

Biblioteca Geral

GUMERSINDO SARMENTO DA COSTA LOBO

RESISTÊNCIA

DOS

FLUIDOS



COIMBRA
IMPrensa DA UNIVERSIDADE

1926

Casa 5
Gab.
Est. 12
Tab.
N.º 4

UNIVERSIDADE DE COIMBRA
Biblioteca Geral



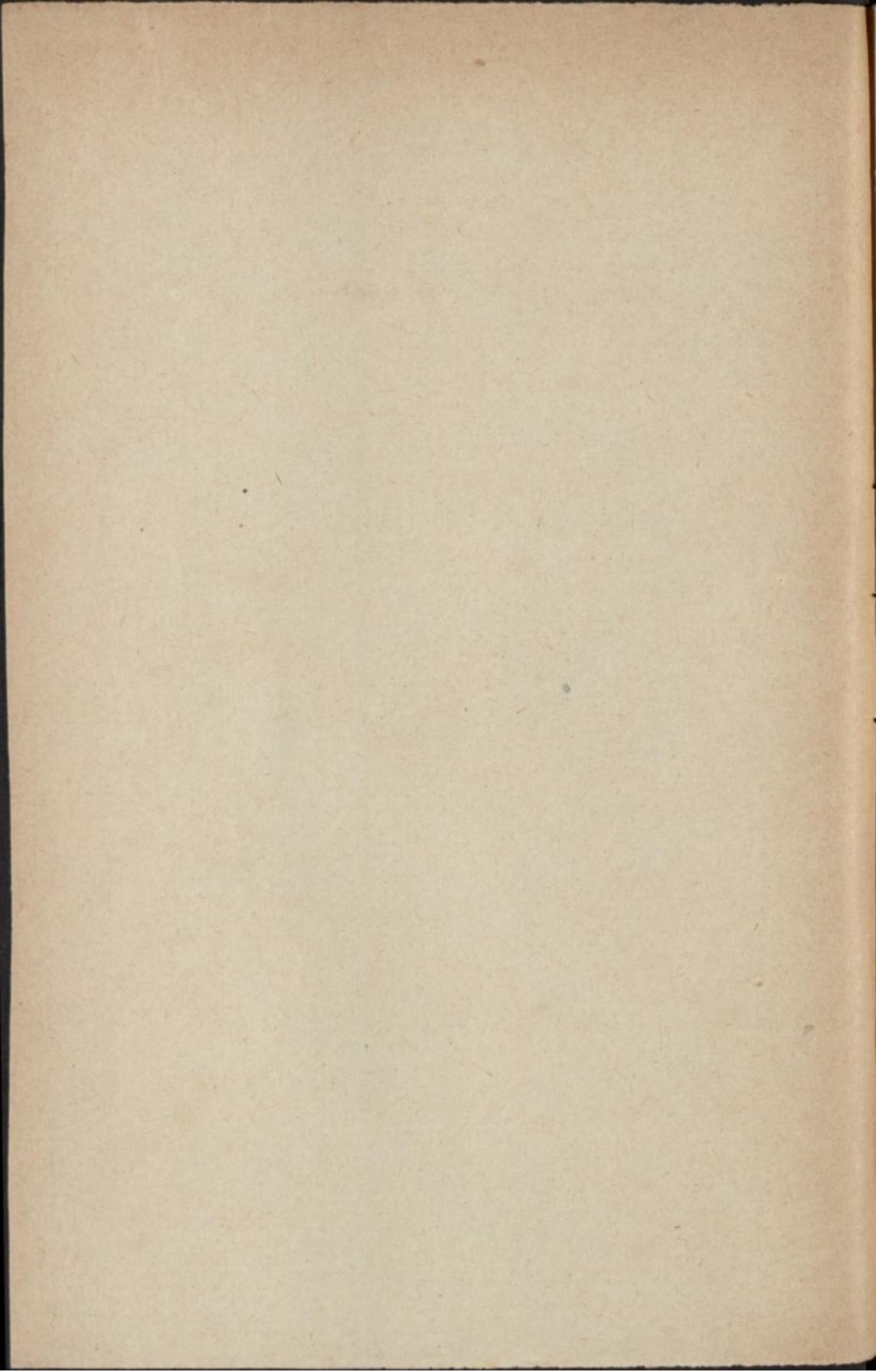
1301088411

5
12
4

RESISTÊNCIA DOS FLUIDOS

1

b 16760554



GUMERSINDO SARMENTO DA COSTA LOBO

RESISTÊNCIA DOS FLUIDOS



COIMBRA

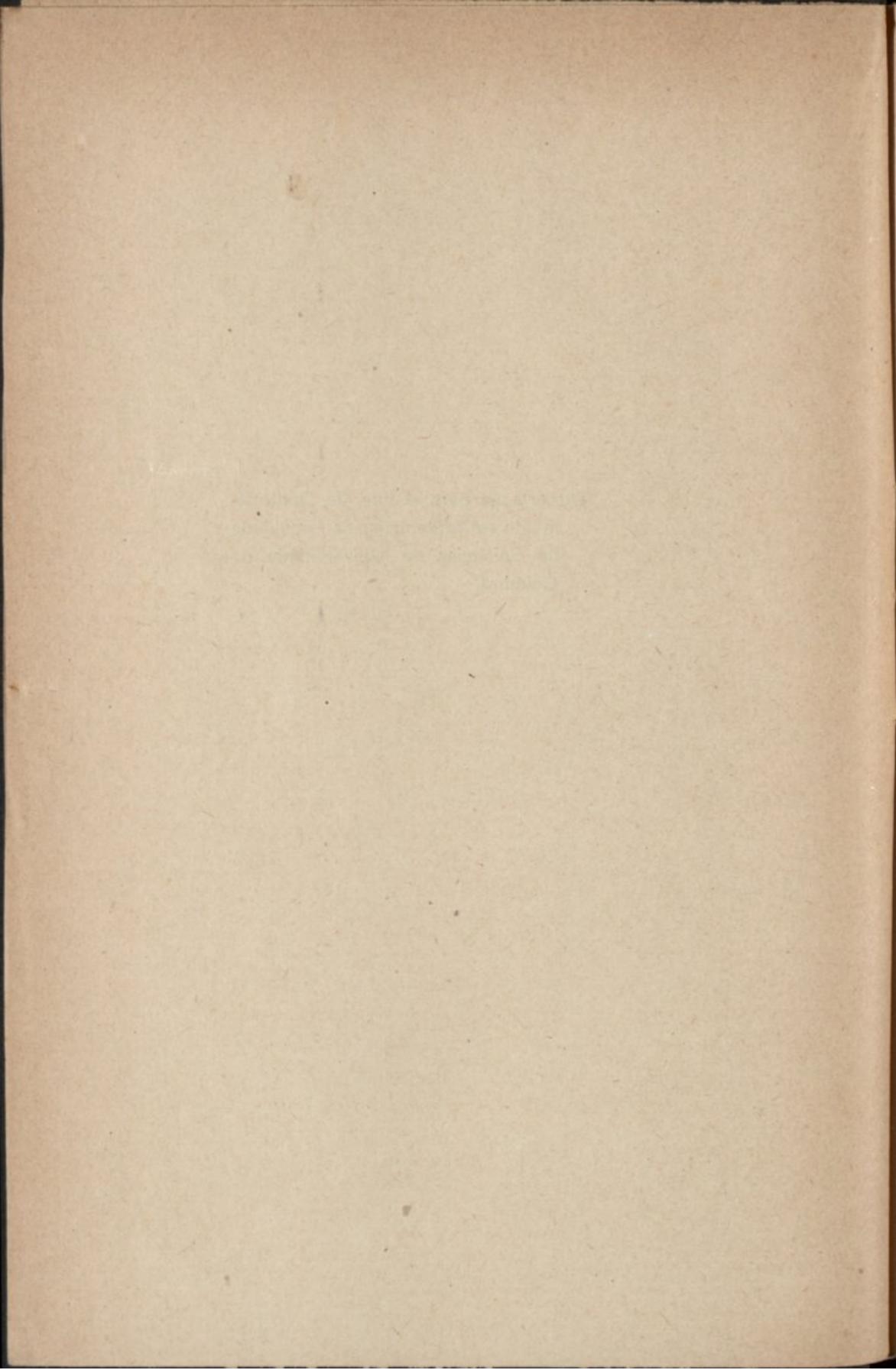
IMPRESA DA UNIVERSIDADE

1926

REPTILES AND AMPHIBIANS



Dissertação para o acto de Doutoramento em Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra.



INTRODUÇÃO

Os fenómenos físicos de que vamos ocupar-nos serão, no seu conjunto, os observados num meio fluido no qual se deslocam corpos rígidos.

Estas investigações constituem uma parte importante da fluidodinâmica, que estuda os movimentos dos corpos através de qualquer fluido, e dos próprios fluidos.

Infelizmente a insuficiência dos conhecimentos baseados em experiências, e as dificuldades que são encontradas no uso dos processos analíticos, são circunstâncias que nos inibem, até agora, a despeito de admiráveis descobertas, de chegar a conclusões definitivas sobre os fenómenos a que nos referimos. Também, pode observar-se que, duma maneira geral, nenhuma das tentativas de explicação do Universo, como as de Descartes, Newton, Thomson, Brillouin, etc., têm conseguido o êxito desejado.

É escusado encarecer a actividade e interêsse das investigações realizadas neste capítulo da ciência. Debaixo do ponto de vista utilitário, com uma extensa aplicação aos problemas técnicos, é também enorme o desenvolvimento atingido. Têm conseguido já resultados muito importantes as teorias científicas sobre os problemas relativos à navegação aérea, e os problemas de hidráulica, os quais, como

é sabido, têm estreita relação com os vitais problemas da energia nas instalações hidro-elétricas.

