que he ao mesmo tempo mais simples, por evitar huma subtracção.

449. A resolução dos triangulos obliquangulos póde reduzir-se a quatro casos.

1.° Caso. Sendo dados os tres lados, acha-se qualquer dos angulos pela fórmula (C), ou pela fórmula (D).

2.° Caso. Sendo dados dois lados com o angulo opposto a hum delles, acha-se o angulo opposto ao outro pela analogia (B), se o problema he determinado pela condição § 67; porque d'outra sorte o seno que se acha, póde pertencer a dois angulos. Se o problema he determinado, conheceremos assim os dois angulos oppostos, e por consequencia o terceiro, que he o supplemento da sua somma. Este terceiro angulo sendo pois conhecido, póde calcular-se o terceiro lado pela mesma analogia.

3.° Caso. Sendo dados dois lados com o angulo comprehendido, acha-se a semidifferença dos angulos oppostos pela analogia (E), cujo penultimo termo he conhecido, por ser a tangente da metade do supplemento do angulo dado.

Com a semisomma $\frac{A+B}{2}$, e a semidifferença $\frac{A-B}{2}$ achão-se A e B separados. Assim, achados os angulos, póde calcular-se depois o terceiro lado.

4.° Caso. Sendo dado hum lado com dois angulos, ou todos os tres, achar-se-hão os outros lados por meio da analogia (B).

450. Em vez de fazer uso da analogia (B), quando o angulo procurado se aproxima muito a $90°$, he mais conveniente resolver dois triangulos rectangulos formados pela
Fig. 158 e 159 perpendicular abaixada do vertice B, commum aos dois lados AB, BC dados sobre o terceiro lado AC; porque, suppondo que he C o angulo procurado muito proximo de $90°$, no triangulo BDC, conheceremos $BD = AB \operatorname{sen} A$ e BC que he dado. Será pois

$$DC = \sqrt{\left(\overline{BC}^2 - \overline{BD}^2\right)},$$

e

$$\cos BCD = \frac{DC}{BC}.$$

451. Sendo dados os lados do triangulo, achar a sua altura sobre aquelle que se quizer.

Seja h a altura BD sobre b. Será $h = a \operatorname{sen} C$. Logo

$$\operatorname{sen}^2 C = \frac{h^2}{a^2}, \text{ e } \cos^2 C = \frac{a^2 - h^2}{a^2} = \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2;$$

donde

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)^2$$

$$= \left(a + \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)\left(a - \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right)$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2b} \cdot \frac{c^2 - (a-b)^2}{2b}$$

$$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{4b^2}.$$

452. Com os mesmos dados, e fazendo $p=\frac{a+b+c}{2}$, acha-se

$$\text{a area } =\frac{bh}{2}=\sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}.$$

453. O raio $BE=\frac{abc}{4\sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}}$. (§ 173) Fig. 61.

454. O apothema $DG=\frac{2\sqrt{(p(p-a)(p-b)(p-c))}}{a+b+c}$. (§ 174) Fig. 51.

455. Quando nas construcções seguintes igualamos huma linha a hum numero, subentende-se, para que isto seja possivel, que este numero he o multiplicador da unidade linear, ou a unidade linear o divisor da linha.

456. Vamos construir o angulo do centro do polygono regular de 17 lados, e feito isso póde reputar-se construido aquelle polygono.

Tome-se Fig. 164.

$$BC=1,$$

e sobre a sua continuação

$$CA=8.$$

Tire-se por C a recta GD perpendicular a AB, e com $AD=AB$ determine-se o ponto D, e será

$$CD=\sqrt{17}.$$

Sobre GD tome-se $CE=CB=1$ da parte do ponto D, e para a outra parte tome-se tambem $CG=1$. Serão

$$DE=-1+\sqrt{17},$$

$$DG=1+\sqrt{17},$$

$$GE=2.$$

Dividão-se DE, DG cada huma em duas partes iguaes, a primeira em F, a segunda em H, e teremos (Arith. Univ. § 565)

$$EF=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}=a,$$

$$DH=\frac{1+\sqrt{17}}{2}=-b.$$

Tire-se por E a perpendicular EI sobre GD, e tome-se sobre ella

$$EI=EF=a.$$

Será

$$GI=\sqrt{(a^2+4)}.$$

Produza-se GI até que se obtenha $IK=a$, e será

$$GK=a+\sqrt{(a^2+4)}.$$

seja L o seu meio, e teremos

$$GL=\frac{a+\sqrt{(a^2+4)}}{2}=c.$$

Tome-se sobre EI

$$EM=DH=-b,$$

será

$$GM=\sqrt{(b^2+4)}.$$

Tome-se sobre GM

$$GN=DH=-b,$$

será

$$MN = GM - GN = b + \sqrt{(b^2 + 4)}.$$

Divida-se MN ao meio em O, e teremos

$$MO = \frac{b + \sqrt{(b^2 + 4)}}{2} = e = \frac{1}{2} MN.$$

Tome-se sobre ED

$$EP = 2MN = 4e.$$

Sobre EM construa-se EQ media proporcional entre EP e EC; será

$$EQ = \sqrt{(EP \times EC)} = \sqrt{(4e \times 1)}.$$

Com a recta $QR = GL = c$, determine-se sobre EG o ponto R, o que he possivel, por ser (Arith. Univ. § 567) QR ou $c > \sqrt{(4e)}$, ou $> EQ$.

Será

$$ER = \sqrt{(c^2 - 4e)}.$$

Tome-se sobre ED

$$ES = c,$$

será

$$RS = c + \sqrt{(c^2 - 4e)}.$$

Ache-se o seu meio T, e será (Arith. Univ. § 566)

$$RT = \frac{c + \sqrt{(c^2 - 4e)}}{2} = 2 \cos \frac{k\pi}{17}.$$

Busque-se o seu meio V, e será

$$RV = \cos \frac{k\pi}{17}.$$

Z

Com RV, e com a hypothenusa $RX = 1$, forme-se o triangulo rectangulo RVX, e será

$$RV = \cos \frac{XRV}{u},$$

sendo u a unidade angular. Logo

$$XRV = \frac{k\pi}{17} \cdot u = \frac{k}{17} \cdot 4qu = \frac{k}{17} \cdot 4r.$$

Por coincidencia (Arith. Univ. § 570) he $k = 1$, logo XRV he o angulo do centro do polygono regular de 17 lados.

457. Se, por evitar o calculo dos periodos binarios, se ignora qual delles dá $k = 1$, ou se, em consequencia de alguma mudança nas denominações das raizes das equações do segundo gráo, ou por se tratar de outro polygono regular, não acharmos $k = 1$, poder-se-ha comtudo construir o angulo do centro, formando com o mesmo vertice R outro angulo $= XRV$ e adjacente, depois outro igual e adjacente ao segundo, e proseguindo até que se tenhão descripto, á roda do centro R, no presente caso, 17 angulos adjacentes, excluindo sempre do angulo total 4 rectos, logo que elle exceder aquella grandeza: entre os differentes angulos obtidos achar-se-ha necessariamente o angulo do centro do polygono regular. Isto póde obter-se sempre, porque a congruencia $kx \equiv 1$ (mod. 17) he sempre possivel, isto he, a equação indeterminada $kx = 1 + 17y$, logo será

$$\frac{kx}{17} \cdot 4r = \frac{1}{17} \cdot 4r + y \cdot 4r,$$

equação que faz ver, que ha hum multiplice de $\frac{k}{17} \cdot 4r$, cujo excesso sobre hum multiplice de $4r$, he o angulo do centro $\frac{1}{17} \cdot 4r$.

Teem pois construcção geometrica todos os polygonos regulares, cujo numero de lados he primo da fórma 2^m+1.

458. Sejão a, b os numeros primos dos lados de dois polygonos regulares, que se possão construir geometricamente.

Será possivel a congruencia $ax\equiv 1 \pmod{b}$, isto he, a equação $ax=1+by$; logo teremos

$$ax-by=1,$$

e

$$\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=\frac{1}{ab},$$

logo

$$x\cdot\frac{1}{b}\cdot 4r-y\cdot\frac{1}{a}\cdot 4r=\frac{1}{ab}\cdot 4r.$$

Isto quer dizer que se podem achar multiplices do angulo $\frac{1}{b}\cdot 4r$ do centro do polygono regular de b lados, e multiplices do angulo $\frac{1}{a}4r$ do centro do polygono regular de a lados, a differença dos quaes multiplices he o angulo $\frac{1}{ab}\cdot 4r$ do centro do polygono regular de ab lados.

Da mesma maneira, sendo c o numero primo dos lados doutro polygono regular constructivel, será possivel a congruencia

$$abx\equiv 1 \pmod{c},$$

ou

$$abx-cy=1,$$

ou

$$x\cdot\frac{1}{c}\cdot 4r-y\cdot\frac{1}{ab}\cdot 4r=\frac{1}{abc}\cdot 4r;$$

por consequencia póde achar-se o angulo $\frac{1}{abc}\cdot 4r$ do centro do polygono regular de abc lados, e assim por diante.

Isto he, teem construcção geometrica todos os polygonos regulares, cujo numero de lados he o producto dos numeros primos dos lados doutros polygonos regulares, já construidos.

459. No triedro trirectangulo, ou que tem as tres arestas perpendiculares entre si, huma diagonal ou recta qualquer, tirada pelo vertice dentro do triedro, faz com as arestas tres angulos taes, que a somma das segundas potencias dos seus cosenos he sempre a unidade.

Fig. 161. Seja $ABCD$ o triedro, e AE a diagonal dada de posição. Por E tirem-se os tres planos $EFDG$, $EFBH$, $EGCH$ perpendiculares ás tres arestas, que elles encontrão nos pontos D, B, C. Estes tres planos com as tres faces do triedro proposto, determinão hum parallelipipedo rectangulo. Porque sendo os planos $EFDG$, $EFBH$ ambos perpendiculares ao plano ABD, a sua intersecção EF lhe he tambem perpendicular em algum ponto F. Da mesma maneira he EH perpendicular a ABC em H, e EG a ADC em G. Temos já oito vertices, entre os quaes E foi tomado arbitrariamente. O triedro $EFGH$ he supplementario do proposto, logo os seus angulos, assim como os seus diedros são rectos, ou elle he trirectangulo. O angulo BFD he a medida de hum destes diedros, cuja aresta he EF, por ser EF perpendicular ao seu plano; mas por isto mesmo, são rectos EFB, EFD, logo o triedro, de que F he o vertice, será trirectangulo. Da mesma maneira são trirectangulos os triedros, que teem os vertices G, H.

AB he perpendicular ao plano FBH por construcção, logo o angulo FBH he recto, por ser a medida do diedro, cuja aresta he AB no triedro proposto; mas ABF, ABH serão tambem rectos, logo o triedro de que B he o vertice he trirectangulo. Da mesma fórma se prova que são trirectangulos os triedros, que teem C, D por vertices. Logo todos os angulos das faces do polyedro $ABCDEFGH$ são rectos, logo elle he hum parallelipipedo rectangulo.

Tirem-se as diagonaes ED, EB, EC dos rectangulos das faces. Serão EDA, EBA, ECA angulos rectos, e triangulos rectangulos, porque AD, AB, AC, sendo por construcção respectivamente perpendiculares aos planos que encontrão, o serão ás rectas DE, BE, CE. Por conseguinte

$$AD = AE \cos EAD;\ AB = AE \cos EAB;\ AC = AE \cos EAC.$$

Mas temos

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2,$$

logo

$$\overline{AE}^2 = \overline{AE}^2 \cos^2 EAD + \overline{AE}^2 \cos^2 EAB + \overline{AE}^2 \cos^2 EAC,$$

ou

$$1 = \cos^2 EAD + \cos^2 EAB + \cos^2 EAC.$$

460. Projecção de hum polygono sobre hum plano, he outro polygono formado nesse plano, pelas intersecções deste com outros planos perpendiculares a elle, tirados pelos lados do polygono proposto.

461. A projecção da area de hum polygono he igual á area do polygono proposto multiplicada pelo coseno do diedro formado pelos planos dos dois polygonos o projectado, e a projecção.

Se pelos lados do polygono $ABCD$ se tirão planos perpendiculares ao plano $abcd$, as suas intersecções ab, bc, etc., com este ultimo plano, fórmão hum polygono $abcd$, que he a projecção do primeiro. Seja EF a intersecção dos planos dos dois polygonos mencionados. Tirem-se por todos os vertices A, B, C, D planos perpendiculares a EF. Sejão A, L, B, C, I, D, a, l, b, c, i, d todos os pontos communs a estes planos, e aos lados dos polygonos. Estes pontos, dois a dois, estão em perpendiculares ao plano $abcd$, cada huma das quaes he intersecção de dois planos per- Fig. 162.

pendiculares a este, hum por construcção da projecção, outro por ser perpendicular a EF, que está tambem no plano $abcd$. Os dois polygonos estão divididos pelos planos da construcção em triangulos ADL, BIC, adl, bic; e em quadrilateros $LBID$, $lbid$, os quaes, se não forem parallelogrammos, são trapezios, porque BI, LD são rectas collocadas no mesmo plano, e em planos parallelos por serem perpendiculares a EF, e logo são parallelas, e da mesma sorte o são bi, ld entre si. Estes trapezios mesmo podem ser divididos em triangulos pelas diagonaes LI, li. HF he a altura do triangulo ALD, por ser perpendicular ás parallelas LD, AF, e tambem he altura do triangulo ald, por ser tambem perpendicular ás parallelas ld, aF. Similhantemente GH he a altura dos trapezios $LBID$, $lbid$, ou de seus triangulos, etc. Logo

$$ABCD=\frac{1}{2}LD\times GF+\frac{1}{2}BI\times EH,$$

$$abcd=\frac{1}{2}ld\times GF+\frac{1}{2}bi\times EH,$$

destas equações se conclue

$$ABCD:abcd$$

$$::LD\times GF+BI\times EH:ld\times GF+bi\times EH.$$

Mas todos os triangulos LlH, DdH, BbG, IiG são similhantes, por serem rectangulos, e terem os angulos em G, H iguaes, pois que cada hum delles he a medida do diedro formado pelos planos dos dois polygonos; logo

$$LD=\frac{ld\times LH}{lH},\text{ e } BI=\frac{bi\times LH}{lH},$$

logo

$$ABCD:abcd$$

$$::\frac{ld\times LH\times GF}{lH}+\frac{bi\times LH\times EH}{lH}:ld\times GF+bi\times EH$$

$$::LH:lH::1:\cos LHl;$$

logo

$$abcd=ABCD\cos LHl.$$

462. No tetraedro trirectangulo, ou que tem hum triedro trirectangulo, a segunda potencia do numero que resulta da medida da face não rectangular, he igual á somma das segundas potencias dos numeros que resultão da medida das outras tres faces rectangulares.

No tetraedro $ABCD$ sejão rectos os angulos BAC, CAD, DAB. Fig. 163.

Digo primeiramente que a face BCD, que tomaremos para base, não he rectangular. Porque, se o angulo BCD, por exemplo, fosse recto, sería BD hypothenusa commum aos triangulos BAD, BCD; logo teriamos $\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2$; absurdo, porque sendo BC, CD as hypothenusas respectivas aos triangulos BAC, CAD, são maiores do que os lados AB, AD.

Em segundo logar, os diedros feitos pelas faces com a base são agudos. Porque se, por exemplo, o diedro $ACDB$ fôsse recto, então a base BCD não encontraria AB, por ser esta aresta tambem perpendicular á face ACD; absurdo. E se o diedro fosse obtuso, tambem a base não encontraria AB da parte de B; absurdo.

Logo se do vertice principal A, commum ás faces, se abaixa a perpendicular AE sobre a base, esta cahirá dentro da base, e do tetraedro.

Tirem-se por AE os planos EAF, EAG, EAH respectivamente perpendiculares ás tres faces, e sejão AF, AG, AH as suas intersecções respectivas com ellas. Estas intersecções teem logar effectivamente mesmo nas faces, e não em suas continuações, porque os seis diedros formados pelos planos EAB, EAC, EAD com as faces rectangulares, são todos agudos, porque são todos menores do que os diedros rectos formados por estas faces entre si. Tirem-se EF, EG, EH: os primeiros tres planos são perpendiculares á base, porque passão por AE que he perpendicular a esta.

O plano AEF sendo perpendicular á face ABC, e á base BCD, he perpendicular á sua intersecção CB; logo o angulo AFE he a medida do diedro que ellas fórmão. Igualmente AGE, AHE são cada hum a medida de cada hum dos outros dois diedros formados com a base.

Nos triangulos rectangulos AEF, AEG, AEH, abaixadas as perpendiculares EI, EK, EL sobre as suas hypothenusas, será o angulo $AEI = AFE =$ diedro $ABCD$, porque AEI he complemento de IEF, assim como AFE. Temos igualmente $AEK = AGE =$ diedro $ABDC$, e $AEL = AHE =$ diedro $ACDB$.

EI he perpendicular á face ABC, porque está em hum plano perpendicular a esta face, e he ao mesmo tempo perpendicular á sua intersecção AF. Da mesma sorte EK, EL são respectivamente perpendiculares ás outras duas faces. Logo o plano IEK he perpendicular aos dois ABC, ABD, e por conseguinte á aresta AB, sua intersecção. Igualmente os planos KEL, IEL são respectivamente perpendiculares ás duas arestas AD, AC. Logo $EIKL$ he o triedro supplementario do triedro $ABCD$, logo $EIKL$ he hum triedro trirectangulo. Logo teremos

$$\cos^2 IEA + \cos^2 KEA + \cos^2 LEA = 1$$

$$= \cos^2 EFA + \cos^2 EGA + \cos^2 EHA,$$

isto he, a somma das segundas potencias dos cosenos dos diedros sobre a base he igual á unidade.

Cada huma das faces he a projecção da base sobre o plano dessa face. Assim teremos

$$ABC = BCD \cos EFA;$$

$$ABD = BCD \cos EGA;$$

$$ACD = BCD \cos EHA.$$

Logo

$$ABC^2 + ABD^2 + ACD^2$$

$$= \overline{BCD}^2 (\cos^2 EFA + \cos^2 EGA + \cos^2 EHA)$$

$$= \overline{BCD}^2$$

463. Em geral, e com huma similhante demonstração, se provará, que o quadrado da superficie de qualquer polygono he igual á somma dos quadrados das superficies das suas projecções sobre tres planos perpendiculares entre si.

LIVRO 6.º

Geometria circular plana

464. *Curva* he a linha, da qual nenhuma parte he recta.

465. *Curva plana* he aquella, que tem todos os seus pontos em hum plano.

466. *Circulo* he o logar de todos os pontos de hum plano, que distão igualmente de hum mesmo ponto, isto he, que teem o mesmo centro e raio.

467. O circulo tem centro no seu mesmo plano.

Sejão A, B, C, etc., os pontos, de que he logar o circulo, e D o centro d'estes pontos. Fig. 165.

Se D não está no mesmo plano, abaixe-se DE perpendicular sobre o plano dos pontos. Tirem-se DA, DB, DC, etc., que serão iguaes pela hypothese da proposição. Logo E não póde cahir sobre algum dos pontos propostos, porque teriamos então as obliquas a hum plano iguaes á perpendicular. Tirem-se tambem EA, EB, EC, etc. Os triangulos rectangulos AED, BED, CED, etc., são todos identicos, porque teem DE commum, e as hypothenusas iguaes, logo são iguaes EA, EB, EC, etc., ou E he centro dos pontos A, B, C, etc., ou do circulo que he o logar d'elles.

468. O circulo he continuo.

Porque se elle tivesse alguma interrupção, poderia tirar-se, n'este intervallo, e no seu plano a recta, $EF = EA$, e depois DF. Então o triangulo EDF seria tambem rectangulo, e identico com EDA, poisque DE he commum, e são iguaes por construcção os outros dois lados dos angulos rectos; seria portanto $DF = DA$, e F hum ponto com o mesmo centro e raio que *A*, *B*, *C*, etc., isto he, ponto do circulo. Logo não ha n'elle interrupção.

469. O circulo he huma curva plana.

O circulo he huma linha, porque se alguma das suas partes não o fosse, então, visto que elle não póde ser hum systema de pontos destacados, segundo a ultima proposição, só poderia ser huma parte da superficie plana, sobre a qual estão os pontos, de que o circulo he o logar, e por conseguinte poder-se-hia tirar n'esta parte de superficie plana huma recta, e todos os pontos d'esta recta terião o mesmo centro, absurdo (§ 84); pela mesma rasão nenhuma parte do circulo he recta. Logo o circulo he huma curva plana.

470. O circulo não póde ter, fóra de si, centro no seu plano.

Está demonstrado, que o circulo tem centro no seu plano,
Fig. 166. e, se he possivel, esteja este centro *D* fóra do circulo, que passa pelos pontos *A*, *B*, *C*, etc.

Tire-se a recta *DA*, e produza-se esta da parte de *D* até que seja $DE = DA$; será *E* hum ponto do circulo, e *D* estará entre *A*, e *E*. Da mesma maneira estará *D* entre *B* e hum outro ponto opposto equidistante de *D*, e assim por diante. Logo *D* fica sempre entre pontos do circulo, e logo dentro d'elle, contra a hypothese de que estivesse fóra.

471. O circulo tem hum centro só no seu plano.

Fig. 167. Se he possivel, sejão *A*, *B* dois centros do circulo *CDE*. Estarão ambos dentro do circulo, pela proposição precedente; logo a recta *AB*, por elles tirada, encontrará produzida o circulo em dois pontos *C*, *E*.

Porque *A* he centro, será $AC = AE$; logo $BC > BE$; mas porque *B* he centro, deveria ser $BC = BE$: absurdo; logo não ha dois centros no mesmo plano do circulo.

472. Quando se falla de centro do circulo, subentende-se aquelle, que está no seu plano: e da mesma maneira, o raio he a distancia d'este centro a hum ponto qualquer do circulo.

473. Descrever o circulo sobre hum plano determinado, sendo dados o centro e o raio.

No plano dado *CDE* com o centro dado *A*, e raio *AC* igual ao dado, descreve-se o circulo, e a superficie que elle encerra, movendo $A\,C$, sem mover A, no mesmo sentido, e conservando sempre o extremo C no plano até que volte á sua posição primitiva. Ou abrindo hum compasso de maneira, que a distancia entre as suas pontas seja igual a $A\,C$, e fixando huma d'ellas em A, a outra sendo applicada sobre o plano proposto descreverá o circulo.

Se o centro dado não he o principal, mas outro fóra do plano dado, póde ainda descrever-se o circulo da mesma fórma, huma vez que a perpendicular abaixada do centro sobre o plano seja menor do que o raio.

474. Sendo dado o circulo, ou tres de seus pontos sómente, achar o seu centro.

Como tres pontos quaesquer do circulo não estão em linha recta, podem ser os vertices de hum triangulo, e o centro d'estes vertices, que he unico no seu plano, será tambem o centro do circulo.

475. Duas linhas planas chamão-se *tangente* huma da outra, quando sendo collocadas no mesmo plano, e produzidas, se he possivel, não se cruzão, nem teem mais de hum ponto commum. Quando se falla da tangente em hum ponto de huma curva plana, subentende-se particularmente a tangente rectilinea.

476. Por hum ponto do circulo tirar a sua tangente.

Seja A ponto do circulo $A\,B\,C$, pelo qual se quer tirar a tangente d'este circulo. Fig. 168.

Busque-se o centro D do circulo proposto, e tire-se o raio $D\,A$.

Por A tire-se $E\,F$ perpendicular ao raio $D\,A$, e será $E\,F$ a tangente pedida. Porque qualquer dos seus pontos, diverso de A, está mais longe de D do que está A, e por consequencia todos os outros estão fóra do circulo.

Esta tangente he unica para o ponto A. Porque outra recta qualquer tirada por A faria agudo hum dos angulos com o raio $A\,D$, e a perpendicular de D sobre ella seria $< A\,D$; logo o seu pé ficaria dentro do circulo e esta recta produzida cortaria ainda o circulo em outro ponto.

477. Tirar huma tangente a dois circulos dados de grandeza e posição.

Fig. 169. Sejão A, B os centros dos dois circulos dados, e C, D os dois pontos de contacto, ou seja CD a tangente commum aos dois circulos.

Conhece-se AB que he a distancia dos centros, por hypothese; e AC, BD que são os raios dos circulos; sabe-se que os angulos C, D são rectos. Tire-se BE parallela a CD. No triangulo rectangulo ABE conhece-se a hypothenusa AB, e o lado AE igual á differença dos raios; póde pois construir-se o angulo A, ou a posição de AC, e já se vê, que o problema fica resolvido; mas he necessario ajuntar ás condições, que a distancia dos centros seja maior do que a differença dos raios. Vê-se tambem, que se póde tirar outra tangente da outra parte da linha dos centros.

Fig. 170. Querendo que a tangente CD corte a linha dos centros AB, então os triangulos rectangulos similhantes AEC, BED dão

$$BD:AC::BE:AE,$$

ou

$$BD+AC:AC::BA:AE,$$

e conheceremos AE. No triangulo rectangulo AEC, com a hypothenusa AE e o lado AC, póde construir-se o angulo A, e o problema fica resolvido, se entretanto a distancia dos centros A, B, que se compõem de duas hypothenusas, fôr maior do que a somma dos raios AC, BD.

Já se vê que he possivel tirar outra tangente, que corte a distancia dos centros.

478. Para tirar huma tangente ao circulo, que seja parallela a huma recta dada, basta abaixar do centro huma perpendicular sobre essa recta, e ter-se-ha o ponto de contacto.

Fig. 171. 479. Para descrever por dois pontos A, B hum circulo, que toque huma recta dada CD; tire-se a recta AB, e se ella encontrar, sendo produzida, CD em hum ponto E, en-

tão tome-se EF media proporcional entre EA, e EB, e os tres pontos F, A, B determinarão o circulo pedido (§ 474).

Se AB he parallela a CD, levante-se a perpendicular EF no meio de AB, e o ponto F de encontro com CD será o ponto de contacto do circulo ABF. Fig. 172.

480. Para tirar por hum ponto dado A hum circulo, que toque duas rectas dadas, tire-se por A huma recta FG, que faça angulos iguaes com as duas rectas dadas BC, DE e tome-se $GH = AF$; faça-se depois passar pelos dois pontos G, H hum circulo, que toque huma das rectas dadas, e que por consequencia tocará tambem a outra. Fig. 173.

481. Para descrever hum circulo que toque tres rectas dadas; se estas se encontrão duas a duas formando hum triangulo, fica o problema resolvido, buscando o centro dos lados e o apothema, que serão o centro e o raio do circulo pedido.

Se duas AB, CD das rectas AB, BD, CD são parallelas, então da mesma fórma dividão-se ao meio os angulos ABD, BDC pelas rectas BE, DE; e o ponto E de concurso será o centro, e qualquer das perpendiculares EF, EH, EG o raio do circulo pedido. Fig. 174.

Bem se vê que ha outra solução da outra parte da secante BD.

Vê-se tambem que o problema não he possivel, se as rectas dadas são todas parallelas.

482. Dois circulos, nos quaes a distancia dos centros he igual á somma dos seus dois raios, tocão-se exteriormente em hum ponto d'esta distancia.

Sejão AB os centros de dois circulos, cujos raios são respectivamente AD, BE; e seja $AB = AD + BE$. Fig. 175

Tome-se $AC = AD$, será $BC = BE$; logo C he hum ponto commum aos dois circulos, e o unico, porque na recta AB não póde existir outro ponto F commum aos dois circulos, poisque então seria $BC = BF$: absurdo. Nem de qualquer dos lados de AB póde existir hum ponto G commum aos circulos, porque tirando GA, GB, teriamos $GA =$

AC, como sendo raios do mesmo circulo, e $GB = BC$, por igual rasão, isto he, seria

$$AG + BG = AB\text{: absurdo.}$$

Nenhum ponto G de hum dos circulos, do qual B he centro, póde estar dentro do outro, que tem por centro A; porque produzindo AG até o encontro do circulo em H, seria $AH = AC$; mas temos já $BG = BC$; logo

$$AH + BG = AB,$$

logo

$$AG + BG < AB\text{: absurdo.}$$

Tambem nenhum ponto F do circulo, de que B he centro, póde estar sobre AC, ou sobre a sua continuação, como temos visto.

483. Dois circulos, nos quaes a distancia dos centros he igual á differença dos seus raios, tocão-se interiormente em hum ponto unico da recta, sobre a qual estão os centros.

Fig. 176. Sejão A, B os centros de dois circulos, AB será a differença dos raios; e seja A o centro do circulo, cujo raio he o maior.

Produza-se AB da parte de B, até que tenhamos AC igual ao raio maior. Será C ponto commum aos dois circulos, e o unico.

Porque na recta AB não póde existir outro ponto commum aos dois circulos, nem á esquerda de A, porque faria menor do que o outro o raio que deveria ser maior, nem á direita de A, porque tornaria desiguaes os raios de hum mesmo circulo. Da mesma sorte não ha ponto commum D de algum dos lados de AB, porque tirando AD, BD, teriamos $AD = AC$, e $BD = BC$;

logo

$$AD - BD = AB,$$

ou

$$AD = AB + BD\text{: absurdo.}$$

Nenhum ponto E do circulo, cujo centro he B, póde existir fóra do circulo, de que A he centro; porque tirando AE, esta recta o cortaria em algum ponto F, e seria $AB + BE = AB + BC = AC = AF < AE$: absurdo.

484. Dois circulos, nos quaes a distancia dos centros he menor do que a somma dos dois raios, e maior do que a sua differença, teem dois pontos communs.

Porque a distancia AB dos centros sendo menor do que a somma dos dois raios AD, BD, e maior do que a sua differença, temos as condições necessarias (§ 69) para a construcção de dois triangulos, que tenhão estes lados, hum acima de AB, o outro da parte opposta no mesmo plano; o que dá dois pontos D communs aos circulos, cujos centros são A, B, e os raios AD, BD. Fig. 177.

485. Dois circulos não podem ter mais de dois pontos communs.

Sejão AB os centros dos dois circulos.

Nenhum dos pontos communs da questão póde existir na recta que une os centros, ou na sua continuação. Porque no primeiro caso, a distancia dos centros seria a somma dos raios, e os circulos se tocarião, e os dois pontos communs deixarião de existir; e no segundo caso, seria AB a differença dos raios, e os circulos não terião da mesma fórma mais do que hum ponto commum.

Vejamos agora se podem existir dois pontos communs aos circulos, do mesmo lado de AB. Se existem, não poderão ser C, D, que se achão em linha recta com qualquer A dos dois centros; porque então, sendo por hypothese communs aos dois circulos, serião AC, AD raios do mesmo circulo, de que A he centro: absurdo, Sejão pois, se he possivel, D, E estes dois pontos communs. Tirem-se DB, EB que serão iguaes, como sendo raios do mesmo circulo, de que B he centro; similhantemente, são iguaes entre si AD, AE; e poisque AB he commum aos dois triangulos ABD, ABE, serão estes identicos, e logo iguaes os angulos oppostos aos lados iguaes nos dois triangulos, isto he, ang. DAB = ang. EAB: absurdo. Logo não ha mais do que dois pontos communs, hum de cada parte de AB.

486. Por hum ponto fóra de hum circulo tirar huma tangente ao mesmo circulo.

Fig. 178. Seja A o ponto dado fóra do circulo CBD.

Ache-se o centro E do circulo, tire-se AE, e busque-se o seu meio F. Com o centro F, e o raio FA descreva-se hum circulo. Os dois circulos terão dois pontos communs C, D, mas nenhum d'elles na recta tirada pelos centros, porque a distancia $FE = FA$ dos centros he o raio de hum, e logo menor que a somma dos raios dos dois, e maior que FB, differença d'estes raios. Tirem-se AD, AC, ED. Cada huma das rectas AD, AC he tangente do circulo proposto. Porque o triangulo ADE, que tem o centro dos vertices sobre o lado AE, he rectangulo em D, ou he AD perpendicular sobre o raio ED.

487. *Arco de huma curva* he huma parte d'esta curva. *Corda da curva* ou *do arco* he a recta, cujos extremos são pontos da curva, ou extremos tambem do arco. *Diametro da curva* he a recta que divide em partes iguaes todas as cordas parallelas entre si. *Grandeza do diametro* he a parte d'esta linha, que he tambem huma corda.

488. Tambem se chama *circulo* a parte do plano que elle encerra; e n'este caso, a linha, que se chamava circulo, toma o nome de *circumferencia* ou *peripheria*.

489. A perpendicular a cordas parallelas, tirada pelo centro do circulo, he hum diametro.

Fig. 179. Do centro D do circulo ABC abaixe-se DE perpendicular sobre a corda AB; tirem-se os raios DA, DB. Serão identicos os triangulos rectangulos ADE, BDE, porque teem as hypothenusas iguaes, e o lado DE commum; logo $EA = EB$.

Da mesma maneira se prova, que esta mesma perpendicular divide, pelo meio, qualquer outra corda GH parallela a AB: e quanto á corda tirada pelo centro D, he claro que ella tem este ponto no seu meio. Logo DE he diametro, e FC a sua grandeza.

490. Toda a recta, que passa pelo centro do circulo, he diametro.

Porque de todos os seus pontos, que estão dentro do circulo, podem levantar-se cordas perpendiculares sobre ella, as quaes por consequencia serão parallelas, e divididas igualmente por esta recta qualquer, que passa pelo centro.

491. Hum diametro não divide sómente em partes iguaes as cordas, a que he perpendicular, mas tambem o circulo, a circumferencia, e os arcos, a que as ditas cordas pertencem.

Porque dobrando a figura pelo diametro *F C*, os pontos *A*, *B* coincidem, e da mesma maneira os extremos de outras cordas parallelas a *A B*, o que basta para fazer sentir a verdade da proposição.

492. Cordas parallelas *A B*, *G H* cortão no circulo arcos iguaes *A G*, *B H*.

493. Dois quaesquer dos tres pontos meio da corda, meio do arco, e centro do circulo, determinam a posição do diametro perpendicular á corda.

494. Dividir hum arco dado em duas partes iguaes.

Tire-se a corda do arco, e a perpendicular ao meio da corda. Esta perpendicular divide o arco em partes iguaes.

495. Pertencendo a corda a dois arcos da circumferencia, e a dois segmentos do circulo, subentende-se sempre o menor segmento, isto he, aquelle fóra do qual está o centro, e o menor arco, ou aquelle que pertence ao menor segmento.

496. A corda do circulo tem todos os seus pontos dentro d'elle.

Porque os extremos *A*, *B* da corda estão mais affastados de *D*, do que qualquer outro ponto de *A B* (§ 85). Se a corda he diametro, tambem a proposição he evidente.

497. Duas circumferencias, que teem dois pontos communs, cortão-se.

Porque a corda entre estes dois pontos estará nos dois circulos, logo estes teem commum huma parte da sua superficie, e logo as circumferencias cortão-se mutuamente.

498. O diametro he a maior corda do circulo.

No triangulo $A B D$ temos $A B < A D + B D$, isto he, $A B$ menor do que a somma de dois semidiametros.

499. De duas cordas do circulo, a menor está mais longe do centro; e reciprocamente.

No triangulo rectangulo $A B E$ o quadrado do raio $A D$ he igual á somma do quadrado de $D E$, distancia perpendicular do centro á corda, e do quadrado da semicorda $A E$; de sorte que, sendo o raio coñstante, quando $D E$ augmenta he necessario que $A E$ diminua, e por consequencia $A B$; e reciprocamente.

500. No mesmo circulo, ou em circulos descritos com raios iguaes, cordas iguaes estão a igual distancia do centro; e, reciprocamente, se as cordas estão a igual distancia do centro são iguaes.

501. Arcos iguaes de circumferencia descritas com raios iguaes, são identicos.

Sejão iguaes em comprimento, ou iguaes á mesma recta
Fig. 180. os arcos $A B$, $C D$ das circumferencias $A E B$, $C K D$, com os centros respectivos G, H, e os raios $G A$, $H C$ iguaes. Applique-se o centro G sobre o centro H, o raio $G A$ sobre o raio $H C$, e o arco $A B$ sobre o plano $C D F$ da parte de $C D$.

Todos os pontos de $A B$ cahirão sobre a circumferencia $C D F$, porque se algum cahisse em I, fóra ou dentro d'esta; então tirando $H I$, esta recta encontraria, produzida se fosse necessario, a circumferencia $C D F$ em algum ponto K, e seria $H I = G A$, e $H K = H C$, isto he, $H I = H K$: absurdo. Estando pois os pontos do arco $A B$ sobre $C D F$, e da mesma parte de $C D$, e sendo $A B = C D$, o outro extremo B cahirá sobre D, e os arcos serão identicos.

502. Com a mesma condição, as circumferencias tambem serão identicas.

503. Com a mesma condição, os arcos iguaes teem cordas iguaes; e reciprocamente.

Para demonstrar esta proposição inversa, faça-se a sobreposição dos triangulos identicos $G A B$, $H C D$, e então os arcos, coincidindo e tendo os mesmos extremos, serão iguaes, porque são identicos.

504. As asserções dos §§ 501, 503 teem logar tambem em huma só circumferencia, empregando entretanto na demonstração a segunda circumferencia; porque quantidades iguaes ou identicas com huma terceira, são iguaes ou identicas entre si.

505. *Sector do circulo* he a superficie, que dois raios e o arco interceptado terminam. O angulo dos dois raios chama-se *angulo do sector* ou *do centro*.

506. No mesmo circulo, ou em circulos descritos com raios iguaes os sectores, que teem arcos iguaes, teem os angulos iguaes, e são iguaes; e, reciprocamente, se teem os angulos iguaes, teem iguaes os arcos, e são iguaes.

Sendo iguaes os arcos AB, CD dos sectores GAB, HCD, são iguaes as suas cordas AB, CD; logo são iguaes os triangulos ABG, CDH; logo tambem os angulos G, H, e logo os sectores admittem sobreposição.

Reciprocamente, se os angulos G, H são iguaes, serão iguaes os triangulos ABG, CDH, logo iguaes as cordas AB, CD, e logo iguaes os arcos AB, CD.

507. Com as mesmas condições, os segmentos, que teem os arcos iguaes, ou as cordas iguaes, são iguaes.

508. No mesmo circulo, ou em circulos iguaes os arcos são proporcionaes aos sectores, e aos angulos do centro.

Sejão primeiramente commensuraveis os arcos AB, CD de circulos iguaes, e seja AE a sua medida commum. Tire-se o raio GE. Suppondo os arcos AB, CD divididos em partes iguaes a AE, e tirados raios aos pontos de divisão, ver-se-ha que os sectores, e os angulos do centro são compostos de sectores iguaes, e de angulos do centro tambem iguaes, assim como os arcos AB, CD são compostos de arcos iguaes a AE: e por isso a proposição he verdadeira.

Se os arcos não são commensuraveis, a demonstração he similhante á do § 123.

509. Logo quando se diz que hum arco he a medida do angulo do centro, deve subentender-se que o arco he igual ao angulo do centro dividido pela unidade angular, e multiplicado pela unidade ou medida do arco.

510. O angulo, que tem o vertice em huma circumferencia, tem por medida a metade do arco interceptado pelos lados, ou pelas suas continuações.

Fig. 181. O angulo ABC he metade do angulo do centro ADC (§ 172), logo $ABC = \frac{1}{2} AC$.

O angulo AEF formado pela tangente, e pelo diametro, he recto, logo tem por medida hum quarto da circumferencia, ou a metade da semicircumferencia ABE, comprehendida entre seus lados.

$$\text{O angulo } FEH = FEA + HEA$$

$$= \frac{1}{2} ABE + \frac{1}{2} AH = \frac{1}{2} EBH.$$

O angulo GEB he o supplemento de BEH, logo tem juntos por medida a semicircumferencia; mas o angulo

$$BEH = \frac{1}{2} BAH,$$

logo

$$\text{o ang. } GEB = \frac{1}{2}(BE + EH).$$

$$\text{O angulo } FEG = IEH = \frac{1}{2} HE.$$

O angulo GEI, seja EI tangente ou não, sendo igual ao seu verticalmente opposto, está comprehendido na proposição.

511. O angulo excentrico, ou que tem o vertice entre o centro e a circumferencia, tem por medida a semisomma dos arcos interceptados por elle, e pelo angulo verticalmente opposto.

Fig. 182. He o angulo $BAC = ADC + ACD = \frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} ED$.

512. O angulo, que tem o vertice fóra do circulo, tem por medida a semidifferença dos arcos que intercepta.

O angulo $BFC = BDC - DCF$

$$= \tfrac{1}{2} BC - \tfrac{1}{2} DG = \tfrac{1}{2}(BC - DG).$$

513. Se por hum ponto, tomado dentro ou fóra de hum circulo, se tirão duas rectas que cortem a circumferencia em quatro pontos, as partes d'estas rectas, comprehendidas entre o ponto e os quatro da circumferencia, são reciprocamente proporcionaes.

Se o ponto he A dentro do circulo, e as rectas as cordas BD, CE; os triangulos ABE, ADC, que são equiangulos entre si, dão

$$AE : AB :: AD : AC.$$

Se o ponto he F fóra do circulo, e as rectas as secantes FB, FC; os triangulos FBG, FCD, que teem o angulo BFC commum, e

$$FBG = \tfrac{1}{2} DG = FCD,$$

dão

$$DF : GF :: CF : BF.$$

514. Se huma das rectas encontra a circumferencia em hum só ponto, isto he, se he tangente, ella será media proporcional entre a secante, e a sua parte exterior. Fig. 171.

Porque os dois triangulos FEB, FED teem o angulo BFE commum, e o angulo $FBE = FED$, por terem ambos por medida $\tfrac{1}{2} ED$; logo os triangulos são similhantes, e

$$BF : EF :: EF : DF.$$

515. Fazer hum segmento circular *capaz* de huma corda e de hum angulo dados, isto he, que tenha o vertice do angulo no seu arco, e os extremos da corda sobre os lados do angulo.

Sejão AB a corda, e CDE o angulo dados. Fig. 183.

Faça-se o angulo CDF duplo do angulo agudo CDE dado, voltando este angulo para a outra parte de DE, ou fazendo $EDF=CDE$. Faça-se $DF=DC$. Tire-se CF. Fação-se os angulos A, B cada hum igual a C. Será $G=CDF$, e $GA=GB$. Com o centro G, e o raio GA descreva-se o arco do segmento, dentro do qual esteja G, e ter-se-ha o segmento pedido.

Porque qualquer angulo inscrito n'este segmento, e cujos lados passem por A, e B, será

$$=\frac{1}{2}G=\frac{1}{2}CDF=CDE.$$

Se o angulo dado CDE he obtuso, busque-se o segmento do seu supplemento, e o outro segmento será o pedido. Se o angulo CDE he recto, basta descrever huma semicircumferencia com a corda como diametro.

516. Inscrever em hum triedro dado hum triangulo dado, ou o que he o mesmo, fazer em hum triedro huma secção dada.

Fig. 184. Sejão a, b, c os angulos do triedro. Sobre cada hum dos lados do triangulo dado ABC, como cordas, fação-se os arcos ADB, BEC, CFA, capazes respectivamente dos angulos dados a, b, c; e depois fação-se girar os arcos sobre as suas cordas respectivas, até que tenhão hum ponto commum, que será o vertice do triedro.

517. A recta tirada de hum ponto do plano do circulo á circumferencia, augmenta com o arco interceptado por ella, e pelo ponto da circumferencia mais proximo, determinado pela recta que passa por aquello ponto e pelo centro.

Fig. 185. Sejão A o ponto dado, AC a linha que passa por elle e pelo ponto C, supposto o centro, AB, AD rectas tiradas do dito ponto A á circumferencia, E o ponto da recta infinita CA e da circumferencia, o mais proximo de A.

Temos $$CA+AB>CB,$$
isto he $$AC+AB>CE;$$
logo quando A está dentro do circulo será $AB>AE$.

Temos

$$CA - AB < CB,$$

isto he,

$$CA - AB < CE;$$

logo quando A está fóra do circulo, será

$$CE + AE - AB < CE,$$

logo tambem $AB > AE$.

Nos triangulos ACB, ACD que teem AC commum, e $CB = CD$, he $AD > AB$, assim como o arco $ED >$ arco EB.

Temos tambem, estando o ponto A dentro do circulo, $AF > AD$, porque $GA > AE$, e he

$$AF + AE > AD + GA,$$

O mesmo acontece quando A está fóra do circulo; porque no triangulo ADF o angulo opposto a AF he maior que o angulo opposto a AD, poisque

$$\text{ang. } ADF = \tfrac{1}{2} FH + \tfrac{1}{2} HG = \tfrac{1}{2} ED + \tfrac{1}{2} HG,$$

e o angulo $DFA = \frac{1}{2} ED$.

Quando o ponto A está sobre a circumferencia, ou confundido com E, não existe AE, nem AG, porque então está tambem sobre A ou E; mas tem logar tudo o mais, e póde concluir-se, que quando os arcos são menores do que a semicircumferencia, o arco maior tem maior corda, e reciprocamente.

518. A perpendicular abaixada de hum ponto da circumferencia sobre hum diametro chama-se *ordenada* d'esse ponto; *abscissa* he a parte do diametro comprehendida entre a ordenada e o centro; e ambas as linhas são chamadas *coordenadas* do ponto.

519. A ordenada he media proporcional entre os segmentos do diametro do circulo.

Fig. 186. A ordenada CD he metade da corda CF, logo he media proporcional entre AD e DB (§ 513).

520. Reciprocamente, se huma linha plana he tal que todas as perpendiculares abaixadas de seus pontos sobre huma de suas cordas sejão medias proporcionaes entre os seus segmentos respectivos; esta linha será hum circulo, e a corda o seu diametro.

Seja ACB a linha plana proposta, tal que a perpendicular qualquer CD, tirada de algum ponto C sobre a corda AB, seja sempre media proporcional entre AD e DB; digo que esta linha he a circumferencia circular.

Divida-se AB ao meio em E. Tire-se EC.

Pela propriedade da linha proposta, temos

$$CD^2 = AD \times DB = (AE + ED)\,(EB - ED)$$

$$= (AE + ED)\,(AE - ED) = AE^2 - ED^2.$$

Mas pela propriedade do triangulo rectangulo DEC, he

$$CD^2 = CE^2 - ED^2;\ \text{logo } CE = AE.$$

Se a perpendicular cahe no ponto E, como GE, então para ser media proporcional entre os segmentos iguaes, he preciso que seja igual a cada hum d'elles. Logo todos os pontos de ACB estão distantes de E, tanto como cada hum dos pontos A, B. Logo a linha proposta he circulo, e tem o centro em E.

521. Dois arcos, que formão juntos o quarto da circunferencia, sendo divididos pela unidade do arco, dão dois numeros que são completamentos hum do outro. (Arithmetica Universal § 288).

Dividindo pela unidade angular u os dois angulos agudos do triangulo rectangulo, resultão dois numeros complementos hum do outro para o numero q: esta unidade he o angulo recto r dividido por q, isto he, $u = \frac{r}{q}$.

Ora a unidade U do arco deve ser o arco que mede u, logo deve estar para o quadrante GCB da circumferencia, que designo por c, como u está para o angulo recto $GEB = r$, isto he:

$$U = \frac{\frac{1}{4}cu}{r} = \frac{\frac{1}{4}c.\frac{r}{q}}{r} = \frac{\frac{1}{4}c}{q}.$$

Logo

$$\frac{GC}{U} + \frac{CB}{U} = \frac{\frac{1}{4}c}{\frac{\frac{1}{4}c}{q}} = q.$$

522. $\frac{AC}{U} = \frac{\text{ang.}\,AEC}{u}$, $\frac{CB}{U} = \frac{\text{ang.}\,CEB}{u}$;

logo

$$\frac{AC + CB}{U} = \frac{2r}{u} = 2q,$$

isto he, dois arcos, que tomados juntos formão a semicircumferencia, sendo divididos pela unidade do arco, são supplementos hum do outro para $2q$.

523. $CD = EC \,\text{sen.}\frac{CED}{u}$; $ED = EC \cos.\frac{CED}{u}$;

logo

$$CD = EC \,\text{sen.}\frac{CB}{U},$$

$$ED = EC \cos.\frac{CB}{U}.$$

Assim, quando se diz que o seno de hum arco he a perpendicular abaixada de hum extremo do arco sobre o diametro, que passa pelo outro extremo, subentende-se que o arco deve ser dividido pela sua unidade, e que depois o seno d'este quociente multiplicado pelo raio, dá essa perpendicular. Quando se diz que o coseno de hum arco he a parte do diametro entre o centro e o seno, deve dar-se-lhe huma igual significação, isto he, huma similhante interpretação. N'este sentido, CD, que he tambem o seno do arco AC, he $= \text{sen.}\left(2q - \frac{CB}{U}\right) = \text{sen.}\frac{CB}{U}$, (Arithmetica Universal (§ 294), e ED, considerado como coseno do arco AC, he $=$

$\cos.\left(2\,q - \frac{C\,B}{U}\right) = -\cos.\frac{C\,B}{U}$. (Arithmetica Universal § 295).

524. *Tangente de hum arco de circulo* he a parte da tangente infinita ao extremo do arco, comprehendida entre este ponto, e a continuação do raio que passa pelo outro extremo. *Secante do arco* he este mesmo raio continuado até á tangente.

525. A tangente $B\,H$ do arco $B\,C$ he quarta proporcional ao coseno $E\,D$, ao seno $C\,D$, e ao raio $E\,B$.

526. O raio $E\,B = E\,C$ he meio proporcional entre o coseno $E\,D$, e a secante $E\,H$ do arco $B\,C$.

527. De duas linhas planas fechadas, e que estão no mesmo plano, a exterior he maior do que a interior, se esta he convexa, isto he, se he, tal que não possa ser cortada em tres pontos por huma recta.

Porque para applicar todos os pontos da exterior sobre a interior, he necessario dobrar a primeira, suppondo-a flexivel, sobre a segunda supposta inflexivel.

528. De todas as linhas planas, descriptas no mesmo plano, e tendo os mesmos extremos, a recta he a menor, e depois d'esta he menor aquella que está entre a recta e as outras, huma vez que seja convexa.

