funcção semelhante dos coefficientes da transformada seja egual á funcção primitiva multiplicada por uma potencia do modulo de transformação.

Assim, sendo em o numero precedente

$$AC - B^2 = (ac - b^2)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2,$$

quando pela substituição linear

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y', \quad y = \alpha_2 x' + \beta_2 y'$$

a fórma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

se muda em

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

é

$$ac - b^2$$

o *invariante* de

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

Se a potencia do modulo é egual á unidade, o invariante diz-se *absoluto*.

Um *covariante* é uma funcção que comprehende não só os coefficientes d'uma fórma, mas ainda as variaveis, e tal que, se effectuarmos na fórma uma substituição linear, a nova funcção dos coefficientes e variaveis da transformada é egual á funcção primitiva multiplicada por uma potencia do modulo de transformação.

A theoria dos *invariantes* e *covariantes* tem uma importancia notavel pelas suas applicações geometricas.

Na geometria das curvas e das superficies as transformações das coordenadas operam-se por substituições lineares. Um *invariante* d'uma fórma ternaria ou quaternaria é uma funcção dos coefficientes, cuja reducção a zero exprime alguma propriedade da curva ou da superficie independente da escolha dos eixos, tal como a existencia d'um ponto duplo; um *covariante* representa uma outra curva ou uma outra superficie, cujos pontos têm com a curva ou com a superficie dada alguma relação independente da escolha dos eixos. D'ahi resulta a importancia geometrica da theoria dos invariantes e covariantes.

Demonstremos o theorema fundamental d'esta theoria.

80. *Os discriminantes são invariantes.*

Acabamos de vêr como *o discriminante* de uma fórma quadratica binaria é um *invariante d'essa forma.*

Mas esta proposição tem logar para qualquer numero de variaveis.

Vamos ainda demonstral-a para tres variaveis, mas, por sua natureza, o raciocinio é geral, e geral por tanto a proposição.

Consideremos a fórma quadratica ternaria

$$\varphi(x,\ y,\ z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy,$$

cujo discriminante (n.º 76) é o determinante

$$D_3^2 = \begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix}.$$

Façamos na fórma as substituições

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z',$$

$$y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z',$$

$$z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z';$$

resultará a transformada

$$\psi(x', y', z') = a(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z')^2 + b(\alpha_2 x' + \beta_2 z' + \gamma_2 z')^2 + c(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')^2$$

$$+ 2d(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z')(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')$$

$$+ 2e(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z')$$

$$+ 2f(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z')(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z').$$

Busquemos o seu discriminante.

Derivando em x', será

$$\frac{1}{2}\psi'_{x'} = a\alpha_1(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + b\alpha_2(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') + c\alpha_3(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')$$

$$+ d\alpha_3(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') + d\alpha_2(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')$$

$$+ e\alpha_3(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + e\alpha_1(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z')$$

$$+ f\alpha_2(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + f\alpha_1(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z'),$$

ou

$$\frac{1}{2}\psi'_{x'} = (a\alpha_1 + f\alpha_2 + e\alpha_3)(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z')$$

$$+ (f\alpha_1 + b\alpha_2 + d\alpha_3)(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z')$$

$$+ (e\alpha_1 + d\alpha_2 + c\alpha_3)(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z'),$$

e do mesmo modo se acha o valor de $\frac{1}{2}\psi'_{y'}$, $\frac{1}{2}\psi'_{z'}$.