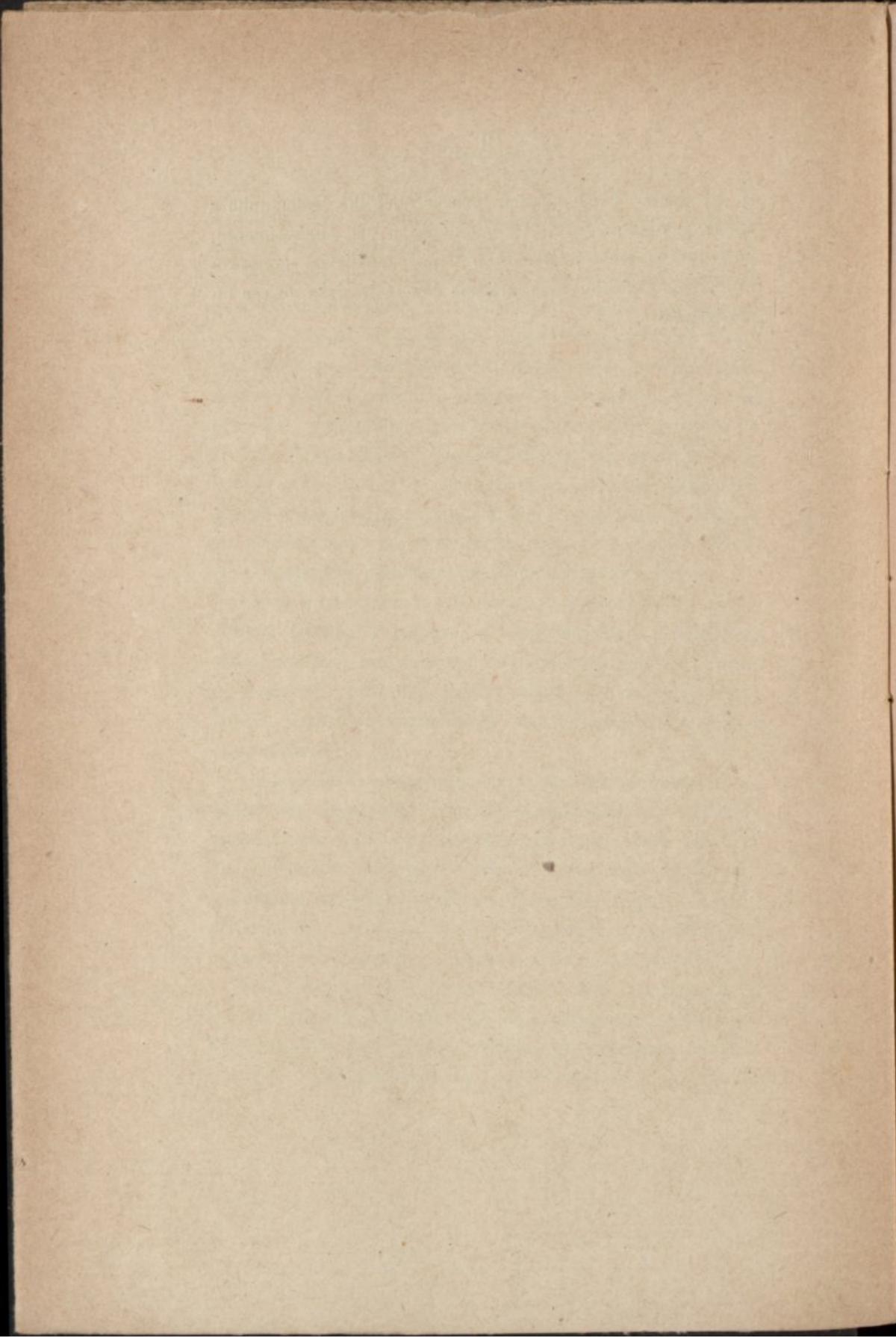
Há pouco tempo, porém, apenas havia noções muito vagas sobre a resistência dos fluidos, questão fundamental nestes estudos. A-pesar dos mais notáveis sábios terem proseguido com entranhado interesse os seus trabalhos neste sentido, a dificuldade que oferecem as observações não tem permitido determinar duma maneira precisa a natureza da resistência dos fluidos. Contudo experiências recentes revelam já que as leis da hidrodinâmica clássica constituem apenas uma primeira aproximação; e as últimas tentativas, ao mesmo tempo que demonstram uma maior complexidade neste fenómeno, permitem-nos formular novas hipóteses.

O desenvolvimento que tomou a hidrodinâmica nestes últimos tempos é enorme, e neste trabalho indicaremos como, baseados nas teorias da fluidodinâmica, os fenómenos da resistência tem mais larga compreensão com uma satisfatória verificação experimental das fórmulas a que somos conduzidos.

Os sucessivos aperfeiçoamentos, que tantos autores iminentes têm conseguido, bastarão para justificar o desenvolvimento, que entre nós devemos imprimir a estes estudos, que, de grande valor para a economia dum país, constituem a demonstração mais evidente da enorme importância das matemáticas, em cujas teorias a engenharia encontra preciosos elementos para a solução dos seus problemas.

Não devo terminar estas considerações sem acentuar a especial atenção que merecem as investigações experimentais realizadas com o fim de resolver os problemas dos fluidos pelo sábio professor da Universidade de Toulouse M.

C. Camichel. Com o maior prazer aqui lhe testemunho a minha gratidão por me ter facilitado o seu conhecimento, levando a sua amabilidade ao ponto de permitir-me que aproveite neste trabalho duas imagens demonstrativas dessas investigações.



CAPÍTULO I

Considerações preliminares

1. Devemos a Arquimedes os primeiros elementos da fluidodinâmica, baseados sobre resultados experimentais. Entre eles o princípio a que ligou o seu nome, e no qual assentou uma teoria de flutuadores com o estudo da estabilidade do equilíbrio.

Atenta a grande aplicação do estudo destes fenómenos, mereceram eles sempre especial atenção, e não será de mais afirmar que a resistência dos fluidos terá sido objecto de remotas investigações. Já para a construção dos navios deveria existir um conjunto de regras, que não chegaram até nós.

Durante muito tempo, pouco se avançou sobre os resultados obtidos por Arquimedes. Em fins do século XVI, Stevins estabeleceu algumas bases para o estudo da estática, e encontrou de novo aqueles resultados utilizando a idea da solidificação dum líquido sem destruição do equilíbrio.

2. As primeiras experiências sobre a resistência dos fluidos são atribuídas a Galileu, que, estudando o movimento dos corpos e considerando a causa que modifica a lei da queda dos graves, estabelecida para o vazio, se refere à resistência produzida pelo ar, nos seguintes termos (1):

«O ar a-pesar-de muito móbil, reduz a velocidade dos

(1) Diálogo 1.º, 1638.

corpos que caem, por muito pesados que sejam, como pode verificar-se pela experiência seguinte. — Se duma torre muito alta fôr disparada para baixo uma bala, esta penetrará menos no solo do que penetrará outra que seja disparada a quatro ou seis braças acima do solo, sinal evidente de que a velocidade da bala atirada de cima da torre diminuiu constantemente na sua descida através do ar...». Os académicos de Cimiento comprovaram (1657-1667) as previsões de Galileu medindo o diâmetro da perfuração produzida pela bala num disco de fôlha.

Contudo, Galileu não considera no estudo dos movimentos a alteração proveniente da resistência.

3. Mariotte, que repetiu as mesmas experiências, forneceu o primeiro enunciação duma lei do movimento retardado pela resistência do ar [*Tratado da pressão e do choque dos corpos*, 1679], apoiando-se na doutrina de Galileu sobre a queda dos graves.

Supondo a resistência proporcional à velocidade, Mariotte chega à seguinte fórmula para calcular o espaço percorrido no fim de n segundos:

$$z = g \frac{n^2}{2} \left[1 - a \left(1 + \frac{n-1}{2} \right) \right].$$

Esta fórmula foi verificada no Observatório Astronómico de Paris pelo próprio Mariotte, que encontrou os resultados concordantes com a teoria.

4. Pela mesma ocasião, Blaise Pascal (*Traité de l'équilibre des liqueurs*, Paris, 1663) torna conhecida uma importante propriedade dos fluidos: *Princípio de Pascal*. «As pressões transmitem-se integralmente em toda a extensão dum líquido».

Adiante veremos rapidamente a grande importância deste princípio para o desenvolvimento teórico desta ciência, constituída no grande mistério que ainda hoje perdura sobre a natureza dos fluidos.

5. Nos fins do século passado tomaram grande incremento diferentes ramos da engenharia, como o estudo das pressões na architectura naval, resistência oposta à marcha dos veículos, navegação aérea, meteorologia, etc.

Exigia-se uma solução mais rigorosa para todos estes problemas, e os meios de que a ciência então dispunha eram principalmente as fórmulas teóricas da hidrodinâmica dadas por Newton, e algumas fórmulas empíricas experimentais.

Definições dos fluidos

6. O método utilizado por Newton para a determinação da resistência que sofre um corpo quando se move num fluido, fornece a base que tem sido aproveitada por muitos dos autores que têm abordado este assunto.

Decerto devido às dificuldades encontradas, Newton considerou o fluido sob dois pontos de vista e procurou combater a teoria dos turbilhões de Descartes.

Numa das suas hipóteses considera o fluido como um conjunto de corpúsculos elásticos que tendem a afastar-se uns dos outros em consequência de uma força repulsiva, e dispostos livremente a distâncias iguais. Noutra hipótese, Newton considera os fluidos num estado de continuidade e compressão em que as particulas que os compõem estão contíguas.

7. Newton, para estudar a acção dos fluidos sobre os corpos sólidos neles imersos, supõe que é o fluido que choca

os corpos, e determina a relação entre o efeito do choque dum fluido sobre uma superfície curva e sobre um plano.

Além disto, Newton supõe muito pequena a densidade do fluido relativamente à do sólido, e admite que o movimento do fluido devido à presença do obstáculo não é comunicado às regiões vizinhas.

Partindo destes princípios, Newton chegou ao estabelecimento das suas leis sobre a resistência dos fluidos, as quais, atendendo aos reduzidos recursos das sciências matemáticas naquela época, representam um forte poder de concepção.

8. Daniel Bernoulli, que deduziu as leis do movimento dos fluidos applicando o princípio da conservação das forças vivas (teoria que publicou no tom. II da Academia de S. Petersburgo), considera o fluido composto por um conjunto de pequenos corpúsculos elásticos que se comprimem uns aos outros. Baseado nesta representação, Daniel Bernoulli generalizou aquele princípio, notando que a conservação das forças vivas tem lugar num sistema de corpos de qualquer espécie.

9. Assentes as bases da hidrostática por Clairaut, foi estabelecida a doutrina da hidrodinâmica, partindo do princípio de d'Alembert, tomando-se em consideração o princípio de Pascal. D'Alembert, nota que, dentre as concepções até então apresentadas, a melhor e mais plausível seria a devida a Newton quando considera o fluido como um corpo cujas partes cedem a uma força qualquer que sobre elas actue e que se movam facilmente, cedendo a essa força. Para d'Alembert a melhor noção sobre a natureza dos fluidos é a que decorre do princípio de Pascal, por este ser um resultado da experiência geralmente admitido.

10. Uma das maiores vantagens que d'Alembert aponta à sua teoria resulta da possibilidade de ela servir para a demonstração de que a importante lei da mecânica chamada da conservação das forças vivas, tem lugar tanto para os sólidos como para os fluidos.

Estabelecidas as leis do movimento, procura d'Alembert a acção dos fluidos sobre os sólidos e, lamentando a falta de elementos rigorosos, considera que o único resultado experimental aproveitável é o seguinte: as partículas fluidas, depois de impulsionadas, vão ocupar atrás do corpo o espaço que elle deixou vazio.

11. Já para o caso da percussão sobre o plano eram grandes as divergências entre os mais notáveis matemáticos daquela época. A falta do conhecimento da extensão da perturbação provocada pela presença dum obstáculo basta para serem atribuídos valores muito diferentes à resistência.

Estabelecimento das equações fundamentais da hidrodinâmica

12. Como acabamos de observar, as propriedades dos fluidos são mal definidas, e os géometras fundam-se para os seus estudos em hipóteses que estabelecem sobre a constituição destes corpos.

Obedecendo à natural necessidade de bem localizar os elementos, foram levados ao extremo os seus caracteres. Assim, na mecânica racional foram considerados corpos inteiramente desprovidos de toda e qualquer tendência a guardarem uma forma determinada: — os fluidos perfeitos de natureza completamente oposta à dos sólidos.

Os fluidos são representados por um sistema material contínuo, para o qual, no estado de repouso, os esforços inte-

riores são pressões normais. A palavra esforço foi adoptada por E. Cosserat e F. Cosserat numa memória sobre elasticidade (*Annales de la F. de S. de Toulouse* (1) 10 (1896) mem. n.º 9, pág. 38). Na Inglaterra W. J. M. Rankin (*Manual of applied mechanics*, London, 5.ª ed.) usou a palavra *stress*. Na tradução francesa desta obra, A. Vialay diz simplesmente «acções moleculares». Se esta propriedade tiver lugar no estado de movimento o fluido diz-se *perfeito*. No caso contrário o fluido é chamado *viscoso*. Na prática é fácil verificar que sempre existem esforços oblíquos nos fluidos em movimento e que por isso realmente são todos viscosos. É o que se verifica num canal de inclinação constante no qual a água, sob a acção da gravidade, não toma um movimento uniformemente acelerado como deveria succeder se as suas particulas se deslocassem sem resistência umas sobre as outras. Atendendo à complicação do problema e por ser insignificante o efeito da viscosidade em muitos casos, para reduzir as dificuldades, numa primeira aproximação não se considera a viscosidade.