Fig. 187. Para a demonstração, basta suppor tres linhas $A\,E\,B$, $A\,C\,B$, $A\,B$, das quaes a segunda seja convexa, e a terceira recta. Póde sempre formar-se da outra parte da recta $A\,B$ hum triangulo $A\,B\,D$ com os angulos em A, e B tão agudos, quanto he preciso para que a linha $A\,C\,B\,D$ fique ainda convexa. Então pela proposição precedente, será a linha $A\,E\,B\,D\,A >$ linha $A\,C\,B\,D\,A > A\,B\,D\,A$, d'onde tirando a linha quebrada $A\,D\,B$ commum, teremos $A\,E\,B > A\,C\,B > A\,B$.

529. O seno he menor do que o seu arco. Porque o seno he metade da corda do arco duplo, e este he maior do que a corda.

530. Uma recta qualquer, tirada do extremo de hum arco, até á continuação do raio que passa pelo outro extremo, sem cortar o arco, he maior do que elle.

Seja AB a recta qualquer tirada do extremo do raio DA até á continuação do raio DC, sem cortar o arco AC; digo que $AB > AC$. Fig. 188.

Volte-se o triangulo DAB sobre a outra parta de DB, e seja E o novo logar do ponto A. Estará E na mesma circunferencia ECA, de que AC he hum arco; e será $EC = AC$, $BE = AB$. Mas a linha $EBA > ECA$, logo $BA > AC$.

531. Qualquer recta, tirada da continuação de hum raio até á continuação d'outro, sem cortar o arco, tem a sua parte, interceptada pelos dois raios, maior que este arco. Fig. 189.

Seja DE a recta tirada entre as continuações dos raios AB, AC, sem cortar o arco BC. Pelo centro, e pelo meio G do arco BC tire-se a recta AF até á recta proposta. Por F, e G tirem-se as perpendiculares HI, KL sobre AF, e terminadas nas continuações dos raios.

Será (§ 207) $DE > HI > KL > BC$, como se affirmou, porque KL he composta de duas partes KG, GL, cada huma maior do que o seu respectivo arco, conforme o que precede.

532. No quadrante, os senos crescem em rasão menor do que os arcos correspondentes.

Em quanto os arcos AG, CG são menores do que o quadrante, o maior tem o seno AB maior do que o seno CD do segundo, porque o primeiro he metade da corda de hum arco maior, e o segundo da corda de hum arco menor, e nenhum d'estes dois arcos duplos he maior do que a semicircumferencia. Logo a recta tirada por A, C encontrará em algum ponto F o raio EG produzido, e teremos Fig. 190.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AC + CF}{CF} = \frac{\text{corda } AC}{CF} + 1,$$

logo

$$\frac{AB}{CD} < \frac{\text{arco } AC}{\text{arco } CG} + 1,$$

isto he

$$\frac{AB}{CD} < \frac{\text{arco } AG}{\text{arco } CG}.$$

533. No quadrante, as tangentes crescem em rasão maior do que os arcos respectivos.

Fig. 191. Tire-se por D a perpendicular FG sobre o raio HA. Será

$$\frac{AB}{AC}=\frac{DF+DG}{DG}=\frac{DF}{DG}+1;$$

logo

$$\frac{AB}{AC}>\frac{\text{arco } ED}{\text{arco } DA}+1,$$

isto he

$$\frac{AB}{AC}>\frac{\text{arco } EA}{\text{arco } DA}.$$

534. *Rectilineo inscrito em hum arco de circulo* he aquelle que tem os mesmos extremos que o arco, e todos os seus vertices no arco. Este rectilineo he huma linha composta de cordas.

Rectilineo circumscrito a hum arco de circulo he aquelle que tem os mesmos extremos do arco, e em cada hum de seus lados hum só ponto do arco. Este rectilineo he huma linha composta de tangentes.

535. Em dois arcos de sectores com o mesmo angulo do centro, inscrever no exterior hum rectilineo que não encontre o arco interior, e circumscrever ao arco interior hum rectilineo que não encontre o primeiro rectilineo, e que seja menor.

Fig. 192. Divida-se o arco AB em hum numero 2^n de partes iguaes AD, DE, etc., sendo n tão grande, que cada huma d'ellas seja $< AC$. Então a corda $AD < AC$. Logo AD não póde encontrar o arco CH correspondente em algum ponto, porque a distancia d'esse ponto ao ponto A he maior do que AC, como he facil de ver; logo este ponto de encontro supposto não poderia estar na corda $AD < AC$. O mesmo póde affirmar-se das outras cordas.

Divida-se o arco CH ao meio no ponto K. Por C, e H tirem-se as tangentes respectivas dos arcos CK, HK, as quaes concorrerão em algum ponto L do raio JK produzido, suppondo que he o ang. AJD menor do que dois rectos.

Agora digo que nenhum ponto de CL póde estar sobre a corda AD, poisque aliás haveria hum triangulo com o angulo recto ACL, e cuja hypothenusa seria huma parte de AD, logo $AD > AC$, contra o que se exigia na construcção.

Fazendo a mesma construcção de tangentes dos arcos HM, MN, NG, teremos a linha $CLPQRG$ sómente composta de tangentes, sem encontrar a linha das cordas.

Tirando por K a tangente ST, teremos $CL + HL = ST <$ corda AD. Da mesma maneira $HP + MP < DE$; etc. Logo o rectilineo das tangentes $CLPQRG <$ rectilineo das cordas $ADEFB$.

536. Os sectores equiangulos têem os arcos proporcionaes aos raios.

Se he possivel, não seja Fig. 193.

$$BC : FG :: AB : AE,$$

mas seja a rasão do primeiro arco para o segundo menor do que a dos raios, ou seja

$$BC : FG :: AB : AD.$$

Com o raio AD descreva-se o arco DE. No arco DE inscreva-se a linha das cordas iguaes $DLMNE$, a qual não corte FG. Inscreva-se huma linha similhante em BC; e para isso basta achar os pontos H, I, K, em que os raios AL, AM, AN, produzidos cortão BC, e unil-os.

A similhança dos polygonos $ABHIKC$, $ADLMNE$ dá

$$BHIKC : DLMNE :: AB : AD;$$

logo

$BC : FG :: BHIKC : DLMNE$; absurdo, porque $BC > BHIKC$, e $FG <$ que a linha das tangentes circumscrita, a qual he $< DLMNE$.

Se he possivel, seja a rasão de hum arco BC para outro interior DE, maior do que a dos raios, ou seja

$$BC : DE :: AB : AF.$$

Com o raio AF descreva-se o arco FG. Ao arco FG circumscreva-se huma linha de tangentes, á qual chamaremos tang.' FG, e que não corte a linha das cordas $DLMNE$. Circumscreva-se huma similhante linha de tangentes a BC. A similhança d'estas figuras dá

$$\text{tang.}\, BC : \text{tang.}\, FG :: AB : AF,$$

logo

$BC : DE ::$ tang. BC : tang. FG; absurdo, porque o arco BC he menor do que a sua linha de tangentes, emquanto que o arco DE he maior do que a sua linha de cordas, a qual he maior do que a linha de tangentes de FG.

537. As circumferencias são proporcionaes aos seus raios.

538. O arco do sector, conservando-lhe sempre o mesmo angulo, póde adquirir a grandeza de huma linha qualquer, por ser huma funcção do raio que póde ir desde zero até ao infinito. O mesmo acontece a respeito da circumferencia.

539. Achar que funcção do raio he a circumferencia.

Fig. 194. Divida-se o quarto BC da circumferencia em duas partes iguaes, huma d'esta tambem em duas partes iguaes, huma d'estas ultimas em duas partes iguaes, e assim por diante, até que se obtenha hum arco DC tão pequeno quanto se quizer, ou menor do que qualquer linha proposta; e supponhamos que isso aconteça quando fôr $DC = \frac{BC}{m}$, sendo m portanto hum numero inteiro potencia de 2.

O arco DC he sempre maior do que o seno geometrico DE, e menor do que a tangente geometrica CF. Mas $CF = \frac{DE}{AE} \times AC$.

Tambem $DE = AD \,\text{sen.}\, \frac{DC}{U} = AC \text{ sen. } \frac{q.DC}{BC} = AC$ sen. $\frac{q}{m}$; e $AE = AC \cos. \frac{q}{m}$. Logo $DC > AC$ sen. $\frac{q}{m}$ e $< AC$ tang. $\frac{q}{m}$, isto é,

$$DC > AC\left(\frac{q}{m} - {}^{-}\frac{1}{6}.\frac{q^3}{m^3} + \text{etc.;}\right),$$

$$DC < AC\left(\frac{q}{m} + \frac{1}{3}.\frac{q^3}{m^3} - \text{etc.}\right).$$

Estas desigualdades, suppondo m tão grande quanto se quizer, concorrem para dar $DC = \frac{q}{m} AC$, logo $CB = m.$ $DC = q. AC$.

Logo o numero q, achado pelos meios algorithmicos he, a rasão do quadrante para o raio; logo 2q, que chamaremos π, he a rasão da circumferencia para o diametro, isto he, $\pi = 3{,}1415926$ approximadamente; logo o dobro d'este numero multiplicado pelo raio, he a funcção procurada.

540. A area do sector circular he metade do producto do arco e do raio.

Se se nega que $\frac{1}{2} AB \times$ arco $BC =$ sector ABC, seja, se he possivel, Fig. 193.

$$\frac{1}{2} AB \times \text{arco } BC = \text{sector } ADE \text{ (menor).}$$

Tire-se a perpendicular AP sobre a corda BH.

Será o polygono $ABHIKC >$ sector ADE, isto he, $\frac{1}{2} AP \times BHIKC > \frac{1}{2} AB \times$ arco BC: absurdo, por ser $AP < AB$, e a linha das cordas inscrita menor tambem do que o arco.

Se não he $\frac{1}{2} AD \times$ arco $DE =$ sector ADE, seja, se he possivel,

$$\frac{1}{2} AD \times \text{arco } DE = \text{sector } ABC \text{ (maior).}$$

Será o polygono $ABHIKC <$ sector ABC, isto he, $\frac{1}{2} AP \times BHIKC < \frac{1}{2} AD \times$ arco DE: absurdo, por ser $AP > AD$, e $BHIKC >$ arco DE.

541. A area do circulo he metade do producto do circumferencia pelo raio.

542. A area do circulo he maior que a area de qualquer polygono, cujo perimetro seja igual á sua circumferencia.

O perimetro do polygono regular, isoperimetro e concentrico com o circulo, corta a circumferencia, porque aliás seria maior, ou menor do que elle, contra a hypothese de lhe ser igual. Por conseguinte o seu apothema, sendo a distancia do centro a cada hum dos lados, he menor do que o raio. Logo a area d'este polygono, que he o producto do seu perimetro pela metade do apothema, he menor do que a do circulo, que he o producto da circumferencia, igual ao perimetro, pela metade do raio.

A superficie d'outro polygono, não regular, mas do mesmo perimetro, he ainda menor.

543. A circumferencia he menor do que o perimetro de hum polygono qualquer, igual em area ao circulo.

O perimetro do polygono regular, concentrico com o circulo e tendo a mesma superficie, corta a circumferencia; logo sendo o seu apothema menor do que o raio, he necessario que o seu perimetro seja maior do que a circumferencia, para que o producto d'este perimetro pela metade do apothema seja igual ao producto da circumferencia pela metade do raio.

O perimetro de hum polygono qualquer não regular, tendo igual area, he ainda maior.

544. Dos angulos inscritos no mesmo segmento, tem huma maior somma de lados aquelle, que os tem iguaes.

Fig. 195. Teremos

$$\text{sen.}\ \tfrac{1}{4}\,AD\left(\text{cos.}\ \tfrac{1}{4}\,AD - \text{cos.}\ \tfrac{1}{4}\,DC\right)$$

$$< \text{sen.}\ \tfrac{1}{4}\,DC\left(\text{cos.}\ \tfrac{1}{4}\,AD - \text{cos.}\ \tfrac{1}{4}\,DC\right);$$

pois sendo $\text{cos.}\ \frac{1}{4}\,AD < \text{cos.}\ \frac{1}{4}\,DC$, são negativos os dois membros d'aquella inequação, e de duas quantidades negativas he menor aquella, que seria maior, se essas quantidades fossem positivas.

Logo

$$2 \text{ sen. } \tfrac{1}{4} AD \cos. \tfrac{1}{4} AD + 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{4} DC \cos. \tfrac{1}{4} DC$$

$$< 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{4} AD \cos. \tfrac{1}{4} DC + 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{4} DC \cos. \tfrac{1}{4} AD,$$

isto he,

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2} AD + \text{sen. } \tfrac{1}{2} DC < 2 \text{ sen. } \frac{AD + DC}{4},$$

ou, sendo $AB = BC$,

$$2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2} AD + 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2} DC < 2 \times 2 \text{ sen. } \tfrac{1}{2} AB,$$

isto he,

$$\text{corda } AD + \text{corda } DC < 2 \times \text{corda } AB.$$

545. Entre os triangulos ABC, AEC com o mesmo perimetro, e base, o isosceles tem maior o angulo opposto á base AC.

Porque para o triangulo AEC ser isoperimetro com ABC, he necessario que o vertice E esteja fóra do segmento, logo o angulo $E < ADC$, ou $< ABC$.

LIVRO 7.º

Dos solidos circulares.

546. *Solidos circulares* são os que podem ser gerados empregando o circulo e a linha recta.

547. *Solidos de revolução* são os gerados pela revolução de huma superficie sobre huma recta.

548. *Superficie curva* he aquella de que nenhuma parte he plana.

549. *Cylindro* he o logar de todos os circulos iguaes e parallelos, os quaes têem os centros na mesma recta. Esta recta chama-se *eixo*. O cylindro he infinito, mas usa-se de huma parte d'elle com o mesmo nome; e n'esse caso chamão-se *bases* os circulos extremos, e *altura* a perpendicular entre as bases. O *cylindro* diz-se *recto* quando o eixo he altura; aliás he *obliquo*.

550. O cylindro he hum solido circular.

O cylindro $CEDGFH$ póde ser gerado pelo circulo CED, e a recta AB, movendo o circulo parallelamente a si mesmo, e conservando sempre o centro na recta AB. Fig. 196

551. A secção feita no cylindro por hum plano parallelo ás bases, he hum circulo igual a cada huma d'ellas.

Porque esta secção he huma das posições do circulo gerador.

552. A superficie do cylindro, terminada pelas circumferencias das bases, ou a superficie continua por ellas comprehendida, he curva.

Porque se tivesse alguma parte plana, a intersecção d'esta parte com hum plano parallelo ás bases seria recta, e ao mesmo tempo circumferencia, ou arco: absurdo.

553. A secção feita no cylindro por qualquer plano, em que esteja o eixo, ou que lhe seja parallelo, he hum parallelogrammo; e as secções assim feitas na superficie curva são rectas iguaes e parallelas ao eixo, que se chamão *lados* do cylindro.

Pelos centros A, B das bases tire-se hum plano qualquer, em que estará o eixo, e que dividirá o cylindro, e terá duas secções FG, CD communs com as bases, com cada huma das quaes este plano tem hum ponto commum. FG, CD são parallelas, porque estão no plano secante e nos planos parallelos das bases, e são iguaes por serem diametros de circulos iguaes. Tirem-se as rectas FC, GD, e será $CDGF$ hum parallelogrammo.

Resta mostrar que qualquer ponto das rectas FC, GD he hum ponto da superficie curva do cylindro, ou que estas rectas são lados d'elle. Para isso, basta tirar de hum ponto I de huma para o eixo a recta IK parallela a CA, porque será $IK = CA$, logo será IK o raio do circulo, igual á base, tendo o centro em K, e logo o ponto I he hum dos da superficie descrita pela circumferencia do circulo gerador.

Qualquer plano parallelo ao eixo, e que corte o cylindro, deve cortar tambem huma das bases, e seja FL a sua intersecção. As intersecções dos planos ABF, ABL com este plano seccante serão rectas parallelas ao eixo, logo são os lados FC, LM do cylindro. Mas estes lados são iguaes e parallelos, logo a secção $FLMC$, feita no cylindro por hum plano parallelo ao eixo, he hum parallelogrammo.

554. A superficie curva do cylindro infinito, he o logar de todas as rectas parallelas ao eixo, tiradas de todos os pontos de huma das circumferencias das bases.

555. *Superficies tangentes* humas das outras, são as que não têem, nem podem ter, produzidas, mais de hum ponto commum, ou huma linha commum, e que não se cortão.

556. O plano, tirado por hum lado do cylindro, e pela recta tangente a huma das bases no extremo d'este lado, he tangente á superficie curva do cylindro.

Tire-se LN tangente a FLG. Digo que o plano MLN

he tangente ao cylindro. Porque, se he possivel, supponhamos que este plano encontra a superficie curva do cylindro em outro ponto *P* fóra da recta *L M*. Tire-se no plano *M L N* a recta *P Q* parallela a *L N*. Será *Q P* perpendicular ao raio *Q R* da secção do cylindro, que passa por *Q*, e parallela ás bases, por serem os raios *B L*, *R Q*, parallelos, e o angulo *B L N* recto. O plano *P Q R* será tambem parallelo ás bases. Logo *P Q R* he o plano da secção circular que passa por *Q*, e *Q P* a sua tangente, e ao mesmo tempo a sua corda, se *P* pertence á superficie curva: absurdo.

557. Por hum ponto dado fóra da superficie curva de hum cylindro infinito, ou situado n'ella tirar hum plano tangente a esta superficie.

Pelo ponto dado tire-se hum plano parallelo a huma das bases do cylindro, que cortará este produzido indefinidamente. Tire-se então por esse ponto huma tangente ao circulo, que he a intersecção do plano e do cylindro; e o plano, determinado por esta tangente e pelo lado do cylindro, que passa pelo ponto de contacto, será o plano tangente pedido.

Vê-se que se póde tirar outro plano tangente, se o ponto dado estiver fóra do cylindro.

558. Podem tambem tirar-se quatro planos tangentes a dois cylindros, que tenhão parallelos os eixos, e as bases.

Porque póde tirar-se hum plano parallelo ás suas bases, e depois as tangentes rectilineas dos dois circulos, que são as intersecções d'aquelle plano com os cylindros; e então estas tangentes, e os lados dos cylindros correspondentes aos pontos de contacto, determinão os planos tangentes pedidos.

559. O cylindro recto he hum solido de revolução:

O cylindro *C F* sendo recto, o eixo *B A* he perpendicular ás bases, e por conseguinte a todos os seus raios; logo *B E C A* he hum rectangulo; e movendo-o sobre *B A*, o lado opposto *C E* descreve a superficie curva do cylindro, e os outros dois lados *B E*, *A C* descrevem as bases, porque em todas as posições do rectangulo, estas rectas, sendo perpendiculares a *B A*, se achão sempre em dois planos, perpendiculares a *A B*, e descrevem n'elles circulos parallelos e iguaes. Fig. 197.

e de que as rectas BE, AC são os raios, e B, A os centros.

560. *Pyramide conica* he o solido encerrado por hum circulo, e pela parte da superficie gerada por huma recta infinita, que passa sempre por hum ponto determinado fóra do plano do circulo, e por todos os pontos da sua circumferencia; a qual parte de superficie está entre esta circumferencia, e o dito ponto. Este ponto chama-se *vertice;* o circulo *base;* a recta entre o vertice e o centro da base *eixo;* e a perpendicular abaixada do vertice sobre o plano da base *altura da pyramide conica.* He *recta* a pyramide conica quando o eixo he altura, aliás he *obliqua. Lados da pyramide* são todas as rectas tiradas do vertice á circumferencia da base, as quaes são ao mesmo tempo posições da recta geradora.

561. Na pyramide conica obliqua, os dois lados que estão no plano do eixo, e altura são o maximo e o minimo dos lados; e cada hum d'elles he unico; e cada hum dos outros não têem igual da mesma parte do dito plano, e só tem hum igual da outra parte.

Fig. 198. Na pyramide conica $ABCD$, de que DE he o eixo, e DF a altura, tire-se huma recta qualquer FG do pé F da altura para a circumferencia da base.

Os triangulos DFG, DFC, DFA são rectangulos em F; DF he commum; e teremos (§ 517) $AF > FG > FC$; logo $AD > DG > DC$.

Se o ponto F cahe na circumferencia, ou dentro, acontece o mesmo, porque não póde cahir em E.

562. Na pyramide conica recta todos os lados são iguaes.

Porque todos são hypothenusas de triangulos rectangulos, que têem o eixo ou a altura por lado commum, e cujos outros lados são os raios da base.

563. A pyramide conica recta he hum solido de revolução, gerado por hum triangulo rectangulo, sendo eixo hum dos lados do angulo recto.

A demonstração he similhante á do § 559.

564. A secção feita na pyramide conica por hum plano que passe pelo vertice, he hum triangulo.

Porque, para este plano cortar a pyramide, he necessario que corte a base; logo a sua intersecção com esta he huma corda CG, e os lados GD, CD da pyramide, tirados dos extremos da corda para o vertice, são rectas que formão com ella hum triangulo, e que têem dois pontos cada huma no plano secante; logo estão n'este plano e na superficie da pyramide conica.

565. A secção feita em qualquer pyramide conica por hum plano parallelo á base, he circulo: e tambem o he na obliqua, se a secção tiver para hum dos lados, maximo e minimo, a mesma inclinação que a base tem para o outro.

Seja primeiramente a secção GHI feita na pyramide conica $DABC$ parallela á base ABC. Fig. 199.

Tire-se o diametro AC da base, e seja GI a intersecção do triangulo DAC e da secção proposta GHI. Tire-se o eixo DE, que cortará GI em algum ponto F. De qualquer ponto H do perimetro da secção tire-se HF; e seja EB a intersecção do plano DHF e da base.

Será EB parallela a FH, por estarem no mesmo plano, e em planos parallelos. Logo são similhantes os triangulos DBE, DHF, e será FH quarta proporcional ao eixo DE, ao raio EB da base, e á recta DF; o mesmo acontece em qualquer outro ponto do perimetro GHI; logo todos estes pontos estão a igual distancia de F, e a secção he hum circulo.

Sejão agora CD o eixo, CE a altura, e CA, CB os dois lados unicos da pyramide conica, isto he, o maior e o menor dos seus lados. No plano d'estas quatro rectas tire-se FG que faça com hum dos lados unicos o angulo $CGF = CAB$. Tire-se por FG hum plano perpendicular ao do eixo e altura, e cuja intersecção com a superficie da pyramide seja FHG. Digo que esta secção he hum circulo. Fig. 200.

Por qualquer ponto H do seu perimetro tire-se hum plano parallelo á base, cuja intersecção HIK com a pyramide he hum circulo, do qual a intersecção KI com o triangulo CAB he o seu diametro. Conduza-se de H a recta HL

para a intersecção das rectas FG, HI. Estará HL na intersecção das duas secções FHG, KHI.

Mas estas duas secções são perpendiculares ao plano do eixo e altura, huma por construcção, e a outra por ser parallela á base, á qual he perpendicular aquelle plano; logo HL he perpendicular ao dito plano ACB, logo tambem perpendicular ás rectas FG, KI, que passão pelo seu pé, e estão n'este plano. Temos o angulo $IGL = CAB = FKL$, logo os triangulos ILG, FLK verticalmente oppostos são similhantes, e por tanto

$$FL : LI :: KL : LG, \text{ ou } FL \times LG = LI \times KL;$$

mas $HL^2 = LI \times KL$, logo tambem $LH^2 = FL \times LG$. Porém H he hum ponto qualquer de FHG, logo FHG he hum circulo.

O angulo CGF he a inclinação do lado CB sobre a secção FHG, e o angulo CAB a inclinação do lado CA sobre a base.

566. O mesmo acontece no cylindro obliquo, se se chamarem lados unicos ou principaes aquelles que estão no plano do eixo e altura; e a demonstração he a mesma se se considerarem os dois lados AF, BI como parallelos.

567. Póde tirar-se por hum ponto dado fóra, ou na superficie curva da pyramide conica, infinita das duas partes do vertice, hum plano tangente á pyramide, tirando pelo dito ponto hum plano parallelo á base da pyramide, e depois a tangente do circulo, que he a intersecção, imitando o que se fez no § 557.

Então o plano d'esta tangente e do lado correspondente da pyramide determina o plano tangente pedido.

Se o plano da construcção não encontra a pyramide conica senão no vertice, una-se então o ponto dado, e o vertice por huma recta, tire-se pelo centro da base huma parallela a esta recta, tome-se hum raio perpendicular, e pelo seu extremo tire-se a tangente rectilinea que será parallela ás outras duas rectas, e que com o lado correspondente da pyramide determinará o plano tangente pedido.

Bem se vê que n'este caso póde tirar-se ainda outro plano tangente.

Se o ponto dado he o vertice, as soluções são infinitas.

568. A superficie da pyramide conica entre o vertice e a circumferencia da base he curva.

A demonstração he como a do § 552.

569. O plano de um lado da pyramide conica, e da tangente da base no extremo d'este lado, he tangente á superficie curva.

570. *Esphera* he o solido, limitado por huma superficie, cujos pontos têem todos o mesmo centro.

571. O centro de todos os pontos da superficie da esphera não póde estar fóra d'ella, nem na mesma superficie.

A demonstração he como a do § 470.

572. O centro de todos os pontos da superficie da esphera he unico.

A demonstração he como a do § 471.

573. A distancia de qualquer ponto da superficie da esphera ao centro, chama-se *raio;* e a este centro, *centro da esphera;* e a recta composta de dois raios, he o *eixo* ou o *diametro da esphera.*

574. Sendo dados o centro e raio, descrever a esphera.

Com o centro A e raio AB descreva-se o semicirculo Fig. 201.
BDC, e fazendo a revolução inteira do semicirculo á roda de BC, ficará descrito hum solido de revolução $BDCE$, que he a esphera pedida.

Porque os pontos da sua superficie serão equidistantes de A, como os pontos da semicircumferencia que gera esta superficie.

575. Todas as rectas que passão pelo centro da esphera, e terminão na sua superficie, são eixos de revolução.

576. Qualquer secção feita na esphera, por hum plano, he hum circulo, cujo centro está no eixo que lhe he perpendicular.

Seja FGH esta secção. Todos os pontos do seu perimetro estão em hum plano, que he o plano secante, e a igual distancia de A; logo a secção he circulo (§ 466).

Seja $A\,I$ o eixo da esphera perpendicular á secção. A pyramide conica que tivesse A por vertice, e $F\,G\,H$ por base, teria os seus lados iguaes; logo seria recta, e a sua altura $A\,I$ seria o eixo, ou I o centro de $F\,G\,H$.

Se a secção passa pelo centro da esphera, as duas partes do enunciado são evidentes.

577. *Polo* de hum circulo da esphera he cada hum dos extremos do eixo, que lhe he perpendicular.

578. Os circulos parallelos da esphera têem os mesmos polos; e reciprocamente, se têem os mesmos polos, são parallelos.

Sendo os circulos $D\,E\,K$, $F\,G\,H$ parallelos, o eixo $B\,C$ tirado perpendicularmente a hum d'elles, será perpendicular ao outro, e os extremos $B\,C$ do eixo serão polos dos dois circulos.

Reciprocamente, se B, C são polos de ambos, o eixo $B\,C$ he-lhes perpendicular, e logo estes circulos são parallelos.

579. Qualquer circulo tal como $B\,D\,C$ que passa pelos polos d'outro, ou d'outros taes como $D\,E\,K$, $F\,G\,H$, por isso que passa pelo eixo $B\,C$, he como este perpendicular aos circulos.

580. Os circulos da esphera, que têem por centro o mesmo centro da esphera, são os maiores; e dos outros he menor aquelle, que dista mais do centro da esphera.

Os circulos, cujo centro he o da esphera, têem por diametro os eixos da esphera, que são iguaes, e por isso são iguaes tambem todos esses circulos.

Seja agora $F\,G\,H$ outro circulo, que não passa pelo centro da esphera. Por este centro e por hum dos polos C de $F\,G\,H$ tire-se hum circulo qualquer $A\,D\,C$ da esphera. Seja $F\,H$ a intersecção d'estes dois circulos. $B\,C$ cortará $F\,H$ em algum ponto I, que será ao mesmo tempo o centro de $F\,G\,H$; logo $F\,H$ he o seu diametro, e corda do circulo $A\,D\,C$; logo $A\,D\,C$ he hum circulo maximo da esphera, e $F\,G\,H$ hum menor, e tanto menor quanto mais longe estiver do centro da esphera.

581. O circulo que passa pelos polos d'outro, he hum circulo maximo da esphera, porque o seu centro he o da esphera.

582. Todos os pontos da superficie da esphera, que teem o mesmo centro, mas differente do centro da esphera, pertencem á circumferencia de hum circulo da mesma esphera.

Seja L o centro dos pontos F, G, H, etc. Tirem-se FA, FL, e a perpendicular FI sobre AL.

O triangulo AFL, girando em torno de AL, descreve duas pyramides conicas rectas, cuja base commum he o circulo descrito por IF. Porque os lados de cada huma d'estas pyramides são iguaes, o ponto F, na revolução, passará por todos os pontos da superficie espherica equidistantes de L, e por todos os equidistantes de A, pois se não passasse em G, quando o plano AFL chega á posição AGL, teriamos então dois triangulos AFL, AGL distinctos no mesmo plano, com a mesma base, postos da mesma parte, e tendo iguaes correspondentemente os lados que partem dos extremos da base: absurdo.

Logo todos os pontos propostos estão na circumferencia descripta por F.

O mesmo tem lugar, se o ponto L está na superficie, ou dentro, não estando comtudo em A.

583. Todos os pontos da circumferencia de hum circulo da esphera estão a igual distancia de hum mesmo polo, ou tem por centros os polos d'este circulo.

Porque o triangulo rectangulo BIF, na sua revolução sobre BI, descreve o circulo da esphera com o lado IF, e huma pyramide conica recta, cujo vertice he o polo B, e cujos lados são iguaes; logo B he o centro dos pontos da circumferencia d'este circulo.

584. A superficie da esphera he curva.

A demonstração he como a do § 552.

585. Com huma parte da superficie da esphera, achar o seu diametro.

De hum ponto C d'essa parte de superficie, como centro, descreva-se n'ella hum arco FG. Será C polo do circulo, de que FG he arco. Fig. 202.

Com as distancias de tres pontos F, M, G d'este arco, forme-se o triangulo FMG, busque-se o seu centro de vertices I, e descreva-se o circulo FGH. Tire-se o diametro Fig. 203.

Fig. 204. FH. Com FH, com $HC = FC$ distancia ao polo, e com FC forme-se o triangulo FHC.

Estes tres pontos ou vertices F, H, C são pontos de hum circulo maximo da esphera proposta, porque os dois primeiros são os extremos do diametro de hum circulo da mesma esphera, e o ultimo he polo d'este mesmo circulo. Logo o diametro do circulo circumscrito ao triangulo FHC, he o diametro da esphera. Mas como já temos o ponto I, e sabemos que CI he parte do diametro do circulo maximo, bastará tirar HB perpendicular sobre HC, até encontrar CI produzida, e será BC o diametro pedido.

Esta ultima construcção he superflua, quando aconteça que $CI = IF$. Então he hum circulo maximo da esphera aquelle, de que FH he diametro, por ser I n'esse caso o centro da esphera. Tambem temos então iguaes CH, BH, e os arcos a que estas cordas pertencem, são quadrantes do circulo maximo.

586. Empregando graus para denotar d'aqui por diante os angulos rectos, e os quadrantes circulares, segue-se que hum circulo maximo passa a 90° de cada hum de seus polos, sendo contados estes graus no circulo maximo que passa pelos polos.

587. Descrever o circulo maximo da esphera, que passe por dois pontos da sua superficie, os quaes não estão em linha recta com o centro.

Como se sabe achar o diametro do circulo maximo, póde achar-se a corda de hum arco de 90°.

Com duas d'estas cordas, fixando hum extremo de cada huma em cada hum dos dois pontos dados, ajustem-se successivamente os outros extremos em dois pontos da superficie da esphera, hum de huma parte do plano que passa pelos pontos dados, e o segundo da outra parte. Estes dois ultimos pontos serão os polos do circulo maximo, que passa pelos pontos propostos, e com qualquer d'estes polos como centro, e huma das ditas cordas descreve-se na superficie da esphera a circumferencia do circulo pedido.

Os extremos das cordas da construcção não podem reunir-se senão em dois pontos, porque aliás estes pontos, sendo em numero maior, determinarião a circumferencia de hum circulo da esphera, de que os propostos serião polos, e estarião por consequencia em linha recta com o centro, contra a hypothese.

588. Tirar por hum ponto dado em hum arco de circulo maximo ou fóra d'elle, mas na superficie da esphera, outro arco de circulo maximo perpendicular ao proposto.

Busque-se hum dos polos do arco proposto, e por elle e pelo ponto dado tire-se hum arco de circulo maximo, que será o arco pedido.

589. Sendo dado hum arco de qualquer circulo da esphera, achar os seus polos, completar o circulo, e tirar por hum de seus pontos, ou por hum ponto fóra d'elle, hum arco perpendicular.

Dado o arco FG com tres dos seus pontos, busque-se o Fig. 203.
seu diametro FH. Ao meio de FH levante-se a perpendicu- Fig. 204.
lar BC; sobre esta linha marque-se o ponto A á distancia AF do ponto F igual ao raio da esphera; tomem-se AB, AC iguaes ao mesmo raio; serão B, C os polos do circulo, de que FH he diametro, e FG arco. Com os extremos de FC, CH applicados aos pontos F, G da superficie da esphera, determine-se o polo C na mesma superficie, e com C como centro, e CF como raio, descreva-se o circulo inteiro FGH na mesma superficie.

O circulo maximo tirado por C e por G, ou por outro qualquer ponto, será perpendicular a FGH.

590. O plano que tem hum ponto na superficie da esphera, e he perpendicular ao raio d'esse ponto, he tangente á esphera.

Porque todos os outros pontos do plano têem distancias do centro da esphera, maiores do que este raio perpendicular, e logo maiores do que as distancias d'este mesmo centro dos outros pontos da esphera.

Este plano he o unico que toca a esphera no dito ponto, porque para outro plano, inclinado ao raio n'este mesmo ponto, a perpendicular abaixada do centro sobre elle seria menor do que o raio, logo o seu pé ficaria dentro da esphera, isto he, achar-se-hia dentro d'ella hum ponto d'este plano, que cortaria por consequencia a esphera, e a sua superficie.

O problema pois de tirar hum plano tangente á superficie da esphera em hum de seus pontos, consiste em tirar o raio d'este ponto, e depois hum plano perpendicular ao raio n'este mesmo ponto.

591. Por huma recta infinita, dada de posição fóra de huma esphera, tirar hum plano tangente a esta.

Fig. 205. Pelo centro A da esphera tire-se hum plano DEF perpendicular á recta proposta BC, que a corte no ponto F. Com o diametro AF e no plano DEF descreva-se o circulo AEF, e seja E hum dos pontos da sua circumferencia, e da superficie da esphera. Tirem-se as rectas EF, EA que serão perpendiculares entre si. Será BEC o plano pedido. Porque os dois planos AEF, BCE são perpendiculares entre si, por construcção, e AE está n'hum, e ao mesmo tempo he perpendicular á intersecção EF dos dois planos, segue-se que AE he perpendicular a BEC, o qual por consequencia he tangente á esphera.

Bem se vê que da outra parte do diametro AF ha outro plano tangente, com a mesma condição de passar por BC.

592. Por hum ponto dado convenientemente, tirar hum plano tangente a duas espheras dadas.

Fig. 206. Sejão A o ponto dado; B, C os centros das duas espheras; D, E os pontos de contacto com o plano ADE.

São pois dadas AB, AC, BC, BD, CE; logo serão conhecidos os triangulos ABD, ACE rectangulos em D e E. Serão parallelas BD, CE, por serem perpendiculares ao plano tangente ADE. Logo o quadrilatero $BDEC$ he plano, tem rectos os angulos BDE, CED, e tres lados conhecidos, logo póde achar-se DE, e o angulo DBC. Conhecendo no triangulo ADE os lados, conhecer-se-hão os angulos. Logo o triedro $DBAE$ tem os tres angulos conhecidos, a saber, ADE, e ADB, EDB que são rectos; e logo póde construir-se o diedro $EDBA$. Com este diedro, e os angulos DBC, DBA póde construir-se o triedro $BADC$, e determinar-se o ponto D; e similhantemente se achará E; ou antes tirar-se-ha por AD o plano tangente da esphera, cujo centro he C (§ 591).

Vê-se que se póde construir outro plano tangente da outra parte da linha dos centros.

Querendo que o plano tangente corte a linha dos centros, ou passe entre as duas espheras; então sendo ainda A o ponto dado; B, C os centros das espheras; D, E os seus pontos de contacto com o plano ADE; conhecer-se-hão da mesma maneira AB, AC, BC, BD, CE, por hypothese. Os triangulos ABD, ACE rectangulos em D, E são pois conhecidos. BD, CE serão parallelas, por serem perpendiculares ao plano tangente ADE; logo os quatro pontos B, D, C, E estão n'hum plano, e logo as rectas BC, DE cortão-se n'hum ponto F. Os triangulos rectangulos similhantes BDF, ECF dão Fig. 207.

$$CE+BD:BD::CB:BF.$$

Póde portanto achar-se o angulo DBF. O triangulo rectangulo ADB dá o angulo DBA, e o triangulo ABC dá o angulo ABC; póde-se por consequencia construir o triedro $BDAC$, e achar o ponto D, etc. Bem se vê que he possivel tirar ainda pelo ponto dado outro plano tangente entre as duas espheras.

593. Construir o plano tangente a tres espheras dadas.

Sejão A, B, C os centros das tres espheras, E, D, F os pontos de contacto com o plano DEF. Serão dadas AB, AC, BC, e os raios AD, BE, CF, que são perpendiculares ao plano tangente, e portanto parallelos entre si. Logo serão planos os quadrilateros $ABED$, $ACFD$, $BCFE$, e poder-se-hão achar os lados ED, DF, EF, e os seus angulos. São pois conhecidos todos os angulos da figura, e por consequencia os triedros, que resolvem o problema. Fig. 208.

Quando não he possivel resolver o problema com hum triangulo tangente, que fique todo da mesma parte a respeito do triangulo dos centros, construir-se-ha o plano tan-

FF

gente entre as espheras, e vê-se por que meios se obterão os angulos; e qual o numero das soluções.

594. Duas espheras, nas quaes a distancia dos centros he igual á somma dos raios, tocão-se exteriormente em hum ponto d'esta distancia.

Porque se não tivessem este ponto commum, então tirando qualquer plano pelos centros das duas espheras, como as intersecções d'elle com as espheras, serião dois circulos com as condições do § 482, e tambem estes circulos não terião esse ponto commum: absurdo, pela mesma proposição.

E se as duas espheras tivessem mais do que este ponto commum, então o plano, que passasse por hum d'estes pontos e pelos dois centros, formaria da mesma maneira dois circulos nas espheras, que satisfarião ás condições da proposição (§ 482), e não á sua conclusão: absurdo.

Similhantemente, se prova que nenhum ponto de huma das espheras póde estar dentro da outra.

595. Duas espheras, nas quaes a distancia dos centros he igual á differença dos raios, tocão-se interiormente n'hum ponto da recta que passa pelos centros.

A demonstração faz-se por meio da proposição do § 483, como se fez a precedente por meio da do § 482.

596. As superficies de duas espheras, nas quaes a distancia dos centros he maior do que a differença dos raios, e menor do que a sua somma, tem só commum a circumferencia de hum circulo.

Porque as suas intersecções com hum plano que passe pelos centros, são circumferencias com dois pontos communs, hum de cada parte da recta dos centros, e qualquer d'elles descreve a circumferencia de hum circulo, na revolução dos circulos sobre a recta dos centros, a qual circumferencia está nas duas superficies esphericas; e nenhum outro ponto póde ser commum a estas superficies, poisque qualquer ponto que dista tanto de cada hum dos centros das espheras, como cada ponto d'aquella circumferencia, está necessariamente situado n'ella (§ 582).

597. Duas superficies esphericas, que têem commum a circumferencia de hum circulo, cortão-se.

Porque o circulo, a que esta circumferencia pertence, he secção commum ás duas espheras, logo ellas têem huma parte do seu volume commum, e logo as superficies cortão-se.

598. O circulo maximo divide a esphera em dois segmentos iguaes, que se chamão por isso *hemisphericos;* cujas superficies curvas são tambem iguaes.

Prova-se pela sobreposição, e nenhum ponto de huma das superficies curvas póde deixar de cahir na outra, porque aliás chegar-se-hia ao absurdo de haver raios desiguaes, como no § 501.

599. Dos dois segmentos, em que hum circulo da esphera a divide, o maior he aquelle em que está o centro, tanto em superficie como em volume.

Vê-se, tirando o circulo maximo parallelo áquell'outro circulo.

600. Chama-se *base do segmento da esphera* o circulo, que he a sua face plana; subentende-se o menor dos dois segmentos a que esta base he commum. *Tronco do segmento espherico* he a parte que se lhe corta, do lado da base, por hum plano, ou por hum circulo parallelo á base.

601. *Sector de hum solido circular* he a sua parte interceptada por hum diedro, ou angulo polyedro, cujas arestas são eixos.

Designa-se como o diedro, ou o angulo polyedro.

602. No cylindro, e na pyramide conica não ha outros sectores senão os formados por diedros, cuja aresta he o eixo.

603. Na esphera as arestas rectilineas do sector, sendo eixo, concorrem no centro; e a superficie curva do sector he fechada por arcos de circulos maximos, que se chamão lados, e esta superficie polygono espherico; e em particular bilatero espherico, triangulo espherico, etc., conforme são dois, tres, etc., os lados do polygono espherico; e cada hum d'estes polygonos se designa pelas letras dos vertices, ou encontros dos lados.

604. Os lados do polygono espherico, são cada hum a medida do angulo correspondente da face do angulo polyedro, que determina o polygono; e os angulos do polygono espherico são os angulos formados pelos planos dos lados, ou os diedros respectivos do angulo polyedro.

605. O angulo do polygono espherico, ou simplesmente o angulo espherico tem por medida o arco do circulo maximo, de que o vertice he polo, interceptado pelos seus lados.

Fig. 201. Produzão-se os arcos *CF*, *CG*, que são os lados do angulo proposto, sobre as suas circumferencias, até encontrarem em *D*, *E* o circulo *DEK*, de que *C* he o polo.

O angulo proposto he o dos planos *EAC*, *DAC*, que he medido pelo angulo *EAD* das perpendiculares *EA*, *DA* a *AC* no ponto *A* da sua intersecção; e o angulo *EAD* tem por medida o arco *ED* interceptado pelas circumferencias, de que *CG*, *CF* são arcos.

606. Os lados do bilatero espherico são iguaes, e cada hum $= 180°$.

Fig. 209. Os lados do bilatero espherico *AB* são arcos de circulos maximos, por conseguinte a sua intersecção passa pelo centro da esphera e por *A*, *B*; logo a recta *AB* he diametro de ambos, e portanto os arcos, que são os lados do bilatero, serão semicircumferencias dos circulos maximos.

607. As especies de bilateros, formados por hum arco de circulo menor, e outro de circulo maximo, são iguaes na mesma esphera ou em espheras iguaes, quando os arcos dos circulos menores são identicos.

Fig. 210. Seja *ACB* hum arco de circulo menor da esphera, e *ADB* hum arco de circulo maximo. Digo que na mesma esphera não póde formar-se, com o mesmo arco *ACB* de circulo menor, e hum arco *AEB* de circulo maximo, outro bilatero d'esta especie.

Porque a ser isso possivel, então no bilatero *ADBE* serião *ADB*, *AEB* semicircumferencias de circulos maximos, pela proposição precedente, e a recta *AB* o eixo da esphera, e ao mesmo tempo corda do circulo menor, de que *ACB* he arco: absurdo.

608. São iguaes os angulos verticalmente oppostos, formados por arcos de circulos da esphera, que se cortem, por aquelles serem os angulos dos planos d'estes arcos. Todos os angulos formados por circulos maximos, da mesma parte de hum arco de circulo tambem maximo, valem juntos $180°$, e os angulos em torno de hum vertice commum valem todos juntos $360°$.

609. O triangulo espherico não póde ter hum lado de $180°$.

Seja no triangulo espherico $A\,B\,C$, se he possivel, $A\,B = 180°$. Produza-se $B\,C$ até o encontro de $A\,B$, que será em A, porque todos os lados do triangulo espherico são arcos de circulos maximos; logo será o arco $B\,C\,A = 180°$. Fig. 211.

Então se esta continuação coincide com o lado $A\,C$, não existirá triangulo, contra a hypothese, e senão coincide, será no bilatero $A\,C$ cada hum dos lados $= 180°$: absurdo, porque teriamos $B\,C + A\,C = A\,C$.

610. No triangulo espherico, quando he absolutamente considerado como formado por tres arcos de circulos maximos, sem relação com os angulos de hum angulo polyedro, póde existir um lado $> 180°$, mas não dois; porque se cortarião antes de formarem o triangulo. Porém hum tal triangulo espherico, que se chama *gibboso*, e que tem tambem hum angulo $> 180°$, não será discutido, nem he preciso que o seja, porque o triangulo, formado pelo resto da circumferencia do lado maior, e pelos outros dois lados, faz conhecer as partes do triangulo gibboso.

611. *Triangulos esphericos diametralmente oppostos* são aquelles que têem os vertices nos extremos dos mesmos diametros da esphera.

612. Os triangulos esphericos diametralmente oppostos, têem todas as partes de hum, isto he, os tres lados e os tres angulos, iguaes ás do outro, cada huma a cada huma; mas não admittem superposição, porque essas partes estão em ordem inversa em cada hum a respeito do outro.

Complete-se o circulo, a que pertence o lado $B\,C$ do triangulo espherico $A\,B\,C$, e produzão-se os outros dois la- Fig. 212.

dos até se encontrarem em D. Elles cortarão o circulo descripto em dois pontos E, F.

Será $DFA = 180° = BAF$; logo $DF = AB$; da mesma maneira he $DE = AC$. Tambem temos

$$EFC = 180° = FCB;$$

logo

$$EF = BC.$$

O angulo

$$D = FAE = CAB.$$

O angulo

$$DFE = BFC = ABC;$$

e da mesma fórma $DEF = ACB$.

Mas sobrepondo o lado EF, com o triangulo DEF, ao lado BC do triangulo ABC, de maneira que os dois triangulos fiquem da mesma parte de BC, visivelmente elles não poderão coincidir

Esta proposição corresponde á do § 234.

613. Dois lados com o angulo comprehendido, determinão as outras partes do triangulo espherico.

Nos dois triangulos ABC, GHI, sejão

$$G = BAC,$$

$$HG = AB,$$

$$GI = AC.$$

Póde sobrepôr-se o triangulo GHI ao triangulo ABC, ou ao triangulo diametralmente opposto DEF, imitando o que se fez com os seus triedros correspondentes no § 235, de que a proposição actual não he senão huma traducção.

614. A lados iguaes são oppostos, no triangulo espherico, angulos iguaes.

Se o triangulo espherico ABC tiver os lados AB, AC iguaes, póde sobrepôr-se a DEF, o que prova que o angulo $DEF = ABC$; mas he $DEF = CEB = ACB$, logo $ABC = ACB$.

615. Dois angulos com o lado adjacente, determinão as outras partes do triangulo espherico.

Sejão $BC = HI$, $ABC = H$, $ACB = I$.

Prova-se pela sobreposição do triangulo GHI no triangulo ABC, ou no seu diametralmente opposto DEF, que com as condições do enunciado, as outras partes de hum são iguaes ás do outro, cada huma a cada huma, isto he, as adjacentes ou oppostas a partes iguaes.

616. A angulos iguaes são oppostos, no triangulo espherico, lados iguaes.

Se no triangulo ABC são iguaes os angulos ABC, ACB, os angulos DEF, DFE serão tambem iguaes; e os dois triangulos, diametralmente oppostos, podem sobrepôr-se, e acharemos $AB = DE$; mas $DE = AC$, logo $AB = AC$.

617. Os tres lados determinão as outras partes do triangulo espherico.

Juntem-se dois triangulos ABC, BCD na superficie da esphera pelo lado commum, BC, e supponhamos alem d'isso iguaes os lados que têem hum vertice commum, isto he, $AB = BD$, $AC = CD$. Fig. 213.

Se dois d'estes lados iguaes não estão no mesmo circulo maximo, tire-se o arco AD de circulo maximo, que cortará BC, ou a sua continuação em E.

Os triangulos esphericos ABD, ACD são ambos isosceles, logo o angulo $BAD = BDA$, $CAD = CDA$; e logo são iguaes os angulos BAC, BDC, por serem as sommas ou as differenças de angulos iguaes; por consequencia os triangulos BAC, BDC têem as suas partes iguaes.

Se dois lados, na união dos triangulos, formão hum só arco de circulo maximo como AD, então temos logo $A = D$, Fig. 214.
e os triangulos determinados.

Se os dois triangulos não podem applicar-se pelo lado commum, de sorte que fiquem situados em posições oppostas, e que os lados iguaes tenhão um vertice commum, então deve recorrer-se ao triangulo diametralmente opposto a hum d'elles.

618. Os tres angulos determinão as outras partes do triangulo espherico.

Colloquem-se oppostos n'hum dos vertices, sobre a superficie da esphera, dois triangulos ABC, ADE, que alem dos angulos verticalmente oppostos, tenhão $EDA = ABC$, $DEA = ACB$.

Fig. 215.

Produzão-se ED, BC até concorrerem em F, G.

Os triangulos BDF, BDG têem as partes iguaes entre si, porque o lado BD he commum, $BDF = DBG$ por hypothese, e $DBF\,BDG$, por serem estes ultimos supplementos dos primeiros; logo $DF = BG$. Pela mesma rasão, nos triangulos CEF, CEG temos $FE = CG$. Logo tirando esta equação da precedente, resulta $ED = BC$. Logo os triangulos propostos têem todas as partes iguaes.

Se DF, e BF ficarem no mesmo plano, faltarão então os triangulos da demonstração, mas n'este caso será DFB a semicircumferencia de hum circulo maximo, e CFE tambem; e tirando a parte BFE commum, teremos ainda $ED = BC$.

Se os triangulos da questão não poderem situar-se, como se fez, substitua-se então a hum d'elles o seu diametralmente opposto.

