A quantidade e será pois constante em quanto se attende unicamente á primeira potencia das forças perturbadoras; vejamos agora em que se torna a variação de e quando se considera o quadrado d'estas forças. Neste caso deveremos substituir k, na equação (14), por $Cn+\delta k$, e V por $V+\delta V$; designando por δk uma quantidade de primeira ordem, e por δV uma da segunda. Teremos assim, desprezando as quantidades de terceira ordem,

$$ede = \frac{1}{ABab}\left(Cd'\delta V - Cndt\frac{d.\delta V}{dg} - \delta k dt\frac{dV}{dg}\right) \ldots\ldots (15)$$

Achámos, despresando as quantidades de ordem superior á segunda[1],

$$\delta V = \frac{dV}{dh}\delta h + \frac{dV}{dl}\delta l + \frac{dV}{dk}\delta k + \frac{dV}{dg}\delta g + \frac{dV}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{dV}{d\gamma}\delta\gamma.$$

Para formar a differencial $d'\delta V$ deveremos differenciar somente em relação ao tempo t contido nos valores de φ, ψ, θ as differenças parciaes de V, que multiplicam as variações δh, δl, etc. Ora nestas differenças parciaes podemos substituir $nt+l$ em logar de φ, e considerar ψ e θ como constantes; alem d'isto, ao tomar a differença parcial de δV em relação a g, não devemos fazer variar a quantidade g

[1] Parte 2.ª, cap. 1.º, I.

introduzida pela substituição dos valores de δh, δl, etc. Differenciando d'esta maneira teremos identicamente

$$\frac{d\delta V}{dg}=\frac{d\delta V}{ndt}=\frac{1}{ndt}d'\delta V.$$

A equação (15), pondo por δk o seu valor, dará pois simplesmente

$$ede=-\frac{dt}{ABab}\left(\frac{dV}{dg}\right)\int dt\left(\frac{dV}{dg}\right);$$

d'onde se tira, integrando,

$$e^2=\text{const.}-\frac{1}{ABab}\left[\int dt\left(\frac{dV}{dg}\right)\right]^2.$$

A differencial $\frac{dV}{dg}$ não contem senão termos dependentes do angulo φ, ou do movimento diurno da terra; não contem portanto nenhuma desegualdade susceptivel de crescer pela integração, pois que a observação mostra, que todas as desegualdades dependentes do movimento diurno, que podem existir na posição do eixo terrestre, são absolutamente insensiveis. Segue-se d'aqui que todos os termos da expressão de $\int\left(\frac{dV}{dg}\right)dt$ se conservam, depois da integração, da mesma ordem que os termos correspondentes da differencial $\left(\frac{dV}{dg}\right)dt$

e pode d'aqui concluir-se que, se a quantidade $\left[\int\left(\frac{dV}{dg}\right)dt\right]^2$ encerrar desegualdades seculares, ellas serão da ordem do quadrado das forças perturbadoras.

Com effeito, consideremos na expressão de V dois termos dependentes do mesmo argumento $i\varphi$; será

$$V = H\cos(i\varphi+ft+b) - H'\cos(i\varphi+f't+b').$$

Differenciando em relação a φ, e integrando a expressão resultante, suppondo $\varphi=nt+l$, teremos

$$\int\left(\frac{dV}{dg}\right)dt = \frac{Hi}{in+f}\cos(i\varphi+ft+b) - \frac{H'i}{in+f'}\cos(i\varphi+f't+b');$$

d'onde resultará para $-\left[\int\left(\frac{dV}{dg}\right)dt\right]^2$ um termo da forma

$$\frac{HH'i^2}{(in+f)(in+f')}\cos[(f'-f)t+b'-b],$$

desegualdade independente do angulo φ, mas da ordem do quadrado das forças perturbadoras, pois que as quantidades H e H' são da ordem d'estas forças, e não augmentam pelos divisores que a integração lhes faz adquirir.

Na expressão de e^2 não pode por conseguinte entrar termo algum proporcional ao tempo, nem desegualdade periodica ou secular susceptivel de descer até á primeira ordem; podemos pois considerar e^2 como uma quantidade rigorosamente constante, abstrahindo das quantidades de segunda ordem. Alem d'isto a equação (10) mostra que quaesquer que sejam as variações a que estejam sujeitos os valores de p e q, pelo andar dos tempos, sempre estas quantidades serão da mesma ordem que e; serão pois sempre da ordem das forças perturbadoras, e, por conseguinte, insensiveis como hoje.

III

Dissemos no principio d'esta segunda parte que a primeira demonstração da permanencia dos polos terrestres fora dada em 1809 por Poisson, em uma memoria, de cujo original não podemos ter conhecimento; parece-nos todavia conveniente dizer resumidamente em que ella consiste.