13. As equações gerais da hidrodinâmica, da mesma maneira que as relativas aos meios contínuos, podem obter-se partindo do seguinte teorema relativo a um sistema material. — *Num sistema qualquer as forças de inércia verificam a cada instante as seis condições de equivalência a zero dum sistema de vectores*. Este método foi indicado por Cauchy numa memória intitulada: *Da tensão ou compressão num corpo sólido*. (*Oeuvres* (2) 7. Paris, 1889, pág. 60/81). A. G. Greenhill (*Encyclopædia Britânica*, 11.ª ed., 14, Cambridge, 1910, pág. 115/35 art. *hydromechanics*) deduziu as equações da hidrostática deste princípio por meio do teorema de Green, avaliando o acréscimo da quantidade de movimento sofrido pelo fluido encerrado numa superfície fixa.

Este método equivale ao empregado por Euler. [*Hist. Acad. Berlin*, 1755, ed. 1757, pág. 274/315].

14. Aquele grande geómetra, que simplificou as equações dadas por d'Alembert dando-lhes a forma actualmente usada, encarou o problema da maneira seguinte: estudando as variações dos elementos representativos do movimento do fluido nos diferentes pontos do espaço. Designaremos por u, v, w , as projecções da velocidade no instante t , segundo três eixos rectangulares, correspondentes a um ponto qualquer do espaço de coordenadas (x, y, z) . As velocidades u, v, w , duma partícula do fluido dependem, duma maneira geral, das variáveis x, y, z e t . A estas quatro variáveis dá-se o nome de variáveis de Euler.

Outro sistema também empregado na hidrodinâmica é o das variáveis de Lagrange. Neste caso são tomadas como variáveis independentes as coordenadas x_0, y_0, z_0 , no instante $t=0$ e a variável t .

Portanto, enquanto que no método d'Euler consideramos o movimento num ponto do espaço, Lagrange segue a partícula fluida no seu movimento.

Estes dois sistemas de variáveis foram empregados por Euler [*Hist. Acad. Berlin*, (1755), ed. 1757].

Lagrange indicou-os igualmente na sua *Mécanique Analytique*, 2, Paris, 1788, pág. 442/9, 450/3; 3, Ed. *Mécanique Analytique*, 2, Paris, 1855, pág. 253/62, 262/6 e nas suas obras, Paris, 1889.

15. Para um volume elementar que destacaremos do fluido sob a forma dum paralelepípedo infinitamente pequeno, de lados dx, dy, dz , paralelos aos eixos coordenados, vamos estabelecer as equações do movimento segundo o princípio de d'Alembert: A soma geométrica de tôdas as forças

que actuam sôbre um sistema qualquer em movimento e das forças de inércia é igual a zero.

Como o paralelepípedo está submetido à pressão hidro-

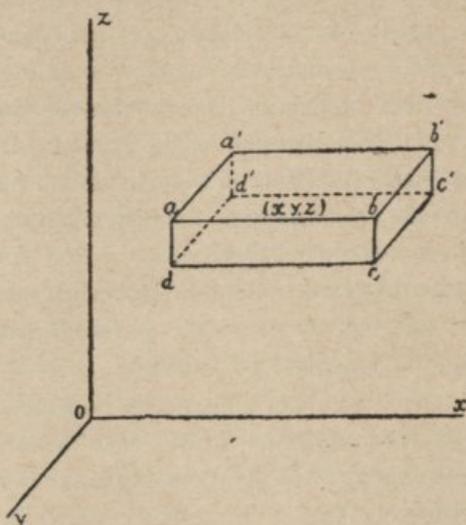


Fig. 1

dinâmica que actua sôbre as faces, se no centro (x, y, z) do paralelepípedo a pressão é p , a pressão sôbre a face $bb'c'c$, que se encontra à distância $\frac{dx}{2}$ do centro, será

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}.$$

Sôbre a face simétrica desta $aa'd'd$ a pressão será

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}.$$

Com o mesmo raciocínio, obtemos as pressões sôbre as

faces $a' b' c' d'$, $a b c d$, $a a' b' b$, $d d' c' c$, respectivamente iguais a

$$p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}$$

$$p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}$$

$$p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}.$$

A soma das projecções segundo Ox das pressões hidrodinâmicas que actuam sobre a superfície do paralelepípedo elementar será portanto:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz.$$

Da mesma maneira se obterá segundo a direcção Oy :

$$- \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz$$

segundo a direcção Oz :

$$- \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz.$$

Se fizermos corresponder à unidade de massa a força cujas componentes são X , Y , Z , as projecções das forças que actuam sobre a massa do paralelepípedo considerado serão

$$X \rho dx dy dz$$

$$Y \rho dx dy dz$$

$$Z \rho dx dy dz$$

onde ρ exprime a densidade do fluido, $dx dy dz$ o volume do paralelepípedo. As projecções das forças de inércia correspondentes ao paralelepípedo terão as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} & -\rho dx dy dz \frac{d^2x}{dt^2} \\ & -\rho dx dy dz \frac{d^2y}{dt^2} \\ & -\rho dx dy dz \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}$$

Substituindo estes valores nas fórmulas que traduzem o princípio de d'Alembert, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz &= X\rho dx dy dz - \rho dx dy dz \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz &= Y\rho dx dy dz - \rho dx dy dz \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz &= Z\rho dx dy dz - \rho dx dy dz \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}$$

ou ainda

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{d^2z}{dt^2}. \end{cases}$$

A transformação d'Euler consiste em substituir as segundas derivadas das coordenadas pelas variáveis u, v, w , e pelas suas primeiras derivadas em relação às coordenadas e ao tempo.

Então obteremos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

e análogamente

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (1) estes valores, obtêm-se as equações d'Euler com a forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= X - \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

A este sistema junta-se a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0,$$

a qual exprime, que o fluido permanece contínuo durante o movimento.

É ainda necessária uma equação complementar pela qual se determina a natureza física do fluido. É uma relação entre a pressão, a densidade e a temperatura

$$\rho = f(p, \theta).$$

Estas cinco equações são as relações que nos permitirão determinar u , v , w , p e ρ em função de x , y , z .

16. No caso dos fluidos incompressíveis a densidade será constante. A equação de continuidade tomará neste caso a forma seguinte:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

17. Para um fluido incompressível no caso dos movimentos permanentes, isto é, quando a configuração é independente do tempo, as equações tomam a forma seguinte:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = X - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} - w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = Y - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} - w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = Z - u \frac{\partial w}{\partial x} - v \frac{\partial w}{\partial y} - w \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \rho = \text{const.} \end{array} \right.$$

Fixaremos ainda que as rotações das partículas são representadas pelo vector-turbilhão:

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

18. Além das equações do movimento (2) é necessário considerar as condições iniciais, que se obtêm determinando, para o instante inicial $t=0$, as posições das partículas e as suas velocidades, e as condições limites, conforme o fluido esteja em contacto com uma superfície, que o limite por todos os lados ou só em parte, podendo existir então uma superfície livre.

Alguns teoremas clássicos

19. TEOREMA DE EULER. — Sendo AB um filete fluido, e admitindo que as forças exteriores, que actuam sobre a

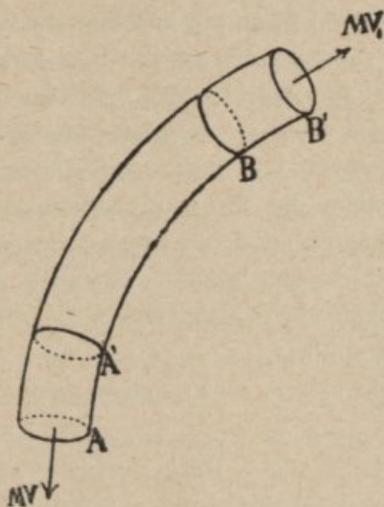


Fig. 2

unidade de massa, são nulas, o conjunto das pressões que se exercem sobre o tubo considerado, equivale a duas forças normais às secções A e B, das quais uma, MV_1 , aplicada ao ponto B à saída do filete, e a outra, MV , no ponto A à en-

trada. V e V_1 representarão as velocidades nas secções A e B, e M a quantidade de fluido que atravessa a secção na unidade de tempo.

No caso do movimento permanente a massa do fluido para um filete determinado é uma grandeza constante e independente do tempo.

A intensidade da primeira força será dada pela quantidade de movimento do fluido na secção B, por segundo, e a sua direcção será a da velocidade. Com a mesma direcção da velocidade, mas com sentido contrário, a segunda força terá análogamente por intensidade a quantidade de movimento por segundo na secção A.

Quando estas forças forem concorrentes haverá uma resultante, e em geral terão por sistema de redução uma força e um binário. Todas as forças das pressões hidrodinâmicas do meio fluido são consideradas aplicadas à superfície do filete elementar e supõe-se por abstracção que foi suprimido o fluido, que envolve o filete infinitamente pequeno. Fazendo actuar além das forças precedentes, em cada ponto da massa do fluido contida no tubo, as forças de inércia, e imaginando que não tem lugar o movimento do filete, poderemos, em virtude do princípio de d'Alembert, considerar o sistema em equilíbrio.

As forças de inércia serão representadas pela expressão

$$\Sigma mj.$$

As projecções destas forças segundo os eixos coordenados serão dadas pelas seguintes expressões:

$$\Sigma mj_x, \quad \Sigma mj_y, \quad \Sigma mj_z.$$

A projecção de j , segundo o eixo dos x , é a derivada da

projecção da velocidade V_x em relação ao tempo

$$(3) \quad j_x = \frac{dV_x}{dt};$$

logo,

$$\Sigma mj_x = \Sigma m \frac{dV_x}{dt}$$

ou, atendendo a que a massa é independente do tempo, temos

$$\Sigma mj_x = \Sigma m \frac{dV_x}{dt} = \Sigma \frac{d}{dt} (mV_x) = \frac{d}{dt} \Sigma mV_x.$$

No instante t o fluido ocupa uma parte AB do filete fluido; no instante $t + dt$ o fluido desloca-se e vai ocupar uma nova posição A'B' (fig. 2). A quantidade do fluido contida entre A' e B' nos instantes t e $t + dt$ não se altera por ser independente do tempo a velocidade. A diferença entre as quantidades de movimento no instante final será devida a ter desaparecido uma certa quantidade de movimento entre A e A', e uma nova ter aparecido entre B e B'. Se designarmos por M a massa do fluido, que passa no filete na unidade de tempo, será $M dt$ a massa que se escoou no tempo dt : é a massa contida entre A e A' ou B e B'. A quantidade do movimento do fluido entre as secções A e A' será $MV dt$; da mesma maneira para B e B' será $MV_1 dt$.

Representando por α e α_1 os cosenos dos ângulos das velocidades com o eixo dos x , as projecções destas quantidades de movimento sobre este eixo, serão

$$MV dt \quad \text{e} \quad MV_1 dt \alpha_1.$$

A diferença das quantidades de movimento das massas

contidas entre as secções AA' e BB' é

$$MV_1 d\alpha_1 - MV d\alpha;$$

e portanto temos

$$d \Sigma m V_x = MV_1 d\alpha_1 - MV d\alpha,$$

donde

$$d \Sigma m j_x = \frac{d}{dt} \Sigma m V_x = MV_1 \alpha_1 - MV \alpha.$$

Para os eixos dos y e dos z teremos análogamente

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma m j_y = MV_1 \beta_1 - MV \beta \\ \Sigma m j_z = MV_1 \gamma_1 - MV \gamma. \end{cases}$$

Estas fórmulas exprimem, que a redução de tôdas as pressões, que actuam sobre o filete a uma fôrça e um binário, conduz a uma que é a resultante de MV_1 e MV .

Para verificarmos, que o binário resultante de tôdas as pressões transportadas à origem, é igual ao binário resultante do transporte de MV e MV_1 para a mesma origem, vamos demonstrar, que a projecção dos momentos das quantidades de movimento em relação a cada um dos eixos coordenados, é igual ao momento das pressões em relação a estes mesmos eixos.