619. Dois lados, dos quaes hum só he de 90°, com o angulo opposto a este, determinão as outras partes do triangulo espherico.

Fig. 216. Se he possivel formar dois triangulos ACB, ACD com o lado AC não $= 90°$, o angulo C commum, e os lados AB, AD iguaes cada hum a $90°$, então A será polo do arco DC, e logo $AC = 90°$, contra a hypothese.

Nas hypotheses do theorema só poderá pois haver dois triangulos esphericos que não coincidão quando um d'elles for o verticalmente opposto do outro; mas n'esse caso tambem as partes de hum são iguaes ás do outro, postoque em ordem invertida.

620. Dois angulos, dos quaes hum só he de 90°, com o lado opposto a este, determinão as outras partes do triangulo espherico.

Se fosse possivel formar dois triangulos, não os diametralmente oppostos, $A\,B\,C$, $A\,D\,C$ com o lado $A\,C$, e o angulo C não recto, communs, e com os angulos rectos D, $A\,B\,C$; então A seria pólo de $B\,C$, e logo recto o angulo C, contra a hypothese.

621. Tres partes que determinem as outras, determinão tambem a superficie do triangulo espherico, na mesma esphera, ou em espheras iguaes.

Nos triangulos $A\,B\,C$, $D\,E\,F$ sejão $A\,B = D\,E$, $A\,C = D\,F$, $B\,C = E\,F$, sendo estes lados ou dados immediatamente, ou determinados por outras partes dadas. Fig. 217.

Se os triangulos não admittirem sobreposição, fação-se passar, pelos vertices de cada hum, dois circulos menores.

Estes circulos serão iguaes, porque podem suppor-se circumscritos a triangulos rectilineos identicos, formados pelas cordas dos arcos dos triangulos esphericos, que sendo iguaes dois a dois, teem cordas iguaes. Estes triangulos esphericos estão nas superficies curvas dos menores segmentos, em que cada hum d'estes circulos menores divide a esphera a que pertence, porque aliás o triangulo espherico seria gibboso. As superficies curvas d'estes segmentos são iguaes. Mas temos tambem (§ 607) õs bilateros $A\,B = D\,E$, $A\,C = D\,F$, $B\,C = E\,F$; logo tirando a somma dos primeiros, n'estas equações, da superficie curva do seu segmento, e a somma dos segundos da superficie do seu segmento tambem, resulta a superficie $A\,B\,C = D\,E\,F$.

622. *Triangulo espherico supplementario* de outro, he aquelle cujos lados são supplementos dos angulos do segundo, e cujos angulos tambem são supplementos dos lados d'este.

623. *Triangulo supplementario* de outro, he aquelle que tem quatro partes, que são supplementos de quatro partes do segundo, e as outras ou iguaes, ou communs. Taes são os triangulos esphericos, que formão juntos hum bilatero.

624. No triangulo espherico, que tem dois angulos de 90° cada hum, e por consequencia dois lados, e reciprocamente; dois dos tres subsupplementarios, são supplementarios d'aquelle.

Fig. 218. Sejão rectos os angulos $A B C$, $B A C$ do triangulo espherico $A B C$; será tambem $A C = 90° = B C$.

Formem-se os subsupplementarios $A C D$, $B C E$, isto he, produzão-se $A B$, $A C$ até E, e $B A$, $B C$ até D. Digo que $A C D$, que he sempre subsupplementario do proposto, he agora seu supplementario.

Serão rectos D, e $D A C$; $C D = 90° = A C = B C$. Logo he $A D$ a medida do angulo $A C D$; logo he $A D$ supplemento do angulo $A C B$, e os outros dois lados de $A D C$, por serem de 90° cada hum, são supplemento dos angulos rectos do proposto.

O angulo $A C D$, sendo medido por $A D$, he supplemento de $A B$, e os outros dois angulos do triangulo $A C D$, sendo rectos, são supplementos dos outros dois lados do proposto, cada hum dos quaes he $= 90°$.

O mesmo tem logar no subsupplementario $B C E$.

Deve observar-se que nos dois supplementarios $A C D$, $B C E$ de $A B C$, nem todos os vertices dos primeiros são polos dos lados do ultimo.

625. Dado hum triangulo espherico, que não tenha angulo recto algum, ou que tenha hum só, construir o seu triangulo supplementario.

Se o triangulo proposto não tem angulo algum recto, complete-se o circulo de hum qualquer dos seus lados; e se tem hum angulo recto, complete-se o circulo do lado opposto a este angulo.

Este circulo divide a esphera em dois hemispherios, em hum dos quaes fica o triangulo proposto, e no outro só podem existir tres pólos, hum de cada hum dos tres lados do triangulo. Sejão estes polos D, E, F respectivamente de $A B$, $B C$, $A C$.

Fig. 219. Tirem-se os arcos $D A$, $D B$, $E B$, $E C$, $F A$, $F C$, cada hum dos quaes será de 90°. Tirem-se tambem os arcos $D E$, $E F$, $D F$; e será $D E F$ o triangulo supplementario pedido.

Os vertices A, B, C serão tambem polos respectivos dos arcos DF, DE, EF. Em torno do pólo D estão formados na superficie da esphera, quatro angulos esphericos adjacentes, dois dos quaes ADF, BDE são rectos; logo os outros dois, o angulo EDF do triangulo EDF, e o angulo ADB, são supplementos hum do outro. Mas ADB tem por medida AB, logo o angulo EDF he supplemento do lado AB. O mesmo póde affirmar-se dos outros angulos de EDF, e dos lados respectivos do triangulo proposto.

Em torno de A estão tambem formados quatro angulos esphericos, dois dos quaes são rectos, e logo os outros dois DAF, BAC são supplementos hum do outro. Mas DF he a medida do angulo DAF, logo DF he supplemento do angulo BAC do triangulo proposto. O mesmo póde affirmar-se dos outros lados de EDF, e dos angulos respectivos do triangulo ABC.

626. A somma de dois lados quaesquer do triangulo espherico, he maior do que o terceiro lado.

Seja $ABCD$ o sector espherico, cuja superficie curva he o triangulo proposto BDC. Será Fig. 220.

ang. BAD : ang. BAC : ang. CAD :: $BD : BC : CD$;
logo

$$BAD + BAC : CAD :: BD + BC : CD.$$

Mas o primeiro antecedente he maior do que o seu consequente, logo tambem $BD + BC > CD$.

627. No polygono espherico, a somma de todos os lados, excepto hum, he maior do que este.

A demonstração he analoga á dos polygonos rectilineos.

628. Em geral, toda a linha tirada na superficie espherica he maior do que o arco de circulo maximo, que tem os mesmos extremos, comtanto que este arco seja $\leqq 180°$.

Seja DC hum arco de circulo maximo correspondente a hum angulo do centro CAD não $> 2r$, e seja DBC huma linha qualquer, com os mesmos extremos, descrita na superficie da mesma esphera, sem ser outro arco de circulo maximo. Fig. 221.

A superficie $ADBC$ descrita pelo raio AD, suppondo o extremo A immovel, e que o outro descreve a linha DBC, he maior do que o sector CAD; porque vê-se, que supponde-a flexivel, e deixando-a cahir sobre o sector, conservando sempre os pontos da orla DBC á mesma distancia do centro, e as outras duas orlas nos seus logares, he necessario, para applicar todos os pontos d'esta superficie sobre o sector, dobral-a, e por consequencia tambem DBC se dobra sobre o arco DC, e logo he $DBC > DC$.

Como o genero de demonstração que acabâmos de empregar he susceptivel de abuso, e por conseguinte sujeito a objecções, provaremos d'outro modo a nossa proposição, quando CBD for arco de circulo menor.

Fig. 222. Leve-se CBD ao mesmo plano do arco CD, e da mesma parte da corda commum. Na perpendicular AFB ao meio da corda CD estarão os dois centros A, E dos dois arcos CFD, CBD; mas para que o raio ED do arco CBD seja $< AD$, he preciso que E fique situado entre A e o arco, como na figura.

Temos

$$AE + ED > AD,$$

isto he

$$AE + EB,$$

ou

$$AB > AF.$$

Logo o arco CBD envolve entre si e a corda o arco DFC, e logo he maior do que elle.

Mas por isso mesmo que o arco CBD do circulo menor he maior que DFC, o resto da sua circumferencia será menor do que o resto da circumferencia de DFC. Logo he preciso n'este caso, para a verdade da proposição, que o arco DFC do circulo maximo seja $< 180°$, não podendo ser igual a $180°$, e ao mesmo tempo ter os extremos communs com hum arco de circulo menor da mesma esphera.

629. Dividir hum angulo espherico em duas partes iguaes.

Fig. 223. Seja BAC o angulo proposto. Tome-se o lado $AC = AB$, e tire-se o arco BC. Divida-se BC em partes iguaes

em D. Tire-se o arco $A\,D$, e o angulo ficará dividido, como se pede. Porque os angulos $B\,A\,D$, $C\,A\,D$ são iguaes, por causa da igualdade das partes dos triangulos $B\,A\,D$, $C\,A\,D$.

630. Fazer hum angulo espherico igual a outro dado $< 180°$, e com hum lado e vertice dados.

Sejão A o angulo, $B\,G$ o lado, e B o vertice dados. Fig. 224.

Forme-se hum triangulo qualquer $D\,A\,E$, de que A seja hum dos angulos. Tome-se $B\,F = A\,E$, e com as cordas dos arcos $A\,D$, $D\,E$, fixando dois de seus extremos respectivamente em B, F, determine-se na superficie da esphera, em que está $B\,G$ que deve ser a mesma de $D\,A\,E$ ou sua igual, o ponto G de encontro dos outros extremos; então os arcos de circulo maximo tirados de G para B, F, formarão o triangulo $G\,B\,F$, identico com $D\,A\,E$, e por conseguinte será o angulo $B = A$.

631. Fazer hum angulo espherico igual a outro dado, e que tenha hum lado dado, e de que o outro lado passe por hum ponto dado na superficie da esphera, tal que a sua distancia em graus, ao arco dado não seja maior do que o angulo dado se este for agudo.

Busquem-se os polos H, I respectivos aos arcos $A\,E$, $B\,C$. Com o centro H, e a corda $I\,G$, descreva-se hum circulo menor, que encontrará o lado $A\,D$ pelo menos em hum ponto D. Produza-se o arco $H\,D$ até E, será $D\,E = G\,F$. Sobre $G\,F$ forme-se hum triangulo identico com $D\,E\,A$, e teremos o que se pede, isto he, $B = A$, e o lado $B\,G$ passando por G.

632. No triangulo espherico, ao maior angulo he opposto o maior lado, e reciprocamente.

No triangulo espherico $A\,B\,C$, seja $A\,C\,B > A$. Fig. 225.

No angulo maior, faça-se $A\,C\,D = A$.

Será $C\,D = A\,D$.

Mas

$$C\,D + D\,B > B\,C,$$

logo

$$A\,D + D\,B, \text{ ou } A\,B > B\,C.$$

A inversa demonstra-se como a proposição do § 67.

633. De dois triangulos esphericos e isosceles, com a mesma base, aquelle que tem o angulo do vertice menor, tem o perimetro maior; e reciprocamente.

Fig. 226. Seja o angulo $ACB < ADB$. Descreva-se o arco CD de circulo maximo. Os triangulos ACD, BCD serão iguaes, por terem os lados iguaes entre si; logo o angulo

$$BCD = \frac{1}{2} ACB,$$

e

$$BDC = \frac{1}{2} ADB;$$

logo

$$BD < BC.$$

Reciprocamente; se $BD < BC$, será $BCD < BDC$, ou o angulo $ACB < ADB$.

634. De dois triangulos esphericos e isosceles, sobre a mesma base, aquelle que envolve o outro tem o perimetro maior.

Fig. 227. Sejão $AEBC$, $AEBD$ os dois triangulos isosceles.

Descreva-se o arco CDE. Os dois triangulos ADC, BDC são iguaes; logo o angulo $ACD = BCD$, e logo ACD he agudo.

Tambem o angulo $ADC = BDC$; logo os supplementos ADE, BDE são iguaes e agudos; logo ADC he obtuso, e por consequencia $AC > AD$.

De dois triangulos esphericos e isosceles, com a mesma base, aquelle que tem o angulo do vertice menor, he maior, e tem maiores os angulos sobre a base.

De dois polygonos esphericos regulares e equilateros entre si, aquelle que tem mais lados he maior, e tem os angulos maiores.

Porque dividindo cada hum dos dois polygonos em triangulos isosceles, tendo por bases os lados, e por vertice commum o centro do polygono, aquelle que tem mais lados será composto de hum numero maior d'estes triangulos, tendo os angulos do vertice menores.

635. No triangulo espherico, o supplemento de hum angulo he maior do que a differença entre os outros dois.

No triangulo espherico ABC, seja $B > ACB$. Fig. 228.

Faça-se $BCD = B$. Será $DC = DB$; logo $DC > DA$, e logo $DAC > ACD$, isto he o supplemento do angulo BAC maior do que a differença ACD entre BCD ou B, e BCA.

636. Se dois triangulos esphericos teem dois lados de hum iguaes separadamente a dois lados do outro, aquelle que tem maior o angulo comprehendido tem o terceiro lado maior; e reciprocamente.

A demonstração he como a do caso analogo dos triangulos rectilineos.

Se os dois triangulos não podem collocar-se da mesma parte da superficie a respeito do lado commum, deve, para a demonstração, substituir-se a hum d'elles o seu diametralmente opposto.

637. Se a somma de dois lados do triangulo espherico he $\gtreqless 180°$, tambem a somma dos angulos oppostos será respectivamente $\gtreqless 180°$; e reciprocamente.

Seja ABC o triangulo proposto. Forme-se o bilatero BD. Então, como o arco $BAD = 180°$, se for Fig. 229.

$$AB + AC \gtreqless 180°,$$

será

$$AC \gtreqless AD;$$

logo

$$D = B \gtreqless ACD.$$

Logo

$$B + ACB \gtreqless ACD + ACB,$$

isto he

$$B + ACB \gtreqless 180°.$$

638. A somma dos tres lados do triangulo espherico he $< 360°$.

Temos

$$BA + AD + BC + CD = 360°,$$

e

$$AC < AD + CD:$$

d'onde se deduz

$$BA + BC + AC < 360°.$$

639. A somma de todos os lados do polygono espherico saliente he $< 360°$.

Porque produzindo hum primeiro, e hum terceiro lado até se encontrarem para a parte do lado intermedio, em que se acha o polygono, ficará formado, por esses lados prolongados e pelo seu intermedio, hum triangulo espherico, que encerrará o polygono, e terá maior perimetro do que elle, visto o polygono ser saliente.

640. A somma dos tres angulos do triangulo espherico he $> 180°$.

Se fôr $ACD > D$, teremos

$$BAC > ACD - D, \text{ ou } > ACD - B;$$

logo

$$BAC + B > ACD,$$

e

$$BAC + B + ACB > ACD + ACB, \text{ ou } > 180°.$$

Se for $ACD \overline{\gtrless} D$, então $D + ACB$, ou

$$B + ACB \overline{\gtrless} ACD + ACB,$$

isto he

$$B + ACB \overline{\gtrless} 180°;$$

logo

$$B + ACB + BAC > 180°.$$

Assim temos sempre a somma dos tres angulos do triangulo ABC maior que $180°$.

641. A somma de todos os angulos do polygono espherico saliente, poisque póde ser dividido em $n-2$ triangulos esphericos, sendo n o numero dos seus lados, será sempre $> (n-2)\ 180°$.

642. Os angulos do polygono espherico regular são maiores do que os angulos do polygono rectilineo regular do mesmo numero de lados, e por consequencia maiores do que os angulos do polygono rectilineo, que tiver por vertices os do polygono espherico.

643. Se por hum ponto A da superficie da esphera, que não seja pólo do circulo CBD, se faz passar a semicircumferencia perpendicular a CBD, o dito ponto A a dividirá em dois arcos, dos quaes o menor AD he o minimo, e o maior AC o maximo de todos os arcos entre A e CBD. Fig. 230.

O meio E de CAD he pólo de CBD, logo hum arco EB qualquer he perpendicular sobre CBD, logo ABD he agudo, e ABC obtuso. Mas D e C são rectos, logo $AB > AD$, e $AB < AC$.

644. Todos os angulos como DFA, oppostos ao arco minimo AD, são agudos; e os oppostos ao arco maximo AC, como AFC, são obtusos.

645. Todos os arcos, tirados de A para a semicircumferencia CBD, são desiguaes, e augmentão desde AD até AC.

Porque o angulo AFB obtuso, e ABF agudo fazem $AB > AF$.

646. Para a circumferencia CBD não podem tirar-se de hum ponto A, que não seja o seu pólo, mais do que dois arcos iguaes, hum para a semicircumferencia CBD, e outro para a parte não descrita. Mas os dois arcos perpendiculares AD, AC não têem iguaes, ou são unicos.

647. Com tres partes dadas do triangulo espherico, cada huma $< 180°$, construil-o quando fôr possivel.

1.° caso. Com dois lados, e o angulo comprehendido.

Imite-se o que se fez, em igual caso, com os triangulos rectilineos.

2.° caso. Com dois angulos e o lado adjacente.

Imite-se o que se fez, em igual caso, com os triangulos rectilineos.

3.° caso. Com tres lados, taes que a somma de dois seja $>$ e a differença $<$ que o terceiro; e a somma de todos tres $< 360°$.

Imite-se o que se fez, em igual caso, com os triangulos rectilineos; procurando o terceiro vertice na superficie da esphera por meio das cordas dos arcos dados.

4.° caso. Com tres angulos; sendo a sua somma $> 180°$, e o supplemento de hum qualquer $>$ que a differença dos outros dois.

Com os supplementos dos angulos propostos em graus, como lados, faça-se hum triangulo, como no caso precedente, e construa-se depois o triangulo supplementario d'este, que será o triangulo pedido.

O triangulo pedido he possivel, se designando por A, B, C os seus angulos, cuja somma $> 180°$ e sendo C o menor, tivermos

$$180° - A > B - C,$$

porque será

$$180° - B > A - C;$$

e porque C he supposto o menor, a sua differença para $180°$ he maior do que a differença dos outros dois, isto he, teremos tambem

$$180° - C > B - A, \text{ e } > A - B.$$

O primeiro triangulo que se construe he possivel, porque a somma de dois quaesquer de seus lados he sempre $>$ do que o terceiro, por exemplo,

$$(180° - A) + (180° - B) > (180° - C),$$

poisque esta expressão vale o mesmo que

$$180° - A > B - C.$$

Tambem a somma dos seus tres lados he $< 360°$. Porque

$$(180° - A) + (180° - B) + (180° - C),$$

$$= 360° + 180° - (A + B + C) < 360°,$$

sendo pela outra condição $A + B + C > 180°$.

5.° caso. Com dois lados e o angulo opposto a hum d'elles.

Sejão AB, AC os lados, e B o angulo dados. Fig. 231.

Com o angulo B, o lado AB, e a corda do arco AC, fixando em A hum dos seus extremos, busque-se com o outro o ponto C no lado BF do angulo B, e ficará feito o triangulo requerido, se o problema fôr possivel, ou se não fôr indeterminado.

Para que o problema seja possivel, he necessario que o arco AC dado não aconteça ser menor do que o menor dos arcos perpendiculares, que se podem tirar de A sobre o circulo de BC, poisque este he o minimo, nem maior do que o arco perpendicular maximo. Tambem he preciso que BC não chegue nunca a ser $= 180°$. Porém se BC fòr $> 180°$, então o triangulo se torna gibboso, e deve construir-se outro com os mesmos lados, e o supplemento do angulo dado.

Se fòr $B = 90° = AB$, será A pólo do circulo de BC, e então será preciso, para que os dados não sejão incompativeis, que seja $AC = 90°$. Mas n'estas circumstancias, todos os arcos como AE, tirados de A para pontos do circulo BC, são cada hum $= 90°$, e são infinitos os triangulos que satisfazem, e a indeterminação he absoluta.

Se acontece haver dois arcos iguaes AC, AD cada hum da sua parte do arco perpendicular AE, ambos no bilatero BF, ha então dois triangulos ABC, ABD com os mesmos dados, ou ha duas soluções do problema.

Estas duas soluções estão ligadas pela condição de que o angulo não dado, e opposto ao lado dado he em hum dos triangulos supplemento de hum similhante angulo do outro, porque ACB he o supplemento de $ACD = ADB$.

O problema tem huma só solução nos exemplos seguintes:

1.° exemplo. Se fôr $A\,C = 90°$, e não $A\,B$;

2.° exemplo. Sem ser $A\,C = 90°$, póde existir ainda hum caso determinado, ou hum só triangulo, quando aconteça que $A\,C$ coincida com o arco $A\,E$ perpendicular a $B\,C$;

3.° exemplo. O problema he tambem determinado, quando os lados dados são iguaes, porque então não se póde tirar de A para o circulo $B\,C$ outro lado igual; não sendo A pólo.

Mais geralmente; o problema he determinado, quando sendo possivel, e não sendo indefinido alguma das condições (§§ 616, 632 e 637) exclue huma das soluções.

Porque sendo o angulo $B < 90°$ e $A\,B < 90°$, he preciso, para que o triangulo $A\,D\,B$ seja determinado, ou para que não exista outro arco $A\,C$ igual, entre o arco perpendicular menor $A\,E$, e $A\,B$, que seja $A\,D > A\,B$; logo $B > A\,D\,B$, ou $A\,D\,B < 90°$, pela condição (§ 632).

Sendo B ainda o mesmo, e $A\,B > 90°$, he preciso, para que o triangulo $A\,C\,B$ seja determinado, ou para que não haja outro arco $A\,D$ igual, entre o arco perpendicular minimo $A\,E$ e $A\,F$, que seja $A\,C > A\,F$;

logo

$$A\,C + A\,B > 180°,$$

logo

$$A\,C\,B + B > 180°, \text{ ou } A\,C\,B > 90°,$$

pela condição (§ 637), porque a outra (§ 632) só exige $A\,C\,B > B$, o que póde ter logar, e não obstante ficar ainda $A\,B\,C < 90°$.

Quando $B > 90°$, demonstra-se da mesma maneira por meio do arco perpendicular maximo, que o problema sendo determinado, o será por huma das duas condições (§§ 632 e 637).

Quando $B = 90°$, então sendo $A\,B$ o mesmo arco perpendicular a $B\,C$, não podem existir no mesmo bilatero dois arcos iguaes $A\,C$, $A\,D$, e o problema he determinado.

Do que precede podem deduzir-se as conclusões seguintes:

1.° Que as duas condições (§§ 632 e 637) são essencialmente diversas.

2.° Que he preciso, quando huma não determine o problema, empregar a outra.

3.° Que se nenhuma das duas condições determina o problema, elle he indeterminado.

6.° caso. Com dois angulos, e o lado opposto a hum d'elles.

Com os supplementos dos angulos, como lados, e com o supplemento do lado, como angulo opposto respectivamente, faça-se a construcção, como no caso antecedente, de hum ou de dois triangulos; construa-se depois o supplementario ou os supplementarios d'estes, e será esta a construcção pedida.

As condições para a determinação, ou indeterminação, são aqui as mesmas do caso antecedente, applicando-as aos supplementos dos angulos que passão a ser lados, e aos supplementos dos lados que passão a ser angulos.

648. Pergunta-se de quantas maneiras póde cobrir-se a superficie da esphera, com polygonos esphericos regulares e dispostos symetricamente, excepto o bilatero espherico.

Os vertices S communs aos polygonos são tantos, quantos os angulos solidos do polyedro inscripto, com os mesmos vertices; os lados communs L tantos, quantas as arestas do polyedro; e os polygonos P tantos quantas as faces do polyedro; logo teremos $S=L-P+2$.

A somma de todos os angulos esphericos em torno de hum vertice commum sendo $360°$, ou $4\,r$, vê-se que não podem existir senão tres especies de polygonos esphericos regulares, porque os seus angulos são maiores ainda do que os dos polygonos rectilineos inscritos (§ 642), que são as faces do polyedro acima dito.

Sejão pois x, x', x'' os numeros dos lados de cada hum d'estes diversos polygonos esphericos; y, y', y'' os numeros respectivos d'estes polygonos; será

$$L=\frac{xy+x'y'+x''y''}{2};\ P=y+y'+y'';$$

logo $S = \frac{xy + x'y' + x''y''}{2} - y - y' - y'' + 2.$

Sejão m, n, p respectivamente os numeros de vezes que cada hum dos angulos polygonos x, x', x' he repetido em torno de hum vertice commum; teremos

$$mS = xy,\ nS = x'y',\ pS = x''y'';$$

isto he

$$mxy + mx'y' + mx''y'' - 2my - 2my' - 2my''$$
$$+ 4m - 2xy = 0;$$

$$nxy + nx'y' + nx''y'' - 2ny - 2ny' - 2ny''$$
$$+ 4n - 2x'y' = 0;$$

$$pxy + px'y' + px''y'' - 2py - 2py' - 2py''$$
$$+ 4p - 2x''y'' = 0.$$

Vejamos quantas soluções admittem estas equações indeterminadas em numeros inteiros e positivos; attendendo a que os angulos compostos, ou com hum vertice commum, não podem exceder a 4 rectos; que os angulos pertencentes aos polygonos esphericos de maior numero de lados são tambem maiores; que quando elles são diversos nos angulos compostos, não ha polygonos esphericos cujo numero de lados seja impar, o que se demonstra como no § 402; que havendo só hum par da mesma especie no angulo composto, os polygonos que lhe pertencem não podem ter o numero dos lados impar, como se demonstra imitando o que se fez (§§ 403 e 404).

Seja pois

$$m = n = p = 1;$$

então as tres equações dão

$$xy = x'y' = x''y'',$$

ás quaes se satisfaz com os valores

$$y = q\,x'x'',\ y' = q\,x\,x'',\ y'' = q\,x\,x',$$

e cada huma das tres equações se torna

$$q\,(x\,x'x'' - 2\,x\,x' - 2\,x\,x'' - 2\,x'x'') + 4 = 0.$$

Se fizermos

$$x = 4,\ x' = 6,\ x' = 8,$$

teremos

$$q = \tfrac{1}{4},\ \text{e}\ y = 12,\ y' = 8,\ y'' = 6;$$

isto he, que se póde compor a superficie da esphera com 12 quadrados esphericos, 8 hexagonos esphericos regulares e 6 octogonos esphericos regulares, ou que o polyedro inscripto he o primeiro semiregular.

Póde ainda fazer-se

$$x = 4,\ x' = 6,\ x'' = 10,$$

e teremos $q = \frac{1}{2}$; logo

$$y = 30,\ y' = 20,\ y'' = 12;$$

isto he, 30 quadrados, 20 hexagonos e 12 decagonos: solução que corresponde ao 2.° polyedro semiregular.

Se supposermos $m = 2$, $n = 1$, $p = 1$; as tres equações dão

$$x\,y = 2\,x'\,y' = 2\,x''\,y'',$$

a que se satisfaz com

$$y = 2\,q\,x'x'',\ y' = q\,x\,x'',\ y'' = q\,x\,x',$$

logo

$$q\,(x\,x'x'' - 2\,x'x'' - x\,x'' - x\,x') + 2 = 0.$$

Sómente póde fazer-se $x = 4$, $x' = 3$, $x'' = 5$; logo

$$q = 1,\ y = 30,\ y' = 20,\ y'' = 12;$$

isto he 20 triangulos, 30 quadrados, e 12 pentagonos, o que corresponde ao polyedro semiregular 8.°

Se se considerão só duas especies de polygonos esphericos, então as tres equações se reduzem ás duas seguintes

$$mxy + mx'y' - 2my - 2my' + 4m - 2xy = 0$$

$$nxy + nx'y' - 2ny - 2ny' + 4n - 2x'y' = 0;$$

e fazendo-se $m = 2$, $n = 1$, não poderá x ser impar, e teremos

$$xy = 2x'y',$$

a que se satisfaz com $y = 2qx'$, $y' = qx$, e resulta por conseguinte

$$q(xx' - 2x - 4x') + 4 = 0.$$

Escolhendo $x = 4$, $x' = 3$; será $q = \frac{1}{2}$, $y = 3$, $y' = 2$, isto he, 3 quadrados e 2 triangulos, o que corresponde ao prisma triangular equilatero

Sendo $x = 4$, $x' = 5$; $q = \frac{1}{2}$, $y = 5$, $y' = 2$; 5 quadrados e dois pentagonos; e assim successivamente a serie dos prismas equilateros inscritos; porque se vê que emquanto $x = 4$, será sempre $q = \frac{1}{2}$, e $y = x'$, $y' = 2$.

Acharemos tambem successivamente:

$x = 6$, $x' = 3$, $q = \frac{4}{6}$, $y = 4$, $y' = 4$; 4 triangulos e 4 hexagonos; o 3.° semiregular;

$x = 6$, $x' = 4$, $q = 1$, $y = 8$, $y' = 6$; 6 quadrados e 8 hexagonos; o 4.° semiregular;

$x = 6$, $x' = 5$, $q = 2$, $y = 20$, $y' = 12$; 12 pentagonos e 20 hexagonos; o 5.° semiregular;

$x = 8$, $x' = 3$, $q = 1$, $y = 6$, $y' = 8$; 8 triangulos e 6 octogonos; o 6.° semiregular;

$x = 10$, $x' = 3$, $q = 2$, $y = 12$, $y' = 20$; 20 triangulos e 12 decagonos; o 7.° semiregular.

Se se fizer $m = 3$, $n = 1$; teremos $xy = 3x'y'$, que he satisfeita por $y=3qx'$, $y'=qx$, e será

$$q(xx'-x-3x')+2=0.$$

$x=3$, $x'=4$, $q=\frac{2}{3}$, $y=8$, $y'=2$; 8 triangulos e 2 quadrados, o que corresponde ao deutoprisma quadrangular equilatero.

$x=3$, $x'=5$, $q=\frac{2}{3}$, $y=10$, $y'=2$; 10 triangulos e 2 pentagonos, o que corresponde ao deutoprisma pentagonal.

Continuando, teriamos a serie infinita dos deutoprismas, excepto o octaedro.

Teremos tambem:

$x=4$, $x'=3$, $q=2$, $y=18$, $y'=8$; 8 triangulos e 18 quadrados, o 9.° semiregular;

Seja $m=2$, $n=2$; será $xy=x'y'$, que se satisfaz com $y=qx'$, $y'=qx$; e teremos

$$q(xx'-2x-2x')+4=0.$$

$x=3$, $x'=4$, $q=2$, $y=8$, $y'=6$; 8 triangulos e 6 quadrados; o 10.° semiregular;

$x=3$, $x'=5$, $q=4$, $y=20$, $y'=12$; 20 triangulos e 12 pentagonos; o 11.° semiregular;

Seja $m=4$, $n=1$; será $xy=4x'y'$, que se satisfaz com $y=4qx'$, $y'=qx$; e teremos

$$q(3xx'-2x-8x')+4=0.$$

$x=3$, $x'=4$, $q=2$, $y=32$, $y'=6$; 32 triangulos e 6 quadrados; o 12.° semiregular;

$x=3$, $x'=5$, $q=4$, $y=80$, $y'=12$; 80 triangulos e 12 pentagonos; o 13.° semiregular.

Se se quizer cobrir a esphera com huma unica especie de polygonos, teremos então só

$$(m-2)xy-2my+4m=0.$$

Fazendo:

$m=3$, $x=3$, será $y=4$; 4 triangulos esphericos, o que corresponde ao tetraedro regular;

$m=4$, $x=3$, será $y=8$; 8 triangulos esphericos, o que corresponde ao octaedro regular;

$m=5$, $x=3$, será $y=20$; 20 triangulos esphericos, o que corresponde ao icosaedro regular;

$m=3$, $x=4$, será $y=6$; 6 quadrados esphericos, o que corresponde ao cubo;

$m=3$, $x=5$, será $y=12$; 12 pentagonos esphericos, o que corresponde ao dodecaedro regular.

Da superficie dos solidos circulares.

649. De duas superficies não interrompidas, a exterior he maior do que a interior, se esta fôr convexa, isto he, senão podér ser encontrada em mais de dois pontos por huma recta infinita, que atravesse o solido que ella encerra.

Porque para applicar todos os pontos da exterior supposta flexivel sobre a interior supposta inflexivel, he preciso dobrar a primeira.

650. De todas as superficies que terminão em huma linha plana, convexa e fechada, a plana he menor, e de duas outras, he menor a convexa que está entre a plana e a outra.

Fig. 232. Das tres superficies *ACBF*, *ACBE*, *ACB* que terminão na linha plana, convexa e fechada *ACB*, seja a segunda convexa e a terceira plana.

He sempre possivel chegar a hum ponto *D* tão proximo da superficie plana *ACB*, e collocado na parte opposta ás outras superficies, que descrevendo huma superficie com huma recta que passe por elle e pelo perimetro *ABC*, fique sempre convexa a superficie composta *DACBE*, e por consequencia tambem *DACB*. Logo, pelo theorema precedente, teremos a superficie $DACBF > DACBE > DACBA$; e tirando de cada d'estas tres superficies a superficie commum *DACB*, teremos $ACBF > ACBE > ACB$.

651. De dois solidos, hum exterior e outro interior, o primeiro chama-se *circumscrito*, e o outro *inscrito*, quando no primeiro não ha face em que não esteja ou hum vertice, ou huma aresta do segundo.

652. A superficie curva do sector cylindrico he maior do que a porção da superficie do prisma inscrito no sector interceptada pelos triedros, que têem os vertices nos centros das bases do cylindro; e he menor do que a superficie do prisma circumscrito ao sector, interceptada pelos mesmos triedros.

Para provar a primeira parte da proposição, basta considerar o prisma triangular $ABCD$ inscrito no sector cylindrico $ABCED$; poisque podem reduzir-se a taes sectores e a taes prismas qualquer sector cylindrico, e qualquer prisma inscrito n'esse sector. Fig. 233.

Digo que he a superficie curva $CEF >$ parallelogrammo CF. Porque $CEF + 2.CED > CF$; e no sector cylindrico, cujo eixo he $n.AB$, a superficie será $n.CEF$, e o parallelogrammo correspondente será $n.CF$, e os segmentos CED, GHF ficarão sempre os mesmos, e teremos tambem

$$n.CEF + 2\,CED > n.CF.$$

Agora nego que seja $CEF < CF$, porque se assim fosse teriamos

$$n(CF - CEF) < 2.CED$$

absurdo, sendo n qualquer, poisque de qualquer grandeza $CF - CEF$ ha sempre multiplos $n(CF - CEF)$ que excedão huma grandeza qualquer proposta $2.CED$.

Digo mais que não póde ser $CEF = CF$, porque se suppõe n infinito, então o termo $n.CEF$ não poderá ser augmentado por $2\,CED$, e a inequação se reduz a esta $n.CEF > n.CF$, ou a $CEF > CF$, como deve ser.

Para demonstrar a segunda parte da proposição, bastará tambem considerar o prisma quadrangular $ABCID$ circumscrito ao sector cylindrico $ABCED$.

A superficie quebrada GIF, composta de dois parallelogrammos, e os dois triangulos iguaes CID, GKF, tudo junto, são maiores do que a superficie curva CEF, mais os dois segmentos iguaes CED, GHF; isto he

$$GIF+2CID>CEF+2CED;$$

e discorrendo como no caso antecedente, teremos

$$n.GIF+2(CID-CED)>n.CEF,$$

e conclue-se da mesma fórma que $GIF>CEF$.

O caso mais desvantajoso n'esta segunda parte da proposição, he quando os dois parallelogrammos GI, IF são tangentes á superficie curva; mas então elles são iguaes, e o plano das parallelas IK, BA divide o sector e a superficie, o prisma e a sua superficie em partes iguaes, e a proposição tem logar igualmente no sector cylindrico, e prisma triangular circumscrito, que são então cada hum metades respectivas do sector proposto, e do prisma quadrangular da construcção, e com mais rasão em qualquer outro prisma triangular circumscrito ao sector cylindrico.

653. Das superficies curvas dos sectores cylindricos, com o mesmo eixo e diedro, he maior aquella que pertence ao cylindro de raio maior.

Póde inscrever-se no sector maior hum prisma, e circumscrever ao menor outro prisma, nos perimetros de cujas bases entrem no primeiro huma linha de cordas inscrita em
Fig. 234. DE, e no segundo huma linha de tangentes circumscrita a FG, e taes estas linhas que se não cortem, e que seja a primeira maior do que a segunda. As duas superficies prismaticas lateraes, que têem estas linhas por bases, chamem-se respectivamente S, s. Finalmente se vê que $S>s$. Logo a superficie $CDE>S>s>$ superficie HFG.

654. Com a superficie curva do sector cylindrico, sem mudar nem de eixo nem de diedro, se póde representar a grandeza de qualquer superficie, por ser a primeira huma funcção do raio, que póde ir desde zero até o infinito.

655. A superficie curva do sector cylindrico recto he igual ao producto do arco pelo lado.

Se $AD \times$ arco ABC não he o valor da superficie curva DBC do sector cylindrico recto $DAECB$, seja, se he possivel, o valor da superficie curva FH do sector cylindrico recto concentrico e menor. Fig. 235.

Inscreva-se no sector maior o prisma $DACE$, cuja superficie DC, composta de hum ou de muitos rectangulos, não corte FH.

Será $DC > FH$, isto he

$$AD \times AC > AD \times \text{arco } ABC: \text{ absurdo.}$$

Se he possivel, seja agora $FG \times$ arco GH, a superficie curva DC de hum sector cylindrico maior do que o proposto FGH.

Circunscreva-se ao menor hum prisma $FGHE$, cuja superficie $FGIH$, composta de dois ou mais rectangulos, não corte a superficie quebrada inscrita em DC. Será $FGIH$ menor do que a superficie curva DC, isto he

$$FG \times (GI + IH) < FG \times \text{arco } GH:$$

absurdo igualmente.

656. A superficie curva do cylindro recto he o producto do lado, eixo ou altura pela circumferencia de huma das bases.

657. A superficie curva do sector conico recto, he maior do que a porção de superficie da pyramide inscrita no sector, interceptada pelo triedro que tem o vertice no centro da base; e menor do que a porção da superficie da pyramide circumscrita ao sector, interceptada pelo mesmo triedro.

Para provar a primeira parte da proposição, basta considerar a pyramide triangular $ACED$, inscrita no sector conico recto $ABCED$. Fig. 236

Digo que a superficie curva $DABC$, he maior do que o triangulo isosceles DAC.

Opposto ao sector circular AEC, póde imaginar-se outro sector conico e recto $ABCEF$, tendo a altura $EF=ED$, e circumscrito a outra pyramide triangular $ACEF$. Póde demonstrar-se por meio da superposição, que os dois sectores conicos são identicos, assim como as duas pyramides, porque os triedros $EACD$, $EACF$ o são, e teem as arestas iguaes entre si. Logo será a superficie curva $DABC$ $=$ superficie curva $FABC$, e o triangnlo $DAC=FAC$. Mas DE, FE estão em direitura, sendo ambas perpendiculares á base commum, logo as faces DAE, FAE estão no mesmo plano, ou formão huma só face; e o mesmo he de DCE, FCE. Logo o solido $DACF$, composto de duas pyramides triangulares, he hum tetraedro, e por consequencia he convexo; e sendo interior a respeito do duplo sector conico, a sua superficie he menor, e tirando as duas faces communs, fica a superficie quebrada $DACF<$ superficie curva $DABCF$, logo $DAC<DABC$.

Similhantemente se demonstra a segunda parte da proposição, por meio da pyramide quadrangular $FEAGC$ opposta á circumscrita $DEAGC$, comparadas com os segmentos conicos rectos inscritos $FEABC$, $DEABC$.

O caso mais desvantajoso, n'esta segunda parte da proposição, he quando os triangulos DAG, DCG são tangentes á superficie curva; mas então elles são iguaes, e o plano GDE divide o sector e a superficie, a pyramide e a sua superficie em partes iguaes, e a proposição tem logar ainda no sector conico recto, e pyramide triangular circumscrita, que são então metades do sector proposto, e da pyramide quadrangular, e com mais rasão em outra qualquer pyramide triangular circumscrita á metade do sector conico.

658. Das superficies curvas dos sectores conicos rectos, com o mesmo eixo e diedro, he maior a que pertence á pyramide conica de maior raio da base.

Póde inscrever-se no sector maior huma pyramide, e circumscrever-se ao menor outra, nos perimetros de cujas bases entrem no primeiro a linha de cordas inscrita em DE,
Fig. 237. e no segundo a linha de tangentes circumscrita a FG, taes que estas linhas não se cortem, e que a primeira seja maior

do que a segunda. Sejão S, s as duas superficies lateraes pyramidaes, que estão sobre estas linhas respectivamente por bases. Será $S > s$. Logo a superficie curva $BDIE > S > s >$ superficie curva BFG.

659. Com a superficie curva do sector conico recto, sem mudar de eixo nem de diedro, póde representar-se a grandeza de qualquer superficie, por ser a primeira huma funcção do raio da base, que augmenta desde zero até o infinito.

660. A superficie curva do sector conico recto, he metade do producto do lado pelo arco.

Porque se he possivel, não seja

$$\frac{1}{2} BE \times \text{arco } DIE = \text{superficie } BDIE,$$

e seja

$$\frac{1}{2} BE \times \text{arco } DIE = \text{superficie } BFG \text{ (menor)}.$$

Inscreva-se na maior, sobre a linha das cordas, huma superficie pyramidal que não corte a menor. A perpendicular BK a qualquer das cordas iguaes será $< BE$, e a linha das cordas $DE < DIE$. A superficie pyramidal lateral e parcial BDE, he $>$ superficie curva BFG, isto he

$$\frac{1}{2} BK \times DE > \frac{1}{2} BE \times \text{arco } DIE:$$

absurdo, por ser

$$BK < BE, \text{ e } DE < DIE.$$

Se he possivel, seja $\frac{1}{2} BG \times \text{arco } FG$ o valor da superficie conica $BDIE$ maior. Circumscreva-se a BFG sobre a linha das tangentes, huma superficie pyramidal que não corte a maior. Será a linha das tangentes $FHG >$ arco FG; BG perpendicular a GH; e todas as outras perpendiculares ás tangentes serão cada huma $= BG$, ou o que

he o mesmo, serão lados da pyramide conica recta. Será a superficie $BFHG < BDIE$,
isto he

$$\frac{1}{2}BG \times (FH + HG) < \frac{1}{2}BG \times \text{arco}\, FG:$$

absurdo, poisque o factor

$$(FH + HG) > \text{arco}\, FG.$$

661. A superficie curva da pyramide conica recta he metade do producto do lado pela circumferencia da base.

662. *Pyramide conica truncada* ou *tronco da pyramide conica* he o solido que d'ella fica depois de se lhe cortar outra pyramide conica por hum plano parallelo á base. Chamão-se *bases do tronco* os dois circulos que são as suas faces planas; *eixo* a recta que une os centros das bases; *altura* a perpendicular ás bases, terminada nos seus planos; *lados do tronco*, as rectas tiradas entre pontos das circumferencias das bases, sem cortarem o tronco, ou que estejão cada huma com o eixo no mesma plano. O *tronco* he *recto* quando o eixo he igual á altura, aliás he *obliquo*.

663. A superficie curva da pyramide conica truncada recta, he o producto de hum lado pela circumferencia media, isto he, a que divide os lados igualmente.

Fig. 238. Complete-se a pyramide conica ABC, de que DBC he o tronco.

A superficie curva do tronco, ou a descrita por DB, fazendo-se girar o trapesio $DEFB$ em torno de EF, he a differença entre as superficies curvas das duas pyramides conicas, descritas respectivamente por AB, AD, isto he, a superficie curva DAC, que chamo $S = \frac{1}{2}AB \times$ circumferencia, cujo raio he BF, $- \frac{1}{2}AD \times$ circumferencia, cujo raio he DE,

$$= \pi(BA \times BF - AD \times DE)$$

$$= \pi(BD \times BF + AD \times BF - AD \times DE).$$

Mas temos

$$AD:AB::DE:BF,$$

logo

$$AD\times BF=AB\times DE=AD\times DE+BD\times DE.$$

Substituindo pois e reduzindo, teremos

$$S=\pi.\,BD(BF+DE).$$

Se pelo meio G de BD se tira HG parallela a DE, será

$$GH=\tfrac{1}{2}(BF+DE);$$

logo

$$S=2\pi.\,BD\times GH=BD\times \text{circumferencia},$$

cujo raio he GH.

664. Designaremos por circ. AB o circulo, de que AB he o raio, ou de cuja circumferencia AB he arco. Similhantemente circumf. AB significa a circumferencia, de que AB, he arco ou raio.

665. A superficie curva ou de pyramide conica, ou do seu tronco, ou de hum cylindro, descrita por qualquer dos lados de hum polygono, na revolução inteira do polygono sobre hum dos seus lados como eixo, he igual á projecção sobre o eixo, do lado gerado d'essa superficie, multiplicada pela circumferencia, cujo raio he a perpendicular levantada no meio do lado gerador, e terminada no eixo.

Seja $ABCDE$ o polygono, AE o eixo de revolução, e Fig. 239.
BC parallelo ao eixo.

BC descreve a superficie curva de hum cylindro recto, CD a de huma pyramide conica recta truncada, e DE a de huma pyramide conica recta, na revolução do polygono em torno do eixo.

Sejão AF, FG, GE as projecções orthogonaes respectivas de BC, CD, DE sobre o eixo; e HI, HK, HL perpendiculares respectivas ao meio de cada hum d'estes ultimos lados.

A proposição não precisa ser demonstrada para a superficie cylindrica descrita por BC.

Para demonstrar os outros dois casos, tirem-se HD, e as perpendiculares ao eixo KM, LN; e a parallela DP.

Os triangulos HKM, CDP são similhantes, por terem os lados perpendiculares entre si;
logo

$$KM : HK :: DP \text{ (ou } FG) : CD;$$

logo

$$KM \times CD = HK \times FG.$$

Mas a superficie do tronco descrita por CD, que chamo

$$S = 2\pi . KM \times CD;$$

logo

$$S = 2\pi . HK \times FG = FG \times \text{circumf. } HK.$$

Os triangulos HLN, DGE são tambem similhantes, pela mesma rasão de terem os lados perpendiculares, e dão

$$HL \times GE = LN \times DE;$$

e a superficie que DE descreve, he

$$= \pi . DG \times DE = 2\pi . LN \times DE$$

$$= 2\pi . HL \times GE = GE \times \text{circumf. } HL.$$

666. *Zona* he a superficie curva do segmento espherico, ou do seu tronco. *Arco da zona* he aquelle que a descreve; e zon. AB significa zona cujo arco he AB, ou zona da esphera cujo raio he AB. *Zonas correspondentes* chamo áquellas cujos arcos, em espheras concentricas, correspondem ao mesmo angulo do centro.

667. A zona he maior do que a superficie descrita pela linha de cordas, inscrita no seu arco; e menor do que a superficie descrita pela linha de tangentes, circumscrita ao seu arco.

Dos extremos do arco abaixem-se as perpendiculares AB, DC sobre um dos eixos. Na revolução do polygono $ABCDGF$ com o arco e a linha das cordas, descrevem-se tres solidos, cujas superficies estão no caso do § 649; e tirando d'estas superficies circ. BA, e circ. DC, que são communs a todas tres, restão a superficie descrita por $AFGD >$ zon. $AD >$ superficie descrita por AED. Fig. 240.

668. De zonas correspondentes he maior a que tem maior arco.

Inscreva-se no arco maior huma linha de cordas BFC, e circumscreva-se ao arco menor huma linha de tangentes $DGHIE$, sem que estas linhas se cortem, e seja a primeira $BFC >$ segunda $DGHIE$. A projecção LM do arco maior e linha das cordas, he maior do que a projecção NP do arco menor e linha das tangentes, porque Fig. 241.

$$AM : AP :: AC : AE :: AB : AD :: AL : AN;$$

logo

$$AM - AL : AP - AN :: AM : AP \text{ ou } :: AB : AD,$$

isto he,

$$LM : NP :: AB : AD.$$

Por consequencia será maior a superficie descrita pela linha das cordas BFC do que a descrita por $DGHIE$, porque a primeira tem maior projecção sobre o eixo, e maior perpendicular AQ abaixada do centro sobre huma das cordas iguaes que a compõem, e a linha das tangentes menor projecção, e menor perpendicular sobre qualquer das tangentes, por ser ella o raio menor. Ora d'estas projecções e perpendiculares dependem as superficies descritas.

Assim zon. BC he maior do que cada huma d'estas duas superficies, e zon. DE menor. Logo a zona de maior arco, ou de maior raio, he maior, sendo o mesmo o angulo BAC do sector.

669. Com a zona, sem mudar o angulo do sector circular correspondente, póde representar-se a grandeza de huma superficie qualquer, por ser aquella huma funcção do raio da esphera, que vai de zero ao infinito.

670. *A* zona he o producto da projecção do seu arco pela circumferencia de hum circulo maximo da sua esphera.

Seja, se he possivel, $LM \times$ circumf. AB não o valor da zona descrita por BC, mas de uma zona menor descrita por DE, ou seja

$$LM \times \text{circumf. } AB = \text{zon. } DE.$$

Inscreva-se no arco da zona maior a linha das cordas BFC, que não corte o arco menor.

Será superficie descrita por $BFC >$ zon. DE, isto he

$$LM \times \text{circumf. } AQ > LM \times \text{circumf. } AB:$$

absurdo, por ser

$$AQ < AB.$$

Seja, se he possivel, $NP \times$ circumf. AD o valor não da zon. DE, mas d'outra maior zon. BC, ou seja

$$NP \times \text{circumf. } AD = \text{zon. } BC.$$

Circumscreva-se ao arco menor a linha das tangentes $DGHIE$, tal que não encontre o arco maior. Será superficie descrita por $DGHIE <$ zon. BC, isto he

$$NP \times \text{circumf. } AD < NP \times \text{circumf. } AD: \text{ absurdo.}$$

671. A superficie da esphera, he o producto do eixo pela circumferencia de hum circulo maximo, logo he igual á superficie de quatro dos seus circulos maximos; e igual

á superficie curva do cylindro circumscrito á esphera, isto he, do cylindro recto, que ella toca em todas as faces e lados.