Voltemos ás tres equações do movimento de rotação. Fazendo, por brevidade do calculo,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}\right)+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)=P,\quad \left(\frac{dV}{d\theta}\right)=P',$$

as duas primeiras das formulas (1) tornam-se em

$$\left.\begin{aligned}Adp+(C-B)qrdt&=(P\operatorname{sen}\varphi-P'\cos\varphi)dt,\\ Bdq+(A-C)prdt&=(P\cos\varphi+P'\operatorname{sen}\varphi)dt.\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(16)$$

Supporemos que a terra, se não fosse perturbada no seu movimento pela acção da lua e do sol, giraria uniformemente em tôrno do menor dos tres eixos principaes, que se cruzam no seu centro de gravidade, como tem realmente logar. Já vimos que as oscillações do eixo instantaneo em roda do eixo, de que se tracta, dependem dos valores de p e q, que se obtêm integrando as formulas (16).

Desenvolvendo V em uma serie de senos e cosenos do angulo φ e de seus multiplos, acharemos facilmente os desenvolvimentos de P e P'; e substituindo as expressões resultantes nos segundos membros das equações (16), estes se acharão desenvolvidos em series similhantes. Fazendo em uma primeira approximação $r=n$, $\varphi=nt+l$, os segundos membros d'aquellas equações tornar-se-hão em series de senos e cosenos do angulo $nt+l$, e cada um dos termos d'estas series produzirá para os valores de p e q um termo correspondente, que se obterá da seguinte maneira.

Seja $H\text{sen}(ft+g)$ um termo qualquer do desenvolvimento de

$$P\text{sen}(nt+l)-P'\cos(nt+l).$$

Representemos por $H'\cos(ft+g)$ o termo correspondente do desenvolvimento de

$$P\cos(nt+l)+P'\text{sen}(nt+l),$$

designando por ft a somma dos differentes multiplos do angulo nt e dos medios movimentos da lua e do sol, introduzidos em V pela substituição de $nt+l$ em logar de φ, e pelo deslocamento dos dois astros que perturbam o movimento de rotação da terra. H, H', f e g são funcções dos elementos de suas orbitas e dos angulos θ, ψ e l; e podemos, por conseguinte, consideral-as como constantes na primeira approximação.

Considerando só estes termos, e fazendo $r=n$ nas formulas (16), teremos

$$Adp+(C-B)qndt=H\text{sen}(ft+g)dt,$$

$$Bdq+(A-C)pndt=H'\cos(ft+g)dt;$$

e satisfaremos a estas equações fazendo

$$p=h\cos(ft+g),\quad q=h'\text{sen}(ft+g);$$

sendo as duas constantes h e h' dadas pelas expressões

$$h=\frac{-BHf+(C-B)H'n}{ABf^2-(C-A)(C-B)n^2},$$

$$h'=\frac{AH'f-(C-A)Hn}{ABf^2-(C-A)(C-B)n^2}.$$

Segue-se d'aqui que os valores de p e q serão sempre da mesma ordem que as quantidades H e H', e portanto insensiveis, a não ser que se supponham muito pequenos os denominadores de h e h'. Mas, para que fosse satisfeita esta condição, seria necessario que na funcção perturbadora entrassem termos para os quaes o valor de f fosse muito pouco differente de $n\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}$; e o periodo das desegualdades de p e q correspondentes a este valor de f, não chegaria a ser de dois annos, conforme os dados que temos sobre os valores de A, B e C: resultado inteiramente contrario ás observações, as quaes mostram que durante este intervallo os polos terrestres não se deslocam á superficie da terra.

Assim as quantidades p e q, em quanto se attende unicamente á primeira potencia das forças perturbadoras, não estão sujeitas a desegualdade alguma que o decurso dos seculos possa tornar apreciavel. Para ver que o mesmo resultado se obtem quando se leva mais longe a approximação, designemos por $p+\delta p$ e $q+\delta q$ aquillo em que se tornam os valores de p e q, quando se attende, nas suas expressões, aos termos dependentes do quadrado das forças perturbadoras; substituindo $p+\delta p$ e $q+\delta q$ em logar de p e q nas equações (16); fazendo $r=n$ nos termos multiplicados por δp e δq, nos primeiros membros d'aquellas equações; e pondo nos termos dos segundos membros em logar de p, q, r, φ, ψ, θ, seus valores dados pelas approximações precedentes, os termos de primeira ordem reduzir-se-hão uns com outros, e aquellas equações tomarão a forma

$$\left.\begin{array}{l} Ad\delta p+(C-B)n\delta q dt=M\,dt, \\ Bd\delta q+(A-C)n\delta p dt=M'dt, \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

sendo M e M' funcções conhecidas, que podem desenvolver-se em series de senos e cosenos dos multiplos do angulo nt e dos medios movimentos do sol e da lua.

Ora, é claro que as equações (17) darão para δp e δq expressões analogas áquellas que achámos para p e q, e das quaes se tirarão as mesmas consequencias. Este resultado teria ainda logar para todas as approximações seguintes.