Como no caso considerado, as fôrças da pressão hidrodinâmica são equivalentes às quantidades mj , os seus momentos serão equivalentes aos de mj . Os momentos das pressões, são portanto :

$$\Sigma m (y j_z - z j_y)$$

$$\Sigma m (z j_x - x j_z)$$

$$\Sigma m (x j_y - y j_x)$$

e, considerando a fórmula (3) resulta

$$\Sigma m (y j_z - z j_y) = \Sigma m \left(y \frac{dV_z}{dt} - z \frac{dV_y}{dt} \right).$$

Diferenciando $\Sigma m (y V_z - z V_y)$ vem

$$\frac{d}{dt} \Sigma m (y V_z - z V_y) = \Sigma m \left(y \frac{dV_z}{dt} + V_z \frac{dy}{dt} - z \frac{dV_y}{dt} - V_y \frac{dz}{dt} \right)$$

e como é

$$V_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{e} \quad V_z = \frac{dz}{dt}$$

teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Sigma m (y V_z - z V_y) &= \Sigma m \left(y \frac{dV_z}{dt} + V_z V_y - z \frac{dV_y}{dt} - V_y V_z \right) \\ &= \Sigma m \left(y \frac{dV_z}{dt} - z \frac{dV_y}{dt} \right) \\ &= \Sigma m (y j_z - z j_y). \end{aligned}$$

Para determinarmos a variação dos momentos das quantidades de movimento, para o intervalo de tempo dt , dividiremos o filete em duas partes: uma de A a A' e de A' a B para o instante inicial, e outra de A' a B e de B a B' para o instante final.

O momento das quantidades de movimento do fluido compreendido entre as secções A A' em relação a O α será:

$$MV dt (y \gamma - z \beta)$$

teremos portanto:

$$M dt (y_1 V_1 \gamma_1 - z_1 V_1 \beta_1) - M dt (y V \gamma - z V \beta) = d \Sigma m (y V_z - z V_y)$$

donde

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \Sigma m(yV_z - zV_y) = M(y_1 V_1 \gamma_1 - z_1 V_1 \beta_1) - M(yV_\gamma - zV_\beta)$$

e da mesma maneira para ox e oy .

Resulta pois, considerando as expressões (4) (5), que as acções das pressões hidrodinâmicas sobre o filete, são equivalentes às forças MV e MV_1 .

20. O teorema de Euler permite determinar a resultante de tôdas as forças, que se exercem sobre os diferentes pontos da superfície do filete e nos planos terminais, exprimindo-as por meio da quantidade de movimento do fluido que passa através do pequeno filete.

21. TEOREMA DE BERNOULLI. — Sendo U uma função de forças, e a densidade função da pressão, é $\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = U + \text{const.}$ para cada filete fluido. No caso dum movimento irrotacional $\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} - U$, é constante para todo o fluido e este facto, é designado algumas vezes por teorema de Lagrange.

Chega-se rapidamente à fórmula, que traduz o teorema de Bernoulli partindo das equações gerais da hidrodinâmica.

No caso do movimento permanente, facilmente se deduz a expressão:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) &= X dx + Y dy + Z dz - \\ &- u \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial x} dy + \frac{\partial w}{\partial x} dz \right) \\ &- v \left(\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial y} dz \right) \\ &- w \left(\frac{\partial u}{\partial z} dx + \frac{\partial v}{\partial z} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right). \end{aligned} \right.$$

Para determinarmos a variação da pressão ao longo duma linha de corrente, atendendo a que os deslocamentos dx , dy , dz são funções do arco ds é necessário, que sejam verificadas as condições seguintes:

$$dx = udt, \quad dy = vdt \quad \text{e} \quad dz = wdt.$$

Substituindo estes valores na equação (6), vem:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{\rho} = X dx + Y dy + Z dz - \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) dt - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) dt - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) dt = X dx + Y dy + Z dz - \\ - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) dz \right] \end{array} \right.$$

visto que $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ é o valor absoluto da velocidade da partícula fluida ao longo da sua trajectória.

Supondo, que há um potencial U , teremos

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

e a equação (7) reduz-se a

$$\frac{dp}{\rho} = dU - d\left(\frac{V^2}{2}\right).$$

Integrando segundo uma linha de corrente, temos:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = U + \text{const.}$$

Esta expressão é geralmente designada sob o nome de fórmula de Bernoulli.

22. Relativamente aos fenómenos de descontinuidade, e aos choques dos fluidos, a que adiante nos referiremos, fez

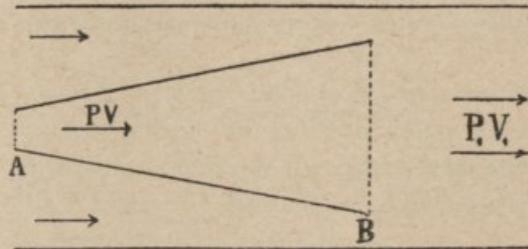


Fig. 3

Borda considerações interessantes, e nas quais foram baseadas as teorias de Saint-Venant e Poncelet, sobre o teorema de Carnot, assim formulado:

« Quando um sistema qualquer animado duma velocidade determinada se precipita noutro sistema, e a velocidade do primeiro diminui até ser igual à do segundo, a perda total da potência viva, é igual à potência viva devida às velocidades perdidas ».

Se num fluido com a velocidade V_1 e a pressão p_1 for lançado outro fluido sob pressão, animado duma velocidade $V > V_1$, observa-se que se forma uma corrente que não se mistura com o meio em que o fluido foi lançado, a qual vai aumentando de volume e diminuindo de velocidade até atingir a velocidade do meio envolvente.

Intervêm diferentes acções durante este fenómeno, que se produz no intervalo das duas secções A e B, sendo A aquela por onde entra a corrente à pressão p com a veloci-

dade V e a outra onde a corrente atinge a pressão p_1 e a velocidade V_1 do fluido envolvente.

Borda, por esse facto, applicando o teorema de Bernoulli às secções A e B, juntou à fórmula um coeficiente de correcção para exprimir a perda de potência viva absorvida pelo choque:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + \frac{(V - V_1)^2}{2} = U + \text{const.}$$

Movimento num plano

23. Neste caso o problema consiste em estudar o movimento das partículas fluidas situadas num plano, supondo-se que para tódo o fluido as velocidades de que estão animadas as partículas são paralelas a um plano fixo. O movimento fica neste caso caracterizado, tomando-se para plano de referência qualquer dos planos paralelos. A equação de continuidade neste caso será para o plano $z = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Esta equação exprime, que

$$-v dx + u dy$$

é uma diferencial exacta e poderemos escrever:

$$(8) \quad u = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

A função ϕ é geralmente designada pelo nome de função

de Stokes, ou função de corrente em virtude do seu significado cinemático. As linhas de corrente, com efeito, tem por equação

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

isto é

$$d\psi = 0$$

ou

$$\psi = \text{const.}$$

Não havendo turbilhões, e sendo φ o potencial de velocidades teremos

$$(9) \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Logo φ e ψ satisfazem às equações

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

e atendendo às equações (8) e (9) vê-se que as funções φ e ψ são harmônicas conjugadas. A função $\varphi + i\psi$ de $z = x + iy$ é uma função analítica da variável z

CAPÍTULO II

Paradoxo de d'Alembert

24. Por meio das fórmulas fundamentais do capítulo anterior, tomando para base a hidrodinâmica clássica, tem-se procurado explicar os fenómenos, que têm lugar nos fluidos naturais, atendendo aos resultados obtidos para os fluidos perfeitos.

Marcando uma nova fase para estes estudos, Helmholtz precisava esta idea da seguinte maneira: «Autant que je puis le voir, il n'existe réellement, à l'heure actuelle, aucune raison pour ne pas considérer les équations d'hydrodynamique comme les expressions exactes des lois qui, dans la réalité, régissent le mouvement des fluides».

25. Se em muitos casos têm sido vencidas as dificuldades que pareciam invalidar esta orientação, é também certo que o problema que se apresenta quando se considera um obstáculo no seio dum fluido, constitui justamente um dos casos que, de há muito, mais tem experimentado os esforços dos matemáticos, que têm seguido esta ordem de ideas.

26. A resistência, como já tivemos ocasião de indicar, é revelada pela diminuição absoluta que sofre a velocidade dum corpo lançado através dum meio fluido.

Ora, como os efeitos que nos tornam conhecido este fenómeno são observados nos fluidos naturais, occorre verificar se esta acção retardadora terá apenas lugar nos fluidos naturais, isto é, se será essencialmente devida à viscosidade. Torna-se portanto necessário calcular o valor resultante das pressões exercidas no obstáculo, partindo da teoria indicada.

27. Teòricamente, como é sabido, segundo o principio do movimento relativo, é indifferente considerar o fluido móvel e o sólido fixo, ou o sólido móvel num fluido em repouso. Na prática, porém, como indicaram Dubuat e Duchemin, a resistência R_1 , que sofre uma placa imóvel numa corrente de fluido, é superior à resistência R que opõe à mesma placa o fluido em repouso, no qual ela se desloca, sendo a relação das duas resistências :

$$\frac{R_1}{R} = 1,3.$$

A differença entre R_1 e R é conhecida por *paradoxo de Dubuat*.

Êste desacôrdo era também attribuído a erros experimentais.

28. O professor Zukovskij executou uma engenhosa experiência para demonstrar que o paradoxo de Dubuat se manifesta em consequência de terem lugar regímens diferentes no fluido, nos dois casos, facto que aparentemente parecia não ter lugar.

Esta experiência consiste em medir com uma balança apropriada a resistência, que sofre a placa fixa, quer imprimindo o movimento deslocando o recipiente que o contém, quer lançando a corrente do fluido através do recipiente.

Comparando estas duas experiências, conclui Zukovskij que esta divergência é devida à velocidade relativa entre a corrente e as paredes do canal quando, em virtude do atrito nas paredes, se formam turbilhões.

Para ser elucidado este ponto teòricamente, torna-se, porém, necessário um conhecimento exacto das condições de formação do regimen da corrente em volta do obstáculo nos dois casos.

29. Se considerarmos o caso dum sólido deslocando-se num fluido indefinido, com um movimento de translação uniforme, a resultante de tôdas as pressões que se exercem sobre o sólido, na direcção da velocidade do fluido no infinito, é nula, segundo a teoria analítica de Euler. Isto é, sendo contínuo o movimento do fluido em que está mergulhado o sólido, a resistência sofrida por este é nula, qualquer que seja a forma do sólido.

Esta proposição está em contradição com a experiência, e constitui o paradoxo chamado de d'Alembert, que foi o primeiro a fazer esta observação no caso duma esfera dotada dum movimento de translação uniforme no seio dum líquido indefinido.

30. Se considerarmos um corpo sólido em movimento imerso num fluido incompressível, limitado por um cilindro, e applicarmos ao sistema sólido e fluido uma velocidade oposta à do sólido, teremos o caso dum sólido em repouso no seio duma corrente fluida.

Suponhamos que limitamos o fluido, de um e de outro lado do sólido, por duas secções rectas, situadas a uma grande distância; então, applicando o teorema de Euler, como a soma das pressões sobre as superfícies laterais dos filetes é nula, ficam apenas as pressões sobre a superficie exterior do

fluido e sôbre a superficie do fluido em contacto com o obstáculo. Ora, como neste caso tem lugar a fórmula de Bernoulli, teremos

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 = \text{const.}$$

Em virtude das condições do problema, as pressões sôbre as duas secções destroem-se.

A resistência será pois equivalente às forças correspondentes às quantidades de movimento que se anulam sôbre as duas secções rectas. A resistência directa é, portanto, nula.

31. Determinada a velocidade do fluido em relação ao corpo e calculando as quantidades de movimento duma maneira geral a acção do fluido sôbre o obstáculo será igual a uma força e um binário.