672. Chamão-se *similhantes* as superficies do mesmo nome que só differem em grandeza, quando estão entre si, como os quadrados das linhas do mesmo nome, que as fazem differir em grandeza, ou de que são funcções.

673. As zonas correspondentes são similhantes.

Temos

$$\text{zon.}\,BC : \text{zon.}\,DE :: 2\pi.\,AB \times LM : 2\pi.\,AD \times NP.$$

Mas he

$$LM : NP :: AB : AD;$$

logo

$$\text{zon.}\,BC : \text{zon.}\,DE :: \overline{AB}^2 : \overline{AD}^2.$$

674. As superficies curvas dos diedros esphericos, ou as superficies dos bilateros esphericos estão entre si como os seus angulos.

Se os bilateros $ABCD$, $AECD$ são commensuraveis, Fig. 242.
ou se têem hum bilatero que seja sua medida commum, he claro que o angulo d'este bilatero se contém nos angulos dos bilateros propostos tantas vezes, quantas o bilatero nos outros, e a proposição he verdadeira, e por consequencia o he tambem no caso de incommensurabilidade.

675. A superficie do bilatero está para a da sua esphera, como o angulo do bilatero para quatro angulos rectos.

676. A superficie do triangulo CBD, formado por hum arco BD de circulo menor ou maximo, e por dois arcos de circulo maximo que lhe sejão perpendiculares, está para a zona que o circ. BD termina, e em que existe o triangulo, como BD para circumf. BD.

677. A superficie do triangulo espherico está para a superficie da sua esphera, como o excesso da somma dos seus angulos sobre dois rectos está para oito rectos.

Produza-se o lado BC do triangulo espherico x, até Fig. 212.
completar o seu circulo, e os outros lados no sentido do vertice A até se encontrarem em D. Ficará fóra do hemispherio do triangulo proposto, outro triangulo igual a este.

Seja s a superficie da esphera, teremos

$$x+a:s::ACB:4r;$$

$$x+b:s::ABC:4r;$$

$$x+c:s::BAC:4r;$$

$$a+b+c+x=\frac{1}{2}s;$$

logo

$$3x+a+b+c=\frac{s(ACB+ABC+BAC)}{4r};$$

logo

$$2x+\frac{1}{2}s=\frac{s(ACB+ABC+BAC)}{4r};$$

logo

$$x=\frac{s(ACB+ABC+BAC-2r)}{8r}.$$

678. A superficie do triangulo espherico trirectangulo que pela proposição precedente, ou por superposição, he a oitava parte da superficie da esphera, he por consequencia metade da superficie de hum circulo maximo, ou o producto de hum quadrante da circumferencia de circulo maximo pelo raio. Suppondo pois que o quadrante e o raio se subentendem ou se supprimem, substituindo-os por 1, como já se fez; então tambem o triangulo trirectangulo deve ser considerado como unidade de superficie, ou $=1$, e da mesma fórma $r=1$, e $s=8$; e a expressão do triangulo espherico se reduz a

$$x=ABC+ACB+BAC-2;$$

a qual traduzida em termos communs abreviados quer dizer, que a superficie do triangulo espherico he igual á somma dos seus angulos menos o numero 2. O que realmente significa, que os numeros que resultão da comparação de seus angulos com hum recto se sommem, que d'esta somma se tire 2, e que o resto se multiplique pela superficie do triangulo trirectangulo; e o producto será a superficie do triangulo espherico.

679. A superficie do polygono espherico saliente de n lados, porque póde dividir-se em $n-2$ triangulos esphericos, será igual á somma dos seus angulos menos o numero $2(n-2)$, segundo o mesmo scholio.

680. A superficie do menisco ou lunula formada por hum arco de circulo maximo e outro de circulo menor, acha-se tirando de BCD o triangulo espherico que tem os mesmos vertices. Fig. 242.

681. A superficie do menisco ou lunula formada por dois arcos de circulo menor, he a differença de duas lunulas como as do corollario antecedente, e exige que se calculem as superficies de dois triangulos esphericos proprios, e de dois improprios como BCD.

682. Já se vê, que se póde achar a superficie de hum polygono não espherico, mas descrito na superficie da esphera, em o qual entrem lados que sejão arcos de circulos menores, reduzindo-o primeiro a polygono espherico, pondo arcos de circulos maximos entre os extremos dos arcos de circulos menores, e tendo conta depois com as superficies dos meniscos assim formados.

Volumes circulares

683. O sector de hum cylindro qualquer he o producto da altura pelo sector circular, que lhe serve de base.

Seja A a altura. Se $A \times AECB$ não he o valor do sector cylindrico $DABCE$; seja, se he possivel, o valor de outro sector cylindrico menor $FHGE$, isto he, seja Fig 235.

$$A \times AECB = FHGE.$$

Inscreva-se no maior hum prisma, cuja linha das cordas AC, com os raios AE, CE formem o perimetro da base. Este prisma he maior do que $FHGE$, isto he,

$$A \times AEC > A \times AECB\text{: absurdo.}$$

Seja, se he possivel, $A \times HEG$ o valor de hum sector cylindrico $DABCE > FHGE$.

Circumscreva-se ao menor hum prisma $FGIHE$, cuja base tenha por perimetro a linha das tangentes GIH, e os dois raios GE, EH.

He este prisma $<$ que o sector cylindrico maior, isto he,

$$A \times GIHE < A \times GEH \text{: absurdo.}$$

684. O cylindro he o producto da base pela altura.

685. O sector de huma pyramide conica qualquer, he o terço do producto da altura pelo sector circular que lhe serve de base.

Fig. 237. Seja A a altura. Se $\frac{1}{3} A \times DIEA$ não he o valor do sector conico $BDIEA$, seja, se he possivel, o valor d'outro sector conico menor $BFGA$, isto he, seja

$$\frac{1}{3} A \times DIEA = BFGA.$$

Inscreva-se no maior huma pyramide, de que a linha das cordas DE, e os raios DA, EA formem o perimetro da base. Esta pyramide he $> BFGA$, ou

$$\frac{1}{3} A \times DEA > \frac{1}{3} A \times DIEA \text{: absurdo.}$$

Seja, se he possivel, $\frac{1}{3} A \times FGA$ o valor de hum sector conico $BDIEA >$ sector $BFGA$.

Circumscreva-se pois ao menor sector huma pyramide $BFHGA$, cuja base tenha por perimetro a linha das tangentes FHG, e os raios FA, GA. Esta pyramide he menor do que o sector conico maior, isto he

$$\frac{1}{3} A \times FHGA < \frac{1}{3} A \times FGA \text{: absurdo.}$$

686. A pyramide conica he o terço do producto da base pela altura.

687. O tronco da pyramide conica he a somma de tres pyramides conicas, todas da mesma altura do tronco, e tendo por bases respectivas as duas bases do tronco, e huma meia proporcional entre ellas.

Esteja o tronco T entre os circulos parallelos, de que BF, DE são os raios; KI seja a sua altura, se elle he obliquo, a qual he a differença entre a altura AI total, e AK altura da pyramide parcial. Será Fig. 238.

$$T = \frac{1}{3}(AI.\text{circ.}\,BF - AK.\text{circ.}\,DE)$$

$$= \frac{1}{3}\Big(KI.\text{cir.}\,BF + AK(\text{circ.}\,BF - \text{circ.}\,DE)\Big)$$

$$= \frac{1}{3}\Big(KI.\text{circ.}\,BF + \pi.AK(\overline{BF}^2 - \overline{DE}^2)\Big).$$

Mas temos

$$AI : AK :: AB : AD :: BF : DE;$$

logo

$$AI - AK\,(\text{ou}\,KI) : AK :: BF - DE;$$

logo

$$AK = \frac{DE \times KI}{BF - DE};$$

logo

$$T = \frac{1}{3}\Big(KI.\text{circ.}\,BF + \pi.KI(BF \times DE + \overline{DE}^2)\Big).$$

Tomando GH meia proporcional entre BF e DE, será

$$T = \frac{1}{3}KI.\text{circ.}\,BF + \frac{1}{3}KI.\text{circ.}\,GH + \frac{1}{3}KI.\text{circ.}\,DE.$$

688. Na revolução de hum triangulo sobre hum eixo que esteja no seu plano, e em que tenha hum vertice, o solido

KK

gerado pelo triangulo he o terço do producto da perpendicular tirada d'este vertice sobre o lado opposto, pela superficie gerada por este lado.

Fig. 243. Ha tres casos. O triangulo AFE na revolução sobre o eixo AE descreve hum volume composto de duas pyramides conicas rectas, as quaes têem por base commum o circulo descrito pela perpendicular DF sobre o eixo de revolução, isto he, o solido gerado por AFE, ou

$$\text{sol.}\,AFE = \frac{1}{3}\,AE \times \text{circ.}\,DF = \frac{1}{3}\,AE \times \pi \overline{DF}^2.$$

Seja AG perpendicular sobre EF produzido sendo necessario.

Pela similhança dos triangulos AGE, DFE, ou pela proposição § 130, temos

$$AE \times DF = EF \times AG;$$

ogo

$$\text{sol.}\,AFE = \frac{1}{3}\,AG \times \pi.\,DF \times EF.$$

Mas EF he o lado de huma das pyramides conicas, e $2\pi.\,DF$ a circumferencia da base. Logo a superficie gerada por EF, ou

$$\text{sup.}\,EF = \pi.\,DF \times EF;$$

e

$$\text{sol.}\,AFE = \frac{1}{3}\,AG \times \text{superf.}\,EF.$$

Da mesma fórma

$$\text{sol.}\,AHE = \frac{1}{3}\,AG \times \text{sup.}\,HE.$$

No segundo caso

$$\text{sol.}\,AHF = \text{sol.}\,AHE - \text{sol.}\,AFE =$$

$$\frac{1}{3}\,AG\,(\text{sup.}\,HE - \text{sup.}\,EF) = \frac{1}{3}\,AG \times \text{sup.}\,HF.$$

Terceiro caso, sendo KH parallelo ao eixo. Então o solido gerado por AKH he a differença entre hum cylindro recto, que tem a altura KH, e cujos raios das bases são cada hum igual a AI, e a somma de duas pyramides conicas, com as mesmas bases e alturas IK, IH, e que ambas juntas fazem o terço do cylindro. Logo

$$\text{sol.}\,AKH = \tfrac{2}{3}\,KH \times \text{circ.}\,AI = \tfrac{2}{3}\,KH \times \pi.\overline{AI}^2$$

$$= \tfrac{1}{3}\,AI \times \text{sup.}\,KH.$$

689. *Sector conico-espherico* he a porção da esphera descrita por hum sector de circulo maximo, na revolução em torno de hum dos lados do sector circular. *Segmento do seetor conico-espherico* he o segmento feito por hum plano que passe pelo centro da esphera, ou vertice do sector; e a secção d'este plano no sector conico-espherico he tambem hum sector de circulo maximo.

690. O sector conico-espherico he o terço do producto do raio da sua esphera pela zona, que he sua base espherica.

Se $\frac{1}{3}\,AB \times \text{zon.}\,BC$ não he o valor do sector conico- Fig. 241.
espherico descrito pelo sector circular ABC em torno de AC, ou de AB; seja, se he possivel, o valor de outro sector correspondente menor, descrito por ADE em torno do mesmo eixo, isto he, seja

$$\tfrac{1}{3}\,AB \times \text{zon.}\,BC = \text{sector con. esph.}\,ADE.$$

Inscreva-se no arco maior huma linha de cordas iguaes BFC, que não corte o menor. Será, na revolução sobre o mesmo eixo,

$$\text{sol.}\,ABFC > \text{sect. con. esph.}\,ADE,$$

isto he,

$\frac{1}{3}$ AQ sup. $BFC > \frac{1}{3}$ AB zon. BC: absurdo, por ser $AQ < AB$, e sup. $BFC <$ zon. BC.

Seja, se he possivel, $\frac{1}{3}$ AD zon. DE o valor de hum sector conico-espherico maior descrito por ABC na mesma revolução.

Circumscreva-se ao arco menor DE huma linha de tangentes, tal que não corte o maior, como $DGHIE$.

Será

$$\text{sol. } ADGHIE < \text{sect. con. esph. } ABC$$

isto he

$\frac{1}{3}$ AD sup. $DGHIE < \frac{1}{3}$ AD zon. DE: absurdo, por ser sup. $DGHIE >$ zon. DE.

691. O solido que resta depois de tirar hum sector conico-espherico d'outro, he o producto da sua zona pelo terço do raio.

692. A esphera he o terço do producto da superficie pelo raio, e chamando ao raio r, he esphera $= \frac{4}{3} \pi r.^3$.

693. Chamão-se *similhantes aos volumes do mesmo nome, que só differem em grandeza quando estão entre si, como os cubos das linhas do mesmo nome*, que os fazem differir em grandeza, ou de que são funcções. Assim são similhantes todas as espheras.

694. Os sectores conico-esphericos correspondentes, ou cujas zonas são similhantes, são similhantes.

Temos sect. con. esph. ADE : sect. con. esph. ABC :: $\frac{1}{3}$ AD zon. DE : $\frac{1}{3}$ AB zon. BC. Mas é

$$\text{zon. } DE : \text{zon. } BC :: \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2; \text{ logo}$$

$$\text{sect. con. esph. } ADE : \text{sect. con. esph. } ABC :: \overline{AD}^3 : \overline{AB}^3.$$

695. O diedro finito ou espherico, he o terço do producto do bilatero pelo raio.

Porque o diedro D está para a esphera S, como a superficie curva d do diedro está para a superficie s da esphera; logo

$$D = \frac{S d}{s} = \frac{1}{3}\text{ raio} \times \frac{s d}{s} = \frac{1}{3} r d.$$

696. O sector $GBCD$ do sector conico-espherico he o terço do producto do raio pela superficie espherica do triangulo BDC formado do arco BD de circulo menor, e de outros dois perpendiculares a este, e por consequencia maximos. Fig. 242.

Porque facilmente se demonstra, que $GBCD$: sol. con. esph. GBC :: BD : cir. BD :: BCD : zon. BC, isto he,

$$GBCD = \frac{1}{3}\,\frac{GB\,\text{zon. }BC \times BCD}{\text{zon. }BC} = \frac{1}{3}\,GB \times BCD.$$

697. O sector triedro espherico he o terço do producto do raio pela superficie do triangulo espherico que lhe serve de base.

Prova-se como em o § 677, que hum sector triedro espherico T he para a sua esphera S, como o seu triangulo espherico t he para a superficie s da esphera; mudando na demonstração citada as palavras bilateros em diedros, triangulo em triedro, lados em faces, e superficies em solidos. Assim temos

$$T = \frac{S t}{s} = \frac{1}{3} r t.$$

698. O polyedro espherico he o terço do producto do raio pelo polygono espherico, que he sua superficie curva.

699. O segmento do solido conico-espherico he o terço do producto do raio pela lunula, que he sua superficie espherica.

700. O segmento espherico he o terço do producto do

circulo, cujo raio he a sua altura, pela differença entre o triplo do raio da esphera, e a mesma altura.

Fig. 244. O segmento espherico descrito por CBE he a differença entre o sector conico-espherico descrito por CAB, e a pyramide conica descrita por ACE, isto he

$$\text{Segm. } BCE = \text{sol. con. esph. } CAB - \text{pyram. } ACE$$

$$= \frac{1}{3} AB \text{ zon. } CB - \frac{1}{3} AE \text{ circ. } EC$$

$$= \frac{1}{3} AB \times EB \text{ circumf. } AC - \frac{1}{3} AE \text{ circ. } EC$$

$$= \frac{\pi}{3} (2EB \times \overline{AB}^2 - AE \times \overline{EC}^2)$$

$$= \frac{\pi}{3} \left(2EB \times \overline{AB}^2 - (AB - EB)(2AB - EB)EB\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} (3AB - EB)\overline{EB}^2 = \frac{1}{3} (3AB - EB) \text{ circ. } EB.$$

701. Eliminando da expressão $\frac{\pi}{3} (3AB - EB)\overline{EB}^2$ o raio AB da esphera, resulta

$$\text{segm. } BCE = \frac{1}{3} (3\overline{EC}^2 + \overline{EB}^2) \frac{1}{4} \text{ circumf. } EB$$

$$= \frac{1}{6} EB (3\pi \overline{EC}^2 + \pi \overline{EB}^2)$$

$$= \frac{1}{6} EB (3 \text{ circ. } EC + \text{circ. } EB).$$

O que fornece as seguintes regras. Para achar a capacidade do segmento espherico, somme-se o triplo do quadrado do raio da sua base com o quadrado da sua altura, multiplique-se esta somma pela circumferencia, de que he raio a altura, e divida-se o producto pelo numero 12. Ou a trez vezes a base junte-se o circulo de que a altura he raio, multiplique-se esta somma pela altura, e divida-se o producto pelo numero 6, para ter o solido do segmento.

702. O tronco do segmento espherico, ou o segmento de duas bases, he o triplo da somma d'ellas, junto com o circulo cujo raio he a altura, multiplicado o todo pela sexta parte da altura.

O tronco T descrito por $FGEC$ he a differença dos segmentos descritos por FGB, CEB, isto he,

$$T=\frac{1}{6}\pi(3\overline{GF}^2\times BG+\overline{BG}^3-3\overline{EC}^2\times BE-\overline{BE}^3)$$

$$=\frac{\pi}{6}(3\overline{GF}^2\times GE+3\overline{GF}^2\times BE+\overline{GE}^3$$

$$+3\overline{GE}^2\times BE+3\,GE\times\overline{BE}^2-3\overline{EC}^2\times BE).$$

Mas por ser

$$AB=\frac{\overline{EC}^2+\overline{EB}^2}{2EB}=\frac{\overline{FG}^2+\overline{BG}^2}{2BG},$$

e pondo $GE+BE$ em logar de BG, como se acaba de fazer, e multiplicando por 3, será

$$3EB\times\overline{FG}^2+3EB\times\overline{GE}^2+3GE\times\overline{EB}^2$$

$$-3BE\times\overline{EC}^2=3GE\times\overline{EC}^2;$$

logo

$$T=\frac{\pi}{6}(3\overline{GF}^2+3\overline{EC}^2+\overline{GE}^2)GE.$$

703. A esphera he os dois terços do cylindro circumscrito.

704. O segmento espherico de duas bases, equivale á metade de dois cylindros com as mesmas bases e altura do segmento, mais a esphera de que esta altura he o diametro.

Maximos e minimos dos solidos circulares e das suas superficies

705. O cylindro recto tem menor superficie do que o obliquo da mesma base e altura.

Porque circumscrevendo ao primeiro, e inscrevendo-lhe dois prismas, cujas superficies respectivas sejão c, i; e fazendo o mesmo ao segundo, sobre as mesmas bases, com dois prismas, cujas superficies sejão respectivamente C, I; e chamando s, S ás superficies respectivas do primeiro e segundo cylindros: estará s entre c e i, e S entre C e I. Mas he $c>i$, e $C>I$; $c<C$, $i<I$. Tambem se podem multiplicar as faces dos prismas tanto, que se torne I tão pouco diverso de C, que seja $I>c$. Logo exprimindo por numeros, não os valores absolutos, mas sómente a ordem de grandeza d'estas superficies, então a

c, s, i, C, S, I correspondem

3, 2, 1, 6, 5, 4, logo $s<S$.

706. O cylindro recto tem menor superficie do que o prisma de igual base e altura.

Porque mesmo no caso mais desvantajoso do prisma ser recto, e ter base regular, em que a sua superficie he a menor, a circumferencia da base do cylindro he tambem menor do que o perimetro da base do prisma; logo a superficie curva menor do que a lateral do prisma; e logo toda a superficie do cylindro he menor do que a do prisma.

707. O maior cylindro recto que se póde formar com a somma dada da altura e diametro da base, he aquelle em que a altura he igual ao raio da base, sendo ao mesmo tempo cada hum o terço d'esta somma.

Seja x o raio da base, e y a altura do cylindro; e c a somma dada, ou

$$2x+y=c.$$

O cylindro será $=\pi x^2 y=\pi x^2(c-2x)=\frac{\pi}{4}z^2(c-z)$, fazendo $z=2x$; $z^2(c-z)$ he a expressão que deve ser um maximum; logo

$$z=\frac{2}{3}c, \text{ e } x=\frac{1}{3}c=y.$$

708. O maior cylindro recto que se póde formar com a somma dada da altura e raio da base, he aquelle em que a altura he metade do raio, e ao mesmo tempo o terço d'esta somma.

Seja x o raio da base, y a altura do cylindro e c a somma dada ou

$$x+y=c.$$

O cylindro será $=\pi x^2(c-x)$, e a expressão que deve ser um *maximum* será $x^2(c-x)$; logo

$$x=\frac{2}{3}c;\ y=\frac{1}{3}c;\ y=\frac{1}{2}x.$$

709. De dois cylindros rectos, aquelle cuja altura he igual ao diametro da base, tem menor superficie com o mesmo volume do segundo; e maior volume com a mesma superficie.

Porque fazendo para os cylindros actuaes a mesma construcção que para os cylindros do § 705, e empregando as mesmas denominações, e porque c he menor do que C, tiraremos a mesma conclusão para a primeira parte da proposição. Quanto á segunda, as mesmas denominações applicadas aos volumes respectivos dos cylindros e dos prismas, tambem a demonstrão. Advirta-se que he $c<C$, porque a superficie lateral que faz parte de c, he quadrupla da base do prisma circumscrito a que pertence, ou tem altura dupla do apothema da base.

710. De todos os cylindros rectos do mesmo volume, o que tem menor superficie, ou da mesma superficie, o que tem maior volume he aquelle cuja superficie curva he quadrupla de huma de suas bases.

Porque, sendo x o raio da base, ella será πx^2, e como pela ultima proposição, a altura deve ser $y = 2x$, será a superficie curva $= 2\pi x y = 4\pi x^2$.

711. As superficies curvas de duas pyramides conicas rectas são proporcionaes aos volumes, quando a perpendicular tirada do centro da base sobre hum dos seus lados he a mesma em cada huma.

Sejão v, V as duas pyramides; s, S as superficies curvas respectivas; r, R os raios das bases; a, A as alturas; l, L os lados; e p a perpendicular tirada do centro da base sobre o lado, e a mesma em ambas as pyramides. Será $pl = ra$, e $pL = RA$; logo

$$s : S :: \pi r l : \pi R L :: \frac{\pi r^2 a}{p} : \frac{\pi R^2 A}{p}$$

$$:: \frac{\pi r^2 a}{3} : \frac{\pi R^2 A}{3} :: v : V.$$

712. São proporcionaes aos volumes as superficies totaes
Fig. 153. das pyramides conicas rectas, quando a perpendicular CD sobre o lado UT, abaixada de hum ponto C da altura UA, he a mesma nas duas pyramides, sendo $CD = CA$.

Deve observar-se que póde sempre determinar-se $CD = CA$, porque tomando $TD = AT$, e levantando CD perpendicular a UT, será $CD = CA$.

Sejão agora s, S as superficies totaes; $p = CD$; e o mais como se suppoz na proposição antecedente. Teremos nas duas pyramides $pl = (a - p) r$; $pL = (A - p) R$; logo

$$s : S :: \pi r l + \pi r^2 : \pi R L + \pi R^2 :: \pi \left(\frac{a-p}{p} r^2 + r^2\right)$$

$$: \pi \left(\frac{A-p}{p} R^2 + R^2\right) :: \frac{\pi r^2 a}{3} : \frac{\pi R^2 A}{3} :: v : V.$$

713. Chamamos a CD, ou CA *catheto da pyramide conica recta.*

714. As superficies ou os volumes das pyramides conicas rectas, que têem o mesmo catheto, são directamente como os quadrados das alturas, e inversamente como as differenças das alturas e o dobro do catheto.

Pelo § 712, estas superficies ou volumes são proporcionaes a $\overline{AT}^2 \times AU$, isto he, variando esta expressão para outra designada por $(\overline{AT}^2 \times V)$; e sendo V, (V) as pyramides correspondentes; s, (S) as suas superficies, temos

$$V:(V)::S:(S)::\overline{AT}^2 \times AU:(\overline{AT}^2 \times AU).$$

Mas $\overline{AT}^2 : \overline{CD}^2 :: \overline{AU}^2 : \overline{UD}^2 = \overline{UC}^2 - \overline{CD}^2$; logo, por ser CD constante, $AT \times AU$ é proporcional a $\frac{\overline{AU}^3}{\overline{UC}^2 - \overline{CD}^2}$, isto he, proporcional a $\frac{\overline{AU}^3}{(AU - CD)^2 - \overline{CD}^2}$, ou a $\frac{\overline{AU}^2}{AU - 2CA}$.

715. Nas mesmas hypotheses, a menor pyramide conica he aquella cuja altura he quadrupla do catheto.

A demonstração he a mesma do § 429.

716. Nas mesmas hypotheses, a superficie da pyramide conica he tambem minima.

717. E a distancia de C ao vertice he tripla do catheto.

718. E o lado da pyramide he triplo do raio da base.

719. Das pyramides conicas rectas com superficies iguaes, têem maior catheto aquella cujo lado he triplo do raio da base.

Porque se o seu catheto fosse igual ao de qualquer das outras pyramides, a sua superficie seria menor, contra a hypothese. Se este catheto fosse menor, a sua superficie seria ainda menor, porque tudo diminuiria, immediatamente a altura, e depois o lado e o raio; e a superficie se tornaria menor, por depender d'estes dois ultimos elementos.

720. Das pyramides conicas rectas iguaes, têem maior catheto aquella cujo lado he triplo do raio da base.

A demonstração he como a antecedente, *mutatis mutandis*.

721. A superficie S da pyramide conica recta he composta da superficie curva s descrita por UT, e do circulo descrito por AT, na revolução sobre o eixo AU. Assim he

$$S = s + \pi \overline{AT}^2.$$

Mas he o volume

$$V = \frac{1}{3} s \times AE;$$

logo

$$\frac{S \times AE}{3} = V + \frac{V \times AE}{AU}.$$

Logo se $UT = 3AT$, isto he,

$$AE = \frac{4}{3} CD, \text{ e } AU = 4CD,$$

teremos

$$S \times CD = 3V.$$

Assim, sendo S constante, V augmenta com CD; e sendo V constante, S diminue quando CD augmenta.

722. Nas hypotheses do § 719, o volume da pyramide conica he pois maior.

723. E a superficie menor.

724. A esphera he maior do que o polyedro de igual superficie.

Está demonstrado, que o polyedro maximo, entre os de igual superficie, deve ter centro de faces, ou deve ser circumscriptivel a huma esphera.

Assim pondo este centro do polyedro no da esphera proposta, a sua superficie cortará a da esphera; porque aliás ou seria maior se involvesse a da esphera, ou menor se fosse envolvida, contra a hypothese. Logo o seu catheto he menor do que o raio da esphera, e por consequencia o seu volume tambem menor.

725. A esphera tem menor superficie do que o polyedro igual.

Dos polyedros iguaes, o que tem menor superficie têem centro de faces; logo corta com a sua superficie a da esphera igual, e o seu catheto he menor que o raio da esphera; logo he preciso que o outro factor do volume seja maior, isto he, que a superficie do polyedro seja maior que a da esphera.

LIVRO 8.º

Applicação do algorithmo dos senos á geometria espherica

726. Achar a relação entre os tres lados e hum angulo do triangulo espherico.

1.º caso. Seja ABC o triangulo espherico, e primeiramente sejão os lados AB, AC cada hum $< 90°$. Seja D o centro da esphera. Tirem-se as tangentes AE, AF dos arcos AB, AC, e as suas secantes DE, DF; e a recta EF. Fig. 245.

Será o angulo EAF formado pelas duas tangentes, a medida do diedro formado pelos planos dos lados, ou igual ao angulo BAC do triangulo espherico, e cada hum dos lados a medida respectiva dos angulos rectilineos que teem o vertice D.

Mas temos

$$\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 - 2\,AE \times AF \cos BAC,$$

e tambem

$$\overline{EF}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{DF}^2 - 2\,DE \times DF \cos BC,$$

sendo 1 o raio da esphera. Tirando a primeira equação da segunda, teremos

$$1 + AE \times AF \cos BAC - DE \times DF \cos BC = 0;$$

logo

$$1 + \frac{\text{sen } AB}{\cos AB} \times \frac{\text{sen } AC}{\cos AC} \cos BAC$$

$$= \frac{1}{\cos AB} \times \frac{1}{\cos AC} \cos BC,$$

ou

$$\cos BC = \cos AB . \cos AC$$

$$+ \text{sen } AB . \text{sen } AC . \cos BAC.$$

Fig. 246. 2.° caso. Se for cada hum dos lados AB, $AC > 90°$, então o triangulo subsupplementario BCD estará no primeiro caso, e teremos

$$\cos BC = \cos BD \cos CD + \text{sen } BD.,$$

$$\text{sen } CD . \cos D.$$

$$= (-\cos AB)(-\cos AC) + \text{sen } AB . \text{sen } AC . \cos A,$$

$$= \cos AB . \cos AC + \text{sen } AB . \text{sen } AC . \cos A.$$

3.° caso. Se for $AB > 90°$, e $AC < 90°$; então no subsupplementario AEC, será $AE < 90°$, e logo teremos

$$\cos EC = \cos AE . \cos AC +$$

$$\text{sen } AE . \text{sen } AC . \cos EAC = -\cos BC.$$

$$= (-\cos AB) \cos AC +$$

$$\text{sen } AB . \text{sen } AC (-\cos BAC);$$

logo

$$\cos BC = \cos AB . \cos AC +$$

$$\text{sen } AB . \text{sen } AC . \cos BAC.$$

4.° caso. Se for $AC = 90°$, e $AB > 90°$; tome-se AF

$=90°$, e tire-se o arco CF. Será CF a medida de BAC, e $BFC=90°$.

Assim, se for $CF \gtrless 90°$, teremos no triangulo CBF.

$$\cos CB = \cos BF . \cos CF = \operatorname{sen} AB . \cos BAC;$$

e a esta ultima formula se reduz

$$\cos CB = \cos AB . \cos AC$$

$$+ \operatorname{sen.} AB . \cos. BAC . \operatorname{sen.} AC.$$

E sendo $CF=90°$, ou $BAC=90°$, será tambem $CB=90°$; o que não contraría a mesma formula, porque a reduz a $0=0$.

5.° caso. Se for $AC=90°$, e $AB<90°$; então no subsupplementario CBD, a mesma primeira formula he verdadeira, e logo tambem o será no triangulo proposto.

6.° caso. Se for cada hum $=90°$; então a formula se reduz a

$$\cos BC = \cos BAC,$$

como he com effeito.

Chamando pois A, B, C aos angulos, e a, b, c aos lados respectivamente oppostos, teremos sempre no triangulo espherico.

$$(1) \ldots . \cos c = \cos a . \cos b + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b . \cos C;$$

e mais duas formulas similhantes.

727. Achar a relação entre os tres angulos, e hum lado do triangulo espherico.

Sejão A', B', C' os angulos, e a', b', c' os lados oppostos do triangulo supplementario do proposto, respectivos aos lados e aos angulos do proposto; teremos

$$\cos c' = \cos a'.\cos b' + \operatorname{sen} a'.\operatorname{sen} b'.\cos C',$$

isto he,

$$\cos(180° - C) = \cos(180° - A)\cos(180° - B)$$

$$+ \operatorname{sen}(180° - A)\operatorname{sen}(180° - B)\cos(180° - c);$$

ou

$$-\cos C = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B\cos c,$$

ou

$$(2) \ldots\ldots \cos, C = \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B.\cos. c - \cos. A.\cos. B;$$

e mais duas formulas similhantes.

728. Achar a relação entre dois lados e os seus angulos oppostos no triangulo espherico.

Da formula (1) tira-se

$$\cos.^2 C = \frac{\cos^2 c + \cos^2 a.\cos^2 b - 2\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b.};$$

logo

$$\operatorname{sen}^2 C = 1 - \cos^2 C$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a.\cos^2 b + 2\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b) - \cos^2 c - \cos^2 a.\cos^2 b}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b.}$$

$$+ \frac{2\cos a.\cos b.\cos c}{\operatorname{sen}^2 a.\operatorname{sen}^2 b.};$$

logo

$$\operatorname{sen}^2 C =$$

$$\frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}{\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b\operatorname{sen}^2 c}\operatorname{sen}^2 c = N.\operatorname{sen}^2 c;$$

da mesma maneira se acha

$$\operatorname{sen}^2 A = N.\operatorname{sen}^2 a,$$

por ser N huma funcção symetrica de a, b, c, ou que fica invariavel, em qualquer permutação que se faça entre estas quantidades; logo teremos

$$(3) \ldots\ldots \operatorname{sen} C . \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} c;$$

e mais duas formulas similhantes. Isto he, nos triangulos esphericos, os senos dos lados são proporcionaes aos senos dos angulos oppostos.

729. Achar a relação entre dois lados, e dois angulos não oppostos ambos, no triangulo espherico.

Eliminando cos C por meio das equações (1), (2), resulta

$$\cos c = \cos a . \cos b + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B . \cos . c$$

$$- \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} b . \cos . A . \cos B;$$

e expulsando d'esta sen b, por meio da equação,

$$\operatorname{sen} a . \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b . \operatorname{sen} A,$$

similhante á equação (3), teremos

$$\cos c = \cos a . \cos b + \operatorname{sen}^2 a . \operatorname{sen}^2 B \cos c$$

$$- \operatorname{sen}^2 a . \operatorname{sen} B . \cot A . \cos B,$$

da qual eliminando cos b, por meio de

$$\cos b = \cos a . \cos c + \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos B,$$

similhante á equação (1), virá

$$\cos c = \cos^2 a . \cos c + \cos a . \operatorname{sen} a . \operatorname{sen} c . \cos B$$

$$+ \operatorname{sen}^2 a . \operatorname{sen}^2 B . \cos c - \operatorname{sen}^2 a . \operatorname{sen} B . \cot A . \cos B,$$

que, por ser

$$\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a, \text{ e } \operatorname{sen}^2 B = 1 - \cos^2 B,$$

MM

se reduz emfim a

$$(4) \ldots\ldots \operatorname{sen} c.\cot a = \cos c.\cos B + \operatorname{sen} B.\cot A;$$

com mais cinco formulas similhantes, que são sujeitas á regra, que — de quatro partes consecutivas do triangulo espherico, o producto dos consenos de duas medias, he igual ao producto do seno do lado medio pela contangente do lado extremo, menos o producto do seno do angulo medio pela cotangente do angulo extremo.

730. Achar no triangulo espherico rectangulo a relação entre tres partes, não comprehendido o angulo recto.

Se nas equações (1), (2), (3), e em

$$\operatorname{sen} b.\cot c = \cos b.\cos A + \operatorname{sen} A.\cot C,$$

similhante á equação (4); e em

$$\cos A = \operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C.\cos a - \cos B.\cos C,$$

similhante á equação (2), se fizer em todas $C = 90°$, teremos

$$(5) \ldots\ldots \cos c = \cos a.\cos b.$$

$$(6) \ldots\ldots \cos c = \cot A.\cot B.$$

$$(7) \ldots\ldots \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} c.$$

$$(8) \ldots\ldots \cos A = \operatorname{tang} b.\cot c.$$

$$(9) \ldots\ldots \cos A = \operatorname{sen} B.\cos a.$$

A equação (5) he a relação entre a hypothenusa e os dois lados; a do n.° (7) a relação entre a hypothenusa, um lado, e o angulo opposto; a do n.° (8) a relação entre a hypothenusa, um lado, e o angulo não opposto; a do n.° (6) a relação entre a hypothenusa, e os dois angulos obliquos; e a do n.º (9) a relação entre hum lado, e os angulos obliquos. Estas são todas as relações possiveis.

Considerando no triangulo espherico $A\,B\,C$ rectangulo em C, em vez dos lados do angulo recto, os seus complementos $90°-a$, $90°-b$, e depois o angulo A, a hypothenusa c, o angulo B, por esta mesma ordem; e chamando media a huma qualquer d'estas cinco partes, a respeito de duas que lhe estejão mais proximas e chamadas conjunctas; e a respeito de duas mais distantes e chamadas separadas; facilmente se vê, que se satisfaz ás ultimas cinco equações pelas duas regras seguintes: Fig. 247.

(10)...... coseno da media = producto

dos senos das separadas,

(11)...... coseno da media = producto

das cotangentes das conjunctas;

Estas duas regras bastão para a resolução completa do triangulo espherico rectangulo, quando alem do angulo recto são dadas duas das suas partes; e a solução só se torna ambigua, quando a parte procurada se acha por meio do seu seno, como acontece sempre no caso das equações (7) e (9), quando se procura B.

O caso mesmo de ser A recto, não lhe tira a indeterminação, mas sim a augmenta, fazendo-a passar de dual a infinita; porque no triangulo birectangulo, e por consequencia birectilatero, o terceiro angulo B, ou o terceiro lado b póde ser o que se quizer.

731. Resolver os triangulos esphericos obliquangulos, por meio das taboas dos logarithmos dos senos.

1.º caso. Sendo dados os tres lados, achar qualquer dos angulos.

A formula (1) dá

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

$$=1-2\,\text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,C=2\cos^2\tfrac{1}{2}\,C-1;$$

logo

$$(12)\ldots\ldots\ \text{sen}^2\,\tfrac{1}{2}\,C=\frac{\text{sen}\,a.\,\text{sen}\,b+\cos a.\cos b-\cos c}{2\,\text{sen}\,a.\,\text{sen}\,b}$$

$$=\frac{\cos(a-b)-\cos c}{2\,\text{sen}\,a.\,\text{sen}\,b}$$

$$=\frac{\text{sen}\,\frac{a-b+c}{2}.\,\text{sen}\,\frac{-a+b+c}{2}}{\text{sen}\,a.\,\text{sen}\,b}$$

$$=\frac{\text{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\text{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)}{\text{sen}\,a.\,\text{sen}\,b}.$$

Logo tambem

$$(13)\ldots\ldots\ \cos^2\tfrac{1}{2}\,C=\frac{\cos c+\text{sen}\,a.\,\text{sen}\,b-\cos a.\cos b}{2\,\text{sen}\,a.\,\text{sen}\,b}$$

$$=\frac{\cos c-\cos(a+b)}{2\,\text{sen}\,a.\,\text{sen}\,b}$$

$$=\frac{\text{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}{\text{sen}\,a.\,\text{sen}\,b}.$$

Esta ultima solução he a mais conveniente, quando $\frac{1}{2}\,C$ he muito pequeno; e he sempre a mais expedita, para evitar huma subtracção.

Da divisão da equação (12) pela equação (13), resulta

$$(14)\ \ldots\ \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\,C=\frac{\text{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\text{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)}{\text{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\text{sen}\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}$$

menos expedita ainda do que a do n.º (12), mas sem ter outro inconveniente.

2.º caso. Com os tres angulos, achar um lado qualquer.

A formula (2) dá

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A . \cos B}{\operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c$$

$$= 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} c - 1 ;$$

logo

$$(15) \ldots\ldots \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B - \cos A . \cos B - \cos C}{2 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B}$$

$$= \frac{-\cos(A+B) - \cos C}{2 \operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B}$$

$$= \frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right)}{\operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B}.$$

O numerador d'esta fracção he positivo, porque

$$\frac{A+B+C}{2} > 90^\circ, \text{e} < 3 \times 90^\circ ;$$

logo $\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)$ he negativo; e tambem porque sendo $180^\circ - A > B - C$, temos $90^\circ > \frac{A+B-C}{2}$, e por consequencia $\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right)$, ou $\cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right)$ he positivo.

Com igual facilidade se deduz

$$(16) \ldots \cos^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - A\right) \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right)}{\operatorname{sen} A . \operatorname{sen} B} ;$$

e dividindo a equação (15) pela (16), teremos

$$(17) \ldots \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right)}{\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - A\right) \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right)}.$$

A formula (15) poderia deduzir-se da equação (13), por meio do triangulo supplementario; e da mesma maneira a equação (16) da equação (12). A formula (14) sendo applicada ao supplementario, dá para o proposto

$$(18)\ldots \cot^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - A\right)\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - B\right)}{\cos\left(\frac{A+B+C}{2} - C\right)\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)},$$

reciproca da equação (17).

3.° caso. Com dois lados b, c, e o angulo comprehendido A; querendo conhecer o angulo C, abaixe-se de B o arco BD perpendicular sobre o lado b; e chame-se aos segmentos AD, DC respectivamente x, y. Então no triangulo rectangulo ADB, será A medio, a respeito dos dois conjunctos c, e $90° - x$. Logo

Fig. 248.

$$\cos A = \cot c . \cot (90° - x) = \cot c \tan g\, x;$$

o que faz conhecer x, e por consequencia $y = b - x$. Agora nos dois triangulos rectangulos, temos $90° - x$ media entre as conjunctas A, e $90° - BD$: e $90° - y$ media entre os conjunctas C, e $90° - BD$;

logo

$$\operatorname{sen} x : \operatorname{sen} y :: \cot A . \operatorname{tang} BD : \cot C . \operatorname{tang} BD :: \cot A : \cot C,$$

analogia que faz conhecer C.

Com os mesmos dados, querendo achar a directamente; temos nos mesmos triangulos rectangulos, c media entre as separadas $90° - x$, $90° - BD$; e a media entre as separadas $90° - y$, $90° - BD$;

logo

$$\cos c : \cos a :: \cos x . \cos BD : \cos y . \cos BD :: \cos x : \cos y,$$

analogia que faz conhecer a.

Sendo mais conveniente, depois de ter achado C póde procurar-se a pela equação (3); ou depois de ter achado a procurar C pela mesma equação (3).

Com os mesmos dados para achar B directamente, a construcção he similhante, abaixando o arco perpendicular de C sobre c, isto he, deve sempre attender-se a que haja, em hum dos triangulos rectangulos, duas das partes dadas, e hum dos segmentos da terceira. Advirta-se que se o arco perpendicular não póde encontrar b, então se deve escolher, ou suppor aquelle dos arcos perpendiculares, que está mais proximo de C, na continuação de b no sentido de C. N'este caso, será o segmento $x > b$, e o segmento $y = x - b$, em vez de $b - x$. Mas então o angulo que se acha logo he o supplemento de C; e teremos

$$\operatorname{sen} x : \operatorname{sen}(x - b) :: \cot A : \cot(180^\circ - C),$$

ou

$$\operatorname{sen} x : -\operatorname{sen}(b - x) :: \cot A : -\cot C,$$

ou

$$\operatorname{sen} x : \operatorname{sen}(b - x) :: \cot A : \cot C;$$

por consequencia ainda se deve subtrahir x de b, e o signal e valor que se obtiver para cot C, farão conhecer C.

Quanto ao angulo A, quer seja agudo ou obtuso, faça-se sempre uso do arco perpendicular que cahe dentro d'elle.

4.° caso. Com dois angulos, e o lado adjacente.

Para resolver o triangulo, recorra-se ao seu supplementario, no qual se conhecem dois lados, e o angulo comprehendido; e faça-se a resolução d'este como no caso precedente, e por consequencia se resolve o proposto com os supplementos das partes achadas no supplementario.

5.° caso. Com dois lados, e o angulo opposto a hum d'elles. Para achar o outro angulo opposto, serve a analogia (3), quando o problema he determinado, porque sendo este angulo procurado por meio do seno, he susceptivel de dois valores, cada hum $< 180°$, e que por isso podem ser angulos do triangulo espherico, e para excluir hum, he preciso que isso se consiga por alguma das condições (632), (635).

Para achar ou o terceiro angulo, ou o terceiro lado, abaixe-se do vertice commum aos dois lados communs, o arco perpendicular ao terceiro lado, que fique dentro do angulo dado. Então hum dos triangulos rectangulos formados d'esta maneira, tem duas partes dadas alem do angulo recto; logo póde achar-se ou o angulo obliquo adjacente ao lado conhecido, n'este triangulo rectangulo, ou o lado opposto a este mesmo angulo obliquo; e comparando depois os dois triangulos rectangulos, á imitação do que se fez no 3.° caso, *mutatis mutandis*, obter-se-ha a resolução pedida.

6.° caso. Com dois angulos, e o lado opposto a hum d'elles.

Acha-se o outro lado opposto pela analogia (3), quando o problema he determinado.

Para achar as outras duas partes, ou se recorre ao triangulo supplementario, ou se abaixa do extremo do lado dado, o arco perpendicular sobre o lado adjacente aos angulos dados, e comparam-se depois os triangulos rectangulos.

Fig. 249. 732. ABC he hum triangulo esphérico trirectilatero, e por conseguinte trirectangulo. Os arcos DA, DB, DC, assim como EA, EB, EC são dados, e pede-se o arco DE; isto he, são dados os angulos que duas rectas, partindo da intersecção de tres rectas perpendiculares entre si, fazem com estas, e pede-se o angulo das duas rectas. Temos

$$\cos ABD = \frac{\cos AD}{\operatorname{sen} BD},$$

e

$$\cos CBE = \frac{\cos CE}{\operatorname{sen} BE},$$

e

$$\cos DBE = \operatorname{sen}(ABD + CBE)$$

$$= \operatorname{sen} ABD . \cos CBE + \cos ABD . \operatorname{sen} CBE;$$

logo

$$\cos DE = \cos BD . \cos BE$$

$$+ \operatorname{sen} BD . \operatorname{sen} BE . \operatorname{sen} ABD . \cos CBE$$

$$+\text{sen } BD.\text{ sen } BE.\cos ABD.\text{ sen } CBE$$

$$=\cos BD.\cos BE+\text{sen } BD.\cos CE.\text{ sen } ABD$$

$$+\text{sen } BE.\cos AD.\text{ sen } CBE$$

$$=\cos BD.\cos BE+\cos CE.\text{ sen } AD.\cos DAC$$

$$+\cos AD.\text{ sen } CE.\cos ECA$$

$$=\cos BD.\cos BE+\cos CE.\cos DC$$

$$+\cos AD.\cos AE.$$

Se for $DE=0$, teremos

$$1=\cos^2 BD+\cos^2 DC+\cos^2 AD,$$

como já se achou (§ 459).

733. No tetraedro $ABCD$ trirectangulo em A, querendo achar o angulo diedro $ACBD$, que a face hypothenusa DBC faz com qualquer das outras ABC: temos o triedro $CDAB$, cujo diedro $DCAB$ he recto. Logo o triangulo espherico rectangulo, que lhe corresponde dá Fig. 250.

$$\text{sen } BCA=\text{tang} ACD.\cot ACBD.$$

Similhantemente, teremos

$$\text{sen } CBA=\cos BCA=\text{tang}.\ DBA.\cot ACBD.$$

Ponhamos $AC=x$; $AB=y$; $AD=z$; será

$$\text{sen } BCA=\frac{z}{x}\cot ACBD,$$

$$\cos BCA=\frac{z}{y}\cot ACBD.$$

NN

Logo

$$\operatorname{sen}^2 BCA + \cos^2 BCA = 1 =$$

$$\left(\frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2}\right) \cot^2 ACBD;$$

$$\operatorname{tang}^2 ACBD = \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2};$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 ACBD}{\cos^2 ACBD} + 1 = \frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + 1;$$

$$\cos^2 ACBD = \frac{1}{\frac{z^2}{x^2} + \frac{z^2}{y^2} + 1}.$$

734. Calcular os diedros dos polyedros regulares.

Como n'estes polyedros, os angulos solidos são regulares, Fig. 122. podemos representar qualquer d'elles pelo angulo solido A; e porque os extremos B, C, D, E, *etc.*, das arestas iguaes de A, estão todos em hum plano, segue-se que este plano faz com as faces angulos triedros, de que os mesmos extremos são os vertices, e ao mesmo tempo os de hum polygono regular $BCDE$, etc. Assim para achar hum dos diedros $CABE$ do polyedro regular, ponha-se B no centro da esphera, cujo raio seja 1, e teremos

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\, CBE}{\operatorname{sen}(ABC - \frac{1}{2}\, CBE)\operatorname{sen}(ABC + \frac{1}{2}\, CBE)}.$$

Seja n o numero de lados de huma das faces do polyedro regular, e m o numero das faces de hum dos seus angulos solidos, ou o numero de lados do polygono regular $BCDE$, *etc.*

Teremos

$$(19)\ldots\ldots \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{m-2}{m}.90^\circ\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{m-2}{m}.90^\circ\right)\operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{m-2}{m}.90^\circ\right)}.$$

No tetraedro, temos $n=3$, $m=3$;

logo

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 30^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE + 1 = \sec^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \tfrac{3}{2},$$

ou

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{2}{3} = \frac{1+\cos CABE}{2};$$

logo

$$\cos CABE = \tfrac{1}{3} = \cos 70^\circ \text{»} 32', \text{ valor approximado.}$$

No hexaedro, temos $n=4$, $m=3$;

logo

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 30^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ . \operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\cos 60^\circ}{2}} = 1;$$

logo

$$CABE = 90^\circ$$

No octaedro, temos $n=3$, $m=4$;

logo

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 45^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ . \operatorname{sen} 75^\circ} = 2;$$

$$\sec^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = 3;\ \cos^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{1}{3} = \frac{1+\cos CABE}{2};$$

logo

$$\cos CABE = -\tfrac{1}{3} = \cos 109^\circ \text{»} 28', \text{ valor aproximado.}$$

No dodecaedro, temos $n=5$, $m=3$;

logo

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 30^\circ}{\operatorname{sen} 6^\circ .\ \operatorname{sen} 66^\circ} = \frac{1}{2(\cos 60^\circ - \cos 72^\circ)}$$

$$= \frac{1}{1-2\cos 72^\circ} = \frac{1}{1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4};$$

logo

$$\operatorname{tang} CABE = \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2} CABE}{1-\tan^2\frac{1}{2}\, CABE} = \frac{1+\sqrt{5}}{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})} = -2$$

$$= \operatorname{tang} 116^\circ \text{ » } 34', \text{ valor aproximado.}$$

No icosaedro, temos $n=3$, $m=5$;

logo

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{\operatorname{sen}^2 54^\circ}{\operatorname{sen} 6^\circ .\ \operatorname{sen} 66^\circ} = \frac{4\operatorname{sen}^2 54^\circ}{1-2\cos 72^\circ}$$

$$= \frac{2+2\cos 72^\circ}{1-2\cos 72^\circ} = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{(1-\sqrt{5})^2};$$

$$\sec^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{12}{(1-\sqrt{5})^2};$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\, CABE = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{12};$$

$$\cos CABE = 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\, CABE - 1 = -\tfrac{1}{3}\sqrt{5};$$

$$\operatorname{sen}^2 CABE = 1 - \tfrac{5}{9} = \tfrac{4}{9};$$

logo

$$\operatorname{sen} CABE = \tfrac{2}{3} = \operatorname{sen} 138^\circ \text{ » } 12', \text{ valor aproximado.}$$

735 Achar o catheto de cada hum dos polyedros regulares, ou, o que he o mesmo, o raio da esphera inscrita.

Porque as faces dos polyedros regulares são polygonos regulares identicos em cada hum, segue-se que o apothema a (HI) de qualquer d'estes polygonos, e a metade (IE) de huma das arestas do polyedro, são os lados do angulo recto de hum triangulo rectangulo, no qual o angulo opposto a a (IEH) he metade de um dos angulos do polygono; Fig. 254.
logo teremos $a = \frac{1}{2}$ tang $\frac{n-2}{n} \cdot 90°$. Porque o catheto c (FH) e a são lados do angulo recto d'outro triangulo rectangulo, no qual o angulo $a\,c$ (HIF) he metade do diedro D $(DAEB)$, teremos tambem

$$c = a.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2} D = \tfrac{1}{2}\ \text{tang}\ \frac{n-2}{n}.\ 90°.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2} D$$

$$= \tfrac{1}{2} \cot \frac{180°}{n}.\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2} D.$$

736. Achar o raio dos vertices nos polyedros regulares, ou o que he o mesmo, o raio da esphera circumscrita a cada hum d'elles.