Estas tres derivadas egualadas a zero formam o systema das tres equações

$$\mathrm{A}(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + \mathrm{B}(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') + \mathrm{C}(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z') = 0,$$

$$\mathrm{A}_1(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + \mathrm{B}_1(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') + \mathrm{C}_1(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z') = 0,$$

$$\mathrm{A}_2(\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z') + \mathrm{B}_2(\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z') + \mathrm{C}_2(\alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z') = 0,$$

nas quaes é

$$\mathrm{A} = a\alpha_1 + f\alpha_2 + e\alpha_3,\quad \mathrm{B} = f\alpha_1 + b\alpha_2 + d\alpha_3,\quad \mathrm{C} = e\alpha_1 + d\alpha_2 + c\alpha_3$$

$$\mathrm{A}_1 = a\beta_1 + f\beta_2 + e\beta_3,\quad \mathrm{B}_1 = f\beta_1 + b\beta_2 + d\beta_3,\quad \mathrm{C}_1 = e\beta_1 + d\beta_2 + c\beta_3$$

$$\mathrm{A}_2 = a\gamma_1 + f\gamma_2 + e\gamma_3,\quad \mathrm{B}_2 = f\gamma_1 + b\gamma_2 + d\gamma_3,\quad \mathrm{C}_2 = e\gamma_1 + d\gamma_2 + c\gamma_3$$

Ordenando aquellas equações em ordem a x', y' e z', ellas se tornarão

$$(A\,\alpha_1 + B\,\alpha_2 + C\,\alpha_3)\,x' + (A\,\beta_1 + B\,\beta_2 + C\,\beta_3)\,y' + (A\,\gamma_1 + B\,\gamma_2 + C\,\gamma_3)\,z' = 0,$$

$$(A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3)\,x' + (A_1\beta_1 + B_1\beta_2 + C_1\beta_3)\,y' + (A_1\gamma_1 + B_1\gamma_2 + C_1\gamma_3)\,z' = 0,$$

$$(A_2\alpha_1 + B_2\alpha_2 + C_2\alpha_3)\,x' + (A_2\beta_1 + B_2\beta_2 + C_2\beta_3)\,y' + (A_2\gamma_1 + B_2\gamma_3 + C_2\gamma_3)\,z' = 0,$$

cujo determinante será o discriminante da transformada. Designando-o por D'_3, será (n.º 44)

$$\mathbf{D}'_3 = \begin{vmatrix} A\,\alpha_1 + B\,\alpha_2 + C\,\alpha_3 & A\,\beta_1 + B\,\beta_2 + C\,\beta_3 & A\,\gamma_1 + B\,\gamma_2 + C\,\gamma_3 \\ A_1\alpha_1 + B_1\alpha_2 + C_1\alpha_3 & A_1\beta_1 + B_1\beta_2 + C_1\beta_3 & A_1\gamma_1 + B_1\gamma_2 + C_1\gamma_3 \\ A_2\alpha_1 + B_2\alpha_2 + C_2\alpha_3 & A_2\beta_1 + B_2\beta_2 + C_2\beta_3 & A_2\gamma_1 + B_2\gamma_2 + C_2\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

e, substituindo por A, B, C ... os seus valores, resultará

$$\mathbf{D}'^{3} = \begin{vmatrix} a\alpha_1 + f\alpha_2 + e\alpha_3 & f\alpha_1 + b\alpha_2 + d\alpha_3 & e\alpha_1 + d\alpha_2 + c\alpha_3 \\ a\beta_1 + f\beta_2 + e\beta_3 & f\beta_1 + b\beta_2 + d\beta_3 & e\beta_1 + d\beta_2 + c\beta_3 \\ a\gamma_1 + f\gamma_2 + e\gamma_3 & f\gamma_1 + b\gamma_2 + d\gamma_3 & e\gamma_1 + d\gamma_2 + c\gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha^3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2,$$

ou

$$D'_3 = D_3 \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}^2 .$$

D'esta expressão conclue-se que, ainda no caso de uma fórma quadratica ternaria, o discriminante da transformada é egual ao discriminante da primitiva multiplicada pelo quadrado do modulo de transformação; e por conseguinte é este ultimo discriminante um invariante da fórma proposta.

Este systema de calculo é, como se vê, independente do numero de variaveis; e, qualquer que fosse o numero d'estas, pelo mesmo teor se provaria a proposição.

É pois geral aquella proposição, fundamento da theoria fecunda dos invariantes e covariantes.

FIM.

1880

C. PESSOA - DISSERTAÇÃO DE CONCURSO

PHILOSOPHIA