O Professor U. Cisotti, abstraindo das causas a que poderia attribuir-se o desacôrdo entre a representação matemática e os resultados experimentais, fêz dum modo muito geral esta verificação.

Para isso, aquele sábio professor ⁽¹⁾, representa a superficie que limita o corpo por σ e os cosenos directores da normal a esta superficie dirigida para o interior por α, β, γ .

Um sistema de eixos (x, y, z) invariavelmente ligado ao corpo, movendo-se com a velocidade V , é referido a outro sistema fixo ξ, η, ζ , de maneira que tanto o eixo dos z como o eixo dos ζ coincidam e sejam dirigidos segundo a velocidade do corpo. Sendo, portanto,

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = z + Vt$$

⁽¹⁾ *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1909.

e permanente o movimento relativo ao sólido, u , v , w serão apenas funções de x , y , z , independentes de t . As componentes da velocidade devem satisfazer à equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial \zeta} = 0$$

na hipótese de ρ depender de t directamente e por intermédio de ξ , η , ζ , e as equações de Euler serão

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \xi} u + \frac{\partial u}{\partial \eta} v + \frac{\partial u}{\partial \zeta} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \xi} u + \frac{\partial v}{\partial \eta} v + \frac{\partial v}{\partial \zeta} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial \xi} u + \frac{\partial w}{\partial \eta} v + \frac{\partial w}{\partial \zeta} w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

Estas equações podem escrever-se neste caso da seguinte maneira:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= V \frac{\partial \rho}{\partial z} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= V \frac{\partial u}{\partial z} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= V \frac{\partial v}{\partial z} - \left(\frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= V \frac{\partial w}{\partial z} - \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right). \end{aligned} \right.$$

Ainda para atendermos às condições nos limites u , v , w , deverão sobre a superfície satisfazer à condição

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = V\gamma$$

e no infinito, em que se supõe o fluido em repouso, deverá ser :

$$\begin{aligned}u &= 0 \\v &= 0 \\w &= 0.\end{aligned}$$

A resistência directa, atendendo à representação empregada, será dada pela fórmula

$$R_z = \iint_{\sigma} p \gamma d\sigma.$$

Por meio da fórmula de Green transforma-se este integral de superficie num integral de volume, e teremos

$$(11) \quad R_z = \iiint_{\tau} \frac{\partial p}{\partial z} d\tau$$

atendendo a que é

$$\lim \iint_{\sigma_z} p \gamma d\sigma = p_{\infty} \iint \gamma d\sigma;$$

notando que este integral, estendido a uma esfera de raio muito grande, se anula, porque u , v , w no infinito são nulas e p torna-se constante, não actuando forças exteriores.

Substituindo em (11) $\frac{\partial p}{\partial z}$ pelo seu valor tirado da última de (10), fica

$$(12) \quad R_z = V \iiint_{\tau} \rho \frac{\partial w}{\partial z} d\tau - \iiint_{\tau} \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau.$$

Considerando a primeira equação de (10), e applicando

a fórmula de Green, vem

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\tau} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) d\tau = \\
 & = \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} \right] d\tau - \\
 & - \iiint_{\tau} w \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] d\tau = \\
 & = \iiint_{\tau} \rho w (\alpha u + \beta v + \gamma w) d\tau - V \iiint_{\tau} w \frac{\partial \rho}{\partial z} d\tau.
 \end{aligned}$$

Atendendo às condições nos limites, teremos

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\tau} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) d\tau & = V \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} - w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] d\tau = \\
 & = V \iiint_{\tau} \rho \frac{\partial w}{\partial z} d\tau.
 \end{aligned}$$

Valor que, substituído em (12), dá

$$R_z = 0.$$

O Professor U. Cisotti estendeu ainda esta verificação ao caso em que a translação do sólido tem lugar num tubo cilíndrico e para um movimento helicoidal uniforme.

As trajectórias das diferentes particulas dum fluido móvel, por exemplo, em volta duma esfera, segundo a teoria que acabamos de expor fig. 4 dispõem-se simètricamente relativamente ao plano que passa pelo centro do obstáculo e é nor-

mal à direcção da corrente no infinito. Em virtude da simetria da corrente em relação ao eixo, a pressão total será

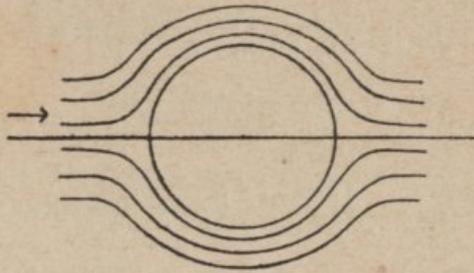


Fig. 4

dirigida segundo o eixo da corrente; mas, como para dois pontos simétricos as projecções da pressão são iguais e opostas, conclui-se que a resistência é igual a zero.

CAPÍTULO III

Soluções para o cálculo da resistência dos fluidos

32. A aplicação da equação de continuidade e das equações de hidrodinâmica de Euler conduzem, como vimos, ao paradoxo de d'Alembert, o que indica que se partiu de alguma hipótese que não está em harmonia com o que realmente se passa.

De facto os filetes não envolvem completamente o obstáculo e portanto, se bem que a pressão não possa sofrer descontinuidades, a velocidade (como muitos fenómenos em diferentes condições nos demonstram) pode variar rapidamente, formando as chamadas superfícies de descontinuidade.

Stokes, estudando um caso particular desta questão, sugeriu a formação duma descontinuidade que deverá ligar-se à noção de fluido perfeito.

Esta forma de regimen mais harmónica com a disposição das particulas dos fluidos naturais é observada em muitos fenómenos que nos são familiares, citando Helmholtz, que deu a primeira solução deste problema (*Discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen*, 1868), o caso do ar carregado de fumo que sai por um orifício como representação experimental destas superfícies.

33. As superfícies de descontinuidade têm sido sempre prolongadas até ao infinito e, por meio do cálculo indicado

no número (31), verificaremos que o paradoxo de d'Alembert subsistiria no caso de não se prolongar até ao infinito a descontinuidade.

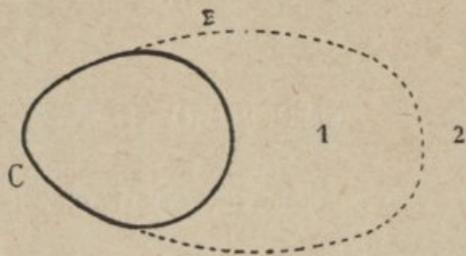


Fig. 5

Consideremos o obstáculo C Fig. 5 e uma superfície de descontinuidade fechada que divide o fluido em duas regiões 1 e 2.

Poderemos escrever:

$$R_z = V \iiint_{\tau} \rho \frac{\partial w}{\partial z} d\tau - \iiint_{\tau} \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau.$$

Operando a transformação de Green e atendendo à existência da superfície Σ , vem:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau = \\ & = \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} \right] d\tau - \\ & - \iiint_{\tau} w \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] d\tau = \\ & = \iint_{\sigma} \rho w (u\alpha + v\beta + w\gamma) d\sigma - V \iiint_{\tau} dw \frac{\partial \rho}{\partial z} d\tau + \\ & + \iint_{\Sigma} [\rho_1 w_1 (u_1 \alpha_1 + v_1 \beta_1 + w_1 \gamma_1) + \rho_2 w_2 (u_2 \alpha_2 + v_2 \beta_2 + w_2 \gamma_2)] d\Sigma \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau = \\ & = \mathbf{V} \iiint_{\sigma} \rho w \gamma d\sigma - \mathbf{V} \iiint_{\tau} w \frac{\partial \rho}{\partial z} d\tau + \\ & + \iint_{\Sigma} [\rho_1 w_1 (u_1 \alpha_1 + v_1 \beta_1 + w_1 \gamma_1) + \rho_2 w_2 (u_2 \alpha_2 + v_2 \beta_2 + w_2 \gamma_2)] d\Sigma. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Green ao primeiro termo resulta,

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau = \mathbf{V} \iiint_{\tau} \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} d\tau - \\ & - \mathbf{V} \iint_{\Sigma} (\rho_1 w_1 \gamma_1 + \rho_2 w_2 \gamma_2) d\Sigma - \mathbf{V} \iiint_{\tau} w \frac{\partial \rho}{\partial z} d\tau + \\ & + \iint_{\Sigma} [\rho_1 w_1 (u_1 \alpha_1 + v_1 \beta_1 + w_1 \gamma_1) + \rho_2 w_2 (u_2 \alpha_2 + v_2 \beta_2 + w_2 \gamma_2)] d\Sigma. \end{aligned}$$

Como a superfície de discontinuidade se desloca paralelamente a si mesma será,

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau & = \mathbf{V} \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} - w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] d\tau = \\ & = \mathbf{V} \iiint_{\tau} \rho \frac{\partial w}{\partial z} d\tau \end{aligned}$$

e resulta

$$R_z = 0.$$

34. Sem mesmo se atender à verificação que acabámos de fazer, reconhece-se que é indispensável o prolongamento das discontinuidades até ao infinito, em virtude de uma proposição devida ao Professor M. Brillouin [*Les surfaces de glissement d'Helmholtz et la resistance des fluides*, 1911] e que P. Duhem propôs que fôsse chamado *paradoxo de Brillouin*,

que tem o seguinte enunciado: *Se um sólido se desloca com velocidade uniforme num fluido indefinido, em regimen permanente, e a pressão se anula no infinito, no caso de se não for-*

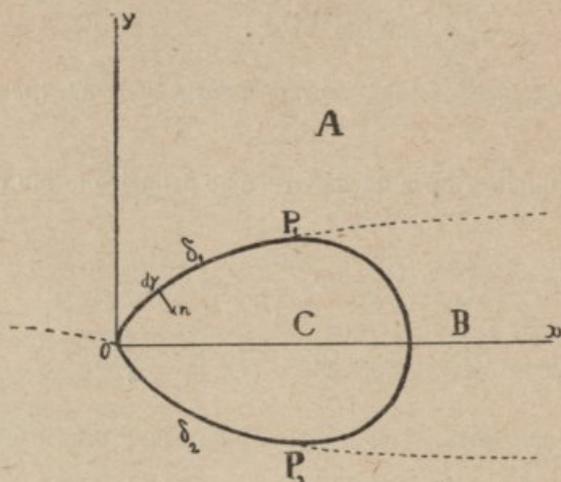


Fig. 6

marem superfícies de descontinuidade que se estendam até ao infinito, haverá pontos no fluido em que a pressão terá valores negativos.

35. Esta hipótese tem permitido já, em muitos casos, concluir das equações da hidrodinâmica clássica resultados concordantes com a experiência. É o que o Professor Levi Civita [*Scie e leggi di resistenza*, 1906] verifica, estudando o movimento no plano nas seguintes condições: considera-se uma porção *C* do plano animada duma velocidade de translação uniforme no seu plano e um sistema de eixos ortogonais (x, y) invariavelmente ligado a *C*. Fig. 6.

Designa-se por γ o contôrno da secção plana *C* que é envolvido pela corrente dum fluido incompressível e sem ro-

tações, situada no mesmo plano, e supõe-se que atrás do corpo se estende uma coluna de fluido B que se move solidariamente com C, formando B e C um todo conexo, separado da região A do plano pelas linhas λ_1 λ_2 pontuadas para trás do sólido.

Poderá figurar-se o movimento relativo das partículas do fluido em relação ao corpo C recorrendo ao artifício de imprimir a todo o sistema (formado pela zona limitada atrás do sólido pela superfície de escorregamento, pelo sólido e pelo resto do fluido) uma translação uniforme de velocidade oposta à de C.

É o caso duma corrente modificada pela presença dum perfil. O sistema formado por B e C ficará em repouso e os filetes do fluido virão do infinito paralelos entre si, animados duma velocidade igual e contraria à de C, de intensidade igual à unidade no sentido positivo do eixo dos x .