Seja r (HE) a hypothenusa do triangulo, de que $\frac{l}{2}$, c são lados; será

$$r = \frac{\frac{1}{2} l}{\cos \frac{n-2}{n}\ 90°} = \frac{\frac{1}{2} l}{\text{sen}\ \frac{180°}{n}};$$

e o raio pedido, (FE) ou

$$R = \sqrt{c^2 + r^2} = \frac{\frac{1}{2} l}{\text{sen}\ \frac{180°}{n}} \sqrt{1 + \cos^2 \frac{180°}{n}\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2} D.}$$

737. No tetraedro temos

$$c = \frac{l}{2} \sqrt{\tfrac{1}{2} \cot 60°};\ r = \frac{\frac{1}{2} l}{\text{sen}\ 60°};$$

logo

$$R^2 = c^2 + \frac{2\,c^2}{\cos^2 60°} = 9\,c^2;\ \text{ou}\ R = 3\,c.$$

No hexaedro,

$$c = \frac{l}{2} \cot 45^\circ,$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} l}{\operatorname{sen} 45^\circ};$$

logo

$$R^2 = c^2 + \frac{\frac{1}{4} l^2}{\operatorname{sen}^2 45^\circ} = 3\, c^2$$

No octaedro,

$$c' = \frac{l'}{2} \sqrt{2} \cot 60^\circ,$$

$$r' = \frac{l'}{\operatorname{sen} 60^\circ};$$

logo

$$R'^2 = c'^2 + \frac{\frac{1}{4} l'^2}{\operatorname{sen}^2 60^\circ} = 3\, c'^2.$$

De sorte que se o hexaedro, e o octaedro teem as mesmos cathetos c, c', teem tambem os mesmos raios de vertices; e reciprocamente.

No dodecaedro,

$$c = \frac{\frac{1}{2} l}{2} (1 + \sqrt{5}) \cot 36^\circ,$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} l}{\operatorname{sen} 36^\circ};$$

logo

$$R^2 = c^2 + \frac{\frac{1}{4} l^2}{\operatorname{sen}^2 36^\circ} = c^2 + \frac{4\, c^2}{(1 + \sqrt{5})^2 \cos^2 36^\circ}$$

$$= c^2 + \frac{4^3\, c^2}{(1 + \sqrt{5})^4}.$$

No icosaedro,

$$c' = \frac{l'}{2} \frac{1 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} \cot 60^\circ,$$

$$r' = \frac{\frac{1}{2} l'}{\text{sen } 60^\circ};$$

logo

$$R'^2 = c'^2 + \frac{\frac{1}{4} l'^2}{\text{sen}^2 60^\circ} = c'^2 + \frac{(1-\sqrt{5})^2 c'^2}{(1+\sqrt{5})^2 \cos^2 60^\circ}$$

$$= c'^2 + \frac{4(1-\sqrt{5})^2 c'^2}{(1+\sqrt{5})^2} = c'^2 + \frac{4^3 c'^2}{(1+\sqrt{5})^4}.$$

De sorte que se o dodecaedro, e o icosaedro teem os mesmos cathetos c, c', teem tambem os mesmos raios de vertices; e reciprocamente.

738. Sendo dadas as arestas de hum tetraedro qualquer, calcular a sua altura sobre huma das bases.

Supponhamos AE esta altura. Seja CE a projecção de huma aresta CA sobre a mesma base. Fig. 255.

Com as arestas dadas se calculão os angulos das faces, ou se medem. Com os angulos das faces se calculão os diedros do tetraedro, ou se medem. Assim no triedro $CAED$, temos o diedro $ACED$ recto, o diedro $ECDA$ conhecido, e tambem o angulo ACD. Logo, pondo C no centro da esphera do raio 1, corresponderá a este triedro hum triangulo espherico rectangulo, no qual são dados a hypothenusa c, e hum angulo obliquo A. Logo, querendo conhecer a, teremos sen a = sen A. sen c. O arco he a medida do angulo ACE; assim teremos, no triangulo rectangulo ACE, a altura pedida

$$AE = AC \text{ sen } a.$$

739. Sendo dadas as arestas de um tetraedro qualquer, achar o seu catheto, ou raio da esphera inscrita.

Calculem-se todas as faces do tetraedro; chame-se f á sua somma, b á base, h á altura do tetraedro, e r ao catheto procurado.

O centro das faces, ou origem dos cathetos he o vertice commum de quatro tetraedros, cujas bases são as faces do proposto, e que tomadas juntas compõem o proposto; logo teremos

$$\frac{1}{3}\int r = \frac{1}{3}\, b\, h;$$

logo r ficará conhecido.

740. Com os mesmos dados, calcular o raio R do tetraedro, ou o raio da esphera circumscrita.

Fig. 128. Pelo theorema (§ 332,) sendo AB, AC, AD as metades das arestas do mesmo nome do tetraedro actual (Fig. 255), o ponto de concurso E dos tres planos perpendiculares sobre ellas nos pontos B, C, D, determina a distancia R entre E e A.

Este tetraedro supposto $ABCD$ he similhante ao proposto, porque tem todas as arestas semiduplas das arestas do ultimo; logo são conhecidas estas, os seus angulos, e os diedros dos seus planos; e tambem no triedro $EFGH$, são conhecidos os diedros e os angulos, por serem os supplementos respectivos das partes do triedro $ABCD$.

Chamando pois α ao lado BC, e β ao angulo ABC, não descritos, e δ ao angulo CFB supplemento de BAC; e por ser ABF recto, teremos

$$\text{sen}\,\delta : \cos\beta :: \alpha : CF = \frac{\alpha \cos\beta}{\text{sen}\,\delta}.$$

Similhantemente, acharemos

$$CG = \frac{CD \cos ADC}{\text{sen}\, CAD} = \frac{\alpha' \cos\beta'}{\text{sen}\,\delta'}.$$

No triangulo supposto FCG, no qual o angulo FCG ou Δ he a medida do diedro $BACD$ do tetraedro, temos

$$FG = \sqrt{\overline{FC}^2 + \overline{CG}^2 - 2\,\overline{FC} \times \overline{CG}.\cos\Delta};$$

e por consequencia póde-se achar o angulo CFG, pela analogia

$$FG : CG :: \text{sen}\,\Delta : \text{sen}\, CFG = \frac{CG\, \text{sen}\,\Delta}{FG}.$$

No triangulo GFE he GFE complemento de CFG, e GEF supplemento de FCG; logo

$$\operatorname{sen}\Delta : \cos CFG :: FG : EG = \frac{FG \cos CFG}{\operatorname{sen}\Delta}.$$

No triangulo rectangulo CGE, temos

$$\overline{CE}^2 = \overline{CG}^2 + \overline{EG}^2;$$

e no triangulo rectangulo ACE, temos

$$R^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CE}^2$$

$$= \overline{AC}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{EG}^2$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{\alpha'^2 \cos^2 \mathfrak{C}'}{\operatorname{sen}^2 \delta'} + \frac{FG^2 \cos^2 CFG}{\operatorname{sen}^2 \Delta}$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{\alpha'^2 \cos^2 \mathfrak{C}'}{\operatorname{sen}^2 \delta'} + \frac{\overline{FG}^2 \left(1 - \frac{CG^2 \operatorname{sen}^2 \Delta}{FG^2}\right)}{\operatorname{sen}^2 \Delta}$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{\alpha'^2 \cos^2 \mathfrak{C}'}{\operatorname{sen}^2 \delta'} + \frac{\overline{FG}^2}{\operatorname{sen}^2 \Delta} - \overline{CG}^2$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{\overline{FC}^2 + \overline{CG}^2 - 2\, FC \times CG . \cos \Delta}{\operatorname{sen}^2 \Delta}$$

$$= \overline{AC}^2 + \frac{\frac{\alpha^2 \cos^2 \mathfrak{C}}{\operatorname{sen}^2 \delta} + \frac{\alpha'^2 \cos^2 \mathfrak{C}'}{\operatorname{sen}^2 \delta'} - \frac{2\, \alpha\, \alpha' \cos \mathfrak{C} \cos \mathfrak{C}'}{\operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\delta'} \cos \Delta}{\operatorname{sen}^2 \Delta}$$

Passando agora ao tetraedro proposto, teremos Fig. 255.

$$R^2 = \frac{1}{4}\overline{AC}^2 + \frac{\frac{\overline{BC}^2 . \cos^2 ABC}{4 \operatorname{sen}^2 BAC} + \frac{\overline{CD}^2 . \cos^2 ADC}{4 \operatorname{sen}^2 CAD}}{\operatorname{sen}^2 BACD}$$

$$- \frac{\frac{2\, BC \times CD \cos ABC \cos ADC}{4 \operatorname{sen} BAC \operatorname{sen} CAD} \cos BACD}{\operatorname{sen}^2 BACD}$$

741. Achar os diedros dos polyedros semiregulares.

Nos sete primeiros, poisque os seus angulos solidos são triedros com os angulos conhecidos de polygonos regulares, o calculo dos diedros se reduz ao dos angulos dos triangulos esphericos, cujos lados são dados.

E he de advertir, que no 3.°, 4.°, 5.°, 6.° e 7.° não he preciso calcular os diedros formados pelos polygonos inscritos, na construcção que se fez d'estes polyedros semiregulares; porque estes diedros são os mesmos que os dos polyedros regulares, de que provém os mencionados polyedros semiregulares. Tambem, como em cada hum d'estes mesmos polyedros semiregulares entrão só duas especies de polygonos, basta calcular hum só dos outros dois diedros do triedro.

Nos polyedros semiregulares 1.° e 2.°, o diedro formado pelo polygono inscrito e hum dos quadrados introduzidos na sua construcção, he supplemento de hum diedro, que he (§ 348) elle mesmo metade do supplemento do diedro do solido regular de que deriva; porque a intersecção dos planos dos ditos polygonos inscritos, he parallela aos lados dos mesmos polygonos, que estavão antes unidos ao solido regular; e he ao mesmo tempo a aresta de hum diedro igual ao solido regular primitivo.

Nos polyedros semiregulares 10.° e 11.°, cujos angulos solidos são tetraedros symetricos, com todos os diedros iguaes; o triedro formado em hum dos vertices pela aresta do solido regular primitivo, e por dois lados dos polygonos inscritos, tem dois angulos conhecidos, que são os formados por esta aresta e os ditos lados, alem do diedro compreendido, que he o mesmo do solido regular. Assim, póde achar-se hum dos outros diedros, cujo supplemento será o diedro do solido semiregular.

Nos polyedros semiregulares 8.° e 9.°, cujos angulos solidos são tetraedros, conhecemos os seus angulos, e dois diedros em cada hum, que são formados por huma face primitiva e os quadrados introduzidos, e cada hum dos quaes he supplemento da metade do supplemento do diedro do solido regular, de que deriva. Assim, a questão se reduz á resolução de hum quadrilatero espherico, no qual são dados dois angulos e os quatro lados; o que póde obter-se, dividindo o quadrilatero em dois triangulos esphericos de huma maneira qualquer, pois teremos sempre, em hum dos triangulos, hum angulo conhecido, com os lados que o comprehendem.

Nos polyedros semiregulares 12.° e 13.°, cujos angulos solidos são pentaedros, conhecemos os angulos, e dois diedros em cada hum, formados por huma face primitiva e os triangulos introduzidos; e estes diedros são cada hum supplemento do angulo de hum triangulo formado pelas continuações dos raios e do apothema de duas faces primitivas, e pelo diedro do solido regular de que deriva. Assim a questão se reduz á resolução de hum pentagono espherico, de que são dados os lados e dois angulos, e que póde obter-se dividindo-o em tres triangulos esphericos, de maneira que hum d'estes triangulos tenha hum dos angulos dados.

742. Achar o catheto das faces do mesmo nome dos polyedros semiregulares.

Pelo centro do solido regular primitivo, de que o semiregular deriva, tire-se hum plano perpendicular sobre hum lado das faces do mesmo nome. A intersecção d'este plano com a superficie do solido semiregular, será hum polygono de que os lados serão as alturas das faces do solido, e os angulos serão cada hum a medida de algum dos seus diedros; por consequencia pódem achar-se os cathetos das faces, que são, n'este polygono, os apothemas dos lados iguaes.

743. Achar o raio, nos polyedros semiregulares.

Com a projecção do raio sobre huma das faces isto he o raio d'ella, e com o catheto d'esta face, como lados de hum triangulo rectangulo, busque-se a hypothenusa, que será o raio pedido.

744. Com taes triangulos póde tambem achar-se a inclinação do raio do polyedro semiregular sobre qualquer das faces, e tambem o angulo que elle faz com o catheto.

Maximos e minimos dos polygonos esphericos

745. Dos triangulos da mesma base e perimetro, o isosceles he o maior, e tem maior o angulo opposto á base.

Fig. 251. Porque os dois triangulos ABC, ADC sobre a mesma base têem igual perimetro, e o primeiro he isosceles; será $ACD > DAC$; logo $AD > DC$; logo $AD > AB > DC$, e $AE > EC$.

Digo que he $DE < BE$. Porque, se he possivel, seja $EF = ED$. Tome-se $EG = EC$, e tire-se FG.

Os triangulos DEC, EFG terão as partes iguaes entre si; logo $FG = DC$. Mas

$$AG + GE + ED + DC = AB + BE + EC,$$

isto he,

$$AG + GE + EB + FB + DC \text{ (ou } FG)$$

$$= AB + BE + EC;$$

logo tirando d'esta equação

$$GE + EB = EB + EC,$$

resulta

$$AG + FG + FB = AB:$$

absurdo, porque toda a linha da superficie da esphera, terminada em A e B, he $>$ arco AB.

Similhantemente, se prova que não he $ED = EB$, porque chegariamos ao absurdo

$$AG + GB = AB.$$

Logo o triangulo

$$DEC < ABE,$$

e logo, juntando a ambos AEC, resulta

$$\text{triang. } ADC < ABC.$$

O angulo B do triangulo isosceles será $> D$, se fôr

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} B > \operatorname{sen}^2 D,$$

ou se, sendo p o semiperimetro, fôr

$$\frac{\operatorname{sen}^2 (p - AB)}{\operatorname{sen}^2 AB} > \frac{\operatorname{sen}(p - AD)\operatorname{sen}(p - DC)}{\operatorname{sen} AD \operatorname{sen} DC};$$

ou se fôr

$$\operatorname{sen}^2 \left(p - \frac{AD + DC}{2}\right) \operatorname{sen} AD \operatorname{sen} DC >$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{AD + DC}{2} \operatorname{sen}(p - AD)\operatorname{sen}(p - DC);$$

ou se fôr

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} AC (\cos(AD - DC) - \cos(AD + DC))$$

$$> \operatorname{sen}^2 \frac{AD + DC}{2} (\cos(AD - DC) - \cos AC);$$

ou se fôr

$$(1 - \cos AC)(\cos(AD - DC) - \cos(AD + DC))$$

$$> (1 - \cos(AD + DC))(\cos(AD - DC) - \cos AC);$$

ou se fôr

$$\cos AC (1 - \cos(AD - DC))$$

$$> \cos(AD + DC)(1 - \cos(AD - DC));$$

ou se fôr

$$\cos AC > \cos(AD + DC),$$

como he com effeito, por ser

$$AC < AD + DC,$$

e

$$AC + AD + DC < 360°.$$

746. Com dois lados dados, cuja somma igual seja $<$ $180°$, o maior triangulo espherico que se póde fazer, será aquelle, em que o angulo compreendido pelos lados dados, he igual á somma dos outros dois.

Fig. 252. Se me dizem que existe outro triangulo ABC maior, com os mesmos lados AB, AC, taes que $AB + AC <$ $180°$; então tiro de A para o meio D, do terceiro lado o arco AD.

Fig. 253. Agora digo que sobre a mesma base AB, e com o perimetro $ABE = ABD$, póde formar-se o triangulo isosceles $ABE > ABD$; e similhantemente o triangulo isosceles $ACE > ACD$, sobre a base AC e com o mesmo perimetro; e que o lado AE póde ser commum aos dois triangulos isosceles, porque AE he a semisomma de AD e BD, e ao mesmo tempo de AD e CD.

O angulo $BECA$, composto dos dois BEA, CEA, é $> 180°$, porque

$$BEA > BDA,\ CEA > CDA,$$

e

$$BDA + CDA = 180°.$$

Logo $ABEC$ he hum quadrilatero espherico maior que o triangulo proposto ABC (Fig. 252).

Fig. 252. O arco AD he $< 90°$, porque produzindo-o da quantidade igual DF, e tirando o arco CF, far-se-ha o triangulo DCF igual a ADB; e se AD fosse $\geqq 90°$, sería

$$AF \geqq 180;$$

logo

$$\text{o angulo } FCAD \geqq 180^\circ,$$

isto he

$$B + ACB \geqq 180^\circ,$$

contra a hypothese. Logo o

$$\text{arco } BE = EC < 90:$$

logo o

$$\text{arco } BC < 180^\circ;$$ Fig. 253.

logo o triangulo

$$ABC > \text{quadrilatero } ABEC > ABC \text{ (Fig. 252)}.$$

Logo sómente ABC he hum maximo, quando

$$BD = DC = AD;$$ Fig. 252.

e n'este caso,

$$\text{o angulo } B = BAD,$$

e

$$ACB = CAD,$$

ou

$$BAC = B + ACB.$$

747. Com as mesmas condições, o menor triangulo gibboso que se póde formar, he aquelle, em que o angulo comprehendido pelos lados dados he igual á somma dos outros dois; o que se vê, reflectindo que hum triangulo ordinario e o gibboso, que tem dois lados communs entre si, formão hum hemispherio, e contemplando tambem a relação entre seus angulos.

748. De todos os polygonos esphericos descritos em hum triangulo trirectangulo, e formados pelos lados dados, e hum ultimo á vontade; o maior he aquelle que tem os vertices na circumferencia de hum circulo menor da esphera, cujo polo esteja sobre o lado arbitrario.

A demonstração póde deduzir-se da ultima proposição, assim como da proposição do § 205 se deduziu a do § 208; porque, pela primeira condição, os arcos dois a dois da proposição e demonstração formão sempre huma somma $<180°$.

749. De todos os polygonos esphericos descritos na zona de hum segmento, cuja circumferencia da base toque os tres lados do triangulo trirectangulo, e formados por lados todos dados, o maior he aquelle que tem todos os vertices sobre a circumferencia de hum circulo menor.

Para a demonstração, vamos imitar o que se fez no § 209, e empregar a mesma fig. 81, concebendo que as rectas são agora arcos de circulos maximos.

Fig. 81. Seja pois $A\,B\,C\,D\,E\,F\,G$ hum polygono espherico, com todos os vertices na circumferencia determinada por tres de entre si; e $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$ outro, com os mesmos lados; e supponhão-se ambos descritos na dita zona ou em zonas iguaes a ella.

Digo que o primeiro polygono he maior do que o segundo, se este não tiver todos os seus vertices sobre huma circumferencia.

Pelo polo H do circulo determinado por E, A, B e por hum E dos vertices, tire-se o

$$\text{arco } E\,I = 2\,E\,H;$$

será I ponto da circumferencia, sobre a qual estão os vertices, isto he, do circulo $E\,A\,B$. Tirem-se os arcos $A\,I$, $B\,I$, que estarão dentro do triangulo trirectangulo por estarem dentro da zona.

Sobre $a\,b = A\,B$, faça-se o triangulo $a\,b\,i$ identico com $A\,B\,I$, e similhantemente posto, e tire-se o arco $e\,i$.

No caso mais desfavoravel, do triangulo $A\,B\,I$ ter os seus vertices na circumferencia da base da zona, elle fica ainda dentro d'esta zona; e por consequencia o triangulo $a\,b\,i$, que lhe he identico, assim como a zona em que está o polygono respectivo he identica com a primeira, estará tambem n'esta segunda zona.

O polygono $EFGAI$, que tem todos os vertices na circumferencia de hum circulo menor cujo polo he H, he maior que o polygono $efgai$ que tem com o primeiro todos os lados iguaes, á excepção de EI, ei; ou he seu igual, se este ultimo tambem tem todos os vertices na mesma circumferencia de circulo menor. Pela mesma rasão he

$$EDCBI > edcbi;$$

porque não se póde suppor que o ultimo tenha os vertices sobre a mesma circumferencia, que o outro $efgai$, porque então o polygono inteiro $abcdefg$ teria todos os vertices sobre huma circumferencia contra a hypothese.

Por consequencia he o polygono

$$EFGAIBCD > efgaibcd;$$

e tirando, de huma e outra parte, os triangulos iguaes ABI, abi, conclue-se que o polygono $ABCDEFG$ he maior do que $abcdefg$.

O mesmo tem logar, se o polo fôr situado fóra ou dentro do perimetro, ou se o arco tirado por elle encontrar outro vertice.

750. Dos polygonos esphericos da ultima especie, e isoperimetros, o regular he o maior.

Para que seja maximo, he preciso que tenha os lados iguaes; e se do polo do circulo, sobre o qual elle deve ter os vertices, se tirarem arcos para todos os lados, formar-se-hão triangulos isosceles todos identicos; e por consequencia serão iguaes os angulos do polygono maximo.

751. Seja EI hum circulo maximo (o equador), AD outro (o horisonte), AC hum arco de circulo maximo perpendicular ao horisonte (arco do vertical), e seja AC dado (a depressão do astro no principio ou no fim do crepusculo). Tire-se por C hum arco de circulo maximo, que faça com EF hum angulo $CFE = DGE$ (altura do equador e constante), o qual por isso se chama horisonte similhante Fig. 256.

PP

ao primeiro; produza-se este até encontrar o primeiro em D, e o parallelo a EF em B. Tirem-se ainda os dois arcos de circulos maximos AH, BI perpendiculares sobre EF (arcos de declinação (D)). Pede-se o menor valor de HI, e a que declinação corresponde.

Os triangulos AGH, BFI rectangulos em H, I são identicos, porque em ambos entrão do mesmo modo os angulos em G, F iguaes, e os lados oppostos AH, BI; logo $GH = FI$; logo $GF = HI$. A questão se reduz pois a saber quando será GF hum minimo.

No triangulo DGF, he DGF supplemento de GDF, e DG de DF; logo

$$\cos GF = \frac{\cos D - \cos^2 DGE}{\operatorname{sen}^2 DGE}.$$

O triangulo DAC, rectangulo em A, dá

$$\cot D = \frac{\operatorname{sen} AD}{\operatorname{tang} AC}.$$

D'estas duas formulas se conclue que GF será menor quando $\cos GF$ fôr maior, logo tambem $\cos D$, logo D menor, logo $\cos D$ maior, e logo em fim he preciso que $\operatorname{sen} AD$ seja o maior, ou que seja $AD = 90°$. Logo os angulos em C são rectos. Será $CD = 90°$, e AC cortará GF em algum ponto K.

Os triangulos rectangulos AKG, CKF são identicos, por serem equiangulos entre si, como he facil de ver.

Logo

$$AK = CK$$

$$= \text{metade da depressão } (d),$$

e

$$GK = FK$$

$$= \text{metade da duração do crepusculo menor } (c):$$

mas temos

$$\text{sen}\,A\,K = \text{sen}\,K\,G\,\text{sen}\,A\,G\,K,$$

e

$$A\,G\,K = \text{altura do equador}$$

$$= \text{complemento da latitude } (L);$$

logo

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,d = \text{sen}\,\frac{1}{2}\,c\,\cos\,L,$$

ou

$$\text{sen}\,\frac{1}{2}\,c = \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\,d}{\cos L},$$

o que fará conhecer o crepusculo c menor.

Tambem

$$\text{sen}\,A\,G \text{ (a amplitude } a)$$

$$= \text{tang}\,A\,K\,\text{cot}\,A\,G\,K,$$

ou

$$\text{sen}\,a = \text{tang}\,\frac{1}{2}\,d\,\text{tang}\,L.$$

No triangulo $A\,G\,H$, rectangulo em H, temos

$$\text{sen}\,A\,H = \text{sen}\,A\,G\,\text{sen}\,A\,G\,H,$$

isto he, fazendo a substituição de sen $A\,G$, temos

$$\text{sen}\,D = \text{tang}\,\frac{1}{2}\,d\,\text{sen}\,L;$$

e depois procurão-se os dias que correspondem a esta declinação.

LIVRO 9.º

Geometria de duas coordenadas

752. Se quaesquer rectas parallelas tiverem todas hum dos seus extremos sobre huma mesma recta, chamada base, a linha que fôr lugar dos outros extremos, chamar-se-ha *linha proposta e plana* por estar no plano das parallelas; as parallelas chamar-se-hão *ordenadas;* as partes da base comprehendidas entre hum dos seus pontos e as ordenadas, chamar-se-hão *abscissas;* este ponto *origem das abscissas;* e cada ordenada e a sua abscissa *coordenadas;* e a equação por meio da qual, dada qualquer das coordenadas se acha a outra, se chamará *equação da linha proposta.*

753. Nas indagações seguintes a unidade ou medida linear será representada por 1, e por consequencia todas as linhas serão representadas pelos numeros que resultão da sua comparação com a medida linear.

754. Representem x e y as coordenadas de huma linha proposta, e a, b, c, etc., numeros dados positivos ou negativos ou cifras; se a equação d'esta linha fôr comprehendida n'esta formula

$$
\begin{aligned}
0 = a + bx + dx^2 &+ gx^3 + etc. \\
+ cy + exy &+ hx^2y \\
+ fy^2 &+ ixy^2 \\
&+ ly^3
\end{aligned}
$$

sendo finito o numero dos termos, a linha se chama *algebrica*, e da *primeira ordem*, ou *da segunda*, ou *da terceira*, etc., conforme fôr o grau da equação a respeito de x e y; e as quantidades determinadas a, b, c, etc. chamão-se *parametros*.

755. A origem das abscissas, quando está na linha proposta, chama-se *vertice d'essa linha*, e tambem *da base*.

756. *Corda* he a recta cujos extremos são pontos da linha proposta.

757. A base chama-se *eixo*, quando he perpendicular ás ordenadas.

758. *Diametro* he a recta que corta pelo meio todas as cordas parallelas entre si; e *grandeza do diametro* he a parte d'elle que tambem he corda.

759. *Eixo principal* he a recta que he eixo e diametro.

760. *Vertice principal* he o vertice da linha proposta e eixo principal.

761. O ponto que he origem de abscissas cortadas em hum diametro, de sorte que a quaesquer duas iguaes e contrarias correspondão quatro ordenadas iguaes, duas de huma parte do diametro e duas da outra; chama-se *centro d'esse diametro*.

762. Toda a linha que não he recta, nem d'ella se compõe he *curva*.

763. O ponto onde todos os diametros concorrem chama-se *centro da curva*.

764. Diz-se que dois diametros são *conjugados* hum ao outro, quando cada hum corta pelo meio as cordas parallelas ao outro.

765. Huma recta que não encontra huma curva, mas que se approxima d'ella quanto se quizer, chama-se *asymptota*.

766. *Tangente* de huma curva he a recta que a não encontra senão em hum ponto, na parte d'essa curva que he toda convexa, e da mesma parte a seu respeito; e *grandeza da tangente* he a parte d'ella entre o ponto do contacto e o eixo.

767. *Normal* he a perpendicular á tangente no ponto do contacto: e *grandeza da normal* he a parte d'ella entre o ponto do contacto e o eixo.

768. *Subtangente* he a parte do eixo entre a tangente e a ordenada.

769. *Subnormal* he a parte do eixo que está entre a ordenada e a normal.

770. O triangulo formado pela tangente, subtangente e ordenada he similhante ao que he formado pela normal, subnormal e ordenada; e d'esta similhança se conclue que a ordenada he meia proporcional entre a subtangente e a subnormal.

771. A equação algebrica não pertence a linha alguma proposta se x ou y tiver hum só valor. Pois seja AP o valor unico de x, a linha proposta fará com a posição da ordenada PM huma só recta: seja pois BM a linha proposta. Em BM póde tomar-se hum numero de pontos maior do que qualquer numero que se proponha, e como todas as rectas que tiverem esses pontos por extremos e por extremo commum P, são ordenadas differentes, segue-se que a linha proposta tem hum numero de ordenadas differentes maior do que he o numero de valores diversos de y, que a equação do § 754 póde dar quando he algebrica. Fig. 257.

Se a ordenada tiver hum só valor, será a linha proposta parallela á base. Seja pois BM' essa linha, e pois em BM' se póde tomar hum numero de pontos maior do que qualquer numero que se proponha, se d'esses pontos se tirarem ordenadas, todas cortarão na base abscissas differentes, e será por consequencia o numero das abscissas differentes, maior que o numero de valores diversos de x, que a equação póde dar.

772. Huma linha proposta não muda de ordem por se mudar o systema das suas coordenadas.

Sejão AP e PM as coordenadas x e y de huma linha proposta, e sejão Bp, e pM outras coordenadas u e z: tire-se AB, e tirem-se BD, pF parallelas a AP, e BC, pE parallelas a PM. Nos triangulos BEp, pMF he dada Fig. 258.

a posição dos lados ou os angulos, e logo dadas as razões dos lados, e no triangulo ABC tambem he dado o lado AB, e logo os outros lados. Seja pois $AC=a$, $BC=a'$, $BE=b\times Bp=bu$, $Ep=b'u$, $pF=cz$, $MF=c'z$; será

$$x=a+bu+cz,$$

e

$$y=a'+b'u+c'z.$$

Substituindo estes valores de x, e y na equação da linha proposta, resulta huma equação em u, e z que não póde ser de grau superior á primeira; nem de grau inferior, pois para isto seria preciso que ou b, e c fossem cifras, o que faria x de hum só valor, o que não póde ser (§ 771) ou que b' e c' fossem ambas cifras, o que tambem não póde ser.

773. Nenhuma linha póde ser cortada por huma recta em hum numero de pontos maior do que he o numero da sua ordem.

Fig. 257. Sejão por exemplo, B, D, M tres pontos de huma recta e de huma linha da segunda ordem, tomando essa recta para posição de ordenada (§ 772) a linha proposta não muda de ordem, e serão PB, PD, e PM tres ordenadas diversas correspondentes á mesma abscissa AP, o que a equação da segunda ordem não póde dar.

774. Abscissas negativas collocão-se para a parte opposta á das positivas.

Fig. 259. A linha MM' seja determinada pelas abscissas AP, AP', etc., chamadas z, e ordenadas PM, $P'M'$, etc., chamadas y; mudando a origem das abscissas para o ponto B sobre a mesma base, e chamando x a qualquer das novas abscissas; será BP', ou

$$x=AP'-AB=z-AB,$$

e

$$BP=AB-AP=AB-z=-x;$$

logo as abscissas negativas $-x$ estão para a parte BP contraria a BP'.

775. Ordenadas negativas collocão-se para a parte opposta á das ordenadas positivas.

A linha $M' M m m'$ seja determinada pelas abscissas $A P$, $A P'$, etc., e ordenadas $P M$, $P m$ correspondentes a $A P$, e $P' M'$, $P' m'$ correspondentes a $A P'$; chame-se z a qualquer das ordenadas; a recta ap, parallela a $A P$, córte Mm, completem-se os parallelogrammos Ap, Ap', etc., e serão Pp, $P'p'$, etc., rectas iguaes a. Querendo passar a referir a linha proposta ás coordenadas $a p$, $p M$, nenhuma mudança ha no valor das abscissas, mas a nova ordenada $p M$, ou y he Fig. 260.

$$P M - P p = z - a,$$

e $p m$ he

$$a - z = - y:$$

logo a ordenada negativa $-y$ está em huma posição $p m$ contraria á de $p M$.

776. Achar a linha da primeira ordem, ou a linha a que pertence a equação

$$y + a x + b = 0.$$

Seja $A B$ base, e A origem das abscissas $A P$. Na origem das abscissas; ou onde he $x = o$, he $y = - b$, tome-se $A C = - b$, e será C ponto da linha buscada; aonde a linha buscada encontra a base he $y = o$, e logo Fig. 261.

$$x = - \frac{b}{a}:$$

tome-se

$$A B = \frac{-b}{a},$$

e será B ponto da linha buscada; digo que essa linha he a recta $C B$, ou que $P M$ parallela a $A C$ he ordenada y; pois será

$$B P : P M :: A B : A C,$$

isto é

$$\frac{-b}{a} - x : y :: - \frac{b}{a} : - b,$$

proporção que dá

$$\frac{b^2}{a}+bx=-\frac{b}{a}y,$$

e logo

$$y+ax+b=0.$$

777. Dois pontos de huma linha recta bastão para determina-la, isto he, bastão para determinar os parametros da equação da primeira ordem, com a qual se podem achar outros pontos da recta.

Sejão C e B os pontos dados, e tome-se o ponto A que não esteja em direitura com elles; faça-se $b=-A\,C$, e $a=\frac{A\,C}{A\,B}$, e será

$$y+ax+b=0$$

a equação por meio da qual, dada $x=A\,P$, se achará $P\,M$ parallela a $A\,C$, e $=-a\times A\,P-b=y$, e com effeito

$$-\frac{A\,C}{A\,B}\times A\,P+A\,C=P\,M \text{ dá } \frac{A\,C(A\,B-A\,P)}{A\,B}=P\,M.$$

e logo

$$A\,C:A\,B::P\,M:P\,B$$

como deve ser

778. Só a linha da primeira ordem he recta, isto he, a recta não póde ter hum systema de coordenadas de ordem que não seja a primeira, pois se fosse possivel te-lo, como tambem pelo numero precedente tem systemas de coordenadas da primeira ordem, seguir-se-hia o ter systemas de coordenadas de differentes ordens, o que não póde ser (§ 772).

779. Particularisar as curvas a que pertence a equação geral da segunda ordem

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=0.$$

Fig. 262. I. Sejão M, M', m, m', etc., pontos da curva determinados pelas abscissas (x), $A\,P$, $A\,P'$, etc., e ordenadas (y),

$P M$, $P' M'$, $P m$, $P' m'$, etc. A equação simplifica-se fazendo

$$y+\frac{a x+c}{2}=u,$$

e fica d'esta fórma

$$u^2+f x^2+g x+h=0,$$

sendo

$$f=b-\frac{a^2}{4};$$

$$g=d-\frac{a c}{2};$$

$$h=e-\frac{c^2}{4}.$$

Na figura faça-se na continuação de $A P$, $A C=\frac{c}{a}$, e tire-se $A B$ parallela ás ordenadas $e=\frac{c}{2}$, e será

$$P Q=\frac{a x+c}{2},$$

e

$$Q M=u.$$

Tome-se $B Q$ para abscissa t; será no triangulo $C A B$ determinado tudo pelo serem $A C$, $A B$ e o angulo $C A B$; a $C B$ chame-se i, e será

$$C A : C P :: C B : C Q,$$

logo

$$x=\frac{c t}{a i};$$

e substituindo este valor de x na equação em u e x esta ficará da fórma

$$u^2+l t^2+m t+h=0,$$

sendo

$$l = \frac{f c^2}{a^2 i^2},$$

e

$$m = \frac{g c}{a i},$$

e pertence ás coordenadas $B Q$ e $Q M$.

II. A recta $B Q$ he diametro, pois he

$$Q m = P m - P Q$$

$$= - y - \frac{a x + c}{2} = - u,$$

isto he $Q m$ igual e contraria a $Q M$ (§ 775), logo a corda $M m$, e as outras cordas parallelas ficão divididas em duas partes iguaes pela recta $B Q$ (§ 758).

A equação

$$u^2 + l t^2 + m t + h = 0$$

tambem mostra o mesmo, isto he, que a qualquer valor de t correspondem dois de u iguaes e contrarios. Para fazer desapparecer o ultimo termo, ponha-se

$$t = s + A,$$

e logo

$$A^2 + \frac{m}{l} A + \frac{h}{l} = 0,$$

e logo

$$A = - \frac{1}{2 l} \left(m \pm \sqrt{m^2 - 4 h l}\right).$$

III. Substituindo $s - \frac{1}{2 l} \left(m + \sqrt{m^2 - 4 h l^2}\right)$ em lugar de t na equação ultima, esta transforma-se em

$$u^2 + l s^2 - n s = 0,$$

sendo

$$n=\sqrt{m^2-4hl},$$

e na figura tome-se

$$BD=-\frac{1}{2l}(m+\sqrt{m^2-4hl}),$$

e será DQ a nova abscissa s.

IV. A equação

$$u^2+ls^2-ns=0$$

transforma-se em

$$u^2+lr^2+p=0,$$

fazendo

$$s-\frac{n}{2l}=r,$$

e sendo

$$p=-\frac{n^2}{4l};$$

e na figura, fazendo $DE=\frac{n}{2l}$, será EQ a nova abscissa r.

V. Se na primeira equação d'este numero fôr $b=1$, e na figura fôr Q recto, será tambem ABC recto, e logo

$$\overline{CA}^2=\overline{CB}^2+\overline{AB}^2,$$

isto he

$$\frac{c^2}{a^2}=i^2+\frac{c^2}{4},$$

logo

$$\frac{fc^2}{a^2i^2}=\frac{\left(1-\frac{a^2}{4}\right)c^2}{a^2\left(\frac{c^2}{a^2}-\frac{c^2}{4}\right)}=1,$$

logo então a equação pertencente ás coordenadas EQ, e QM he

$$u^2+r^2-\frac{n^2}{4}=0;$$

mas he tambem

$$\overline{EM}^2=\overline{EQ}^2+\overline{QM}^2=u^2+r^2,$$

$$\overline{EM'}^2=\overline{EQ'}^2+\overline{Q'M'}^2=u'+r^2, \text{ etc.};$$

logo

$$EM=\frac{n}{2}=EM'=\text{etc.};$$

isto he, os pontos da curva distão todos igualmente do ponto E: esta curva he pois o circulo.

VI. Para que os dois valores $\pm\sqrt{-ls^2+ns}$ de u sejão possiveis, he preciso que seja $-ls^2+ns$ quantidade positiva, isto he, que seja

$$-ls^2+ns>0,$$

ou $ns>ls^2$, o que não póde ser para l positivo, sendo s negativo, nem sendo s positivo para $s>\frac{n}{l}$ porque seria $ls>n$, e $ls^2>ns$; logo quando l he positivo a curva não tem ordenadas que correspondão a s negativo, e a $s>\frac{n}{l}$; mas ella encontra a base quando he $s=0$, e $s=\frac{n}{l}$, e a todos os valores intermedios de s correspondem ordenadas positivas e negativas: logo esta curva encerra espaço: a linha da segunda ordem que encerra espaço, sem ser circulo, chama-se ellipse.

VII. Seja l negativo, será $ns>ls^2$, sendo s positivo, mas sendo s negativo será $\frac{ns}{l}$ positivo, e para ser $>s^2$ he preciso que seja $\frac{n}{l}$, $>s$ ou que sem attenção aos signaes seja $s>\frac{n}{l}$; logo a curva tem dois ramos de toda a extensão correspondentes ás abscissas positivas, e outros dois ramos de toda a extensão correspondentes ás abscissas negativas maiores do que $\frac{n}{l}$ sem attenção aos signaes: a esta linha da segunda ordem, que tem quatro ramos de toda a extensão chama-se *hyperbola*.

VIII. Se l fôr cifra, he preciso para ns ser positivo que s o seja; e então a qualquer valor positivo de s correspondem duas ordenadas iguaes, huma de huma parte do diametro e outra da outra parte, e a curva tem dois ramos só de toda a extensão, e chama-se *parabola*.

780. Por ser

$$l = \frac{fc^2}{a^2 i^2} = \frac{\left(b - \frac{a^2}{4}\right)c^2}{a^2 i^2},$$

segue-se que a curva será ellipse, se na equação geral fôr $b - \frac{a^2}{4}$ quantidade positiva; hyperbola se esta mesma quantidade fôr negativa; e parabola se fôr cifra. De ser $c = 0$, não se segue $l = 0$, por ser então tambem $i = 0$.

781. O centro de qualquer diametro de circulo, ellipse ou hyperbola, he ponto commum a todos os diametros, e por consequencia centro da curva.

Seja AP diametro, e A o seu centro; a equação pertencente ás coordenadas AP, PM será da fórma Fig. 258.

$$y^2 + dx^2 + e = 0,$$

(§ 779. IV.), n'esta substituindo os valores de y e x em u e z, teremos

$$z^2 + \frac{2(b'c' + dbc)}{c'^2 + dc^2}\,uz + \frac{b'^2 + db^2}{c'^2 + dc^2}\,u^2$$

$$+ \ldots + \frac{2(a'c' + dac)}{etc.}\,.\,z + \frac{2(a'b' + dab)}{etc.}\,u$$

$$+ \frac{a'^2 + da^2 + e}{etc.} = 0,$$

a qual mostra que para Bp ser diametro, ou para que a u correspondão ordenadas z iguaes e contrarias, he preciso que seja

$$\frac{2(b'c'+dbc)}{c'^2+dc^2}.u+\frac{2(a'c'+dac)}{c'^2+dc^2}=0,$$

o que não póde ser para qualquer valor de u sem serem separadamente

$$b'c'+dbc=0,$$

e

$$a'c'+dac=0:$$

estas duas equações dão

$$ab'-ba'=0,$$

logo

$$a:a'::b:b'::bu:b'u,$$

isto he

$$AC:CB::BE:Ep;$$

logo Bp se fôr diametro ha de passar pelo ponto A.

782. Se a equação pertencente a AP e PM fôr a da parabola

$$y^2-nx=0,$$

as mesmas substituições dão

$$z^2+\frac{2b'c'}{c'^2}.uz+\frac{b'^2}{c'^2}.u^2$$

$$+\frac{2a'c'-nc}{c'^2}.z+\frac{2a'b'-nb}{etc.}.u+\frac{a'^2-na}{etc.}=0,$$

a qual mostra que para Bp ser diametro, he preciso que seja

$$\frac{2b'c'}{c'^2}.u+\frac{2a'c'-nc}{c'^2}=0,$$

e logo separadamente $\frac{2b'c'}{c'^2}=0$, ou $b'=0$, ou $pE=0$, ou Bp parallela a AP, isto he na parabola todos os diametros são parallelos.

783. Representa AB qualquer diametro não eixo de el- Fig. 263.
lipse ou hyperbola; seja

$$0 = \alpha + \delta x^2 + y^2$$

a equação; e AB seja x, e BC seja y. Córte-se $AD = 1$: levante-se DE perpendicular a AD, e tire-se a recta AEF: tire-se CF perpendicular a AF e CG perpendicular a ABG.

Seja

$$CG = \frac{1}{m} y,$$

e

$$BG = \frac{n}{m} y;$$

chame-se s a AE, t a DE, u a AF, e z a CF. A similhança dos triangulos ADE, AGH, CFH dá

$$CH = sz;\ FH = tz;$$

será logo

$$AH = u - tz,$$

e por tanto

$$AG = \frac{1}{s} u - \frac{t}{s} z,$$

e

$$GH = \frac{t}{s} u - \frac{t^2}{s} z;$$

d'onde

$$CG = \frac{t}{s} u - \frac{t^2}{s} z + sz$$

$$= \frac{t}{s} u + \frac{s^2 - t^2}{s} z$$

$$= \frac{t}{s} u + \frac{1}{s} z;$$

e logo

$$y = \frac{mt}{s} u + \frac{m}{s} z.$$

e

$$BG = \frac{nt}{s}u + \frac{n}{s}z;$$

e logo

$$x = \frac{1}{s}u - \frac{t}{s}z - \frac{nt}{s}u - \frac{n}{s}z$$

$$= \frac{1-nt}{s}u - \frac{n+t}{s}z.$$

Escrevendo pois estes valores de x e y em u e z na equação

$$0 = \alpha + \delta x^2 + y^2,$$

teremos

$$0 = \alpha + \frac{1}{s^2}(\delta - 2n\delta t + n^2\delta t^2 + m^2 t^2)u^2$$

$$- \frac{2}{s^2}(n\delta + \delta t - n^2\delta t - n\delta t^2 - m^2 t)uz$$

$$+ \frac{1}{s^2}(n^2\delta + 2n\delta t + \delta t^2 + m^2)z^2,$$

que determinando t de sorte que seja

$$n\delta + \delta t - n^2\delta t - n\delta t^2 - m^2 t = 0,$$

e dividindo por

$$\frac{1}{s^2}(n^2\delta + 2n\delta t + \delta t^2 + m^2),$$

terá a mesma fórma que

$$0 = \alpha + \delta x^2 + y^2,$$

e por consequencia será AF diametro; e logo tambem eixo principal, por formarem as coordenadas u e z angulo recto. A determinação de t sempre he possivel, porque a equação

$$n\delta + \delta t - n^2\delta t - n\delta t^2 - m^2 t = 0$$

dá

$$t = \frac{\delta - n^2\delta - m^2}{2n\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{(\delta - n^2\delta - m^2)^2}{4n^2\delta^2} + 1\right)}$$

valores sempre possiveis.

Seja DE hum, e DI o outro, e tire-se AI. Será

$$DE \times DI = 1,$$

e logo

$$DE : DA :: DA : DI :$$

e como os angulos em D são rectos, serão similhantes os triangulos ADE, ADI; e logo

$$\text{o angulo } DAI = AED,$$

e logo recto o angulo EAI. Logo o centro de qualquer diametro de ellipse ou hyperbola, he tambem centro de dois eixos principaes que n'elle se cortão perpendicularmente.

784. Todas as rectas que passão pelo centro do circulo, ellipse ou hyperbola, são diametros, excepto duas na hyperbola.

Sejão AP e PM as coordenadas x e y pertencentes ao diametro AP e centro A; a sua equação será d'esta fórma Fig. 264.

$$y^2 + dx^2 + e = 0;$$

tire-se pelo centro a recta Ap, e tire-se Mp. No triangulo APB he dada a posição dos lados; logo será dada a sua relação: mas no triangulo BMp he preciso buscar as razões que fazem pM semi-corda; chame-se u a Ap e, z a pM, e será $AB = ax$, $BP = bx$; e seja $BM = pz$, $Bp = qz$; será

$$u = ax + qz,$$

e logo

$$x = \frac{u - qz}{a}.$$

e

$$y = bx + pz = \frac{b}{a} u + (p - \frac{bq}{a}) z;$$

estes valores de x e y substituidos em

$$y^2 + dx^2 + e = 0,$$

dão

$$z^2 + \frac{2(abp - (b^2+d)q)}{(b^2+d)q^2 + (ap - 2bq)ap} uz \ldots$$

$$+ \frac{b^2+d}{etc.} . u^2 + \frac{ea^2}{etc.} = 0,$$

a qual mostra que para Ap ser diametro, he preciso que seja

$$abp - (b^2 + d) q = 0,$$

ou que seja

$$q = \frac{abp}{b^2+d};$$

este valor de q he sempre possivel, excepto quando fôr

$$b^2 + d = 0,$$

e isto só póde acontecer sendo d negativo, ou na hyperbola: os dois valores $\pm\sqrt{-d}$ de b servirão para determinar as duas rectas que não são diametros.

785. A recta que se tira pelo centro parallela ás semicordas ordenadas de hum diametro, he diametro conjugado d'aquelle.

Fig. 265. Seja A centro do diametro, $P'P$ e PM ordenada semicorda correspondente á abscissa AP, e seja a equação $y^2 + dx^2 + e = 0$: tomando $AP' = AP$, será a ordenada $P'M' = PM$, e tirando a corda MM', esta será parallela a $P'P$, e será dividida em partes iguaes pela recta AB tirada pelo centro e parallela ás ordenadas, e o mesmo que se diz d'esta corda se póde dizer de qualquer outra sua parallela; logo AB he diametro conjugado a $P'P$.

786. A grandeza do semidiametro conjugado AC, he na ellipse a ordenada que passa pelo centro, ou a que corresponde a $x=0$ na equação

$$y^2+dx^2+e=0,$$

e esta ordenada sempre he possivel; pois a equação

$$y^2+dx^2+e=0$$

para pertencer á ellipse, deve ter d positivo: e para que a equação seja então possivel deve ser e negativo, e logo a ordenada

$$y=\sqrt{-e},$$

que passa pelo centro he possivel. O outro semidiametro conjugado AD he a abscissa que corresponde a $y=0$, ou ao ponto em que a curva encontra o diametro, e logo he $\sqrt{-\frac{e}{d}}$ tambem possivel.

787. Na hyperbola hum dos diametros encontra a curva e o outro não, por ser d negativo, e logo imaginaria alguma das expressões $\sqrt{-e}$, e $\sqrt{-\frac{e}{d}}$; mas uza-se comtudo, em lugar do semidiametro imaginario em grandeza, da recta que tem a mesma posição, e a grandeza que teria se fosse positiva a expressão que está affectada do radical.