Os valores das duas quantidades p e q não adquirem portanto pela integração nenhum divisor que possa tornal-os sensiveis, e serão sempre da mesma ordem que os termos que lhes correspondem na expressão das forças perturbadoras, qualquer que seja o gráo de approximação até onde se chegue.

sendo M e M' funcções conhecidas, que podem desenvolver-se em séries de senos e cósenos dos multiplos do angulo nt e dos medios movimentos do sol e da lua.

Ora, é claro que as equações (17) darão para δp e δq expressões analogas áquellas que achámos para p e q, e das quaes se tirarão as mesmas consequencias. Este resultado terá ainda logar para todas as approximações seguintes.

Os valores das duas quantidades p e q não adquirem portanto pela integração nenhum divisor que possa tornal-os sensiveis, e serão sempre da mesma ordem que os termos que lhes correspondem na expressão das forças perturbadoras, qualquer que seja o grão de approximação até onde se chegue.

CONCLUSÃO

Por tres modos differentes chegámos no capitulo precedente a concluir que as quantidades de que dependeriam as oscillações do eixo instantaneo de rotacão da terra, se conservam sempre, apesar da acção do sol e da lua, da ordem das forças perturbadoras, em quanto ás desegualdades seculares; podendo unicamente ser affectadas de desegualdades periodicas de periodo muito curto. E como as observações astronomicas mais rigorosas mostram que estas ultimas desegualdades não têm valores sensiveis, conclue-se que aquelle eixo atravessa sempre a superficie da terra nos mesmos pontos fixos, visto como o estado inicial do movimento não lhe imprimiu oscillações, que não estejam ha muito completamente annulladas.

As observações astronomicas, que completam a demonstração da permanencia dos polos, fazem-se, de preferencia, com o circular meridiano, ou, na impossibilidade de empregar um instrumento fixo, com o circulo repetidor. Determinam-se assim as alturas do sol ou das estrellas, mas principalmente das circumpolares, porque, observando na mesma noite a maior e menor altura de um d'estes astros, isto é, as duas passagens no meridiano, a semisomma d'estas passagens, correctas da refracção, dará a altura procurada do polo.

Este methodo suppõe as observações meridianas; as distancias zenitaes observadas com o circulo repetidor não são tomadas no plano do meridiano, mas opera-se facilmente a reducção a este plano por meio das formulas conhecidas[1], que Delambre reduziu a taboas no *Connaissance des Temps* do anno XII.

Não nos demoramos mais neste assumpto, porque nenhum interesse offereceria a leitura de uma serie de observações proprias para determinar a latitude de um logar, todas concordes entre si.

Terminando, diremos que a permanencia dos polos terrestres, e portanto a das actuaes latitudes geographicas, se acha comprovada, analytica e experimentalmente, com todo o rigor de que são susceptiveis as demonstrações fundadas no desenvolvimento em series, das quaes se aproveitam unicamente os primeiros termos.

FIM.

[1] Puissant — *Trait. de Géod.*, Liv. 5.°, chap. IV — form. (1) e (2).

INDICE

PARTE SEGUNDA

ADVERTENCIA

Desde paginas 8 até 22, inclusivè, em todas as equações, cujos segundos membros são nullos, apparece, depois do signal =, um *o* em logar de 0. A similhança dos dois caracteres justifica o equivoco, e torna facil reconhecer o erro, que, por esta razão, não indico, em particular, para cada uma das paginas, em que se repete.

Alem d'esta, mais algumas incorrecções notei. Adiante vão apontadas as principaes.

CORRECÇÕES

Pag.	Lin.	Erro	Emenda
4	19	$P\cos\alpha$	$P\cos\alpha$,
6	14	$+H''$	$+H''$,
7	5	$P''\cos\beta''$,	$P''\cos\beta''$
14	7	$z=a''x''+b''y''+c''z''$	$z=a''x'+b''y'+c''z'$,
26	20	δ',δ',	δ',δ'',
54	10	*expersões*	*expressões*
77	22	$-Cr\cos,\theta$	$-Cr\cos\theta$,
»	24	$V=Ap\cos\varphi+\ldots$	$V=-Ap\cos\varphi+\ldots$
82	21	$=\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{dV}{d\varphi}+\cos\theta\frac{dV}{d\psi}\Big)$	$=\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{dV}{d\varphi}+\cos\theta\frac{dV}{d\psi}\right)$
93	24	$\frac{(C-A)(C-A)\cos\gamma}{nC}$ etc.	$\frac{(C-A)(C-B)\cos\gamma}{nC}$ etc.
94	3	$\left(\frac{dV}{dc}+\frac{dV}{dl}\right)\frac{dt}{dc}$,	$\left(\frac{dV}{dc}+\frac{dV}{dl}\right)\frac{dt}{C}$,
»	18	$dl=\frac{dV}{d\gamma}$ etc.	$dl=-\frac{dV}{d\gamma}$ etc.
102	1	*segundo*	*primeiro*
»	5	*primeiro*	*segundo*

1869

SOUTO - DISSERTAÇÃO INAUGURAL

MATHEMATICA