Um dos filetes mais vizinhos de C virá dividir-se num ponto o do perfil, que tomaremos para origem dos eixos coordenados, percorrendo respectivamente os dois arcos ∂_1 e ∂_2 e deslocando-se para trás do sólido segundo λ_1 e λ_2 .

A influência do obstáculo diminui com a distância de tal maneira que, sendo u_p e v_p as projecções da velocidade relativa dum ponto do fluido e $u_p - 1$ e v_p as projecções da velocidade absoluta, é

$$(13) \quad \lim_{op \rightarrow \infty} u_p = 1, \quad \lim_{op \rightarrow \infty} v_p = 0.$$

Considera-se o plano do movimento representativo duma variável complexa

$$z = x + iy.$$

Ora como tóda a função $f(z)$ da variável imaginária se

pode escrever sob a forma:

$$f = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

das expressões (8) e (9) resulta

$$f'(z) = u - iv.$$

Em virtude de (13), φ cresce indefinidamente quando P se afasta segundo o eixo dos x . Quando se tende para o ∞ , ψ cresce indefinidamente. A função f é regular em A , excepto para $z = \infty$ onde $\lim_{z \rightarrow \infty} |f| = \infty$, sendo porém $\frac{df}{dz}$ regular em A , incluindo o ponto no infinito.

As condições nos limites resultam de exprimirmos que λ é uma linha de corrente o que implica, como é sabido, que sôbre esta linha seja constante o valor da função de corrente.

Teremos, atendendo às condições estabelecidas,

$$\psi = 0$$

em todos os pontos de λ .

Como λ_1 e λ_2 se estendem indefinidamente, e é $V = 1$ em todos os pontos de A a distância infinita, será

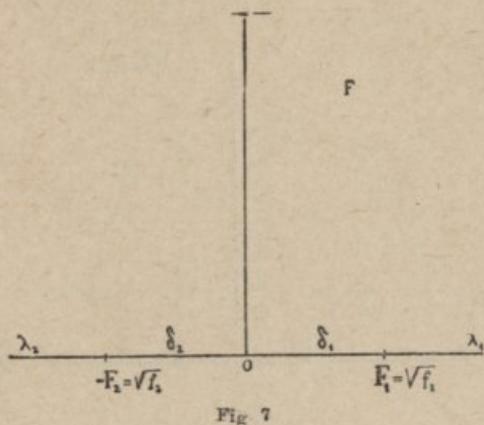
$$V = 1$$

sôbre λ_1 e λ_2 .

A equação $f = f(z)$ define a correspondência entre os dois planos A e f com um corte ao longo da semi-recta Ox .

36. Para uma aplicação geral seria de grande importância a escôlha dum novo domínio num plano auxiliar, sôbre o qual se fizesse a representação conforme do plano f .

O Professor Levi-Civita opera uma grande simplificação fazendo esta representação sôbre a área dum semi-círculo. Começa, para isso, por fazer corresponder ao plano f cor-



tado, por uma transformação conforme, a área duma semi-circunferência para o que faz

$$(14) \quad f = F^2.$$

Para os pontos f_1 e f_2 resulta fig. (7)

$$F_1 = \sqrt{f_1} \quad -F_2 = -\sqrt{f_2}.$$

A transformação linear

$$F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)z + \frac{1}{2}(F_1 - F_2)$$

transporta F_1 e F_2 para os pontos $+1$ e -1 do plano z .

A origem $F=0$ corresponderá ao ponto

$$z = -\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}.$$

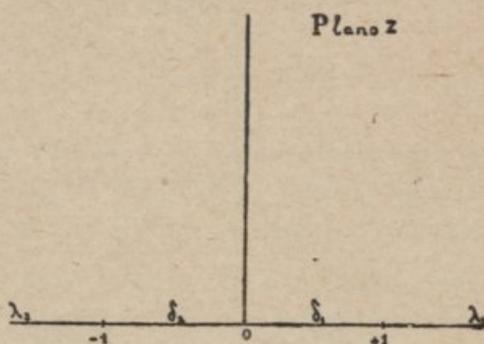


Fig. 8

Sendo σ_0 o único arco para o qual são F_1 e F_2 positivos vem

$$\cos \sigma_0 = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}$$

e fazendo

$$\frac{1}{2}(F_1 + F_2) = a$$

e

$$(15) \quad F = a(z + \cos \sigma_0) \quad (0 < \sigma_0 < \pi)$$

e com a transformação

$$(16) \quad z = -\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

fica representado no campo de $\zeta = \xi + i\eta$ o domínio semicircular representado pela fig. (9).

A quantidade $w = u - iv$ é em Λ uma função de z e portanto de f e de ζ .

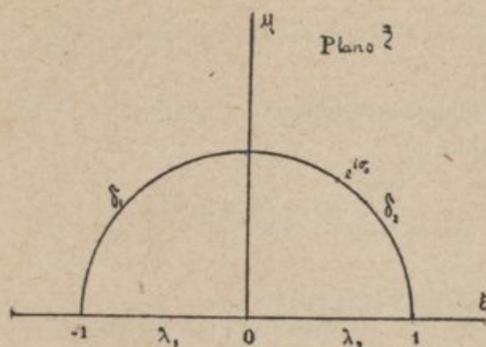


Fig. 9

Sobre λ_1 e λ_2 será $|w| = 1$

$$w = e^{-i\omega}$$

definirá a velocidade em função de ζ .

Fazendo

$$\omega = \theta + i\tau$$

virá

$$V = e^\tau, \quad \frac{u + iv}{V} = e^{i\theta}.$$

Sobre o diâmetro horizontal, ω é real por ser $V = 1$ e $\tau = 0$.

Como $\zeta = 0$ corresponde ao ∞ será $\omega(0) = 0$; sobre a semicircunferência ω será finita e contínua, excepto no ponto $\zeta = e^{i\sigma}$, onde será $i\omega = \infty$.

Considerando as fórmulas (14) (15) (16) e recordando que as linhas de corrente são caracterizadas pela equação

$\phi = \text{const.}$ obtêm-se as curvas representativas das linhas de corrente pela expressão

$$[\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2 \cos \sigma_0 (\xi^2 + \eta^2)](\xi^2 + \eta^2 - 1)\eta = b(\xi^2 + \eta^2)^2.$$

Sendo conhecida a função $\omega(\zeta)$, a posição de cada elemento será deduzida de

$$dz = \frac{df}{w} = e^{i\omega} df$$

considerando (14) (15) (16), vem

$$(17) \quad df = \frac{1}{2} a^2 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

e portanto

$$(18) \quad dz = \frac{1}{2} a e^{i\omega} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}$$

donde

$$(19) \quad z = \int_{e^{i\sigma}}^{\zeta} e^{i\omega} df.$$

A expressão do elemento de arco será pois

$$(20) \quad |dz| = e^{i\omega} |df| = e^{-\tau} |df|.$$

Como o ângulo de contingência é $d\theta$ partindo de (20), a curvatura será dada pela fórmula

$$c = \frac{d\theta}{|df|}.$$

A fórmula (17) sobre a semicircunferência 1, $-e^{i\sigma}$, -1 dá quando σ varia de 0 a π

$$(21) \quad df = -2a^2 (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma.$$

Substituindo este valor em (20), vem

$$z = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{i\theta} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma.$$

Separando nesta expressão a parte real da imaginária, resultam para os pontos sobre δ_1 e δ_2 as expressões

$$x = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau} \cos \theta (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma$$

$$y = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau} \operatorname{sen} \theta (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma.$$

Substituindo em (19) o valor df dado por (21), o comprimento elementar dum arco em δ será dado pela expressão seguinte:

$$d\delta = 2a^2 e^{-\tau} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma$$

e, portanto,

$$\delta = 2a^2 \int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau} (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \operatorname{sen} \sigma d\sigma.$$

A representação das linhas λ_1 λ_2 far-se há desta forma: os valores de z sobre esta linha correspondem aos valores reais de ζ . Para P_1 faremos $z_1 = x_1 + iy_1$ e sendo z um

ponto de λ_1 , será

$$\begin{aligned} z &= z_1 + \int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega} df = \\ &= z_1 + \frac{1}{2} a^2 \int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned}$$

O arco elementar será

$$d\lambda = |e^{i\omega} df| = |df|$$

donde, considerando as fórmulas de transformação referidas,

$$\lambda_1 = \frac{1}{4} a^2 \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right)^2 - a^2 \cos \sigma_0 \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta + 2 \right).$$

Anàlogamente, para λ_2 teríamos, a partir de P_2

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} a^2 \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right)^2 - a^2 \cos \sigma_0 \left(\frac{1}{\zeta} + \zeta - 2 \right)$$

sendo ζ compreendido entre 1 e zero.

37. Para calcular a resistência, visto efectuarmos o estudo no plano, temos de considerar as duas componentes

$$R_x = \int_{\gamma} p \cos (nx) d\gamma$$

$$R_y = \int_{\gamma} p \cos (ny) d\gamma.$$

Em todos pontos de A é

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$$

tomando a pressão o valor p_0 em B .

Teremos

$$R_x = \frac{1}{2} \int_{\delta} (1 - V^2) \cos(nx) d\delta$$

$$R_y = \frac{1}{2} \int_{\delta} (1 - V^2) \cos(ny) d\delta$$

expressões que mostram que a resistência fica apenas dependente do estado de movimento em δ .

Representando as componentes do arco elementar $d\delta$ por dx e dy , e tomando sôbre δ o sentido P_2 o P_1 , teremos

$$\cos(nx) d\delta = dy$$

$$\cos(ny) d\delta = -dx.$$

Fazendo

$$R = R_x + i R_y$$

ficará

$$R = \frac{1}{2i} \int_{P_0 P_1} (1 - V^2) dz$$

que se transforma em

$$\frac{1}{2i} \int (1 - e^{2\tau}) e^{i\omega} df$$

ou

$$R = \frac{1}{2i} \int_{chc_1} e^{i\omega} df - \frac{1}{2i} \int_{chc_1} e^{2\tau + i\omega} df$$

achando-se o percurso indicado na fig. 10.

Notando que $\omega(z)$ é real sobre o diâmetro $+1-1$, esta função pode prolongar-se analiticamente segundo $c_1 h_1 c$ e

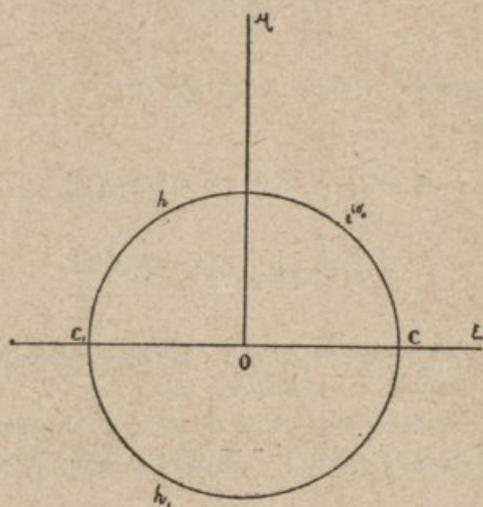


Fig. 10

os valores atribuídos a esta função são conjugados dos pontos z simétricos.