788. A recta que se tirar pelo extremo de hum diametro parallelo ao seu conjugado será tangente. Fig. 266.

Se he possivel a recta TM parallela a AD, semidiametro conjugado de AM, encontre a curva n'outro ponto B; será BM ordenada ao diametro AM e parallela ao conjugado AD, e logo será semicorda, e logo tomando em BM produzida

$$MM'=BM,$$

será M' ponto da curva, logo os tres pontos da curva B,

M, M' estão em direitura; absurdo (§ 773); logo TM he tangente.

789. Achar o eixo principal da parabola.

Fig. 267. Sejão AP e PM as coordenadas a que pertence a equação

$$y^2-nx=0;$$

tirem-se AB parallela a PM, e BD a AP, e MpC perpendicular a AP; chame-se q a AB, u a Bp, e z a pM. No triangulo MDp será dada a relação dos lados; seja pois $MD=az$, e $Dp=bz$; será

$$x=u+bz,$$

e

$$y=q+az,$$

que substituidos em

$$y^2-nx=0,$$

dão

$$z^2+\frac{2aq-nb}{a^2}z-\frac{n}{a^2}u+\frac{q^2}{a^2}=0,$$

a qual mostra que para Bp ser eixo principal he preciso que seja

$$2aq-nb=0, \text{ ou } q=\frac{nb}{2a}.$$

790. Dados cinco pontos de huma linha da segunda ordem determina-la, isto he, achar os parametros da sua equação.

Tomando uma recta para base, e hum dos seus pontos para origem das abscissas, se d'esses cinco pontos se tirarem rectas parallelas para a base, cada huma d'ellas e a sua abscissa serão determinadas e substituidas successivamente a x e y na equação geral

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e=0,$$

darão cinco equações, com as quaes se poderão determinar os parametros a, b, c, d, e e definir a curva.

Mas he mais simples assim: sejão A, B, C, D, E os pontos dados; por quatro d'elles tirem-se as rectas AD, BE que se cortem em algum ponto F, pelo quinto ponto C, tire-se CG parallela a BE, que encontrará AD em algum ponto G. Seja A origem das abscissas, AD base, e AFB o angulo das coordenadas, deve em A ser $y=0$, e $x=0$, e logo deve ser $e=0$ na equação. Seja $AF=a'$, $BF=b'$, $AG=c'$, $CG=d'$, $AD=e'$, $EF=f$; substituindo e' a x e o a y, será Fig. 268.

$$be'^2+de'=0,$$

he logo

$$b=-\frac{d}{e'},$$

e logo

$$y^2+axy-\frac{d}{e'}x^2+cy+dx=0,$$

substituindo n'esta equação c' a x, e d a y teremos

$$d'^2+ac'd'-\frac{d}{e'}c'^2+cd'+dc'=0,$$

substituindo a' a x, e b' a y vem

$$b'^2+aa'b'-\frac{d}{e'}a'^2+cb'+da'=0,$$

e substituindo a' a x, e b' a y vem

$$b'^2+aa'b'-\frac{d}{e'}a'^2+cb'+da=0,$$

e substituindo a' a x, e b' a y, vem

$$f^2-aa'f-\frac{d}{e'}a'^2-cf+da'=0,$$

e com estas tres ultimas equações se acharão a, d, c e ficará definida a curva.

791. Para determinar a parabola bastão quatro pontos por haver a condição de ser $a-\frac{b^2}{4}=0$.

792. Para determinar o circulo bastão tres pontos por ser $b=1$, e por serem dados no triangulo ACB (fig. 269)

os angulos CAB e CBA, e logo a razão dos lados CA e AB, isto he a razão de $\frac{c}{a}$ e $\frac{c}{2}$ isto he outra condição entre a e c.

793. Achar a equação do circulo.

Fig. 269. Seja o circulo ABC, ache-se-lhe o centro D; tire-se hum diametro AC, e de qualquer ponto B a perpendicular BE ao diametro; chame-se, x a CE e y a BE, e ao raio r, e tire-se DB: por serem DA, DB, DC iguaes, será BE meia proporcional entre AE e EC, isto he, será

$$y^2 = (2r - x)x = 2rx - x^2.$$

794. A abscissa DE contada do centro chame-se z, e será

$$r^2 = y^2 + z^2$$

outra equação do circulo.

795. Achar huma curva tal, que se de qualquer M dos seus pontos se conduzirem duas rectas para dois pontos fi-
Fig. 270. xos F, e f, a somma d'ellas seja sempre a mesma e igual a $2a$.

Esta curva póde descrever-se fixando os extremos de hum fio flexivel e inextensivel e igual a $2a$ nos pontos F e f, e applicando ao seu seio hum ponteiro, e movendo-o de fórma que se conserve sempre o fio em tensão e no mesmo plano; o ponteiro descreverá esta curva e seja ella AMB.

Para lhe achar a equação, e o nome, divida-se Ff ao meio em C, chame-se c a FC, e será $c < a$; tire-se MP perpendicular a Ff produzida se fôr necessario; seja $CP = z$ e $MP = y$; será

$$\overline{Mf}^2 - \overline{Pf}^2 = \overline{MF}^2 - \overline{PF}^2,$$

d'onde

$$\overline{Mf}^2 - \overline{MF}^2 = \overline{Pf}^2 - \overline{PF}^2,$$

logo

$$(Mf + MF)(Mf - MF) = (Pf + PF)(Pf - PF),$$

ou

$$2a(Mf - MF) = 2c \times 2z,$$

logo

$$Mf - MF = \frac{2c}{a} . z,$$

donde

$$Mf = \frac{1}{2}(Mf + MF) + \frac{1}{2}(Mf - MF)$$

$$= a + \frac{cz}{a},$$

por tanto

$$y^2 = \left(a + \frac{cz}{a}\right)^2 - (c + z)^2$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{a^2} . z^2 + a^2 - c^2,$$

equação que pertence á ellipse, por ser $\frac{c^2 - a^2}{a^2}$ negativo: C he o centro, $\sqrt{\left(\frac{a^2 - c^2}{\frac{a^2 - c^2}{a^2}}\right)} = a$ he o semieixo principal dos z, e $\sqrt{a^2 - c^2}$ he o outro semieixo principal, e, chamando-lhe b, a equação he d'esta fórma

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - z^2).$$

Os dois pontos F e f chamão-se *focos*, e as duas rectas MF, Mf *raios vectores*.

796. Produzindo hum dos raios vectores Mf, de sorte que seja $MG = MF$, e tirando a recta GF, e depois MT perpendicular a GF, será MT tangente da ellipse.

Se he possivel TM encontre a curva em outro ponto N, e tirem-se NG, NF, Nf: por ser N ponto da perpendicular MT ao meio de GF, será $NF = NG$, e por ser ponto da curva será

$$NF + Nf = 2a = MF + Mf,$$

isto he

$$NG + Nf = MG + Mf = Gf:$$

absurdo; logo MT não encontra outro ponto da curva e será tangente.

797. Os dois triangulos MOG, MOF são identicos por serem rectangulos, MO commum, e $MG = MF$, logo o angulo $OMG = OMF$; mas he tambem $fMN = OMG$, logo os raios vectores formão angulos iguaes com a tangente.

798. Logo a normal divide ao meio o angulo dos raios vectores: seja MI a normal. Os dois triangulos MFI, MfI, por terem iguaes os angulos em M, estão entre si como os productos $MF \times MI$, e $Mf \times MI$, ou como MF e Mf, e por terem o vertice commum M; e as bases em direitura estão entre si como essas bases, FI, fI, logo

$$MF : Mf :: FI : fI,$$

isto he $2a - MF : MF :: 2c - fI : fI$, d'onde se tira $fI = \frac{c.MF}{a}$; mas he

$$Mf = a + \frac{cz}{a};$$

(§ 795) logo

$$fI = c + \frac{c^2 z}{a^2},$$

logo a subnormal

$$PI = fP - fI = c + z - fI$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2}.z = \frac{b^2}{a^2}z;$$

a subtangente

$$PT = \frac{y^2}{PI} = \frac{b^2 - \frac{b^2}{a^2}.z^2}{\frac{b^2}{a^2}.z} = \frac{a^2 - z^2}{z};$$

e

$$CT = PT + PC = \frac{a^2 - z^2}{z} + z = \frac{a^2}{z}.$$

Fig. 271. 799. Seja CN o semidiametro conjugado a CM, será

CN parallela a MT (§ 788); tire-se a ordenada perpendicular NR que será $\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-\overline{CR}^2)}$: os dois triangulos similhantes TPM, CRN dão

$$\overline{TP}^2:\overline{PM}^2::\overline{CR}^2:\overline{NR}^2,$$

ou

$$\frac{(a^2-z^2)^2}{z^2}:\frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2)::\overline{CR}^2:\overline{RN}^2$$

$$=\frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2)\overline{CR}^2}{\frac{(a^2-z^2)^2}{z^2}}=\frac{\frac{b^2}{a^2}.z^2.\overline{CR}^2}{a^2-z^2}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\overline{CR}^2),$$

logo

$$\overline{CR}^2=a^2-z^2,$$

e

$$NR^2=\frac{b^2}{a^2}z^2;$$

logo

$$\overline{CM}^2+\overline{CN}^2=\overline{CP}^2+\overline{PM}^2+\overline{CR}^2+\overline{NR}^2$$

$$=z^2+\frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2)+a^2-z^2+\frac{b^2}{a^2}.z^2=b^2+a^2,$$

e conclue-se que na ellipse a somma dos quadrados dos diametros conjugados, he igual á somma dos quadrados dos dois eixos principaes.

800. Conduzindo do centro para a tangente a perpendicular CF será

$$CF=\frac{PM.CT}{TM},$$

e

$$CN=\frac{TM.CR}{PT},$$

logo

$$CF.CN=\frac{PM.CT.CR}{PT}=ab;$$

e conclue-se que os parallelogrammos de que são lados as tangentes nos extremos dos diametros conjugados são iguaes ao rectangulo formado pelos eixos.

801. Fazendo o vertice principal A origem de abscissas AP (x), será

$$x=a-z,$$

e logo

$$z=a-x,$$

este valor de z substituido na equação

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2),$$

dá est'outra

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2).$$

802. O parametro $\frac{b^2}{a^2}.2a$ da ultima equação, he a corda dupla ordenada que passa pelo fóco; acha-se substituindo n'esta equação por x a distancia do vertice ao fóco, isto he $a-c$; $2y$ he então $\frac{2b^2}{a}$.

Fig. 272. 803. Achar huma curva tal, que se de qualquer M dos seus pontos se tirarem para dois fócos F e f raios vectores, MF, Mf, a sua differença seja sempre a mesma e igual a $2a$.

Esta curva póde ser descripta por meio de huma regua fQ movel sobre o extremo f, e de hum fio $QMF=fQ-2a$ com os extremos fixos em F e Q, e applicando hum ponteiro ao fio e á regua, este descreverá huma porção da dita curva; porque será

$$QMF-MQ=fQ-2a-MQ$$

$$=MF=Mf-2a;$$

logo

$$Mf-MF=2a.$$

Para lhe achar a equação e o nome divida-se Ff ao meio em C; chame-se c a CF, e será $c > a$; porque a differença $2a$ dos dois lados do triangulo MFf he menor que o terceiro lado $2c$.

Tire-se a ordenada perpendicular MP, e se chame y, e seja CP a abscissa, e se chame z. Será

$$\overline{fM}^2 - \overline{fP}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{FP}^2,$$

logo

$$\overline{fM}^2 - \overline{FM}^2 = \overline{fP}^2 - \overline{FP}^2,$$

ou

$$(fM + FM)(fM - FM)$$

$$= (fP + FP)(fP - FP);$$

logo

$$fM + FM = \frac{2cz}{a};$$

mas he

$$fM = \tfrac{1}{2}(fM + FM) + \tfrac{1}{2}(fM - FM) = \frac{cz}{a} + a,$$

logo

$$y^2 = \left(\frac{cz}{a} + a\right)^2 - (c + z)^2$$

$$= \frac{c^2 - a^2}{a^2} z^2 + a^2 - c^2$$

equação pertencente á hyperbola por ser $\frac{c^2 - a^2}{a^2}$ positivo: C he o centro, a he o semieixo que encontra a curva e $\sqrt{-(a^2 - c^2)}$ he o outro semieixo, e chamando-lhe b, a equação he d'esta fórma $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(z^2 - a^2)$.

804. Tomando $MG = MF$, e tirando a perpendicular MH sobre GF, esta perpendicular será tangente. Se he possivel encontre MH a curva n'outro ponto N; tirem-se as rectas NG, Nf, NF: por ser N ponto da perpendicular MH, será $NG = NF$, assim como era $MG = MP$, e por ser N ponto da curva, será

$$Nf - NF = 2a = fM - FM,$$

logo

$$Nf - NG = fM - MG = fG,$$

ou

$$Nf = NG + fG:$$

absurdo.

805. Na hyperbola a continuação de hum dos raios vectores e o outro formão com a tangente angulos iguaes e prova-se como em similhante caso no § 797.

806. Discorrendo como no § 798, acha-se que, por terem os triangulos MfT e MFT iguaes os angulos em M, he

$$fM : FM :: fT : FT,$$

ou

$$fM : fM - 2a :: fT : 2c - fT,$$

e logo

$$fT = \frac{c \cdot fM}{fM - a};$$

mas he

$$fM = \frac{cz}{a} + a,$$

donde

$$fT = c + \frac{a^2}{z},$$

logo

$$CT = \frac{a^2}{z}, \text{ e } PT = \frac{z^2 - a^2}{z}.$$

807. Na hyperbola as rectas que passão pelo centro, e não são diametros, são asymptotas.

Fig. 273. Sejão essas rectas ACM', e BCm', e seja CP (x) hum diametro que encontre a curva em D, e a que pertença a equação

$$y^2 + dx^2 + e = 0,$$

sendo PM a ordenada: para que o semidiametro CD seja possivel, pela equação he preciso que seja $-\frac{e}{d}$ positivo, ou por ser d negativo, que e seja positivo. PM' que determina a posição de ACM' he (§ 784)

$$x\sqrt{-d}=\sqrt{-d x^2},$$

e

$$PM=\sqrt{-dx^2-e},$$

logo PM' he maior que PM, e ACM' não encontra a curva, e similhantemente se prova, que nem BCm' a encontra.

Tire-se MP' parallela a Cm', e chame-se z, e tire-se MC' parallela a CM', será $CP'=MC'$; a CP' chame-se u. Nos triangulos $MM'P'$, e $MC'm'$ he dada a posição dos lados e logo a sua rasão; seja pois

$$MM'=a\,.\,MP'=az,$$

e

$$Mm'=b\,.\,MC'=bu;$$

será

$$MM'=x\sqrt{-d}-y,$$

e

$$Mm'=x\sqrt{-d}+y,$$

logo

$$MM'\times Mm'=-dx^2-y^2=e=abuz,$$

logo quando fôr u menor será z, isto he a recta CM' que não encontra a curva, approxima-se d'ella quanto se quer, logo he asymptota, e o mesmo se póde affirmar de Cm'.

808. A parte da tangente comprehendida entre o extremo do diametro e qualquer das asymptotas he igual a metade do outro diametro conjugado.

Seja FF' o outro diametro conjugado, que será parallelo a Mm e á tangente DE, e será DE parallela a Mm, e logo

$$CP:Pm'::CD:DE,$$

ou

$$x:x\sqrt{-d}::\sqrt{-\tfrac{e}{d}}:DE=\sqrt{e}=\sqrt{-(e)}$$

$$=CF\ (\S\ 787).$$

809. Tire-se $D'F$ que será parallela a CE (por ser $CD'=CD$, e CF igual e parallela a DE), isto he, a recta que passa pelos extremos de dois diametros conjugados he parallela a huma das asymptotas.

Fig 272. 810. Sendo CA semieixo principal, a asymptota CI he determinada levantando AE perpendicular a CA e igual a $CA\sqrt{\frac{c^2-a^2}{a^2}}=b$.

Sendo NN', e MM' diametros conjugados, tire-se $N'R$ perpendicular, e $M'D$ parallela ao eixo ACB. Os dois triangulos similhantes CRN', e TPM dão

$$TP:PM::CR:RN',$$

ou

$$\frac{z^2-a^2}{z}:\frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2}::CR:RN'=\frac{bz.CR}{a\sqrt{z^2-a^2}};$$

e os dois $N'M'D$, e CAE tambem similhantes dão

$$CA:AE::M'D:N'D,$$

ou

$$a:b::z-CR:N'D=\frac{b(z-CR)}{a};$$

mas he

$$N'R=N'D+DR=N'D+PM$$

$$=\frac{b(z-CR)}{a}+\frac{b}{a}\sqrt{z^2-a^2}$$

$$=\frac{bz.CR}{a\sqrt{z^2-a^2}},$$

logo

$$(z-CR)\sqrt{z^2-a^2}=z.CR-z^2+a^2,$$

e logo, quadrando e reduzindo, vem

$$CR^2=z^2-a^2,$$

logo

$$\overline{N'R}^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot z^2,$$

$$\overline{CM}^2 \backsim \overline{CN'}^2 = (\overline{CP}^2 + \overline{PM}^2) \backsim (\overline{CR}^2 + \overline{RN'}^2)$$

$$= a^2 \backsim b^2,$$

e conclue-se que a differença dos quadrados de dois diametros conjugados, he igual á differença dos quadrados dos dois eixos principaes

811. Tirando CF' perpendicular á tangente será

$$CF' = \frac{PM \times CT}{TM},$$

e

$$CN' = \frac{TM \times CR}{PT},$$

$$CF' . CN' = \frac{PM . CT . CR}{PT} = ab = MI \times CF \ (\S\ 808);$$

e conclue-se que o parallelogrammo formado pelas tangentes dos extremos de hum diametro, e rectas que passão por esses extremos, e pelos do outro diametro conjugado, he igual ao rectangulo dos eixos principaes.

812. Tomando o vertice principal A para origem de abscissas AP (x) será

$$z = a + x,$$

e logo

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

outra equação da hyperbola.

813. O parametro $\frac{b^2}{a^2} . 2a$ da ultima equação he a corda dupla ordenada que passa pelo foco, e acha-se fazendo $x = c - a$.

814. Na equação $u\,z = \frac{e}{a\,b}$ da hyperbola referida ás asymptotas, ao parametro $\frac{e}{a\,b}$ chama-se *potencia* da hyperbola.

Fig. 274. 815. Achar huma curva tal, que se de qualquer dos seus pontos M se tirar para hum ponto F dado huma recta MF, esta seja igual á distancia perpendicular MH de M a huma recta XZ dada de posição.

Parte d'esta curva póde descrever-se por meio de hum esquadro XHf, e de hum fio $FMf = Hf$ fixos os seus extremos em f, e F, e applicado por hum ponteiro ao lado fH do esquadro, sendo o outro lado HX movel sobre ZX, então o ponteiro descreverá a curva, e seja ella AM.

Para lhe achar a equação e o nome, tire-se FV perpendicular a XZ: a curva ha de passar pelo ponto A, meio de FV, porque este ponto dista igualmente de F e da recta XZ; a AF chame-se c; tire-se PM perpendicular a AF, e chame-se y, e AP chame-se x; será

$$FM = MH = PV = c + x$$

$$= \sqrt{\overline{PF}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{(x \backsim c)^2 + y^2},$$

$$c^2 + 2cx + x^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

donde

$$y^2 = 4cx;$$

logo a curva he a parabola, e AP o seu eixo principal.

816. O parametro $4c$ da ultima equação he a corda dupla ordenada que passa pelo foco F, pois fazendo $x = c$ he $2y = 4c$.

817. Tirando FH, e MT perpendicular a ella, esta será tangente. Se he possivel MT encontre a curva em outro ponto N. Por ser N ponto da perpendicular MT (que passa pelo meio de FH, por ser $MH = MF$) será $NH = NF$, e por ser ponto da curva será a perpendicular $NZ = NF$, logo $NZ = NH$: absurdo.

818. O angulo $HMT = TMF$, e tambem he $HMT = MTF$, logo o angulo da tangente e raio vector he igual ao da tangente e eixo.

819. Logo

$$TF = FM = MH = PV = c + x,$$

logo

$$PT = TF + PF = TF + x - c = 2x$$

igual á subtangente.

820. A subnormal he

$$\frac{y^2}{PT} = \frac{4cx}{2x} = 2c.$$

821. Qualquer secção feita na superficie conica por hum plano, que não passe pelo vertice, he alguma das linhas da segunda ordem, ou curvas do primeiro genero.

Seja $ABCH$ essa secção, e seja D o vertice da pyramide, $AECF$ o circulo secção commum da superficie conica e de hum plano parallelo á base da pyramide, e a recta AC a secção dos planos $ABCH$ e $AECF$: corte-se AC ao meio em G com a perpendicular EF que será portanto diametro do circulo $AECF$: tirem-se DE, DF, e seja BG a secção commum dos planos ABC, EDF. O plano EDF passará pelo centro de qualquer outra secção circular parallela a $AECF$, e logo encontrará hum diametro dessa outra secção parallelo a EF, e esse outro diametro será portanto perpendicular a outra corda parallela a AC, e logo dividi-la-ha em partes iguaes. Represente pois BG a abscissa x, e AG a ordenada y, e BD chame-se a. Os angulos dos triangulos BFG, DEF são dados e logo dadas as razões dos lados; seja pois Fig. 275.

$$GF = mx,$$

$$BF = nx,\ EF = p.DF = p(a + nx):$$

será

$$EG = pa + npx - mx,$$

e pois he

$$\overline{AG}^2 = EG.GF:$$

será

$$y^2 + m(m - np)x^2 - mapx = 0.$$

822. Esta equação mostra que a secção he ellipse se $m(m - np)$ fôr positivo, isto he se fôr $\frac{m}{n} > p$, ou $\frac{GF}{BF} > \frac{EF}{DF}$, isto he se a secção encontrar o lado DE para a parte de E: será hyperbola se fôr $\frac{GF}{BF} < \frac{EF}{DF}$, isto he se a secção encontrar o lado DE produzido da parte do vertice D: e será parabola se fôr $\frac{GF}{BF} = \frac{EF}{DF}$, isto se fôr BG parallela a DE: e a secção será circulo se fôr AGB recto, e

$$\overline{AG}^2 = BG.HG = GE.GF,$$

ou se fôr

$$BG : GF :: GE : GH,$$

ou se fôr

$$\text{ang. } GBF = \text{ang. } GEH.$$

823. Se fôr AGB recto, será AG perpendicular a DEF, e logo DEF perpendicular a EAF, e logo DEF será o plano do eixo e altura.

824. A secção feita na superficie do cylindro por hum plano, em que não esteja o eixo, ou he ellipse ou circulo. Seja $ABCH$ essa secção, e seja $AFCE$ a secção de hum
Fig. 276. plano parallelo ás bases do cylindro, esta será circulo: seja AC a secção commum de ambas as secções, e tire-se pelo meio G de AC a perpendicular EF; será $AG^2 = EG.GF$. Nos triangulos BGF e EGH são dados os angulos, e logo dadas as razões dos lados; chame-se a a BH, x a BG, e y a AG, e seja

$$GF = mx,\ EG = n.GH = n(a - x),$$

e será

$$y^2 = -mnx^2 + mnax,$$

logo a secção será ellipse; e só será circulo não sendo parallela ás bases, se fôr AGB recto e

$$GBF = HEG = GHE,$$

ou se fôr $GH = GE$, o que só póde acontecer não sendo recto o cylindro, e sendo EFB o plano do eixo e altura (§ 823).

825. Em huma curva regular, isto he, em huma curva em que a ordenada he funcção da abscissa, a rasão das differenciaes da ordenada e abscissa he igual á rasão da ordenada e subtangente.

Sejão AP, PM as coordenadas x e y de huma curva AM; Fig. 286.
BM a tangente rectilinea, e PB a subtangente (s): tirem-se as ordenadas proximas pm, $p'm'$ que encontrem a tangente em C e C', produzidas sendo necessario; chame-se i a pP e a $p'P$.

Para que BM seja tangente, he preciso que junto ao ponto M do contacto, deixe a curva para a mesma parte; logo por mais pequeno que seja i sempre pC e $p'C'$ são ambas maiores ou ambas menores respectivamente que pm, e $p'm'$. He

$$pC = \frac{y(s+i)}{s}, \text{ e } p'C' = \frac{y(s-i)}{s},$$

e seja

$$y = \varphi(x),$$

será

$$\frac{y(s+i)}{s} > \varphi(x+i)$$

e

$$\frac{y(s-i)}{s} > \varphi(x-i),$$

isto he será

$$y + \frac{y}{s}.i > y + \frac{dy}{dx}.i + \frac{d^2y}{2dx^2}.i^2 + etc.,$$

e

$$y - \frac{y}{s}.i > y - \frac{dy}{dx}.i + \frac{d^2y}{2dx^2}.i^2 - etc.,$$

logo

$$\frac{y}{s} \cdot i < \frac{dy}{dx} \cdot i - \frac{d^2 y}{2 dx^2} \cdot i^2 + etc.,$$

e

$$\frac{y}{s} \cdot i > \frac{dy}{dx} \cdot i + \frac{d^2 y}{2 dx^2} \cdot i^2 + etc.,$$

logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s};$$

e o mesmo se mostra quando $p\,C$, e $p'\,C'$ são ambas menores que $p\,m$, e $p'\,m'$.

Exemplo. A equação

$$y^2 = ax + bx^2,$$

que pertence a todas as secções conicas, sendo differenciada dá

$$2y\,dy = a\,dx + 2bx\,dx,$$

logo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a + 2bx},$$

e logo a subtangente

$$BP = \frac{2y^2}{a + 2bx} = \frac{2ax + 2bx^2}{a + 2bx}.$$

Se a curva fôr a parabola será $b = 0$; e logo $BP = 2x$. Sendo as coordenadas perpendiculares, he a subnormal

$$PE = y\left(\frac{y}{s}\right) = y\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

logo n'este exemplo he

$$PE = \frac{a + 2bx}{2}.$$

826. Segue-se que representando dx por $i = Pp = Mq$, será dy representada por $q\,C$. Segue-se tambem que he

$$Cm = \pm\left(\frac{d^2 y}{2 dx^2}\, i^2 + \frac{d^3 y}{2 \,.\, 3\, dx^3}\, i^3 + etc.\right);$$

isto he, Cm he da segunda ordem a respeito de i infinitesimo. O que mostra que n'este caso qm que he realmente $= dy$, he tambem $= qC$, por ser Cm da segunda ordem.

Conclue-se tambem que o espaço $MDmM$, comprehendido entre o elemento do arco e a corda, he infinitesimo da terceira ordem por ser ainda menor que o triangulo

$$MmC = \frac{1}{2}\, Cm \times Mq.$$

827. A rasão das differenciaes da area de huma curva e abscissa he igual á ordenada, sendo recto o angulo das coordenadas.

A area de que se trata he APM, e chame-se $\psi(x)$: será a area $MDmpP <$ que o rectangulo completado com pP, e pm, e $>$ que o completado com Pp, e PM, isto he, será $\psi(x+i) - \psi(x)$ media entre $i\varphi(x+i)$, e $i\varphi(x)$, e logo as tres series

$$\varphi(x) \,.\, i + \frac{d\varphi x}{dx} \,.\, i^2 + etc.,$$

$$\frac{d\psi(x)}{dx} \,.\, i + \frac{d^2\psi(x)}{2dx^2} \,.\, i^2 + etc.,$$

$$\varphi(x) \,.\, i$$

dão

$$\varphi(x) = \frac{d\psi(x)}{dx} = y,$$

ou

$$APM = \int y\, dx.$$

Exemplo. A equação das parabolas de todos os graus $y^m = x^n a^{m-n}$, assim chamada porque pertence á parabola ordinaria quando $n = 1$, e $m = 2$, dá

$$y = x^{\frac{n}{m}} a^{\frac{m-n}{m}};$$

logo

$$\int y\,dx = a^{\frac{m-n}{m}} \int x^{\frac{n}{m}}\,dx = \frac{m}{m+n} a^{\frac{m-n}{m}} x^{\frac{m+n}{m}} + C.$$

Querendo contar os espaços desde a origem A dos x, temos $C=0$; logo

$$APM = \frac{m}{m+n} xy,$$

igual á parte determinada $\frac{m}{m+n}$ do rectangulo que y e x determinão. Pelo que todas as parabolas são quadraveis, isto he, podem avaliar-se geometricamente as superficies comprehendidas por arcos d'essas curvas e suas coordenadas respectivas.

828. A rasão das differenciaes da curva e abscissa he igual á da tangente (t), e subtangente (s).

Seja $\theta(x)$ a funcção que a curva AM he de x: será o arco $Mm <$ a somma das duas rectas MC e Cm, e $>$ a recta Mm, isto he, tirando Mq perpendicular a pC, sendo recto o angulo das coordenadas, será MDm media entre $\sqrt{\overline{Mq}^2 + \overline{Cq}^2} + Cm$, e $\sqrt{\overline{Mq}^2 + \overline{qm}^2}$; logo as tres series

$$\sqrt{\left(i^2 + \frac{y^2 i^2}{s^2}\right)} \pm \frac{d^2 y}{2\,dx^2}.\,i^2 \pm \frac{d^3 y}{2.3\,dx^3}.\,i^3 \pm etc.,$$

$$\theta(x+i) - \theta(x),$$

$$\sqrt{i^2 + \left(\frac{dy}{dx}.\,i + \frac{d^2 y}{2\,dx^2}.\,i^2 + etc.\right)^2},$$

dão

$$\frac{d\,\theta(x)}{dx} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{s^2}} = \frac{t}{s}.$$

Donde se conhece que he

$$d\,\theta x = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ou que a differencial do arco não differe da corda do mesmo arco differencial, sendo $Pp = dx$, e por consequencia $qm = dy$.

Tambem se segue que, por ser

$$MC : Mq\,(dx) :: t : s,$$

he $MC = d\theta$, de fórma que se a curva fôr circulo, e o seu raio $EM = 1$, MC perpendicular ao raio e infinitesimo póde representar a differencial do arco AM, ou do angulo AEM que elle mede.

Exemplo. Applicando pois a formula $\theta(x) = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ poderemos rectificar qualquer curva, isto he, achar a recta que lhe he igual ou exactamente, ou tão approximadamente quanto se quizer. A equação geral das parabolas dá

$$\frac{m\,dy}{y} = \frac{n\,dx}{x};$$

logo

$$\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \frac{dx}{m}\sqrt{\left(m^2 + n^2 a^{\frac{2m-2n}{m}} x^{\frac{2n-2m}{m}}\right)}.$$

Esta quantidade he integravel quando

$$-\left(\frac{0+1}{\frac{2n-2m}{m}} + \frac{1}{2}\right) = t,$$

sendo t hum numero inteiro positivo, isto he, quando

$$m = \frac{2t+1}{2t}\,n:$$

logo são rectificaveis as parabolas que se comprehendem na equação

$$y^{\frac{2t+1}{2t}} = a^{\frac{1}{2t}}\,x.$$

Assim a segunda parabola cubica cuja equação he $y^3 = ax^2$, he rectificavel exactamente.

829. Chamando z ao arco $\theta(x)$, será

$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{t}{s} \cdot \frac{s}{y} = \frac{t}{y}.$$

830. A superficie curva da pyramide conica recta, he metade do producto da circumferencia da base pela recta tirada do vertice para qualquer ponto d'essa circumferencia.

Fig. 277. Seja AB parte da circumferencia da base, C o centro; tire-se AC, e do ponto B conduza-se a ordenada BD perpendicular a AC; seja EF outra ordenada; pelo ponto B tire-se a tangente BH que encontre em H, EF produzida; tire-se BE; do vertice L tirem-se as rectas LA, LB, LE, LF, LH. A superficie curva LAB he huma funcção de AD ou de x, denote-se por $F(x)$. Será

$$LBH + LHE + BEH > LBmE + BEmB > LBE;$$

isto he

$$\frac{1}{2} LB \times BH + \frac{1}{2} EH \times LF + \frac{1}{2} EH \times DF$$

$$> F(x+i) - F(x) + bi^3$$

$$> \frac{1}{2} BE \times \sqrt{\left(\overline{BL}^2 - \frac{\overline{BE}^2}{4}\right)};$$

isto he, as tres series

$$\frac{1}{2} LB \sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} i + ci^2 + bi^3$$

$$\frac{dF(x)}{dx} \cdot i + \frac{d^2 F(x)}{2 dx^2} \cdot i^2 + \text{etc.},$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2+ai\right)}\sqrt{\left(\overline{LB}^2-\left(\tfrac{1}{2}i\sqrt{\left(1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2+ai\right)}\right)^2\right)}.i$$

dão

$$\tfrac{1}{2}LB\sqrt{\left(1+\left(\tfrac{dy}{dx}\right)^2\right)}=\frac{dF(x)}{dx}=\tfrac{1}{2}LB.\frac{d\theta(x)}{dx},$$

e logo

$$F(x)=\tfrac{1}{2}LB.\theta(x).$$

831. Com a mesma construcção, suppondo só de mais que L está em C, acha-se a superficie do circulo igual a metade do producto da circumferencia pelo raio, ou $=\pi r^2$.

832. E levantando sobre a circumferencia da base a superficie curva do cylindro se demonstra pelo mesmo modo, que esta he o producto da circumferencia pela altura.

833. Na pyramide formada por GFH revolvendo-se sobre GF, he a superficie descripta por BH igual á differença das superficies conicas curvas descriptas por HG, e por BG, isto he Fig. 278.

$$=\frac{GH\,\text{circ.}\,FH-GB\,\text{cir}\,BD}{2}$$

$$=\frac{2\pi(GH.FH-GB.BD)}{2}$$

$$=\pi\big(FH.GH-BD(GH-BH)\big)$$

$$=\pi(FH.GH-FH.BG+BD.BH)$$

$$=\pi(FH+BD)BH.$$

No solido formado na mesma revolução pela curva ABE, he a superficie descripta por $BmE >$ a descripta pela recta BE, e $<$ as descriptas por BH e BE, isto he, chamando $f(x)$ á superficie do solido descripta por AB, teremos no caso do § 830 as tres series

$$\pi\left(\varphi(x)+\varphi(x+i)+ai^2\right)i\sqrt{\left(1+\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2\right)}$$

$$+\pi\left(\varphi(x)+\varphi(x+i)+ai^2\right)ai^2,$$

$$f(x+i)-f(x),$$

$$\pi\left(\varphi(x)+\varphi(x+i)\right)i\sqrt{\left(1+\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2\right)}+ai^2,$$

e portanto dão

$$\frac{df(x)}{dx}=2\pi.\varphi(x)\sqrt{\left(1+\left(\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)^2\right)}$$

$$=2\pi.\varphi(x).\frac{d\theta(x)}{dx}.$$

834. Se a curva AB fôr circulo, a superficie descripta será espherica, e será $\varphi(x)=\operatorname{sen} z$, e $\frac{d\theta(x)}{dx}=\frac{r}{\operatorname{sen} z}$, e logo

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{2\pi r\,dx}{dx},$$

portanto

$$f(x)=2\pi rx;$$

isto he, a superficie de hum segmento de esphera, ou a zona, he igual ao producto da circumferencia de hum circulo maximo $2\pi r$ pela altura x do segmento, e logo a superficie de toda a esphera he igual a

$$2\pi r.2r=4\pi r^2,$$

igual a quatro vezes a superficie de hum circulo maximo.

Fig. 286. 835. Seja x a altura de hum solido $\Gamma(x)$; $\Delta(x)$ a sua

base; e $(x+i)$ a altura do solido $\Gamma(x+i)$: será o solido $\Gamma(x+i)-\Gamma(x)$ medio em valor entre os solidos $i\Delta(x)$, $i\Delta(x+i)$; e logo

$$\frac{d\,\Gamma(x)}{dx}=\Delta(x).$$

836. Se o solido fôr hum segmento espherico, será

$$\Delta(x)=\pi y^2=\pi(2rx-x^2),$$

e

$$\frac{d\,\Gamma(x)}{dx}=\frac{\pi d\left(rx^2-\frac{x^3}{3}\right)}{dx}$$

$$\Gamma(x)=\pi x^2\left(r-\frac{x}{3}\right),$$

e logo toda

$$\text{a esphera}=\pi(2r)^2\left(r-\frac{2r}{3}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}2r.\pi r^2;$$

dois terços do circulo que tem por base hum circulo maximo, e por altura o diametro.

837. Na pyramide conica chamando a ao raio da base, e b á altura, e formando huma secção parallela á base, e chamando y ao seu raio, e x á parte da altura comprehendida por ella e pelo vertice: será

$$y=\frac{ax}{b},$$

e logo na pyramide de que esta secção he base será

$$\Delta(x)=\frac{\pi a^2x^2}{b^2},$$

e

$$\frac{d\,\Gamma(x)}{dx}=\frac{d\left(\frac{\pi a^2x^3}{3b^2}\right)}{dx},$$

d'onde

$$\Gamma(x) = \frac{\pi a^2 x^2}{b^2} \cdot \frac{x}{3};$$

logo he toda

$$\text{a pyramide} = \frac{\pi a^2 b^2}{b^2} \cdot \frac{b}{3} = \pi a^2 \cdot \frac{b}{3},$$

igual á terça parte do producto da base pela altura.

Fig. 279. 838. O solido A occupa o espaço, que a figura plana B descreveria movendo-se do logar B para o logar C, de sorte que hum triangulo, descripto n'ella, descrevesse simultaneamente hum prisma: a altura d'este prisma he a do solido A. Digo que o solido A será igual ao prisma, que tiver essa altura, e huma base igual á base B.

O solido A póde considerar-se composto de solidos da mesma altura, cujas bases sejão taes como $\alpha\beta\gamma$, nas quaes $\alpha\gamma$, $\gamma\beta$ são linhas rectas; e $\alpha\beta$, hum arco todo concavo, ou todo convexo para a parte da recta que se tirar do ponto α ao ponto β, e que caia todo dentro do parallelogrammo que se formar tirando de α e β parallelas a $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$; assim bastará demonstrar a proposição d'estes solidos. Chame-se S o solido cuja base he $\alpha\beta\gamma$, e a altura. Se $a \times \alpha\beta\gamma$ não he $= S$, seja D a differença. Com o lado $\beta\gamma$ e o angulo $\alpha\gamma\beta$ faça-se o parallelogrammo $\beta\delta < \frac{D}{a}$: cortem-se

$$\delta\varepsilon = \gamma\delta = \varepsilon\zeta = \text{etc.},$$

e assim por diante até encontrar o segmento $\zeta\alpha$ não maior que $\gamma\delta$: completem-se os parallelogrammos inscriptos $\gamma\varkappa$, $\delta\lambda$, $\varepsilon\mu$, etc., e chame-se R o rectilineo que d'elles se compõe: será $\alpha\beta\gamma - R$ igual á somma dos espaços $\beta\varkappa\pi$, $\varkappa\lambda\rho$, $\lambda\mu\sigma$, etc.; e logo menor que o parallelogrammo $\beta\delta$, e logo $< \frac{D}{a}$. Inscrevão-se no solido S parallelipipedos que tenhão por bases os parallelogrammos $\gamma\varkappa$, $\delta\lambda$, $\varepsilon\mu$, etc., e ao solido, que tem por base $\beta\varkappa\pi$, circumscreva-se hum parallelipipedo que tenha por base $\pi\tau$, e tambem se achará

$S - aR < a \times \mathcal{E}\delta$, e logo tambem $< a\,\frac{D}{a}$, isto he $< D$. Seja pois, se he possivel, $S > a \times \alpha\mathcal{E}\gamma$: será $aR > a \times \alpha\mathcal{E}\gamma$; absurdo. Seja $a \times \alpha\mathcal{E}\gamma > S$: pois he $\alpha\mathcal{E}\gamma - R < \frac{D}{a}$, será $a \times \alpha\mathcal{E}\gamma - aR < D$, e logo $aR > S$; absurdo. Logo he $a \times \alpha\mathcal{E}\gamma = S$.

839. A serie $a\,i^{n} + b\,i^{n+1} + c\,i^{n+2} +$ etc., sempre se póde fazer quantidade do mesmo signal que o seu primeiro termo, sendo n'ella a, b, c, etc., grandezas determinadas positivas ou negativas, e i indeterminada, que possa ser tão pequena quanto se quizer.

Seja primeiro a positivo. Como sabemos, póde fazer-se

$$b\,i + c\,i^{2} + \text{etc.}, < a,$$

d'onde

$$b\,i^{n+1} + c\,i^{n+2} + \text{etc.}, < a\,i^{n};$$

e logo na serie proposta será então a somma de todos os termos, excepto o primeiro, menor que o primeiro; e portanto a serie será positiva então, porque o primeiro termo he positivo. Por ser

$$-a\,i^{n} + b\,i^{n+1} + c\,i^{n+2} + \text{etc.}, < 0,$$

he ou póde ser negativa a serie proposta, se o primeiro termo he negativo.

840. A inversa da proposição do § 825, tambem he verdadeira, isto he, que se huma recta e huma curva teem hum ponto e ordenada $y\,(\varphi x)$ desse ponto, communs, e fôr $\frac{y}{s} = \frac{dy}{dx}$ (sendo s a parte do eixo que essa recta e essa ordenada cortão); a recta e a curva tocar-se-hão; não sendo

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 0,$$

ou sendo

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 0, \text{ e } \frac{d^3 y}{d x^3} = 0,$$

não o sendo $\frac{d^4 y}{d x^4}$, etc.

Pois, se he possivel, não se toquem, mas cortem-se n'esse ponto commum; então as ordenadas da curva de huma parte de y serão maiores que as da recta, e da outra parte serão menores, isto he

$$\varphi(x+i) \gtrless y + \frac{y}{s} i;$$

e

$$\varphi(x-i) \lessgtr y - \frac{y}{s} i;$$

e logo serão

$$\frac{d^2 \varphi x}{2 d x^2} . i^2 + \frac{d^3 \varphi x}{2 . 3 d x^3} . i^3 + \text{etc.}, \gtrless 0,$$

$$-\frac{d^2 \varphi x}{2 d x^2} . i^2 + \frac{d^3 \varphi x}{2 . 3 d x^3} . i^3 - \text{etc.}, \gtrless 0,$$

isto he, duas grandezas, que se podem fazer contrarias pelo § precedente, ambas maiores ou ambas menores que zero: absurdo; logo a recta e a curva tocão-se.

841. Discorrendo como no § 825, póde mostrar-se que tocando-se duas curvas, e sendo a ordenada commum do ponto de contacto φx em huma e ψx em outra, que será tambem $\frac{d \varphi x}{d x} = \frac{d \psi x}{d x}$ para a abscissa commum correspondente a esse ponto de contacto.

842. A inversa da proposição antecedente tambem he verdadeira, e prova-se discorrendo como no § 840.

843. Duas linhas que tocão huma terceira em hum ponto, tocão-se entre si n'esse ponto.

A ordenada commum seja φx, e ψx para as duas linhas e $f x$ para a terceira; serão $\frac{d \varphi x}{d x} = \frac{d f x}{d x}$; e

$$\frac{d \psi x}{d x} = \frac{d f x}{d x};$$

(§ 841), e logo

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{d\psi x}{dx},$$

e por tanto as duas linhas tocão-se (§ 842).

844. A proposição do § 841 não só he verdadeira, sendo as coordenadas do ponto de contacto communs ás duas curvas, mas tambem sendo a ordenada y' de huma a ordenada y da outra, produzida, e a abscissa de y' igual e parallela á da outra, comtanto que tenhão huma tangente rectilinea no mesmo ponto de contacto.

Pois seja s' a subtangente relativa a y', será

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{y'}{s'};$$

e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}:$$

mas por similhança de triangulos he

$$\frac{y'}{s'} = \frac{y}{s};$$

logo

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

845. Entre a tangente rectilinea e a curva não se póde tirar do ponto de contacto outra recta.

Pois se fosse possivel, as suas ordenadas serião medias em valor entre as da tangente e da curva; isto he, chamando s' á parte do eixo que está entre essa recta e a ordenada commum, as tres series

$$y \pm \frac{y}{s}.i,$$

$$y \pm \frac{y}{s'}.i,$$

$$y \pm \frac{dy}{dx}.i + \frac{d^2y}{2dx^2}.i^2 \pm \text{etc.},$$

por ser

$$\frac{y}{s} = \frac{dy}{dx},$$

darião

$$\frac{y}{s} = \frac{y}{s'}:$$

absurdo.

846. Logo huma curva não póde ter no mesmo ponto duas tangentes rectilineas.

847. E por consequencia nem duas curvas que se tocão; poisque ambas estas tangentes rectilineas o serião de huma pelo § 843.

848. Se huma curva regular, e hum circulo se tocarem de modo que entre elles não se possa tirar, pelo ponto de contacto, outro arco de circulo; diz-se que a curva tem n'esse ponto a mesma curvatura que o circulo. O circulo chama-se *osculador:* o seu raio chama-se *raio de curvatura:* e a curva que he logar dos centros de todos os circulos osculadores, chama-se *evoluta da curva proposta.*

849. Dos §§ 825 e 828, se deduz que a tangente trigonometrica, do angulo formado pela tangente rectilinea da curva z, e pela ordenada, he $\frac{dx}{dy}$: o seno he $\frac{dx}{dz}$: o coseno he $\frac{dy}{dz}$.

850. Dizer que por entre o circulo osculador e a curva se não póde tirar outro circulo, he dizer que o circulo osculador he o minimo de todos os circulos que tocão e abração a curva; ou o maximo de todos os que são tocados e abraçados pela mesma curva: a indagação pois do raio de curvatura reduz-se a achar o maximo ou minimo da expressão que representar qualquer dos raios dos circulos tangentes da curva.

Fig. 287. Seja pois AM huma curva proposta z, AP (x), PM (y), as suas coordenadas. Se a curva proposta tem huma osculação no ponto M, terá huma tangente rectilinea MT que he a do circulo osculador (§ 843). Tire-se MN perpendicular a TM: qualquer ponto m de MN he centro, e Mm

he raio de circulo tangente de z em M: MP produzida ou não, e mA' parallela a AP determinão P': chame-se y' a MP'; tome-se $A'P'=x$. Será

$$Mm = \frac{y'}{\cos mMP'} = \frac{y'}{\operatorname{sen} TMP'} = \frac{y'\,dz}{dx}$$

a expressão que deve ser hum maximo, ou hum minimo: e logo

$$d\left(\frac{y'\,dz}{dx}\right) = 0 = \frac{dy'\,dz + y'\,ddz}{dx};$$

ou

$$y' = -\frac{dy'\,dz}{ddz};$$

mas por ser

$$dz^2 = dx^2 + dy^2,$$

he

$$dz\,ddz = dy\,ddy,$$

ou

$$ddz = \frac{dy\,ddy}{dz};$$

e he $dy' = dy$ (§ 844); logo

$$y' = -\frac{dz^2}{ddy},$$

e

$$Mm = -\frac{dz^3}{dx\,ddy},$$

he o raio de curvatura, e se chame R.

851. Seja am a evoluta (s). Complete-se o rectangulo Pm; e sejão $Ap\,(t)$, $pm\,(u)$ as coordenadas da evoluta. Será

$$t = P'm + x = R \operatorname{sen} mMP' + x$$

$$= R\cos TMP' + x = R\,\frac{dy}{dz} + x;$$

e

$$u = y' - y = R\cos mMP' - y$$

$$=R\,\text{sen}\,TMP'-y=R\,\frac{dx}{dz}-y:$$

logo serão

$$dt=\frac{dRdy}{dz}+Rd\,\frac{dy}{dz}+dx=\frac{dRdy}{dz};$$

$$du=\frac{dRdx}{dz}+Rd\,\frac{dx}{dz}-dy=\frac{dRdx}{dz};$$

d'onde

$$\frac{du}{dt}=\frac{dx}{dy}=\text{tang}\,TMP'=\text{tang}\,pNm=\frac{mp}{Np};$$

logo (§ 840) o raio de curvatura he tangente da evoluta.

852. Será

$$ds^2=dt^2+du^2=dR^2\left(\frac{dx^2+dy^2}{dz^2}\right);$$

d'onde

$$ds=dR;$$

logo se entre a evoluta e o raio de curvatura ha differença, esta não depende da raiz x, ou he a mesma para todos os pontos da curva.

853. A expressão $R=-\frac{dz^3}{dxddy}$ foi achada na hypothese de ser x raiz, ou dx constante; e n'essa hypothese tambem he

$$R=-\frac{dz^3}{dx^2d\frac{dy}{dx}};$$

mas se quizermos considerar z raiz ou dz constante, e dx variavel, será então

$$R=-\frac{dz^3}{dxddy-dyddx},$$

que por ser

$$d(dz^2)=0=d(dx^2+dy^2),$$

e logo

$$ddy=-\frac{dxddx}{dy},$$

se muda em

$$R=\frac{dz^3}{\left(\frac{dx^2+dy^2}{dy}\right)ddx}=\frac{dy\,dz}{ddx}:$$

854. A rasão de se dizer (§ 848) que a curva tem no ponto do contacto a mesma curvatura que o circulo osculador, he porque tomando sobre a curva mais dois pontos m, m' infinitamente proximos d'esse ponto M, o circulo que passa por estes tres pontos tem o seu raio igual ao de curvatura. Porque tiradas d'esses pontos ordenadas perpendiculares á abscissa e rectas parallelas a esta, se pP representar a differencial da abscissa, ou se fôr $=dx$, será Fig. 280.

$$mn=dy,$$

$$pp'=nn'=dx+ddx,$$

$$m'n'=dy+ddy.$$

Teremos pois corda

$$Mm=\sqrt{dx^2+dy^2}=ds.$$

sendo ds a differencial da curva.

$$mm'=\sqrt{(dx+ddx)^2+(dy+ddy)^2}.$$

$$Mm'=\sqrt{(2dx+ddx)^2+(2dy+ddy)^2}.$$

Logo sendo ds constante he

$$dx\,ddx+dy\,ddy=0.$$

Logo

$$Mm=ds;$$

$$mm'=\sqrt{ds^2+(ddx)^2+(ddy)^2}$$

$$=ds+\frac{1}{2ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right);$$

$$Mm'=\sqrt{4ds^2+(ddx)^2+(ddy)^2}$$

$$=2ds+\frac{1}{4ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right)$$

são os lados do triangulo Mmm', cujo raio r se póde por tanto achar, e teremos

$$p=2ds+\frac{3}{8ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right),$$

$$p-a=\frac{1}{8ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right),$$

$$p-b=ds+\frac{3}{8ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right),$$

$$p-c=ds-\frac{1}{8ds}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right).$$

O producto das duas primeiras he $\frac{1}{4}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right)$, das outras duas he $ds^2+\frac{1}{4}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right)$; logo

$$r=\frac{2ds^3}{4ds\sqrt{\frac{1}{4}\left((ddx)^2+(ddy)^2\right)}}=\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx)^2+(ddy)^2}}$$

Porque he

$$ddy=\frac{dxddx}{dy},$$

será

$$r=\frac{ds^2}{\sqrt{(ddx)^2+\frac{dx^2(ddx)^2}{dy^2}}}=\frac{dyds}{ddx}=R.$$

855. Não obstante cortarem-se duas linhas, diz-se que os seus ramos, que terminão no ponto commum, se tocão quando as suas ordenadas não têem differença da primeira ordem, e então se diz que teem hum contacto da primeira ordem; e se tambem não tem differença da segunda ordem, o contacto se diz da segunda ordem, etc., isto he, que sendo $\varphi(x+i)$, $\psi(x+i)$ as ordenadas correspondentes dos dois ramos das duas linhas, elles se dizem tocar-se aindaque as curvas se cortem, se fôr $\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{d\psi x}{dx}$; e o contacto se diz da primeira ordem; e se fôr tambem $\frac{d^2\varphi x}{dx^2} = \frac{d^2\psi x}{dx^2}$ o contacto será da segunda ordem, etc.