Poderemos, portanto, escrever

$$2\tau + i\omega = i\omega \left(\frac{1}{z} \right).$$

A expressão (17) não se altera quando mudamos z em $\frac{1}{z}$ pelo que poderemos escrever:

$$\int_{c_1 h_1 c} e^{2\tau + i\omega} df = \int_{c_1 h_1 c} e^{i\omega \left(\frac{1}{z} \right)} df$$

e portanto

$$R = \frac{1}{2i} \int_{chc, h, c} e^{i\omega(\zeta)} d\zeta.$$

Para determinarmos R precisamos de calcular os resíduos da função

$$\frac{1}{2} a^2 e^{i\omega(\zeta)} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{1}{\zeta}$$

nos pontos singulares situados no círculo $|\zeta|=1$. O único polo é $\zeta=0$. Notando que as derivadas sucessivas de $e^{i\omega}$ em relação a ζ , são

$$\begin{aligned} & i\omega' e^{i\omega} \\ & (i\omega - \omega'^2) e^{i\omega} \\ & \dots \end{aligned}$$

nas vizinhanças do polo teremos

$$e^{i\omega} = 1 + \zeta i\omega'(0) + \frac{\zeta^2}{2} [(i\omega''(0) - \omega'^2(0))] + \dots$$

e considerando o coeficiente de $\frac{1}{\zeta}$ no desenvolvimento de

$$e^{i\omega} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta^3} - 2 \cos \sigma_0 + 2 \cos \sigma_0 \frac{1}{\zeta^2} \right)$$

resulta finalmente

$$R = \frac{\pi a^2}{4} \omega'^2(0) + \frac{i\pi a^2}{2} \left[2 \cos \sigma_0 \omega'(0) - \frac{1}{2} \omega''(0) \right]$$

e portanto

$$\begin{cases} R_x = \frac{\pi a^2}{4} \omega'^2(0) \\ R_y = \frac{\pi a^3}{4} \left[2 \cos \sigma_0 \omega'(0) - \frac{1}{2} \omega''(0) \right]. \end{cases}$$

38. Deve observar-se que não se apresenta clara a relação entre a função arbitrária na expressão deduzida e a forma do corpo.

O ilustre professor H. Villat demonstrou pouco depois que designando por $e^{i\sigma}$ um ponto da circunferência de raio igual à unidade no plano ζ e por $\Phi(\sigma)$ o valor do ângulo que faz o eixo dos x com a tangente à superfície no ponto correspondente do plano z , a função $\omega(\zeta)$ terá por expressão

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\sigma) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \sigma + \zeta^2} d\sigma$$

sendo $\Phi(\sigma)$ sujeita à condição necessária

$$\int_0^\pi \Phi(\sigma) d\sigma = 0.$$

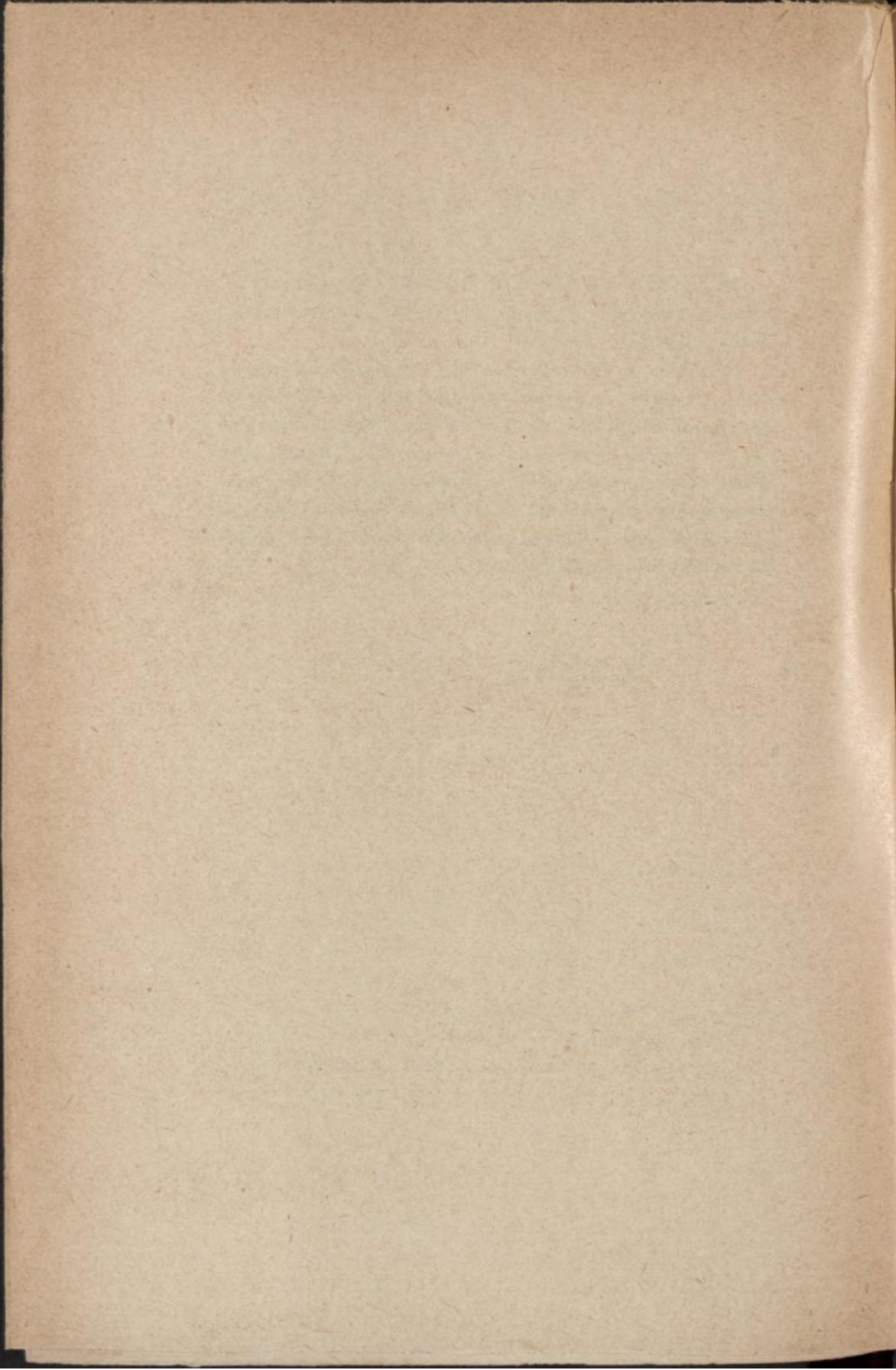
Quando σ varia de 0 a π , o ponto z correspondente descreve o perfil sempre no mesmo sentido, donde se conclui que o sentido da variação de $\Phi(\sigma)$ depende da forma do obstáculo e assim poder-se há determinar a solução deste problema para uma configuração dada.

Embora o número dos pontos angulosos possa ser qualquer, é necessário atender a que a solução seja fisicamente aceitável, como o professor M. Brillouin indicou: em primeiro lugar é necessário que as velocidades se conservem em todos os

pontos inferiores à unidade e que no plano z as linhas limites não se encontrem.

39. O Professor H. Villat estabeleceu as condições suficientes para que a escolha da função arbitrária corresponda a soluções aceitáveis.

Há porém casos simples em que estas soluções não são únicas, existindo uma infinidade de soluções aproveitáveis que só poderão eliminar-se à custa duma larga investigação que ainda resta fazer para se determinar a solução mais conveniente. S. G. Greenhill, partindo também do método do Professor Levi-Civita, mas modificando o plano auxiliar para a transformação conforme do domínio móvel, pôde estudar diferentes casos particulares.



CAPÍTULO IV

Observações às soluções apresentadas para o cálculo da resistência dos fluidos

40. Muitas foram as objecções postas à hipótese das descontinuidades. W. Thomson considerou o movimento descontínuo em contração com o princípio da energia cinética mínima por ele estabelecido no caso da continuidade.

Esta objecção foi refutada pelo Professor Brillouin [*Ann. de Chim. et de Phys.*, t. XXII, 1911, p. 433], que concluiu que no movimento descontínuo a energia cinética é menor do que no movimento contínuo para o mesmo obstáculo, havendo igualmente um mínimo para o excesso da energia cinética no movimento descontínuo sobre a energia cinética que possuía o fluido no movimento descontínuo sem obstáculo, excluindo a parte constituída pelo obstáculo e pelo fluido móvel.

41. O Professor J. Hadamard procura demonstrar que é impossível a formação de superfícies de descontinuidade nos fluidos perfeitos, embora reconheça que, admitida a sua formação, poderiam ter lugar os escorregamentos considerados por Helmholtz. O Professor Brillouin sustenta uma opinião contrária, imaginando pela seguinte forma o aparecimento destas superfícies: « La surface de discontinuité peut naître (mathématiquement) en un point quelconque du solide,

comme un bourgeon à double paroi accolé, s'allonger peu à peu et grandir, sans que l'extrémité soit jamais contournée par le liquide. Au début, et pendant toute la croissance, l'espace occupé par le liquide n'est pas séparé par la surface de discontinuité en deux domaines distincts; nulle part la surface de discontinuité ne naît au sein du liquide; elle naît le long de la paroi du solide, en partie à l'avant, en partie à l'arrière; et lorsque les deux éléments venus l'un de l'avant, l'autre de l'arrière viennent s'accoler pour former un nouvel élément émanant de la surface du corps, ils ont des vitesses tangentielles différentes; plus exactement, l'un d'eux, venu de l'avant, a une vitesse tangentielle finie; il se détache tangentiellement de la surface du corps et la prolonge; l'autre, auquel cette forme de surface imposerait un rebroussement, a une vitesse tangentielle nulle, en ce point. En deçà le long du solide, et au delà le long de la surface de discontinuité, la vitesse tangentielle n'est pas nulle; elle croît le long de la surface de discontinuité, jusqu'à la pointe, ou elle devient égale à la vitesse du liquide venu de l'aval, et égale à la vitesse même avec laquelle la pointe de la surface de discontinuité s'avance dans l'espace (sans se propager dans le liquide, sans cesser d'être environnée par les mêmes particules liquides qu'on aurait, par exemple, colorées)....

La surface de discontinuité naît ainsi comme un vase mince dont le bord tranchant s'avance dans l'espace en même temps que le liquide ».

42. De acôrdo com as medidas experimentais, a hipótese da descontinuidade também considera a resistência proporcional ao quadrado da velocidade e portanto independente da viscosidade, que apenas deve intervir numa parte mínima para a formação e modificação deste fenómeno. A instabilidade das pressões negativas é que deve desempenhar o

principal papel na formação das descontinuidades e não a viscosidade, sucedendo, como se sabe pela experiência, que num líquido arejado as pressões inferiores à tenção máxima do vapor sôbre a temperatura actual do líquido são instáveis. No fluido viscoso a superfície de descontinuidade torna-se menos nítida pouco depois da sua formação, no que então deve influir a viscosidade.

43. Para se verificar o acôrdo desta representação teórica com o fenómeno natural é necessário colher as indicações experimentais. A realização experimental das condições em que a mecânica racional estabelece o estudo dos diferentes regîmens fluido-dinâmicos tem sido objecto de successivas tentativas e, a-pesar-das grandes dificuldades, pelo que não possuem, na sua maior parte, valor scientifico immediato, muitas fornecem já preciosos elementos e apontam o método a seguir nas investigações.

44. Como vimos, é de grande importância nesta questão observar quais são os movimentos que resultam para as particulas dos fluidos quando no seio destes se encontra um obstáculo. Muitos destes resultados não eram, porém, facilmente comparáveis em consequência da própria natureza dos fluidos. O illustre professor Camichel conseguiu já observar com uma grande precisão os regîmens que têm lugar nos fluidos colocados nas hipóteses estabelecidas pela teoria de que nos temos occupado, procurando seguir de perto as transformações corpusculares dos meios fluidos.

O método empregado consiste essencialmente, nas suas linhas gerais, em fotografar poeiras iluminadas por um feixe de luz intermitente ou não.

As poeiras arrastam pequenas bôlhas de ar, sofrendo as particulas assim constituidas uma selecção automática. As

que têm uma densidade média igual à do líquido ambiente ficam em suspensão e são as utilizadas; as outras ou caem no fundo ou ficam à superfície.