856. Assim no ponto de inflexão, isto he, no ponto M que separa concavidades oppostas da curva AMN, se tirarmos de M a recta MC por meio da subtangente ou com a condição $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s}$, será tangente do ramo MN, por não haver entre as ordenadas do ramo e da recta assim tirada differença da primeira ordem: e produzida esta recta será tambem BM tangente do ramo AM por não haver entre as suas ordenadas $y - \frac{y}{s}i$, e $y - \frac{dy}{dx}i + \frac{d^2y}{2dx^2}i^2$ — etc., differença da primeira ordem, pois he Fig. 288.

$$\frac{y}{s}i = \frac{dy}{dx}i.$$

N'este caso, para senão chegar ao absurdo do § 840, he preciso que seja

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

e não $\frac{d^3y}{dx^3}$, ou que sendo tambem

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

tambem o seja $\frac{d^4y}{dx^4}$ e não $\frac{d^5y}{dx^5}$; e assim por diante.

857. *Ponto multiplo* he o ponto commum a muitos ramos de huma curva. Chama-se *duplo* se he commum a dois ramos: *triplo* se he commum a tres: etc. O numero de ra-

mos he contado pelo numero de ordenadas differentes, correspondentes á mesma abscissa, e da parte da ordenada do ponto multiplo em que este numero he maior.

858. Dada a equação de huma curva algebrica acharlhe os pontos multiplos. Tirar tambem por estes pontos tangentes.

Seja $u=0$ a equação da curva, será u da fórma

$$a+bx+cy+fxy+ex^2+gy^2+\text{etc.}$$

Se o ponto fôr duplo as duas ordenadas dos dois ramos far-se-hão iguaes no ponto multiplo; logo considerando y como numero principal, terá então a equação $u=0$ duas raizes iguaes, e será

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=0,$$

e logo

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=0;$$

logo os valores de x e y que satisfazem ás tres equações

$$u=0, \left(\frac{du}{dx}\right)=0, \left(\frac{du}{dy}\right)=0$$

são as ordenadas do ponto duplo.

Se o ponto fôr triplo as tres ordenadas dos tres ramos far-se-hão iguaes n'esse ponto; logo considerando y como numero principal terá então a equação $u=0$ tres raizes iguaes, e serão

$$\left(\frac{du}{dy}\right)=0, \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=0;$$

e logo

$$\left(\frac{du}{dx}\right)=0; \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)=0; \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=0,$$

e os valores de x e y que satisfazem a estas seis equações são as coordenadas do ponto triplo. Assim por diante.

Quando o ponto he duplo, a relação entre dx e dy, que determina a posição das tangentes, não se póde achar na equação $du=0=adx+bdy$, por serem as differenciaes parciaes a e b ambas iguaes a zero; mas acha-se na equação

$$d^2u=cdx^2+edxdy+fdy^2+gddy$$

$$=cdx^2+edxdy+fdy^2=0,$$

por ser $g=0$, pois he g differencial parcial da primeira ordem.

Quando o ponto he triplo, nem na antecedente se póde achar essa relação, por serem c, e, f differenciaes parciaes da segunda ordem que, n'este caso, todas são iguaes a zero; mas acha-se na equação

$$d^3u=hdx^3+idx^2dy+ldxdy^2$$

$$+mdy^3+nddy+pdddy$$

$$=hdx^3+idx^2dy+ldxdy^2+mdy^3=0,$$

por serem iguaes a zero, n porque he da segunda ordem, e p da primeira.

Assim por diante.

Sendo estas equações, que determinão essa relação, as mesmas, que se acharião suppondo tambem dy constante.

Se sahirem alguns valores iguaes para a relação entre dx e dy, isto indica que outros tantos ramos se tocão, ou teem a mesma tangente rectilinea.

859. Achar huma asymptota rectilinea Tm da curva AM. Fig. 289.

Sejão $Pm\,(y')$, e $PM\,(y)$ ordenadas da asymptota e da curva, e levante-se a perpendicular AK. $AT\,(\alpha)$ e $AK\,(6)$ determinarão a asymptota. Para que Tm seja asymptota, he preciso que $y'-y$ admitta valor menor do que qualquer grandeza que se proponha: pois seja m' o ponto da curva de que m dista menos, deverá mm' no caso de asymptotismo, ou $Q\,m - Q\,m'$, ou $\frac{y'-y}{\cos Q\,m\,P}$ admittir valor menor do que a qualquer grandeza que se proponha, o que não póde ser sem $y'-y$ o admittir: mas he

$$y' = \beta + \frac{\beta}{\alpha}\,x;$$

logo he preciso que haja em y dois termos hum da fórma b, e o outro da fórma $\frac{b}{a}\,x$, que aniquilem y' e determinem β e α; e que o resto de y seja huma funcção de x, que possa ser maior que qualquer grandeza que se proponha.

Exemplo. Seja a curva proposta huma hyperbola e,

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2\,a\,x + x^2} = \frac{b}{a}\,x\sqrt{1 + \frac{2\,a}{x}}$$

$$= \frac{b}{a}\,x + b - \frac{a^2}{2\,x} + \frac{a^3}{2\,x^2} - \text{etc.};$$

poderá $y'-y$ ser menor do que qualquer grandeza, que se proponha, fazendo $\beta = b$, e $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a}$, ou $\alpha = a$, e Tm será asymptota como já se achou (§§ 784, e 807).

As condições que determinão as asymptotas rectilineas ficão achadas, e já se póde ver como se acharão as das curvilineas: mas as seguintes considerações facilitão estas indagações.

860. Para que a curva tenha asymptotas rectilineas he preciso que seja

$$y = \beta + \frac{\beta}{\alpha}\,x + f\,x,$$

e logo

$$y\,\frac{d\,x}{d\,y} - x = \alpha + \frac{\alpha\,x\,(f\,x - \psi\,x) - \alpha^2\,\psi\,x}{\beta\,x + \alpha\,\psi\,x},$$

na supposição de x infinito determina α; e

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\psi\,x}{x}$$

na mesma supposição determina $\frac{\beta}{\alpha}$; e

$$\alpha \frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{y\,dx}{dy} - x\right)\frac{dy}{dx}$$

$$= y - \frac{x\,dy}{dx}$$

determina β.

861. Logo as asymptotas rectilineas podem ser determinadas pelos mesmos meios com que se determinão as tangentes rectilineas, tiradas de huma distancia finita do vertice para hum ponto da curva a huma distancia infinita.

862. As duas parabolas AM e Bm, que têem o mesmo eixo principal $BA\,(a)$, e o mesmo parametro p, são asymptotas huma da outra. Pois serão Fig. 290.

$$y^2 = px,$$

e

$$y'^2 = p\,(a + x);$$

e logo

$$y' - y = \sqrt{p}\,(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$$

$$= \sqrt{p}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{a^2}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{a^3}{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5} - \text{etc.}\right),$$

expressão que x infinito faz infinitessima.

863. O ponto duplo chama-se *ponto de reversão*, quando esse ponto he limite dos ramos immediatos da curva, isto he, hum ponto tal que se possa tirar por elle huma recta que deixe esses ramos para a mesma parte. Chama-se *reversão da primeira especie* quando os dois ramos são convexos hum para o outro; e *da segunda especie*, se hum he convexo e o outro concavo.

Sendo C hum ponto de reversão da primeira especie, he preciso que chamando a a AB, seja y da fórma $P \pm$ Fig. 291.
$Q\,(x-a)^{\frac{m}{2}}$, sendo m qualquer numero positivo, mas não par,

para que a $x < a$ não corresponda ordenada; para que a $x = a$ corresponda só huma; e para que a $x > a$ correspondão duas.

Pois he

$$y = fx = f(a + x - a),$$

escreva-se i por $x - a$, e então, reduzindo a serie, seja

$$y = A + Bi^{b} + Ci^{c} + \text{etc.}$$

$$\pm i^{\frac{m}{2}}\left(A' B' i^{b'} + C' i^{c'} + \text{etc.}\right)$$

será

$$\frac{ddy}{dx^2} = b(b-1)Bi^{b-2} + c(c-1)Ci^{c-2} + \text{etc.}$$

$$\pm i^{\frac{m}{2}-2}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)A' + \text{etc.}\right).$$

Poisque, na reversão da primeira especie, hum dos ramos he convexo e o outro he concavo para o eixo das abscissas, he preciso que $\frac{ddy}{dx^2}$ tenha dois valores, hum positivo e outro negativo (§ 826), ou que $\pm i^{\frac{m}{2}-2} \frac{m}{2}\left(\frac{m}{2}-1\right)A'$ seja o primeiro termo da serie que exprime $\frac{ddy}{dx^2}$, ou que $\frac{m}{2} - 2$ seja o menor expoente d'essa serie, e logo então, no ponto de reversão da primeira especie, aonde $i = 0$, he $\frac{ddy}{dx^2}$ ou zero, ou infinito.

No ponto de reversão da segunda especie, se fôr $b - 2$ o mais pequeno expoente, será $\frac{ddy}{dx^2}$ ou zero, ou finito, ou infinito, segundo fôr b maior, igual, ou menor que 2.

Fig. 292. 864. A curva BS seja construida por huma equação entre $AM\,(x)$ e $MS\,(y)$; $MQ = \frac{ydx}{dy}$, e tangente de AM, póde determinar QS tangente de BS.

Pois sejão $AP\,(x')$, e $PM\,(y')$; será

$$MS:MQ::\text{sen}\,(QMS+QSM):\text{sen}\,QSM,$$

ou

$$MQ=y\,\frac{\text{sen}\,QSM}{\text{sen}\,QMS\cos QSM+\text{sen}\,QSM\cos QMS}$$

$$=\frac{y}{\frac{\text{sen}\,QMP}{\text{tang}\,QSM}-\cos QMP}$$

$$=\frac{y}{\frac{dx'}{dx}\left(\frac{dy+dy'}{dx'}\right)-\frac{dy'}{dx}}=y\,\frac{dx}{dy}.$$

865. A mesma tangente SI póde ser determinada tomando

$$PI=\frac{sydx}{tdy},$$

sendo x o mesmo arco AM; y, PS; t, MT; e s, PT.

Pois he

$$dx'=dy'.\frac{s}{y'}=\frac{dx.y'}{t}.\frac{s}{y'}=\frac{sdx}{t};$$

e tambem

$$dx'=\frac{dy.PI}{y},$$

logo etc.

866. Resultando a curva BM de duas curvas conhecidas AL, CN por huma equação entre as ordenadas correspondentes $PL\,(x)$, $PM\,(y)$, $PN\,(z)$; tirar a tangente a hum ponto qualquer M. Fig. 293.

Seja a subtangente PS da curva $AL=s$, e a subtangente PR da curva $CN=s'$, e seja $AP=x'$.

PC póde ser abscissa da curva CN e igual a

$$AP-AC=x'-a.$$

Será

$$s'=\frac{zd(x'-a)}{dz}=\frac{zdx'}{dz};$$

e tambem

$$s = \frac{x\,d\,x'}{d\,x};$$

e

$$P\,T = \frac{y\,d\,x'}{d\,y};$$

das duas primeiras tira-se

$$d\,z = \frac{s\,z\,d\,x}{s'\,x},$$

que serve para eliminar $d\,z$ da equação differencial da curva proposta, e das duas ultimas tira-se

$$P\,T = \frac{s\,y\,d\,x}{x\,d\,y}.$$

867. Qualquer recta ρ, tirada para huma cūrva do extremo de huma recta dada de posição, e chamada *base*, chama-se raio vector, e esse ponto *polo:* e a equação que dá a relação entre hum raio vector, e o angulo σ que elle faz com a base chama-se *equação polar da curva;* e então a curva tambem se chama *polar*.

868. Na ellipse sendo base o eixo maior, e polo hum dos focos; será § 795. Fig. 270.

$$F\,M\,(\rho) = M\,f - \frac{2\,c\,z}{a}$$

$$= a + \frac{c\,z}{a} - \frac{2\,c\,z}{a}$$

$$= a - \frac{c\,z}{a} = a - \frac{c}{a}\,(c - P\,F)$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a} - \frac{c}{a}\,\rho\cos\sigma$$

$$= \frac{b^2}{a} - \frac{c}{a}\,\rho\cos\sigma;$$

logo he

$$\rho = \frac{b^2}{a - c \,.\, \cos\sigma}$$

a equação polar da ellipse.

869. Na hyperbola, sendo base o eixo principal dos focos e polo hum d'elles, será § 803. Fig. 272.

$$FM(\rho) = \frac{2cz}{a} - fM$$

$$= \frac{2cz}{a} - \frac{cz}{a} - a = \frac{cz}{a} - a$$

$$= \frac{c(c - PF)}{a} - a = \frac{c^2 - a^2}{a} - \frac{c}{a}\rho\cos\sigma$$

$$= \frac{b^2}{a} - \frac{c}{a}\rho\cos\sigma;$$

e logo

$$\rho = \frac{b^2}{a + c \,.\, \cos\sigma}$$

he a equação polar da hyperbola.

870. Na parabola, sendo base o eixo principal e polo o foco, será § 815. Fig. 274.

$$FM(\rho) = c + x = 2c + PF = 2c - \rho\cos\sigma;$$

e logo

$$\rho = \frac{2c}{1 + \cos\sigma}$$

he a equação polar da parabola.

871. Seja a curva $AM(z)$, $PM(\rho)$, e o angulo $APM(\sigma)$; $PQ(x)$; $QM(y)$; $PT(s)$ perpendicular a PM; e $MT(t)$ a tangente da curva: teremos Fig. 294.

1.ª .... $y = \rho \operatorname{sen}\sigma$;

2.ª .... $x = -\rho\cos\sigma$;

3.ª .. $dy = d\rho \operatorname{sen}\sigma + \rho\, d\sigma \cos\sigma$;

4.ª ... $dx = -d\rho \cos\sigma + \rho\, d\sigma \operatorname{sen}\sigma$;

5.ª $ddy = dd\rho \operatorname{sen}\sigma + 2\, d\rho\, d\sigma \cos\sigma - \rho\, d\sigma^2 \operatorname{sen}\sigma$
$+ \rho\, dd\sigma \cos\sigma$;

6.ª $ddx = -dd\rho \cos\sigma + 2\, d\rho\, d\sigma \operatorname{sen}\sigma + \rho\, d\sigma^2 \cos\sigma$
$+ \rho\, dd\sigma \operatorname{sen}\sigma$

872. Logo
$$dz^2 = dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\sigma^2.$$

873. $dAPMA = dAQMA - dPQMP$

$$= y\,dx - d\,\frac{xy}{2}$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{2} = \frac{\rho^2 d\sigma}{2}.$$

874. He
$$\operatorname{tang} TMQ = \frac{\operatorname{tang} TMP + \operatorname{tang} PMQ}{1 - \operatorname{tang} TMP \times \operatorname{tang} PMQ},$$
isto he
$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{s}{\rho} + \frac{x}{y}}{1 - \frac{sx}{\rho y}} = \frac{sy + \rho x}{\rho y - sx},$$
ou
$$\rho(y\,dx - x\,dy) = s(y\,dy + x\,dx)$$
$$= \rho^3 d\sigma = s\rho\, d\rho,$$
logo
$$s = \frac{\rho^2 d\sigma}{d\rho}.$$

875. He $dx\,ddy + dy\,ddx =$

$- d\rho\, dd\rho \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma - 2\, d\rho^2\, d\sigma \cos^2\sigma$

$+ \rho\, d\rho\, d\sigma^2 \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma - \rho\, d\rho\, dd\sigma \cos^2\sigma$

$+ \rho\, dd\rho\, d\sigma \operatorname{sen}^2\sigma + 2\rho\, d\rho\, d\sigma^2 \operatorname{sen}\sigma \cos\sigma$

$$-\rho^2 d\sigma^3 \operatorname{sen}^2\sigma + \rho^2 d\sigma\, d\,d\sigma \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma$$

$$+ d\rho\, d\,d\rho \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma - 2 d\rho^2 d\sigma \operatorname{sen}^2\sigma$$

$$-\rho\, d\rho\, d\sigma^2 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma - \rho\, d\rho\, d\,d\sigma \operatorname{sen}^2\sigma$$

$$+\rho\, d\,d\rho\, d\sigma \cos^2\sigma - 2\rho\, d\rho\, d\sigma^2 \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma$$

$$-\rho^2 d\sigma^3 \cos^2\sigma - \rho^2 d\sigma\, d\,d\sigma \operatorname{sen}\sigma\cos\sigma$$

$$= -2 d\rho^2 d\sigma - \rho\, d\rho\, d\,d\sigma + \rho\, d\,d\rho\, d\sigma - \rho^2 d\sigma^3$$

$$= (\rho\, d\rho)\, d\,d\rho - d\rho\, d(\rho\, d\sigma) - \frac{(\rho\, d\sigma)\, dz^2}{\rho}$$

$$= \rho^2 d\sigma^2 d\frac{d\rho}{\rho\, d\sigma} - d\sigma\, dz^2$$

$$= d\sigma^3\left(-\rho^2 - 2\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 + \frac{\rho\, d\frac{d\rho}{d\sigma}}{d\sigma}\right)$$

876. Logo

$$R = -\frac{dz^3}{dx\, d\,dy - dy\, d\,dx}$$

$$= \frac{dz^3}{dz^2\, d\sigma - \rho^2 d\sigma^2 d\frac{d\rho}{\rho\, d\sigma}}$$

$$= \frac{\rho\, dz^3}{dz^2(\rho\, d\sigma) - \rho(\rho\, d\sigma)^2 d\frac{d\rho}{\rho\, d\sigma}}$$

$$= \frac{\left(\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\sigma}\right)^2 - \rho\frac{d^2\rho}{d\sigma^2}}$$

sendo, n'esta ultima expressão, $d\sigma$ constante.

877. A condição dos pontos de inflexão e de reversão da primeira especie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx},$$

dá

$$dx\,ddy - dy\,ddx$$

$$= 0 = (\rho\, d\sigma)\, dd\rho - d\rho\, d(\rho\, d\sigma) - \frac{(\rho\, d\sigma)\, dz^2}{\rho}$$

para as curvas polares.

878. Para que TM seja asymptota, he preciso que seja PM infinito: PM infinito, PT finito e MPT recto dão infinita a tangente trigonometrica de MTP, e logo recto este angulo: logo as asymptotas rectilineas das curvas polares determinão-se achando s por meio de $\frac{\rho^2 d\sigma}{d\rho}$, fazendo, n'esta expressão, ρ infinito, e tirando pelo extremo T de s huma perpendicular a s.

879. A subtangente s' de huma de duas curvas, referida ao mesmo polo e ao mesmo angulo σ, póde ser determinada por meio da subtangente s da outra, e dos raios vectores y e x de huma, e da outra: pois será

$$s = \frac{x^2\, d\sigma}{dx};$$

e

$$s' = \frac{y^2\, d\sigma}{dy} = \frac{s\, y^2\, dx}{x^2\, dy}.$$

880. A equação $y^2 = ax + bx^2$ póde pertencer a todas as secções conicas, segundo fôr b zero, positivo, negativo, ou -1: e será

$$2y\,dy = (a + 2bx)\,dx,$$

e

$$2dy^2 + 2y\,ddy = 2b\,dx^2;$$

e eliminando d'esta dy^2 por meio da antecedente, achar-se-ha depois

$$ddy = \frac{-a^2}{4y^3}\,dx^2;$$

mas, sendo n a normal, he

$$n = \frac{y\,dz}{dx},$$

e logo

$$dz^3 = \frac{n^3\,dx^3}{y^3},$$

e logo

$$R = -\frac{dz^3}{dx\,ddy} = \frac{n^3}{\frac{a^2}{4}},$$

isto he, em todas as secções conicas o raio de curvatura he o cubo da normal dividido pelo quadrado do semiparametro primeiro.

881. Dados em posição a recta AB, e o ponto C fóra d'ella, e tomada sobre CE a parte DE sempre a mesma, e para ambas as partes de AB; achar a curva que he lugar do ponto E. Fig. 295.

Tirem-se CA, EB perpendiculares a AB; chame-se a a AC, b a DE, x a AB, y a BE. Será

$$a : y :: AD : BD,$$

e logo

$$a + y : y :: x : DB,$$

d'onde

$$DB = \frac{xy}{x+y},$$

portanto

$$b^2 = \left(\frac{xy}{x+y}\right)^2 + y^2,$$

e logo

$$a^2b^2 + 2ab^2y + b^2y^2$$

$$= x^2y^2 + a^2y^2 + 2ay^3 + y^4$$

a equação algebrica da curva, que se chamá *conchoide de Nicomedes.*

Chamando ρ a CE, e σ ao angulo ACE será

$$\rho = \frac{a}{\cos\sigma} \pm b$$

a equação polar da conchoide.

Logo he

$$s = \frac{\rho^2 d\sigma}{d\rho} = \frac{a}{\operatorname{sen}\sigma} \pm \frac{2b\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma} + \frac{b^2\cos^2\sigma}{b\operatorname{sen}\sigma};$$

mas ρ infinito faz

$$\cos\sigma = 0, \text{ ou } \sigma = 90^\circ;$$

logo então he ρ perpendicular á base a, e a subtangente $s = a$, e a perpendicular AB a essa base he a asymptota da conchoide (§ 878).

Fig. 296. 882. O circulo ABC e o seu diametro AC são dados em grandeza e posição: o angulo ACD he recto; a recta AD he tirada do ponto A a qualquer ponto da recta CD, e corta a circumferencia em algum ponto B; AE he $= BD$: pede-se o logar do ponto E.

Tirem-se EF, BG perpendiculares a AC; será $GC = AF$.

Chame-se a a AC, x a AF, y a EF. Será

$$CG = x, \text{ e } AG = a - x;$$

$$x : y :: a - x : BG;$$

$$\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 y^2 = \overline{BG}^2 = AG \times GC = (a-x)x,$$

d'onde

$$0 = ay^2 - x^3 - xy^2$$

he a equação da curva a qual se chama *cissoide de Diocles.*

Chamando ρ a AE, e σ ao angulo EAC; será

$$\rho = \frac{x}{\cos\sigma},$$

e tambem

$$AE : AB :: AF : AG,$$

isto he

$$\rho : a\cos\sigma :: x : a - x,$$

ou

$$\rho = \frac{ax\cos\sigma}{a-x},$$

logo

$$x = a \operatorname{sen}^2 \sigma,$$

e

$$\rho = \frac{a \operatorname{sen}^2 \sigma}{\cos \sigma}$$

he a equação polar da cissoide, da qual se conclue que CD he asymptota.

883. CAC' he a curva, que o ponto A do circulo ASB descreveria, se este circulo tocasse primitivamente com o ponto A a recta CB no ponto C, e depois fosse applicando a sua circumferencia sobre esta mesma recta de C para B, de maneira, que em qualquer posição M, que o ponto A se achasse, e ME em que o circulo se achasse, fosse sempre $ME = CE$, isto he, iguaes o arco e recta que se tivessem tocado. Esta curva chama-se *cycloide:* CC' a sua *base*, ou *amplitude*, e o circulo chama-se *genitor*. Fig. 297.

Tomando $BS = ME$, e tirando a recta MSP terminada no diametro do circulo genitor, serão iguaes as cordas de ME e SB, e parallelas por formarem angulos iguaes com a tangente CB de ambos os arcos, e logo $MS = BE$.

A posição actual do circulo he a em que se acha, depois de ter applicado a semicircumferencia á base. He pois AB diametro, e logo perpendicular á base.

Por ser

$$CB = BSA, \text{ e } CE = EM = BS,$$

será

$$BE = AS = MS,$$

e logo PM, ou

$$y = AS + \operatorname{sen} AS.$$

Seja

$$AB = 2a, \text{ e } AP = x;$$

será

$$dy = dAS + d \operatorname{sen} AS$$

$$= \frac{a\, d \operatorname{sen} AS}{\cos AS} + d \operatorname{sen} AS$$

$$=\frac{2a-x}{a-x}\,d\sqrt{2ax-x^2}=dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$$

a equação differencial da cycloide.

Passando das coordenadas antecedentes para aquellas, em que C fosse origem de abscissas x', e a base CC' o eixo d'ellas, a equação seria

$$dy'=dx'\sqrt{\frac{2a-y'}{y'}}.$$

Tirando ST tangente do circulo genitor e $=\frac{MS\,dAS}{dMS}$ $=MS$, será MT tangente da cycloide (§ 864).

Será

$$dz=dx\sqrt{\frac{2a}{x}},$$

e

$$ddy=\frac{-a\,dx^2}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a-x}},$$

e logo o raio de curvatura $R=2\sqrt{2a(2a-x)}$: logo para o ponto C, para o qual he $x=2a$, he $R=0$, ou a evoluta passa por C, e para o ponto A he $R=2.2a$, o dobro de AB, ou a evoluta passa por F.

A abscissa AG, ou t, ou $R\frac{dy}{ds}+x$ da evoluta da cycloide he $=4a-x$, e a ordenada GH, ou u he $=2\sqrt{2ax-x^2}$ $-y$; logo he

$$du=\frac{(2a-2x)\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}-dy$$

$$=\frac{-\sqrt{x}.dx}{\sqrt{2a-x}}=\frac{dt\sqrt{4a-t}}{\sqrt{t-2a}}.$$

Refira-se a evoluta ás coordenadas $CI(y')$, e $IH(x')$.

Será

$$x'=t-2a;\ y'=CB-u;$$

logo

$$du=-dy',\ dt=dx',$$

e

$$\sqrt{4a-t}=\sqrt{2a-x'};$$

será

$$-dy'=dx'\sqrt{\frac{2a-x'}{x'}},$$

equação, que mostra, que a evoluta da semicycloide CA he a outra semicycloide AC collocada porém em CF.

884. Se o angulo σ fôr augmentado por 2π, ou pelos multiplos successivos de 2π, a curva polar poderá muitas vezes dar muitas voltas em torno do polo, como acontece quando a curva tem esta equação $\rho=a\sigma$, que se chama *spiral de Archimedes;* ou esta $\rho^2=a\sigma$ que se chama *spiral parabolica;* ou esta $\rho\sigma=a$, que se chama *spiral hyperbolica;* ou esta $ly=a\sigma$ que se chama *spiral logarithmica.*

885. Na spiral hyperbolica he

$$s=\frac{\rho^2 d\sigma}{d\rho}=-a,$$

mas ρ infinito faz $\sigma=0$, logo então ρ está na direcção da base: levante-se pois do polo huma perpendicular á base $c=a$, mas para a parte opposta áquella, para que se devião tirar as subtangentes, a que pelo extremo d'esta se tirar perpendicular, será asymptota.

886. Na spiral logarithmica he $\frac{d\rho}{\rho d\sigma}=a$, e logo $\frac{s}{\rho}=\frac{1}{a}$ isto he, a tangente trigonometrica do angulo formado pelo raio vector, e tangente he constante e logo tambem esse angulo.

O raio de curvatura reduz-se a $\frac{dz}{d\sigma}$: produzida pois TP para B, e tirada MB perpendicular a TM: será Fig. 298.

$$MB:PM::TM:PT$$

ou

$$MB:\rho::\sqrt{\rho^2+s^2}:s;$$

logo

$$MB = \frac{\rho\sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^4 d\sigma^2}{d\rho^2}}}{\frac{\rho^2 d\sigma}{d\rho}} = \frac{dz}{d\sigma} = R.$$

Logo B he ponto da evoluta e MB tangente d'ella, e por ser MBP igual a PMT, e por consequencia constante, será a evoluta a mesma spiral logarithmica, e não póde haver differença entre ella, e a tangente BM que não seja constante; mas nem essa ha, porque fazendo σ negativo na equação da spiral, esta chegará ao polo, e n'este ponto a sua tangente, e ella são nullas.

LIVRO 10.º

Geometria de tres coordenadas

887. Se em hum systema de duas coordenadas se tirão dos extremos das ordenadas quantas rectas parallelas se quizerem, mas em plano diverso do das primeiras coordenadas, a superficie que fôr lugar dos outros extremos d'estas parallelas, chamar-se-ha *superficie proposta;* e estas parallelas tambem se chamarão *ordenadas*, e se denotarão por z; e cada tres rectas contiguas x, y, z *coordenadas:* e a equação que as comprehende chama-se *equação da superficie proposta*.

888. A equação da superficie contendo tres variaveis, he claro, que duas d'ellas são absolutamente independentes, e que os valores arbitrarios, que se lhes forem assignando, he que determinarão os valores correspondentes da terceira por meio da equação da superficie.

889. Achar a equação do plano.

Sejão $AP\,(x)$, $PM'\,(y)$, $M'M\,(z)$ as tres coordenadas do plano MBC cuja intersecção com o plano dos xy seja BC. Fig. 281.

Por $M'M$ tire-se hum plano $MM'C$ parallelo a AP ou x, será $M'C$ parallela a BP, ou a x. Por P tire-se PD parallela a BC.

Como os angulos das coordenadas são escolhidos, ficão assim determinados os angulos dos triangulos, taes como $MM'C$, e dos parallelogrammos como $BPDC$, e dos triangulos $PM'D$, e BA ou a fica sempre o mesmo. Teremos pois

$$z = m \,.\, M'C = m\,(CD + M'D)$$

$$= m\,(a + x + n \,.\, M'P) = ma + mx + mny$$

por equação do plano proposto.

890. Porque a qualquer equação da primeira ordem a tres variaveis se póde dar a fórma antecedente, segue-se que huma tal equação pertence a hum plano.

891. Achar a equação da superficie curva da pyramide conica.

Fig. 282. Seja $AP = x$, e as ordenadas $PM(y)$, $MN(z)$ sejão perpendiculares entre si, e estejão em plano parallelo á base. Será

$$\overline{PN}^2 = y^2 + z^2.$$

Tambem

$$AB : BC :: x : PN.$$

Logo

$$ux^2 = y^2 + z^2$$

he a equação pedida.

892. Supporemos as coordenadas orthogonaes, isto he, y perpendicular a x, e a z, e o plano dos yz perpendicular a x. N'este caso chamão-se eixos respectivamente dos x, dos y, dos z a tres rectas escolhidas perpendiculares entre si, e parallelas ás coordenadas: e planos das coordenadas a tres planos perpendiculares entre si, e respectivamente parallelos a duas das coordenadas.

Do volume dos solidos regulares

893. Sejão $AP(x)$, $PM'(y)$, $M'M(z)$ as tres coordenadas rectangulares da superficie do solido da qual M he hum qualquer dos pontos, e z he funcção de x, y.

Fig. 283. Sejão Ap, Bm, Cq as intersecções de planos perpendiculares ao plano APM' dos xy, e parallelos ao dos xz: e sejão Pn, pq similhantes intersecções sobre o mesmo

plano de outros planos parallelos ao dos $y\,z$. Sejão $P\,p = i$, $M'\,n = i'$.

A parte do solido separada pelo plano $A\,P\,M'$, e pelos planos $M\,M'\,P$, $M\,M'\,B$ perpendiculares a este, e pelo que passa por $A\,P$ he funcção das tres coordenadas x, y, z; mas eliminando z com a equação da superficie, fica sendo funcção sómente de x e y, isto he, chamando v a este segmento do solido, teremos $v = \varphi(x, y)$.

Os volumes correspondentes ás projecções $A\,C\,q\,p$, $A\,B\,m\,p$, $A\,C\,n\,P$ serão respectivamente $\varphi(x+i, y+i')$; $\varphi(x+i, y)$, $\varphi(x, y+i')$. De fórma que o segmento do volume correspondente á projecção $M'\,n\,q\,m$ será

$$\begin{aligned}\varphi(x+i, y+i') + \varphi(x, y) - \varphi(x+i, y) \\ - \varphi(x, y+i') \\ = \frac{d\,d\,v}{d\,x\,d\,y}\,i\,i' + a\,i^2\,i' + b\,i\,i'^2 + \text{etc.}\end{aligned}$$

Sejão z, e $z + D\,z$ a menor, e a maior das ordenadas correspondentes á base $M'\,n\,q\,m$. Será $D\,z$ da primeira ordem relativamente a i, ou i', ou a ambos, sendo estes infinitesimos. Tambem será o segmento sobre esta base medio em valor entre os dois parallelepipedos da mesma base $M'\,n\,q\,m$ $(i\,i')$, e que tem por alturas hum a $M'\,M\,(z)$, e o outro a $z + D\,z$, isto he, entre $i\,i'\,z$, e $i\,i'\,(z + D\,z)$. De sorte que teremos

$$\frac{d\,d\,v}{d\,x\,d\,y}\,i\,i' = z\,i\,i', \text{ ou } \frac{d\,d\,v}{d\,x\,d\,y} = z.$$

Logo

$$\frac{d\,v}{d\,y} = \int z\,d\,x, \text{ e } v = \int d\,y \int z\,d\,x$$

he a expressão do segmento elementar do solido, ou $v = \int\int\int d\,x\,d\,y\,d\,z$.

Exemplo. Seja A origem das abscissas, e centro de huma esphera, cujo raio he r. Será

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

a equação da superficie, e teremos

$$\int z\,dx = \int dx\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$$+ \frac{1}{2}(r^2 - y^2)\,\text{arc. sen} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - y^2}}.$$

sem constante se o integral começar com x, e cujo valor total até ao valor de

$$x = \sqrt{r^2 - y^2},$$

será

$$\int z\,dx = \frac{1}{2}q(r^2 - y^2),$$

por ser $q = \frac{1}{2}\pi$ o arco cujo seno $= 1$.

Logo

$$v = \int dy \int z\,dx = \frac{1}{2}q\int dy\,(r^2 - y^2)$$

$$= \frac{1}{2}qr^2y - \frac{1}{6}qy^3,$$

integral, que tomado entre os limites $y = 0$, $y = r$ dá

$$v = \frac{2q}{6}r^3$$

igual á oitava parte da esphera.

Das superficies dos solidos regulares

894. Seja $M'nqm\,Mn'q'm'$ o ultimo solido elementar,
Fig. 284. e $Mn'q'm'$ a sua superficie curva, comprehendida entre as curvas Mn', $n'q'$, $q'm'$, Mm', que são as intersecções dos planos lateraes com a superficie do solido. Imagine-se tirado por M o plano $Mn''q'm''$ tangente a esta superficie, e terminado nas arestas verticaes.

O quadrilatero $Mn''q''m''$ he hum parallelogrammo, porque tem os lados oppostos em planos parallelos.

A sua projecção sobre o plano dos xy he ii'. A sua projecção sobre o plano dos yz he o parallelogrammo, que tem por lados oppostos a projecção da recta $q''m''$, e a recta Mn''; e cuja base he a recta que está entre a projecção do ponto m'', e M, a qual he $= \frac{dz}{dx}dx$, e cuja altura he i', ou dy. De fórma, que esta projecção he $\frac{dz}{dx}dxdy$. Da mesma maneira a projecção sobre o plano dos xz he $\frac{dz}{dy}dydx$.

Temos pois

$$Mn''q''m'' = dxdy\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)} \ldots (A)$$

Similhantemente se acha, que o quadrilatero quebrado composto dos dois triangulos $Mn'q'$, $Mm'q'$ he

$$dxdy\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)} \ldots (B)$$

A superficie curva elementar $Mn'q'm'$, pelos principios do § antecedente, e sendo s a superficie curva, he

$$\frac{dds}{dxdy}ii' + a'i^2i' + b'ii'^2 + \text{etc.}$$

Temos pois tres superfices convexas com o mesmo limite, das quaes a maior he composta do parallelogrammo $Mn''q''m''$, e dos triangulos $Mn'n''$, $Mm'm''$ quantidades da terceira ordem a respeito de i, e i'; e dos trapesios $n'n''q'q''$, $m'm''q'q''$, tambem da terceira ordem.

A superficie convexa media he composta da superficie curva elementar, e dos tres segmentos mixtilineos Mn', $n'q$, $m'q'$, os quaes são tambem da terceira ordem.

A superficie convexa menor he a do quadrilatero quebrado.

Escrevendo pois dx, dy por i, i'; teremos

$$\frac{dds}{dx\,dy}=\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

Logo

$$s=\int\int dx\,dy\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

Exemplo. Querendo achar a superficie da esphera, temos

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{z},\ \frac{dz}{dy}=-\frac{y}{z};$$

logo

$$\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}=\frac{r}{z};$$

logo

$$\int dx\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$$

$$=\int\frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2-x^2-y^2)}}=r\,\text{arc sen}=\frac{x}{\sqrt{r^2-y^2}},$$

integral, que sendo tomado desde $x=0$, até $x=\sqrt{r^2-y^2}$ he $=\frac{1}{2}\pi r$; logo

$$s=\int dy\int dx\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$$

$$=\int\frac{1}{2}\pi r\,dy=\frac{1}{2}\pi r^2,$$

sendo tomado este integral ultimo entre os limites $y=0$, $y=r$; o que he a oitava parte da superficie da esphera.

895. A equação (A) do § antecedente, por ser $dx\,dy$ a projecção de $Mn''q''m''$ sobre o plano dos xy, mostra que he

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}$$

o coseno do angulo formado pelo plano tangente com o plano dos xy.

896. *A normal N de huma superficie curva* he a perpendicular ao plano tangente no ponto do contacto, e terminada n'esse ponto, e no plano dos xy.

897. O angulo formado por N, e z he igual ao que he formado pelo plano tangente, e pelo plano dos xy, por serem estas duas rectas perpendiculares aos ditos planos.

Logo

$$N = z\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}.$$

898. Quando huma superficie espherica, e outra curva, se tocão de fórma, que pelo ponto de contacto se não possa tirar outra superficie espherica entre as duas, chama-se *raio de curvatura da superficie proposta* ao raio da superficie espherica.

899. Discorrendo como (§ 850) para achar este raio de curvatura r, teremos pondo

$$\frac{dz}{dx}=p,\ \frac{dz}{dy}=q,$$

$$dN = 0 = dz\sqrt{(1+p^2+q^2)} + z\,\frac{p\,dp+q\,dq}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}};$$

logo

$$z = -\frac{dz(1+p^2+q^2)}{p\,dp+q\,dq},$$

e

$$r = \frac{-dz(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}{p\,dp+q\,dq}$$

900. A equação polar das superficies curvas acha-se transformando as coordenadas em outras variaveis referidas a hum polo. Assim se de hum ponto N da superficie se tira Fig. 285.
para a origem A das coordenadas, chamada agora polo, a recta R, chamada raio vector, e se ao angulo NAP se chama θ, e ω a NPM, teremos

$$x = R\cos\theta;$$

$$PN = R \operatorname{sen} \theta;$$

$$y = R \operatorname{sen} \theta \cos \omega;$$

$$z = R \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \omega.$$

Prolongando R, e pondo $NO = dR$; e tirando NQ infinitesimo tambem e perpendicular a R e no plano APN, será $NQ = R\,d\theta$.

Tirando, no plano PMN, NS perpendicular a PN tambem infinitesima, será

$$NS = R \operatorname{sen} \theta\, d\omega.$$

Por serem perpendiculares entre si os planos APN, PMN, e NS estar em hum, e ser perpendicular á intersecção de ambos, he tambem perpendicular a NQ, e a NO. Logo o parallelipipedo determinado pelas tres arestas NO, NQ, NS he rectangulo, e o seu volume ou o elemento do solido (§ 893) he

$$R^2 \operatorname{sen} \theta\, dR\, d\theta\, d\omega.$$

Assim por hum integral triplo podemos achar o volume do solido regular, sendo dada a equação polar.

Exemplo. Querendo achar, por este meio, o volume da esphera, cujo raio he R, e o centro he o polo, então integrando

$$v = \int\int\int R^2 \operatorname{sen} \theta\, dR\, d\theta\, d\omega$$

relativamente a R, teremos primeiro

$$v = \frac{1}{3} R^3 \int\int \operatorname{sen} \theta\, d\theta\, d\omega,$$

sem constante, porque v he nullo quando R o he.

Integrando depois relativamente a ω, desde $\omega = 0$, até $\omega = 2\pi$, teremos

$$v = \frac{2}{3} \pi R^3 \int \operatorname{sen} \theta\, d\theta.$$

Finalmente, teremos

$$v = -\frac{2}{3}\pi R^3 \cos\theta + C;$$

integral, que sendo tomado entre os limites $\cos\theta = 1$, $\cos\theta = -1$ dá

$$v = \frac{4\pi}{3} R^3;$$

e estes limites abrangem toda a esphera.

901. *Curva de dupla curvatura* he aquella que não está em plano. A intersecção de duas superficies curvas he por tanto huma linha de dupla curvatura, quando ellas se não cortão pelos lados rectos.

902. A curva de dupla curvatura constroe-se por meio das duas equações das superficies curvas, das quaes he a intersecção, fazendo n'estas as coordenadas communs.

903. Para rectificar huma curva de dupla curvatura póde suppor-se, que o elemento ds da curva se confunde com a sua corda, e então teremos

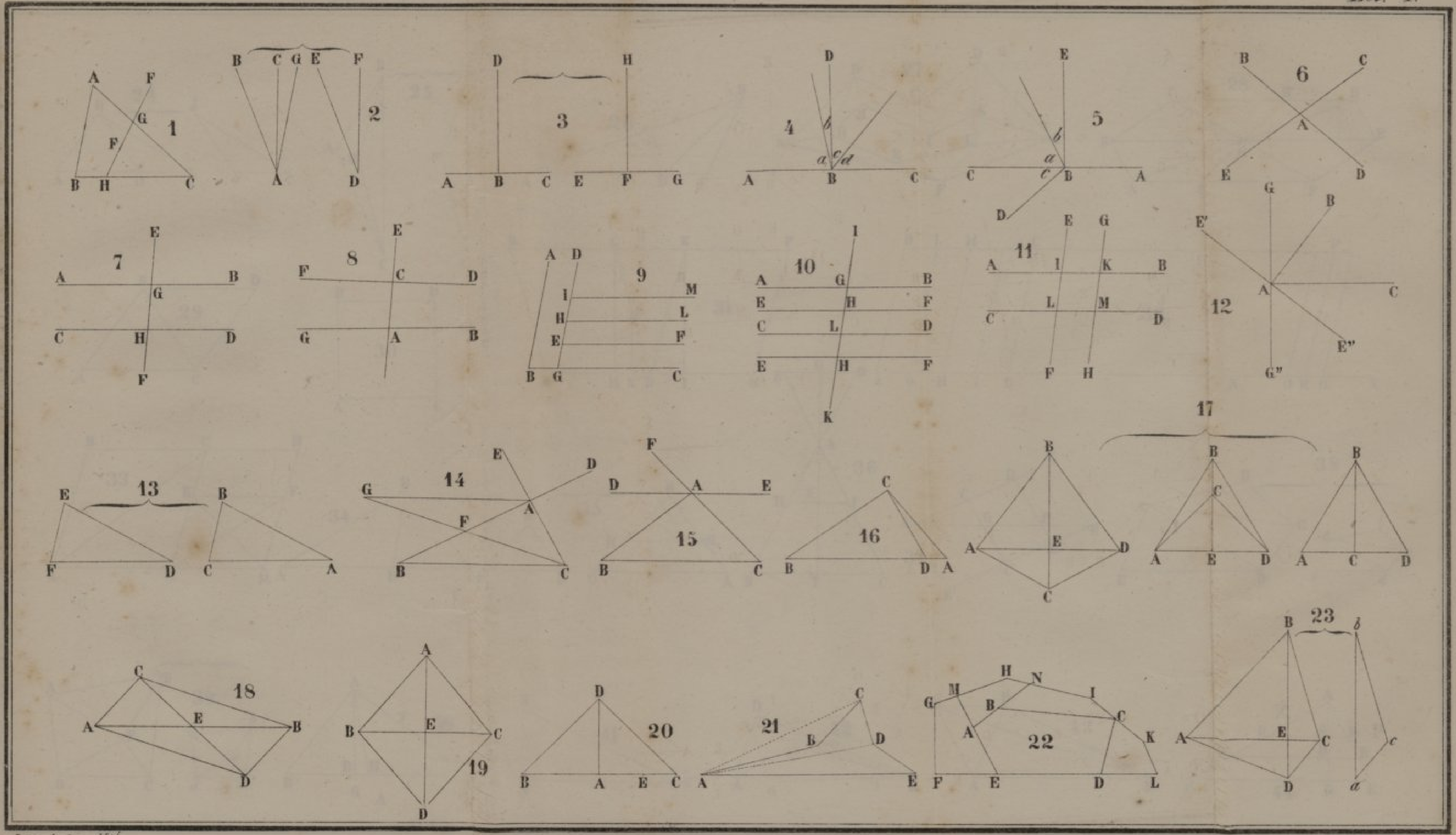
$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}.$$

904. He o seu raio de curvatura

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{((d\,d\,x)^2 + (d\,d\,y)^2 + (d\,d\,z)^2)}}$$

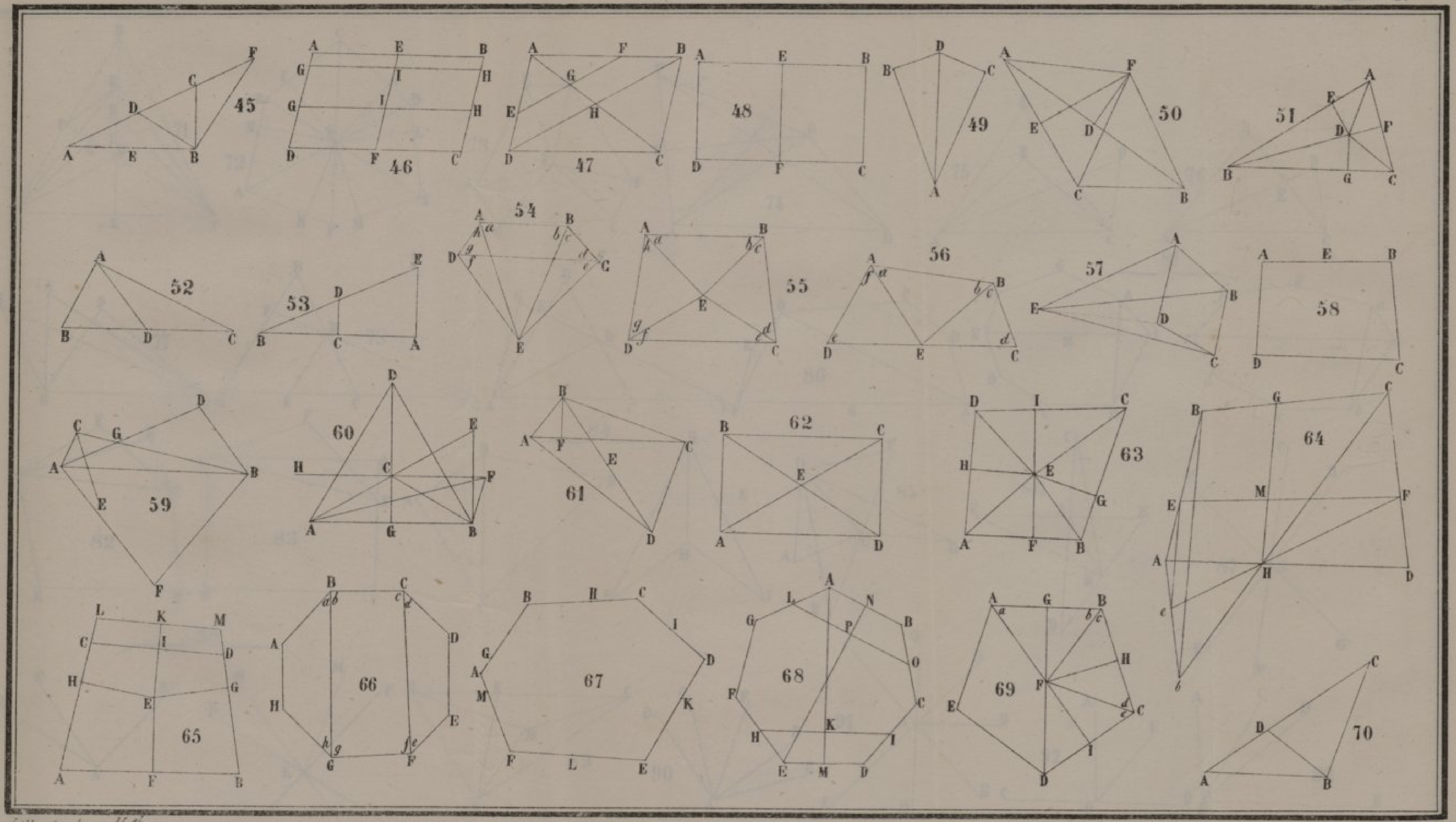
sendo ds constante. Acha-se discorrendo como (§ 854) só com a differença de accrescentar $(d\,d\,z^2)$ a $(d\,d\,y)^2$.

FIM DO 2.º E ULTIMO TOMO.

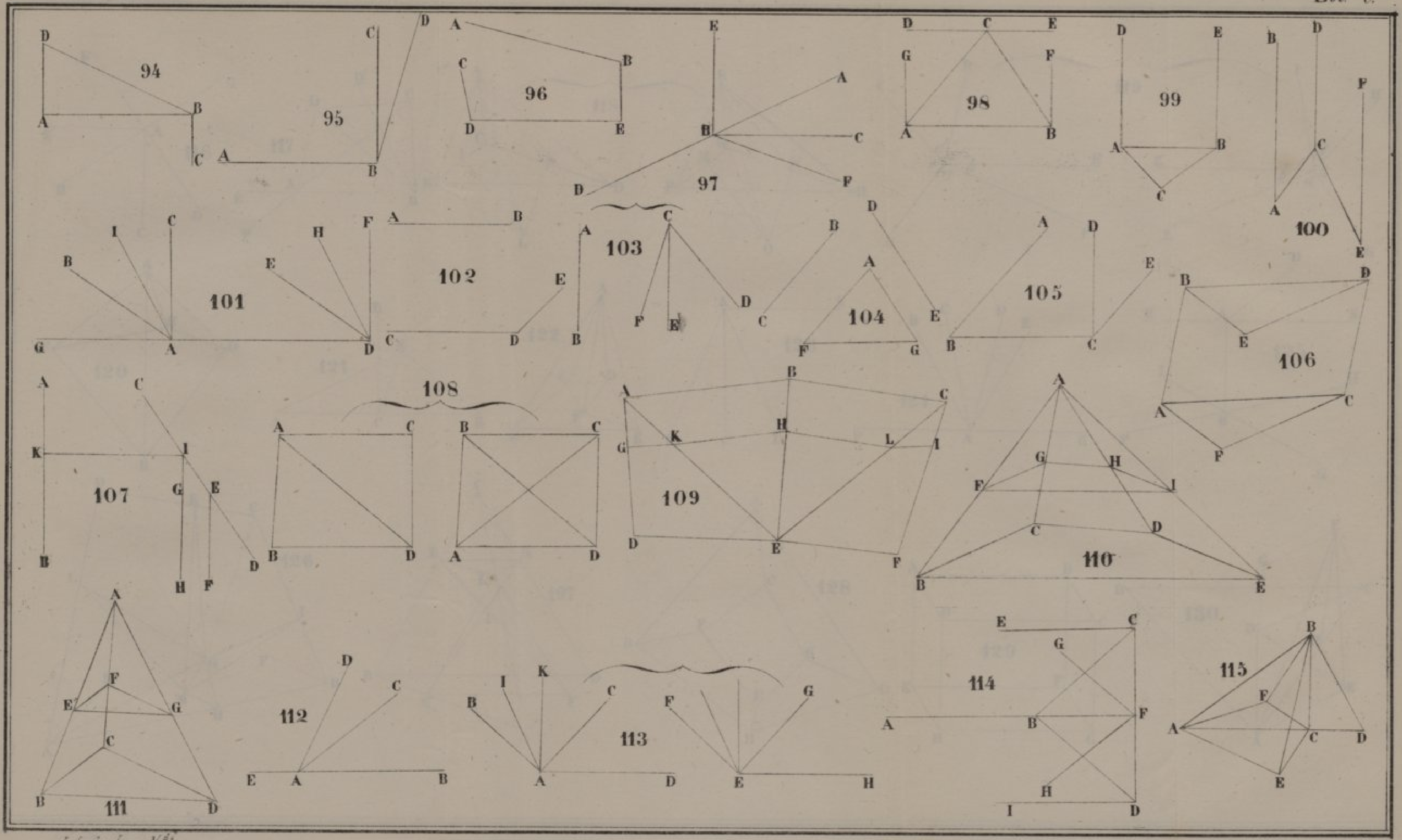


Lith. da Imp. Nal

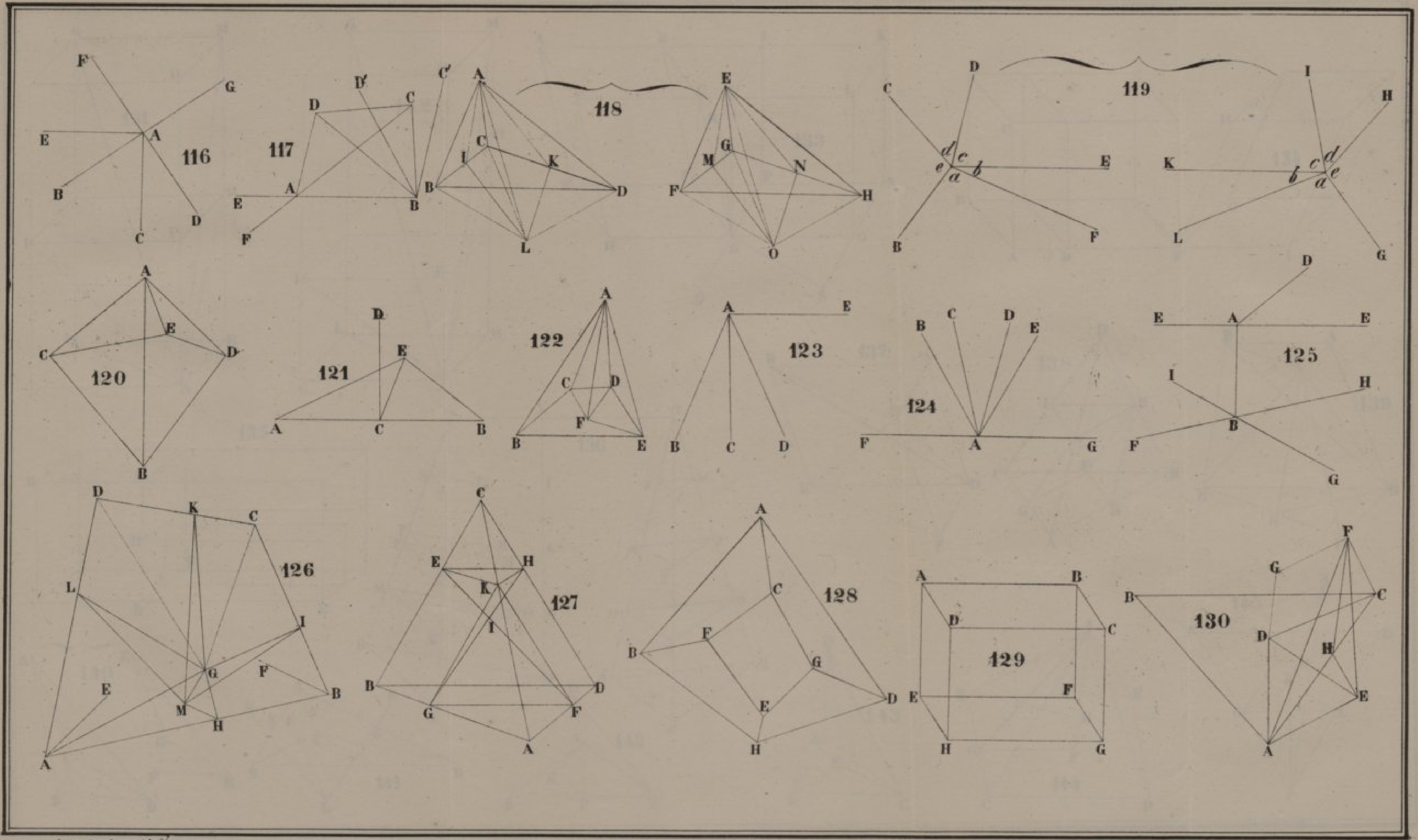
Est.ª 3.ª



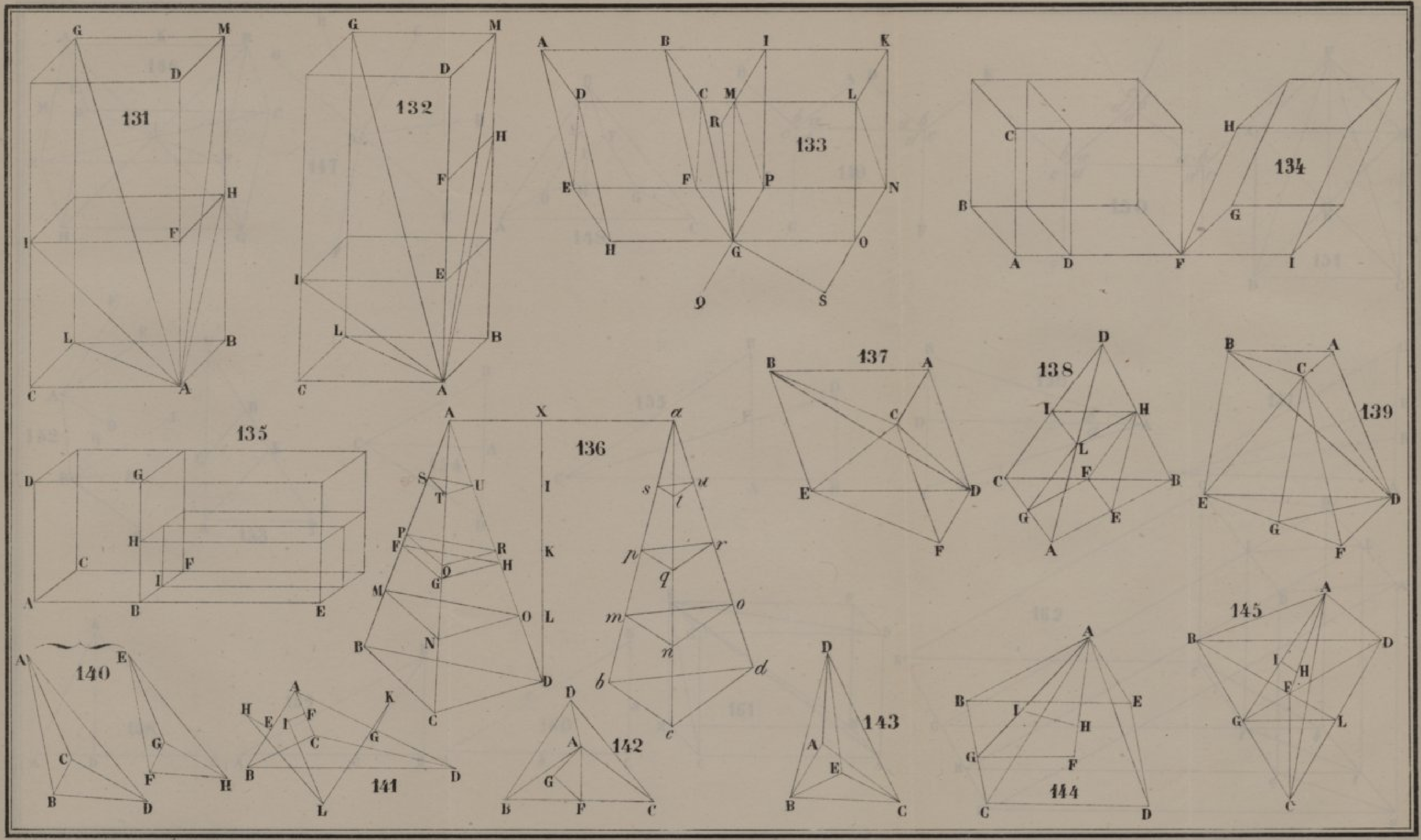
Lith. da Imp. N.al



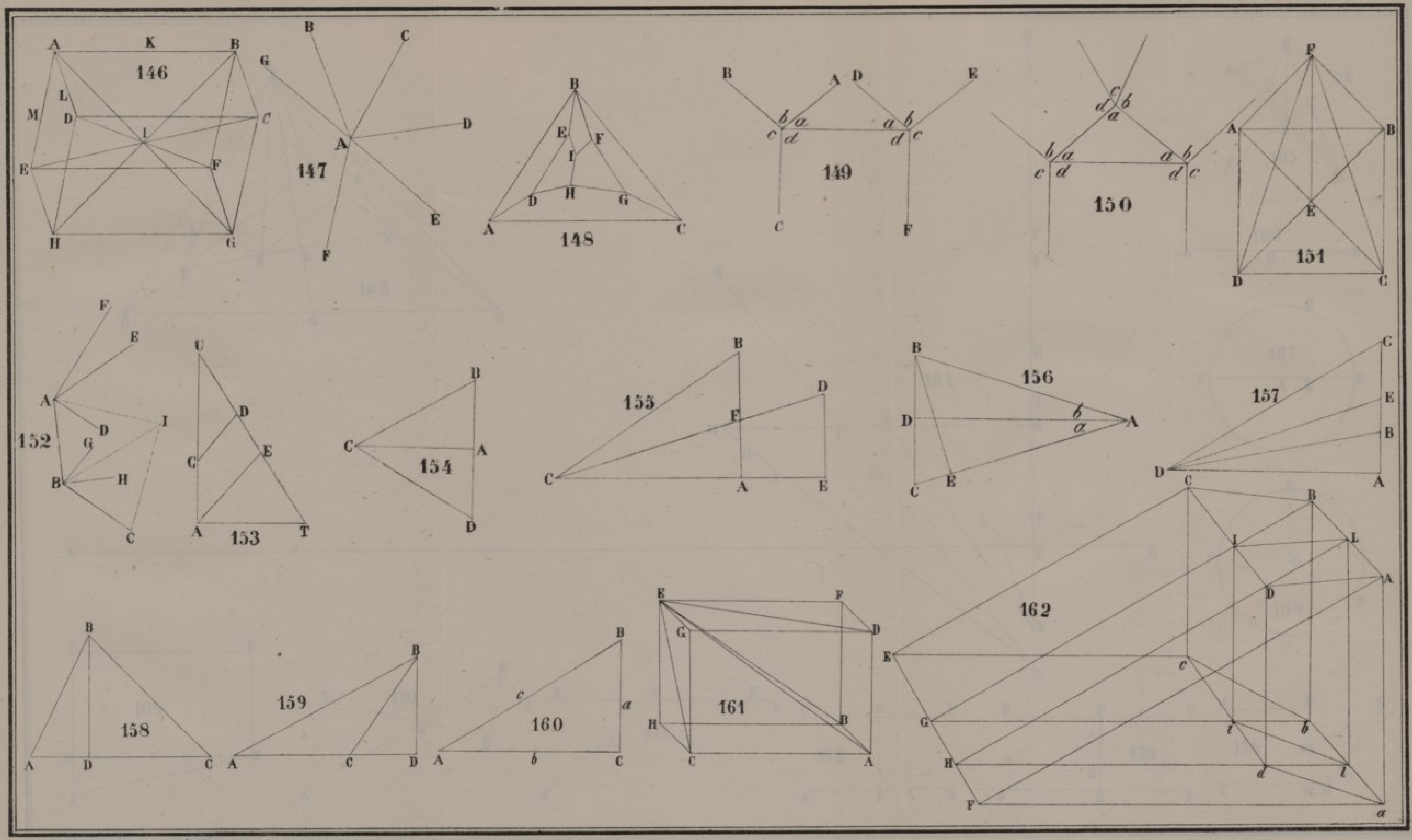
Lith. de Imp. N.al



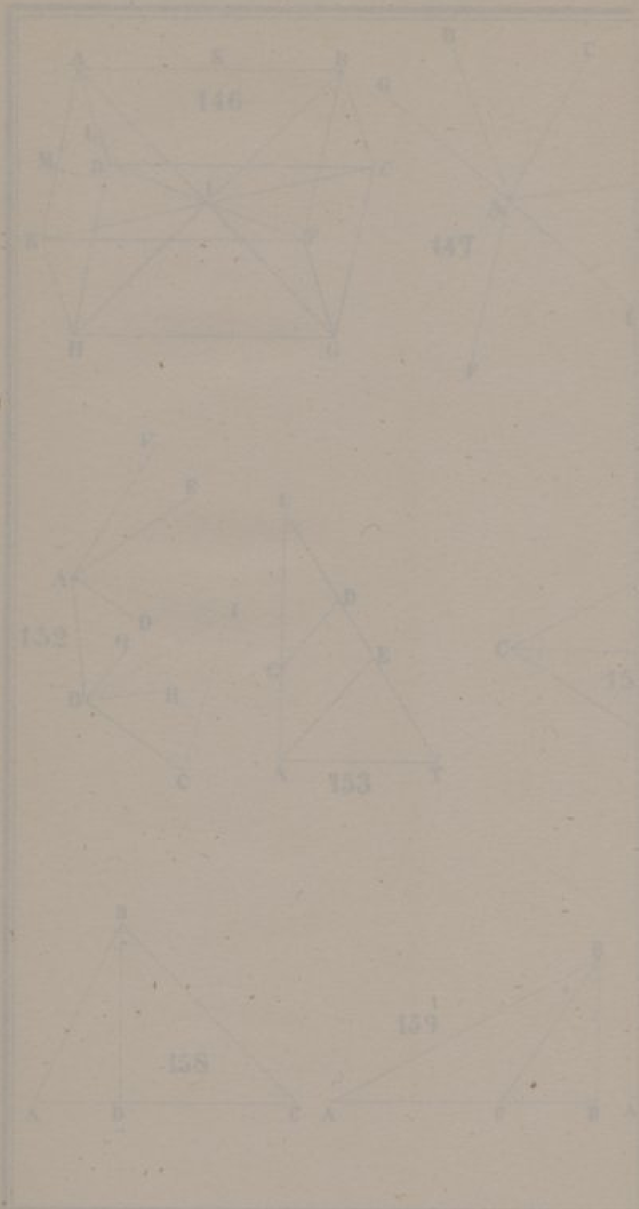
Lit. da Imp. N.al



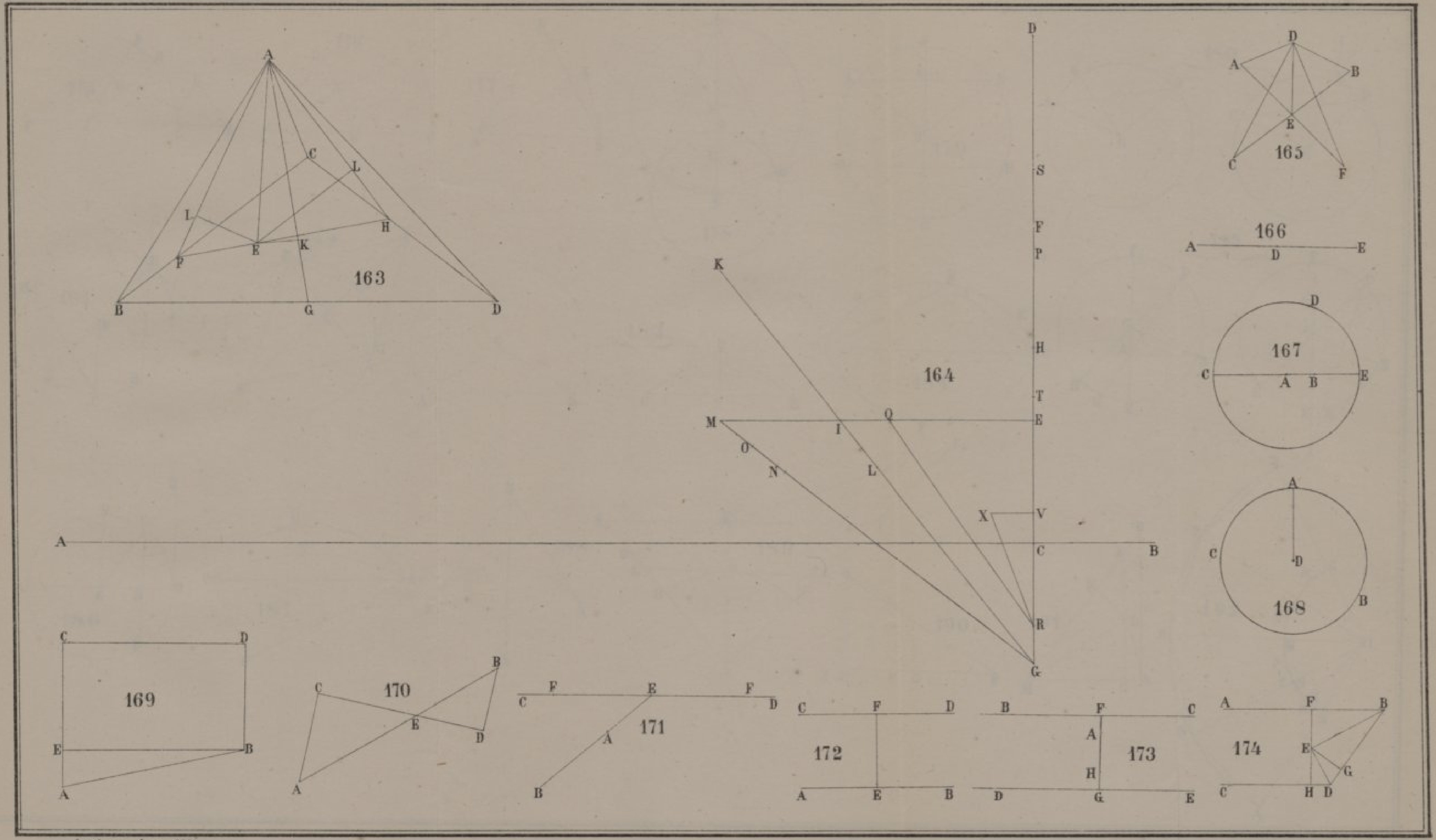
Lith. da Imp. N.al



Lith. de Imp. N.al

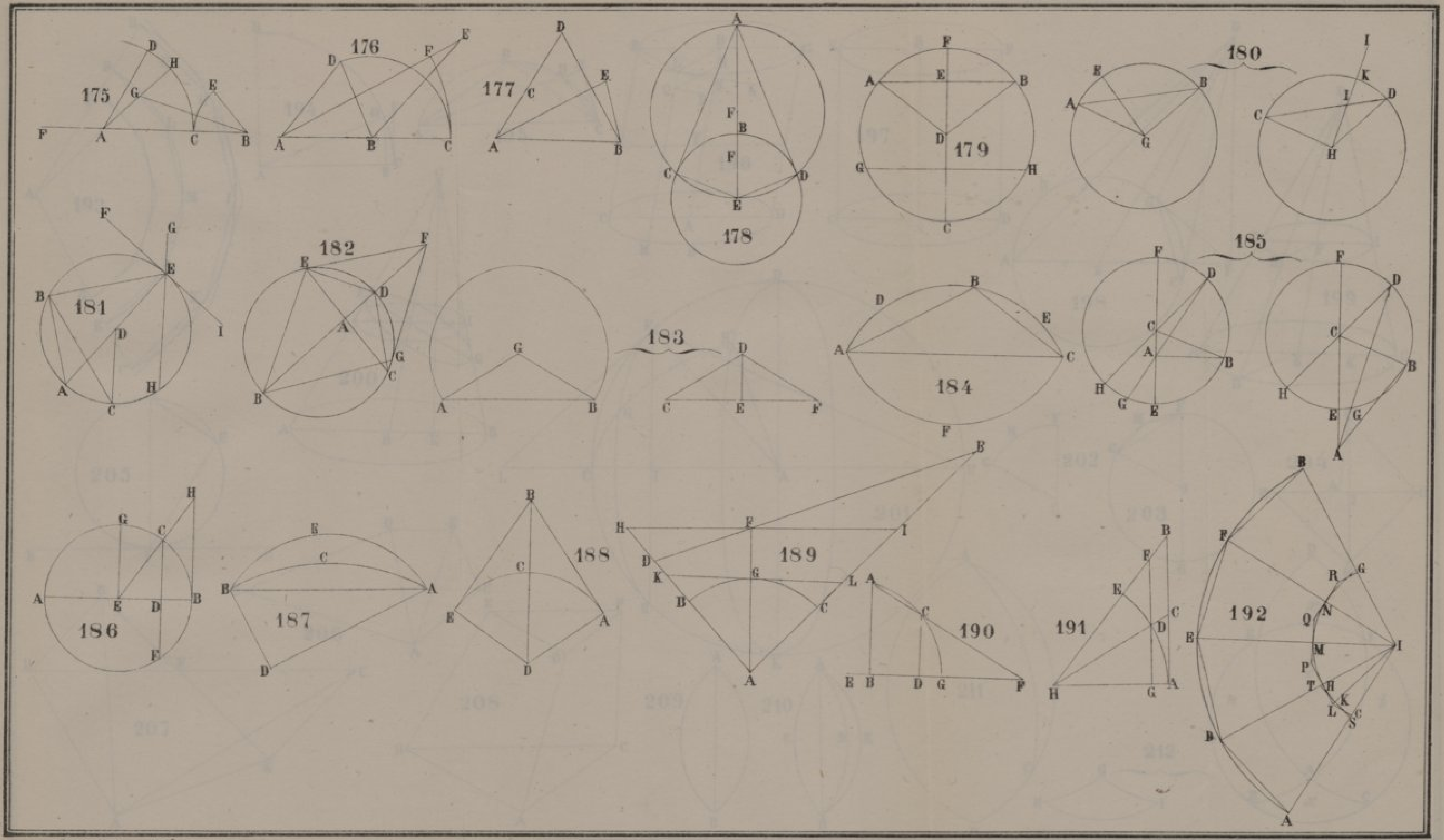

146
147
152
153
158
159

Estª 9ª

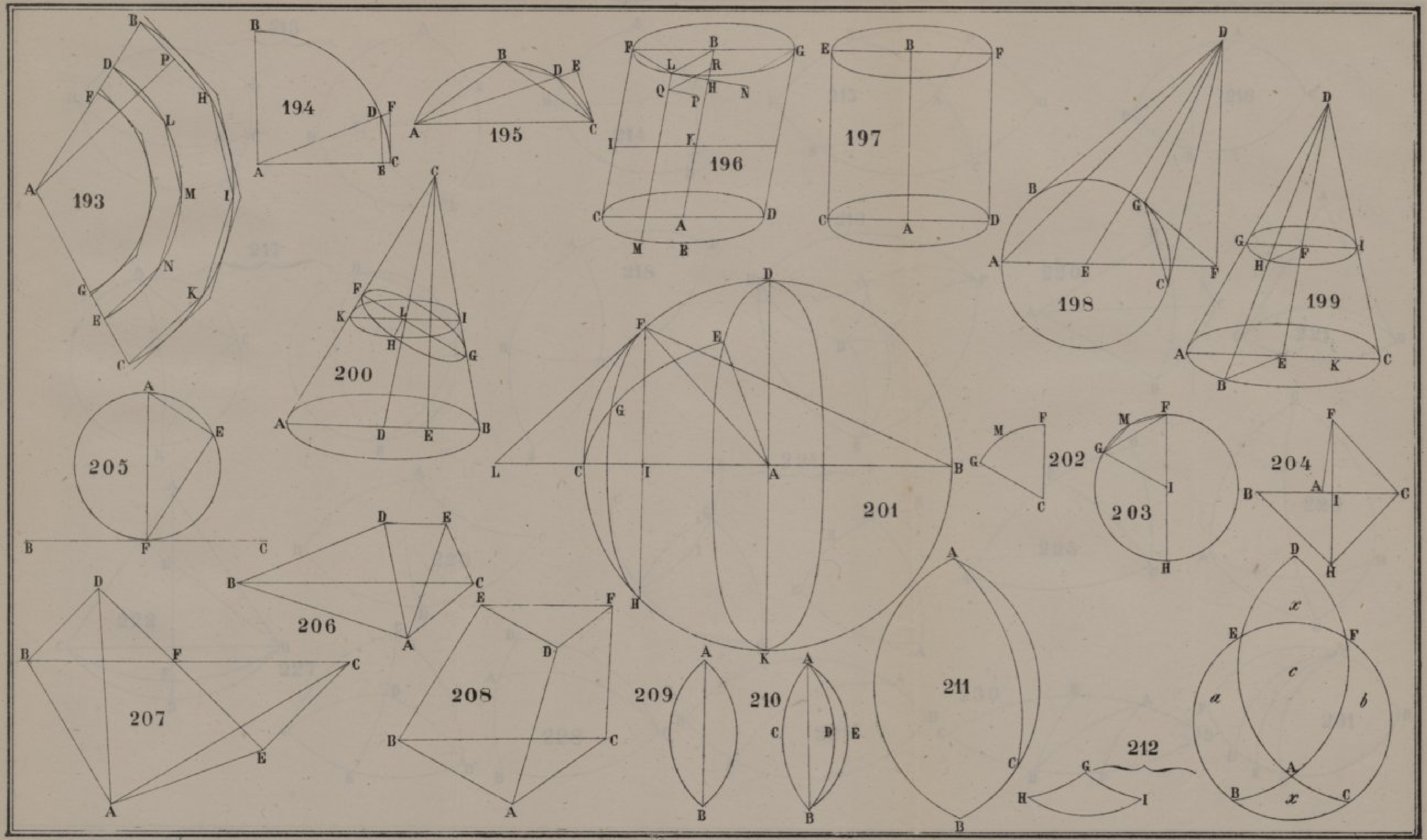


Lith. da Imp. Nal

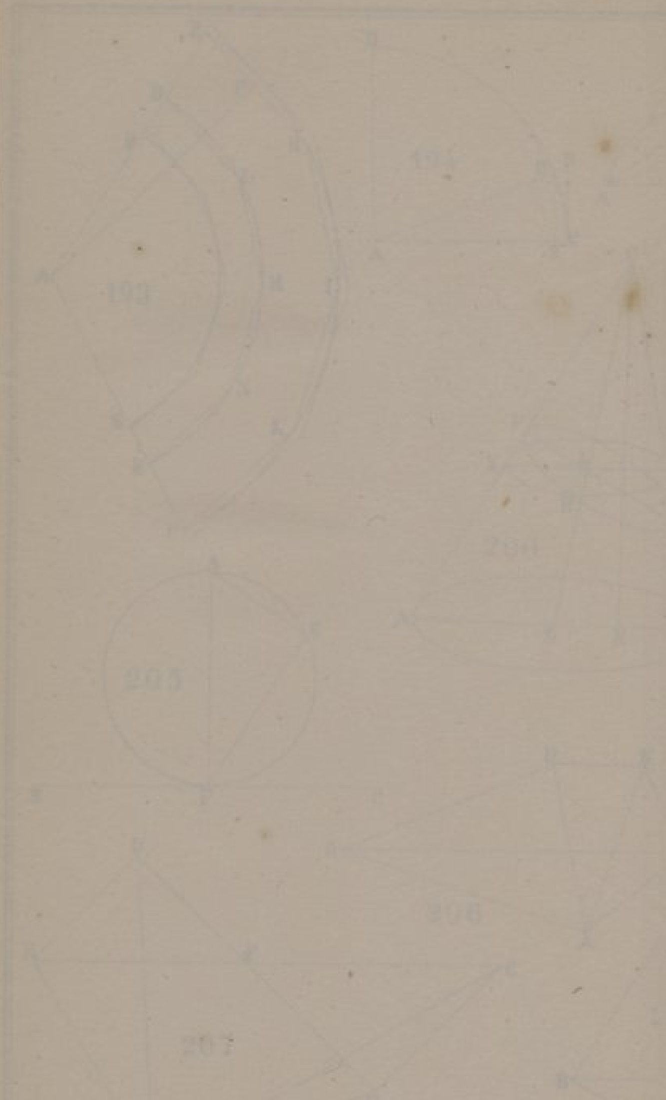
Estª 10.ª



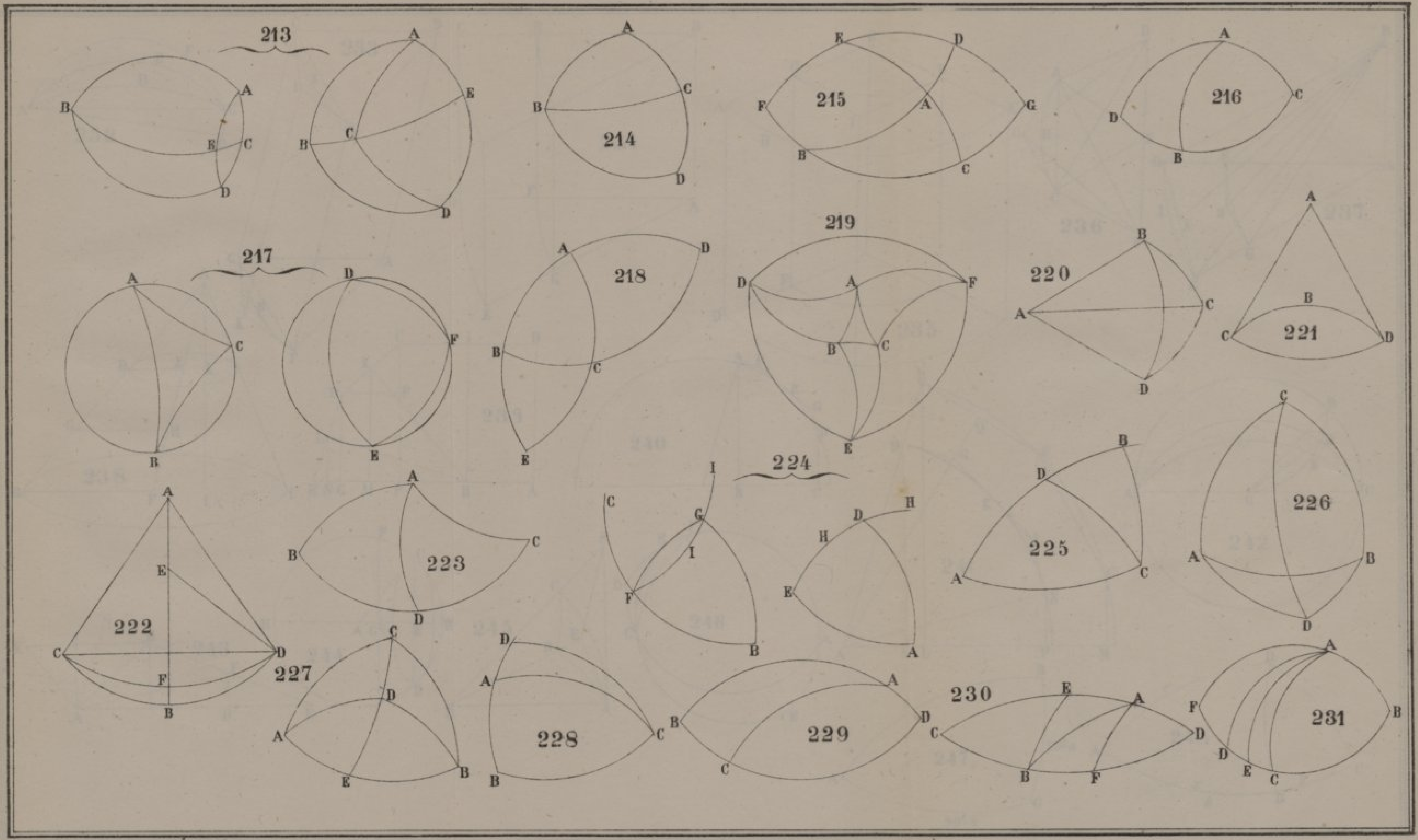
Lith. da Imp. Nal.



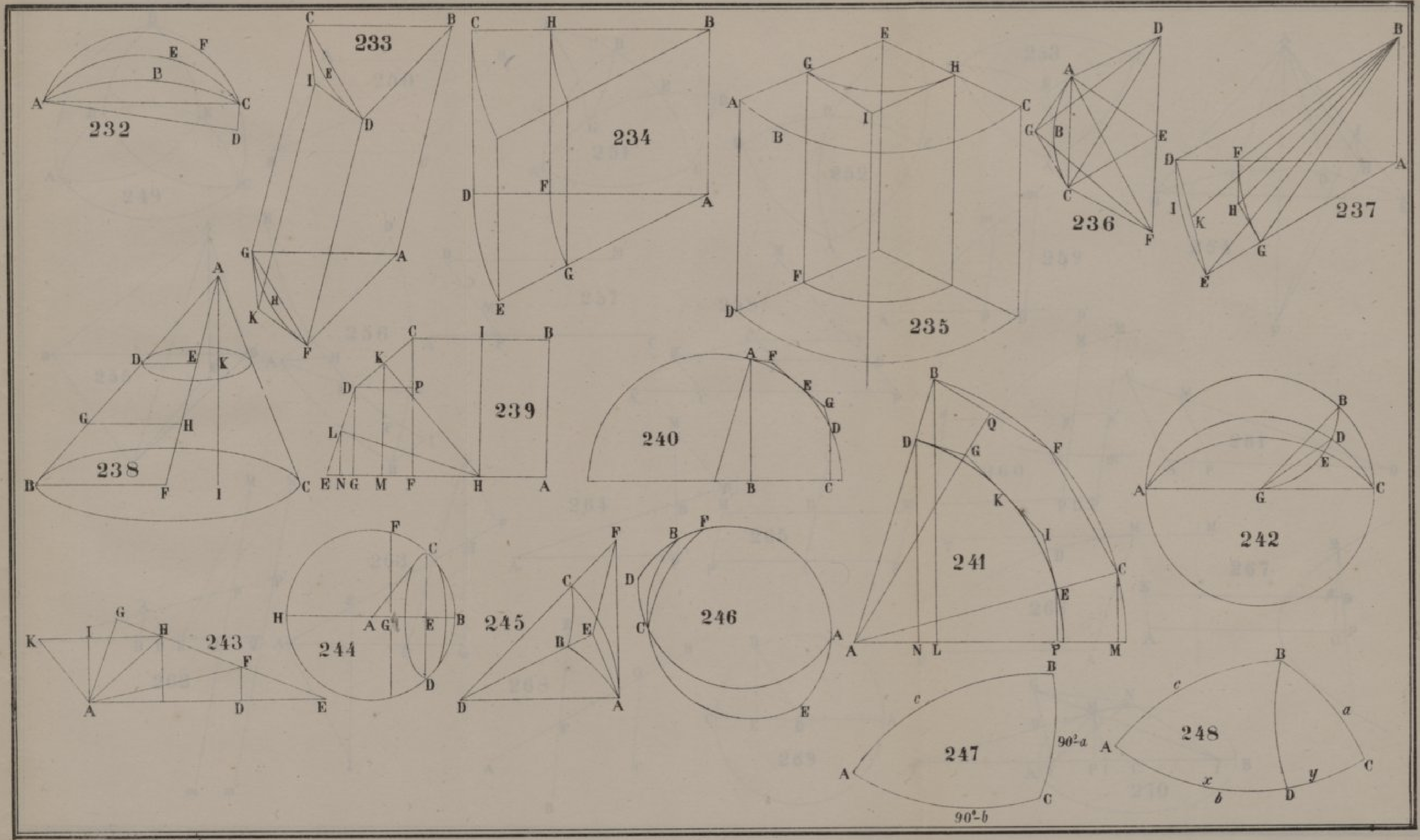
Lith. de Imp. N.al



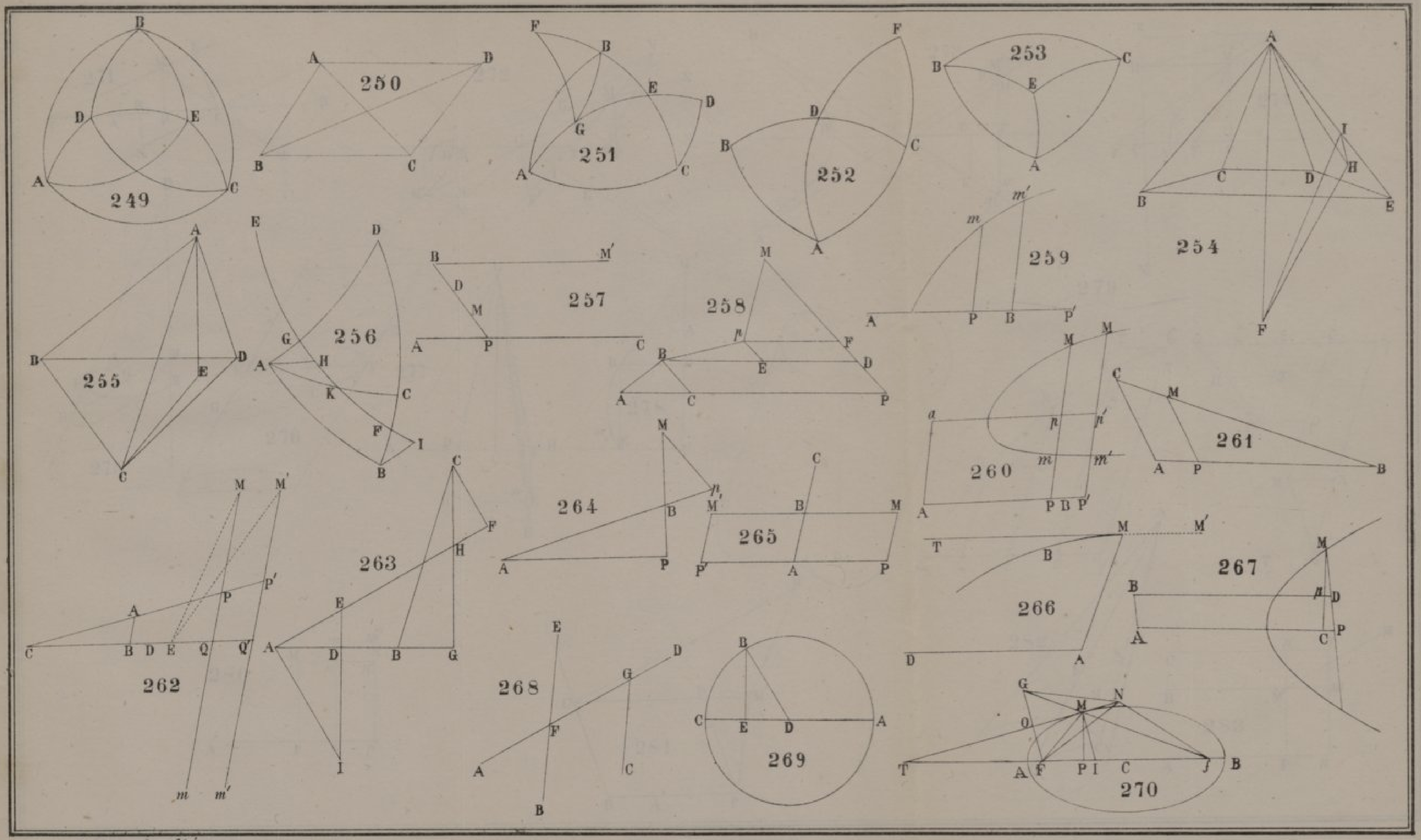
193
205
206
207



Lith. da Imp. N.al

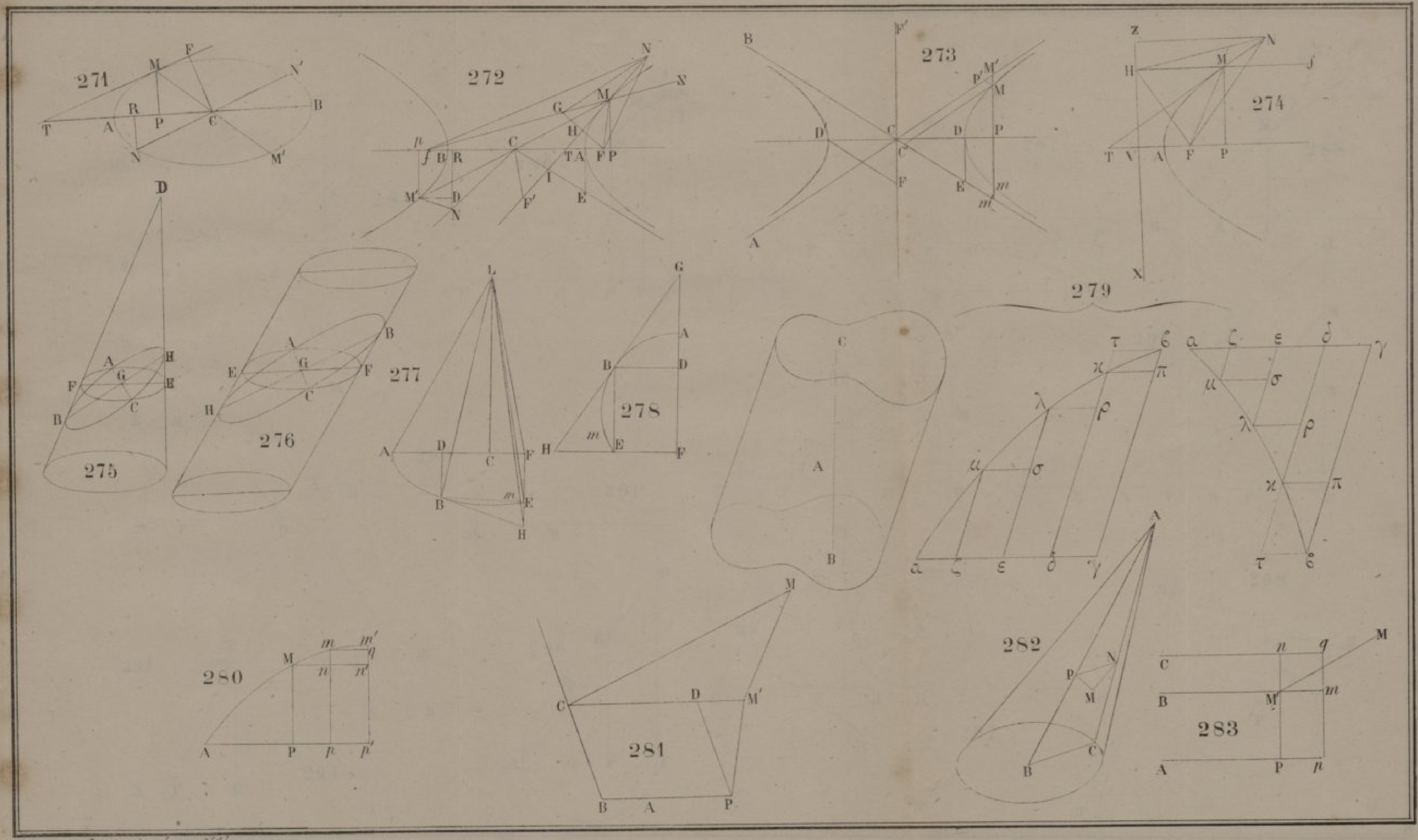


Lith. da Imp. N.al

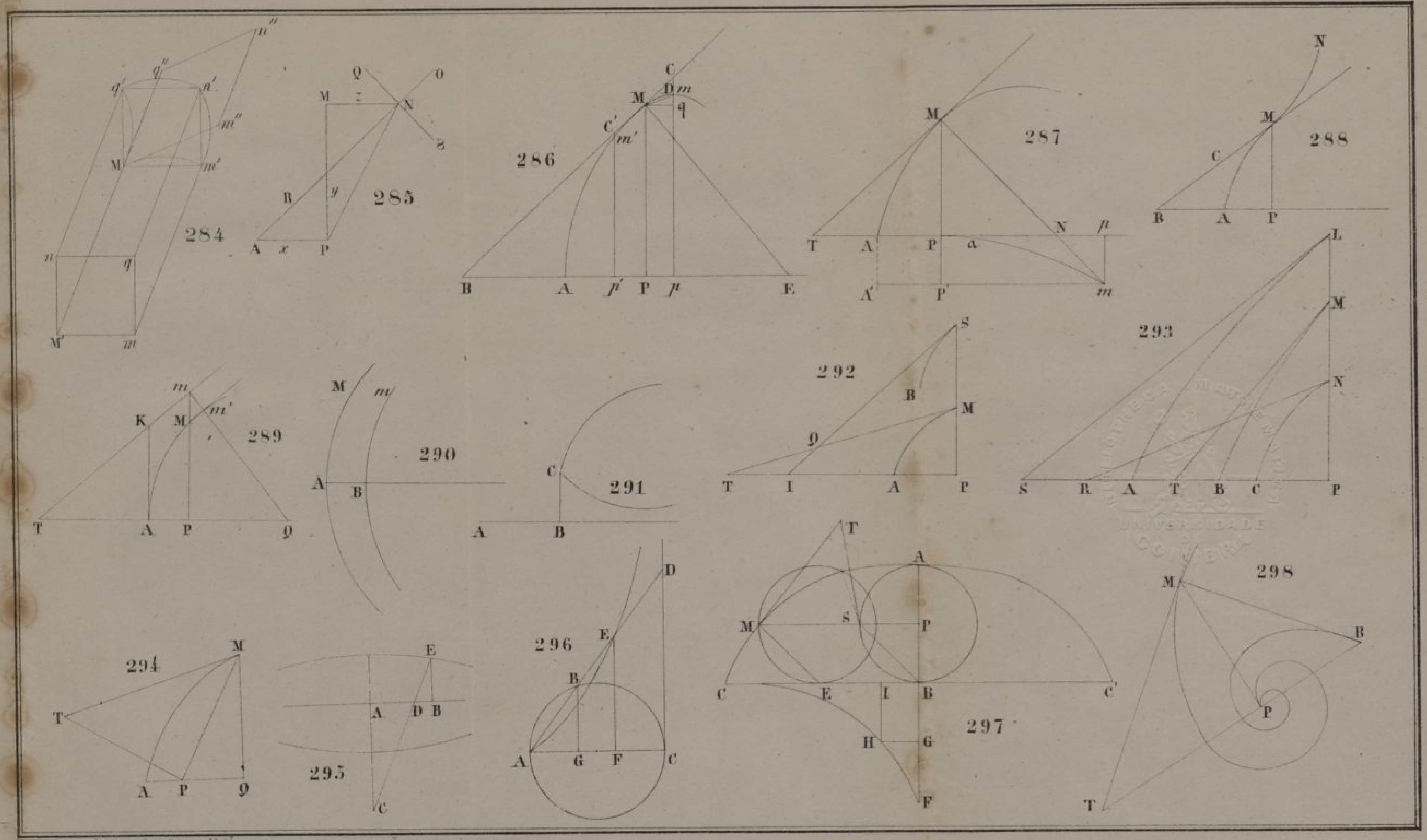


Lith. da Imp. N.al

Est.ª 15.ª



Lith. da Imp. N.al



Lith. da Imp. N.al

MARGIOCHI

GEOMETRIA