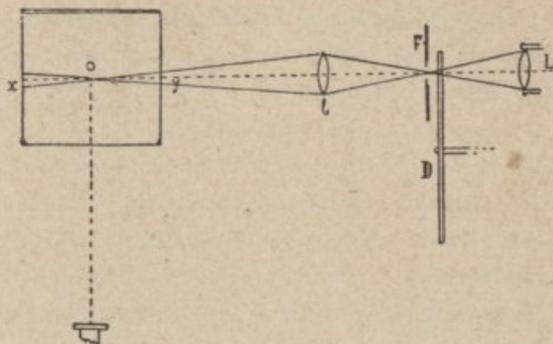


Fig. 11

A reflexão sobre as bôlhas de ar produz pontos muito brilhantes que se destacam sobre um fundo negro. Evita-se assim qualquer acção perturbadora, podendo-se igualmente fixar as condições iniciais.

Esquemáticamente uma tal disposição compõe-se dum foco luminoso L , cuja imagem se forma sobre a fenda F . Adiante da fenda gira um disco D dentado, com uma velocidade determinada por um contador de voltas. A lente l forma a imagem da fenda em coincidência com o eixo do recipiente que contém o líquido a estudar (fig. 11).

As partículas situadas no plano x, y ficam deste modo iluminadas por um feixe luminoso muito delgado.

Quando o disco está parado, as partículas brilhantes, animadas com a velocidade do líquido, produzem um traço luminoso correspondente à sua trajectória, fornecendo-nos então a fotografia um espectro qualitativo. Imprimindo movimento ao disco, fotografamos um traço descontínuo (fig. 12) e ní-

tido ao longo do percurso, na hipótese da trajectória ser plana.

Se designarmos por θ o intervalo de tempo entre duas

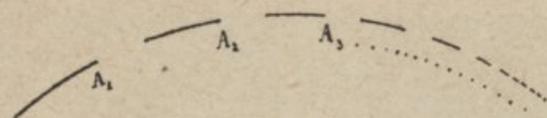


Fig. 12

iluminações sucessivas e por l o comprimento que separa dois pontos homólogos A_1 e A_2 , a velocidade será dada pela fórmula

$$W = K \frac{l}{\theta}$$

sendo K a relação entre o comprimento real $A_1 A_2$ e o determinado sobre a fotografia. Os comprimentos l podem ser medidos com um grande rigor por meio dum micrómetro.

Antes de principiar o movimento, as partículas aparecem representadas por pontos luminosos que correspondem às posições iniciais das partículas. A fotografia do líquido em regimen permanente não perturbado, apresenta o aspecto dum sistema de linhas paralelas. Num regimen perturbado, em que a velocidade é variável em grandeza e direcção para cada ponto observa-se um contínuo cruzamento de filetes.

Aproveitando a influencia dos obstáculos verifica-se ainda a transformação dum regimen não perturbado num regimen perturbado.

Outra observação importante consiste no reconhecimento da existência do potencial de velocidades. O professor Camichel considera um ponto da região em regimen permanente para o qual a velocidade tem por projecções u , v , w , funções de x , y , z , e estuda a componente segundo o eixo dos

y do vector turbilhão

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

da seguinte maneira. Nas vizinhanças do ponto considerado constroem-se as curvas (u, z) e (w, x) tendo determinado respectivamente os valores de u e de w sobre paralelas ao eixo dos z e dos x e que passam pelo ponto P. Por uma série de experiências verificou-se que as tangentes em P às duas curvas são paralelas, o que indica que a rotação em P é nula.

Desenhando sobre a fotografia as linhas de corrente e o traço das superfícies equipotenciais ortogonais às linhas de corrente, confirma-se a existência do potencial para diferentes movimentos dos fluidos, verificando-se que é constante o produto da velocidade pelo comprimento sobre ela compreendido entre duas superfícies equipotenciais vizinhas situadas dum e doutro lado de P. Esta materialização dos movimentos manifesta a analogia das curvas obtidas com as que se encontram na electricidade.

Outra observação a considerar consiste na verificação da aplicação das equações gerais da hidrodinâmica clássica aos fluidos viscosos. O Professor Camichel para este fim efectuou o estudo em regimen permanente da distribuição das velocidades, considerando a região compreendida entre duas lâminas de faces paralelas. Determinada a disposição da experiência de maneira a satisfazer às equações gerais, conclui-se que até $1,50/s$ as equações referidas podem ser applicadas, fazendo-se o deslocamento da água na maior parte da secção em bloco e só nas vizinhanças do recipiente é que se nota diminuição de velocidade.

45. Vejamos o que a experiência nos descobre no caso

dum sólido imerso num fluido em movimento. Para esse fim colocam-se obstáculos de diversa configuração num recipiente com água, de modo que tenhamos um campo de vec-

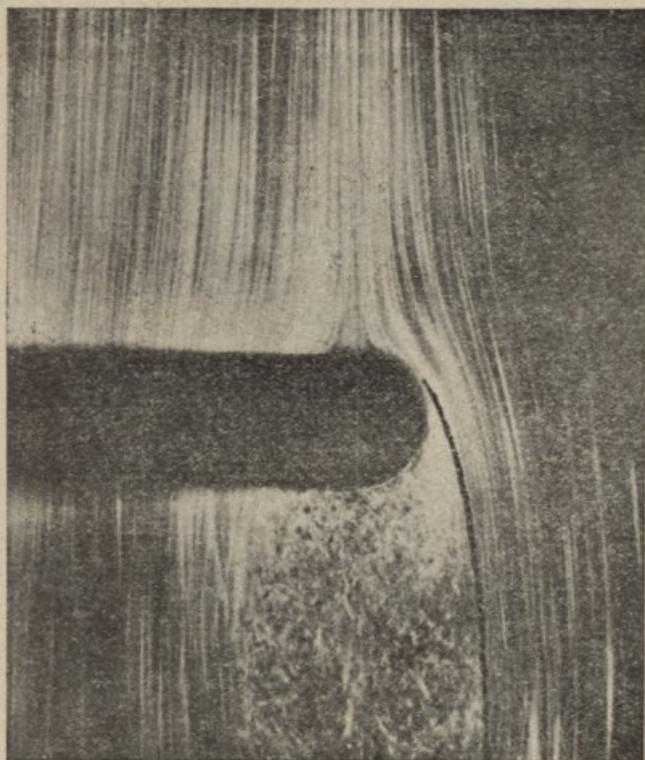


Fig. 13

tores de velocidades verticais constantes na maior parte da secção. Na experiência representada na fig. 13 o obstáculo é um cilindro colocado normalmente à corrente. Ao longo da linha traçada a cheio indicamos a região onde se observa a superfície de descontinuidade. No exterior desta superfície vê-se, de harmonia com as indicações apresentadas, que o

regimen não é perturbado, mas no interior nota-se o aparecimento dum regimen perturbado.

Se empregarmos um disco circular como mostra a fig. 14

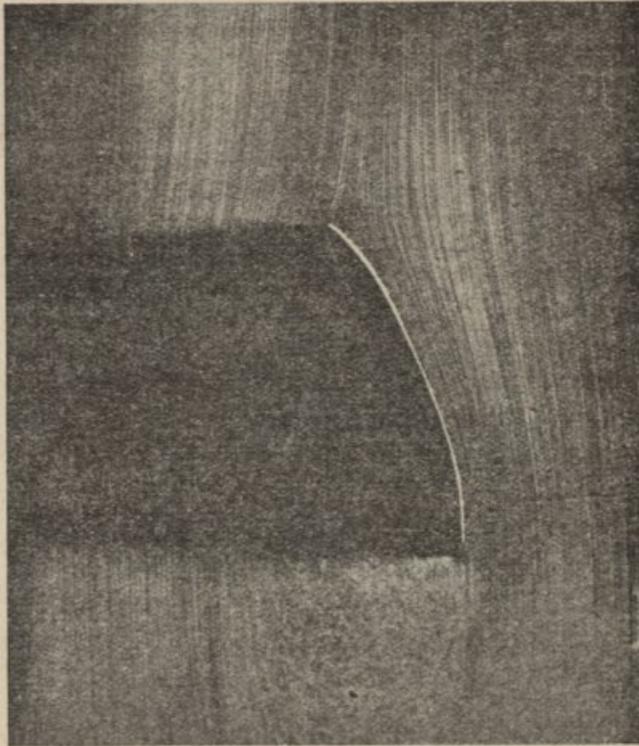


Fig. 14

tem lugar o mesmo fenómeno. A superfície de descontinuidade calculada pelo processo que decorre de admitirmos um potencial de velocidades, pouco se afasta da experiência na porção que se segue imediatamente ao corpo sólido formando-se muito na vizinhança por dentro da calculada; mais adiante vai desaparecendo com a formação de turbilhões.

Introduzindo ar no interior da superfície de descontinuidade desaparece a perturbação e a descontinuidade prolonga-se então até às extremidades do recipiente, diferindo muito pouco em tóda a sua extensão da descontinuidade calculada.

Com o disco dentado em movimento observa-se que nas regiões vizinhas da descontinuidade a velocidade varia rapidamente numa pequena distância normal ao movimento do fluido. Esta superfície tem, portanto, uma certa espessura, sede duma espécie de degradação da velocidade que no limite (fluido perfeito), quando a viscosidade tende para zero, dará a superfície de descontinuidade.

Para pequenas velocidades a descontinuidade desaparece e forma-se então atrás do corpo um regimen não perturbado aproximando-se sensivelmente os filetes de fluido da parte posterior do sólido.

46. Aplicando a lei de Reynolds o professor Camichel procurou fazer o estudo de pequenas velocidades na água substituindo-a por um fluido mais viscoso.

Para pequenas velocidades dum óleo em volta dum cilindro, a fotografia apresenta um fenómeno sensivelmente igual ao representado na (fig. 4) com as velocidades simétricas em relação ao plano vertical que passa pelo centro do obstáculo normal à direcção média dos filetes fluidos tomando o aspecto da (fig. 13) para velocidades maiores. Estes factos confirmam como resulta da medida das resistências que a formação da descontinuidade é independente da viscosidade.

47. Em virtude do aspecto apresentado pela zona onde se forma a descontinuidade torna-se necessário, para melhor se limitarem os elementos que nos permitem descrever a origem da resistência, pormenorizar este fenómeno.

Como exemplo lembramos o estudo sistemático das transformações que se operam na zona de degradação, havendo o cuidado de se repetirem as observações com diferentes posses para se evitar a sobreposição de movimentos componentes.

48. A hipótese introduzida, da descontinuidade, apresenta-se, portanto, como a representação mais proximada do que se passa nas vizinhanças do obstáculo e permite a aplicação da teoria da mecânica racional.

49. Emfim, sendo certo que ainda se encontram nesta doutrina muitos pontos obscuros e que se torna necessário perseverar numa investigação metódica, é, contudo, justo reconhecer que já substituímos à concepção imprecisa duma força retardadora um grupo de movimentos que intervêm, duma maneira preponderante, neste fenómeno. Estes movimentos, conforme as experiências já permitem afirmar, deverão ser considerados resultantes doutros movimentos componentes.

A hipótese da descontinuidade, além de destacar uma parte essencial d'este fenómeno, facilita a orientação a seguir para se chegar à explicação da sua causa e permitirá um novo aproveitamento, pelo conhecimento d'estes movimentos, das forças da natureza. Pelo conhecimento que ultimamente tivemos da curiosa aplicação dos turbilhões às turbinas por Eydoux, encontramos já uma confirmação desta aplicação.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	Pág. 7
----------------------	-----------

CAPÍTULO I

Considerações preliminares	11
Definição dos fluidos	13
Estabelecimento das equações fundamentais da hidrodinâmica . .	15
Alguns teoremas clássicos	23
Movimento num plano.	31

CAPÍTULO II

Paradoxo de d'Alembert	33
----------------------------------	----

CAPÍTULO III

Soluções para o cálculo da resistência dos fluidos.	41
---	----

CAPÍTULO IV

Observações às soluções apresentadas para o cálculo da resistência dos fluidos.	59
---	----

